

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_220837

UNIVERSAL
LIBRARY

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES
SUR LA THÉORIE DES
FONCTIONS ANALYTIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
39271 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

Édouard A.-FOUËT,

PROFESSEUR A L'INSTITUT CATHOLIQUE DE PARIS.

Deuxième édition, entièrement refondue.

TOME I.

LES FONCTIONS EN GÉNÉRAL.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1907

Tous droits de traduction et de reproduction réservés.

AVERTISSEMENT

DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

La première édition de ces leçons a été profondément remaniée. Tout en la complétant par l'addition de nombreux théorèmes, en la mettant au courant des recherches récentes, on s'est efforcé de préciser la rédaction, de corriger certains détails, d'apporter à l'exposé des notions fondamentales toute la rigueur qu'exigent aujourd'hui les géomètres.

Bien des parties de l'ouvrage se sont trouvées ainsi plus que doublées ; aussi il a semblé bon d'en détacher l'introduction pour en faire un tome à part. Après des considérations sur le nombre et la fonction, ce volume renferme les principes essentiels relatifs aux *ensembles*, des théorèmes généraux sur les principaux types de fonctions (fonctions discontinues, intégrables, à variation bornée, etc.), les classifications qui en sont la conséquence, enfin les définitions concernant les fonctions analytiques. C'est donc comme *une introduction à la théorie générale des fonctions*. A cette esquisse d'ensemble, parfois un peu large, succédera dans le reste de l'ouvrage une étude très précise des fonctions analytiques : les théories y seront exposées d'une façon plus détaillée et élémentaire.

La lecture de ces leçons n'exige guère que des connaissances bien courantes. Néanmoins, si toute étude mathématique sérieuse développe, mais aussi présuppose, des habitudes de réflexion et une certaine force d'attention, il en est de même de celle-ci. Dès lors cet Ouvrage pourra servir à ceux qui commencent, comme à ceux qui veulent revenir sur leurs pas pour reviser leurs connaissances acquises. Il sera commode de s'y reporter pour avoir le sens précis de locutions que l'on rencontrera de plus en plus dans les innombrables Mémoires dont la littérature des fonctions s'enrichit chaque jour, et qui semblent préparer aux Mathématiques un si brillant essor.

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Dans le domaine mathématique, les diverses disciplines tendent sans cesse à se compénétrer. Plus une théorie se développe, et plus nombreux sont les points de contact, les relations, les analogies que l'on découvre entre elle et des branches qui, jusque-là, lui semblaient étrangères. Ainsi, les progrès de la Science mathématique, loin de lui faire perdre son caractère d'unité, resserrent les liens entre ses diverses parties. C'est là un fait capital, qui s'est affirmé surtout au cours du dernier siècle, et qui, sans doute, aidera désormais à réaliser de nouvelles découvertes.

Mais, en même temps, la Science dont nous parlons gagne chaque jour en étendue comme en profondeur. Que le monde de la nature contraigne le géomètre à se poser certains problèmes, ou qu'ils naissent de ses libres conceptions, ils surgissent de tous côtés : chaque question résolue en provoque cent autres, qui, à leur tour, sont l'occasion de nouvelles recherches. La floraison est telle que l'on se demande si une même intelligence pourra longtemps encore embrasser sérieusement, même sans les approfondir, toutes les parties

d'un domaine si vaste, bien que chaque progrès effectif soit accompagné d'ordinaire de la découverte de procédés plus rigoureux et de méthodes plus simples.

Dès lors, si l'étudiant comprend que l'unité de la Science mathématique lui défend de s'enfermer trop tôt dans des recherches spéciales, auxquelles fatalement, un jour, il devra se livrer, s'il lui faut acquérir d'abord des vues d'ensemble, il sent aussi qu'il est imprudent de s'attarder en chemin : il y a des étapes qu'il doit rapidement enlever.

A ce titre, on peut regarder comme de quelque utilité les Ouvrages didactiques qui préparent la lecture de nos grands traités d'Analyse et des Mémoires originaux, en groupant les matières éparses dans de nombreux Volumes, en les résumant, en les simplifiant, en les isolant de questions plus complexes.

Celui-ci est consacré à l'étude des fonctions analytiques. Cette théorie est sans conteste l'une des découvertes les plus brillantes du XIX^e siècle. En germe dans les écrits de Gauss, créée par Cauchy, Weierstrass, Riemann, elle est devenue entre leurs mains, et celles de leurs continuateurs, un merveilleux instrument : elle a ouvert à l'Analyse des voies toutes nouvelles, et elle semble lui promettre encore, dans un prochain avenir, de magnifiques conquêtes.

Souvent, elle a permis de résoudre des problèmes difficiles par des méthodes très simples ; mais parfois l'on s'y heurte à des questions délicates. Aussi, pour laisser à cet Ouvrage son caractère élémentaire, et néanmoins ne pas tromper le lecteur sur la complexité des questions qu'il touche, il a paru bon de réserver pour le texte les propositions les plus simples, et de renvoyer les autres à des *notes*. Dans ces

notes, nombreuses et denses, sont signalées les difficultés que les problèmes soulèvent ou les généralisations intéressantes; on y trouvera parfois une orientation vers leur solution, toujours des renseignements bibliographiques permettant de recourir aux sources : ainsi elles serviront de guide et de répertoire élémentaire pour les recherches.

Il a également paru bon, pour rendre aux débutants la lecture plus aisée, de rédiger les premiers Chapitres de telle façon qu'il soit possible, sans grand inconvénient, d'intervertir l'ordre dans lequel ils sont placés. Plusieurs paragraphes s'y présentent même comme de brèves monographies, qui pourraient être détachées du texte.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS EN GÉNÉRAL.

§ I. — *Le nombre et la fonction.*

Números.		Pages.
1.	Le nombre : nombres rationnels et irrationnels, algébriques et transcendants, complexes.....	1
2.	La fonction : évolution de cette notion; Euler, Cauchy, Riemann.	4
3.	Fonctions continues sans dérivée : courbes de Weierstrass, de Peano.....	8
4.	L'intuition sensible et la rigueur mathématique. Avantages du langage géométrique. Courbes continues, simples ou de Jordan, régulières, analytiques. Connexion.....	13

§ II. — *La notion de limite.*

5.	La limite; notions diverses. La plus grande limite. Les deux critères de convergence.....	19
6.	Passages à la limite successifs. Convergence uniforme et quasi-uniforme.....	27

§ III. — *Aperçu de la théorie des ensembles.*

7.	Premier point de vue : le nombre de leurs dimensions.....	31
8.	Second point de vue; le nombre cardinal d'un ensemble. Ensembles dénombrables (nombres algébriques), ayant la puissance du continu (nombres transcendants), ayant une puissance supérieure. Théorèmes.....	32
8 bis.	Ensembles ordonnés, bien ordonnés. Nombres ordinaux transfinis.	37
9.	Ensembles bornés; existence de la limite supérieure.....	41
10.	Troisième point de vue : introduction du point limite. Loi de Bolzano-Weierstrass.....	42

Numéros.		Pages.
11.	Ensemble dérivé, réductible. Ensemble isolé, fermé, dense en lui-même, parfait; relations avec la puissance. Ensemble dense partout ou dense, non dense. Ensemble d'un seul tenant.....	44
12.	Étendue extérieure et intérieure d'un ensemble; ensembles mesurables J, ensembles non étendus. Mesure d'un ensemble au sens de M. Borel.....	50
13.	Domaines continus; théorème de M. Jordan.....	54

§ IV. — *Quelques classifications des fonctions.*

14.	Fonctions bornées. Oscillation dans un intervalle, à droite d'un point, en un point : théorème de M. Baire. Fonctions discontinues; leurs valeurs à droite, à gauche. Fonctions semi-continues. Fonctions ayant des discontinuités de première espèce, régulièrement discontinues. Fonctions ponctuellement, totalement discontinues. Principe de condensation des singularités. Les quatre nombres dérivés; leur usage.....	55
15.	Divers types de fonctions discontinues. Fonctions mesurables, intégrables (série de Riemann), ponctuellement discontinues, monotones, à variation bornée (leurs propriétés), satisfaisant aux conditions de Dirichlet, etc.....	62
16.	Fonctions continues : théorème de Weierstrass. Divers types de fonctions continues : fonctions lipschitziennes, ayant une dérivée première, des dérivées de tous les ordres, analytiques.....	70
17.	Classification des fonctions discontinues d'après leurs représentations en séries à termes continus : théorèmes de M. Baire.....	75
18.	Autres classifications.....	77

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

§ I. — *Fonctions continues.*

19.	Continuité: continuité uniforme.....	79
20.	Propriétés des fonctions continues d'une variable.....	84
21.	Fonctions continues à variation bornée.....	86
22, 23.	Fonctions continues de plusieurs variables.....	87

§ II. — *Fonctions analytiques en un point.*

24, 25.	Leur définition. Équations de Cauchy-Riemann.....	90
26.	Corollaires; fonctions harmoniques.....	94
27.	Étude directe des fonctions de la forme $f(z)$	97
28.	Interprétation géométrique; représentation conforme.....	97

§ III. — *Fonctions analytiques dans un domaine.*

Numéros.		Pages.
29, 30.	Fonctions uniformes et multiformes. Fonctions analytiques; Cauchy et Weierstrass.....	102
31.	Ordre d'un zéro; zéros isolés. Fonctions entières.....	104
32, 33.	Singularités isolées des fonctions analytiques uniformes; pôles et points essentiels. Fonctions méromorphes.....	104
34.	Le point à l'infini.....	107
35.	Substitutions; groupes. Fonctions périodiques, automorphes.....	108
36.	Fonctions analytiques de plusieurs variables.....	111

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS EN GÉNÉRAL.

§ I. — LE NOMBRE ET LA FONCTION.

1. L'idée de nombre et la notion de fonction sont à la base de l'Analyse.

On a d'abord considéré le nombre *entier* positif ⁽¹⁾. Aussi les premiers Chapitres de la Science mathématique sont-ils consacrés à l'étude des propriétés du nombre entier, par suite à l'Arithmétique et à l'Algèbre ⁽²⁾. A leur domaine, on rattache les fonctions entières de variables entières et positives, à coefficients entiers et

(1) « Le seul objet propre de la pensée mathématique, c'est le nombre *entier* positif. C'est le monde extérieur qui nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu'il nous a forcés à inventer. Sans lui, il n'y aurait pas d'analyse infinitésimale; toute la science mathématique se réduirait à l'Arithmétique ou à la Théorie des substitutions.... Sans doute, on vous dira qu'en dehors du nombre entier, il n'y a pas de rigueur et, par conséquent, pas de vérité mathématique.... Ne soyons pas si puristes et soyons reconnaissants au continu qui, si tout sort du nombre entier, était seul capable d'en faire tant sortir. » POINCARÉ, *Sur les rapports de l'Analyse pure et de la Physique mathématique* (A. M., t. XXI, p. 238).

(2) Cf. MOLK, A. M., t. VI, p. 2. En Algèbre, le procédé le plus important est le calcul littéral : son emploi même est si général qu'on le prend souvent comme synonyme d'Algèbre.

positifs, car l'étude de pareilles fonctions revient à celle de systèmes de nombres entiers : on y ramène les nombres *rationnels*, positifs ou négatifs, et l'on établit qu'une égalité contenant des nombres rationnels peut être transformée en égalité équivalente, ne renfermant que des entiers positifs.

Une première extension de l'idée de nombre a conduit au nombre rationnel. Entre deux nombres rationnels, si voisins soient-ils, on peut insérer une infinité de nombre rationnels : dès lors, ces nombres permettent de résoudre les problèmes de mesure avec telle approximation que l'on veut. Mais ils ne permettent pas de les résoudre exactement. Pour obtenir un ensemble *continu* de nombres (n° 13), on fait une nouvelle extension et l'on introduit les nombres *irrationnels*, que l'on divise en algébriques et transcendants (¹). Chacun d'eux est défini par une *loi de séparation* résultant des propriétés dont il jouit, *une coupure* faite dans l'ensemble des nombres rationnels (²) : elle permet de lui assigner

(¹) Par nombre algébrique, on entend les racines des équations algébriques à coefficients rationnels (les racines des équations à coefficients algébriques sont aussi des nombres algébriques). Le *degré* du nombre algébrique est le degré de l'équation de plus faible degré à laquelle ce nombre satisfait. Aux nombres algébriques sont opposés les nombres transcendants : par exemple, les deux nombres fondamentaux en Mathématiques, e et π , sont transcendants, comme l'ont montré Hermite (1873) et M. Lindemann (1882) ; par contre, on ignore si la constante d'Euler C (n° 116) est un nombre algébrique ou transcendant. L'existence des nombres transcendants sera établie plus loin (n° 8).

(²) On peut définir, avec Dedekind, *chaque* nombre *irrationnel* par une loi de séparation de *tous* les nombres *rationnels* en deux classes A et B, telles que : 1° chaque nombre rationnel appartienne à l'une des deux classes et à une seule ; 2° chaque nombre de la classe A soit inférieur à un nombre quelconque de la classe B ; 3° il n'y ait pas dans la classe A de nombre plus grand que tous les autres, et dans la classe B de nombre plus petit que tous les autres. (Si cette troisième condition n'était pas réalisée, on aurait un nombre rationnel.) L'ensemble des nombres irrationnels correspond à *tous les partages possibles* des nombres rationnels en deux classes jouissant des trois propriétés ci-dessus.

Cf. DEDKIND, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872 (3^e édition, 1905). — TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions*, 2^e édit., t. I. — STOLZ, *Allgemeine Arithmetik*, etc.

Il ne suit pas de là que pour définir un nombre il soit nécessaire de faire intervenir *tous les nombres* rationnels ; car, de la définition précédente, on déduit aisément qu'un nombre (rationnel ou irrationnel) est encore défini par deux ensembles A et B de nombres rationnels particuliers jouissant des propriétés 2° et 3° ci-dessus, et tels qu'il y ait dans l'ensemble A et l'ensemble B des nombres dont la différence soit inférieure à tout nombre rationnel ϵ arbitrairement choisi.

une place dans l'échelle des nombres rationnels, et ensuite de le comparer aux autres nombres irrationnels; telles sont bien les conditions essentielles qui permettent de le considérer comme un nombre. De plus, ce sont des nombres d'un usage commode, car les règles fondamentales de calcul démontrées pour les entiers s'appliquent à ces nouveaux nombres ⁽¹⁾. Le but principal de la théorie des fractions continues arithmétiques est d'obtenir systématiquement les nombres rationnels les plus simples qui approchent le plus près d'un nombre irrationnel ⁽²⁾.

L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels constitue l'ensemble des nombres *réels* ⁽³⁾. Un nombre *complexe* est

En particulier à une représentation décimale donnée, c'est-à-dire à un symbole de la forme $a, bcd \dots$, tel qu'on ait le moyen d'en connaître le $n^{\text{ième}}$ chiffre quel que soit n , correspond une séparation de tous les nombres rationnels en classes, par suite un nombre. Inversement, on peut obtenir la représentation décimale de tout nombre défini par une coupure; elle est périodique ou non suivant la nature du nombre.

La définition de limite nous permettra plus loin d'en déduire deux autres procédés pratiques de définition du nombre (n° 5, note); c'est à ces derniers que l'on a le plus souvent recours dans les démonstrations pour prouver l'existence d'un nombre. La notion de *limite supérieure* peut rendre les mêmes services, et il est commode, dans l'enseignement, d'introduire cette dernière notion *immédiatement après la définition* de la coupure.

⁽¹⁾ Dès l'Arithmétique, on a donc recours au principe dit de la *permanence des formes opératoires* (HANKEL, *Vorlesungen über complexe Zahlen*), que nous utiliserons fréquemment dans la suite. C'est lui qu'on a appliqué en inventant les racines imaginaires. Quand il faudra attribuer une somme aux séries divergentes, on cherchera des expressions pouvant être traitées comme des séries convergentes au point de vue de la multiplication de deux séries, de la continuité, de l'intégration et de la dérivation terme par terme, etc. Voir n° 64, 86, etc.

⁽²⁾ On veut dire par là que, si l'on prend comme valeurs approchées d'une incommensurable une fraction à termes entiers $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) et la $n^{\text{ième}}$ réduite $\frac{P_n}{Q_n}$, q surpasse Q_n si la fraction est plus approchée que la réduite.

⁽³⁾ Par le mode de définition ci-dessus, les nombres irrationnels se rattachent au nombre entier: il en est de même de toutes les notions où intervient l'idée de limite (dérivées, intégrales définies, intégrales d'équations différentielles, etc.). C'est le procédé de Weierstrass. On peut même se placer à un point de vue plus strictement arithmétique, comme l'a fait Kronecker en Algèbre: c'est ce qu'en Analyse a tenté M. Drach (*A. E. N.*, 1898).

Au lieu de chercher ainsi un fondement logique, ce qui conduit à prendre comme point de départ le nombre entier, on peut inversement se préoccuper avant tout des valeurs numériques des grandeurs; on essaie alors d'en approcher par des nombres rationnels, qui à leur tour introduisent les entiers (cf. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*).

formé par deux nombres réels associés. Le symbole i les maintient séparés l'un de l'autre, tandis que la connexion des deux nombres est marquée par le signe $+$: l'emploi de ce signe est justifié par les conventions sur lesquelles repose leur calcul. On peut encore rattacher leur définition à celle des congruences de module $x^2 + 1$ (1).

A l'étude du nombre se joindra celle de la fonction.

2. La notion de fonction est aujourd'hui d'une extrême généra-

c

(1) Les nombres imaginaires ou *impossibles* furent introduits au xvii^e siècle pour permettre dans tous les cas la résolution des équations d'abord du second degré, puis du troisième et du quatrième : ils permirent à Euler de découvrir un lien entre les fonctions trigonométriques et l'exponentielle. Les doutes relatifs à la légitimité de leur emploi cessèrent après les résultats obtenus par Gauss (en Algèbre et dans la Théorie des nombres), Abel et Jacobi (dans celle des fonctions elliptiques) [cf. GAUSS, *Œuvres*, t. III, p. 3. C'est lui qui substitua au mot *imaginaires* le terme plus heureux *grandeurs complexes* (*Œuvres*, t. II, p. 172)].

Cauchy les rattacha d'abord au *calcul symbolique*. « L'emploi des équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats compliqués en apparence... » (Résumés de Turin ; *Œuvres*, 2^e série, t. X, p. 116). A ce point de vue on peut relier celui d'Hamilton qui regardait les imaginaires comme des grandeurs associées soumises à certaines règles de calcul. Cf. aussi MÉRAY, *Leçons nouvelles sur l'Analyse*, t. I, Chap. III. « Nous considérerons une imaginaire comme constituée par la simple association, dans un ordre déterminé, de deux quantités quelconques... »

Plus tard, Cauchy ramena leur théorie à celle des congruences (*Sur la théorie des équivalences algébriques substituée à celle des imaginaires. Exercices d'Analyse et de Physique*, t. IV, 1847, p. 87). Deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont dits *congrus* ou *équivalents selon le module* $g(x)$ lorsque leur différence est divisible par $g(x)$. D'après la notation donnée en Arithmétique par Gauss, on écrit

$$f(x) \equiv \varphi(x) \pmod{g(x)}.$$

Des congruences algébriques relatives au même module peuvent, comme les congruences arithmétiques, être combinées par voie d'addition et de multiplication. Prenons pour module $x^2 + 1$, et remplaçons la lettre x par i , qui sera ainsi une quantité réelle indéterminée. Deux polynômes en i seront regardés comme égaux quand les restes de leur division par $i^2 + 1$ seront les mêmes. En particulier un polynôme en i sera égal à son reste ; le polynôme i^2 sera égal à -1 , qui est le reste de la division de i^2 par $i^2 + 1$. Un polynôme sera *congru à zéro* (une imaginaire sera nulle), lorsque le nombre $\alpha + i\beta$ obtenu en y remplaçant i^2 par -1 sera nul pour toute valeur de i . De là la justification de toutes les règles de calcul.

De là aussi l'emploi d'imaginaires autres que $\sqrt{-1}$, comme on le fait dans des

lité ; mais c'est par une série d'évolutions que l'on est arrivé à cette extension ⁽¹⁾.

On est parti d'un petit nombre d'expressions arithmétiques simples, et de combinaisons simples de ces expressions. « Les premiers analystes, dit Lagrange ⁽²⁾, n'avaient employé le mot de *fonction* que pour désigner les puissances d'une même quantité. On en a ensuite étendu la signification à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité ; il est aujourd'hui adopté pour exprimer que la valeur d'une grandeur *dépend* suivant une loi déterminée d'une ou plusieurs autres. » Et ailleurs, précisant ces lois, il les ramène principalement à la dérivation, à l'intégration et au développement en série.

Sans doute Euler regardait déjà comme une fonction *ce qui a une expression analytique déterminée* ⁽³⁾ ou même une expression définie par une figure. Mais dans le premier cas il restreignait cette définition en admettant qu'il suffit de se donner une expression analytique pour qu'une fonction soit représentée par elle dans tout son domaine d'existence, et en se bornant à la con-

recherches spéciales d'Arithmétique : cela revient à substituer à $x^2 + 1$ un autre module (cf. MOLE, *A. M.*, t. VI, p. 8).

La notion de nombre complexe a encore été éclaircie par les recherches de Weierstrass sur les nombres complexes à n unités principales (*Œuvres*, t. II, 1883, p. 113) et surtout par celles de M. Poincaré qui a ramené leur théorie à une question concernant la théorie des groupes (*C. R.*, 1884, 2^e semestre, p. 740. — LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über endliche kontinuierliche Gruppen*, p. 621).

Cf. aussi *Encyclopädie der mathem. Wissensch.*, t. I, p. 147.

⁽¹⁾ Leibniz et les Bernoulli semblent, les premiers, avoir donné à ce mot une acception large (cf. LIOUVILLE, *J. M.*, 1837, p. 71).

⁽²⁾ *Leçons sur le calcul des fonctions* (*Œuvres*, t. IX, p. 9). — Sur les travaux des géomètres du XVIII^e siècle, cf. BERTRAND, *Calcul différentiel et intégral*, t. I. Préface, p. 28 et suiv. — LACROIX, *Calcul différentiel et intégral*, 2^e édition, t. I. Préface (1810). (On peut considérer cet Ouvrage comme résumant bien l'analyse ancienne, celle qui a précédé les travaux de Cauchy et d'Abel.)

⁽³⁾ *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili*. Il donne comme exemples :

$$a + 3z, \quad az - 4zz, \quad az + b\sqrt{aa - zz}, \quad c^z, \text{ etc.}$$

(*Introductio in Analysim*, édition de 1797, p. 4). Lacroix définit la fonction « toute quantité dont la valeur dépend d'une ou plusieurs autres, qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première... Ainsi... la racine d'une équation du cinquième degré... est fonction des coefficients de l'équation » (LACROIX, *op. cit.*, t. I, p. 1).

sidération de ces fonctions, dites *functiones continuæ* (1). Dans le second cas, Euler distinguait entre les figures définies par des lois exprimables au moyen de relations géométriques, et les autres figures, par exemple les lignes et les surfaces naturelles : il excluait du domaine des vraies fonctions celles qui auraient correspondu à des courbes arbitraires, telles que celles dessinées par une corde vibrante ébranlée d'une façon quelconque.

C'est qu'à cette époque les fonctions ne prenaient jamais naissance, comme parfois aujourd'hui, à l'occasion de considérations de logique pure ou d'esthétique : on les introduisait uniquement pour répondre à des problèmes pratiques tirés de la Géométrie, de la Mécanique ou de la Physique. Leur mise en équation comme leur solution reposait sur des hypothèses regardées comme nécessaires, alors qu'elles étaient surtout commodes et approximativement exactes. La conséquence en était le sujet des fonctions ne jouissant pas des propriétés correspondantes, comme de créations purement artificielles ou dont on n'avait même pas l'idée.

Néanmoins, ce fut à l'occasion d'une question de Physique mathématique, lors de la fameuse discussion relative au problème des cordes vibrantes (n° 83), que l'idée de fonction s'élargit. On vit qu'une même série trigonométrique pouvait être égale à une première fonction dans un intervalle, et à une seconde fonction dans un autre intervalle : une expression analytique unique représentait deux fonctions différentes. Il fallait donc laisser de côté le criterium donné par Euler. Sa définition était *trop étroite*, puisqu'elle conduisait à exclure du domaine des fonctions celles qui n'ont pas une expression analytique unique (2). Elle était *trop*

(1) C'est Cauchy qui a donné au mot *fonction continue* le sens aujourd'hui classique. Le fait de la *solidarité* entre les diverses parties de la fonction, analogue à celle que l'on trouve dans les courbes algébriques, de l'*uniformité* entre les propriétés dont elle jouit dans divers intervalles, qu'Euler caractérisait par le mot de *functio continua* et que nous appelons aujourd'hui *continuité eulérienne*, appartient en réalité aux *fonctions analytiques* de variable complexe : nous verrons que c'est une conséquence de leur définition.

(2) Les deux expressions analytiques *différentes* :

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x^2 \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4x^4} + \dots \right)$$

représentent la fonction *unique* $\sqrt{x^2 + 1}$ suivant que l'on a $|x| < 1$, $|x| > 1$.

large, car à une expression analytique donnée peut correspondre un ensemble de valeurs telles qu'il est peu convenable de la considérer comme définissant une fonction unique (1).

Fourier et Dirichlet, surtout Cauchy et Riemann précisèrent les définitions nouvelles. Pour Cauchy, y est fonction de x lorsque à chacun des états de grandeur de x correspond une valeur déterminée de y . Si Cauchy paraît ensuite restreindre cette notion en supposant que cette correspondance est définie analytiquement (2), Riemann fait nettement abstraction de cette hypothèse : il insiste même sur ce qu'une théorie des fonctions en doit donner la figuration indépendamment d'une méthode permettant de les déterminer par des opérations exécutées sur les grandeurs (3).

Aujourd'hui, il y a fonction dès que l'on imagine entre deux variables (ou bien entre une variable et un système de valeurs d'autres variables) une *correspondance telle que, l'une étant déterminée, l'autre ait sa valeur fixée*. Peu importe le procédé

(1) L'expression analytique *unique*

$$\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots$$

représente les deux fonctions *différentes* $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$ suivant qu'il s'agit des intervalles $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (voir n° 83).

En parlant du *prolongement analytique*, nous précisons le sens de ce mot *une même fonction*, lorsqu'il s'agit de fonctions analytiques (n° 187).

(2) A dire vrai, c'est seulement dans son langage, ce n'est jamais dans ses raisonnements que Cauchy suppose qu'à une fonction correspond une expression analytique.

(3) Dissertation inaugurale. *Œuvres* (trad. p. 47).

La considération exclusive des fonctions représentables analytiquement ne restreint pas *pratiquement* le champ des applications, parce que ces fonctions sont jusqu'ici les seules employées. Néanmoins, il existe des fonctions qui échappent à toute représentation analytique (n° 17).

Une fonction est représentable analytiquement lorsqu'on peut la construire au moyen d'opérations faites d'après une loi donnée, par exemple en effectuant une infinité dénombrable de fois au plus les opérations *addition, multiplication, passage à la limite*.

Dans quel cas une expression analytique déterminée fournit-elle effectivement un procédé de calcul de la fonction? La réponse à cette question dépend de ce que l'on entend par *effectuer réellement une opération*. On peut dire qu'un calcul est illusoire quand il exige deux passages à la limite successifs, sauf si le second est relatif à une suite uniformément convergente.

par lequel on a établi cette correspondance, et les conséquences analytiques qui en résultent; peu importe même la possibilité de l'établir (1).

Dès lors, si l'on considère une collection finie ou infinie de grandeurs (pour abrégér, on désigne cette collection par le mot d'*ensemble*) et qu'à chaque système de valeurs des éléments de l'ensemble on fasse correspondre un nombre, l'ensemble de ces nombres constitue une fonction définie sur l'ensemble considéré (2).

En fait, c'est le plus souvent par une notation analytique que l'on définit cette correspondance, sauf en des points exceptionnels. Ainsi les symboles $\frac{x^2}{x}$, $\sin \frac{1}{x}$, $e^{-\frac{1}{x}}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ représentent des fonctions ayant des valeurs déterminées pour $x \geq 0$; à l'origine, on peut convenir qu'elles sont égales à tel nombre que l'on veut (3).

3. Les définitions dans la théorie des fonctions étant ainsi rattachées au domaine purement spéculatif, nous ne sommes plus surpris d'entendre parler de *fonctions continues non dérivables*, puisqu'il n'y a pas de lien nécessaire entre l'idée de continuité et

(1) M. Tannery a bien mis en évidence la distinction à faire entre les correspondances qui sont *déterminées* et celles qui de plus peuvent être décrites, ou encore la différence entre une loi que nous pouvons caractériser par un nombre fini de mots et une loi qui existe (cf. *Revue générale des Sciences*, 1897, p. 132 et *infra* n° 9).

(2) 1° L'ensemble sur lequel la fonction est définie peut être quelconque; il peut comprendre les valeurs rationnelles, réelles, etc., un intervalle. Ainsi, dans la théorie des nombres, on considère souvent des fonctions définies seulement dans l'ensemble des nombres naturels: telle est la fonction bien connue $\varphi(n)$ qui représente le nombre des nombres premiers non supérieurs à n .

2° La correspondance peut aussi être quelconque. Ainsi une expression égale à $\frac{1}{x}$ pour x entier, et à zéro pour x fractionnaire ou irrationnel définit une fonction. Il en est de même d'une expression égale à $+x^2$ ou $-x^2$ suivant que x est rationnel ou irrationnel.

Citons encore la fonction de Dirichlet (*J. de Crelle*, t. 4, p. 169) définie par l'expression $(c-d) \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos n! \pi x)^m] + d$, et dès lors égale à c ou à d suivant que x est rationnel ou irrationnel.

(3) Si l'on donne à la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ la valeur zéro à l'origine, on peut la représenter, x étant quelconque, par l'expression analytique unique $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{nx^2+1}}$.

celle de dérivée. Si l'on peut regarder *pratiquement* les fonctions continues comme ayant une dérivée, parce que les fonctions considérées habituellement en ont une, *logiquement* il faut séparer ces deux notions.

Les fondateurs du Calcul intégral avaient bien reconnu qu'une fonction continue peut ne pas être dérivable en des points *exceptionnels*. Par exemple, la fonction représentée par $x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \geq 0$, et par zéro pour $x = 0$, est continue à l'origine et n'y a pas de dérivée. Mais c'est le fameux *Mémoire* de Riemann sur les séries trigonométriques qui inspira les premiers doutes sur l'existence de leur dérivée en général ⁽¹⁾.

A cette occasion, Riemann étendit la notion d'intégrale définie et l'appliqua à des fonctions discontinues dans tout intervalle. Il en résultait indirectement (Riemann, sans rien publier, fit connaître cette conclusion) que les fonctions continues n'ont pas forcément de dérivée, *au moins en des points formant un ensemble dense partout* ⁽²⁾. Le premier, Weierstrass donna un exemple de fonction continue d'argument réel n'ayant de dérivée déterminée pour aucune valeur de cet argument ⁽³⁾ et par suite de courbe

⁽¹⁾ *Œuvres*, p. 225 (trad. LAUGEL, p. 239).

⁽²⁾ Le premier exemple connu de pareilles fonctions est l'intégrale $F(x)$ de la série de Riemann $f(x)$ que nous formerons plus loin (n° 15) : c'est une fonction continue, sans dérivée en tous les points $\frac{2k+1}{2n}$, qui forment bien un ensemble dense partout (on en conclut aussi que les notions d'intégrale et de fonction primitive sont différentes, n° 159) ; cf. DARBOUX, *A. E. N.*, 1875, p. 93 ; PICARD, *Analyse*, deuxième édition, t. I, p. 218. Un exemple élémentaire de fonction continue sans dérivée en une infinité de points formant un ensemble dense partout a été donné par M. CAHEN (*Enseignement mathématique*, 1906, p. 361).

⁽³⁾ Académie de Berlin, 18 juillet 1872 (WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 71). Voir aussi WIENER, *J. de Crelle*, t. 90, p. 221. — DU BOIS REYMOND, *J. de Crelle*, t. 79, p. 29 et *Théorie générale des fonctions* (traduction Milhaud). Du Bois-Reymond appelle fonctions *orthoïdes* celles qui ont une dérivée. « Ce n'est pas l'anorthoïdie en des points *isolés* qui est un caractère distinctif de la Mathématique moderne, mais l'anorthoïdie *permanente* de certaines fonctions... Si, aux valeurs d'argument distinctes, on fait correspondre d'une manière convenable des valeurs de fonctions distinctes, il se forme pour la fonction, dans le plus petit intervalle qu'on puisse imaginer, des différences de valeurs qui ne correspondent plus à l'image d'une courbe visible. La première idée d'une pareille correspondance est plutôt due à Lejeune-Dirichlet : il a incidemment recours à une fonction qui prend, pour des valeurs rationnelles de l'argument, une valeur

continue n'ayant de tangente en aucun point, ou encore de courbe ayant en chaque point une tangente, mais n'ayant pas de courbure (1).

Il considéra la série très simple

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \quad \left(\begin{array}{l} a \text{ entier impair} > 1 \\ b \text{ constante positive} < 1 \end{array} \right).$$

Cette série converge uniformément, car ses termes ne surpassent pas ceux de la progression Σb^n ; donc $F(x)$ est une fonction continue (n° 66). Si l'on a $ab < 1$, $F(x)$ a pour dérivée la série (elle-même continue)

$$F'(x) = -\pi \sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n \sin(a^n \pi x),$$

car en ce cas $F'(x)$ converge uniformément (n° 68).

Mais, si ab surpasse $1 + \frac{3\pi}{2}$, $F(x)$ n'a plus de dérivée. En effet, l'existence d'une dérivée exigerait que la fraction

$$\Delta = \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right|$$

restât inférieure à ε pour toutes les valeurs $|h| < \delta$, ε étant arbitraire et δ un nombre déterminé. Or, des transformations assez simples (2) montrent que, dans le cas considéré, l'hypothèse

constante c , et pour les valeurs irrationnelles une autre valeur d . Riemann nous a ensuite enseigné une méthode pour former des fonctions de ce genre : elle consiste à additionner une série de fonctions auxquelles on donne certaines oscillations ou discontinuités de plus en plus fréquentes... » (p. 120).

Peu après Weierstrass, M. Darboux présenta des types variés de fonctions continues sans dérivée : fonctions continues sans dérivée pour les valeurs commensurables, incommensurables, pour toutes les valeurs de la variable. *Mémoire sur les fonctions discontinues* (A. E. N., 1875, p. 57; 1879, p. 195).

(1) L'intégration ne peut donner de pareilles fonctions, puisque les points où une intégrale n'a pas de dérivée appartiennent à l'ensemble des points de discontinuité de la fonction intégrée, et par suite à un ensemble qui doit être de *mesure nulle* (n° 159).

(2) On en trouvera le détail dans tous les auteurs. Cf. JORDAN, *Analyse*, 2^e éd., t. I, p. 316. — GOURSAT, *Analyse*, t. I, p. 475. — TANNERY, *Introduction*, etc., 2^e éd., t. I, p. 415. — DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Analyse*, t. I, p. 353, etc.

$|h| < \frac{3}{2\alpha^m}$ entraîne

$$\Delta > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(ab)^m.$$

Donc Δ augmente indéfiniment avec l'entier m , et, par suite, lorsque $|h|$ tend vers zéro.

Cette fonction continue sans dérivée est bizarre à bien d'autres titres : par exemple, elle a une infinité de maxima et de minima dans tout intervalle ⁽¹⁾, et la courbe représentative de la fonction a une longueur infinie entre deux quelconques de ses points ⁽²⁾.

En intégrant la fonction de Weierstrass, on obtient une nouvelle fonction dont la courbe représentative a une tangente qui varie d'une manière continue, mais n'a pas de courbure.

Les courbes si curieuses *remplissant une surface* ⁽³⁾ obtenues par MM. Peano et Hilbert conduisent aussi à des fonctions continues sans dérivée en aucun point. Voici comment on peut définir une de ces courbes.

Considérons un segment rectiligne (ab) et un carré Q de côté égal à (ab) ; partageons ce segment et ce carré en $9, 9^2, \dots, 9^n, \dots$ parties égales δ_n , et en $9, 9^2, \dots, 9^n, \dots$ carrés égaux q_n . Pour chaque valeur de n , nous numérotions les 9^n segments δ_n en suivant l'ordre dans lequel ils se présentent à partir de l'extrémité a , et les 9^n carrés q_n dans un ordre tel que chaque carré ait *un côté*

(1) Dans tout intervalle, il existe une infinité de valeurs de x de la forme $\frac{p}{a^q}$, où p et q sont entiers. On démontre que, si q désigne un nombre positif arbitraire, le quotient Δ tend vers $-\infty$ pour h négatif, et vers $+\infty$ pour h positif lorsque p est impair; l'inverse a lieu si p est pair. Donc toute valeur impaire de p donne un minimum, toute valeur paire un maximum. Dès lors, dans tout intervalle, la fonction de Weierstrass a une infinité de maxima et de minima. Par suite encore c'est une fonction continue qui dans aucun intervalle, si petit soit-il, n'est ni constamment croissante, ni constamment décroissante.

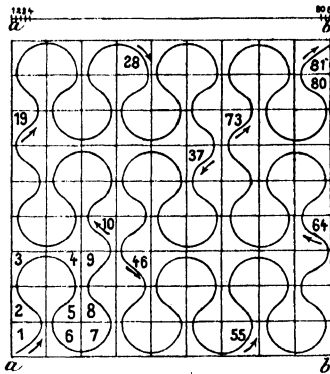
(2) Cela tient à ce que la fonction $F(x)$ n'est à variation bornée dans aucun intervalle (n° 15); dès lors la courbe correspondante n'est pas *rectifiable* au sens de M. Jordan (n° 156).

La représentation graphique des fonctions de ce genre a été étudiée par M. Klein (*Cahiers autographiés* de GÖTTINGEN. Semestre d'été 1901).

(3) En employant une expression que nous définirons plus loin, *ces courbes ont une aire*, c'est-à-dire l'ensemble des points de la courbe est mesurable au sens de M. Jordan, et sa mesure n'est pas nulle (n° 12).

commun avec le carré suivant (fig. 1) ⁽¹⁾. Enfin, nous ferons correspondre entre eux les segments et les carrés dont le numéro est le même.

Fig. 1.



Lorsque n croît indéfiniment, cette loi fait correspondre à chaque point m du segment (ab) un point M du carré Q et un seul. En effet, dans chacune des subdivisions successives de (ab) , il y a un segment contenant m . A chacun de ces segments, qui sont compris les uns dans les autres et tendent vers zéro, correspondent des carrés contenus aussi les uns dans les autres, et dont les côtés tendent vers zéro : ils convergent donc vers un point limite M ⁽²⁾. De plus, il résulte de l'ordre de numérotage adopté pour les carrés que la surface Q est décrite d'une manière continue par ce point M en même temps que le segment (ab) par le point m . Il existe donc des fonctions continues $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ définissant les coordonnées cartésiennes x et y de M , lorsque le paramètre t qui fixe la position de m sur (ab) croît d'une façon continue ⁽³⁾. Ces fonctions continues ne peuvent avoir de déri-

⁽¹⁾ La figure indique l'ordre à suivre dans le numérotage pour le cas de $n = 2$; il suffirait de détacher les neuf carrés les plus voisins du sommet inférieur à gauche pour avoir la figure relative à la division en neuf carrés.

⁽²⁾ Plus loin, nous rendrons rigoureux ce genre de raisonnement (n° 5 et 10).

⁽³⁾ Cf. PEANO, *M. A.*, t. XXXVI, p. 157. — HILBERT, *M. A.*, t. XXXVIII, p. 459. — MOORE, *Trans. American M. S.*, 1900, p. 92. — PICARD, *Analyse*, 2^e édit., t. I, p. 22. — LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 44 et 117.

vée, sinon la courbe décrite par le point M aurait une longueur finie (n° 156). Ceci est absurde, puisque cette courbe passe au moins une fois par chaque point du carré Q et dès lors remplit ce carré.

4. En traitant des fonctions, nous emploierons souvent le langage géométrique, dont nous devons maintenant dire un mot.

L'Analyse est redevable à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique de singuliers progrès. Non seulement ces sciences ont indiqué aux analystes des types fondamentaux de problèmes, et par là orienté leurs recherches; mais elles ont aidé à pressentir les solutions, suggéré des méthodes, élargi les horizons, alors que la déduction logique était d'un faible secours pour les découvertes.

Le Calcul infinitésimal a son origine dans des intuitions géométriques et mécaniques : Newton, Leibniz et tout le XVIII^e siècle y ont fait souvent appel. Au XIX^e siècle, pour ne citer que trois noms, Monge a été conduit par l'étude des surfaces à des résultats relatifs aux équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Riemann fait de l'intuition géométrique la base de sa Théorie des fonctions. C'est aussi le caractère de l'œuvre de Sophus Lie : il applique l'intuition géométrique à l'espace, et il augmente la puissance de cette méthode en utilisant l'idée pluckérienne de l'espace généralisé, c'est-à-dire en remplaçant l'espace, ayant pour élément le point, par un espace dont l'élément serait la droite, la sphère, une quadrique (1).

Mais l'intuition sensible n'est pas une démonstration mathématique. Pour définir ce qu'il faut entendre en Analyse par preuve suffisante, géomètres et philosophes ont procédé par approximations successives : jusqu'au milieu du dernier siècle, il y a eu bien des stades dans l'évolution de l'idée de rigueur *mathématique*. Autrefois, on a toléré dans les définitions et dès lors dans les démonstrations un certain vague; tous les raisonnements par intuition, par induction ou par à peu près n'étaient pas exclus (2). Peu

(1) KLEIN, *Conférences du Congrès de Chicago*, 1893 (trad. Laugel, p. 10).

(2) Pour citer l'exemple classique, on était amené à penser que toute fonction continue admet une dérivée, d'abord par induction, en passant en revue les fonctions qui se présentaient, puis par une intuition trop rapide qui équivalait à ce raisonnement : « Une fonction continue peut être représentée par une courbe

à peu, la rigueur absolue a pénétré partout : celle que l'on exige aujourd'hui ne sera plus surpassée ⁽¹⁾, car on doit uniquement faire appel à l'intuition du nombre pur et au syllogisme. Gauss et Abel, Cauchy et Dirichlet, surtout Weierstrass, ont aidé à marcher dans cette voie. L'école de Berlin « ne cherche pas à voir, mais à comprendre » ⁽²⁾.

Au contraire, il n'y a pas d'objection à faire au langage géométrique : c'est une manière d'exprimer des vérités analytiques, et l'on pourrait le remplacer par des équations et des inégalités. Pour éviter tout malentendu, Gauss a parfois pris sa terminologie dans les sciences biologiques, et M. Poincaré dans la Topographie ⁽³⁾. Mais la métaphore géométrique est plus commode ; car, des interprétations que l'on peut donner d'une conception analytique, la Géométrie suggère la plus simple.

Ce langage figuré est concis et clair ; il facilite l'interprétation des résultats et rappelle souvent un fait historique relatif à leur découverte. Lorsqu'il y a plus de trois variables, il permet, sans faire d'hypothèse sur la réalité d'un espace ayant plus de trois dimensions, de donner aux théorèmes des énoncés simples ; il peut créer des associations d'idées et suggérer des généralisations ⁽⁴⁾.

continue; et une courbe a évidemment une tangente. » Cette prétendue évidence venait de ce qu'on croyait avoir l'idée d'une courbe et d'une droite sans épaisseur, tandis que de fait on voyait un trait et une bande de faible épaisseur. L'intuition montrait que le trait curviligne et la bande rectiligne empiétaient l'un sur l'autre sans se traverser. Si c'est là ce qu'on appelle une *courbe* et une *tangente*, il est clair que toute courbe a une tangente; mais la tangente ainsi définie n'a pas de rapport avec la théorie analytique des fonctions. On peut dire la même chose du cercle osculateur (POINCARÉ, *A. M.*, t. XXII, p. 5. — KLEIN, *Conférences de Chicago*, trad., p. 42). La *continuité* et la *densité*, au sens de la théorie des ensembles, sont des propriétés que, par leur nature même, nos sens ne peuvent percevoir.

Cette assertion *tout mouvement a une vitesse* appelle les mêmes réflexions.

(1) Cf. POINCARÉ, *La valeur de la Science*, p. 20.

(2) « De là à l'égard de la Géométrie une certaine méfiance, qui est le caractère propre de l'école de Berlin ; pour ainsi dire, elle ne cherche pas à voir, mais à comprendre » (POINCARÉ, *A. M.*, t. XXII, p. 17).

Cf. aussi KLEIN, *Sur l'arithmétisation des Mathématiques* (*N. A.*, 1897, p. 114).

(3) Cf. POINCARÉ, *Courbes définies par une équation différentielle* (*J. M.*, 1881, p. 383).

(4) Cf. POINCARÉ, *Analysis situs* (*J. E. P.*, 2^e série, 1^{er} Cahier, les premières pages).

Les premiers exemples de représentation géométrique remontent à Descartes et à Fermat (1).

Aux valeurs d'une variable réelle on fait correspondre les points d'une droite. Deux variables indépendantes (x, y) pouvant être regardées comme des coordonnées, tout système de leurs valeurs est figuré par un point du plan. Quand les nombres représentés par x et y varient d'après certaines lois, le point *se déplace* en décrivant une courbe. La courbe est *continue* lorsque ses coordonnées s'expriment par des fonctions continues $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ d'un paramètre (2). Telle est la courbe de M. Peano.

Une courbe continue définie dans un intervalle (t_0, T) est *fermée* lorsque les fonctions uniformes, finies et continues $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ reprennent les mêmes valeurs pour les valeurs extrêmes du paramètre. Une courbe fermée prend souvent le nom de *contour*.

Une classe importante de courbes continues est celle des *courbes simples* ou sans points multiples : on les appelle souvent *courbes de M. Jordan*. Une courbe *fermée* est simple lorsque l'on peut déterminer les fonctions ci-dessus $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ de telle sorte qu'elles reprennent les mêmes valeurs seulement pour les valeurs extrêmes du paramètre. Une courbe *non fermée* est simple lorsque, (x_1, y_1) désignant un point quelconque de cette courbe, les équations $x_1 = \varphi(t)$, $y_1 = \psi(t)$ admettent une seule solution $t = t_1$ (3).

Une courbe est *régulière* lorsque l'on peut choisir le paramètre t

(1) DESCARTES, *Géométrie*. Paris, 1637. — FERMAT, *Varia op. math.* Tolosæ, 1697.

(2) La courbe obtenue en remplaçant t par une fonction toujours croissante d'une nouvelle variable n'est pas considérée comme différente de la première.

(3) Cf. JORDAN, *Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 90.

M. Hurwitz a donné à cette définition la forme suivante (*Congrès de Zurich*, 1897; *C. R.*, p. 102) : une courbe de Jordan est un ensemble à deux dimensions tel que l'on puisse établir une correspondance biunivoque et continue entre ses éléments (x, y) et ceux d'un segment rectiligne $t_0 \leq t \leq T$, si la courbe est ouverte, entre ses éléments et ceux d'une circonférence $\xi = \rho \cos t$, $\tau = \rho \sin t$, si la courbe est fermée.

Ainsi, la courbe de Peano n'est pas une courbe de Jordan, bien que les fonctions φ et ψ soient uniformes et continues, car la correspondance entre le segment (ab) et le carré n'est pas biunivoque, ou encore la courbe se coupe elle-même.

M. Schœnflies définit la courbe fermée *un ensemble parfait qui partage le plan en deux ensembles satisfaisant respectivement à une certaine condition* (l'un pourra être regardé comme intérieur à la courbe, l'autre comme extérieur) (*M. A.*, t. LVIII, p. 198 et 216).

de telle sorte que les fonctions φ et ψ aient des *dérivées continues et non nulles à la fois*, sauf peut-être en un nombre fini de points où ces dérivées passeraient d'une valeur finie à une autre valeur finie (1).

Une courbe est *analytique* dans un intervalle (t_0, T) lorsqu'en chaque point t , de cet intervalle, x et y sont développables en séries procédant suivant les puissances positives de $t - t_0$. Un point (x_1, y_1) d'une courbe analytique est *point ordinaire ou régulier* lorsque dans le voisinage de ce point l'une des différences $x - x_1$, $y - y_1$, peut être développée suivant les puissances positives de l'autre. Ainsi, pour la courbe

$$x = a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \quad y = b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

analytique à l'origine, l'origine est point ordinaire lorsque l'un des coefficients a_1, b_1 n'est pas nul (2).

Un contour est *convexe* lorsqu'une droite quelconque le coupe en deux points au plus.

Le *voisinage* (l'entourage, le domaine) d'un point O est l'ensemble des points d'un domaine continu \mathcal{D} contenant le point O et tel que la distance de O à l'un quelconque des points de \mathcal{D} ne dépasse pas un nombre positif fixe (3).

(1) On voit facilement qu'une courbe régulière peut toujours être partagée en un nombre fini de parties représentables par des équations de la forme $y = f(x)$, $x = f_1(y)$, où f et f_1 désignent des fonctions uniformes et continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

(2) En effet, soit $a_1 \geq 0$. Le théorème de l'inversion apprend que t est une série entière en x ; en en portant la valeur dans l'expression de y , puis en ordonnant par rapport à x la nouvelle série formée (n° 141), y s'exprime par une série entière en x .

Si l'on a $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 \geq 0$, l'origine est un rebroussement de première espèce.

(3) La *distance* de deux points $(x_0, y_0, z_0, \dots; x_1, y_1, z_1, \dots)$ est définie par l'expression positive

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + \dots};$$

leur *écart* par

$$|x_0 - x_1| + |y_0 - y_1| + \dots$$

En pratique, par *voisinage* d'un point, par exemple de l'origine, on entend le plus souvent le lieu des points dont les coordonnées vérifient l'une des inégalités

$$x^2 + y^2 < \delta^2, \quad |x| + |y| < \delta', \quad |x| < \delta'' \quad \text{et} \quad |y| < \delta''',$$

c'est-à-dire on prend pour domaine \mathcal{D} un cercle, un rectangle, etc. ou encore, pour certaines démonstrations d'*Analysis situs*, un triangle contenant l'origine.

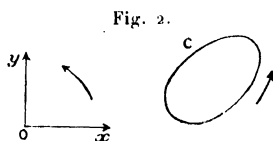
La considération d'une variable complexe revient à l'association de deux variables réelles : aussi, on peut parler de variable complexe décrivant un contour, restant à l'intérieur d'un domaine. C'est la représentation classique de Gauss et de Cauchy, introduisant l'affixe d'un point.

Une portion du plan est dite *connexe* ou *d'un seul tenant* lorsque l'on peut joindre deux points quelconques pris dans cette portion par un chemin continu situé lui-même tout entier dans la portion considérée.

Le domaine correspondant est à *connexion simple*, lorsqu'il comprend toute la région intérieure à tout contour fermé simple. On appelle *domaine à connexion multiple* le domaine intérieur à un contour fermé simple C et extérieur à des contours fermés simples C', C'', \dots extérieurs les uns aux autres et intérieurs à C .

Étant données deux demi-droites rectangulaires Ox , Oy , on appelle sens *positif* ou *direct* celui dans lequel il faut tourner pour amener Ox sur Oy par une rotation égale à un angle droit.

Considérons d'abord un contour convexe tel que C (*fig. 2*) : le



sens positif sur ce contour est le sens dans lequel un mobile doit cheminer, pour qu'il paraisse, relativement à un observateur *intérieur* au contour, se mouvoir dans le sens positif.

Avec la disposition des axes ordinairement adoptée, un mobile décrit un contour dans le sens positif, lorsqu'il le parcourt de manière à avoir l'aire entourée à *sa gauche*.

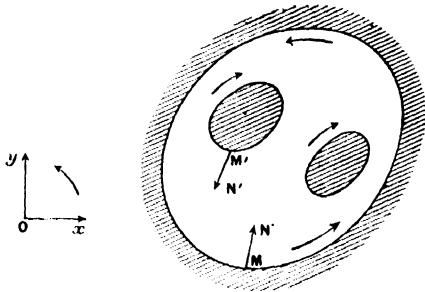
Dans l'aire triplement connexe (¹), indiquée sur la figure 3, la

(¹) Une surface est *connexe* lorsque deux points pris arbitrairement sur la surface peuvent toujours être réunis par un trait continu situé tout entier sur la surface.

La connexion peut être *simple* ou *multiple*. Une surface connexe est à *connexion simple* quand ses bords, si elle en a, se composent d'une ligne unique et que tout *circuit* (c'est-à-dire tout contour fermé ne se coupant pas) tracé sur la surface et ne rencontrant pas ses bords peut, par déformation continue sur la surface, être réduit à un point. Considérons une surface ayant des bords (par

portion *intérieure* est celle qui n'est pas en hachures. Un mobile en décrit le contour dans le sens positif quand des observateurs, placés à l'intérieur de l'aire et non loin du contour, voient ce

Fig. 3.



mobile se mouvoir dans le sens positif, au moment où il parcourt les éléments du contour voisin des positions qu'ils occupent. On peut donc dire que le mobile marche dans le sens positif (avec la disposition ordinaire des axes) quand il se déplace de manière à avoir l'aire entourée à sa gauche. La direction positive de la tangente est celle qui correspond au sens positif adopté pour décrire le contour.

La normale *intérieure* au contour est la direction de la normale $(\overline{MN}, \overline{M'N'})$ qui fait un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ avec la direction positive de la tangente.

Si l'on a à considérer p variables complexes z_1, \dots, z_p , on les fera se déplacer dans p plans différents, et l'on parlera du champ multiple ω , formé par l'ensemble des champs $\omega_1, \dots, \omega_p$.

exemple, pour donner des bords à une sphère, il suffit d'y faire une entaille avec des ciseaux; pour donner des bords au plan, il suffit d'y tracer un cercle de rayon très grand). On appelle *coupure* une section faite dans la surface avec des ciseaux et joignant deux points situés sur les bords. Une surface est à connexion simple lorsqu'il est impossible d'y tracer une coupure sans la morceler.

En particulier une aire plane est simplement connexe lorsqu'elle n'a pas de trous. Deux coupures transforment l'aire à triple contour (*fig. 3*) en aire simplement connexe.

§ II. — LA NOTION DE LIMITE (1).

3. Commençons par deux cas particuliers. Soit d'abord $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ une suite infinie d'éléments réels ou complexes rangés dans un certain ordre. On dit qu'elle est *convergente* ou que ses éléments *tendent vers une limite* u lorsque à tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre un entier N tel que l'on ait $|u_n - u| < \varepsilon$ pour toute valeur de n supérieure à N (2).

Soit encore $f(x, y, \dots)$ une fonction d'une ou plusieurs variables réelles ou complexes définie dans le voisinage d'un point (x_0, y_0, \dots) , sauf peut-être au point lui-même. En ce point elle tend vers une limite l lorsque à tout nombre ε on peut faire correspondre un nombre δ tel que l'on ait $|f(x, y, \dots) - l| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad 0 < |y - y_0| < \delta, \quad |x - x_0| + |y - y_0| > 0 \quad (3).$$

Ainsi les fonctions $x \sin \frac{1}{x}, x^2 \sin \frac{1}{x}, e^{\frac{1}{x}}$ ont une limite à l'ori-

(1) Non seulement les notions de fonction continue, de série, de dérivée, d'intégrale, etc., et, par suite, l'Analyse entière, reposent sur l'idée de limite puisque toutes ces fonctions sont définies par leurs valeurs limites, mais encore, bien que les critères de convergence ci-dessous soient une conséquence de la définition des incommensurables et présupposent la notion du continu, néanmoins inversement la notion de limite est commode pour utiliser pratiquement la définition de ces nombres donnée plus haut. C'est à cause de cette importance que nous la détachons de la théorie des ensembles, dans laquelle elle rentre logiquement.

(2) De même, les éléments d'une suite augmentent indéfiniment lorsque, à tout nombre donné E , si grand soit-il, on peut faire correspondre un nombre N tel que l'on ait $|u_n| > E$ pour $n > N$.

Une suite de nombres réels est *proprement divergente* lorsque, ses termes gardant le même signe, leurs valeurs absolues croissent indéfiniment; elle est *improprement divergente* lorsqu'elle n'est ni convergente, ni proprement divergente.

(3) On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$, mise sous la forme $u(x, y) + iv(x, y)$, ait pour limite $a + ib$ en un point $z_0 = x_0 + iy_0$, c'est que les fonctions u et v convergent respectivement en ce point vers a et b .

De même la valeur limite d'une fonction de plusieurs variables complexes, envisagée directement sous la forme $u(x, y, \dots) + iv(x, y, \dots)$, peut se définir par les valeurs limites des fonctions u et v , quel que soit le nombre des variables réelles x, y, \dots .

gine (1); les fonctions $\sin \frac{1}{x}$ et $e^{\frac{1}{x}}$ ne tendent vers aucune limite pour $x = 0$.

De ces cas particuliers on passe à la définition générale de limite en remplaçant soit l'ensemble des entiers sur lequel la suite u_n était définie, soit l'ensemble continu formant le voisinage de (x_0, y_0, \dots) par un ensemble infini quelconque ayant le point (x_0, y_0, \dots) pour point limite (2). Ainsi, soit $f(x, y, \dots)$ une fonction définie sur un pareil ensemble : au point (x_0, y_0, \dots) elle converge vers une limite l lorsqu'on peut satisfaire à l'inégalité $|f - l| < \epsilon$ en tous les points (x, y, \dots) appartenant à l'ensemble et dont la distance au point (x_0, y_0, \dots) reste inférieure à un nombre fixe.

Quand une fonction est définie sur un certain ensemble, par exemple sur l'ensemble continu formant le voisinage de (x_0, y_0, \dots) , on peut appliquer la définition de limite à un ensemble infini ne contenant pas tout ce voisinage. Par exemple, une fonction $f(x)$ étant définie pour toutes les valeurs de x , on parlera de sa valeur limite lorsque x tend vers zéro par des valeurs positives, ou bien augmente indéfiniment par des valeurs entières. En ce dernier sens, une fonction peut avoir en un point des limites différentes : ainsi une fonction $f(z)$ pourra converger en z_0 vers divers nombres, d'après le chemin suivi par la variable pour tendre vers z_0 (3). Au contraire, sur un ensemble déterminé, une fonction ne peut avoir qu'une seule limite, comme on le voit en raisonnant par l'absurde.

Une fonction peut ne pas être définie en un point, bien qu'elle

(1) Si l'on considère les trois fonctions définies par ces symboles pour $x \geq 0$ et nulles pour $x = 0$, ces trois fonctions sont continues à l'origine. En ce point la première n'a pas de dérivée, la deuxième a une dérivée non continue et n'a pas de dérivée seconde, la troisième a une dérivée continue et même des dérivées de tous les ordres. La première fonction tend vers sa limite (zéro) sans s'en rapprocher constamment et en l'atteignant un nombre infini de fois.

(2) C'est-à-dire tel qu'il y ait une infinité de points de l'ensemble dans le voisinage du point considéré (n° 10).

(3) Ainsi la fonction $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers zéro ou augmente indéfiniment, suivant que x tend vers zéro par des valeurs négatives ou positives.

De là, la distinction entre les valeurs limites de la fonction à gauche et à droite d'un point x_0 , ou encore entre les limites postérieure et supérieure (notion qui sera généralisée au n° 14). Dirichlet les désignait par $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$;

ait en ce point une limite déterminée (1). Si elle est définie en un point, sa valeur en ce point peut ne pas coïncider avec celle de la valeur limite de la fonction (2).

On considère par définition $+\infty$ comme un nombre *supérieur* à tous les nombres finis, $-\infty$ comme un nombre *inférieur* à tous les nombres finis.

Cela posé, on dit qu'une fonction $f(z)$ de variable complexe *augmente indéfiniment* pour $z = z_0$ lorsque son inverse tend vers zéro. C'est dire qu'à tout nombre positif donné E, si grand soit-il, on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'on ait

$$|f(z_0 + h)| > E \quad \text{pour} \quad 0 < |h| < \delta.$$

$f(x_0)$ représentait la valeur de la fonction au point x_0 [$f(-0)$, $f(0)$, $f(+0)$ s'il s'agit de l'origine].

1° On peut avoir $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \geq f(x_0)$.

Exemples : Soient

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad \psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n x^2}{n x^2 + 1},$$

on a

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\pm 0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(\pm 0) = 1.$$

2° On peut avoir

$$f(x_0 - 0) \geq f(x_0) = f(x_0 + 0),$$

ou réciproquement (nous dirons alors que la fonction est *semi-continue*, n° 14).

Exemples : Soient

$$\varphi(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n x^n - 1}{n x^n + 1}, \quad \psi(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - n}{x^n + n},$$

on a

$$\varphi(1-0) = -1, \quad \varphi(1) = \varphi(1+0) = 1, \quad \psi(1-0) = \psi(1) = -1; \quad \psi(1+0) = 1.$$

3° On peut avoir $f(x_0 - 0) \geq f(x_0 + 0)$, et $f(x_0)$ non défini en x_0 .

(1) Les fonctions $\frac{x^2}{x}$, $x \sin \frac{1}{x}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ont à l'origine zéro pour limite : sans convention complémentaire, par exemple relative à la continuité, elles ne sont pas définies à l'origine.

La fonction $e^{\frac{1}{z}}$ (z complexe) non seulement n'est pas déterminée pour $z = 0$, mais il est impossible de définir *par continuité* sa valeur à l'origine, puisque l'on obtient en ce point telle valeur que l'on veut, en faisant z tendre vers zéro par un chemin convenable (n° 99).

(2) C'est ce qui arrive en tout point où la fonction n'est pas continue.

On écrira de même

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty,$$

si l'on peut satisfaire aux inégalités

$$|f(z) - l| < \varepsilon, \quad |f(z)| > E,$$

ε et E étant choisis arbitrairement, et z prenant une valeur quelconque de module supérieur à un nombre fixe ⁽¹⁾.

Pour décider de la convergence d'une fonction, on a souvent recours à l'un des critères suivants :

THÉORÈME I. — *Pour qu'une suite de nombres réels $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ qui ne vont jamais en décroissant ait une limite finie, il faut et il suffit qu'ils ne dépassent pas un nombre fixe.*

La condition est évidemment nécessaire.

Elle est suffisante. Soit $E + 1$ le plus petit nombre entier supérieur ou égal à tous les termes de la suite u . Partageons l'intervalle $(E, E + 1)$ en dix parties égales; soit encore $E + \frac{e_1 + 1}{10}$ le plus petit des nombres formés ($0 \leq e_1 \leq 9$) qui soit supérieur ou égal à tous les nombres de la suite u . En partageant encore en dix parties l'intervalle $(E + \frac{e_1}{10}, E + \frac{e_1 + 1}{10})$ et en répétant indéfiniment cette opération, on détermine un nombre ζ (note 2, p. 2) qui a pour représentation décimale

$$\zeta = E + \frac{e_1}{10} + \frac{e_2}{10^2} + \dots + \frac{e_p}{10^p} + \dots,$$

nombre que je dis être une limite pour la suite u ⁽²⁾.

⁽¹⁾ De même, si l'on se borne aux valeurs réelles, on écrira

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l,$$

lorsque $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ tend vers l pour ξ tendant vers zéro dans le premier cas par des valeurs positives, dans le second par des valeurs négatives. Le nombre l peut être fini, être égal à $+\infty$, à $-\infty$.

⁽²⁾ Si nous avons divisé l'intervalle $(E, E + 1)$ en dix parties égales et non pas par exemple en deux parties, c'est afin d'obtenir en même temps une représentation décimale du nombre ζ .

En effet, des inégalités

$$E + \frac{e_1}{10} + \dots + \frac{e_p}{10^p} < u_n \leq E + \frac{e_1}{10} + \dots + \frac{e_{p+1}}{10^p}$$

la seconde est vraie quels que soient n et p , la première est vraie; p étant déterminée, pour toutes les valeurs de n supérieures à un nombre fixe N . D'après la définition de \mathcal{E} , ces inégalités subsistent lorsqu'on y remplace u_n par \mathcal{E} . On a donc

$$|\mathcal{E} - u_n| < \frac{1}{10^p} \quad \text{pour} \quad n > N,$$

ce qui justifie la proposition (1).

(1) Voici quelques corollaires relatifs à la définition des nombres rationnels ou irrationnels :

1° Un pareil nombre L est défini par une loi de répartition de tous les nombres (rationnels ou irrationnels) en deux classes A et B telles que tout nombre de la classe A soit inférieur à un nombre quelconque de la classe B. En effet, les nombres de la classe A et ceux de la classe B, rangés respectivement par ordre de grandeur croissante et de grandeur décroissante, ont des limites l et l' . On a, du reste, $l \geq l'$, puisque tout nombre supérieur à l est de la classe B comme ne pouvant être de la classe A; on a même $l = l'$, sinon il y aurait des nombres entre l et l' , et ces nombres ne pourraient être ni de la classe A, ni de la classe B.

Cette limite commune définit le nombre L . Ce nombre L lui-même peut être de la classe A ou de la classe B.

2° Un pareil nombre L est encore défini par deux suites de nombres a_n, b_n ($a_n < b_n$), les uns ne décroissant jamais, les autres ne croissant jamais, et tels que la différence entre deux nombres a_n, b_n appartenant respectivement aux deux suites descende, pour n infini, au-dessous de tout nombre donné. En effet, en pareil cas, ces deux suites ont respectivement des limites l et l' . De plus $l = l'$; car des inégalités

$$a_n \leq l \leq b_n, \quad a_n \leq l' \leq b_n$$

on déduit

$$|l - l'| \leq b_n - a_n.$$

Le nombre fixe $|l - l'|$ peut donc être rendu inférieur à ε ; par suite, il est nul. Cette limite commune définit le nombre L .

On donne à ce dernier corollaire une forme géométrique en disant qu'une suite infinie d'intervalles (a_n, b_n) compris les uns dans les autres et tendant vers zéro définit un point.

Remarquons enfin qu'au lieu de déduire ces deux corollaires de la notion de limite, on aurait pu, par les mêmes considérations, les regarder comme des conséquences de l'existence d'une limite supérieure pour un ensemble borné (n° 9).

Avant d'énoncer le second critère de convergence, nous introduirons avec Cauchy la notion de *la plus grande des limites* d'une suite de termes réels $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$.

Supposons cette suite *bornée*, et répartissons l'ensemble des nombres en deux classes A et B en convenant de mettre un nombre déterminé c dans la classe A ou la classe B suivant que la suite u a un nombre *infini* ou bien un nombre *fini* (ou nul) de termes supérieurs à c . Cette loi de séparation définit un nombre L, puisque, d'après elle, un nombre quelconque appartient à l'une des deux classes et que tout nombre de la classe A est inférieur à un nombre quelconque de la classe B; ce nombre L est appelé la *plus grande des limites* de la suite u ⁽¹⁾.

Pour toute suite *bornée* ce nombre L existe; de plus, il jouit de la propriété suivante: si l'on considère les inégalités

$$(1) \quad L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ quelconque } > 0),$$

on peut satisfaire à la première pour une infinité de valeurs de n à partir d'un rang quelconque, à la seconde pour toutes les valeurs de n à partir d'un certain rang. Cette proposition résulte de ce que, d'après la définition de L, les nombres $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$ appartiennent respectivement à la classe A et à la classe B ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Dans le langage de la théorie des ensembles, la plus grande limite est le plus grand élément de l'ensemble dérivé (ou, s'il y a lieu, sa borne supérieure); en d'autres termes, des points limites de l'ensemble ordonné considéré, c'est le plus éloigné de l'origine. De là la pleine justification de la dénomination adoptée par Cauchy.

Il peut y avoir des termes qui dépassent la *limite* d'une suite, ainsi que sa *plus grande limite*; il n'y en a jamais au delà de la *limite supérieure* de l'ensemble qu'ils forment.

La *limite supérieure* (obere Grenze) et la *plus grande limite* coïncident dans les ensembles non bornés: c'est l'infini. Dans l'ensemble $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, ces deux limites sont respectivement 1 et 0.

Ce que Cauchy désignait par *la plus grande des limites* (*Œuvres*, 2^e série, t. III, p. 121; t. X, p. 49, etc.), du Bois-Reymond l'appelle *Obere Unbestimmtheitsgrenze* (*Antrittsprog.*, 1871; *Allg. Funktionenth.*, p. 266), et M. Hadamard *limite supérieure pour n infini* (*J. M.*, 1892).

La définition de la *plus petite des limites* est analogue.

Cette notion sera utilisée dans la théorie des séries entières (n^o 75) et étendue aux suites à deux indices (n^o 143); du reste, les considérations relatives à la plus grande limite s'étendent au cas d'une variable continue.

⁽²⁾ On peut aussi définir directement la plus grande des limites par les inéga-

THÉORÈME II (Cauchy). — *Pour qu'une suite de nombres réels $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ ait une limite u , il faut et il suffit qu'à tout nombre positif donné ε on puisse faire correspondre un entier N tel que pour toute valeur de m et de n supérieure à N on ait $|u_m - u_n| < \varepsilon$.*

La condition est évidemment nécessaire, puisque des inégalités

$$|u_m - u| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m > N, n > N)$$

on déduit que $|u_m - u_n|$ n'atteint pas ε pour les mêmes valeurs de m et de n .

Elle est suffisante. En effet, la suite donnée est bornée, puisque tous ses termes sont compris, à partir de u_n , entre $u_n - \varepsilon$ et $u_n + \varepsilon$ (1); donc elle admet une *plus grande limite* L , qui est finie. Posons

$$u_m - L = (u_m - u_n) + (u_n - L).$$

D'après l'hypothèse et en vertu de la propriété ci-dessus de la plus grande limite L , on peut déterminer un nombre fixe n de façon que $|u_m - u_n|$ n'atteigne pas ε pour toutes les valeurs de m supérieures à n , et qu'en même temps la quantité fixe $|u_n - L|$ soit inférieure à ε . Par suite $|u_m - L|$ n'atteint pas 2ε pour $m > n$; donc les nombres u_m convergent vers L (2).

lités (1). Pour prouver alors que, dans toute suite *bornée*, la plus grande des limites *existe* et est finie, on remarque que, d'après la loi de Bolzano-Weierstrass (n° 10), la suite u admet au moins un point limite. Quel que soit celui que l'on considère L_1 , on peut satisfaire aux inégalités (1) pour une infinité de valeurs de n à partir de tout nombre N . De plus, si L_1 est le point limite le plus éloigné de l'origine, la seconde inégalité (1) est vérifiée pour toutes les valeurs de n à partir d'une certaine valeur N .

(1) Si l'on avait déjà démontré la loi de Bolzano-Weierstrass (n° 10), on pourrait achever la démonstration en déduisant de ce fait que la suite a *un point limite unique* (puisque les points limites possibles sont ici compris dans un intervalle dont l'écart est 2ε), et dès lors a *une limite*. Ainsi, si l'on suivait cet ordre, il serait inutile de parler ici de la plus grande limite.

(2) Dans le cas d'une suite à éléments complexes, la démonstration est analogue. Voici une troisième démonstration où l'on ne parle pas explicitement de la plus grande des limites, et qui est applicable au cas où l'on considère, à la place des termes d'une suite u , une fonction $f(x)$ telle que l'on ait $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, par exemple pour toutes les valeurs de x' et x'' supérieures à un nombre fixe.

Considérons une suite arbitraire de quantités positives décroissantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$

Remarque. — Nous venons d'énoncer les principes de convergence en nous bornant aux ensembles dont on peut affecter les éléments d'un indice. Mais on démontre d'une manière analogue que, lorsqu'une variable *continue* x augmentant indéfiniment, une fonction $f(x)$ ne décroît jamais et reste inférieure à un nombre fixe, cette fonction tend vers une limite pour x infini (¹).

De même, étant donnée une fonction $f(x, y, \dots)$ d'une ou de plusieurs variables continues, définie dans le voisinage d'un point (x_0, y_0, \dots) sauf peut-être en ce point, la condition nécessaire et suffisante pour qu'en ce point elle tende vers une limite, c'est

tendant vers zéro; soient N_1, N_2, N_3, \dots les nombres qui leur correspondent en vertu des hypothèses. (On peut s'arranger de façon qu'ils aillent toujours en croissant.)

En particulier, pour tous les nombres v compris entre N_1 et N_2 , on pourra écrire $|u_n - u_v| > \varepsilon_1$, c'est-à-dire $u_v - \varepsilon_1 < u_n < u_v + \varepsilon_1$, et cela pour toute valeur de n supérieure à N_1 . Si nous appelons respectivement a_1 et b_1 la plus grande et la plus petite des quantités $u_v - \varepsilon_1, u_v + \varepsilon_1$, quand v prend toutes les valeurs comprises entre N_1 et N_2 , on aura

$$a_1 < u_n < b_1$$

pour toute valeur de n supérieure à N_1 .

De même pour tous les nombres v compris entre N_2 et N_3 , et pour toute valeur de n supérieure à N_3 , on aura

$$u_v - \varepsilon_2 < u_n < u_v + \varepsilon_2,$$

c'est-à-dire

$$a_2 < u_n < b_2,$$

en représentant par a_2 et b_2 la plus grande et la plus petite des quantités $a_1, u_v - \varepsilon_2; b_1, u_v + \varepsilon_2$ (v parcourant les valeurs entre N_2 et N_3).

On définira par le même procédé des nombres $a_3, a_4, \dots; b_3, b_4, \dots$; de là deux suites $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$ qui sont respectivement croissantes ou stationnaires, décroissantes ou stationnaires. Un terme quelconque de la première est inférieur à un terme quelconque de la seconde; car, si un terme a_k surpassait b_l , il surpasserait les termes u_n à partir d'une certaine valeur de n . Enfin la différence entre deux termes correspondants (a_i, b_i) des deux suites est inférieure à $2\varepsilon_i$, c'est-à-dire tend vers zéro.

Les deux suites a et b définissent donc un nombre u ; et ce nombre est une limite pour la suite $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$.

(¹) Même théorème lorsque, x diminuant indéfiniment, la fonction $f(x)$ ne décroît jamais et n'atteint pas un nombre fixe.

Le changement de variable $\frac{1}{x} = x - a$ conduit à des propositions analogues applicables par exemple aux fonctions qui ne décroissent jamais et ne dépassent pas un nombre fixe lorsque x tend vers a en augmentant toujours.

que $|f(x', y', \dots) - f(x'', y'', \dots)|$ tende vers zéro lorsque les points $(x', y', \dots), (x'', y'', \dots)$ tendent indépendamment l'un de l'autre vers le point (x_0, y_0, \dots) (1).

Cette proposition fondamentale est souvent appelée *principe général de convergence* (2).

6. Souvent on est amené à prendre la limite de la limite d'une expression, et plus généralement à effectuer successivement n passages à la limite. Ainsi, soit $F(x, \alpha)$ une fonction de deux variables x et α qui convergent respectivement vers x_0 et α_0 . Supposons que F ait une limite $f(x)$ lorsque, x restant constant, α tend vers α_0 , et qu'ensuite $f(x)$ ait une limite $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 . De même, supposons que F ait une limite $\varphi(\alpha)$ lorsque, α restant constant, x tend vers x_0 , et qu'ensuite $\varphi(\alpha)$ converge vers $\varphi(\alpha_0)$ pour $\alpha = \alpha_0$. Les limites $f(x_0)$ et $\varphi(\alpha_0)$ n'ont pas en général la même valeur (3).

Il est intéressant de savoir quand on peut intervertir l'ordre des passages à la limite successifs sans changer la valeur du résultat final.

C'est la question qui se pose dans le problème de la dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre, de l'évaluation d'une intégrale double par le calcul successif de deux intégrales simples, dans la question de la continuité des séries à termes continus, de leur intégration terme par terme, etc (4). Par exemple, soit $s(x)$

(1) La démonstration est analogue à celle donnée dans la note (2), p. 25.

(2) Pour qu'au point (x_0, y_0) la fonction $f(x, y)$ converge vers une limite l , il faut évidemment que $f(x, y)$ tende vers l lorsque le point (x, y) tend vers (x_0, y_0) en suivant une courbe arbitraire. En raisonnant par l'absurde, on démontre que la réciproque est vraie.

Mais il ne suffirait pas que $f(x, y)$ convergeât vers une même limite l lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) en suivant une droite quelconque. Ainsi, considérons dans le plan $z = 1$ la cardioïde $r = 2a(1 + \cos\theta)$, puis le cône ayant son sommet à l'origine et pour directrice cette cardioïde : désignons par $f(x, y)$ une fonction égale à zéro sur la partie négative de l'axe des x , et ayant pour valeur aux autres points du plan l'ordonnée z positive correspondante du cône. La fonction $f(x, y)$ converge vers 0 par toute droite aboutissant à l'origine, et elle converge vers 1 par la projection de la cardioïde considérée; donc elle n'a pas de limite à l'origine.

(3) Ainsi le produit $\alpha \sin \frac{1}{\alpha}$ a pour limite zéro si l'on fait tendre d'abord α , puis x vers zéro. Il ne tend vers aucune limite lorsque x et α tendent vers zéro dans l'ordre inverse.

(4) Ces dernières remarques sont dues à M. Osgood (*B. Americ. M. S.*, 1896-1897, p. 61).

la somme d'une série convergente en un point x_0 , et $s_\alpha(x)$ celle de ses α premiers termes : nous dirons à quelles conditions on a

$$(I) \quad \lim_{x=r_0} [\lim_{\alpha=\infty} s_\alpha(x)] = \lim_{\alpha=\infty} [\lim_{x=r_0} s_\alpha(x)].$$

Ce dernier problème se résout par l'introduction d'une notion fondamentale, qui se rattache à celle de double passage à la limite : c'est la notion de *convergence uniforme* vers une limite, *gleichmässige Konvergenz* (1).

Soit $F(x, y; \alpha, \beta)$ une fonction où les variables (x, y) , (α, β) jouent des rôles différents : on la suppose définie aux points (x, y) d'un domaine fermé (Ω) , quand les paramètres (α, β) tendent vers un système de valeurs finies ou infinies (α_0, β_0) .

Nous avons dit que cette fonction a pour limite $f(x, y)$, en un point (x, y) , lorsque à tout nombre ε on peut faire correspondre un nombre positif δ , tel que l'on ait

$$|F(x, y; \alpha, \beta) - f(x, y)| < \varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} |\alpha - \alpha_0| + |\beta - \beta_0| > 0 \\ 0 \leq |\alpha - \alpha_0| < \delta, \quad 0 \leq |\beta - \beta_0| < \delta \end{array} \right).$$

Elle converge uniformément vers sa limite dans le domaine (Ω) lorsque, dans tout le domaine, on peut satisfaire à ces inégalités pour une même valeur positive δ_1 de δ , c'est-à-dire pour une valeur positive de δ indépendante de (x, y) (2).

Cette définition s'applique quels que soient le nombre des dimensions du domaine et celui des paramètres α, β . Elle ne suppose pas les variables réelles.

En particulier, soient $f_1(x), f_2(x), \dots, f_\alpha(x), \dots$ une suite de fonctions définies sur un ensemble E , et ayant pour limite $f(x)$ sur cet ensemble E : $f_\alpha(x)$ représente par exemple la somme des α premiers termes d'une série dont la somme est $f(x)$. Cette suite converge uniformément dans l'ensemble E vers $f(x)$ si à tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre un en-

(1) Cette dénomination est due à Weierstrass.

(2) A chaque point (x, y) de (Ω) correspondent une infinité de nombres positifs δ ; soit $\Delta(x, y)$ leur limite supérieure. L'ensemble de tous ces nombres positifs Δ , relatifs à tous les points de (Ω) , a une limite inférieure δ_1 positive ou nulle. La convergence est uniforme quand cette limite est positive,

tier N , le même dans tout l'ensemble, tel que l'on ait

$$|f(x) - f_{\alpha}(x)| < \varepsilon$$

pour toute valeur de α supérieure à N (1).

A chaque point x où l'on étudie la convergence correspondent, en général, des nombres N , qui dépendent de x (et de ε), tels que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite pour toute valeur de α supérieure à N : ce qui caractérise la convergence uniforme, c'est qu'en chaque point x on peut choisir ces nombres N indépendants de x (2).

Dans ces conditions, à partir d'un certain rang N et quel que soit le rang α auquel on s'arrête ensuite, les fonctions $f_{\alpha}(x)$ représentent $f(x)$ dans tout l'ensemble E avec une approximation dont la limite supérieure ε est un nombre fixe (3).

Ainsi la fonction $\frac{1}{1+x}$ tend vers 0 ou 1, pour α infini, suivant que l'on a $x \geq 0$ ou $x = 0$. Elle tend ou ne tend pas uniformément vers sa limite dans l'intervalle $a \leq x \leq b$, suivant que a est positif ou nul (4).

(1) On déduit cette définition de la précédente en annulant γ et β , et en donnant à α une suite de valeurs entières croissant indéfiniment.

De plus, d'après le second critère de convergence, on pourrait remplacer dans cette inégalité $f(x)$ par $f_{\alpha+1}(x)$, ν prenant l'une quelconque des valeurs 1, 2, ...

(2) ε étant donné, il y a, en chaque point de E , un entier minimum $N(x)$ tel que l'on ait $|f - f_{\alpha}| < \varepsilon$ pour $\alpha > N$. Quand ces nombres $N(x)$ ont une limite supérieure finie, la convergence est uniforme.

(3) Parfois on donne de la convergence uniforme une définition plus large en exigeant seulement que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite pour une valeur particulière α (α étant toujours indépendant de x), sans se préoccuper de savoir si elle est encore vérifiée pour les valeurs supérieures à α . La convergence uniforme ainsi entendue sert dans les questions d'approximation puisqu'elle donne une limite de l'erreur lorsqu'on s'arrête à un terme de rang déterminé; mais elle est de peu d'usage dans la théorie des fonctions.

(4) Dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, les fonctions $\frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $\frac{n^2x}{1+n^3x^2}$ ne convergent pas uniformément vers leur limite 0 pour $n = +\infty$.

En effet, si petite que soit une valeur fixe x_0 adoptée pour x , et si grand que soit un nombre N , il y a toujours une valeur n ($n > N$) pour laquelle la première fonction prend la valeur 1, pour laquelle la seconde dépasse tout nombre assigné, et cela pour une valeur de x inférieure à x_0 .

Du reste, dans les fonctions considérées en général, c'est la convergence non uniforme qui est le cas ordinaire.

Soit encore une intégrale $F(x)$ à limite supérieure infinie

$$F(x) = \int_a^x f(\xi, x) d\xi.$$

Supposons qu'elle ait un sens pour les valeurs du paramètre x comprises entre x_0 et x_1 , c'est-à-dire qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre, en chaque point x de l'intervalle (x_0, x_1) , un nombre L tel que l'on ait

$$\left| \int_x^{x'} f(\xi, x) d\xi \right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x' > x > L.$$

Ce nombre L dépend, en général, de la valeur x considérée dans l'intervalle (x_0, x_1) ; si l'on peut donner à L une *valeur finie indépendante de x* , la convergence de l'intégrale vers sa limite est uniforme dans l'intervalle (x_0, x_1) (1).

La notion de convergence uniforme permet de donner des conditions *suffisantes* pour qu'une série à termes continus soit continue, pour qu'elle soit intégrable ou dérivable terme par terme, etc. Les conditions *nécessaires* et suffisantes pour que ces séries jouissent de ces propriétés s'expriment simplement en élargissant la notion de convergence uniforme, et en introduisant avec M. Arzelà celle de *convergence QUASI-UNIFORME* ou *convergence à traits* (a tratti).

On dit qu'une suite $f_1(x), f_2(x), \dots$ convergente dans un intervalle (ab) y converge *quasi-uniformément* vers sa limite $f(x)$ lorsque à tout nombre positif ε si petit soit-il et à tout entier N aussi grand que l'on veut, on peut faire correspondre un nombre fini N' ($N' \geq N$) tel que, pour chaque valeur de x compris entre a et b , il existe un entier α_x compris entre N et N' pour lequel on ait

$$|f(x) - f_{\alpha_x}(x)| < \varepsilon.$$

Nous reviendrons sur cette notion en l'utilisant (n^{os} 66 et 67).

(1) On sait que, pour que la règle de Leibniz relative à la dérivation par rapport à un paramètre soit applicable à une intégrale, il suffit que l'intégrale fournie par l'application de cette règle converge uniformément.

§ III. — APERÇU DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES (1).

7. Puisqu'une fonction est un ensemble de nombres défini sur un domaine continu ou, plus généralement, sur un ensemble quelconque de nombres, il est naturel de faire précéder l'étude des fonctions de celle des ensembles, c'est-à-dire des *collections d'objets déterminés et distincts, en nombre fini ou infini*. Ces objets, appelés *éléments* de l'ensemble, sont des êtres mathématiques quelconques : nombres, suites, fonctions, points, surfaces, etc.

L'introduction systématique de la notion d'ensemble, outre qu'elle fournit dans toute l'Analyse un langage précis et souple, est presque indispensable au début de la théorie des fonctions, soit pour donner une base rigoureuse à plusieurs théories, soit pour déduire les propriétés des fonctions de la connaissance de leurs singularités.

Comme premiers exemples d'ensembles citons les suites infinies d'éléments affectés chacun d'un indice; les nombres rationnels, algébriques, transcendants compris entre 0 et 1; les valeurs d'une fonction $f(x)$ bien déterminée pour toutes les valeurs rationnelles, algébriques ou transcendants de x appartenant à un intervalle.

Dans ces ensembles, chaque élément a un seul indice ou dépend d'une seule variable réelle. On appelle *ensembles à une dimension* les ensembles de cette nature.

Prenons deux ensembles à une dimension, et à chaque élément

(1) Dans une première lecture, on peut omettre certaines parties de ce paragraphe relatif aux ensembles. Le créateur de leur théorie est M. George Cantor; on trouvera les Mémoires qu'il a publiés depuis 1870 dans le *Journal de Crelle* et les *Math. Annalen*. Les premiers sont traduits dans les *A. M.*, t. II, 1883; deux des derniers, plus importants, ont été traduits par M. Marotte (Hermann, 1899). — Cf. aussi JORDAN, *Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 18-28; et *J. M.*, 1892, p. 71. — BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*. — VIVANTI-GUTZMER, *Théorie der Anal. Funktionen*. — *Encyklopädie*, t. I, p. 184, 203 et t. II, A, p. 45. — Et surtout SCHENFLIES, *Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, où l'on trouvera un résumé excellent et très complet de toute la théorie, ainsi que de nombreuses références bibliographiques.

de l'un d'eux faisons correspondre un ou plusieurs éléments de l'autre. Les systèmes de couples de nombres ainsi obtenus déterminent des *ensembles à deux dimensions*. Même procédé pour la formation des ensembles à 3, . . . , p dimensions.

Ainsi une courbe peut être définie comme un ensemble à deux dimensions représentable, dans des conditions convenables, sur un segment rectiligne (¹). De même, les valeurs d'une fonction $f(x, y)$ correspondant à des systèmes de nombres (x, y) d'un ensemble à deux dimensions, forment un ensemble à trois dimensions. Les suites infinies, dont les éléments ont chacun p indices, prenant indépendamment les uns des autres une infinité de valeurs entières, constituent des ensembles à p dimensions.

Supposons numériques les éléments de l'ensemble. Chaque système de valeurs des éléments représentera ($p \geq 3$) ou constituera ($p > 3$) un point d'un espace ayant le même nombre de dimensions que l'ensemble. Ainsi, on pourra parler des ensembles de points intérieurs à une sphère ou à une hypersphère, et ayant pour coordonnées des nombres rationnels, irrationnels.

8. L'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1, et l'ensemble des nombres irrationnels appartenant au même intervalle, renferment chacun une infinité d'éléments; mais on pressent que l'on a affaire dans les deux cas à des infinités bien différentes.

De là l'étude des ensembles au point de vue de la nature du nombre de leurs éléments, de leur *puissance* (²).

(¹) Ces conditions varient suivant qu'il s'agit de courbe de Peano, de courbe de Jordan, etc. Une courbe ne peut être définie d'une manière générale en disant seulement quel est l'ensemble formé par ses éléments. Car les ensembles se *présentent comme des tous* et, par exemple, l'ensemble correspondant à la courbe de Peano remplit un carré. Or, si dans la *Géométrie de situation* ou *Analysis situs*, créée par Riemann et Betti, on étudie la continuité géométrique des ensembles de points en laissant de côté la *mesure* des grandeurs, par exemple, on traite des positions relatives des éléments de l'espace sans se préoccuper en rien de leurs distances, et si cette Géométrie *qualitative* s'étend aux *continuum* à n dimensions, il est néanmoins essentiel d'y considérer la *dimension comme un invariant* et de distinguer la longueur de l'aire.

(²) La puissance d'un ensemble est la notion générale que l'on obtient par la considération des éléments de l'ensemble, abstraction faite de leur nature et de leur ordre. C'est la généralisation de l'idée que nous nous formons du *nombre*

aux points $\frac{p}{2m}$ (1). Un calcul direct montre qu'en ces points la fonction a une *limite à droite*, et une *limite à gauche* (2) (la discontinuité est donc au plus de première espèce) et que ces limites sont différentes, car on a

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2n^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2},$$

$$f(x-0) = f(x) - \frac{1}{2n^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

La série $f(x)$ est donc discontinue pour toute valeur rationnelle de x qui, réduite à sa plus simple expression, a un dénominateur pair, par suite en une infinité de points dans chaque intervalle.

Néanmoins cette série est intégrable, car ses discontinuités forment un ensemble dénombrable, donc de mesure nulle (3). On peut dire aussi que, l'oscillation aux points $\frac{p}{2m}$ étant égale à $\frac{\pi^2}{8n^2}$, les points où elle surpasse ϵ sont en nombre fini (n° 159).

On pourrait rapprocher des fonctions intégrables les *fonctions sommables* au sens de M. Lebesgue, c'est-à-dire celles auxquelles s'applique sa définition d'intégrale (n° 160). Toute fonction mesurable bornée est sommable.

4° Les fonctions *ponctuellement discontinues* sur tout ensemble parfait. Au point de vue de la représentation analytique, leur propriété caractéristique est d'être limites d'une suite simple

(1) Ici la discontinuité de la fonction $f(x)$ en ces points ne résulte pas du principe de condensation des singularités, car les divers termes (nx) ont des singularités communes. De là la nécessité d'une vérification directe pour établir que les discontinuités ne se compensent pas de telle sorte que $f(x)$ devienne continu.

(2) Étant donnée une série uniformément convergente dans un intervalle, dont les éléments ont une *limite à droite* en un point x , la série a elle-même une *limite à droite* en ce point, et cette limite s'obtient en faisant la somme des limites à droite des éléments.

Cette proposition se démontre par le même raisonnement que celle relative à la continuité (n° 66); son application donne immédiatement les résultats du texte.

(3) Une fonction intégrable peut avoir une infinité non dénombrable de discontinuités dans tout intervalle. Pour des exemples, cf. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 29.

2° Les fonctions pour lesquelles chaque point est un point de discontinuité. Telle est la fonction de Dirichlet, égale à c pour toute valeur rationnelle de x et à d pour toute valeur irrationnelle.

3° Les *fonctions intégrables* au sens de Riemann, c'est-à-dire celles dont les discontinuités forment un ensemble de mesure nulle, qu'il soit non dense ou dense partout (n° 159). Telle est la fonction discontinue intégrable, dite de Riemann (1), définie comme il suit.

Désignons par (x) la fonction qui représente la différence entre un nombre quelconque x et l'entier le plus voisin, fonction que l'on appelle *excès de x* . Comme (x) ne serait pas déterminé pour les valeurs à égale distance de deux entiers consécutifs, convenons de plus qu'en ces points $(x) = 0$ (2).

La fonction (x) ainsi définie est discontinue aux points $\frac{2k+1}{2}$; en ces points on a

$$(x-0) = \frac{1}{2}, \quad (x) = 0, \quad (x+0) = -\frac{1}{2}.$$

Cela posé, formons la série

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{2^2} + \dots + \frac{(nx)}{n^2} + \dots$$

Chacun de ses termes (nx) est continu sauf aux points $\frac{2k+1}{2n}$, c'est-à-dire $\frac{p}{2m}$, p et $2m$ étant premiers entre eux; de plus la série converge pour toute valeur de x et converge uniformément dans tout intervalle puisque la valeur absolue de (nx) est inférieure à $\frac{1}{2}$: donc la série $f(x)$ est continue (n° 66), sauf peut-être

considérer d'après la définition peuvent être obtenus en formant des sommes d'intervalles. Dès lors il en est de même des fonctions croissantes et des fonctions à variation bornée.

La limite d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.

Les fonctions de première classe et de seconde classe de M. Baire (voir *infra*) sont mesurables; il en est de même des fonctions intégrables au sens de Riemann, de la fonction de Dirichlet, etc. (cf. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 110).

(1) RIEMANN, *Œuvres*, trad. p. 243 (ou *B. D.*, 1873).

(2) La fonction (x) est une fonction au sens de Cauchy, car on peut lui donner comme expression analytique un développement de Fourier, procédant suivant les lignes trigonométriques des multiples de $2\pi x$, partout convergent.

Ainsi soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (ab) , sauf en un point c où elle passe d'une valeur finie $f_1(c)$ à une autre valeur finie $f_2(c)$. L'intégrale de $f(x)$ prise entre a et x est une fonction continue de x dans l'intervalle (ab) ; cette intégrale a partout une dérivée, sauf au point c , où elle a pour dérivée à gauche $f_1(c)$ et pour dérivée à droite $f_2(c)$. La fonction de Riemann que nous formerons tout à l'heure a pour intégrale une fonction qui a, sur un ensemble dense, une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

On a démontré par exemple que la condition *nécessaire* et suffisante pour que deux fonctions continues ne diffèrent que par une constante est que leurs nombres dérivés correspondants soient égaux.

15. Dans l'infinie variété de fonctions que la notion générale de fonction permet de concevoir, on se bornera évidemment à l'étude des catégories qui offrent un intérêt pratique ou théorique. Voici les principales classifications auxquelles les recherches analytiques ont conduit.

Prenons les fonctions réelles d'une variable réelle, et séparons-les d'abord en fonctions continues et discontinues. Parmi ces dernières, en partant de l'idée la plus générale de fonction et en restreignant de plus en plus cette notion, on pourra considérer successivement (1) :

1° Les *fonctions mesurables* $f(x)$ au sens de M. Lebesgue, c'est-à-dire telles que, quels que soient les nombres A et B , l'ensemble des points pour lesquels on a $A < f < B$ soit mesurable. Toutes les fonctions actuellement connues sont mesurables (2).

tifs. On voit donc l'importance de ces nombres dans l'étude des variations des fonctions.

Ces nombres dérivés s'interprètent géométriquement : si l'on construit la courbe $y = f(x)$, ainsi que les droites AM joignent le point $A(x_0, y_0)$ à un point quelconque $M(x, y)$ de cette courbe, ils représentent les coefficients angulaires de quatre droites limites faciles à définir (cf. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 68).

Pour d'autres applications, voir n° 199, note.

(1) Cf. DU BOIS-REYMOND, *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen* (*J. de Crellé*, t. 79, p. 21).

(2) Toute fonction continue est évidemment mesurable, car les ensembles à

La considération des limites supérieure et inférieure d'une fonction à droite et à gauche d'un point permet de compléter la notion de dérivée par celle de nombres qui peuvent remplacer dans certaines recherches les dérivées ordinaires et qui existent pour toutes les fonctions $f(x)$, continues ou non, bien définies en un point x_0 et dans son voisinage : ce sont les *nombres dérivés*.

Comme s'il s'agissait d'obtenir la dérivée ordinaire, considérons le rapport

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (0 < h \leq \delta).$$

Ses deux limites supérieure et inférieure à droite sont appelées *nombres dérivés supérieur et inférieur* de la fonction à droite du point considéré. On obtient de même les *nombres dérivés supérieur et inférieur à gauche*.

Par exemple à l'origine, les fonctions représentées par $x \sin \frac{1}{x}$ et $x \sin \frac{1}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \geq 0$, et par zéro pour $x = 0$, ont chacune pour nombres dérivés à droite $+1$, à gauche -1 .

Toute fonction bien définie a en chaque point *quatre* nombres dérivés, finis ou infinis, distincts ou égaux. Quand les deux premiers coïncident, la fonction a *une dérivée à droite*; quand les quatre coïncident, la fonction a *une dérivée* ⁽¹⁾.

menti per la teorica delle funzioni di variabili reali, § 107-115. — DARBOUX, *A. E. N.*, 1875, p. 80 et 106. — BROUËN, *M. A.*, t. LI, p. 299.

⁽¹⁾ Cette notion est due à Du Bois-Reymond, Dini, Scheeffer (*A. M.*, t. V, p. 52). Elle n'exige pas que le domaine avoisinant le point x_0 soit continu.

Lorsque les quatre nombres dérivés sont bornés, la fonction est continue. La réciproque n'est pas vraie, même si la fonction continue est à variation bornée; ainsi la fonction $x^2 \sin \frac{1}{x}$ a ses nombres dérivés non bornés. La condition des quatre nombres dérivés *bornés* conduit aux fonctions lipschitziennes (voir *infra*); celle des quatre nombres dérivés *égaux* donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ait une dérivée. Quand un seul des quatre nombres dérivés est *continu*, il est égal aux trois autres, et par suite la fonction a une dérivée.

Si les quatre nombres dérivés sont positifs, la fonction est croissante. Si les deux nombres dérivés à droite sont positifs, la fonction est croissante à droite; si les deux nombres dérivés à droite sont de signes contraires, la fonction n'est ni croissante, ni décroissante à droite. Enfin la fonction a un minimum en tout point où les deux nombres dérivés à gauche sont négatifs et à droite sont posi-

minimum zéro dans toute portion de (ab) , sans être pourtant toujours nulle, sinon la fonction serait continue ⁽¹⁾.

Au contraire, une fonction est totalement discontinue dans (ab) quand son oscillation n'a pas son minimum nul dans toute portion de (ab) ⁽²⁾.

L'étude des fonctions ponctuellement discontinues se rattache à celle des fonctions limites simples de fonctions continues, comme nous le dirons en parlant de la classification des fonctions d'après M. Baire.

Remarquons enfin qu'étant donnée une fonction présentant en des points isolés une singularité d'un certain type α_n , une méthode appelée par Hankel *principe de condensation des singularités* permet d'en déduire une fonction $f(x)$ ayant une singularité de ce type dans tout intervalle. Elle repose sur la propriété suivante des séries uniformément convergentes à éléments discontinus : un point est point de discontinuité pour une série uniformément convergente $u(x)$ lorsqu'il est point de discontinuité pour un élément $u_n(x)$ de cette série et un élément unique ⁽³⁾.

Ce théorème admis, on obtient la fonction cherchée $f(x)$ en essayant de former une série uniformément convergente dont les éléments soient des fonctions $u_n(x)$ ayant chacune des singularités du type α_n en des points isolés, telles de plus que l'ensemble formé par les singularités de tous les éléments $u_n(x)$ soit dense partout ⁽⁴⁾.

plus qu'elle n'est toujours développable en série trigonométrique, quand même elle se comporterait *régulièrement* aux points de discontinuité.

Pour toute fonction ponctuellement discontinue, l'ensemble des points de continuité est de seconde catégorie, au sens de M. Baire, c'est-à-dire qu'il n'est pas constitué par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses.

Cf. DINI, *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*. — HANKEL, *M. A.*, t. XX, p. 53. — HARNACK, *M. A.*, t. XIX, p. 238; t. XXIV, p. 218. — VOLTERRA, *Giorn. di Matem.*, 1881, p. 76. — PRINGSHEIM, *Encyklopädie*, t. II, A., p. 39 et Notes 205, 208, 209. — BAIRE, *C. R.*, 1898, 1^{er} semestre, p. 885; *Fonctions discontinues*, p. 74. — BOREL, *Fonctions de variables réelles*, p. 26.

⁽¹⁾ Inversement, l'ensemble des points où l'oscillation dépasse un nombre fixe n'est dense dans aucune portion de (ab) .

⁽²⁾ Telle est la fonction de Dirichlet.

⁽³⁾ C'est un corollaire de la proposition classique que nous démontrerons au n° 66.

⁽⁴⁾ Cf. HANKEL, *Untersuchungen über die unendlich oft unstetigen und oscillirinden Funktionen*, 1870 (et aussi *M. A.*, t. XX, p. 69). — DINI, *Fonda-*

à droite du point considéré. Leur différence $l_d - l_d$ représente l'oscillation ω_d de la fonction à droite de x_0 . Quand ω_d est nul, la fonction tend à droite de x_0 vers une valeur déterminée que nous avons représentée par $f(x_0 + 0)$ (voir p. 20).

Lorsque $f(x_0 + 0)$ existe et est égal à $f(x_0)$, la fonction est dite *continue à droite* de x_0 ou encore *semi-continue supérieurement* au point x_0 . Définitions analogues pour l_g , l_g , ω_g , $f(x_0 - 0)$, ainsi que pour une fonction continue à gauche ou *semi-continue inférieurement*.

Une fonction semi-continue inférieurement et supérieurement en un point est continue en ce point. Une fonction semi-continue supérieurement en tout point d'un intervalle est semi-continue supérieurement dans cet intervalle. Un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement a une somme qui jouit de la même propriété (1).

Un point x_0 est pour $f(x)$ une *discontinuité de première espèce* lorsque $f(x_0 - 0)$ et $f(x_0 + 0)$ existent; c'est une discontinuité de seconde espèce lorsque les différences $l_d - l_d$ et $l_g - l_g$ ne sont pas toutes deux nulles.

Une fonction est *régulière* en un point de première espèce lorsqu'elle a pour valeur en ce point la moyenne arithmétique de ses valeurs limites à droite et à gauche de ce point (2).

On peut encore distinguer, avec Dini et Hankel, les fonctions *ponctuellement* et *totalement* discontinues dans un intervalle (ab) . Les premières sont les fonctions discontinues qui restent continues sur un ensemble de points dense dans (ab) : en d'autres termes, dans tout intervalle compris dans (ab) , il y a des points où elles sont continues (3). L'oscillation de pareilles fonctions a donc pour

(1) Pour les propriétés des fonctions semi-continues, cf. BAIRE, *Fonctions discontinues*, p. 72.

(2) En ce cas la fonction

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)}{2} - f(x_0)$$

est continue pour $t = 0$.

(3) Après quelques hésitations sur la définition à donner de cette notion, qu'Harnack rattachait à celle d'intégrabilité, la définition du texte a prévalu: dès lors une fonction ponctuellement discontinue n'est pas toujours intégrable pas

nombres a_n a au moins un point limite α ; pour une suite de valeurs a_n tendant vers α , les b_n convergent aussi vers α ; donc l'oscillation en α surpasserait ω , ce qui est contre l'hypothèse (1).

Supposons maintenant la fonction $f(x)$ définie aussi au point limite x_0 . Elle est dite *continue en ce point* lorsque son oscillation y est nulle; il suit de là que la valeur commune des limites supérieure et inférieure $L(x_0)$ et $l(x_0)$ est la valeur de la fonction en x_0 (2). La fonction est *continue dans un intervalle fermé* (ab) lorsqu'elle est continue en tout point intérieur et, de plus, continue à droite du point a et à gauche du point b (3).

Une fonction qui n'est pas continue est appelée *discontinue* (4).

Prenons une fonction discontinue en un point x_0 et considérons *séparément* les valeurs de x supérieures à x_0 et les valeurs inférieures à x_0 . Pour les valeurs de x supérieures à x_0 , les nombres l_i et L_i , relatifs aux intervalles $(x_0, x_0 + \delta_i; \delta_i \geq 0)$ dont nous avons parlé ont des limites l_d et L_d lorsque les δ_i tendent vers zéro. On les appelle limites inférieure et supérieure de la fonction

(1) *La réciproque n'est pas vraie.* Par exemple, soit une fonction égale à $\sqrt{x^2}$: x pour $x \geq 0$ et à zéro pour $x = 0$. Son oscillation est égale à 2 au point zéro et à 1 dans chacun des intervalles $(-1, 0)$, $(0, +1)$, puisque la fonction est égale à -1 ou à $+1$, suivant que l'on a $x < 0$ ou $x > 0$.

(2) La valeur de la fonction en ce point se confond donc avec *la limite des valeurs qu'elle prend dans son voisinage* et réciproquement: par suite, on a là une autre manière de présenter la définition de la continuité en un point.

(3) Souvent on *définit* une fonction continue *dans un intervalle* celle dont l'oscillation descend au-dessous de tout nombre donné dans tout intervalle suffisamment petit (c'est-à-dire celle qui est uniformément continue): on a alors à *démontrer* qu'une fonction continue en chaque point d'un intervalle est continue dans cet intervalle (voir le dernier théorème du texte ou le n° 19).

(4) Les fonctions représentées par e^{-x} , $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, pour $x \geq 0$, ont à l'origine une discontinuité isolée, quelle que soit leur valeur à l'origine.

La fonction $\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$ a une infinité de discontinuités dans le voisinage de l'origine.

La série

$$\sum_n \left[\frac{1}{n!} \varphi(n!x) \right], \quad \varphi(x) = 1 - \lim_{n=\infty} (\sin \pi x)^{\frac{2}{2n-1}}$$

est discontinue pour toutes les valeurs rationnelles de x et continue pour toutes les valeurs irrationnelles.

La fonction de Dirichlet est discontinue en tout point.

contenant x_0 et intérieurs les uns aux autres correspondent des nombres $L_2, L_3, \dots, l_2, l_3, \dots$ tels que

$$l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq L_2 \leq L_1.$$

Donc les l_i et les L_i tendent respectivement vers des limites $l(x_0)$ et $L(x_0)$, lorsque les intervalles Δ_i tendent vers zéro : on les appelle *limite inférieure* et *limite supérieure* de la fonction au point x_0 .

L'*oscillation* de la fonction au point x_0 est la différence $\omega(x_0)$ entre $L(x_0)$ et $l(x_0)$: on peut dire aussi que c'est la limite vers laquelle tend l'oscillation de la fonction dans l'intervalle ϵ

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

lorsque δ tend vers zéro (1). L'oscillation de la fonction en un point représente le degré de discontinuité (*le saut*) de la fonction en ce point (2).

La proposition suivante, due à M. Baire, établit une relation entre les oscillations d'une fonction aux divers points d'un intervalle (ab) et ses oscillations dans les intervalles compris dans (ab) .

Lorsque aux divers points de (ab) l'oscillation ne dépasse pas un nombre fixe ω , on peut faire correspondre à tout nombre ϵ un nombre δ assez petit pour que l'oscillation reste inférieure à $\omega + \epsilon$ dans tout intervalle de longueur δ (3).

En effet, s'il en était autrement, on pourrait déterminer des couples de points $(a_n b_n)$ tels que l'on ait à la fois $b_n - a_n$ tendant vers zéro et $|f(b_n) - f(a_n)|$ supérieur à $\omega + \epsilon$. L'ensemble des

(1) En effet, aux divisions $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ correspondent des oscillations $\omega_1, \omega_2, \dots$ telles que l'on ait $\omega_i = L_i - l_i$. L'oscillation $\omega(x_0)$ est la limite des nombres décroissants ω_i .

(2) On peut appliquer ces définitions à des fonctions *non bornées*; mais alors les nombres $L(x_0)$ et $l(x_0)$ ne sont plus forcément finis. Le *degré de discontinuité* d'une fonction en un point x_0 est *infini* lorsque la fonction est illimitée dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ quel que soit δ .

La définition d'*oscillation d'une fonction* en un point s'étend aux fonctions d'un nombre quelconque de variables; il suffit de remplacer l'intervalle 2δ par une sphère de rayon δ .

(3) Pour en déduire qu'une fonction continue en chaque point d'un intervalle est uniformément continue dans cet intervalle, il n'y a qu'à considérer le cas où ω est nul. Du reste, en traitant de la continuité, nous reprendrons avec plus de détails le raisonnement du texte (n° 19).

Une fonction réelle d'une variable réelle est *bornée* ou limitée dans un intervalle lorsque l'ensemble de ses valeurs jouit de cette propriété; on définit d'une manière analogue la fonction *bornée supérieurement* ou *inférieurement*.

Une fonction bornée a des limites supérieure et inférieure L et l qui sont finies (p. 41); l'intervalle (l, L) est le plus petit intervalle contenant toutes les valeurs de la fonction.

Une fonction finie en chaque point d'un intervalle fermé peut ne pas être bornée dans cet intervalle. Ainsi la fonction égale à $\frac{1}{x}$ pour $x \geq 0$ et à zéro pour $x = 0$ est finie et déterminée en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$; elle n'est pas bornée dans cet intervalle, car elle dépasse tout nombre donné. En ce cas, les symboles $+\infty$ et $-\infty$ peuvent être considérés comme représentant les limites supérieure et inférieure de la fonction.

Lorsqu'une fonction a des limites supérieure ou inférieure *finies qui sont effectivement atteintes en un point de l'intervalle*, ces limites prennent le nom de *maximum* et de *minimum* ⁽¹⁾.

Considérons une fonction bornée $f(x)$ définie sur un ensemble E contenu dans un intervalle (ab) . On appelle *oscillation* de la fonction *dans cet intervalle*, la différence entre les limites supérieure et inférieure de la fonction dans cet intervalle.

Soit x_0 un *point limite* de l'ensemble E , faisant ou non partie de E . Les points de E intérieurs à un intervalle Δ_1 contenant x_0 forment un ensemble, sur lequel $f(x)$ admet des limites supérieure et inférieure L_1 et l_1 . De même à des intervalles $\Delta_2, \Delta_3, \dots$

(1) Déjà Gauss avait remarqué qu'une fonction peut avoir des limites supérieure et inférieure finies sans avoir ni maximum ni minimum (*Œuvres*, t. III, p. 10) : *Ex suppositione X obtinere posse valorem S, neque vero valorem U, nondum sequitur inter S et U necessario valorem T jacere, quem X attingere, sed non superare possit. Superest alius casus: scilicet fieri posset ut inter S et U limes situs sit, ad quem accedere quidem quam prope velis possit X, ipsum vero nihilominus nunquam attingere.*

Donnons, comme exemple, la fonction $(1-x^2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1}$ dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Elle est nulle pour $x = -1$; quand x augmente, elle décroît; elle tend vers -1 , quand x tend vers zéro. Elle est nulle pour $x = +1$; quand x diminue, elle croît; elle tend vers $+1$, quand x tend vers zéro. Pour $x = 0$, elle est nulle. Ainsi la fonction a pour limites supérieure et inférieure $+1$ et -1 ; dans le voisinage de l'origine, elle peut s'en approcher autant que l'on veut sans les atteindre.

proposition suivante, connue sous le nom de *théorème de M. Jordan*, est fondamentale :

Étant donné un contour fermé C, les points du plan qui n'appartiennent pas à ce contour forment deux continuum ayant chacun ce contour pour frontière et n'ayant pas de point frontière en dehors de ceux de cette courbe.

Des deux continuum ainsi déterminés, l'un est *intérieur* au contour ⁽¹⁾, l'autre lui est *extérieur* ⁽²⁾.

La réciproque n'est pas vraie : tout ensemble qui divise le plan en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure à l'ensemble, ne définit pas une courbe continue ⁽³⁾.

La proposition de M. Jordan a de nombreux corollaires dans l'*Analysis situs*.

§ 4. — QUELQUES CLASSIFICATIONS DES FONCTIONS.

14. Après ces considérations sur les ensembles, revenons à l'étude de la correspondance de deux ensembles, c'est-à-dire des fonctions.

(1) Un point est *intérieur* à un triangle lorsqu'il est situé sur un segment dont les extrémités appartiennent au triangle; définition analogue pour le point *intérieur* à un contour fermé simple. On peut dire aussi qu'un point intérieur à un contour est celui que l'on ne peut joindre au point à l'infini par une courbe continue sans traverser le contour.

(2) L'intuition semble rendre évidente cette proposition; mais il s'agit d'en donner une démonstration, soit géométrique, soit même arithmétique, si l'on veut atteindre la rigueur mathématique parfaite. C'est ce qu'ont tenté MM. Jordan [*Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 90 (la preuve qu'il y donne paraît insuffisante)], Schoenflies (*Göttinger Nachr.*, 1896, p. 79; 1902, p. 185; *M. A.*, t. LVIII, p. 195), de la Vallée-Poussin (*Analyse*, t. I, p. 308), Ames (*Americ. J.*, 1905, p. 341), Bliss (*B. Americ. M. S.*, 1904, p. 398), Veblen (*Tr. Americ. M. S.*, 1904, p. 365, et 1905, p. 83). Parmi ces démonstrations, les unes supposent seulement que le contour C est une courbe de Jordan, d'autres qu'elle est de plus régulière (ce qui suffit pour les applications); la preuve arithmétique donnée par M. Ames est particulièrement rigoureuse et simple; celle donnée par M. Veblen, très rigoureuse, s'applique à des courbes plus générales. Cf. aussi Osgood, *Funktionen-theorie*, t. I, p. 130. — SCHOENFLIES, *M. A.*, t. LXII, p. 287.

(3) Ainsi, il n'y a pas équivalence entre le concept de la *continuité analytique* et la notion géométrique de frontière de domaine divisant le plan en deux régions séparées. Cette dernière est plus large : il lui faut ajouter une condition pour la restreindre au concept plus étroit de courbe continue.

13. Les fonctions de plusieurs variables réelles ainsi que les fonctions d'une ou plusieurs variables complexes que nous étudierons, et spécialement les fonctions analytiques, sont définies dans des *domaines continus* ou *continuum*. Aussi devons-nous préciser la définition arithmétique de ces domaines et rappeler leurs propriétés.

Un domaine est dit *continu* lorsque, étant donnés deux quelconques de ses points, l'un fixe (on le prendra à l'infini si le voisinage du point infini appartient au domaine), l'autre quelconque variable, on peut échelonner entre eux un nombre fini de points tels que le voisinage de l'un quelconque d'entre eux appartienne tout entier au domaine et renferme le point suivant (1).

D'après les définitions données plus haut relatives aux ensembles, les *points intérieurs* à un continuum sont ceux dont le voisinage tout entier appartient au domaine. Les *points frontières* sont ceux dont une partie seulement du voisinage appartient au domaine. Enfin un point est *extérieur* au continuum lorsqu'il n'est ni intérieur, ni frontière.

On peut déterminer un domaine continu, soit en définissant explicitement l'ensemble formé par tous ses points (par exemple l'inégalité $x^2 + y^2 + r^2 < 0$ représente le continuum intérieur à une circonférence), soit aussi en faisant connaître sa frontière. De là, l'importance des propositions qui permettent de déterminer, d'après la frontière d'un continuum, les points qui lui sont intérieurs. Lorsqu'on se place à ce point de vue, ou lorsqu'on veut établir les lois de l'*Analysis situs* sur la théorie des ensembles, la

être enfermés dans un nombre fini ou *une infinité dénombrable* d'intervalles dont la somme des longueurs peut descendre au-dessous de tout nombre donné.

Un ensemble dénombrable est évidemment de mesure nulle; il en est de même de l'ensemble formé par une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Un ensemble de mesure nulle peut être dense partout; tel est l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1 (notons qu'au sens de Cantor, il aurait pour mesure l'unité, et que la *mesure* au sens de Borel et au sens de Cantor ne coïncident forcément que dans les ensembles fermés). Un groupe intégrable est toujours non dense. Cf. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 28 et 102. — BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 46; *Fonctions de variables réelles*, p. 16.

(1) Cf. WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 203. — MITTAG-LEFFLER, *A. M.*, t. IV, p. 2.

Par exemple, l'ensemble des points

$$1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

est non étendu. En effet, on peut les répartir en deux catégories : l'une contient les points avoisinant l'origine, et l'intervalle qui les renferme est aussi petit que l'on veut; l'autre n'a plus qu'un nombre fini de points (1).

Pour les ensembles à un nombre quelconque de dimensions, les définitions sont analogues.

Les mots *étendue* et *mesure* J sont synonymes. Voici comment M. Borel arrive à la définition générale de la *mesure* d'un ensemble. Supposons-le linéaire : appelons *mesure d'un intervalle* $(\alpha\beta)$ la différence $\beta - \alpha$, et désignons respectivement par E et C un ensemble de points tous compris dans un intervalle (ab) et son ensemble complémentaire. Si l'on enferme tous les points de E dans une *infinité dénombrable* d'intervalles, la somme des mesures de ces intervalles a une limite inférieure $m_e(E)$ lorsqu'on choisit ces intervalles de toutes les manières possibles : on l'appelle *mesure extérieure* de E. L'ensemble complémentaire C donne une limite analogue $m_e(C)$. L'ensemble (ab) est dit *mesurable* lorsque la somme de $m_e(E)$ et de $m_e(C)$ est égale à la mesure de (ab) , c'est-à-dire à $b - a$; la *mesure* de l'ensemble est alors égale à $m_e(E)$ (2). Les ensembles mesurables sont les seuls dont on s'occupe.

de Schœnflies); t. II, A, p. 39 et notes 205, 208, 209 (article de Pringsheim), p. 96 et note 197 (article de Voss). C'est à tort qu'Hankel, à propos des fonctions ponctuellement discontinues, confondait l'ensemble inétendu et l'ensemble non dense; un ensemble inétendu est non dense, mais la réciproque n'est pas vraie. Harnack en donne un exemple (*M. A.*, t. XIX, p. 239).

(1) Tout ensemble de première espèce est d'étendue nulle; tel est l'ensemble de première espèce et du second ordre

$$1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4, \dots$$

La réciproque n'est pas vraie : tous les ensembles discrets ne sont pas de première espèce. Plus généralement, l'étendue d'un ensemble est égale à celle de son dérivé; par suite, un ensemble dont le dérivé est dénombrable a une étendue nulle.

(2) Par suite, un ensemble de *mesure nulle* est celui dont les éléments peuvent

Prenons maintenant le cas où les deux étendues extérieure et intérieure de l'ensemble E coïncident. On dit alors que l'ensemble a une étendue, ou bien encore qu'il est mesurable au sens de M. Jordan (ce qu'on indique souvent par la locution *est mesurable* J); la valeur commune des nombres \mathcal{C}_e et \mathcal{C}_i est appelée étendue de l'ensemble (*Inhalt der Menge*) ⁽¹⁾.

La frontière de l'ensemble superficiel E est un ensemble qui a lui-même une étendue extérieure. Cette étendue extérieure \mathcal{C}_f est égale à la différence entre les nombres \mathcal{C}_e et \mathcal{C}_i relatifs à E ; car les rectanglès qui interviennent pour former les sommes A sans servir pour les sommes a sont ceux que l'on devrait considérer pour obtenir \mathcal{C}_f . Dès lors, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit mesurable J est que sa frontière ait une étendue nulle ⁽²⁾.

Soit en particulier un ensemble linéaire ⁽³⁾. Il est dit *non étendu, discret, résoluble*, formant un *groupe intégrable* (*unausgedehnt, discret, inhaltlos, integrirbar*) lorsqu'il est d'étendue extérieure nulle, c'est-à-dire mesurable J et d'étendue nulle : en pareil cas, ses éléments peuvent être enfermés dans un nombre fini d'intervalles dont la somme des longueurs peut descendre au-dessous de tout nombre donné, et réciproquement ⁽⁴⁾.

(1) L'étendue d'un ensemble prend aussi les noms de *longueur* et d'*aire*, suivant qu'il s'agit d'une étendue linéaire ou superficielle. Un ensemble continu *quarrable* est celui qui a une aire, c'est-à-dire qui est mesurable J (voir n° 157).

(2) L'ensemble des points à coordonnées rationnelles n'est pas mesurable J , car il a une étendue intérieure nulle et une étendue extérieure différente de zéro.

La courbe de Peano est mesurable J , mais d'étendue non nulle; elle ne peut donc servir à limiter un domaine.

Les courbes de Jordan n'ont pas forcément une étendue extérieure (*une aire*) nulle. Quand elles ont une aire, elles peuvent parfois encore, quoique non mesurables J , servir de frontière à un domaine (non quarrable), et l'on pourra distinguer sur elles deux côtés. C'est ce qu'a montré sur un exemple M. Osgood (*Trans. American M. S.*, 1903, p. 107).

Les courbes rectifiables ont toujours une aire nulle (n° 156).

(3) Un pareil ensemble a toujours une étendue *superficielle* extérieure nulle; mais il peut avoir une étendue *linéaire* extérieure quelconque, car on arrive à cette dernière notion en considérant non plus des rectangles, mais des intervalles dans lesquels on enferme les points de l'ensemble.

(4) Pour ces définitions, cf. HARNACK, *M. A.*, t. XIX, p. 238 (quelques points ont dû être rectifiés); *M. A.*, t. XXIV, p. 218, et *B. D.*, 1882, p. 242. — DR LA VALLÉE-POUSSIN, *J. M.*, 1892, p. 423, et *Analyse*, t. I, p. 221. — LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 38. — *Encyklopädie*, t. I, p. 200 et note 71 (article

subdivisant à nouveau ces rectangles en rectangles élémentaires et en répétant cette opération un nombre infini de fois, de façon que les dimensions des rectangles tendent vers zéro, on est conduit à deux suites de nombres $A_1, A_2, \dots, a_1, a_2, \dots$. Ceux de la première suite ne vont jamais en croissant et ils dépassent un nombre fixe; donc ils *tendent* vers une limite \mathcal{C}_e . Ceux de la seconde suite ne décroissent jamais et ils restent inférieurs à un nombre fixe; donc ils *tendent* vers une limite \mathcal{C}_i . Ces deux limites s'appellent *étendue extérieure* et *étendue intérieure* de l'ensemble E (1).

Elles sont indépendantes du réseau initial de rectangles et des modes de subdivisions ultérieures de ce réseau. En effet, soient \mathcal{C}_e et \mathcal{C}'_e les étendues extérieures de l'ensemble E qui correspondent à deux lois différentes de partage initial et de subdivisions ultérieures; désignons par $r_1, r_2, \dots, r'_1, r'_2, \dots$ l'ensemble des rectangles que l'on est ainsi amené à tracer (2). La limite obtenue en considérant une loi de partage dans laquelle figureraient successivement à la fois les côtés des rectangles r_1 et r'_1, r_2 et r'_2, \dots se confondrait à la fois avec \mathcal{C}_e et \mathcal{C}'_e . Ces deux limites sont donc égales (3).

(1) Nous donnons ici les définitions de M. Jordan (*J. M.*, 1892, p. 77); on les appliquera aux ensembles linéaires en remplaçant les mots *rectangle*, *étendue* par les mots *intervalle*, *longueur*. Pour définir l'étendue d'un ensemble fermé E, placé dans un espace à n dimensions, M. Cantor décrit, de chaque point de E comme centre, des sphères toutes de même rayon r . Leur ensemble limite une portion d'espace qui diminue quand r croît. Par suite, quand r tend vers zéro, le volume de cet espace a une limite positive ou nulle: *cette limite définit l'étendue de l'ensemble E* au sens de M. Cantor (*M. A.*, t. XXI, p. 54). Cette définition est équivalente à celle de l'*étendue extérieure* au sens de M. Jordan.

(2) Nous supposons parallèles entre eux les côtés des rectangles; mais les nombres auxquels on est conduit sont aussi indépendants de l'orientation de ces côtés.

(3) On peut aussi définir les nombres \mathcal{C}_e et \mathcal{C}_i comme étant les limites inférieure et supérieure des deux ensembles formés respectivement par toutes les sommes des types A et a lorsqu'on divise de toutes les manières possibles le plan en rectangles élémentaires. Ces limites *existent* puisque ces ensembles sont bornés, l'un inférieurement, l'autre supérieurement: de plus, comme on le prouve aisément, les sommes A_i et a_i *tendent* vers ces limites.

En d'autres termes, si l'on désigne par $g(x, y)$ une fonction égale à un en tout point de E, et à zéro hors de cet ensemble, les sommes $\Sigma g(x, y) dx dy$ ont des limites supérieure et inférieure, et elles *tendent* vers ces limites.

Nous appellerons plus loin ces limites *intégrales par excès et par défaut* de la fonction g , dans un domaine contenant tous les points de E (n° 161).

semble. Chaque point intérieur à l'ensemble E est extérieur à l'ensemble \mathcal{C} (1).

Un ensemble parfait est d'un *seul tenant* (*zusammenhängend*) lorsqu'il n'est pas séparable en ensembles partiels qui soient chacun parfaits : on peut dire aussi que c'est un ensemble parfait tel que l'on puisse réunir deux points arbitraires de l'ensemble par une courbe régulière simple située tout entière dans l'ensemble (2).

12. A tout ensemble borné de points situés dans un domaine d'un nombre quelconque de dimensions, on peut faire correspondre des nombres qui sont, vis-à-vis de l'ensemble, ce que sont les longueurs, les aires, les volumes pour les segments, les domaines plans, les domaines de l'espace. Ils jouent un rôle important dans diverses questions d'analyse, spécialement dans celle de l'intégrabilité des fonctions.

Soit E un ensemble borné à une ou plusieurs dimensions, par exemple à deux dimensions. Divisons le plan d'une manière quelconque en un nombre *fini* de rectangles élémentaires; appelons A , et a , la somme des aires de ceux de ces rectangles, considérés ou non comme fermés (3), qui renferment au moins un point de E , et de ceux d'entre eux dont tous les points appartiennent à E . En

(1) Le point *limite* diffère du point *frontière*. Le point limite n'est en même temps point frontière que s'il n'est pas intérieur à l'ensemble : inversement, un point isolé est un point frontière sans être un point limite.

Ainsi tout point de l'ensemble $x^2 + y^2 \leq 1$ est un point limite; les points de la circonférence de rayon 1 sont de plus points frontières. Dans l'ensemble formé par les inverses des entiers, l'origine est point limite et point frontière. Dans l'ensemble formé par la suite des entiers, chaque point est point frontière sans être point limite. Dans l'ensemble formé par les points à coordonnées rationnelles, tous les points sont points frontières : il n'y a ni points intérieurs, ni points extérieurs à l'ensemble.

(2) C'est le sens de M. M. Jordan (*Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 24 et 51) et Schœnflies (*M. A.*, t. LVIII, p. 208). M. Cantor donne pour l'ensemble *zusammenhängend* une définition un peu différente (*M. A.*, t. XVI, p. 575) : le domaine d'un *seul tenant* de M. Jordan revient au domaine

zusammenhängend + abgeschlossen

de M. Cantor.

L'ensemble complémentaire d'un ensemble parfait d'un seul tenant est lui-même d'un seul tenant toutes les fois que l'on peut joindre deux points quelconques de cet ensemble par une ligne appartenant tout entière à l'ensemble (SCHÖNFLIES, *M. A.*, t. LVIII, p. 210).

(3) C'est-à-dire comme contenant ou non leurs frontières.

même; un ensemble parfait est toujours dense en lui-même, mais il n'est pas nécessairement dense (1).

Un ensemble E n'est dense nulle part dans \mathcal{Q} ou non dense, lorsqu'il n'y a aucune portion de \mathcal{Q} dans laquelle l'ensemble E soit dense partout, en d'autres termes, si toute portion de \mathcal{Q} contient une région dans laquelle ne se trouve aucun point de E .

Désignons par E un ensemble ne renfermant pas tous les points d'un domaine : ceux qui n'appartiennent pas à E forment un second ensemble \mathcal{C} complémentaire du premier. On appelle *frontière commune* des ensembles E et \mathcal{C} l'ensemble formé par les points qui appartiennent à la fois à l'un des ensembles et au dérivé de l'autre. Ainsi un point frontière de E (et dès lors de \mathcal{C}), s'il appartient à E (à \mathcal{C}), a dans tout voisinage au moins un point de \mathcal{C} (de E). Quand tous les points d'un ensemble ne sont pas points frontières, on peut définir l'*intérieur* de l'ensemble. Ce sont les points tels que tout leur voisinage appartienne à l'en-

(1) Voici un exemple d'*ensemble fermé*, qui est non dense dans tout intervalle.

A chaque nombre rationnel $\frac{p}{q}$ compris dans l'intervalle $(0, 1)$ associons l'intervalle

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}\right).$$

D'où, une infinité dénombrable d'intervalles : soit \mathcal{C} l'ensemble formé par les points de ces intervalles. La théorie des fractions continues apprend qu'il existe des nombres irrationnels ξ non compris dans ces intervalles, c'est-à-dire tels que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^3} \quad \text{quel que soit} \quad \frac{p}{q}.$$

Soit E leur ensemble :

1° E est *fermé*; car, si un point de E' n'appartenait pas à E , ce point serait intérieur à \mathcal{C} (sans coïncider avec les extrémités des intervalles formant \mathcal{C}), et par suite \mathcal{C} contiendrait des points de E , ce qui n'a pas lieu;

2° E n'est dense dans aucun intervalle, car tout intervalle contient des points dont l'abscisse est rationnelle, par suite des points n'appartenant pas à E , ce qui serait absurde si E était partout dense dans cet intervalle, puisque E est fermé.

Dès lors, il existe aussi, d'après le théorème de Cantor-Bendixson, des ensembles *parfaits* jouissant de la même propriété, car l'ensemble fermé E n'est pas dénombrable.

Cf. BOREL, *Théorie des fonctions*, p. 39; *Fonctions de variables réelles*, p. 12. — BENDIXSON, *A. M.*, t. II, p. 416. — CANTOR, *A. M.*, t. IV, p. 381. — HADAMARD, *J. M.*, 1898, p. 69. — BAIER, *Thèse* (1899), p. 38; *Fonctions discontinues*, p. 54.

de fonctions continues (1), c'est-à-dire *représentables par des séries à éléments continus*, ou, ce qui revient au même, par des séries de polynomes (2).

5° Les fonctions n'ayant que des discontinuités de première espèce (3) : telle est la fonction intégrable de Riemann.

Celles qui de plus sont *régulières* en ces points de discontinuité. La fonction de Riemann rentre encore dans cette catégorie, ainsi que toutes celles qui satisfont aux conditions de Dirichlet.

6° Les fonctions *monotones* dans un intervalle, c'est-à-dire celles qui dans cet intervalle ne sont jamais décroissantes (ou jamais croissantes). Une fonction $f(x)$ n'est jamais décroissante dans un intervalle si l'on a

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0,$$

quels que soient les nombres x_1 et x_2 choisis dans l'intervalle (4).

(1) Cf. BAIRE, *C. R.*, 1898, 1^{er} semestre, p. 884; *Thèse*, p. 62 ou *Annali di Mat.*, 1899; *Fonctions discontinues*, p. 124. M. Lebesgue a démontré simplement le même théorème pour les *fonctions de plusieurs variables*, *C. R.*, 1899, 1^{er} semestre, p. 811. Voir aussi BAIRE, *B. S. M.*, 1900. — BOREL, *C. R.*, 1903, 2^e semestre, p. 903.

Comme cas particulier, citons les fonctions ayant une infinité dénombrable de discontinuités, ou plus généralement celles dont l'ensemble des discontinuités est de première espèce. Cf. BAIRE, *Fonctions discontinues*, p. 11 et 17. — LEBESGUE, *B. D.*, 1898.

(2) L'identité de ces deux derniers résultats découle presque immédiatement du théorème de Weierstrass (n° 16).

(3) Voici une de leurs propriétés essentielles : étant données deux fonctions quelconques $f(x)$ et $\varphi(x)$ de ce type, on peut toujours déterminer une constante k telle que pour la fonction $F = f + k\varphi$ on ait $F(x_0 - 0) = F(x_0 + 0)$, x_0 désignant un point de discontinuité de première espèce commun aux deux fonctions. Cette propriété rend les fonctions f et φ comparables entre elles en leurs points de discontinuité communs. Cf. LEBESGUE, *Séries trigonométriques*, p. 2.

(4) La fonction serait *croissante dans l'intervalle* si le produit ci-dessus était toujours *positif*. Elle serait *croissante en un point* x_0 de l'intervalle si l'on pouvait déterminer un nombre δ tel que l'on ait

$$(x - x_0)[f(x) - f(x_0)] > 0 \quad (0 < |x - x_0| < \delta).$$

Une fonction croissante *dans* un intervalle est évidemment croissante *en chaque* point de l'intervalle : on démontre aisément la réciproque.

Nous avons rappelé le rôle des *nombre dérivés* dans la question de la crois-

Les points de discontinuité d'une pareille fonction sont de *première espèce*, puisque, $f(x)$ ne décroissant jamais quand x croît, la limite $f(x_0 - 0)$ existe toujours, quel que soit le point x_0 choisi dans l'intervalle; de même $f(x_0 + 0)$ est déterminé. De plus, ils forment un ensemble dénombrable ⁽¹⁾.

Toute fonction monotone est intégrable au sens de Riemann (n° 159). Lorsqu'une fonction monotone a une dérivée dans un intervalle, celle-ci n'y change pas de signe. A ce titre, on pourrait en rapprocher les fonctions *convexes* et les fonctions *concaves* de M. Jensen. Une fonction réelle, finie et uniforme est dite *convexe* dans un intervalle lorsque l'on a

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

quels que soient les nombres x_1 et x_2 dans l'intervalle. Elle est *concave* lorsque, dans la relation précédente, il faut écrire \leq ⁽²⁾. Elle est dite *linéaire* lorsque, dans cette relation, il faut *constamment* mettre le signe $=$.

sancé. En particulier, si une fonction *ayant une dérivée* dans (ab) est croissante dans (ab) , cette dérivée n'est jamais négative. Réciproquement, si la dérivée existe dans (ab) et n'est ni négative en aucun point de (ab) , ni nulle sur aucun segment de (ab) , la fonction est croissante dans (ab) .

Dans l'étude de la croissance, le cas le plus simple est celui où (ab) peut être partagé en un nombre *fini* de parties telles que dans chacune d'elles la fonction soit monotone, et par suite, si la fonction a une dérivée, en un nombre *fini* de parties telles que dans chacune d'elles la dérivée ait un signe déterminé ou soit nulle.

⁽¹⁾ En effet, l'hypothèse $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ entraîne

$$f(b) - f(a) \geq [f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)] + \dots + [f(x_n + 0) - f(x_n - 0)];$$

par suite les points pour lesquels $f(x + 0) - f(x - 0)$ surpasse ϵ sont en nombre fini, quel que soit ϵ .

⁽²⁾ Ces dénominations viennent de ce que l'on peut écrire, dans le cas où la fonction $f(x)$ a une dérivée seconde continue,

$$f(x_1) + f(x_2) - 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 f''(x') \quad (x_1 < x' < x_2).$$

Par suite dans ce cas une fonction est *convexe* ou *concave* suivant que sa *dérivée seconde* est *positive* ou *négative*, ou encore suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers les y négatifs.

Sur les propriétés des fonctions convexes et leurs applications; cf. JENSEN, A. M., t. XXX, p. 175.

7° *Les fonctions à variation bornée* de M. Jordan (1).

Soit $f(x)$ une fonction bornée définie dans un intervalle (ab) . Si l'on partage cet intervalle en un nombre fini de parties (x_i, x_{i+1}) , l'expression

$$v = \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

définit la *variation* de la fonction dans le mode de subdivision (x_i, x_{i+1}) . Lorsque cette somme est bornée, quelle que soit la manière dont on choisisse les points x_i , la fonction $f(x)$ est dite à *variation bornée* (2).

Posons

$$f(b) - f(a) = \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = p - n, \quad v = p + n$$

et, par suite,

$$(1) \quad v = 2p + f(a) - f(b), \quad v = 2n + f(b) - f(a).$$

Les nombres p et $-n$ désignent la somme des variations des quantités $f(x_{i+1}) - f(x_i)$, qui sont respectivement positives et négatives. Ces relations montrent que, si l'une des trois quantités v, p, n est bornée, il en est de même des deux autres.

Les limites supérieures V, P, N des nombres v, p, n relatifs à tous les modes de division possibles de l'intervalle (ab) (ces trois limites existent si l'une existe) s'appellent *variation totale, variation totale positive, variation totale négative* de la fonction $f(x)$ (3);

(1) Elles sont importantes à bien des points de vue; par exemple, ce sont en définitive les fonctions développables en séries trigonométriques. Mais les fonctions *continues* à variation bornée offrent un intérêt spécial, car elles permettent d'introduire la notion de courbe de longueur finie ou *rectifiable* (n° 156).

(2) Cf. JORDAN, *Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 105. — LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 49 et 54. — STUDY, *M. A.*, t. XLVII, p. 312 [il les étudie sous le nom de fonctions à oscillation totale finie (*Funktionen mit beschränkter Schwankung*)].

Remarquons que, si l'on intercale un point de division entre x_i et x_{i+1} , la variation v ne peut qu'augmenter; son accroissement est au plus égal au double de l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) .

(3) On serait conduit à la même variation totale V si, à la place d'un nombre fini d'intervalles, on en considérait une infinité telle que leurs extrémités forment un ensemble réductible.

elles satisfont aux égalités

$$(2) \quad f(b) - f(a) = P - N, \quad V = P + N,$$

comme on le déduit des relations (1).

On peut encore remarquer qu'une fonction est à variation bornée lorsque la somme de ses oscillations dans les intervalles (x_i, x_{i+1}) a pour limite supérieure, lorsqu'on divise l'intervalle (ab) de toutes les manières possibles, un nombre fini (1).

THÉORÈME. — *Toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions monotones, et réciproquement.*

En effet, appliquons à un intervalle (ax) la première des égalités (2); il vient

$$f(x) = [f(a) + P(x)] - [N(x)],$$

ce qui justifie le théorème, puisque $P(x)$ et $N(x)$ croissent avec x .

On peut même faire en sorte que chacune des fonctions croissantes, dont $f(x)$ est la différence, soit *positive* : il suffit pour cela d'ajouter à chaque parenthèse une même quantité croissante et positive, telle que $|f(a)| + x - a$. Le problème admet une infinité de solutions.

La réciproque est immédiate, puisqu'une fonction croissante $f(x)$ a pour variation totale $f(b) - f(a)$, quantité bornée.

Corollaires. I. — Étant donnée une fonction à variation bornée $f(x)$, on peut toujours trouver une fonction croissante bornée $F(x)$ telle que l'on ait

$$F(x+h) - F(x) \geq |f(x+h) - f(x)| \quad (h > 0),$$

c'est-à-dire *qui varie plus vite* que $f(x)$.

En effet, il suffit de prendre pour F la somme des deux fonctions croissantes dont f est la différence.

(1) La somme, la différence et le produit de deux fonctions à variation bornée sont des fonctions de même nature; il en est de même de l'inverse d'une pareille fonction quand son module dépasse un nombre fixe. Cela tient à ce que l'oscillation d'une somme dans un intervalle est au plus égale à la somme des oscillations de ses parties.

La réciproque est vraie, car, si l'inégalité ci-dessus est satisfaite, f est la différence des deux fonctions croissantes F et $F - f$.

II. — Une fonction à variation bornée a au plus une infinité *dénombrable* de discontinuités ⁽¹⁾ : elles sont de première espèce. La réciproque n'est pas vraie ; même une fonction continue peut *ne pas être* à variation bornée : telle est dans tout intervalle la fonction de Weierstrass, et dans le voisinage de l'origine la fonction $x \sin \frac{1}{x}$ ⁽²⁾.

III. — Une fonction à variation bornée est intégrable³ au sens de Riemann (n° 159).

Enfin, on voit immédiatement qu'une fonction à nombres dérivés bornés est à variation bornée ; car sa variation totale ne dépasse pas $M\delta$ dans un intervalle d'étendue δ , M désignant une limite supérieure des valeurs absolues des nombres dérivés.

8° Les fonctions développables en séries trigonométriques (voir n° 84).

9° Les fonctions qui, dans un intervalle (ab) , satisfont aux conditions de Dirichlet. Elles ont été considérées par ce géomètre dans son Mémoire classique sur la série de Fourier, et il les a définies par les propriétés suivantes :

a. Elles sont uniformes et bornées.

(1) On peut aussi raisonner directement en remarquant d'abord que les points où l'oscillation de la fonction surpasse un nombre arbitraire ϵ ($\epsilon > 0$) sont en nombre fini. Dès lors, soient $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ des quantités tendant vers zéro en décroissant : les points pour lesquels l'oscillation surpassera ϵ_n sans surpasser ϵ_{n-1} sont en nombre fini.

(2) Ce n'est pas parce que ces fonctions ont une infinité de maxima et de minima qu'elles sont à variation non bornée ; par exemple, la fonction $x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ est à variation bornée, bien qu'elle ait aussi une infinité de maxima et de minima dans le voisinage de l'origine. En effet, elle admet un maximum ou un minimum, et un seul, dans chaque intervalle $(\mu\pi)^{-\frac{3}{2}}, (\overline{\mu+1}\pi)^{-\frac{3}{2}}$; la valeur absolue de ce maximum ou de ce minimum est au plus $(\mu\pi)^{-\frac{3}{2}}$: dès lors, la variation totale de la fonction est au plus $2 \sum (\mu\pi)^{-\frac{3}{2}}$, nombre fini. Cf. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 55.

b. Elles ont un nombre *fini* de points de discontinuité, tous de première espèce, et elles s'y comportent *régulièrement*.

c. Leur variation ne change de sens qu'un nombre *fini* de fois dans l'intervalle considéré ⁽¹⁾.

Pour de pareilles fonctions, l'intervalle (ab) peut être divisé en un nombre *fini* d'intervalles dans chacun desquels la fonction est monotone; par suite, ces fonctions peuvent être représentées par la différence de deux fonctions monotones ⁽²⁾. C'est à cette propriété, caractéristique des fonctions à variation bornée, qu'elles doivent d'être développables en séries trigonométriques, d'être intégrables, etc.

16. Considérons maintenant les fonctions uniformes et continues dans un intervalle fermé (ab) . Au point de vue de la représentation analytique et de l'approximation, elles jouissent toutes d'une propriété fondamentale établie par Weierstrass ⁽³⁾, et que

⁽¹⁾ Par exemple, la fonction de Weierstrass ne satisfait dans aucun intervalle aux conditions de Dirichlet, puisqu'elle a dans tout intervalle une infinité de maxima et de minima.

Des trois conditions de Dirichlet, la dernière seule est essentielle dans les applications : les fonctions *non bornées* ayant une infinité de discontinuités jouissent des mêmes propriétés que celles de Dirichlet, pourvu qu'elles satisfassent à la condition c et que $|f|$ ait une intégrale; nous dirons alors qu'elles satisfont aux conditions de Dirichlet généralisées.

⁽²⁾ Cf. PICARD, *Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 256. — DE LA VALLEE-POUSSIN, *Analyse*, t. II, p. 301. — La réciproque n'est pas vraie

⁽³⁾ WEIERSTRASS, *Berliner Sitzungsab.*, 1885; *J. M.* 1886 (traduction Laugel). — Cf. aussi les démonstrations plus simples données par MM. LEBESGUE (*B. D.*, p. 278; c'est celle que nous donnons dans le texte), PICARD (*Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 275; elle repose sur l'emploi des séries trigonométriques), MITTAG-LEFFLER (*R. del Circolo di Palermo*, 1900, p. 217), VOLTERRA (même Revue, 1897, p. 83), LERCH (*A. M.*, t. XXVII, p. 339), ainsi que le théorème plus général démontré par M. Stekloff (*C. R.*, 1902, 2^e sem., p. 848).

Enfin MM. Runge (*Zeitschrift M. und P.*, 1901, p. 229) et Borel (*Fonctions de variables réelles*, p. 75) ont montré que la formule d'interpolation de Lagrange, bien que fournissant des polynômes $P_{n-1}(x)$ qui servent de valeur approchée à la fonction $f(x)$ (et coïncident avec cette fonction pour n valeurs x_n de la variable), ne peut conduire au théorème de Weierstrass. L'approximation n'augmente même pas forcément avec le nombre n des abscisses x_n choisies dans l'intervalle (ab) .

Le théorème de Weierstrass s'étend aux fonctions continues de plusieurs variables variables et même, avons-nous vu, aux fonctions de plusieurs variables au plus ponctuellement discontinues dans tout ensemble parfait (Voir les références données plus haut).

nous démontrerons dès maintenant en supposant connus les principes les plus élémentaires relatifs aux séries.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Toute fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (ab) est représentable dans cet intervalle par des séries de polynomes absolument et uniformément convergentes.*

Montrons d'abord qu'à tout nombre positif ϵ , on peut faire correspondre un polynome $P(x)$ tel que $|f(x) - P(x)|$ n'atteigne pas ϵ pour toute valeur de x dans l'intervalle (ab) .

Le théorème est évident pour une fonction continue dans l'intervalle (ab) qui serait nulle dans une partie (ax) de cet intervalle et représentée par un segment rectiligne dans la partie restante (xb) . En effet, d'abord, par un changement de variable du type

$$X = mx + n,$$

on peut remplacer les intervalles (ax) , (xb) respectivement par $(-1, 0)$ et $(0, +1)$, par suite traiter le cas d'une fonction $\psi(x)$ nulle dans le premier de ces intervalles et représentée par un segment rectiligne dans le second. Or, une pareille fonction peut s'écrire

$$\psi(x) = k(x + |x|).$$

D'autre part, dans l'intervalle $(-1, +1)$, $|x|$ peut être développé en série uniformément convergente ordonnée suivant les puissances de $1 - x^2$, car on a $|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)}$. Donc, dans cet intervalle, $\psi(x)$ peut être représenté par un polynome avec telle approximation que l'on voudra.

Cela posé, je dis que la fonction $f(x)$ peut être remplacée, avec une erreur inférieure à la moitié de ϵ , par la somme d'un nombre fini de fonctions du même type que $\psi(x)$. En effet, entre a et b insérons des points de division a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , assez voisins pour que dans chacun des intervalles (a_i, a_{i+1}) l'oscillation de la fonction $f(x)$ n'atteigne pas la moitié de ϵ (n° 19), et désignons par $\varphi(x)$ l'ordonnée de la ligne brisée obtenue en joignant les points A, A_1, A_2, \dots, B de la courbe $y = f(x)$ qui correspondent aux abscisses a, a_1, a_2, \dots, b . La fonction $\varphi(x)$ est

continue et la valeur absolue de $f - \varphi$ n'atteint jamais la moitié de ε (¹).

Considérons la droite déterminée par les points A et A₁ : soit $\psi_1(x)$ l'ordonnée de cette droite dans l'intervalle (ab) . $\varphi(x)$ est égale à la somme de $\psi_1(x)$ et d'une fonction continue $\varphi_1(x)$ nulle sur (aa_1) et représentée sur (a_1b) par une nouvelle ligne polygonale A'₁A'₂A'₃

De même $\varphi_1(x)$ est égale à la somme d'une fonction continue $\psi_2(x)$ nulle sur (aa_1) et représentée sur (a_1b) par la droite qui passe par A'₁ et A'₂, et d'une fonction continue $\varphi_2(x)$ nulle sur (aa_2) et représentée sur (a_2b) par une nouvelle ligne polygonale A''₂A''₃

De proche en proche on remplacera ainsi $\varphi(x)$ par la somme de n fonctions continues $\psi_i(x)$ nulles sur (aa_{i-1}) et définies sur $(a_{i-1}b)$ par un segment rectiligne. Chacune des n fonctions $\psi_i(x)$ étant représentable par un polynôme avec une erreur inférieure à $\frac{\varepsilon}{2n}$, leur somme $\varphi(x)$ est représentable par un polynôme avec une approximation inférieure à la moitié de ε ; la fonction $f(x)$ elle-même différera de ce polynôme d'une quantité inférieure à ε en valeur absolue.

Ce lemme admis, prenons une suite de nombres positifs

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$$

décroissants et tendant vers zéro. A chacun d'eux ε_n on peut faire correspondre un polynôme $P_n(x)$ qui diffère de $f(x)$ d'une quantité inférieure à ε_n en valeur absolue : de plus, ces polynômes convergent uniformément vers $f(x)$, puisque les nombres ε_n sont indépendants de x . Dès lors, la série

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \dots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)]$$

converge vers $f(x)$ et converge uniformément. Sa convergence

(¹) En effet, dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}) , x est de la forme $a_i + \theta(a_{i+1} - a_i)$, ce qui donne

$$f(x) - \varphi(x) = (1 - \theta)[f(x) - f(a_i)] + \theta[f(x) - f(a_{i+1})] \quad (\theta < 1):$$

les multiplicateurs de $(1 - \theta)$ et de θ sont chacun inférieurs à $\frac{\varepsilon}{2}$.

absolue résulte de ce que $|P_n - P_{n-1}|$ n'atteint pas $\epsilon_n + \epsilon_{n-1}$, et par suite peut être rendu inférieur par exemple à $\frac{1}{n^2}$, quel que soit n .

Revenons à la classification des fonctions continues; on peut distinguer les catégories suivantes :

1° *Les fonctions continues à variation non bornée.* Telles sont la fonction de Weierstrass et la fonction $x \sin \frac{1}{x}$.

2° *Les fonctions continues à variation bornée et à nombres dérivés non bornés.* Telle est la fonction $x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Les fonctions continues à nombres dérivés bornés, plus souvent appelées *fonctions lipschitziennes* (1). Ce sont celles qui satisfont dans un intervalle à la condition dite de Lipschitz.

$$|f(x+h) - f(x)| < k|h|,$$

k désignant une constante positive, x et $x+h$ deux points quelconques de l'intervalle (2). On sait le rôle important de ces fonctions dans la théorie des équations différentielles, à propos des théorèmes d'existence (3), ainsi que dans d'autres questions: souvent on peut raisonner sur ces fonctions comme sur celles qui ont une dérivée.

3° *Les fonctions continues qui ont une dérivée.*

Remarquons qu'étant donnée une fonction continue, même ayant une dérivée dans un intervalle (ab) , il peut être impos-

(1) Ces fonctions ont été introduites indépendamment de la notion de nombre dérivé. — Cf. les Mémoires de Lipschitz sur les séries trigonométriques (*J. de Crellé*, t. 63, p. 296) et sur l'intégration (*B. D.*, 1876, p. 149).

Les intégrales définies rentrent dans cette classe.

Nous avons déjà remarqué qu'une fonction à nombres dérivés bornés est à variation bornée.

(2) En effet, une pareille fonction a évidemment ses nombres dérivés bornés. La réciproque est vraie.

(3) Le théorème fondamental d'existence d'une fonction continue y comme intégrale de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ suppose seulement que la fonction f satisfait, dans un intervalle convenable, à la condition de Lipschitz.

Cf. aussi MITTAG-LEFFLER, *A. M.*, t. XXIV, p. 230.

sible de trouver dans (ab) un intervalle assez petit pour que la fonction y soit *monotone* (1).

Inversement, une fonction continue *monotone* dans un intervalle (ab) peut n'avoir de dérivée dans aucun intervalle, si petit soit-il, de (ab) (2).

Aussi, pour qu'à une fonction corresponde une courbe *ordinaire*, c'est-à-dire analogue à celles que l'on rencontre dans les éléments et dont l'intuition sensible donne l'idée (courbe divisible en un nombre fini de parties convexes, etc.), il faut ajouter à la continuité de la fonction deux conditions distinctes relatives l'une à l'existence d'une dérivée, l'autre à l'absence d'un nombre infini de maxima et minima (3).

4° Les fonctions continues $f(x)$ qui ont une dérivée continue dans un intervalle (ab) . On peut les représenter par des séries de polynômes telles que ces séries et les séries formées par les dérivées de leurs termes convergent uniformément vers $f(x)$ et $f'(x)$ entre a et b (4).

5° Les fonctions continues $f(x)$ qui ont des dérivées de tous les ordres, toutes finies, et dès lors toutes continues. Ces dernières se rangent en deux classes. Les unes sont analytiques, c'est-à-dire développables dans le voisinage de chaque point en séries de Taylor. Les autres ne sont pas analytiques (5) : on

(1) Il suffit de considérer la fonction définie par $x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \geq 0$ et par zéro pour $x = 0$, pour constater que ceci peut avoir lieu dans le voisinage d'un point. Pour le cas général, cf. CANTOR, *M. A.*, t. XIX, p. 591. — SCHWARZ, *Œuvres*, t. II, p. 269.

(2) Ainsi la fonction continue et monotone $x \left[1 \pm \frac{1}{3} \sin(\log x^2) \right]$ n'a pas de dérivée à l'origine. Pour le théorème lui-même, cf. КӨРӨКЕ, *M. A.*, t. XXXV, p. 104.

(3) Pour qu'une courbe soit *ordinaire*, il faut qu'elle jouisse des propriétés ci-dessus, quelle que soit l'orientation qu'on lui donne dans le plan. La dernière des conditions énoncées est donc multiple.

Rappelons que même une fonction à variation bornée peut avoir une infinité de maxima et de minima.

(4) Cf. PAINLEVÉ, *C. R.*, 1898, 1^{er} semestre, p. 385.

(5) Par exemple, la fonction représentée par $e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \geq 0$ et par zéro pour $x = 0$ a à l'origine des dérivées de tous les ordres; néanmoins elle n'est pas développable en série de Mac-Laurin. Bien que la série de Mac-Laurin relative à cette fonction soit convergente, elle ne représente pas la fonction (Voir n° 177).

A de pareilles fonctions peuvent encore ne pas correspondre des courbes or-

peut leur donner pour expression analytique une série de la forme

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n + b_n \cos n\pi x + c_n \sin n\pi x);$$

les dérivées de $f(x)$ sont représentées par les séries formées par les dérivées correspondantes des termes de $s(x)$, et toutes ces séries convergent uniformément dans l'intervalle (ab) , comme l'a montré M. Borel ⁽¹⁾.

Cette dernière distinction conduirait à passer du domaine réel au domaine complexe; car, de toutes les fonctions dont nous avons parlé, seules les fonctions analytiques (variables réelles) conservent leurs propriétés, spécialement restent *continues* et *dérivables*, lorsqu'on sort du champ réel. La définition des autres se trouve limitée au champ réel; leur continuation en dehors de ce champ, *leur prolongement*, ne se fait plus d'une manière naturelle et en tout cas ne peut laisser ces fonctions continues et dérivables.

17. On peut aussi classifier les fonctions d'après les équations différentielles auxquelles elles satisfont; les solutions de certaines équations différentielles algébriques ont conduit à des fonctions de première importance (e^x , $\sin x$, $\operatorname{sn} x$, p_x , etc.).

A un autre point de vue, on pourra ranger les fonctions d'un nombre quelconque de variables d'après les représentations dont elles sont susceptibles (séries entières, séries de polynomes, séries trigonométriques, etc.) ⁽²⁾. Par exemple, pour classifier le groupe

dinaires, au sens ci-dessus. C'est ce qui arrive pour la fonction définie par $e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}$ pour $x \geq 0$ et par zéro pour $x = 0$.

⁽¹⁾ De même, une fonction de *plusieurs* variables réelles, *continue dans un domaine et admettant des dérivées partielles de tous les ordres*, est développable en une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x_1, \dots, x_r, \sin x_1, \cos x_1, \dots, \cos x_r)$$

(P_n désignant un polynome en $x_1, \dots, \cos x_r$), série uniformément convergente et dérivable terme à terme indéfiniment. — Cf. BOREL, *A. E. N.*, 1895, p. 35; 1896, p. 79; *Fonctions de variables réelles*, p. 68. — PRINGSHEIM, *M. A.*, t. XLIV, et *Chicago Congress Papers*, p. 294. — Voir aussi une note du n° 177.

⁽²⁾ Cf. les notes précédentes et les n° 66, 83, 188, etc.

des fonctions discontinues qui sont limites de fonctions continues ou bien limites de limites de pareilles fonctions, voici comment procède M. Baire (1) :

Dans une première classe, dite *classe zéro*, il place les fonctions continues : nous venons de dire qu'elles sont développables en séries de polynômes. (Pour simplifier, nous supposons qu'il s'agit de fonctions d'une variable, et nous représenterons celles de classe 0 par $f_n(x), f_{m,n}(x), \dots$)

Une série de fonctions de classe 0, si elle ne détermine pas une fonction de classe 0, *définira une fonction de classe 1* : la classe 1 comprend donc les fonctions discontinues $F(x)$, représentables par des séries simples de fonctions continues, et l'on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Nous avons dit précédemment quelles sont les seules discontinuités possibles dans les fonctions de classe 1 (2).

De même, quand une série de fonctions de classe 1 ne détermine pas une fonction de classe 0 ou 1, la fonction qu'elle définit sera dite *de classe 2*. Les fonctions $\tilde{F}(x)$ de classe 2 sont donc représentables par des séries doubles à éléments continus

$$\tilde{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n}(x),$$

telles que la sommation relative aux valeurs n doive précéder celle relative aux valeurs m .

La fonction de Dirichlet rentre dans cette classe.

On est ainsi amené à définir des *fonctions de classe arbitraire* 3, 4, ..., n , ... qui seront représentées par des séries triples, quadruples, etc., sans qu'on puisse réduire la série triple à une série

(1) C. R., 1898 et 1899. Thèse, p. 68 (*Annali di Matem.*, 1899), et surtout *Fonctions discontinues*, 1905, et *A. M.*, t. XXX, où sont exposées les propriétés caractéristiques des fonctions des diverses classes.

(2) Toute fonction *semi-continue* supérieurement (ou inférieurement), toute fonction *dérivée* est ponctuellement discontinue, et dès lors rentre dans cette catégorie (cf. BAIRE, *Fonctions discontinues*).

double, etc..., dont les éléments seront des fonctions continues ou des polynomes.

On peut poursuivre et définir des fonctions de classe ω , $\omega + 1$, ..., ω^2 , ..., ω^ω , ..., en désignant par ces symboles les nombres transfinis de M. Cantor (1).

Il existe effectivement des fonctions de toute classe; en d'autres termes, on ne peut sans contradiction admettre à la fois les axiomes ordinaires de l'Analyse et ce théorème : toute suite convergente de fonctions des classes égales ou inférieures à α a pour limite une fonction de classe égale ou inférieure à α (2).

On terminerait cette classification par les fonctions *non représentables analytiquement*, fonctions dont on a aussi démontré l'existence (3).

18. Le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une fonction dans son domaine d'existence peut encore servir de base à leur classification (4).

On remarquera d'abord que, s'il s'agissait de la fonction discontinue la plus générale, ni le nombre des variables, ni l'étendue de l'intervalle d'existence (dans le cas des fonctions d'une variable) n'influeraient sur le nombre de ces conditions. En effet, pour déterminer une pareille fonction, il faut donner sa valeur en chaque point : or, l'ensemble des points de l'espace a même puissance que l'ensemble des points du segment (0, 1).

Une classe intéressante sera formée par les fonctions définies au

(1) Ainsi, l'ensemble des classes de fonctions, conçu logiquement, jouit des propriétés suivantes :

1° Il n'est pas dénombrable ;

2° Avant une classe quelconque, il n'existe qu'un nombre fini ou dénombrable d'autres classes ;

3° Après tout ensemble dénombrable de classes, il existe une nouvelle classe.

(2) Cf. BAIRE, *Thèse*, p. 71. — BOREL, *Fonctions de variables réelles*, p. 156. — LEBESGUE, *J. M.*, 1905, p. 205.

(3) La démonstration résulte de la juxtaposition de ces deux propositions :

1° L'ensemble des fonctions a une puissance supérieure au continu (théorème dû à M. Cantor) ;

2° L'ensemble des fonctions représentables analytiquement n'a pas une puissance supérieure au continu. (Cf. LEBESGUE, *J. M.*, 1905, p. 213).

(4) Cf. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 123 ; *A. E. N.*, 1895, p. 47.

moyen d'une infinité dénombrable de conditions : telles sont les fonctions continues, les fonctions discontinues seulement en une infinité dénombrable de points. Parmi ces fonctions, on rangera à part celles qui sont déterminées dans tout leur domaine d'existence par leurs valeurs dans le voisinage d'un seul des points de ce domaine : ce sont les fonctions analytiques d'une variable complexe.

Enfin, une série entière peut être envisagée comme ayant le même nombre de coefficients, qu'elle soit à une ou plusieurs variables. Même l'ensemble de m séries entières à p variables ne présente pas plus de généralité, au point de vue arithmétique, qu'une seule série entière à une seule variable : dans les deux cas, l'ensemble des coefficients est dénombrable. Cette dernière remarque expliquera certains paradoxes que l'on rencontrait autrefois dans la définition de l'*intégrale générale* d'une équation aux dérivées partielles lorsque, pour y parvenir, on voulait compter les fonctions arbitraires qui y figurent (n° 209) : cette définition doit reposer sur d'autres considérations, car le nombre des coefficients arbitraires qui figurent dans m fonctions analytiques forme toujours une infinité dénombrable, quel que soit m .

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Dans cet Ouvrage, nous traitons spécialement des *fonctions analytiques d'une variable complexe*. C'est l'étude des phénomènes naturels et la commodité des calculs qui ont amené, en restreignant la notion de fonction, à faire les hypothèses complémentaires d'où est sortie la théorie des fonctions analytiques. Leur domaine embrasse les fonctions les plus intéressantes dans toutes les branches des Mathématiques : Théorie des nombres, Théorie des équations différentielles ou des équations fonctionnelles algébriques, Géométrie, Physique mathématique.

Aborder leur étude par les procédés de Cauchy revient à envisager les fonctions qui sont finies, continues et ont une dérivée.

Les notions correspondantes se présentent également lorsqu'on se place au point de vue de Riemann ou de Weierstrass. Aussi est-il bon d'en grouper ici les définitions précises en les appliquant aux fonctions.

§ I. — FONCTIONS CONTINUES.

19. Nous avons défini plus haut la continuité en un point en la rattachant à la notion d'oscillation nulle. Cela revient à dire, d'une manière plus classique, qu'une fonction d'une ou de plusieurs variables, définie en un point (x_0, y_0, \dots) et dans son voisinage, ou simplement définie au point (x_0, y_0, \dots) ainsi que sur un ensemble ayant ce point pour point limite, est *continue en ce point*, si elle a pour valeur limite au point (x_0, y_0, \dots) la valeur qu'elle

prend en ce point ⁽¹⁾. En d'autres termes, la fonction est continue lorsque à tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre un nombre positif δ , tel que l'on ait

$$(1) \quad |f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y, \dots)| < \varepsilon \\ \left(\begin{array}{l} 0 \leq |h| < \delta, \quad 0 \leq |k| < \delta \\ |h| + |k| + \dots > 0 \end{array} \right),$$

les points $(x+h, y+k, \dots)$ devant appartenir à l'ensemble où la fonction est définie. On suppose que la fonction est finie au point considéré ⁽²⁾.

Une fonction définie sur un ensemble fermé E est continue sur cet ensemble quand elle est continue en tout point limite de l'ensemble ⁽³⁾. En particulier, elle est continue dans un domaine continu fermé quand elle est continue en tout point du domaine et de sa frontière. Voir n° 23 ⁽⁴⁾.

Occupons-nous d'abord des fonctions continues d'une variable.

Si une pareille fonction est continue dans un intervalle (ab) , on peut écrire, en prenant les notations de Dirichlet,

$$f(x \pm 0) = f(x) \quad (a < x < b); \\ f(a+0) = f(a), \quad f(b-0) = f(b).$$

⁽¹⁾ Ainsi la fonction a^x définie seulement pour les valeurs rationnelles de x est continue pour chaque valeur rationnelle de x (chaque nombre rationnel est un point limite de l'ensemble des nombres rationnels). On s'appuie même sur cette propriété quand on définit a^x pour les valeurs irrationnelles de x .

On n'étudie pas la continuité en un point d'un ensemble lorsque ce point n'est pas point limite.

⁽²⁾ D'après le second critère de convergence, les inégalités du texte exprimant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $f(x)$ soit continue en un point x peuvent être remplacées par les suivantes :

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq |x' - x| < \delta, \quad 0 \leq |x'' - x| < \delta \\ |x' - x| + |x'' - x| > 0 \end{array} \right).$$

⁽³⁾ La fonction est ponctuellement discontinue relativement à l'ensemble E lorsque au voisinage de tout point de E il y a des points de E où la fonction est continue relativement à E .

⁽⁴⁾ Comme nous l'avons dit, on peut aussi définir la continuité dans un domaine, par exemple dans un intervalle, par les inégalités

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad |x' - x''| < \delta,$$

quels que soient les points x' et x'' choisis dans l'intervalle.

La fonction est déterminée dans tout l'intervalle dès qu'on connaît ses valeurs *aux points rationnels* de l'intervalle (1). En effet, tout point x peut être considéré comme point limite d'un ensemble de points rationnels x_{ρ_n} , et la continuité exige

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\rho_n}).$$

Du reste, ces valeurs aux points rationnels ne sont pas arbitraires : les conditions auxquelles elles doivent satisfaire sont même des plus compliquées.

A la notion de continuité se rattache celle de *continuité uniforme*. Pour la définir, reprenons les inégalités (1) en les appliquant par exemple à une fonction de deux variables continue dans un domaine *fermé*. En chaque point du domaine, à tout nombre positif donné ε , correspond un nombre δ et même une infinité de nombres δ , tels que les inégalités (1) soient satisfaites. Si de plus on peut satisfaire aux inégalités (1) en tous les points du domaine, *par une même valeur* de δ (2), on dit que la *continuité* de la fonction est *uniforme* dans le domaine considéré.

On peut remplacer la définition ci-dessus par la propriété caractéristique suivante : une fonction est uniformément continue dans un domaine lorsque à tout nombre positif donné ε on peut

(1) Plus généralement, une fonction continue est déterminée dans un ensemble E , quand on connaît ses valeurs en tous les points d'un ensemble C partout dense relativement à E .

Le théorème du texte est dû à Heine (*Journal de Crelle*, t. 71, p. 183).

(2) Soit $\Delta(x, y)$ la limite supérieure des quantités δ au point (x, y) , ε étant supposé fixé. Ces nombres Δ forment un ensemble d'éléments tous positifs : la continuité est uniforme si sa limite inférieure est *positive* (et non pas nulle).

Ici, de fait, ces grandeurs Δ sont fonctions continues de (x, y) : donc elles atteignent effectivement leur limite inférieure (n° 20), qui dès lors est positive. La continuité de Δ résulte à son tour de ce que la différence des valeurs de Δ en un point (x, y) et en un point M intérieur au cercle de rayon Δ décrit de (x, y) ne dépasse pas en valeur absolue la distance de ces deux points, puisque le cercle décrit de M comme centre, avec un rayon égal à la valeur de Δ relative à M , coupe le premier cercle ou lui est tangent. C'est là une première démonstration du théorème que nous établirons bientôt, d'après lequel la continuité entraîne la continuité uniforme. Cf. LÜROTH, *M. A.*, t. VI, p. 319.

La notion de continuité uniforme est un cas particulier de celle de convergence uniforme : $f(x, y)$ est uniformément continu, si $f(x+h, y+k)$ converge uniformément vers $f(x, y)$ pour $h = k = 0$.

faire correspondre un mode de division du domaine en éléments, par exemple en carrés, assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction reste inférieure à ε .

En effet, d'abord, si une fonction est uniformément continue, elle jouit évidemment de cette propriété.

Pour établir la réciproque, il suffit de prouver qu'au nombre arbitraire ε correspond un nombre positif fixe δ , tel que la différence des valeurs de la fonction en deux points (x', y') , (x'', y'') soit inférieure à ε , si leur distance n'atteint pas δ .

Or, par hypothèse, le domaine est divisible en carrés assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction n'atteigne pas $\frac{\varepsilon}{2}$; appelons δ le côté de l'un de ces carrés.

Ou bien les deux points (x', y') , (x'', y'') appartiennent au même carré, et alors la proposition est évidente.

Ou bien ils appartiennent à deux carrés ayant au moins un sommet commun (x_i, y_i) , ce qui permet d'écrire

$$|f(x', y') - f(x_i, y_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'', y'') - f(x_i, y_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par suite,

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Donc cette dernière inégalité est bien satisfaite toutes les fois que la distance des points (x', y') , (x'', y'') n'atteint pas δ , ce qui prouve d'abord la continuité de la fonction dans le domaine, puis sa continuité uniforme.

THÉORÈME. — *Une fonction continue dans un intervalle fermé est uniformément continue dans cet intervalle (1).*

(1) Cf. DARBOUX, *A. E. N.*, 1875, p. 73.

Le théorème suppose la fonction continue dans un intervalle fermé; par exemple la fonction $\sin \frac{1}{x}$ est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1; elle n'est pas uniformément continue dans l'intervalle (0, 1).

Le théorème est vrai des fonctions *continues*, définies sur un ensemble *parfait*, continu ou non. En effet, supposons qu'il y ait des points de l'ensemble p_1, \dots, p_n, \dots tels que les valeurs des Δ aux points correspondants

$$(\Delta_1 > \Delta_2 > \dots > \Delta_n > \dots)$$

aient zéro pour limite. Soit p le point limite des points p_1, \dots, p_n, \dots . Au

Montrons qu'une fonction continue jouit de la propriété caractéristique énoncée ci-dessus, et pour cela raisonnons par l'absurde. Si le théorème n'est pas vrai et que l'on divise l'intervalle (ab) en deux parties, chacune de ces parties en deux autres, etc., parmi les intervalles obtenus après chaque opération, il y en a au moins un où l'oscillation dépasse ε , tel de plus que, si on le divise en deux parties, au moins l'une d'elles jouisse de la même propriété, ainsi qu'une suite indéfinie d'intervalles $(a_n b_n)$ obtenus dans les mêmes conditions, par suite *compris les uns dans les autres*. De plus, ces intervalles tendent vers zéro. J'appelle x_0 le nombre que définit ainsi une suite $(ab), \dots, (a_n b_n), \dots$.

La fonction étant continue au point x_0 , on peut faire correspondre au nombre donné ε un nombre δ tel que l'on ait

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (|x - x_0| < \delta).$$

Par ailleurs n peut être choisi assez grand pour que les deux points a_n et b_n soient compris dans l'intervalle $(-\delta + x_0, x_0 + \delta)$.

Désignons alors par x' et x'' deux valeurs quelconques de x appartenant à l'intervalle $(a_n b_n)$. On pourra écrire

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Cette conséquence est en contradiction avec l'hypothèse d'après laquelle, dans l'intervalle $(a_n b_n)$, l'oscillation dépassait ε (1).

point p correspond un nombre positif déterminé Δ ; donc, dans le voisinage de p il y a des points p_n pour lesquels Δ_n ne reste pas inférieur à tout nombre donné, l'hypothèse faite était donc absurde.

Voir la thèse de M. Baire, p. 13. — Cf. aussi RIQUIER, *A. E. N.*, 1890, p. 282.

(1) La proposition du texte est due à Heine (*J. de Crellé*, t. 74, p. 188). On peut dire qu'elle a comme fondement géométrique cet important théorème de M. Borel :

Soit un ensemble \mathcal{C} . Si l'on prend une infinité, dénombrable ou non, d'ensembles E tels que tous les points de \mathcal{C} appartiennent à l'un des ensembles E , on peut trouver dans les ensembles E un nombre LIMITE d'ensembles tels que tout point de \mathcal{C} soit intérieur à l'un d'eux.

Cf. BOREL, *A. E. N.*, 1895; *Leçons sur les fonctions*, p. 42; *C. R.*, 1^{er} semestre 1903, p. 1055. — LINDELÖF, *C. R.*, 2^e semestre 1903, p. 698. — SCHOENFLIES, *C. R.*, 1^{er} semestre 1907, p. 22.

20. Rappelons quelques autres propriétés élémentaires des fonctions continues :

1° *Lorsqu'une fonction continue dans un intervalle prend des valeurs de signes contraires en deux points α et β de cet intervalle, elle s'annule au moins une fois entre α et β (1).*

On en conclut qu'une fonction continue $f(x)$ ne peut passer d'une valeur quelconque $f(\alpha)$ à une autre $f(\beta)$ sans passer par toute valeur intermédiaire C. En effet, la fonction continue

$$f(x) - C$$

prend des valeurs de signes contraires aux points α et β ; donc elle s'annule au moins une fois entre ces points.

La réciproque n'est pas vraie. Ainsi la fonction égale à $\sin \frac{1}{x}$ pour $x \geq 0$ et à zéro pour $x = 0$ est discontinue à l'origine (sa discontinuité est égale à 2). Néanmoins, dans tout intervalle contenant le point zéro, elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre, au moins une fois, toutes les valeurs intermédiaires (2).

(1) En effet, appuyons-nous sur ce que, d'après la définition de la continuité, la fonction garde dans le voisinage d'un point le même signe qu'en ce point.

Supposons $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ et faisons croître x à partir de α . La fonction $f(x)$, négative au point α , est négative dans le voisinage de α ; lorsque x croît, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ demeure négatif a une limite supérieure λ , puisque $f(\beta)$ est positif.

$f(\lambda)$ ne peut être positif, car, pour des valeurs de x inférieures à λ , mais aussi voisines de λ que l'on veut, $f(x)$ est négatif.

$f(\lambda)$ ne peut être négatif : sinon $f(x)$ serait négatif dans le voisinage de λ et dès lors pour des valeurs de x supérieures à λ ; par suite λ ne serait pas la limite supérieure annoncée.

Donc $f(\lambda)$ est nul.

(2) Considérons encore deux fonctions égales respectivement à $\sin \frac{1}{x}$ et $-\sin \frac{1}{x}$ pour $x \geq 0$, et prenant la valeur 1 à l'origine. Chacune d'elles ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires; mais leur somme ne jouit pas de cette propriété (puisque cette somme est nulle pour $x \geq 0$ et égale à 2 pour $x = 0$): donc chacune des deux fonctions ne peut être continue.

Cf. aussi DARBOUX, *A. E. N.*, 1875, p. 109. — HEINE, *J. de Crellé*, t. 74, p. 185.

2° Une fonction continue dans un intervalle fermé (ab) est bornée dans cet intervalle ⁽¹⁾.

Le théorème n'est plus vrai quand l'intervalle n'est pas fermé : ainsi la fonction $\frac{1}{x}$, continue dans l'intervalle $0 < x \leq 1$, n'est pas limitée dans cet intervalle.

3° Une fonction continue dans un intervalle fermé (ab) atteint, dans l'intervalle, ses limites supérieure et inférieure L et l ⁽²⁾.

(1) En effet, imaginons une division de l'intervalle (ab) en intervalles (x_i, x_{i+1}) assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction reste inférieure à un nombre donné à l'avance ε . Il suffit d'établir qu'aux limites des intervalles, c'est-à-dire aux points $(a, x_1, \dots, x_n, \dots, b)$, les valeurs de la fonction ne dépassent pas un nombre fixe, puisque les valeurs de la fonction ne s'écartent pas des valeurs en question d'une quantité supérieure à ε . Or on a

$$\begin{aligned} |f(x_1)| &< |f(a)| + \varepsilon, \\ |f(x_2)| &< |f(x_1)| + \varepsilon, \\ &\dots\dots\dots \\ |f(b)| &< |f(x_{n-1})| + \varepsilon. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens, on voit que les valeurs absolues de la fonction, aux extrémités des intervalles, restent inférieures à $|f(a)| + n\varepsilon$, n désignant le nombre des divisions.

(2) Prouvons, par exemple, l'existence du maximum. Si l'on divise (ab) en deux parties égales, dans l'une au moins la limite supérieure de $f(x)$ sera L . En répétant l'opération du partage, on obtient deux autres intervalles (a_1b_1) , \dots , (a_nb_n) , \dots renfermés les uns dans les autres, tels que, dans chacun d'eux, la limite supérieure de $f(x)$ soit L , et deux suites

$$a \bar{=} a_1 \bar{<} \dots \bar{<} a_n \bar{<} \dots, \quad \dots b_n \bar{=} b_{n-1} \bar{=} \dots \bar{=} b \quad \left(b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \delta \right)$$

qui définissent un nombre x_n appartenant, quel que soit n , à l'intervalle (a_nb_n) . Prouvons par l'absurde que $f(x_n) = L$.

D'abord, d'après la définition de L , $f(x_n)$ ne surpasse pas L .

S'il lui est inférieur, posons $L - f(x_n) = 2\varepsilon$. Puisque $f(x)$ est continu en x_n , on peut faire correspondre au nombre positif ε un nombre positif δ_1 , tel que

$$|f(x_n + h) - f(x_n)| < \varepsilon \quad (|h| < \delta_1),$$

ce qui donne, pour toute valeur de $|h|$ inférieure à δ_1 ,

$$f(x_n + h) < L - \varepsilon.$$

Mais, L étant la limite supérieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a_nb_n) , il y a au

4° Le module d'une fonction continue est continu. La somme et le produit de deux fonctions continues sont continus; il en est de même de leur quotient, pourvu que le dénominateur ne s'annule pas au point considéré.

Remarquons enfin qu'une fonction qui a une dérivée *finie*, dans un intervalle, est *continue* dans cet intervalle. Il en est de même de celle qui a ses quatre nombres dérivés *bornés*.

21. Toutes les fonctions continues jouissent des propriétés précédentes : voici une propriété spéciale aux fonctions *continues à variation bornée* dans un intervalle (ab) .

Si l'on considère un intervalle (ax) contenu dans (ab) , les trois variations totales, relatives à l'intervalle (ax) , désignées plus haut par $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$, sont des fonctions croissantes ou stationnaires lorsque x croît : je dis de plus que *ces trois variations sont continues dans le cas d'une fonction continue $f(x)$ à variation bornée*.

En effet, il suffit d'établir le théorème pour l'une d'entre elles $V(x)$, puisque $P(x)$ et $N(x)$ sont reliées linéairement à $V(x)$ et $f(x)$. Appelons $v(x)$ et $v(b)$ les valeurs de v qui correspondent à une division déterminée quelconque des intervalles (ax) , (ab) . Lorsqu'on augmente indéfiniment les points de division entre a et x , x et b , tous les nombres $v(x)$ et $v(b)$ correspondants ont

moins un point de cet intervalle (représentons-le par $x_0 + h$) où $f(x_0 + h)$ et L diffèrent d'une quantité inférieure à ε . On a ainsi

$$f(x_0 + h) > L - \varepsilon$$

en un point où $|h| < \delta$. Ce résultat est en contradiction avec les premières inégalités; car on peut concevoir d'abord la détermination de ε , en déduire δ_1 , et pousser assez loin la subdivision de l'intervalle (ab) pour que δ soit inférieur à δ_1 .

Le premier de ces théorèmes a été établi par Cauchy (*Cours d'Analyse, Œuvres*, 2^e série, t. III, p. 278). Gauss et surtout Weierstrass ont attiré l'attention sur la nécessité de démontrer les autres. — Cf. aussi DARBOUX, *B. D.*, 1872, p. 307. — DU BOIS-REYMOND, *Théorie des fonctions*, trad. française, p. 191. — BRODEN, *Theorie der stetigen Functionen* (*J. de Crelle*, t. 118). — DINI, *Fundamenti per la teoria delle Funzioni di variabili reali*. — STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik; Differential-und Integralrechnung*. Le dernier théorème a été étendu dans certains cas à des fonctions non continues. Cf. FRÉCHET, *C. R.*, 2^e sem., 1904, p. 849.

pour limites supérieures $V(x)$ et $V(b)$ (1). Si l'on a intercalé entre a et b assez de points de division pour que la différence entre $V(b)$ et $v(b)$ n'atteigne pas ε , ε désignant un nombre donné à l'avance, il en sera de même alors *a fortiori* de la différence entre $V(x)$ et $v(x)$; car $v(b)$ subit les mêmes accroissements que $v(x)$, lorsqu'on ajoute de nouvelles divisions entre a et x . Il vient donc, en désignant par h un nombre positif quelconque tel que $x + h$ ne sorte pas de l'intervalle (ab) ,

$$V(x + h) - V(x) < [v(x + h) + \varepsilon] - v(x) = |f(x + h) - f(x)| + \varepsilon.$$

Puisque $f(x)$ est continue, on peut choisir h assez petit pour que le premier terme de cette dernière expression n'atteigne pas ε . On aura donc

$$V(x + h) - V(x) < 2\varepsilon,$$

ce qui prouve bien la continuité de $V(x)$.

Corollaire. — Puisque les fonctions $P(x)$ et $N(x)$ sont continues, toute fonction continue à variation bornée est la différence de deux fonctions monotones continues (p. 68).

22. Une fonction de plusieurs variables peut être continue séparément par rapport à chacune d'elles sans être continue (2).

(1) On démontrerait par les procédés habituels que les sommes v , p , n tendent vers leurs limites supérieures V , P , N lorsque la fonction f est continue.

(2) Cauchy se contentait de la continuité par rapport à chaque variable [*Cours d'Analyse, etc. (Œuvres, 2^e série, t. III, p. 46)*]. Le premier, Heine remarqua que cette condition n'était pas suffisante [*Ueber trigonometrische Reihen (J. de Crelle, t. 71, p. 361)*].

Exemples : 1^o La fonction égale à 0 à l'origine et à $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ aux autres points du plan est, à l'origine, continue séparément par rapport à x et par rapport à y , puisqu'elle s'annule sur chacun des axes. Elle est discontinue quand on marche dans une direction autre que celle des axes; par exemple, sur la bissectrice $x = y$, la fonction saute brusquement de la valeur 0 à la valeur 1.

En partant de cet exemple, M. Baire donne le moyen de former une fonction continue par rapport à chaque variable, sans qu'il existe aucune aire où elle soit toujours continue par rapport à leur ensemble (*Thèse, 1899, p. 16 et 88*).

Remplaçons dans la fonction précédente y par y^2 . La fonction obtenue $\frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ est continue quand on pose $y = cx$ ou $x = cy$, quelle que soit la valeur finie de c ; elle n'est pas continue à l'origine, car si l'on se déplace sur la para-

Une fonction continue de plusieurs variables jouit des mêmes propriétés que les fonctions continues d'une variable. Démontrons, en prenant le cas de deux variables, celle qui est relative à la continuité uniforme.

THÉORÈME. — *Une fonction continue dans un domaine fermé est uniformément continue dans ce domaine.*

Raisonnons encore par l'absurde. Décomposons le domaine en carrés par des parallèles aux axes. Si le théorème n'est pas exact, il y aura toujours, aussi loin que nous pousserons les subdivisions, une suite de carrés dans lesquels l'oscillation de la fonction dépassera ε , et, par suite, un point limite (x_0, y_0) (on déterminera ses coordonnées en raisonnant comme au n° 19), dans le voisinage duquel l'oscillation dépassera ε . Cette conséquence est en contradiction avec l'hypothèse de la continuité de la fonction au point (x_0, y_0) .

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut encore établir les propositions suivantes :

1° *Une fonction continue dans un domaine fermé est BORNÉE dans ce domaine, et dès lors admet une limite supérieure et une limite inférieure.*

bole $y^2 = x$, la fonction passe brusquement de 0 à 1. Ainsi *une fonction peut être continue suivant toutes les droites passant par un point sans être continue en ce point.* On peut même construire des fonctions discontinues dans n'importe quel domaine, et néanmoins continues sur toute courbe algébrique et même analytique.

De fait, pour qu'une fonction soit continue en un point, il suffit qu'elle converge *uniformément* vers sa valeur en ce point, *sur toutes les droites* qui y aboutissent.

2° Considérons la fonction nulle à l'origine et aux points de coordonnées rationnelles, et qui aux autres points est égale à

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{-(p^2+q^2+r^2+s^2)} \frac{(x-\frac{p}{q})(y-\frac{r}{s})}{(x-\frac{p}{q})^2+(y-\frac{r}{s})^2}$$

Elle est continue séparément par rapport à x et par rapport à y ; elle est discontinue par rapport à leur ensemble en une infinité de points dans un domaine aussi petit que l'on veut. (Cet exemple a été déduit du premier exemple considéré dans la note par l'application du *principe de condensation des singularités.*)

2° Elle atteint effectivement, au moins en un point du domaine ou de sa frontière, ses limites supérieure et inférieure, c'est-à-dire elle a un maximum M et un minimum m .

3° Elle prend une valeur quelconque, comprise entre M et m , en une INFINITÉ DE POINTS appartenant au domaine.

Prouvons cette dernière proposition.

Soient A et a les points du domaine ou de sa frontière où la fonction atteint ses valeurs maximum et minimum M et m . Si nous les joignons par une ligne arbitraire ne sortant pas du domaine, nous aurons, le long de cette ligne, une fonction continue d'une variable, qui dès lors prendra au moins une fois toute valeur comprise entre M et m . Comme il y a une infinité de lignes reliant A et a , il y aura une infinité de points où la fonction satisfera aux conditions énoncées.

23. Une fonction de variable complexe $f(z)$ est continue en un point z_0 lorsqu'on a $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. En d'autres termes, la fonction est continue lorsque, à tout nombre positif donné ε , on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'on ait

$$(1) \quad |f(z_0 + \zeta) - f(z_0)| < \varepsilon \quad (|\zeta| < \delta),$$

le point $z_0 + \zeta$ devant rester dans le champ où la fonction est définie.

Une fonction est continue à l'intérieur d'un domaine lorsqu'elle est continue en tout point intérieur.

Enfin nous dirons qu'elle est *continue en un point ζ de la frontière* de ce domaine, si la fonction $f(z)$ tend vers une même valeur bien déterminée $f_1(\zeta)$, quel que soit le chemin suivi par z pour tendre vers ζ , et si elle prend en ce point la valeur $f_1(\zeta)$ (1).

(1) Lorsque la fonction $f(z)$ satisfait à cette condition en tous les points ζ d'une portion γ de la frontière C de (D) , la fonction $f_1(\zeta)$ est fonction continue de ζ le long de l'arc γ , et $f(z)$ tend uniformément vers $f_1(\zeta)$ quand z se rapproche de ζ par un chemin quelconque (le mot *uniformément* se rapportant aux divers points ζ de γ).

Réciproquement, si à tout point ζ situé sur une portion γ de C correspond un chemin aboutissant en ζ et variant d'une manière continue quand ζ se déplace d'une façon continue sur γ , tel que par ce chemin la fonction $f(z)$ tende uniformément vers une valeur $f_1(\zeta)$, alors $f(z)$ tend uniformément vers $f_1(\zeta)$

Pour qu'une fonction $f(z)$ mise sous la forme $u + iv$ soit continue, il faut et il suffit que les fonctions u et v jouissent de cette propriété (1).

§ II. -- FONCTIONS ANALYTIQUES EN UN POINT.

24. Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$ deux fonctions réelles prenant des valeurs bien déterminées dans un domaine. La combinaison $w = u(x, y) + iv(x, y)$ est fonction, dans ce domaine, de la variable $z = x + iy$, quelles que soient les fonctions u et v , en ce sens que les valeurs de u et v sont *déterminées*, lorsqu'on se donne un point z , c'est-à-dire x et y .

Mais la généralité même de cette notion lui enlève tout intérêt, car on est ramené à l'étude de deux fonctions de variables réelles, sans que le symbole i joue aucun rôle. Aussi Cauchy l'a-t-il restreinte en imposant à cette combinaison une propriété fondamentale que possédaient de fait les fonctions particulières de variables imaginaires étudiées jusque-là (2).

quand z se rapproche de ζ par un chemin quelconque, et $f_1(\zeta)$ est fonction continue de ζ le long de l'arc γ .

Dans ces deux cas, équivalents entre eux, on dit que la fonction est *continue* ou encore *bien déterminée le long de γ* .

La démonstration de ces lemmes ressort immédiatement de la théorie de la continuité (on les trouvera établis dans la Thèse de M. Painlevé, *A. T.*, 1888, B., p. 19); ils apprennent spécialement qu'une fonction continue à l'intérieur d'un domaine et continue sur sa frontière est continue dans ce domaine considéré comme domaine fermé.

(1) En effet, si les inégalités (1) sont satisfaites, on en déduit, en posant $\zeta = h + ik$,

$$\sqrt{[u(x+h, y+k) - u(x, y)]^2 + [v(x+h, y+k) - v(x, y)]^2} < \varepsilon^2;$$

par suite, u et v sont continus, puisque le module de chaque différence est inférieur à ε .

Réciproquement, si u et v sont continus, on peut faire en sorte que le module de chacune des différences ci-dessus soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$; la somme de leurs carrés n'atteindra pas ε^2 .

On voit aussi que le module d'une fonction continue est continu.

(2) CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (*Œuvres*, 2^e série, t. III, p. 213). La considération des fonctions de variable complexe sous la forme $u + iv$ a été reprise par Riemann : il en fait reposer la théorie sur les équations (H) du n^o 25. (*Œuvres*, Dissertation inaugurale, 1851, p. 1.)

Au sens de Cauchy, une fonction $u + iv$ n'est fonction de z dans le voisinage d'un point que si elle a une dérivée unique dans le voisinage de ce point. Il veut dire par là que la limite du rapport de l'accroissement de la fonction w à l'accroissement de la variable z existe et est la même, quel que soit le chemin suivi par la variable pour aller du point $z + \Delta z$ au point z (1).

Les fonctions DÉTERMINÉES et CONTINUES en un point qui ont ainsi une DÉRIVÉE UNIQUE ont reçu le nom de *monogènes* (2); on dit aussi qu'elles sont *analytiques au point considéré* (3).

25. THÉORÈME. — *Pour que la combinaison $w = u + iv$, formée avec des fonctions u et v déterminées et continues en*

(1) Une pareille fonction peut avoir en un point plusieurs déterminations (telle est la fonction $\sqrt[3]{z}$) et même une infinité (comme $\log z$), pourvu qu'elles ne forment pas une infinité continue (n° 77) et que d'une détermination initiale choisie on puisse déduire, le long de toute courbe continue, un ensemble de valeurs continues et ayant une dérivée (voir Chap. V).

(2) « Nous appellerons *monogène* une fonction dont la dérivée sera monodrome » (CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, 1847, p. 346). Cauchy appelait *synectiques* celles qui restent finies, continues, monodromes et monogènes dans tout le plan (cf. BRIOT et BOUQUET, *Fonctions elliptiques*, 1^{re} édition, p. 11).

Pour que la fonction $u + iv$ ait une dérivée unique en un point (x, y) , il ne suffit pas que sa dérivée soit la même sur tous les rayons aboutissant au point. Ainsi la fonction égale à 0 pour $x + iy = 0$, et représentée aux autres points par $(x + iy) \frac{3xy^2}{x^2 + y^4}$, a à l'origine pour dérivée 0 sur toute droite passant par l'origine; néanmoins elle n'est pas monogène.

Ici, comme au n° 22, on peut démontrer qu'une fonction est monogène si, $f'(z)$ désignant la valeur de la dérivée par un chemin particulier,

$$\frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} = f'(z)$$

tend uniformément vers 0 avec r , quelle que soit la direction θ par laquelle la variable se rapproche du point z . Cf. STOLZ, *Grundzüge*, etc., p. 80.

(3) En adoptant le terme *fonction analytique*, on a repris une dénomination dont se servait Lagrange pour désigner les fonctions susceptibles d'un développement en séries de puissances, et on l'a étendue aux variables complexes (LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques* et *Leçons sur le calcul des fonctions*; *Œuvres*, t. IX et X).

Il y a identité entre ces quatre expressions : fonction monogène, analytique, régulière, holomorphe en un point. Nous verrons que la fonction synectique est la fonction analytique uniforme dans un domaine.

un point, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, soit analytique en ce point, il faut et il suffit qu'en ce point ces fonctions satisfassent aux équations

$$(H) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

En effet, donnons à z l'accroissement Δz ; w reçoit un accroissement Δw , égal à $\Delta u + i\Delta v$. Transformons d'abord Δu ; on a

$$\Delta u = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y)] + [u(x, y + \Delta y) - u(x, y)],$$

ou bien, en appliquant la formule des accroissements finis à la première parenthèse, ce qui est permis puisque $\frac{\partial u}{\partial x}$ a une valeur finie,

$$\Delta u = \frac{\partial u(x + \theta \Delta x, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \Delta y \quad (0 < \theta < 1),$$

ou bien encore

$$\Delta u = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \varepsilon \right] \Delta x + \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \varepsilon' \right] \Delta y,$$

puisque $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continu, et que $\frac{\partial u}{\partial y}$ existe.

En transformant Δv d'une manière analogue (1) et en associant les résultats, il vient

$$\Delta w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon' \right) \Delta y + i \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_1 \right) \Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_1' \right) \Delta y \right]$$

(ε , ε' , τ_1 , τ_1' sont des fonctions de x , y , Δx , Δy dont les modules tendent vers zéro avec Δz).

Cette transformation faite, le théorème est évident si l'on sup-

(1) La démonstration ainsi présentée exige seulement la continuité de u et de v , l'existence des quatre dérivées partielles, satisfaisant aux relations (H), et enfin la continuité d'une seule de ces quatre dérivées, par exemple de $\frac{\partial u}{\partial x}$. En effet, la transformation de Δu n'exige pas la continuité de $\frac{\partial u}{\partial y}$. Celle de Δv se fait sans hypothèse nouvelle, puisque la continuité de $\frac{\partial u}{\partial x}$ entraîne celle de $\frac{\partial v}{\partial y}$. (Cf. CURTISS, *B. Americ. M. S.*, 1901-1902, p. 329.)

pose, comme le faisait Riemann, que le point $z + \Delta z$ tend vers z en suivant une courbe continue *ayant une tangente*, c'est-à-dire pour laquelle $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite finie déterminée (que nous représenterons par m) ou infinie. En effet, en divisant l'expression de Δw par Δz ou $\Delta x + i\Delta y$, puis les deux termes du rapport formé par Δx , on voit d'abord que $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ a une limite

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{1 + im}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette limite (fraction rationnelle en m) ne change pas avec le paramètre m sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Cette égalité équivaut aux deux équations (H) (1).

Plus généralement, laissons *quelconque* la courbe décrite par le point $z + \Delta z$ lorsqu'il tend vers le point z . Les conditions (H) restent évidemment nécessaires (2). Pour prouver qu'elles sont suffisantes, introduisons-les dans l'expression de Δw , ce qui permet d'en éliminer, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$. On peut ainsi écrire

$$(1) \quad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(\varepsilon + i\eta) \Delta x + (\varepsilon' + i\eta') \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}.$$

Or, à tout nombre positif α , si petit soit-il, on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que ε , ε' , η , η' aient leurs modules inférieurs à α pour toutes les valeurs de $|\Delta x|$ et $|\Delta y|$ inférieures à δ . Pour ces valeurs, le module du terme complémentaire ci-dessus n'atteint pas 4α , puisque $|\Delta x|$ et $|\Delta y|$ sont tous deux

(1) Cf. RIEMANN, *Œuvres*, p. 5. — D'après la démonstration, il faut et il suffit que la dérivée ait même valeur suivant *deux directions*, pour qu'elle soit la même dans toutes les directions.

(2) On peut démontrer directement que ces conditions sont nécessaires (voir note suivante).

inférieurs à $|\Delta x + i\Delta y|$. On a donc

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

ce qui justifie le théorème (1).

26. Corollaires :

I. Supposons que les fonctions u et v aient des dérivées par-

(1) Sans faire d'hypothèses *a priori* sur la *continuité même d'une seule des dérivées* des fonctions u et v , on peut chercher les conditions pour que la combinaison $u + iv$ ait une dérivée unique, lorsque Δx et Δy tendent vers zéro indépendamment l'un de l'autre.

1° *Conditions nécessaires.* — Laissons y fixe et donnons à x un accroissement Δx . On a

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}.$$

Pour que le premier membre ait une limite, il faut que chaque fraction au second membre en ait une, c'est-à-dire que u et v aient des dérivées par rapport à x .

Alors, dans ce déplacement parallèle à l'axe des x , la dérivée de w sera $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.

En cherchant la dérivée de la fonction dans un déplacement parallèle à l'axe des y , on voit de même que u et v doivent avoir des dérivées par rapport à y . En égalant les deux valeurs trouvées pour la dérivée de w , on obtient comme troisième condition nécessaire les relations (II).

Mais nous n'avons pas exprimé toutes les conditions nécessaires. Il faut que, par un chemin *quelconque*, les dérivées soient les mêmes.

Si nous appelons $w'(z)$ la valeur que nous venons de trouver pour la dérivée de w , on devra pouvoir faire correspondre à tout nombre positif donné α un nombre positif δ , tel que l'on ait

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} - w'(z) \right| < \alpha \quad (|\Delta z| < \delta).$$

Dès lors, on aura $\Delta w = \Delta z[w'(z) + \eta_1]$, η_1 étant une fonction de Δz qui tendra vers zéro avec Δz . En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, et en s'aidant des conditions nécessaires déjà trouvées, c'est-à-dire des relations (H), on en déduit que Δu et Δv doivent pouvoir s'écrire

$$(G) \quad \begin{cases} \Delta u = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon_1 \Delta x - \epsilon_2 \Delta y, \\ \Delta v = \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} + \epsilon_2 \Delta x + \epsilon_1 \Delta y, \end{cases}$$

ϵ_1, ϵ_2 tendant vers zéro quand Δx et Δy tendent indépendamment l'un de l'autre vers zéro.

En résumé, pour que la combinaison $u + iv$ ait une dérivée unique au point z ,

telles *du second ordre*, et des dérivées continues. On verra du reste (nos 172 et 76) que, pour les systèmes de fonctions u et v satisfaisant aux relations H, la continuité des dérivées *du premier ordre* entraîne l'existence et la continuité des dérivées *de tout ordre*.

On peut alors dériver partiellement les relations (H) et de la combinaison des équations obtenues déduire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ainsi les fonctions u et v sont des intégrales de l'équation de Laplace.

Les fonctions de deux variables continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, satisfaisant à cette équation, s'appellent *fonctions harmoniques*.

L'équation de Laplace renferme en germe, comme les deux équations simultanées aux dérivées partielles (H), toute la théorie des fonctions d'une variable complexe.

II. Chacune des fonctions u et v est harmonique : dès lors aucun des deux éléments d'une fonction analytique ne peut être choisi arbitrairement.

Du reste, à toute fonction harmonique u correspond une fonction v déterminée à une constante additive près, telle que la combinaison $u + iv$ soit analytique.

En effet, pour la fonction v associée de u , on a

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

il faut que dans le voisinage de ce point on puisse satisfaire aux relations (H) et (G).

2° *Conditions suffisantes.* — Ces conditions sont aussi suffisantes. En effet, si on les suppose remplies, on peut mettre le rapport $\Delta v : \Delta z$ sous la forme (1) et raisonner comme dans le texte.

En particulier, si les dérivées partielles des fonctions u et v satisfont aux relations (H) et sont *continues*, les relations (G) seront vérifiées. Dans ce cas, les relations (H) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que la combinaison $u + iv$ soit analytique. On voit aussi que sa dérivée (elle prend quatre formes différentes) est continue.

La règle relative à l'intégration des différentielles totales donne

$$v = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

La fonction v est donc bien déterminée, car l'intégrale est indépendante du chemin, puisque u vérifie l'équation de Laplace (n° 166).

III. Les deux familles de courbes $u(x, y) = \alpha$, $v(x, y) = \beta$ (α et β varient avec les courbes de chaque famille) forment un *réseau orthogonal*, puisque les égalités (H) entraînent la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

IV. Dans la fonction analytique $w = u + iv$ mettons en évidence les variables z et \bar{y} , ce qui donne

$$w = u(z - iy, y) + iv(z - iy, y).$$

Supposons que la fonction w soit une fraction rationnelle, ou, plus généralement, ait une expression analytique telle que, pour la dériver, on puisse lui appliquer le théorème des fonctions composées et écrire

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(-i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Le second membre est nul en vertu des égalités (H). La lettre y a donc disparu de l'expression de w : en d'autres termes, x et y ne figurent dans w qu'associés par le symbole i .

V. Lorsqu'une fonction $w = f(z)$ est analytique en un point et qu'une fonction $w_1 = \varphi(w)$ est fonction analytique de w au point correspondant, w_1 est fonction analytique de z au premier point.

Car l'existence d'une limite pour $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ et $\frac{\Delta w_1}{\Delta w}$ entraîne l'existence d'une limite pour $\frac{\Delta w_1}{\Delta z}$.

VI. Une fonction analytique, $w = u + iv$, a une dérivée analytique (en supposant que u et v aient des dérivées du second ordre, et des dérivées continues).

En effet, la dérivée de w , c'est-à-dire la fonction $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, a une dérivée unique, en vertu des identités (H).

27. Au lieu de considérer des fonctions d'une variable complexe mises sous la forme $u + iv$, on peut reprendre la définition des fonctions analytiques en étudiant *directement* les fonctions $f(z)$, ce symbole exprimant au sens général une dépendance entre deux ensembles de nombres complexes.

Formons le rapport

$$\frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta},$$

z et $z + \zeta$ désignant un point où la fonction est finie et un point voisin. Si ce rapport *tend vers une limite* quand ζ tend vers zéro, et si cette limite est indépendante du chemin suivi par le point $z + \zeta$ pour se rapprocher du point z , cette limite s'appelle la *dérivée* de la fonction, et on la représente par $f'(z)$ (¹).

28. L'interprétation géométrique des conditions pour qu'une fonction $u + iv$ soit monogène, interprétation faite au point de vue de la représentation d'un plan z sur un plan w , a servi de point de départ à Riemann pour sa théorie des fonctions.

Définir une pareille représentation, c'est se donner deux fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$. La considération d'une fonction quelconque mise sous la forme $u + iv$, et, par suite, de deux fonctions u et v , revient dès lors à l'étude d'une représentation.

Soient D et ω deux domaines continus qui ainsi se correspondent. Leur représentation est dite *continue* lorsque la distance

(¹) Dans tous les cas où l'expression de w en z est telle que l'on en peut déduire, par les règles de la différentiation, une expression de $\frac{dw}{dz}$ en z , la dérivée est évidemment unique.

Nous venons de voir que l'on peut passer de la forme $u + iv$ à la forme $f(z)$: pour les fonctions analytiques la réciproque est vraie (n° 317).

Pour qu'une fonction $f(z)$ ait une dérivée *en tout point* d'un domaine, il suffit qu'elle ait *en général* une dérivée dans le domaine et y soit *partout* continue, le mot *en général* voulant dire sauf peut-être en un ensemble dénombrable de points (voir n° 170).

de deux points quelconques tend vers zéro en même temps que celle de leurs points images.

Elle est *biunivoque* lorsque à tout point de D correspond un point de \mathfrak{D} et un seul, et réciproquement ⁽¹⁾.

Elle est *conforme* ou *isogonale* en un point lorsque deux courbes quelconques C et C' de l'un des domaines, passant par ce point, se coupent sous le même angle que leurs courbes images Γ et Γ' : en ce point, la similitude des figures infiniment petites est alors conservée.

La représentation conforme est *directe* lorsque le sens dans lequel il faut tourner pour passer de C à C' est le même que pour passer de Γ à Γ' : dans le cas contraire, elle est *inverse* ⁽²⁾.

Ces définitions rappelées, nous allons démontrer la propriété caractéristique ⁽³⁾ dont jouissent les représentations auxquelles les fonctions analytiques donnent naissance.

THÉORÈME. — *A toute fonction analytique en un point correspond, dans le voisinage de ce point, une représentation conforme directe.*

Pour l'établir, il faut prouver que, si le point z décrit deux courbes arbitraires C et C' passant par un point m et ayant chacune une tangente, le point w décrit deux courbes Γ et Γ' passant

⁽¹⁾ Ces définitions s'appliquent à des ensembles E et \mathfrak{C} quelconques, continus ou non. Ainsi, soient p_1, \dots, p_n, \dots des points de E ayant pour point limite un point p ; q_1, \dots, q_n, \dots les points correspondants de \mathfrak{C} , supposons qu'ils aient q pour point limite. La représentation de l'ensemble E sur l'ensemble \mathfrak{C} est dite *continue*, si chacun des points limites p a pour correspondant q .

Quand un ensemble fermé (ou parfait) E a une représentation finie et continue \mathfrak{C} , cet ensemble \mathfrak{C} est lui-même fermé (ou parfait).

Si la représentation des ensembles E et \mathfrak{C} est biunivoque, et si \mathfrak{C} est une représentation continue de E , réciproquement E est une représentation continue de \mathfrak{C} .

Nous avons donné plus haut (p. 37, note) le théorème qui établit l'*invariance du nombre des dimensions* d'un continu par rapport au groupe de toutes les transformations *biunivoques continues*.

⁽²⁾ Par exemple, la transformation par rayons vecteurs réciproques est une transformation conforme inverse.

⁽³⁾ En revenant plus tard sur cette théorie (Chapitre X), nous démontrerons la réciproque du théorème ci-dessous.

Pour la commodité des énoncés, nous supposons que les axes de coordonnées dans les plans z et w sont parallèles et ont la même disposition.

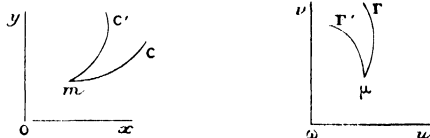
par le point μ imagé de m , qui ont chacune une tangente et se coupent sous le même angle que les courbes C et C' . (Pour avoir la direction des tangentes, on compare seulement entre elles, à partir des points m et μ , les portions des courbes qui se correspondent.) De plus, cet angle est encore le même, si l'on tient compte du sens dans lequel il faut tourner pour amener C sur C' et Γ sur Γ'

On suppose, au point m , la dérivée $f(z)$ *différente de zéro*.

1° On peut donner du théorème des vérifications de calcul.

Désignons par dx, dy et $\delta x, \delta y$ les différentielles dans les déplacements à partir de m sur C et C' (*fig. 4*). Appelons α et α' les

Fig. 4.



angles que font avec \overline{ox} les directions des tangentes à ces courbes définies plus haut; $\alpha' - \alpha$ sera l'angle des tangentes aux courbes C et C' . Soient enfin $du, dv, \delta u, \delta v$ les différentielles dans les déplacements sur Γ et Γ' . En les exprimant en fonction de $dx, dy, \delta x, \delta y$ et des dérivées partielles de u et v , on constate que les rapports $dv : du, \delta v : \delta u$ ont une limite en même temps que $dy : dx, \delta y : \delta x$, et par suite que les courbes Γ et Γ' ont une tangente. Soient β et β' les angles qui correspondent à α et α' ; on a

$$\cos(\alpha' - \alpha) = \frac{dx \delta v + dy \delta y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(\delta x^2 + \delta y^2)}},$$

$$\cos(\beta' - \beta) = \frac{du \delta u + dv \delta v}{\sqrt{(du^2 + dv^2)(\delta u^2 + \delta v^2)}}.$$

Transformons ce dernier quotient en nous servant des relations (H); on peut écrire

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

et opérer de même pour δu et δv . Après la suppression du facteur

$$\lambda^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad (\lambda \geq 0),$$

dans l'expression de $\cos(\beta' - \beta)$, on voit que les cosinus des angles $\alpha' - \alpha$ et $\beta' - \beta$ sont les mêmes (1).

2° Une démonstration directe (2) met en évidence la raison du théorème, en montrant qu'en chaque point z le *module* de la dérivée représente le rapport de similitude des figures correspondantes (w, z) , et que son *argument* donne en grandeur et sens l'angle dont doit tourner l'élément d'une courbe z pour devenir parallèle à l'élément correspondant w .

Soient $w = f(z)$ la fonction analytique donnée, $f'(z)$ sa dérivée. Représentons par (z_1, w_1) deux points des courbes C et Γ , voisins des points (z, w) et convenons que les directions des tangentes à ces courbes correspondent au sens du mouvement des points z et w à partir des points m et μ . Enfin, posons

$$\begin{aligned} f'(z) &= \rho (\cos \omega + i \sin \omega) & (\rho \geq 0), \\ z_1 - z &= r (\cos \theta + i \sin \theta), \\ w_1 - w &= R (\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

L'angle θ a une limite α , puisque le point z décrit une courbe qui a une tangente. Comme la définition de $f'(z)$ donne

$$\rho = \lim \frac{R}{r}, \quad \omega + 2k\pi = \lim (\varphi - \theta),$$

on en conclut que l'angle φ a aussi une limite β . Les angles α et β sont ceux que forment, avec la direction \overline{ox} , les directions qui se correspondent sur les tangentes en m et μ aux courbes C et Γ . La dernière égalité peut s'écrire $\beta - \alpha = \omega$, car, en supposant $k = 0$, on ne fait qu'augmenter ω d'un multiple de 2π . Donc la direc-

(1) Au lieu de prouver l'égalité des angles ci-dessus, on peut encore vérifier, par des calculs analogues, que sur deux courbes correspondantes quelconques le rapport des *longueurs* de deux arcs infiniment petits $\mu\mu_1$ et mm_1 , a pour valeur limite λ . On en déduirait la similitude des figures infiniment petites et, par suite, la conservation des angles.

Ce rapport de similitude λ varie d'une manière continue avec z .

(2) C'est à peu près la démonstration donnée par Riemann (*Œuvres*, p. 5). — Le lien entre la théorie des variables complexes et la représentation conforme fut découvert par Lagrange et Gauss : *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf eine andere gegebene Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird* [GAUSS, 1825 (*Œuvres*, t. IV)].

tion de la tangente à chaque courbe w s'obtient en faisant tourner d'un angle constant ω la tangente à la courbe z correspondante.

On voit également que, si les axes ont même disposition dans les plans z et w , le sens de rotation est conservé, et que $|f'(z)|$ représente le rapport de similitude (1).

Remarque. — Faire suivre d'une symétrie par rapport à l'axe des u (fig. 5 et 6) une transformation définie par l'égalité

$$u + iv = f(x + iy)$$

Fig. 5

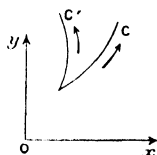
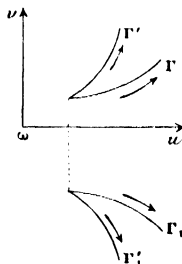


Fig. 6.



revient à la transformation unique

$$u - iv = f(x + iy).$$

Elle est encore conforme, mais conforme inverse, le sens de rotation des angles étant changé.

(1) Les points où la dérivée cesse d'être finie et différente de zéro sont dits *points irréguliers* de la transformation; en ces points, la représentation peut cesser d'être conforme.

Soit p l'ordre de la première dérivée de $f(z)$ qui n'est ni nulle, ni infinie. Désignons par dz_1, dz_2 les différentielles des déplacements sur deux courbes du plan z ; par dw_1, dw_2 celles des déplacements correspondants. On a alors

$$\frac{dw_2}{dw_1} = \left(\frac{dz_2}{dz_1} \right)^p.$$

Par suite, deux courbes du plan w se coupent sous un angle p fois plus grand que leurs courbes images z .

§ III. — FONCTIONS ANALYTIQUES DANS UN DOMAINE.

29. Une fonction est *uniforme* dans tout le plan lorsqu'elle a en chaque point une valeur unique (1). Les fonctions z^m (m étant entier), e^z , $\sin z$, etc., et les fonctions rationnelles de ces fonctions sont uniformes.

Une fonction non uniforme est appelée *multiforme* : elle peut avoir un nombre fini de déterminations (par exemple, la fonction algébrique) ou en avoir une infinité (comme le logarithme). En langage géométrique, on dit alors que la fonction a une infinité de branches. Sa valeur en un point z peut dépendre non seulement de z , mais encore du chemin suivi par cette variable pour aller du point initial au point z , ainsi que de la détermination choisie pour la fonction en ce point de départ.

Une fonction peut être uniforme dans un domaine, sans être uniforme dans tout le plan.

Considérons un domaine à connexion simple ou multiple, et une fonction w définie par une relation $f(z, w) = 0$, telle qu'à chaque valeur de z correspondent plusieurs valeurs de w . On conçoit que, sous certaines conditions (nous les préciserons plus tard), une détermination particulière w_1 varie d'une manière continue quand z décrit une courbe continue intérieure à un domaine. La branche w_1 est uniforme dans ce domaine lorsque, à une courbe *fermée* quelconque décrite par le point z et ne sortant pas du domaine, correspond une courbe *fermée* décrite par le point w_1 .

Ainsi l'égalité $w^2 = z$ définit deux branches d'une fonction de z ; chacune est uniforme dans tout domaine simplement connexe qui n'a pas l'origine à son intérieur. La relation $w^2 = z^2 - 1$ définit deux branches, uniformes dans le domaine limité par deux circonférences dont le centre est à l'origine et dont les rayons surpassent l'unité.

30. Une fonction d'une variable complexe est *holomorphe* ou

(1) On dit aussi que la fonction est *univoque, monotrope, monodrome, bien déterminée (eindeutig)*.

régulière en un point intérieur à un domaine continu, lorsqu'en ce point elle est bien déterminée, continue, et a une dérivée déterminée.

Elle est *holomorphe dans un domaine* connexe ω quand elle est holomorphe en tout point intérieur à ω . Ainsi, pour qu'une fonction $u + iv$ soit holomorphe dans ω , *il suffit* que les fonctions u et v soient déterminées et continues dans ω , ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, et que ces dérivées satisfassent aux relations (H). Pour qu'une fonction $f(z)$ soit holomorphe dans ω , *il suffit* que $f(z)$ soit partout déterminée et continue dans ω et qu'elle ait une dérivée en chaque point (¹).

La définition de fonction holomorphe, ainsi présentée par Cauchy, n'est pas arithmétique, en ce sens qu'elle ne permet pas de calculer effectivement les valeurs de la fonction en chaque point : ce qu'elle indique, ce sont ses propriétés.

Mais un théorème fondamental (n° 177) permet, étant donnée une fonction holomorphe dans un cercle de centre a , de représenter la fonction, à l'intérieur de ce cercle, par une série ordonnée suivant les puissances de $z - a$. Réciproquement, une pareille série représente une fonction holomorphe. Dès lors, on peut, avec Weierstrass, regarder par définition comme fonction holomorphe ou analytique en un point celle qui est développable en série de puissances dans le voisinage de ce point.

Cela posé, on dit qu'une fonction $u + iv$ ou $f(z)$ est *analytique dans un domaine* connexe ω lorsqu'elle est, *en général*, holomorphe dans ω , le mot *en général* voulant dire sauf peut-être en des points dont la suppression laisse d'un seul tenant l'ensemble des points où la fonction est holomorphe (²).

Ainsi, une fonction analytique dans un domaine connexe est celle qui est, *en général, déterminée, continue et monogène* dans le voisinage de tout point intérieur, ou bien encore celle qui,

(¹) C'est M. Goursat qui a montré que, pour édifier la théorie des fonctions analytiques, il suffisait de supposer la *continuité* de $f(z)$ et l'*existence* de $f'(z)$, *sans parler de la continuité de $f'(z)$* ; voir n° 168.

Lorsque deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ sont holomorphes dans ω , on voit qu'il en est de même de leur somme et de leur produit, ainsi que de leur quotient pourvu que le dénominateur ne s'annule pas dans ω .

(²) A proprement parler, une fonction analytique *en un point* est donc celle qui est analytique *régulière* en ce point.

dans le voisinage de ces points, est *en général développable en série de puissances*. Nous prouverons plus tard l'existence de ces fonctions.

Au lieu de définir ainsi *a priori* avec Cauchy la fonction analytique par ses propriétés, on peut mettre en évidence un de ses modes de génération, et regarder avec Weierstrass comme analytique toute fonction obtenue *en prolongeant* une série entière : un système monogène de séries de puissances constitue alors une fonction analytique. Ces deux définitions sont équivalentes, comme nous le verrons.

31. Soit une fonction $f(z)$ holomorphe en un point a , ou pour simplifier à l'origine, ce qui permet d'écrire

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad (|z| < \delta).$$

Lorsque les n premiers coefficients du développement sont nuls, on dit que *l'origine est un zéro d'ordre n* . On a alors

$$f(z) = z^n \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ désignant une série entière qui ne s'annule plus à l'origine.

Un zéro d'une fonction est *isolé* lorsque la fonction n'a pas d'autre zéro dans son voisinage : les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés (n^{os} 77, 135 et 227).

Quand une fonction, holomorphe en un point, ne s'annule pas en ce point, l'inverse de la fonction est holomorphe au même point (1).

Weierstrass a appelé *fonctions entières* les fonctions holomorphes en tout point à distance finie : on les divise en fonctions entières *rationnelles* (ou polynomes) et fonctions entières *transcendantes*.

32. A la fonction *régulière* dans un domaine on oppose celle qui a des singularités : un *point singulier* est un point où la fonction n'est pas régulière. Leur ensemble forme la frontière du domaine d'existence de cette fonction.

(1) Ce théorème est évident si l'on adopte pour la fonction holomorphe la définition de Cauchy. Nous le démontrerons (n^o 288) en partant de celle de Weierstrass.

Les singularités des fonctions analytiques *uniformes* sont *polaires* ou *essentiellles*.

Un point a est un *pôle* lorsque, dans son voisinage, la fonction peut être mise sous la forme

$$f(z) = \frac{A_1}{z-a} + \dots + \frac{A_n}{(z-a)^n} + \varphi(z) \quad (A_n \neq 0),$$

$\varphi(z)$ est supposé holomorphe dans le voisinage de a .

La partie du développement qui renferme les puissances négatives de $z - a$ est la *partie principale* ou *caractéristique* relative au pôle a ; elle a un nombre *limité* de termes, comme le développement d'une fraction rationnelle (1).

L'exposant n indique l'ordre du pôle.

(1) De cette définition résultent les propriétés suivantes (nous les groupons ici, mais nous n'en aurons besoin que plus tard) :

1° On peut trouver un entier positif n tel que le produit $(z - a)^n f(z)$ soit égal à une fonction $\psi(z)$ holomorphe dans le voisinage du pôle a .

La réciproque est vraie. En effet, $\psi(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de a , on peut écrire,

$$\psi(z) = A_n + A_{n-1}(z-a) + \dots + A_1(z-a)^{n-1} + \dots,$$

et dès lors

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^n} = \frac{A_1}{z-a} + \dots + \frac{A_n}{(z-a)^n} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de a .

2° Dans le voisinage d'un pôle, l'inverse de la fonction est une fonction holomorphe. En effet, de l'égalité

$$(z-a)^n f(z) = \psi(z) \quad [\psi(a) \neq 0]$$

on déduit

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n \frac{1}{\psi(z)},$$

la fonction holomorphe $\psi(z)$ n'étant pas nulle en a , son inverse est holomorphe.

La réciproque est vraie : une fonction non régulière en un point a , mais telle que son inverse soit holomorphe, admet le point a pour pôle.

3° Un pôle est *ISOLÉ*; car, d'après la propriété précédente, les pôles d'une fonction uniforme sont les zéros d'une fonction holomorphe.

4° Un point a , dans le voisinage duquel une fonction analytique uniforme a une infinité de zéros ou de pôles, n'est ni un point ordinaire ni un pôle. En effet, s'il y a une infinité de zéros dans le voisinage de a , et si a n'est pas point essentiel, a est un zéro non isolé, ce qui est impossible. S'il y a une infinité de pôles dans le voisinage de a , et si a n'est pas point essentiel, a est un pôle non isolé, ce qui est encore impossible.

Les fonctions uniformes n'ayant à distance finie que des singularités polaires sont appelées *fractionnaires* ou *méromorphes* : telles sont les fonctions elliptiques. Souvent aussi on dit qu'une fonction est méromorphe *dans un domaine* lorsqu'elle n'y a d'autres singularités que des pôles.

La dérivée logarithmique $F(z)$ d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans un domaine D est elle-même méromorphe dans ce domaine. En effet, tout point a de D est pour $f(z)$ soit un zéro, soit un pôle, soit un point qui n'est ni zéro, ni pôle. Dans ce dernier cas, a est aussi un point ordinaire pour $F(z)$. Dans les deux autres cas, c'est un pôle. Car, suivant que a est racine ou pôle de $f(z)$, on peut écrire

$$f(z) = (z - a)^p \psi(z), \quad f'(z) = \frac{\psi'(z)}{(z - a)^p},$$

$\psi(z)$ désignant une fonction holomorphe au point a et *différente de zéro*; p est un entier positif. On en déduit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pm p}{z - a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Ainsi toute racine ou tout pôle d'ordre p pour $f(z)$ est pôle simple pour $F(z)$: de plus, le résidu est $+p$ ou $-p$ suivant qu'il s'agit d'une racine ou d'un pôle de $f(z)$.

33. Nous verrons (n° 240) que le *point singulier essentiel isolé* (1) est caractérisé par la propriété suivante : dans son voisinage, on peut mettre la fonction sous la forme

$$f(z) = \frac{A_1}{z - a} + \dots + \frac{A_n}{(z - a)^n} + \dots + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ est supposé holomorphe dans le voisinage de a .

Dans le cas du pôle, la partie fractionnaire avait un nombre limité de termes; ici, *c'est une série*.

(1) En parlant de singularité *isolée*, on peut exclure de son voisinage toutes les singularités (c'est ce que l'on fait ici), ou seulement les singularités de même type ou de type plus compliqué.

Pour le pôle, il n'y a pas lieu de faire cette distinction, puisqu'il correspond à la singularité la plus simple.

34. En géométrie, on considère à l'infini dans le plan une infinité de points distincts. Dans les recherches analytiques, on regarde souvent l'ensemble des points à l'infini comme un point *unique* : le voisinage de ce point est l'ensemble des points dont le module dépasse tout nombre donné.

Pour étudier une fonction en ce point à l'infini, on le ramène à l'origine par le changement de variable $z = \zeta^{-1}$, et l'on s'occupe du point zéro de la fonction transformée. Il n'y a rien à changer aux définitions ci-dessus. Dès lors :

1° La fonction $f(z)$ est *régulière à l'infini* si, dans le voisinage de $\zeta = 0$, on peut écrire

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n + \dots$$

En ce cas, l'infini est un zéro de la fonction $f(z)$ lorsque a_0 est nul. L'exposant de la première puissance de ζ dont le coefficient n'est pas nul donne l'*ordre du zéro*.

2° Si la fonction n'est pas régulière à l'infini, l'infini est un *point singulier*. C'est un point singulier *isolé* si, dans son voisinage, il n'y a pas d'autre point singulier. Cette singularité isolée est *polaire* ou *essentielle*.

C'est un *pôle* si, dans le voisinage de $\zeta = 0$, on a

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{A_1}{\zeta} + \dots + \frac{A_n}{\zeta^n} + a_0 + a_1\zeta + \dots + a_p\zeta^p + \dots$$

ce pôle est d'*ordre* n ⁽¹⁾, et la *partie principale* est le polynôme $A_1 z + \dots + A_n z^n$.

(1) On voit ce qu'il faut entendre ici par *zéro d'ordre* n , *pôle d'ordre* n (n est un entier positif fini). On emploie le mot *ordre* dans d'autres acceptions, quand on se sert des locutions : *ordre d'une fonction en un point*, *ordre total d'une fonction*.

1° En un point, l'ordre d'une fonction est zéro, si le point n'est ni une racine, ni un pôle : il est égal à $+n$ ou à $-p$, si le point est racine d'ordre n ou pôle d'ordre p .

2° L'*ordre total d'une fonction* ou simplement l'*ordre* est le nombre total des pôles, comptés avec leur degré de multiplicité, qu'elle admet dans une région. Par exemple, l'ordre d'une fonction algébrique est le nombre total de ses pôles dans tout le plan ; l'ordre d'une fonction elliptique est le nombre de ses pôles dans le parallélogramme des périodes.

C'est un point essentiel, si la partie principale a un nombre illimité de termes.

35. Effectuer une *substitution*, c'est remplacer une ou plusieurs variables par une ou plusieurs fonctions de ces variables. On représente cette opération par les notations

$$(z, \varphi(z)), (x, y, z; \varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z))$$

ou simplement par

$$(\varphi(z)), (\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)).$$

Considérons un ensemble de substitutions, en nombre fini ou infini. Le *produit* de deux substitutions données dans un certain ordre est l'opération qui consiste à effectuer la première substitution et, dans le résultat obtenu, à effectuer la seconde (l'ordre dans lequel on exécute ces deux opérations n'est pas indifférent). La définition de *puissance positive* d'une substitution en découle. Les notations

$$(\varphi(z), \psi(z)), (\varphi(\psi(z))), (\varphi^n(z))$$

indiquent, les premières le produit des substitutions $\varphi(z)$, $\psi(z)$, la dernière le produit de n substitutions consistant à remplacer z par $\varphi(z)$ et à répéter cette opération n fois.

On appelle *substitution identique* celle qui n'altère pas la variable.

La substitution *inverse* d'une substitution $(\varphi(z))$ est l'opération qui consiste à remplacer z par une fonction de z' telle que l'on ait $z' = \varphi(z)$. On la représente par $(z, \varphi^{-1}(z))$.

Une substitution suivie de son inverse, c'est-à-dire le produit des substitutions $(z, \varphi(z))$, $(z, \varphi^{-1}(z))$ revient à la substitution identique (z, z) .

La substitution inverse ou puissance -1 d'une substitution permet de définir les *puissances négatives* d'une substitution.

Il est souvent commode de représenter par des lettres S, T, U, ... les substitutions d'un ensemble : les symboles ST, STU, S^m , S^{-1} , S^0 (ou 1) désigneront respectivement le produit des substitutions S

et T, des substitutions S, T, U, de m substitutions égales à S, la substitution inverse de S, la substitution identique (¹).

Bornons-nous aux ensembles de substitution dont la définition entraîne celle de l'inverse de toute substitution qui y figure, et qui contiennent l'inverse de toute substitution (et par suite la substitution identique).

Un tel ensemble de substitution forme un GROUPE, lorsque le produit de deux substitutions quelconques de l'ensemble appartient à l'ensemble.

Lorsque, dans un groupe, on peut isoler un nombre fini ou infini de substitutions, telles qu'elles forment un nouveau groupe, ce groupe partiel constitue un *sous-groupe*.

Cette notion de groupe peut être généralisée et appliquée à un ensemble d'opérations ou de transformations : dans les conditions précédentes, elles forment un groupe lorsque la succession, ou produit de deux opérations, est équivalente à une seule opération appartenant à l'ensemble (²).

(¹) Les symboles ST, TS n'indiquent pas, avons-nous dit, la même succession d'opérations; aussi l'on n'a pas toujours $ST = TS$. Au contraire, on peut écrire

$$STU = S(TU).$$

(²) Ainsi, en Géométrie plane, l'ensemble des déplacements d'une figure forme un groupe (continu), qui a pour sous-groupes l'ensemble des translations et l'ensemble des rotations autour d'un même point. L'ensemble des homothéties forme un groupe, puisque deux figures homothétiques d'une troisième sont homothétiques entre elles. L'ensemble des inversions ne forme pas de groupe; car le produit de deux inversions n'est pas une inversion.

Ainsi les intégrales d'une équation différentielle linéaire subissent une substitution linéaire quand la variable décrit dans le plan un contour fermé quelconque : l'ensemble des substitutions relatives à tous les contours possibles forme un groupe (discontinu au moins dans une région du plan).

D'une manière générale, soient a, b, c, \dots un système d'éléments de nature quelconque : on dit qu'ils forment un *groupe*, quand les conditions suivantes sont réalisées :

1° Le *produit* de deux éléments quelconques a et b du système est un élément c du système;

2° Les éléments ab et ba peuvent être différents; mais les éléments $(ab)c$ et $a(bc)$ doivent être les mêmes;

Prenons comme exemple les substitutions linéaires, c'est-à-dire les substitutions $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$. Elles forment un groupe, car le produit de deux quelconques de ces substitutions est une substitution de même type (1); il en est de même de la substitution inverse de chaque substitution. Nous nous occuperons *seulement* des groupes dont les substitutions dérivent d'un nombre *fini* de substitutions.

En particulier, l'ensemble des substitutions linéaires pour lesquelles a, b, c, d sont *réels* forme un groupe (on suppose toujours, ce qui ne diminue pas la généralité, que le déterminant, $ad - bc$, de chaque substitution est égal à 1) : tout sous-groupe de ce groupe est appelé *groupe fuchsien* (2).

Parmi les groupes fuchiens, on distingue le *groupe modulaire* : c'est le groupe formé par toutes les substitutions linéaires, dans lesquelles a, b, c, d sont des *entiers* (de déterminant + 1). Cet ensemble de substitutions renferme la substitution inverse de chaque substitution et le produit de deux substitutions quelconques, et par suite forme bien un groupe (le déterminant reste égal à 1); il est fuchsien, puisque ses substitutions dérivent d'un nombre fini de substitutions (n° 40).

Appliquons ces généralités à l'étude des fonctions.

3° Les égalités $ab = ab', ab = a'b$ doivent entraîner : la première, $b = b'$; la seconde, $a = a'$:

4° Quand, de trois éléments a, b, c de l'ensemble, deux sont donnés arbitrairement, on doit pouvoir déterminer le troisième de telle sorte que l'on ait $ab = c$.

On remarquera que, pour les ensembles ayant un nombre *fini* d'éléments, cette quatrième propriété rentre dans les précédentes, et dès lors on peut se dispenser de la vérifier directement.

Cette définition montre que tout groupe renferme la substitution identique (cf. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, t. II, p. 3).

(1) Nous supposons toujours que le déterminant de la substitution, $ad - bc$, n'est pas nul, c'est-à-dire que l'homographie n'est pas *impropre*.

(2) Un groupe est *discontinu* dans une région lorsque, dans le groupe, il n'y a pas de substitution remplaçant un point M de cette région par un point différent de M et dont la distance à M soit inférieure à tout nombre donné.

Un groupe fuchsien est discontinu dans toute région située au-dessus de l'axe réel et n'ayant avec cet axe aucun point commun; il n'est pas discontinu sur cet axe.

Considérons les fonctions uniformes $f(z)$ qui ne changent pas lorsqu'on effectue sur leur argument z une substitution déterminée $\varphi(z)$ et la substitution inverse de cette substitution. D'après les notations précédentes, on aura

$$f(\varphi(z)) = f(z), \quad f(\varphi^n(z)) = f(\varphi^{-n}(z)) = f(z).$$

Si $\varphi(z)$ est de la forme $z + a$, la fonction est dite *périodique*.

Si $\varphi(z)$ est de la forme $\frac{az+b}{cz+d}$, la fonction est dite *automorphe* ou à transformation linéaire.

Plus généralement, on appelle *fonctions automorphes* les fonctions uniformes qui restent invariables pour les transformations d'un groupe de substitutions linéaires du type ci-dessus : en particulier, les *fonctions fuchsiennes* sont les fonctions uniformes qui restent invariables par les transformations d'un groupe fuchsien, et les *fonctions modulaires* celles qui, par les transformations du groupe modulaire, ne prennent qu'un nombre limité de valeurs.

Une *région fondamentale* pour une fonction uniforme est un domaine dans lequel la fonction prend toutes les valeurs dont elle est susceptible, et prend chaque valeur une seule fois.

En particulier, pour une fonction automorphe, la connaissance d'une région fondamentale permet d'en obtenir une infinité d'autres. Deux régions fondamentales ne peuvent avoir de point commun.

36. Plusieurs des définitions et des résultats précédents s'étendent aux fonctions de plusieurs variables. Soit une fonction de p variables complexes (z_1, \dots, z_p) , définie dans un domaine continu Ω à $2p$ dimensions, formé par l'ensemble de p domaines continus $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ chacun à deux dimensions. Au sens de Cauchy, cette fonction est holomorphe ou analytique *en un point* (a_1, \dots, a_p) *intérieur* à ce domaine lorsqu'elle est holomorphe, par rapport à la variable z_r , dans le domaine Ω_r , quel que soit r , les autres variables $z_1, \dots, z_{r-1}, z_{r+1}, \dots, z_p$ restant fixes dans les domaines correspondants.

On en conclut qu'une fonction holomorphe admet p développements, procédant respectivement suivant les puissances de

$(z_1 - a_1), \dots, (z_p - a_p)$, et on lui assignera (nos 140, 180, 297), comme propriété caractéristique, la possibilité d'une représentation par une série multiple

$$\sum A_{\nu_1, \dots, \nu_p} (z_1 - a_1)^{\nu_1} \dots (z_p - a_p)^{\nu_p} \quad (\nu_1, \dots, \nu_p = 0, 1, 2, \dots),$$

à l'intérieur du domaine formé par l'ensemble de p cercles ayant pour centres les points a_r et pour rayons des nombres positifs fixes. Si l'une des quantités a_r est infinie, on remplace $|z_r - a_r|$ par $\frac{1}{|z_r|}$.

Weierstrass regarde par définition une fonction comme étant holomorphe ou analytique régulière en un point, lorsqu'elle admet un développement en série de ce dernier type.

La notion de fonction *analytique en un point* étant admise, on passe à celle de fonction *analytique dans un domaine*, soit en regardant comme telle celle qui est en général holomorphe dans ce domaine, soit en prolongeant la série initiale considérée, comme nous l'expliquerons.

FIN DU TOME I.

