خواص مادّہ

سید محمد علی خاں
سید عبدالرحمٰن

خواص مادّہ

از

سید محمد علیخاں بی۔ اے (عثمانیہ) اے۔ آر۔ سی۔ ایس، بی۔ ایس۔ سی "آنرس" (لندن)

سید عبدالرحمن بی۔ اے (عثمانیہ)

شعبہ طبیعیات جامعہ عثمانیہ

حیدرآباد دکن

مطبوعہ شمس المطابع مشین پریس نظام شاہی روڈ حیدرآباد دکن

۱۳۴۴ف م ۱۹۳۵ء

قیمت للعہ ؍ (غیر مجلد)

۷۸۶

دیباچہ

ہندوستانی جامعات میں پاس یا آنرس ڈگری کی تعلیم پانیوالے ایسے طلبا کیلئے یہ کتاب لکھی گئی ہے جو احصاء تفرقی اور تکملی کے سادہ اصول سے کسیقدر واقف ہوں۔ ریاضی کے ذریعہ جہاں کہیں بھی تفہیم کیضرورت تھی وہاں طلبا کی دقتوں کا لحاظ کرتے ہوئے تفصیلی طور پر بحث کیگئی ہے تاکہ دیگر نظری کتب کی محتاجی باقی نہ رہے۔ مادّہ سے متعلق مظاہر کی تجربی تفصیلات پر کافی روشنی ڈالی گئی ہے، امید کیجاتی ہے کہ اس اہم مضمون میں دلچسپی رکھنے والے طلبا اس کتاب کو خاص طور پر کارآمد پائیں گے۔

یہ کتاب ایک حد تک ان لکچروں کے باعث معرض وجود میں آئی جو خواص مادّہ پر جامعہ عثمانیہ میں وقتاً فوقتاً طیلسانین کی جماعتوں کو دئیے گئے۔ اس کی تدوین میں مختلف معیاری کتب اور رسائل سے کافی مدد لیگئی ہے جنکا حوالہ ہر باب کے اختتام پر اعداد کے ذریعہ دیا گیا ہے۔ رائل کالج آف سائنس لندن کے بعض مشاہیر طبیعیات کے ہم رہین منت ہیں جن کے لکچروں کے بغیر اس کتاب کا پایۂ تکمیل کو پہنچنا شاید ممکن نہ ہوتا۔

عام طور پر انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں میں جو ابتدائی امور بتائے جاتے ہیں انکو اس کتاب میں درج نہیں کیا گیا ہے۔ صرف اہم مضامین مثلاً جمود کا معیار اثر، نظریۂ اہتزاز، جاذبیت، لچک، سطحی تناؤ، لزوجیت، نفوذ اور نظریۂ تحرک وغیرہ سے اسمیں تفصیلی بحث کیگئی ہے۔ کتاب کے آخر میں اسمی اشاریہ اور ساتھ ہی ساتھ اردو اور اسکے معادل انگریزی اصطلاحات کی ایک مکمل فہرست بھی شامل کیگئی ہے اور توقع کی جاتی ہے کہ اس سے طلبا کو مضمون کے سمجھنے میں سہولت ہوگی۔

شعبہ طبیعیات جامعہ عثمانیہ

حیدرآباد دکن

اگست ۱۹۳۵ء

سید محمد علیخاں

سید عبدالرحمن

فہرست مضامین

"غلطنامہ"

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴	۱۱	افقی خط	خط
۶	۲۲	لافزلا	لا۲ فزلا
۱۲	۱۶	قر	فر
۴۱	۱۸	پھسلواں	لڑھکنے والا
۴۷	۳	کا وزن	کی کمیت
۵۴(الف)	۷	(1928)	(1924)
۵۴(الف)	۹	Master	Matter
۶۳	۱۵	ریچرز	ریشارٹز
۱۱۳	۱۱	لٹکا	ٹیکا
۱۱۸	۳	(۳۱)	(۳۹)
۱۱۸	۵	(۱۰)	(۴۰)
۱۴۲	۱۰	تحیتوں	تختیوں
۱۴۹	۱۵	۱۴	۱۴
۱۸۰	۱۲	زنگگن	رونتگن
۱۹۳	۱۰	مازنگونی	میزنگونی
۲۱۸	۲۰	سائکلاٹڈ	تدویرنما
۴۱۷(الف)	۱۴	(2893)	(1893)

۷۸۶

پہلا باب

ابعاد۔ رسم الطریق اور جمود کا معیار اثر

ابعاد:۔ س۔ گ۔ ث نظام میں رقبہ اور حجم کی اکائیاں علی الترتیب (سمر)^{2} اور (سمر)^{3} ہوتی ہیں۔ اگر ایک میتر طول کو ہم معیاری قرار دیں تو رقبہ اور حجم کی اکائیاں بھی بالترتیب (میتر)^{2} اور (میتر)^{3} ہوں گی۔ یعنی معمولی اکائیوں سے رقبہ (۱۰۰ سمر)^{2} اور حجم (۱۰۰ سمر)^{3} گنا بڑا ہوگا۔ اس صورت میں طول کے رقوم میں رقبہ اور حجم کے ابعاد علی الترتیب ۲ اور ۳ کہلائیں گے۔ اسی طرح جب کوئی ماخوذ اکائی کسی بنیادی اکائی کے ن ویں نسبت نما پر مبنی ہو تو ایسی ماخوذ اکائی بنیادی اکائیوں میں ن ابعاد کی ہوگی۔

رفتار کے ابعاد حسب ذیل طریقہ سے معلوم کئے جاتے ہیں:۔

رفتار = طول/وقت = طول × وقت$^{-1}$ یعنی ۱ طول اور −۱ وقت اسراع کے ابعاد دریافت کرنے ہوں تو چونکہ اسراع = رفتار/وقت اس لئے اس کے ابعاد ۱ طول اور −۲ وقت ہونگے۔

علیٰ ہذا لقیاس معیار حرکت = کمیت × رفتار، اسلئے اسکے ابعاد ۱ کمیت، ۱ طول اور −۱ وقت ہونگے۔

چونکہ قوت = کمیت × اسراع لہذا قوت کے ابعاد ۱ کمیت، ۱ طول اور −۲ وقت ہونگے۔ اسی طرح حجم، رقبہ، کام وغیرہ کے ابعاد حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مختلف اکائیوں کے ابعاد حسب ذیل ہیں:۔

	طول	کمیت	وقت
رفتار	۱	صفر	۱-
اسراع	۱	صفر	۲-
معیارِ حرکت	۱	۱	۱-
رقبہ	۲	صفر	صفر
حجم	۳	صفر	صفر
کثافت	۳-	۱	صفر
قوت	۱	۱	۲-
کام یا توانائی	۲	۱	۲-
کثافت اضافی	صفر	صفر	صفر
دباؤ	۱-	۱	۲-
سطحی تناؤ	صفر	۱	۲-
لزوجیت	۱-	۱	۱-
ینگ کا معیارِ لچک	۱-	۱	۲-

ان ابعاد کے ذریعہ ہم بہت سے سوالات حل کرسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ان کی مدد سے ہم سادہ رقاص کا ضابطہ اخذ کرینگے۔

یہ ہم جانتے ہیں کہ رقاص کا وقت دوران و، رقاص کے طول ل، اسراع بوجہ جاذبۂ زمین ج اور رقاص کی کمیت ک پر منحصر ہے۔ فرض کرو کہ $و = م \, ل^{ا} \, ج^{ب} \, ک^{ف}$ ...... (۱)
جہاں م، ا، ب اور ف دریافت طلب اعداد ہیں۔

اس مساوات کو صحیح ہونے کے لئے داہنی جانب کے ابعاد، بائیں جانب کے ابعاد کے مساوی ہونے چاہئیں۔ و کے ابعاد ۱ وقت، صفر طول اور صفر کمیت ہیں، ل کے ابعاد ۱ طول اور ج چونکہ اسراع ہے اسکے ابعاد ۱ طول، -۲ وقت ہیں اور ک کے ابعاد ۱ کمیت ہے۔

لہذا $م \, ل^{ا} \, ج^{ب} \, ک^{ف}$ میں ا + ب طول ابعاد ہیں، -۲ ب وقت کے ابعاد اور ف کمیت کے،

لہذا
$$\left.\begin{array}{l} ا + ب = صفر \\ -۲ ب = ۱ \\ ف = صفر \end{array}\right\}$$ تاکہ مساوات (۱) صحیح ثابت ہو

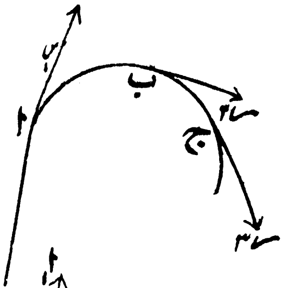
$\therefore$ ا = $\frac{۱}{۲}$، ب = $-\frac{۱}{۲}$ اور ف = صفر

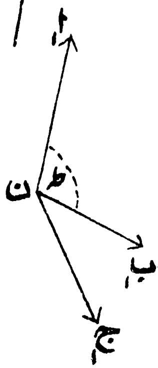
$\therefore$ $و = م \, ل^{\frac{۱}{۲}} \, ج^{-\frac{۱}{۲}}$ یعنی $و = م \sqrt{\frac{ل}{ج}}$ یہاں مستقل م کی قیمت تجربہ سے معلوم کیگئی اور جب زاویہ اہتزاز چھوٹا ہو تو یہ مساوی ہوتی ہے ۲π کے

اسلئے $و = ۲\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}}$

اسی طرح ہم دوسرے سوالات بھی حل کرسکتے ہیں۔

رسم الطریق فرض کرو کہ ایک ذرہ ق منحنی ا ب ج پر اس طرح حرکت کر رہا ہے کہ اسکی رفتار ا پر $س_۱$، نقطہ ب پر $س_۲$ اور ج پر $س_۳$ وغیرہ ہے۔





شکل ۱

کوئی نقطہ ن لیکر ن ا۱، ن ب۱، ن ج۱ ایسے خطوط کھینچو جو بالترتیب ا پ، ب پ۲، اور ج پ۳ کے متوازی بھی ہوں اور س۱، س۲، س۳ کی تعبیر بھی کریں۔ اب اگر ا۱، ب۱، ج۱ نقطوں کو ایک منحنی کے ذریعہ ملایا جائے تو یہ منحنی ق کی حرکت کا رسم الطریق کہلائے گا۔ اگر ق ایک خط مستقیم پر یکساں رفتار سے حرکت کرے تو ق کی حرکت کا رسم الطریق ایک نقطہ ہوگا۔ اگر ق یکساں رفتار سے حرکت نہ کرے تو ایسی صورت میں ق کی حرکت کا رسم الطریق ایک افقی خط مستقیم ہوگا۔

فرض کرو کہ شکل ۱ میں ا اور ب دونوں نقطے ایکدوسرے کے بالکل قریب واقع ہیں۔ تب رسم الطریق میں ا۱ اور ب۱ بھی بہت قریب واقع ہونگے۔ فرض کرو کہ ق نقطہ ا سے ب تک و وقت میں حرکت کرتا ہے۔

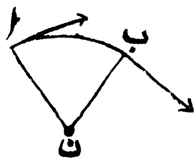
جبکہ ق منحنی ا ب ج .... پر سے گزرتا ہے اس وقت یہ تصور کرو کہ ایک ذرّہ ق، رسم الطریق ا۱ ب۱ ج۱ .... پر سے بھی گزر رہا ہے۔ تب ق، ا۱ سے ب۱ تک و وقت میں پہنچے گا۔ یعنی ق، کی رفتار = ا۱ ب۱ / و

فرض کرو کہ زاویہ ا۱ ن ب۱ = ط، اب چونکہ ن ا۱، ق کی رفتار کی تعبیر کرتا ہے ا پ، اور نقطہ ب پر ق کی رفتار کی تعبیر ن ب۱ سے ہوتی ہے اس لئے ق کے ا سے ب تک جانے میں رفتار میں جو تبدیلی واقع ہوئی اس کی تعبیر ا۱ ب۱ سے ہوگی۔

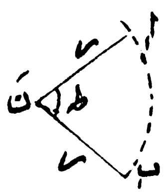
یعنی ق کی تبدیلی رفتار = ا۱ ب۱ اور چونکہ یہ و وقت میں ہوئی اس لئے ق کی شرح تبدیلی رفتار = ا۱ ب۱ / و = ق کے اسراع کے

یا دوسرے الفاظ میں ق کا اسراع = رسم الطریق میں قَ کی رفتار کے

یکساں دائری حرکت:- فرض کرو کہ ایک نقطہ ق یکساں رفتار سے دائرہ کے محیط پر حرکت کر رہا ہے اور دائرہ کا مرکز ن اور نصف قطر ص ہے۔



اوپر کے بیان کے مطابق اگر اس کا رسم الطریق کھینچا جائے تو قَ کی رفتار ہر وقت نصف قطر کے علی القوائم ہوگی۔ اسلئے نَ اَ اور نَ بَ ن ا اور ن ب کے علی القوائم ہوں گے۔



شکل ۲

اور زاویہ ا ن ب = زاویہ اَ نَ بَ = ط

فرض کرو کہ ق کو ا سے ب تک جانے کے لئے جو وقت صرف ہوا وہ و کے مساوی ہے

$$\text{تب } ر = \frac{\text{ا ب}}{و} = \frac{\text{ص ط}}{و}$$

$$\text{رسم الطریق میں ذرہ قَ کی رفتار} = \frac{\text{اَ بَ}}{و} = \frac{\text{ر ط}}{و}$$

$$\text{اسلئے ق کا اسراع} = \text{قَ کی رفتار} = \frac{\text{ر ط}}{و} = \frac{\text{ر ط ر}}{\text{ص ط}} = \frac{ر^2}{ص}$$

اور یہ ہمیشہ دائرہ کے مرکز کی جانب عمل کرتا ہے چونکہ نصف قطر کے علی القوائم ہے۔

اور نیز چونکہ دائرہ کا محیط = ۲ π ص اس لئے ق اس دائرہ کا پورا چکر وقت $\frac{2\pi\,ص}{ر}$ میں لگاتا ہے۔ ایک پوری گردش میں ق جو زاویہ طے کرتا ہے = ۲ π، لہذا ایک پورے چکر کا وقت = $\frac{2\pi}{\omega}$ جہاں ω = ذرہ ق کی زاوی رفتار۔

$$\therefore \frac{2\pi\,ص}{ر} = \frac{2\pi}{\omega}$$

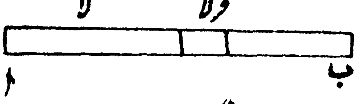
$$\therefore ر = ص\,\omega \quad \text{یعنی ق کا اسراع} = \frac{ر^2}{ص} = ص\,\omega^2$$

اگر کسی ذرہ کی کمیت ک ہو اور وہ یکساں رفتار کے ساتھ دائرہ میں حرکت

کرے تو جو قوت اسکے مرکز پر عمل کرے گی وہ $\frac{ک\ سا^2}{ص}$ یا ک ص کلا^2 کے مساوی ہوگی۔

اگر دھاگے کے ایک سرے سے کوئی پتھر باندھا جائے اور دوسرے سرے کو انگلی سے باندھ کر پتھر کو یکساں رفتار سے دائرے کی شکل میں گھمایا جائے تو انگلی پر جو قوت دھاگے کی سمت میں عمل کریگی = $\frac{ک\ سا^2}{ص}$ = ک ص کلا^2

جمود کا معیار اثر:۔ فرض کرو کہ ہم ایک سلاخ کو مختلف چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں جن کی کمیت ک$_1$، ک$_2$، ک$_3$ .... وغیرہ ہے تقسیم کرتے ہیں اور ان کا فاصلہ کسی ایک سرے سے ص$_1$، ص$_2$، ص$_3$، ص$_4$ .... وغیرہ ہے۔ تب ک$_1$ ص$_1^2$، ک$_2$ ص$_2^2$، ک$_3$ ص$_3^2$ .... وغیرہ ان ٹکڑوں کے جمود کا معیار اثر علی الترتیب اس سرے کے گرد ہوگا اور چنانچہ "$\sum$ ک ص^2" اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر اس کے ایک سرے کے گرد کہلاتا ہے۔ فرض کرو کہ شکل نمبر ۳ میں ا ب ایک سلاخ ہے جس کا طول ل اور کمیت م ہے۔ اس سلاخ کو اگر چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ایک چھوٹا ٹکڑا (فرض کرو) فرلا ایسا ہے جو سرے ا سے لا فاصلہ پر ہے۔ اگر اکائی طول کی کمیت ک ہو تو اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت = ک فرلا



شکل ۳

لہذا اس ٹکڑے کے جمود کا معیار اثر = ک فرلا لا^2

اگر پوری سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے ایک سرے کے گرد مج سے تعبیر کیا جائے تو

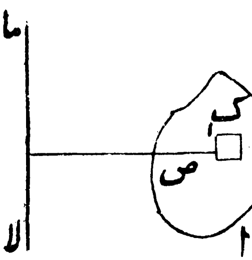
$$\text{مج} = \text{ک} \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \text{فرلا لا}^2 = \text{ک}\ \frac{\text{ل}^3}{3} \qquad \text{لیکن ک ل = م}$$

$$\therefore\ \text{مج} = \frac{\text{م ل}^2}{3}$$ بشرطیکہ سلاخ یکساں ہو۔

اسی طرح اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے مرکز کے گرد = $\text{ک} \int_{\text{صفر}}^{\frac{\text{ل}}{2}} \text{لا}^2\ \text{فرلا}$

$$\sum \frac{\text{ک ل}^{3}}{۲۴} = \frac{\text{م ل}^{2}}{۲۴}$$

لیکن یہ صرف آدھی سلاخ کا جمودی معیار اثر ہے۔ لہذا
پوری سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے مرکز کے گرد $= \frac{\text{م ل}^{2}}{۱۲}$



شکل ۴

فرض کرو کہ شکل ۴ میں ا ایک ایسا جسم ہے جسکی کمیت م ہے اور لا ما کوئی ایک خط ہے۔ اگر اس جسم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا جائے جس کی کمیت ک۱، ک۲، ک۳، ک۴، ک۵ .... وغیرہ ہو اور ان کا فاصلہ لا ما سے بالترتیب ص۱، ص۲، ص۳ .... وغیرہ ہو۔

تو $\text{ک}_۱ \text{ص}_۱^{2} + \text{ک}_۲ \text{ص}_۲^{2} + \text{ک}_۳ \text{ص}_۳^{2} + \dots\dots$ کو خط لا ما کے گرد جسم ا کے جمود کا معیار اثر کہتے ہیں۔ اگر اس کو مج سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{مج} = \sum \text{ک ص}^{2}$$

اب فرض کرو کہ $\sum \text{ک ص}^{2} = \text{م ف}^{2}$

جہاں $\text{م} = \text{ک}_۱ + \text{ک}_۲ + \text{ک}_۳ + \dots\dots = \sum \text{ک}$

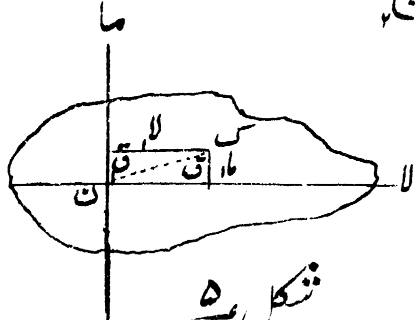
اور $\text{ف}^{2} = \sum \text{ص}^{2}$

اس ف کو گردشی نصف قطر سے تعبیر کیا جاتا ہے یعنی $\text{مج} = \text{م ف}^{2}$

علی القوائم محوروں کا اصول:- فرض کرو کسی پترے کے جمود کے معیار اثر ایسے دو محوروں کے گرد جو ایکدوسرے کے علی القوائم ہیں، مج اور مج سے تعبیر کئے جاتے ہیں اور خود یہ محور پترے کے مستوی میں ہیں۔ اگر اس پترے کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے خط کے گرد جو اُن دونوں محوروں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے اور اس پترے کے مستوی کے علی القوائم ہے مج ہو تو

مج = مج۱ + مج۲

فرض کرو کہ شکل ۵ میں



شکل ۵

ن لا اور ن ما ایسے دو محور ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ ق ایک ٹکڑا ہے جس کی کمیت ک۱ ہے اور اسکا فاصلہ ان محوروں سے لا۱ اور ما۱ ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ق کا فاصلہ ایک ایسے محور سے جو ن میں سے گزرتا ہے اور مستوی ما ن لا کے علی القوائم ہے = ق۱

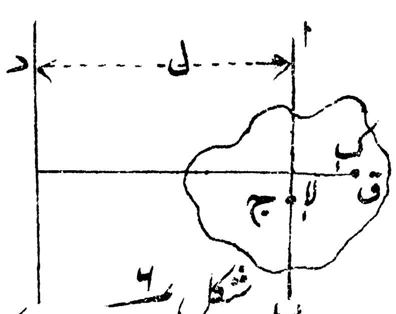
تب مج۳ = Σ ک۱ ق۱²

= Σ ک۱ (لا۱² + ما۱²)

= Σ ک۱ لا۱² + Σ ک۱ ما۱²

= مج۱ + مج۲

متوازی محوروں کا اصول :— کسی پترے کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو پترے کے مستوی میں واقع ہے = اس محور کے متوازی اور پترے کے مرکز کمیت میں سے گزرنے والے کسی دوسرے محور کے گرد والے جمود کے معیار اثر کے + م ل² جہاں م = پترے کی کمیت اور ل = دونوں محوروں کے درمیان فاصلہ۔



شکل ۶

فرض کرو شکل ۶ میں د دَ ایک ایسا محور ہے جو پترے کے مستوی میں ہے اور ا ب ایک دوسرا محور

ایسا ہے جو د دَ کے متوازی بھی ہے اور پترے کے مرکز کمیت ج میں سے گزر بھی رہا ہے۔ اس پترے میں کوئی ایک چھوٹا سا ٹکڑا ق تصور کرو۔ اب اگر اُس چھوٹے سے ٹکڑے ق کی کمیت جس کا فاصلہ ا ب سے لا_1 ہے، ک_1 فرض کی جائے۔ (ان ٹکڑوں کے فاصلوں کی علامتیں ا ب کے دائیں یا بائیں جانب ہونے کے لحاظ سے بالترتیب مثبت یا منفی لی جائیں گی۔)

تو اس ٹکڑے کے جمود کا معیار اثر د دَ کے گرد $= \text{ک}_1 (\text{لا}_1 + \text{ل})^2$

$$= \text{ک}_1 (\text{لا}_1^2 + \text{ل}^2 + ۲\ \text{لا}_1 \text{ل})$$

$$= \text{ک}_1 \text{لا}_1^2 + \text{ک}_1 \text{ل}^2 + ۲\ \text{لا}_1 \text{ل}\ \text{ک}_1$$

فرض کرو کہ د دَ اور ا ب کے گرد جمود کا اثری معیار مج اور مج_1 علی الترتیب ہیں تب

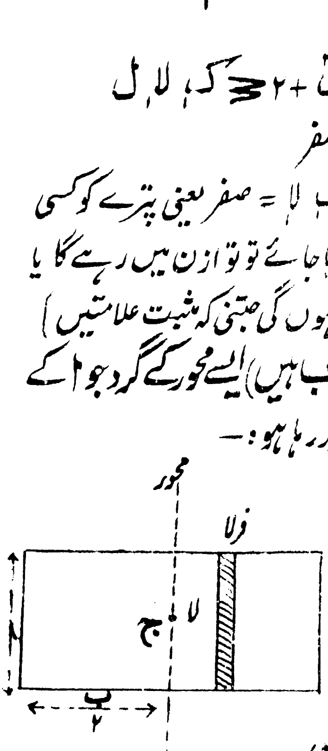
$$\text{مج} = \Sigma\, \text{ک}_1 (\text{لا}_1 + \text{ل})^2$$

$$= \Sigma\, \text{ک}_1 \text{لا}_1^2 + \Sigma\, \text{ک}_1 \text{ل}^2 + ۲\, \Sigma\, \text{ک}_1 \text{لا}_1 \text{ل}$$

$$= \text{مج}_1 + \Sigma\, \text{ک}_1 \text{ل}^2 + \text{صفر}$$

$= \text{مج}_1 + \text{م}\,\text{ل}^2$ (چونکہ $\Sigma\, \text{ک}_1 \text{لا}_1 = \text{صفر}$ یعنی پترے کو کسی دھاری دار کنارے کے ذریعہ ا ب محور پر لٹکایا جائے تو توازن میں رہے گا یا دیگر الفاظ میں $\text{ک}_1 \text{لا}_1$ کی نفی علامتیں اتنی ہی ہوں گی جتنی کہ مثبت علامتیں)

(ا) ایک مستطیل کی جمود کا معیار اثر (جس کے ضلعے ا اور ب ہیں) ایسے محور کے گرد جو ا کے متوازی ہو اور مستطیل کے مرکز میں سے گزر رہا ہو:-



شکل ۷

فرض کرو کہ مستطیل کی کمیت = م

اس مستطیل کو فرلا کے مانند چھوٹی چھوٹی دھجیوں میں تقسیم کرو اور ایک چھوٹی فرلا دھجی پر غور کرو جس کا فاصلہ محور سے فرض کرو = لا

دیکھو (شکل ۷)

اس دھجی کی کمیت $= \dfrac{\text{فرلا م}}{\text{ب}}$

اور اسکے جمود کا معیار اثر اُس محور کے گرد $= \dfrac{\text{م فرلا}}{\text{ب}} \cdot \text{لا}^{2}$

:. مستطیل کے جمود کا معیار اثر اُس محور کے گرد $= 2\displaystyle\int_{\text{صفر}}^{\frac{\text{ب}}{2}} \dfrac{\text{م فرلا لا}^{2}}{\text{ب}}$

$$= 2\,\frac{\text{م}}{\text{ب}}\left(\frac{\text{لا}^{3}}{3}\right)_{\text{صفر}}^{\frac{\text{ب}}{2}}$$

$$= \text{م}\cdot\frac{\text{ب}^{2}}{12}$$

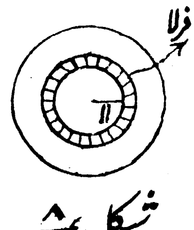
اگر ا چھوٹا ہو یعنی مستطیل کے بجائے جسم کی شکل ایک سلاخ کی سی ہو جہاں ب = ل = سلاخ کا طول تو ایسی سلاخ کے جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد $= \dfrac{\text{م ل}^{2}}{12}$

اگر وہی محور ب کے متوازی ہو تو اسی محور کے گرد مستطیل کے جمود کا معیار اثر $= \dfrac{\text{م ا}^{2}}{12}$

(٢) مذکورۂ بالا مستطیل کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو مستطیل کے مستوی کے علی القوائم ہو اور مستطیل کے مرکز میں سے بھی گزر رہا ہو:-

علی القوائم محوروں کے اصول سے :- $\dfrac{\text{م ا}^{2}}{12} + \dfrac{\text{م ب}^{2}}{12} = \dfrac{\text{م}(\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2})}{12}$

(٣) ایک قرص کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو قرص کے مرکز میں سے بھی گزرے اور اسکے مستوی کے علی القوائم بھی ہو۔



شکل ٨

فرض کرو کہ قرص کی کمیت = م اور اسکا نصف قطر = ص

اب قرص کے ایک ایسے چھوٹے حلقہ پر غور کرو جس کا نصف قطر لا اور عرض فرلا ہے اس حلقہ کا رقبہ $= 2\pi\,\text{لا فرلا}$ اور اس کی کمیت $= \dfrac{\text{م}\,2\pi\,\text{لا فرلا}}{\pi\,\text{ص}^{2}}$

اسکے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گزر رہا ہو اور اسکے مستوی کے بھی علی القوائم ہو $= \dfrac{\text{م}\,2\pi\,\text{لا فرلا}}{\pi\,\text{ص}^{2}} \cdot \text{لا}^{2}$

لہذا پورے قرص کیلئے $\text{مج} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} \frac{۲\pi\,\text{لا فرلا م لا}^{۲}}{\pi\,\text{ص}^{۲}}$

$= \frac{۲}{\text{ص}^{۲}}\,\text{م} \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} \text{لا}^{۳}\,\text{فرلا}$

$= \frac{\text{م ص}^{۲}}{۲}$

(۴) مذکورۂ بالا قرص کے جمود کا معیار اثر اسکے قطر کے گرد:-

فرض کرو کہ قرص کے جمود کا معیار اثر اسکے قطر کے گرد = $\text{مج}_{۱}$ اور وہی $\text{مج}_{۱}$ = قرص کے جمود کا معیار اثر قطر کے علی القوائم قطر کے گرد،

تو علی القوائم محوروں کے اصول سے:-

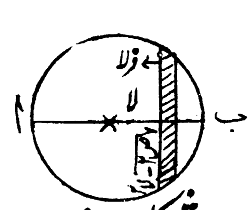
$\text{مج}_{۱} + \text{مج}_{۱} = \frac{\text{م ص}^{۲}}{۲}$

یعنی $\text{مج}_{۱} = \frac{\text{م ص}^{۲}}{۴}$

(۵) مذکورہ بالا قرص کی جمود کا معیار اثر اس کے مماس کے گرد:- اس صورت میں محور، مرکز سے ص فاصلہ پر ہے اس لئے متوازی محوروں کے اصول سے جمود کا معیار اثر مماس کے گرد = مج فرض کرو

$= \text{مج}_{۱} + \text{م ص}^{۲} = \frac{\text{م ص}^{۲}}{۴} + \text{م ص}^{۲}$

$= \frac{۵}{۴}\,\text{م ص}^{۲}$



شکل ۹

(۶) ایک ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے کسی ایک قطر کے گرد:-

فرض کرو کہ کرہ کی کمیت = م اور اسکا نصف قطر = ص

تب اسکے اکائی حجم کی کمیت = $\frac{۳\,\text{م}}{۴\pi\,\text{ص}^{۳}}$

اس کرہ میں سے ایک پتلی دائری دہجی تراشش لو جس کا فاصلہ مرکز سے = لا اور جس کا عرض = فرلا تب اس کا نصف قطر = $\sqrt{\text{ص}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$ اور اسکا حجم =

$\pi(\text{ص}^۲ - \text{لا}^۲)\,\text{فرلا}$ اور اسکی کمیت $= \dfrac{\pi(\text{ص}^۲ - \text{لا}^۲)\,\text{فرلا}\ ۳\,\text{م}}{۴\,\pi\,\text{ص}^۳}$ اور نمبر (۳) سے اُسکے جمود کا معیار اثر کرہ کے قطر ا ب کے گرد $= \dfrac{\pi(\text{ص}^۲ - \text{لا}^۲)\,\text{فرلا}\ ۳\,\text{م}}{۴\,\pi\,\text{ص}^۳} \times \dfrac{(\text{ص}^۲ - \text{لا}^۲)}{۲}$

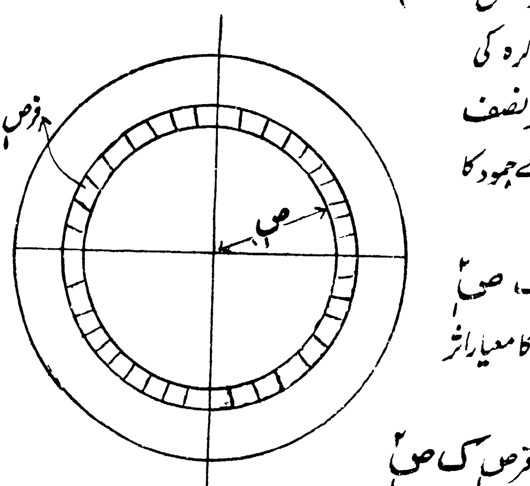
اب کرہ کے جمود کا معیار اثر ا ب کے گرد یعنی $\text{مج}^۲ = \dfrac{۲\times۳\,\pi\,\text{م}}{۸\,\pi\,\text{ص}^۳}\displaystyle\int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} (\text{ص}^۲ - \text{لا}^۲)^۲\,\text{فرلا}$

$$= \frac{۳\,\text{م}}{۴\,\text{ص}^۳}\int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} (\text{ص}^۴ - ۲\,\text{ص}^۲\text{لا}^۲ + \text{لا}^۴)\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۳\,\text{م}}{۴\,\text{ص}^۳} \times \frac{۸\,\text{ص}^۵}{۱۵} = \frac{۲}{۵}\,\text{م}\,\text{ص}^۲$$

(۷) ایک ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے قطب کے گرد:-

فرض کرو کہ اس کرہ میں ایک خول ایسا لیا جاتا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے $\text{ص}_۱$ ہے اور موٹائی $\text{فرص}_۱$ ہے (شکل ۱۰)



شکل ۱۰

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ اس کرہ کی کمیت فی اکائی حجم ک اور نصف قطر ص ہے۔ اس خول کے جمود کا معیار اثر قطب کے گرد

$$= ۴\,\pi\,\text{ص}_۱^۲\ \text{فرص}_۱\,\text{ک}\,،\ \text{ص}_۱^۲$$

لہذا پورے کرہ کے جمود کا معیار اثر مج قطب کے گرد

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} ۴\,\pi\,\text{ص}_۱^۲\ \text{فرص}_۱\,\text{ک}\,\text{ص}_۱^۲$$

$$= ۴\,\pi\,\text{ک}\int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} \text{ص}_۱^۴\ \text{فرص}_۱$$

$$= \frac{۴}{۵}\,\pi\,\text{ک}\,\text{ص}^۵$$

لیکن پورے کرہ کی کمیت $= \text{م} = \dfrac{۴}{۳}\,\pi\,\text{ص}^۳ . \text{ک}$

$$\therefore \text{ک} = \text{م} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{1}{\pi\ \text{ص}^۳}$$

$$\therefore \text{مج}_1 = \frac{۴}{۵}\pi \times \frac{۳}{۴}\text{م} \times \frac{1}{\pi\ \text{ص}^۳} \times \text{ص}^۵$$

$$= \frac{۳}{۵}\text{م ص}^۲$$

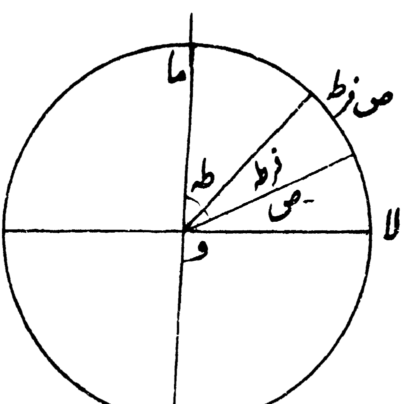
(۸) اسی کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے مماس کے گرد :-

اگر مج_2 = جمود کا معیار اثر مماس کے گرد تو متوازی محوروں کے اصول سے

$$\text{مج}_2 = \text{مج}_1 + \text{م ص}^۲ = \frac{۲}{۵}\text{م ص}^۲ + \text{م ص}^۲ = \frac{۷}{۵}\text{م ص}^۲$$

(۹) تار کے حلقہ کا جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو اسکے مرکز میں سے گزرتا ہو اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہو :-

فرض کرو کہ اس حلقہ کا نصف قطر ص اور ک کمیت فی اکائی طول ہے۔



شکل ۱۱

فرض کرو کہ اس تار کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جن میں سے ایک چھوٹا سا ٹکڑا ایسا لیا جاتا ہے جو مرکز پر فرط زاویہ بناتا ہے۔ (دیکھو شکل ۱۱)

تب اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت

= ک ص فرط

∴ اس کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد = ک ص فرط $\text{ص}^۲$

∴ پورے حلقہ کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد $= \int_{\text{صفر}}^{۲\pi} \text{ک ص}^۳\ \text{فرط}$

$$= ۲\pi\ \text{ک ص}^۳$$

لیکن اس پورے حلقہ کی کمیت = م

$$= ۲\pi\ \text{ص ک}$$

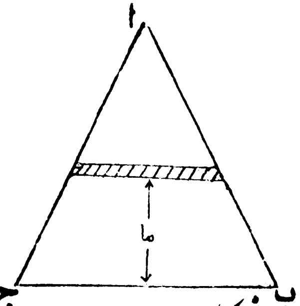
$\therefore$ حلقہ کے جمود کا معیار اثر $= \text{مج} = ۲\pi\,\text{ص}^3 \cdot \frac{\text{م}}{۲\pi\,\text{ص}} = \text{م}\,\text{ص}^2$ (۳)

اگر حلقہ کے جمود کے معیار اثر کو ایسے محور کے گرد جو حلقہ کے مستوی میں ہو اور اسکے مرکز میں سے گزرتا ہو ہم مج فرض کریں تو علی القوائم محوروں کے اصول سے

$$۲\,\text{مج} = \text{مج} = \text{ک}\,\text{ص}^2$$

$$\therefore \text{مج} = \frac{\text{ک}}{۲}\,\text{ص}^2$$

(۱۰) ایک مثلث نما ا ب ج تختی کا جمودی معیار اثر ب ج کے گرد :-



شکل ۱۲

فرض کرو کہ اس تختی کی کمیت = م اور اس عمود کا طول جو ا سے ب ج پر کھینچا جائے = د - ب ج سے ما فاصلہ پر اور اس کے متوازی ایک چھوٹی دھجی تصور کرو جس کی موٹائی "فرما" ہے (شکل ۱۲)

تب اس دھجی کا طول $= \frac{(\text{د} - \text{ما})\,\text{ف}}{\text{د}}$

جہاں ف = ب ج

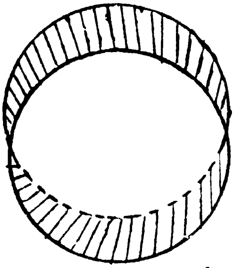
$\therefore$ اس دھجی کا رقبہ $= \frac{(\text{د} - \text{ما})\,\text{ف}\,\text{فرما}}{\text{د}}$ یعنی اسکی کمیت $= \frac{۲\text{م}(\text{د} - \text{ما})\,\text{ف}\,\text{فرما}}{\text{ف}\,\text{د}^2}$

$\therefore$ اُسکے جمود کا معیار اثر ب ج کے گرد $= \frac{۲\text{م}(\text{د} - \text{ما})\,\text{ف}\,\text{ما}^2\,\text{فرما}}{\text{ف}\,\text{د}^2}$

اسی طرح اور دھجیاں تصور کرو اور اُن سب کے جمود کا معیار اثر = اُس مثلث کے جمودی معیار اثر کے ب ج کے گرد $= \text{مج} = \int_{\text{صفر}}^{\text{د}} \frac{۲\text{م}(\text{د} - \text{ما})\,\text{ف}\,\text{ما}^2\,\text{فرما}}{\text{ف}\,\text{د}^2}$ (۴)

$$= \frac{\text{م}\,\text{د}^2}{۶}$$

مثال :- ایک ٹھوس حلقہ کی تراش مستطیلی وضع کی ہے اور اسکے اضلاع ایک ایسے محور کے متوازی اور علی القوائم ہیں جو حلقہ کے مرکز میں سے گزر رہا ہے اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔ ثابت کرو کہ اس محور کے گرد حلقہ کے گردشی نصف قطر کا مربع $= \frac{۱}{۲}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)$ جہاں ا اور ب حلقہ کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر ہیں۔



شکل ۱۳

حل :— حلقہ کی موٹائی = ب - ا

فرض کرو کہ اسکے اکائی رقبہ کی کمیت = ک

حلقہ میں ایک چھوٹی سی دھجی کا تصور کرو جس کا

نصف قطر = ص اور جس کی موٹائی = فرص

تب اس کی کمیت = $\text{۲}\,\pi\,\text{ص فرص ک}$

اور اس کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو حلقہ کے مرکز میں سے گزر رہا ہے اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہے =

$$\text{۲}\,\pi\,\text{ص . فرص ک . ص}^{\text{۲}}$$

∴ پورے حلقہ کا جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد

$$= \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{۲}\,\pi\,\text{ص فرص ک ص}^{\text{۲}}$$

$$= \text{۲}\,\pi\,\text{ک} \left[\frac{\text{ص}^{\text{۴}}}{\text{۴}}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}}$$

$$= \text{۲}\,\pi\,\text{ک} \left(\frac{\text{ب}^{\text{۴}}}{\text{۴}} - \frac{\text{ا}^{\text{۴}}}{\text{۴}}\right)$$

$$= \text{م ف}^{\text{۲}}$$

جہاں م اس پورے حلقہ کی کمیت اور ف اسکا گردشی نصف قطر ہے

لیکن پورے حلقہ کی کمیت م = $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{۲}\,\pi\,\text{ص فرص ک}$

$$= \text{۲}\,\pi\,\text{ک} \left(\frac{\text{ب}^{\text{۲}}}{\text{۲}} - \frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}}\right)$$

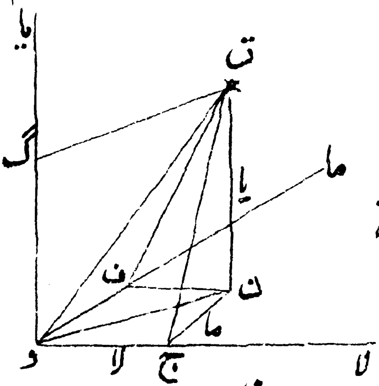
$$\therefore \text{۲}\,\pi\,\text{ک} \left(\frac{\text{ب}^{\text{۴}}}{\text{۴}} - \frac{\text{ا}^{\text{۴}}}{\text{۴}}\right) = \text{م ف}^{\text{۲}} =$$

$$\text{۲}\,\pi\,\text{ک} \left(\frac{\text{ب}^{\text{۲}}}{\text{۲}} - \frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}}\right) \text{ف}^{\text{۲}}$$

$$\therefore \text{ف}^{\text{۲}} = \frac{\frac{\text{ب}^{\text{۴}}}{\text{۴}} - \frac{\text{ا}^{\text{۴}}}{\text{۴}}}{\frac{\text{ب}^{\text{۲}}}{\text{۲}} - \frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{ب}^{\text{۲}} + \text{ا}^{\text{۲}}\right)$$

علی القوائم محوروں کا اصول (تین العادی صورت):-

شکل ۱۴ء میں فرض کرو کہ $مج_{ولا}$، $مج_{وما}$ اور $مج_{ویا}$ جمود کا اثری معیار یا کوئی تین ایسے محوروں ولا، وما اور ویا کے گرد ہیں جو آپس میں ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔ فرض کرو کہ ک کمیت کا ایک ذرہ ق پر واقع ہے جس کے محدد (لا، ما، یا) ہیں یعنی



شکل ۱۴ء

ق ن = یا، ج ن = ما اور ج و = لا

ق گ، ق ج، اور ق ف بالترتیب ویا، ولا اور وما پر عمود کھینچو۔

$$مج_{ولا} = \sum ک\ ق ج^2$$
$$= \sum ک\ (ما^2 + یا^2)$$
$$مج_{وما} = \sum ک\ ق ف^2 = \sum ک\ (لا^2 + یا^2)$$
$$مج_{ویا} = \sum ک\ ق گ^2 = \sum ک\ و ن^2 = \sum ک\ (لا^2 + ما^2)$$

اگر $مج_و$، مبدء و کے گرد جمود کا معیار اثر ہو تو :-

$$مج_و = \sum ک\ ق و^2 = \sum ک\ (لا^2 + ما^2 + یا^2)$$
$$\therefore مج_{ولا} + مج_{وما} + مج_{ویا} = ۲\ مج_و$$

یہ ایک نہایت اہم اصول ہے جس کی مدد سے اکثر سوالات حل کئے جا سکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل دو صورتوں سے اس اصول کے اطلاق کی توضیح ہو گی :-

(۱۱) ایک پتلے کھوکھلے کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطب کے گرد :- کسی پتلے کھوکھلے کرہ کے تمام حصے مرکز و سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں لہذا

$$مج_و = م\ ص^2$$

جہاں م = کرہ کی کمیت اور ص = اس کا نصف قطر

(۱۲) اسی کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطر کے گرد :- جمود کا معیار اثر قطر کے

گرد = $\text{مج}_{\text{ل}}$ = $\text{مج}_{\text{ما}}$ = $\text{مج}_{\text{یا}}$ فرض کرو۔

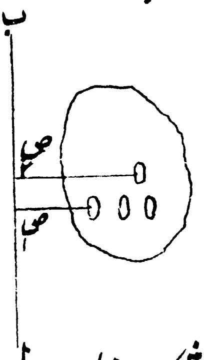
لہذا اوپر کی مساوات سے:۔ ۳ $\text{مج}_{\text{ل}}$ = ۲ $\text{مج}_{\text{و}}$ = ۲ م $\text{ص}^{۲}$

∴ $\text{مج}_{\text{ل}}$ = $\frac{۲}{۳}$ م $\text{ص}^{۲}$۔

اسی طرح اس کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے مماس کے گرد = $\text{مج}_{۲}$ (فرض کرو) = $\text{مج}_{\text{ل}}$ + م $\text{ص}^{۲}$ = $\frac{۵}{۳}$ م $\text{ص}^{۲}$

قطبی جمود کا معیار اثر یا سطحی جمود کا معیار اثر

فرض کرو کہ شکل ۱۵ میں جو جسم دکھایا گیا ہے اس کا رقبہ ا ہے اور اسکا مستوی اس کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔



شکل ۱۵

اب ہم اسکا قطبی جمود کا معیار اثر محور ا ب کے گرد جو کاغذ کے مستوی میں ہے دریافت کرینگے۔

اس کے رقبہ کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $\text{ا}_{۱}$، $\text{ا}_{۲}$، $\text{ا}_{۳}$ ...... وغیرہ میں تقسیم کرو اور فرض کرو کہ انکا فاصلہ محور سے $\text{ص}_{۱}$، $\text{ص}_{۲}$، $\text{ص}_{۳}$ .... وغیرہ ہے۔

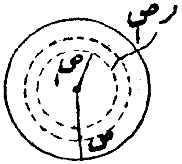
اسکے قطبی جمود کے معیار اثر کو $\text{مج}^{۲}$ سے تعبیر کیا جائے تو

مج = Σ ا $\text{ص}^{۲}$ = $\text{ا}_{۱}$ $\text{ص}_{۱}^{۲}$ + $\text{ا}_{۲}$ $\text{ص}_{۲}^{۲}$ + ...

= ا $\text{ف}^{۲}$ جہاں ف = اسکا گردشی نصف قطر

یہ بالکل اسی طرح ہے جیسا کہ پہلے حاصل کیا گیا تھا لیکن یہاں کمیت کے بجائے رقبہ لیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۱۶ میں جو قرص دکھایا گیا ہے اسکا نصف قطر ص ہے اسکے قطبی جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد معلوم کریں گے جو جسم کے مرکز



شکل ۱۶

میں سے گزرتا ہے اور اس کے مستوی کے علی القوائم ہو.
اسکے مرکز سے اس کو چھوٹے چھوٹے حلقوں میں تقسیم کرو۔
فرض کرو کہ مرکز سے ایک چھوٹے حلقہ کا فاصلہ = ص_1 اور اسکا عرض = فرص_1

اس ٹکڑے کے قطبی جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد = $2\pi\,\text{ص}_1\,\text{فرص}_1 . \text{ص}_1^2$

$$\therefore \text{پورے قرص کے جمود کا معیار اثر مج} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} 2\pi\,\text{ص}_1\,\text{فرص}_1 . \text{ص}_1^2$$

$$= \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2} = \pi\,\text{ص}^2 \times \frac{\text{ص}^2}{2}$$

یہ نتیجہ بھی بالکل وہی ہے جو پہلے حاصل کیا گیا تھا لیکن یہاں بجائے قرص کی کمیت کے اسکا رقبہ $\pi\,\text{ص}^2$ لیا گیا ہے۔

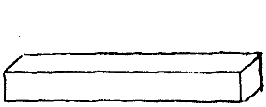
اگر اسکے جمود کا معیار اثر مج_1 ایسے محور کے گرد جو مرکز میں سے گزرتا ہو اور اسکے مستوی میں ہو تو علی القوائم محوروں کے اصول سے

$$2\,\text{مج}_1 = \text{مج} = \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$

$$\therefore \text{مج}_1 = \frac{\pi\,\text{ص}^4}{4} = \pi\,\text{ص}^2 \times \frac{\text{ص}^2}{4}$$

یعنی اس صورت میں اسکا گردشی نصف قطر = $\frac{\text{ص}^2}{4}$

یہ نتیجہ بھی پہلے کی طرح ہے لیکن فرق صرف اتنا ہے کہ کمیت کے بجائے رقبہ لیا جائے۔



شکل ۱۷

فرض کرو کہ شکل ۱۷ میں جو سلاخ دکھائی گئی ہے اسکا طول ل ہے ہم پہلے دریافت کر چکے ہیں کہ اسکے جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{\text{م}\,\text{ل}^2}{12}$

اگر سلاخ کا عرض ب ہو اور گہرائی د، تو اس کے سرے کی جانب سے دیکھنے سے اسکے قطبی جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد = رقبہ × (گردشی نصف قطر)^{۲}

لیکن اسکا رقبہ = ب د اور (گردشی نصف قطر)^{۲} = $\frac{د^{۲}}{۱۲}$

∴ اسکا قطبی جمودی معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{ب\ د^{۳}}{۱۲}$

اگر اوپر سے لیا جائے تو مرکز کے گرد سطحی یا قطبی جمودی معیار اثر = $\frac{د\ ل^{۳}}{۱۲}$

اور اگر سامنے سے لیں تو اسکے مرکز کے گرد سطحی یا قطبی جمود کا معیار اثر

= $\frac{ل\ ب^{۳}}{۱۲}$

Chapter I.

(۱) Properties of Matter "Wagstaff" P65 (1924)
(۲) ,, ,, ,, ,, P69 (1924)
(۳) Statics "Lamb" P162 (1924)
(۴) ,, ,, P162 (1924)
(۵) Properties of Matter "Newman & Searle" P23 (1928)

دوسرا باب

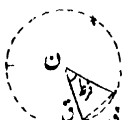
نظریۂ اہتزاز

توانائی بالفعل :- فرض کرو کہ ایک جسم دائری وضع میں ایسے محور کے گرد گھومتا ہے جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ اس جسم میں ایک ایسا ذرہ ق تصور کرو جس کا فاصلۂ مرکز سے لا۱ ہو اور اس کی کمیت ک۱ کے مساوی ہو۔

فرض کرو کہ دوران گردش میں ذرہ کسی ایک بالکل چھوٹے وقفہ فرو میں فاصلہ فرس طے کرتا ہے۔

$$\text{تو قوت} = \text{ک}_1 \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرو}^2} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{ک}_1 \, \text{لا}_1 \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)$$

$$\text{اس کی قوت کا معیار اثر} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{ک}_1 \, \text{لا}_1^2 \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)$$



شکل ۱

لہذا اُس کُل جسم کے لئے جبکہ وہ گردش کر رہا ہے تمام

$$\text{قوتوں کا معیار اثر} = \text{جفت}$$

$$= \text{ثہ} \quad (\text{فرض کرو})$$

$$= \frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} \sum \text{ک}_1 \, \text{لا}_1^2$$

$$= \text{مج} \, \text{سفن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

جہاں مج = جمود کا معیار اثر اسکے مرکز کے گرد اور سفن = زاوئی اسراع

$$\text{اس ذرہ کی توانائی بالفعل} = \frac{1}{2}\,\text{ک}_{1}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرد}}\right)^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ک}_{1}\left(\text{لا}_{1}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرد}}\right)^{2}$$

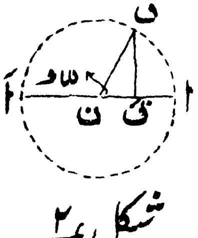
$$\text{لہذا اس پورے جسم کی توانائی بالفعل} = \sum \frac{1}{2}\,\text{ک}_{1}\,\text{لا}_{1}^{2}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرد}}\right)^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ھج}\,\omega^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{فل}^{2}\,\omega^{2} \quad \dots\dots\dots (۲)$$

جہاں م اس جسم کی کمیت ہے۔ ف اسکا گردشی نصف قطر ہے، اور ω زاویٔ رفتار۔

سادہ موسیقی حرکت:۔ فرض کرو کہ ذرہ ق یکساں زاوئی رفتار سے ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کر رہا ہے۔



شکل ۲ے

شکل ۲ے میں دائرہ کا کوئی قطر ا اَ لو اور ق سے ایک خط ق قَ کھینچو جو خط ا اَ کے علی القوائم ہو۔ نقطہ قَ، قطر ا اَ پر ق کا ظِل کہلاتا ہے۔ ن دائرہ کا مرکز ہے۔

ق جب دائرہ کے محیط پر چکر لگائے گا تو نقطہ قَ، ا اَ پر ن کے دائیں اور بائیں جانب حرکت کرے گا۔ اس نقطہ قَ کی حرکت اگر ایسی ہو کہ اسکا نقل مکان قَ ن (اسی ہی راستہ پر) اس کے اسراع کے متناسب ہو اور اسراع ہمیشہ مرکز کی طرف عمل کرے تو قَ کی ایسی حرکت سادہ موسیقی حرکت کہلاتی ہے۔

فرض کرو کہ ق کی یکساں زاوئی رفتار ω ہے۔ د ثانیوں کے بعد وہ زاویہ ω د طے کریگا۔ فرض کرو کہ قَ ن = لا تو لا = ص جم ω د

جہاں ص = دائرہ کا نصف قطر

لہذا قَ کا نقل مکان = لا = ص جم سںو

اسلئے قَ کی رفتار = $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$ = لاَ فرض کرو = − ص سں جب سںو

اور قَ کا اسراع = $\frac{\text{فر لاَ}}{\text{فرو}}$ = لاً فرض کرو = − ص سں^2 جم سںو

∴ اسراع = لاً = − لا سں^2 = − لا لہ   جہاں لہ = سں^2

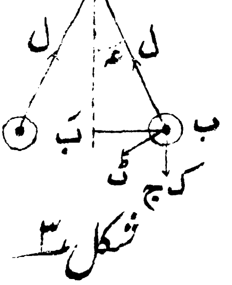
یعنی اگر زاوئی رفتار یکساں ہو تو اسراع نقل مکان کے تناسب ہے۔

اور اگر زاوئی رفتار مستقل ہو تو سں = $\frac{2\pi}{\text{و}}$ جہاں و = ف یا قَ کا وقت دوران۔

یعنی و = $\frac{2\pi}{\text{سں}}$ = $\frac{2\pi}{\sqrt{\text{لہ}}}$ .... (۳)

مثلاً اگر کسی سوال کے حل کرنے میں لاً = − لا لہ کی طرح کی مساوات آجائے تو یہ تصور کیا جائے گا کہ ذرہ سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ اسکا وقت دوران و = $\frac{2\pi}{\sqrt{\text{لہ}}}$ آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک سادہ رقاص پر غور کرو جو سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ شکل ۳ میں ب ن ایک رقاص ہے جس کی کمیت ک اور طول ل ہے۔ فرض کرو کہ رقاص حالت سکون سے کسی ایک وقت میں زاویہ عہ بناتا ہے رقاص کا وزن ک ج نیچے کی جانب عمل کرے گا اور دوسری قوت تناؤ کی ہوگی جو ڈوری کے سمت میں عمل کرے گی۔ اب چونکہ ب ٹ، ب ن کے علی القوائم ہے، اس لئے ب ٹ کی سمت میں جو قوت عمل کرے گی وہ = ک ج جب عہ



شکل ۳

جہاں ج = اسراع بوجہ جاذبہ زمین

اسلئے ب ٹ کی سمت میں عمل کرنیوالا اسراع = ج جب عہ

= ج عہ اگر عہ بہت چھوٹا ہو

لہذا اسراع = لاَ = ج عہ = $\frac{\text{ج لا}}{\text{ل}}$ جہاں لا = ب بَ = نقل مکان

اب چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

∴ وقت دوران و = $۲\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ .... (۴)

یہ ضابطہ اسی وقت صحیح ہے جبکہ عہ بہت چھوٹا ہو

صحیح ضابطہ حسب ذیل ہے :-

$$\text{و} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left(۱ + \frac{\text{عہ}^{۲}}{۱۶}\right)$$

جہاں عہ = اہتزاز کا آدھا زاویہ، اس مساوات کو برنولی نے ۱۷۴۷ء میں ثابت کیا۔

مرکب رقاص :- شکل ۴ میں ایک مرکب رقاص دکھایا گیا ہے جس کا وزن ک ج ہے جو نیچے کی جانب عمل کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ اس کا مرکز جاذبہ جَ ہے اور ن اسکا مرکز اہتزاز ہے۔ فرض کرو کہ دھاریدار کنارے اور مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ = $\text{ل}_{۱}$

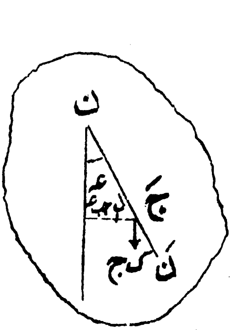
جب یہ رقاص حرکت کریگا تو جفت

= قوت × عمودی فاصلہ

= ک ج $\text{ل}_{۱}$ جب عہ

جہاں عہ = انتہائی سمت اور ن نَ کے درمیان زاویہ

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ جفت = $\text{ج}\,\frac{\text{فسا}^{۲}\,\text{عہ}}{\text{فر و}^{۲}}$



شکل ۴

جہاں مج = جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو ن میں سے گزرتا ہے اور جو کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

$$\therefore \text{مج}\ \frac{\text{فز}^2\,\text{عہ}}{\text{فزو}^2} = -\text{ک ج}\ \text{ل}_1\ \text{جب عہ}$$

$$= -\text{ک ج}\ \text{ل}_1\ \text{عہ} \quad (\text{اگر عہ چھوٹا ہو})$$

$$\text{یعنے}\ \frac{\text{فز}^2\,\text{عہ}}{\text{فزو}^2} = \text{زاویۂ اسراع} = -\frac{\text{ک ج}\ \text{ل}_1\ \text{عہ}}{\text{مج}} = -\frac{\text{ک ج}\ \text{ل}_1\ \text{عہ}}{\text{ک ف}^2}$$

جہاں ف = اسکا گردشی نصف قطر اس ہی محور کے گرد

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔ لہذا اس کا وقت

$$\text{دوران و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ف}^2}{\text{ج}\ \text{ل}_1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

اگر سادہ رقاص اور اسکا وقت دوران مساوی ہو تو مساوات (۴) اور (۵) سے سادہ رقاص کا طول ل = $\frac{\text{ف}^2}{\text{ل}_1}$ متوازی محوروں کے اصول سے چونکہ کسی محور پر ایک رقاص کے جمود کا معیار اثر = اس محور کے متوازی محور پر کے جمود کے معیار اثر کے جو مرکز جاذبہ میں گزر رہا ہو + ک ل_1^2 جہاں ل_1 = ن جَ = دونوں محوروں کے درمیان فاصلہ

$$\therefore \text{ک ف}^2 = \text{ک ط}^2 + \text{ک ل}_1^2 \quad \text{یعنی}\ \text{ف}^2 = \text{ط}^2 + \text{ل}_1^2$$

جہاں ط = گردشی نصف قطر ایسے محور کے گرد، جو جَ میں سے گزر رہا ہے اور جو کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

لہذا مرکب رقاص کے لئے ضابطہ

$$\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1\ \text{ج}}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

اگر مرکز اہتزاز ن، جَ سے منطبق ہو جائے تو ل_1 = صفر یعنی اس صورت میں وقت دوران لامتناہی ہو جاتا ہے۔

و کی قیمت اقل ہونے کی شرط یہ ہے کہ $\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}$ اقل ہونا چاہیئے۔

یعنی $\frac{ل_۱^۲ - ۲ل_۱ط + ۲ل_۱ط + ط^۲}{ل_۱}$ یا $\frac{(ل_۱ - ط)^۲ + ۲ل_۱ط}{ل_۱}$ کی قیمت

اقل ہونی چاہیے یا $ل_۱ = ط$ ہونا چاہیے۔

∴ اقل وقت دوران $و_۱ = ۲\pi\sqrt{\frac{۲ط}{ج}}$ .... (۷)

فرض کرو کہ اوپر کی شکل نمبر ۴ میں مرکز اہتزاز نَ ایسا لیا جاتا ہے کہ

$ن\,نَ \times ن\,جَ = فَ^۲ = ط^۲ + ن\,جَ^۲$

یعنی $ن\,جَ\,(ن\,نَ - ن\,جَ) = ط^۲$

یا $ن\,جَ \times نَ\,جَ = ط^۲$ .... (۸)

فرض کرو کہ بجائے ن مرکز اہتزاز کے نً ایسا لیا گیا ہے کہ

$نً\,نَ \times نَ\,جَ = فً^۲ = ط^۲ + نَ\,جَ^۲$

لیکن اسی طریقہ سے $نَ\,جَ \times نً\,جَ = ط^۲$ یعنی $نً\,جَ = ن\,جَ$

یعنی ن اور نً ایکدوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں۔

اب جبکہ ن مرکز اہتزاز ہے مرکب رقاص کا ضابطہ:—

$$و = ۲\pi\sqrt{\frac{ل_۱^۲ + ط^۲}{ل_۱\,ج}}$$

$$\therefore\ ل_۱^۲ - \frac{ج\,و^۲}{۴\pi^۲}\,ل_۱ + ط^۲ = \text{صفر}$$

$$\therefore\ ل_۱ = \frac{ج\,و^۲}{۸\pi^۲} \pm \sqrt{\frac{ج^۲\,و^۴}{۶۴\pi^۴} - ط^۲}$$

$= گ_۱ + گ_۲$ یا $گ_۱ - گ_۲$ فرض کرو

یعنی ل کی دو قیمتیں ہیں جہاں کہ وقت دوران کی قیمتیں ایک ہوتی ہیں۔ اور دونوں قیمتیں مرکز جاذبہ کے ایک جانب ہیں۔ اسی طرح اگر رقاص کو اولٹ دیا جائے تو ہم کو اور دو قیمتیں حاصل ہوں گی پس اس سے ظاہر ہوا کہ $ل_۱$ کی

چار قیمتیں ہیں (دو مرکز جاذبہ کے ایک جانب اور دو دوسری جانب) جہاں پر وقت دوران کی قیمتیں مساوی ہوتی ہیں اور ل_1 کی پہلی اور تیسری قیمتیں اور دوسری اور چوتھی قیمتیں آپس میں علی الترتیب مساوی ہوتی ہیں۔

اب فرض کرو کہ سادہ رقاص کا طول = ن نَ

ظاہر ہے کہ سادہ رقاص کا وقت دوران، مرکب رقاص کے وقت دوران کے مساوی ہوگا اس قسم کے سادہ رقاص کو جس کا طول $\text{ل} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}$ ہو معاول سادہ رقاص کہتے ہیں۔

اس وجہ سے کہ $\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1\,\text{ج}}}$ (٩)

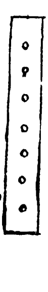
فرض کرو کہ نَ مرکز اہتزاز ہے تب نَ ج = $\text{ل} - \text{ل}_1$ اگر اس صورت میں وقت دوران وَ فرض کیا جائے تو $\text{وَ} = 2\pi\sqrt{\frac{(\text{ل} - \text{ل}_1)^2 + \text{ط}^2}{(\text{ل} - \text{ل}_1)\,\text{ج}}}$

لیکن مساوات (٩) سے $\text{ل} - \text{ل}_1 = \frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_1}$

$$\therefore \text{وَ} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_1}\right)^2 + \text{ط}^2}{\text{ج}\,\frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1\,\text{ج}}}$$

$\therefore$ و = وَ یعنے وقت دوران ن اور نَ پر مساوی ہے۔

ان مساواتوں کی تصدیق کرنے کے لئے ذیل کا تجربہ کیا جاتا ہے:-



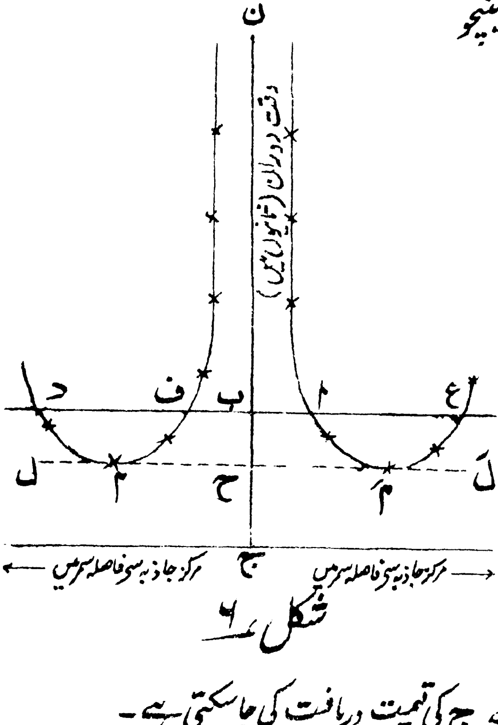
شکل ۵

شکل ۵ میں لوہے کی ا میٹر لمبی اور ۳ سمر چوڑی ایک مستطیلی سلاخ دکھلائی گئی ہے، اس کو مختلف نقطوں پر سوراخوں کے ذریعہ جو دو دو سمر کے فاصلہ پر سلاخ کے طول میں بنے ہوئے ہوتے ہیں ایک دھاریدار

کنارے سے لٹکایا جا سکتا ہے۔

تجربہ میں باری باری سے سلاخ کو ہر دوسرے سوراخ کے ذریعہ لٹکا کر ہر ایک کا وقت دوران دریافت کرو۔ سلاخ کے مرکز جاذبہ کا فاصلہ ہر ایسے سوراخ سے دریافت کرو جہاں پر سلاخ لٹکائی جاتی ہے۔ سلاخ کا مرکز جاذبہ آسانی سے سلاخ کو دھار یدار کنارے پر توازن میں لانے سے معلوم ہو سکتا ہے و کی مختلف قیمتوں کو مرکز جاذبہ اور سوراخوں کے درمیانی فاصلے کی متناظر قیمتوں کے مقابلہ میں مرتسم کرو۔

ایک ایسا منحنی ۴ حاصل ہوگا جو شکل ۶ میں دکھایا گیا ہے دونوں منحنیوں کے مماس ل م اور لَ مَ کھینچو



چونکہ ان دونوں نقاط م اور مَ پر وقت دوران اقل ہیں۔

لہذا ح م = ح مَ

= ل۱ = ط

اور چونکہ اقل وقت دوران

= ح ج = و

شکل ۶

لہذا مساوات (۷) سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

دوران تجربہ میں اقل وقت دوران و کے قریبی نقطوں کی قیمتیں بڑی احتیاط سے متعدد دفعہ تقریبی مقام کے ہر ایک جانب لی جائیں۔ اگر ج کی قیمت

معلوم ہو تو ط کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے اور جمود کے معیار اثر (مج) کی قیمت ایک ایسے محور کے گرد جو مرکز جاذبہ میں سے گزرے، صرف سلاخ کو تول کر دریافت کی جا سکتی ہے۔

کیونکہ $\text{مج} = \text{م}\ \text{ط}^2$ جہاں م = سلاخ کی کمیت

لا محور کے متوازی ایک خط د ف ب ا ع کھینچو، د، ف، ا اور ع پر وقت دوران و کی قیمت ایک ہی ہے اور ب ج کے مساوی ہے۔ چونکہ

ف ب = ب ا اور ب د = ب ع۔

لہذا مساوات (۸) سے $\text{ب د} \times \text{ب ا} = \text{ب ع} \times \text{ب ف} = \text{ط}^2$

لہذا معادل سادہ رقاص کا طول $\text{ل} = \dfrac{\text{ب د}^2 + (\text{ب د} \times \text{ب ا})}{\text{ب د}}$

$$= \frac{\text{ب د}(\text{ب د} + \text{ب ا})}{\text{ب د}} = \text{ب د} + \text{ب ا}$$

$$\therefore \text{ل} = \text{ب د} + \text{ب ا} = \text{ب ع} + \text{ب ف} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

لہذا مساوات (۴) سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

مثال (الف) ایک میٹری سلاخ (ب) ۲۰ سمر قطر کا ایک قرص، بطور رقاص علیحدہ علیحدہ لٹکائے گئے ہیں ان دونوں کے نقاط تعلیق کے ایسے مقام دریافت کرو جہاں ہر ایک کا وقت دوران اقل ہو۔

(الف) اقل وقت دوران کی شرط یہ ہے کہ $\text{ل}_1 = \text{ط}$

لیکن سلاخ کے جمود کا معیار اثر اش کے مرکز کے گرد $= \dfrac{\text{م ل}^2}{۱۲}$

$= \text{م}\ \text{ط}^2$ جہاں م سلاخ کی کمیت کو اور ل اسکے طول کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\therefore \text{ط} = \sqrt{\frac{\text{ل}^2}{۱۲}} = \sqrt{\frac{(۱۰۰)^2}{۱۲}} = \text{ل}_1$$

$\therefore \text{ل}_1 =$ ۲۸٫۸۲ سمر یعنی سلاخ کے مرکز جاذبہ سے نقطہ تعلیق کا فاصلہ ۲۸٫۸۲ سمر ہونا چاہیئے تاکہ وقت دوران اقل ہو۔

(ب) قرص کا جمودی معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{\text{م ص}^2}{2}$

جہاں ص = قرص کا نصف قطر اور م = قرص کی کمیت

$\therefore$ ل۱ = ط = $\sqrt{\frac{\text{ص}^2}{2}} = \sqrt{\frac{20^2}{2}}$ = ۱۴٫۱۴ سم

یعنی قرص کے مرکز سے ۱۴٫۱۴ سم کے فاصلہ پر نقطہ تعلیق کو ہونا چاہیئے کہ اس کا وقت دوران اقل ہو

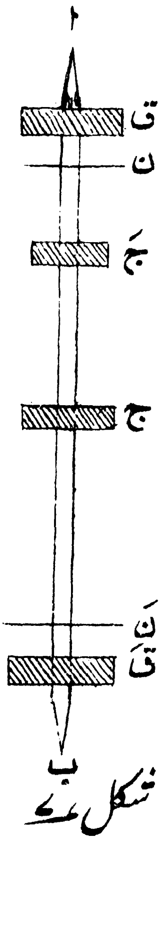
کیٹر کا رقاص :۔ شکل ۷ میں ا ب ایک فولادی سلاخ ہے اور ن اور نَ دو دھاریدار کنارے ہیں جو مرکز جاذبہ کے دونوں جانب واقع ہیں۔ ق اور قَ دو بڑے استوانے ہیں جن میں سے ایک پیتل کا ہوتا ہے اور دوسرا لکڑی کا۔ فرض کرو کہ ن اور نَ پر وقت دوران مساوی ہیں۔ اس صورت میں ن اور نَ کا درمیانی فاصلہ ایک ایسے سادہ رقاص کے طول ل کے مساوی ہوگا جسکا وقت دوران اس مرکب رقاص کے وقت دوران کے مساوی ہے۔

اس رقاص کو کپتان کیٹر نے ۱۸۱۸ء میں گھڑی کے رقاص کا طول دریافت کرنے کے لئے تیار کیا تھا۔

جَ ایک متحرک حلقہ ہے جس کو سلاخ پر اوپر یا نیچے ہٹایا جا سکتا ہے تاکہ وقت دوران ن اور نَ پر مساوی کیئے جائیں۔

ج ایک چھوٹا متحرک حلقہ جس کی مدد سے وقت دوران کی قیمتوں کے درمیان چھوٹے فرق کو رفع کیا جاتا ہے۔

لیکن دونوں دھاریدار کناروں پر وقت دوران کی قیمتوں کو مساوی حاصل کرنا آسان نہیں۔ اس کے



شکل ۷

لئے حسب ذیل طریقہ اختیار کیا جاتا ہے جس کو پہلی مرتبہ بسّل نے پیش کیا تھا اس طریقہ سے ط کی رقوم ضابطہ سے ساقط ہو جاتی ہیں ۔

فرض کرو کہ جَ اور ج کے ذریعہ ن۱ اور ن۲ کے وقت دوران تقریباً مساوی حاصل کرلئے گئے ہیں۔

اگر ان میں سے ایک $و_1$ اور دوسرا $و_2$ ہو تو $و_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ط^2+ل_1^2}{ل_1 ج}}$

اور $و_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ط^2+ل_2^2}{ل_2 ج}}$ ، دونوں مساواتوں کو مربع کرنیکے بعد

$$و_1^2 = 4\pi^2\left(\frac{ط^2+ل_1^2}{ل_1 ج}\right) \text{ اور } و_2^2 = 4\pi^2\left(\frac{ط^2+ل_2^2}{ل_2 ج}\right)$$

ان دونوں ضابطوں کے ذریعہ ط کو ساقط کر دیا جائے تو

$$\frac{ج}{4\pi^2}\left(و_1^2 ل_1 - و_2^2 ل_2\right) = ل_1^2 - ل_2^2$$

$$\therefore \frac{4\pi^2}{ج} = \frac{و_1^2 ل_1 - و_2^2 ل_2}{ل_1^2 - ل_2^2} = \frac{4و_1^2 ل_1 - 4و_2^2 ل_2}{4(ل_1^2 - ل_2^2)}$$

$$= \frac{2و_1^2 ل_1 + 2و_1^2 ل_1 - 2ل_2 و_2^2 - 2ل_2 و_2^2 + 2ل_1 و_2^2 - 2ل_1 و_2^2 + 2ل_2 و_1^2 - 2ل_2 و_1^2}{2(ل_1+ل_2)\,2(ل_1-ل_2)}$$

$$= \frac{2و_1^2(ل_1-ل_2) + 2و_1^2(ل_1+ل_2) - 2و_2^2(ل_1+ل_2) + 2و_2^2(ل_1-ل_2)}{2(ل_1+ل_2)\,2(ل_1-ل_2)}$$

$$= \frac{2و_1^2}{4(ل_1+ل_2)} + \frac{2و_1^2}{4(ل_1-ل_2)} - \frac{2و_2^2}{4(ل_1-ل_2)} + \frac{2و_2^2}{4(ل_1+ل_2)}$$

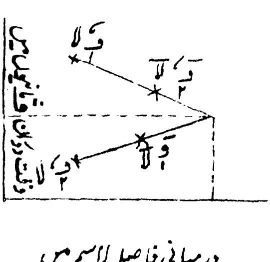
$$= \frac{و_1^2 + و_2^2}{۲(ل_1 + ل_2)} + \frac{و_1^2 - و_2^2}{۲(ل_1 - ل_2)}$$

$$یعنی \quad \frac{۴\pi^2}{ج} = \frac{و_1^2 + و_2^2}{۲(ل_1 + ل_2)} + \frac{و_1^2 - و_2^2}{۲(ل_1 - ل_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

رقاص کو دھار یدار کنارے پر توازن میں لا کر $ل_1$ اور $ل_2$ دریافت کرنے کے بعد اس مساوات کے ذریعہ ہم ج کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

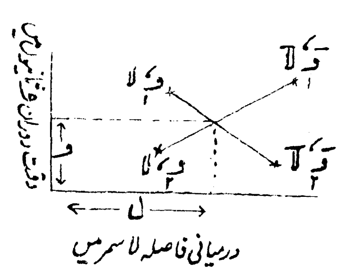
دوسرا طریقہ: — اگر ہم کو صحیح وقت دوران (جو دونوں دھار یدار کناروں پر بالکل مساوی ہونا چاہیئے) معلوم ہو جائے تو سادہ رقاص کا ضابطہ استعمال کرنے سے ہم ج کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں:-

فرض کرو کہ $و_1$ اور $و_2$ دونوں دھار یدار کناروں ن اور نَ پر وقت دوران ہیں اور ن اور نَ کے درمیان فاصلہ لا کے مساوی ہے اور $و_1$ تقریباً $و_2$ کے مساوی ہے۔ دھار یدار کناروں کو ذرا سا ہٹاؤ اور فرض کرو کہ اب ن اور نَ پر وقت دوران کی قیمتیں جو قریب قریب مساوی ہیں، $وَ_1$ اور $وَ_2$ کے مساوی ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ لاَ کے مساوی ہے۔ و اور لا کے درمیان ترسیم شکل ۸ یا ۹ کے مطابق کھینچو۔



درمیانی فاصلہ لا سم میں

شکل ۹



درمیانی فاصلہ لا سم میں

شکل ۸

نقاط (ق۲ لا) اور (قَ۱ لاَ) کو ملاؤ، اسی طرح (ق۱ لا) اور (قَ۲ لاَ) کو ملاؤ نقطہ تقاطع سے صحیح وقت دوران اور صحیح طول ملجائیگا۔ اور اس سے ج کی قیمت مساوات (۴) سے معلوم کی جا سکتی ہے تجربہ میں ہوا کی مزاحمت کی وجہ سے وقت دوران میں فرق واقع ہوتا ہے یعنی اس میں کسی قدر کمی ہوتی ہے۔

دوران تجربہ میں تپش بھی مستقل ہونی چاہیئے ورنہ تپش کے بڑہنے سے رقاص کا طول بڑھ جائیگا اور اس سے وقت دوران پر اثر پڑیگا۔ تجربہ میں وہ مقام جہاں رقاص سہارا جاتا ہے مضبوطی کے ساتھ جما دینا چاہیئے ورنہ قسری ارتعاشوں کی وجہہ سے وقت دوران میں فرق ہونے کا احتمال ہے۔

رقاص کی حرکت پر واسطہ کی لزوجت کا اثر صرف اتنا ہی ہوتا ہے کہ حیطۂ اہتزاز کو چھوٹا کردے، وقت دوران پر یہ اثر قابل لحاظ نہیں ہوتا۔ وقت دوران کو $\left(1 + \frac{گ^2}{8\,لہ}\right)$ سے ضرب دینے سے اسکی تصحیح ہو جاتی ہے

یعنی $و = \frac{2\pi}{ہ\,لہ}\left(1 + \frac{گ^2}{8\,لہ}\right)$ جہاں گ ایسی ایک رقم ہے جو لزوجت پر منحصر ہوتی ہے۔ لہذا لزوجت (۳) سے وقت دوران $1 : 1 + \frac{گ^2}{8\,لہ}$ کی نسبت سے بڑھ جاتا ہے اور اس سے ظاہر ہے کہ و کی قیمت میں یہ بہت ہی قلیل اضافہ ہے چونکہ گ کی قیمت بالکل چھوٹی ہوتی ہے۔

عموماً کیٹر اور بورڈا کے رقاصوں میں ۲ : ۱ کی نسبت سے اہتزازی قوس میں کمی تقریباً ۰۰۵ ثانیوں میں واقع ہوتی ہے۔

دھاریدار کناروں کے انحنا کی تصحیح، ان کو آپس میں تبدیل کرنے کے بعد حسب معمول مشاہدات کو دوہرانے سے ہو سکتی ہے۔

طریقۂ انطباق : ۔ کیٹر کے رقاص کے دونوں دھار یدار کناروں پر وقت دوران کی قیمتوں کو اس طرح ترتیب دو کہ یہ تقریباً مساوی ہو جائیں۔ رقاص کو دوربین سے دیکھو۔

ایک گھڑی کے ثانیہ رقاص کو برقی طریقہ سے اس طرح ترتیب دو کہ ٹیلیفون کے "وصول کنندہ" کے ذریعہ اسکی "ٹک ٹک" کی آواز صاف طور پر تمہیں سنائی دینے لگے۔

جس لمحہ میں کیٹر کے رقاص کا کوئی نشان زدہ نقطہ دوربین کے انتصابی صلیبی تار کے محاذی عین اسوقت پہنچے جبکہ گھڑی کی "ٹک" ساتھ ہی سنائی دے، ٹکوں کو گننا شروع کرو۔ اس طرح متبادل ٹکوں کی آوازوں کو اتنی دیر تک گنتے جاؤ کہ کیٹر کے رقاص کے نشان زدہ نقطہ کا، انتصابی صلیبی تار کے محاذی آنا، ہر ٹک کی آواز کے ساتھ منطبق ہو جائے۔ اس امر کا لحاظ رکھو کہ گننے کا عمل مسلسل رہے۔ فرض کرو کہ م دیں متبادل ٹک پر ن واں انطباق ہوتا ہے۔ چونکہ ہر متبادل ٹک کو شمار کیا گیا ہے اس وجہ سے اگر بالفرض کیٹر کے رقاص کا وقت دوران ۲ ثانیوں سے کم ہے تو رقاص ۲ م ثانیوں میں (م + ن) مکمل اہتزاز کرے گا۔ اگر اس کا وقت دوران ۲ ثانیوں سے زیادہ ہے تو ۲ م ثانیوں میں وہ (م - ن) مکمل اہتزاز کریگا۔

لہذا کیٹر کے رقاص کا صحیح وقت دوران = $\frac{۲م}{م \pm ن}$

اسی طرح دوسرے دھار یدار کنارہ سے وقت دوران دریافت کیا جاسکتا ہے

ہوا کی اچھال کا اثر صرف یہ ہوتا ہے کہ اس کی وجہ سے رقاص کے جمود کے معیار اثر کی قیمت بڑھ جاتی ہے لیکن رقاص کی بیرونی شکل اس کے وسطی نقطہ کے متشاکل بنائی جائے اور مرکز سے دونوں دھار یدار کناروں کا فاصلہ مساوی ہو تو ہوا کا اثر زائل ہو جاتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ دونوں

مشاہدات میں ہٹائی ہوئی ہوا کی کمیت یکساں رہتی ہے۔

ان تمام تصحیحوں پر ہم تفصیل کے ساتھ یہاں بحث کریں گے:۔

زاویۂ اہتزاز کی تصحیح:۔ اس سے قبل یہ ذکر ہو چکا ہے کہ شکل ۳ اور ۴ میں زاویہ عہ بہت چھوٹا ہونا چاہیئے ورنہ وقت دوران و کی قیمت میں تصحیح کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس کے لئے شکل ۱۲ پر غور کرو، فرض کرو کہ ت وقفہ کے بعد، ن ج، انتصابی سمت سے جو زاویہ بناتا ہے وہ ط کے مساوی ہے، اس لمحہ میں جسم کی زاویائی رفتار $= \text{س} = \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$، ج کی گہرائی ن کے نیچے $\text{ل}_1 \text{ جم ط}$ ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ مرکز جاذبہ اپنے ابتدائی مقام سے بقدر $\text{ل}_1 (\text{جم ط} - \text{جم عہ})$ نیچے اتر آیا ہے۔ لہذا جاذبۂ زمین سے اسپر جو کام ہوا $= \text{ک ج ل}_1 (\text{جم ط} - \text{جم عہ})$

لیکن مساوات (۲) سے جسم کی توانائی بالفعل

$$= \frac{1}{2} \text{مج س}^2 = \frac{1}{2} \text{ک ف}^2 \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2$$

لیکن توانائی بالفعل = کام جو کیا گیا

$$\therefore \text{ک ج ل}_1 (\text{جم ط} - \text{جم عہ}) = \frac{1}{2} \text{ک ف}^2 \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2$$

$$\therefore \text{ف}^2 \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2 = 2 \text{ ج ل}_1 (\text{جم ط} - \text{جم عہ})$$

لیکن مساوات (۵) اور (۶) سے:۔ $\text{ف}^2 = \text{ل}_1^2 + \text{ط}^2$

$$\therefore (\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2) \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2 = 2 \text{ ج ل}_1 (\text{جم ط} - \text{جم عہ})$$

اسکو تکملانے سے:۔

$$\sqrt{\frac{2 \text{ ج ل}_1}{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}} \int_{\text{صفر}}^{\frac{\text{و}}{4}} \text{فرت} = \int_{\text{صفر}}^{\text{عہ}} \frac{\text{فرط}}{\sqrt{\text{جم ط} - \text{جم عہ}}}$$

جہاں و وقت دوران ہے

$$\therefore \frac{\text{و}}{2} \sqrt{\frac{\text{ج ل}_1}{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}} = \int_{\text{صفر}}^{\text{عہ}} \frac{\text{فرط}}{\sqrt{\text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{2} - \text{جب}^2 \frac{\text{ط}}{2}}}$$

اب $\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{٢} = \text{جب}\,\frac{\text{ع}}{٢}\,.\,\text{جب فه}$، رکھو جہاں $\text{فه} =$ کوئی خاص زاویہ (فرض کرو)

اس کو تفرقانے سے :- $\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{٢}\,.\,\text{فر}\,\frac{\text{ط}}{٢} = \text{جب}\,\frac{\text{ع}}{٢}\,\text{جم فه فرفه}$

$$\therefore\ \text{فرط} = \frac{٢\,\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{٢}\,\text{جم فه فرفه}}{\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢)$$

اور $\sqrt{\text{جب}^٢\,\frac{\text{ع}}{٢} - \text{جب}^٢\,\frac{\text{ط}}{٢}} = \sqrt{\text{جب}^٢\,\frac{\text{ع}}{٢}\,(\text{ا} - \text{جب}^٢\,\text{فه})}$

$$= \sqrt{\text{جب}^٢\,\frac{\text{ع}}{٢}\,\text{جم}^٢\,\text{فه}}$$

$$= \text{جب}\,\frac{\text{ع}}{٢}\,\text{جم فه} \quad \ldots\ldots\ (\text{ب})$$

ان مساواتوں (ا) اور (ب) کو اس تکمل میں درج کرنے سے :-

$$\frac{\text{و}}{٢}\,.\,\sqrt{\frac{\text{ج}\,\text{ل}_١}{\text{ل}_١^٢ + \text{ط}^٢}} = \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢\,\text{فرفه}}{\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{٢}} = \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢\,\text{فرفه}}{\sqrt{\text{ا} - \text{جب}^٢\,\frac{\text{ط}}{٢}}}$$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢\,\text{فرفه}}{\sqrt{\text{ا} - \text{جب}^٢\,\frac{\text{ع}}{٢}\,\text{جب}^٢\,\text{فه}}}$$

$$\therefore\ \text{و} = ٤\sqrt{\frac{\text{ل}_١^٢ + \text{ط}^٢}{\text{ج}\,\text{ل}_١}} \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{٢}} \Big(\text{ا} + \frac{١}{٢}\,\text{جب}^٢\,\frac{\text{ع}}{٢}\,\text{جب}^٢\,\text{فه}$$

$$+ \frac{٣}{٨}\,\text{جب}^٤\,\frac{\text{ع}}{٢}\,\text{جب}^٤\,\text{فه} + \ldots\ldots\ldots\Big)\,\text{فرفه}$$

$$= ٤\sqrt{\frac{\text{ل}_١^٢ + \text{ط}^٢}{\text{ج}\,\text{ل}_١}}\,.\,\frac{\pi}{٢}\Big(\text{ا} + \frac{١}{٤}\,\text{جب}^٢\,\frac{\text{ع}}{٢} + \frac{٩}{٦٤}\,\text{جب}^٤\,\frac{\text{ع}}{٢} + \ldots\Big)$$

$$\text{ت} = ۲\pi \sqrt{\frac{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}{\text{ج}\,\text{ل}_۱}} \left(۱ + \frac{۱}{۴}\,\text{جب}^۲\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right)$$

اگر عہ بہت چھوٹا ہو تو

$$\text{و} = ۲\pi \sqrt{\frac{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}{\text{ج}\,\text{ل}_۱}} \left(۱ + \frac{\text{عہ}^۲}{۱۶}\right) \quad (۴)$$

ہوا کی تصحیح :- چونکہ رقاص بجائے خلا کے ہوا میں اہتزاز کرتا ہے اسلئے ہوا کی وجہ سے جو اثرات مرتب ہوتے ہیں ان کی تصحیح ضروری ہے۔ نیوٹن کے خیال کے مطابق کیبٹر نے صرف اوچھال کے اثر کو ملحوظ رکھا جس کی وجہ سے رقاص کے وزن میں کسی قدر کمی واقع ہوتی ہے۔ ہوا اور رقاص کے حاصل جفت کو مدنظر رکھ کر اس نے حسب ذیل مساوات فرض کی :-

$$\frac{\text{فر}^۲\,\text{عہ}}{\text{فر}\,\text{و}^۲} = \frac{(\text{ک} - \text{کَ})\,\text{ج}\,\text{ل}_۱\,\text{عہ}}{\text{ک}\,(\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲)}$$

جہاں کَ = ہوا کی کمیت جو رقاص سے ہٹائی جاتی ہے

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران}\ \text{و} = ۲\pi \sqrt{\frac{(\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲)\,\text{ک}}{\text{ج}\,\text{ل}_۱\,(\text{ک} - \text{کَ})}}$$

$$= ۲\pi \sqrt{\frac{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}{\text{ج}\,\text{ل}_۱\left(۱ - \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\right)}}$$

کَ کی قیمت کرے کی تپش پر، ہوا کی کثافت اور رقاص کے حجم سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس صورت میں سادہ معادل رقاص کا طول $= \dfrac{\text{ل}_{۱}^{۲} + \text{ط}^{۲}}{\text{ل}_{۱}\left(۱ - \dfrac{\text{کَ}}{\text{ک}}\right)}$

بسل نے یہ دکھلایا کہ ہوا کا اثر اور زیادہ پیچیدہ ہوتا ہے۔ حاصل اسراع پیدا کرنے والی قوت نہ صرف رقاص پر عمل کرتی ہے بلکہ واسطہ کے ملے ہوئے حصوں پر بھی اسکا اثر پڑتا ہے اور اس کی وجہ سے توانائی کی مساوات کا ہر حصہ متاثر ہوتا ہے۔

لہذا اس صورت میں توانائی کی مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے:—

$$\tfrac{۱}{۲}\,\text{ک}\,(\text{ل}_{۱}^{۲} + \text{ط}^{۲})\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \text{ک ج ل}_{۱}\,\text{جم طہ} + \text{گ}$$

جہاں گ، ہوا کی صورت میں ایک مستقل ہے یہ فرض کرتے ہوئے کہ جسم کی بیرونی شکل اور رفتار کی وجہ سے گ میں جو کمی واقع ہوتی ہے وہ نظر انداز کئے جانے کے قابل ہے۔

ظاہر ہے کہ ہوا کے ہر متحرک ذرہ میں توانائی بالفعل پیدا ہوتی ہے۔ اگر کسی ایک ذرہ کی کمیت فرکَ اور اسکی رفتار سا ہو تو واسطہ کے متاثرہ حصہ کی توانائی بالفعل $= \tfrac{۱}{۲}\int \text{فرکَ}\,.\,\text{سا}^{۲}$

لہذا اس مساوات کے داہنی جانب میں، جو رقاص کی توانائی بالفعل کو تعبیر کرتی ہے، اتنی مقدار کا اضافہ ہونا چاہیئے۔

مساوات کے بائیں جانب میں ۲ کَ ج سَ جم طہ کے مساوی کمی کرنا ہوگا جہاں سَ رقاص کے مرکز تعلیق اور ہٹائی ہوئی ہوا کے مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ ہے۔

$$\therefore\ \text{ک}\,(\text{ل}_{۱}^{۲} + \text{ط}^{۲})\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \int \text{فرکَ}\,\text{سا}^{۲} =$$

$$= ۲\,\text{ج}\,(\text{ک}\,\text{ل}_۱ - \text{کَ}\,\text{س})\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{گ}_۱$$ جہاں $\text{گ}_۱$

$= ۲\text{گ}$ فرض کرو

تکمل $\int \text{س}^۲\,\text{فرکَ}$ کی قیمت دریافت نہیں کی گئی ہے لیکن ہم یہ فرض کرسکتے ہیں کہ رقاص جب حرکت کرتا ہے تو ہوا کا ہر ذرہ بھی حرکت کرتا ہے جسکی وجہ سے رفتار $\text{س}\,\dfrac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$ کے متناسب ہوتی ہے اور ذرہ کی مقام اور جسم کی شکل پر منحصر ہوتی ہے۔

$\therefore \int \text{س}^۲\,\text{فرکَ} = \text{کَ}\,\text{ھ}\left(\dfrac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^۲$ جہاں ھ ایک مستقل ہے۔

$$\therefore \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^۲ \text{ک}\left\{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲ + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{ھ}\right\}$$

$$= ۲\,\text{ج}\,(\text{ک}\,\text{ل}_۱ - \text{کَ}\,\text{س})\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{گ}_۱$$

اسکو تفرقانے سے:—

$$۲\,\frac{\text{فر}^۲\text{ط}}{\text{فرت}^۲}\,\text{ک}\left\{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲ + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{ھ}\right\}$$

$$= ۲\,\text{ج}\,(\text{ک}\,\text{ل}_۱ - \text{کَ}\,\text{س})\,\text{جب}\,\text{ط}$$

اگر ط بہت چھوٹا ہو تو $\text{جب}\,\text{ط} \doteq \text{ط}$

اور یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے

$$\therefore \text{وقت دوران}\ \text{و} = ۲\,\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲ + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{ھ}}{\left(\text{ل}_۱ - \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{س}\right)\text{ج}}}$$

$$\text{اور سادہ معادل رقاص کا طول} = \frac{\left(\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲ + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{ھ}\right)}{\left(\text{ل}_۱ - \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{س}\right)}$$

اس ھ کی قیمت تجربہ سے ہوا کے لئے مستقل ثابت ہوئی ہے۔

ایک ایسے رقاص کے لئے جو اُلٹایا جاسکتا ہو، فرض کرو کہ $\text{و}_۱$ اور $\text{و}_۲$

دو دھاریدار کناروں کے گرد وقت دوران کی قیمتیں ہیں اور مرکز جاذبہ کے متناظر فاصلے ل۱ اور ل۲ ہیں تب $\frac{\text{ج}\,\text{و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2 + \text{ھ}_1}{\text{ل}_1\left(1 - \frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1}\right)}$

چھوٹی مقداروں کے حاصل ضرب کی قیمتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے :—

$$\frac{\text{ج}\,\text{و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} + \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}\left(\frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1}\right) + \frac{\text{ھ}_1}{\text{ل}_1}$$

اسی طرح :— $\frac{\text{ج}\,\text{و}_2^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2} + \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}\left(\frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_2}{\text{ل}_2}\right) + \frac{\text{ھ}_2}{\text{ل}_2}$

ایک کو دوسرے سے تفریق کرنے سے :—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left(\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2\right) = \text{ل}_1^2 - \text{ل}_2^2$$

$$+ \left(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2\right)\frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1} - \left(\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2\right)\frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_2}{\text{ل}_2} + \left(\text{ھ}_1 - \text{ھ}_2\right)$$

سادہ معادل رقاص کا طول تقریباً $= \text{ل} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}$

ل کی قیمت ان مقداروں کے لئے لکھنے اور $(\text{ل}_1 - \text{ل}_2)$ سے کل اوپر کی مساوات کو تقسیم کرنے سے :—

(۵)

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left(\frac{\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right) = \left(\text{ل}_1 + \text{ل}_2\right)$$

$$+ \frac{\text{ک}'\,\text{ل}}{\text{ک}}\left(\frac{\text{س}_1 - \text{س}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right) + \frac{\text{ھ}_1 - \text{ھ}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}$$

بائیں جانب کے مقادیر تصحیح کے رقوم ہیں $(\text{س}_1 - \text{س}_2)$ کی قیمت حسابی طریقہ

سے دریافت کی جاسکتی ہے۔ آخری جز، ایک ہی ناپ اور شکل کے دو رقاصوں کی مدد سے، جن کی کمیتیں مختلف ہوں، دریافت کیا جاسکتا ہے۔ $ھ_1$ اور $ھ_2$ کی قیمتیں دریافت کرنی ہوں تو دونوں مساواتوں کو حل کرنا ہوگا۔ اگر رقاص کی شکل ایسی ہو کہ وہ درمیانی نقطہ پر متشاکل ہو تو $س_1 = س_2$ اور $ھ_1 = ھ_2$، اور ہوا کی تصحیح ساقط ہو جاتی ہے۔ ایسے رقاص کو جو ان شرائط کو پورا کرتا ہو پہلے پہل ریپسالڈ نے بنایا اور اسکو شکل ۱۱ میں دکھلایا گیا ہے۔

شکل ۱۱

ایک سلاخ دو حلقوں $ص_1$ اور $ص_2$ میں جوڑ دی جاتی ہے۔ ان حلقوں میں دو چھوٹی سلاخیں جن کے سروں پر دھاریدار کنارے $ن_1$ اور $ن_2$ ہوتے ہیں، پیچ کے ذریعہ کس دی جاتی ہیں اور ان کے ساتھ دو اسطوانے ا اور ب لگے ہوئے ہوتے ہیں ان میں سے ایک ٹھوس اور دوسرا کھوکھلا ہوتا ہے ان اسطوانوں کو سلاخ کے کسی مقام پر، اوپر یا نیچے کی جانب ہٹا کر پیچ کے ذریعہ جکڑ دیا جاسکتا ہے اور اس طرح $ن_1$ اور $ن_2$ کے گرد، وقت دوران کی قیمتیں تقریباً مساوی کی جاسکتی ہیں۔

دھاریدار کناروں کا انحنا: ۔ اگر دھاریدار کنارے اچھی طرح تیز نہ ہوں تو دھاریدار کنارہ کے (اپنے سہارے کے ساتھ) پھسلواں تماس کی وجہ سے، رقاص اہتزاز کرتا ہے۔

فرض کرو کہ دھاریدار کنارے $ص_1$ اور $ص_2$ نصف قطر کے اسطوانے ہیں شکل ۱۲ میں ق کو ایک دھاریدار کنارے کا (جس کا نقطہ تماس گ ہے) انحنا کا مرکز فرض کیا گیا ہے۔ مرکز جاذبہ ج، دھاریدار کنارہ سے $ل_1$ فاصلہ پر ہے۔

تھامنے والا جفت $= \text{ک ج} \times \text{ق م}$

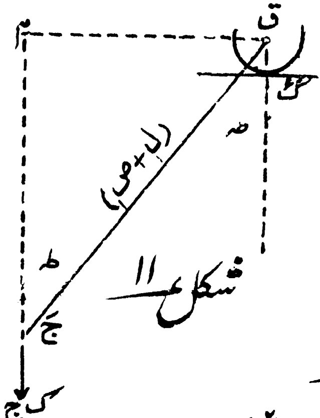
$= \text{ک ج} (\text{ل}_1 + \text{ص}_1) \text{ جب طہ}$

اگر طہ چھوٹا ہو تو یہ جفت $= \text{ک ج} (\text{ل}_1 + \text{ص}_1) \text{ طہ}$

لیکن جفت $= \text{مج} \dfrac{\text{فر}^2 \text{طہ}}{\text{فرت}^2}$

$= \text{ک} (\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2) \dfrac{\text{فر}^2 \text{طہ}}{\text{فرت}^2}$

$= \text{ک ج} (\text{ل}_1 + \text{ص}_1) \text{ طہ}$



شکل ۱۱

اور یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے اسلئے :-

$$\frac{\text{ج و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1 + \text{ص}_1} = \frac{(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)}{\text{ل}_1} \cdot \left(1 - \frac{\text{ص}_1}{\text{ل}_1}\right)$$

اسی طرح دوسرے دھار یدار کنارے کے لئے :-

$$\frac{\text{ج و}_2^2}{4\pi^2} = \frac{(\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2)}{\text{ل}_2} \cdot \left(1 - \frac{\text{ص}_2}{\text{ل}_2}\right)$$

دونوں کو ایک دوسرے میں سے تفریق کرنے سے :-

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2} (\text{و}_1^2 \text{ل}_1 - \text{و}_2^2 \text{ل}_2) = (\text{ل}_1^2 - \text{ل}_2^2) - \left(\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}\right) \text{ص}_1 + \left(\frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}\right) \text{ص}_2$$

اب سادہ معادل رقاص کا طول $= \text{ل} = \dfrac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} = \dfrac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}$

ل کی رقوم میں لکھنے اور اوپر کی مساوات کو $(\text{ل}_1 - \text{ل}_2)$ سے تقسیم کرنے سے :-

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2} \left\{ \frac{\text{و}_1^2 \text{ل}_1 - \text{و}_2^2 \text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2} \right\} = (\text{ل}_1 + \text{ل}_2) + \left(\frac{\text{ل}}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right) (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)$$

اگر دھار یدار کناروں کو اُلٹ دیا جائے جس طرح کہ ریپسالڈ کے رقاص کی صورت میں کیا جا سکتا ہے تو

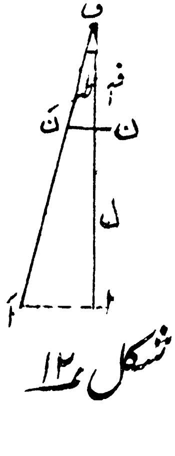
$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left\{\frac{\text{ف}_1^2\,\text{ل}_1-\text{ف}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1-\text{ل}_2}\right\}=(\text{ل}_1+\text{ل}_2)+\frac{\text{ل}}{\text{ل}_1-\text{ل}_2}(\text{ص}_1-\text{ص}_2)$$

ان دونوں مساواتوں کو جمع کرنے سے ص_1 اور ص_2 کی قیمتیں ساقط ہو جاتی ہیں، ورنہ ص_1 اور ص_2 کی قیمتیں دریافت کرنی ہوں گی۔

اگر سہارے میں ایک ثابت دھاریدار کنارہ اور رقاص پر ستوی بیرنگ ہو تو $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$، لہذا اس صورت میں کسی تصحیح کی ضرورت نہیں۔

سہارے کی حرکت:۔ سہارا اگر مضبوطی کے ساتھ نہ جمایا گیا ہو، تو رقاص کی حرکت کے ساتھ مجبوراً خود بھی ضرور حرکت کرنے لگے گا، سہارے کی اس حرکت کو انتصابی و افقی اجزاء میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، لیکن موخرالذکر کا اثر وقت دوران پر زیادہ ہوتا ہے اور انتصابی کا بالکل کم ہوتا ہے، اس لئے یہ ضروری ہے کہ سہارے کو خصوصاً عرضی سمت میں، مضبوطی کے ساتھ جما دیا جائے۔

شکل ۱۲ میں ایک دھاریدار کنارہ کا نقطہ تعلیق فرض کرو ن ہے اور ا مرکز جاذبہ ہے۔ جہاں $\text{ن ا} = \text{ل}_1$



شکل ۱۲

فرض کرو کہ سہارا، افقی سمت میں فی اکائی قوت، بقدر ع، حرکت کرتا ہے۔

$$\text{ا ا' کی سمت میں اسراع} = \text{ل}_1\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ص}}{\text{فرت}^2}$$

$$\text{لہذا قوت ا ا' کی سمت میں} = \text{ک ل}_1\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ط}}{\text{فرت}^2}$$

$$\text{لیکن}\quad \frac{\text{فر}^2\,\text{ط}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{ج ل}_1\,\text{ط}}{\text{ل}_1^2+\text{ط}^2}$$

$$\text{لہذا سہارے پر قوت} = \frac{\text{ک ج ل}_1^2\,\text{ط}}{\text{ل}_1^2+\text{ط}^2}$$

$$\text{چونکہ}\quad \frac{\text{ل}_1^2+\text{ط}^2}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ل}_2^2+\text{ط}^2}{\text{ل}_2} = \text{ل}$$

∴ $\text{ط}^2 = \text{ل}_1\, \text{ل}_2$

∴ سہارے پر قوت $= \dfrac{\text{ک ج ل}_1\, \text{ط}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

لیکن اکائی قوت کے لئے سہارہ عہ کے مساوی حرکت کرتا ہے۔

∴ اس قوت کے لئے سہارہ جتنی حرکت کریگا $= \dfrac{\text{ک ج ل}_1\, \text{ط}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} \,.\, \text{عہ}$

لیکن اس قوت سے سہارہ زاویٔ نقل مکان طہ کے لئے بقدر ن نَ حرکت کرتا ہے۔

لہذا $\dfrac{\text{ک ج ل}_1\, \text{طہ}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} \,.\, \text{عہ} = \text{ن نَ}$

لیکن $\text{ن نَ} = \text{فہ طہ}$

∴ $\text{فہ} = \dfrac{\text{ک ج عہ ل}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

اور مرکز اہتزاز ق تک اونچا کر دیا گیا ہے۔

لہذا وقت دوران کے لئے:—

$$\frac{\text{ج و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{(\text{ل}_1 + \text{فہ}_1)^2 + \text{ط}^2}{(\text{ل}_1 + \text{فہ}_1)}$$

$$= \text{ل}_1 + \text{فہ}_1 + \frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_1 + \text{فہ}_1}$$

دوسرے دھار دار کنارے کے لئے:—

$$\frac{\text{ج و}_2^2}{4\pi^2} = \text{ل}_2 + \text{فہ}_2 + \frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_2 + \text{فہ}_2}$$

∴ ایک کو دوسرے میں سے تفریق کرنے سے:—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left\{\frac{\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\left\{\text{ل}_1^2 + \text{فہ}_1\,\text{ل}_1 + \frac{\text{ط}^2\,\text{ل}_1}{\text{ل}_1 + \text{فہ}_1} - \text{ل}_2^2 - \text{فہ}_2\,\text{ل}_2 - \frac{\text{ط}^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_2 + \text{فہ}_2}\right\}$$

اب چونکہ $\text{فہ}_2 = \frac{\text{ک ج عہ ل}_2}{\text{ل}_1+\text{ل}_2}$

$\therefore \frac{\text{فہ}_1}{\text{فہ}_2} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$ یعنی $\text{فہ}_1\,\text{ل}_2 = \text{فہ}_2\,\text{ل}_1$

$$\therefore \frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left\{\frac{\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1-\text{ل}_2}\right\} = (\text{ل}_1+\text{ل}_2) + \frac{1}{\text{ل}_1-\text{ل}_2}(\text{فہ}_1\text{ل}_1 - \text{فہ}_2\text{ل}_2)$$

$$= (\text{ل}_1+\text{ل}_2) + \frac{1}{\text{ل}_1-\text{ل}_2}\left(\text{فہ}_1\text{ل}_1 - \text{فہ}_1\frac{\text{ل}_2^2}{\text{ل}_1}\right)$$

$$= (\text{ل}_1+\text{ل}_2) + \frac{\text{فہ}_1}{\text{ل}_1}(\text{ل}_1+\text{ل}_2)$$

$$= (\text{ل}_1+\text{ل}_2) + \text{ک ج عہ}$$

لہذا رقاص کے وزن سے، سہارہ جو افقی حرکت کرتا ہے اسکا تصحیحی جزو "ک ج عہ" ہے۔

بورڈا کا رقاص یہ بالکل سادہ رقاص کی طرح ہوتا ہے۔ ایک بڑا فولاد کا یا لوہے کا ٹھوس کرہ، باریک تار کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے۔

چونکہ کسی ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطر کے گرد $= \text{م}\,\frac{2}{5}\,\text{ص}^2$

اس لئے وقت دوران $\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \frac{2}{5}\text{ص}^2}{\text{ل}_1\,\text{ج}}}$ .... (۱۲)

جہاں ل_1 دھاریدار کنارے اور کرہ کے مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ ہے۔ اس سے ج کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

ایک لچکدار ڈوری کے ذریعہ کسی جسم کا ارتعاش کرنا

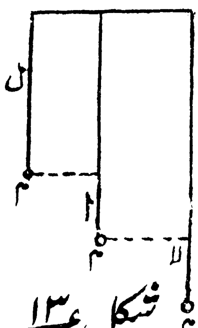
فرض کرو کہ ایک جسم جس کی کمیت م ہے کسی لچکدار ڈوری کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے
دیکھو شکل ۱۳

اگر جسم کو لٹکانے کے بغیر ڈوری کا صحیح طول ل کے مساوی ہو اور اُسکو لٹکانے کے بعد اس میں اضافہ طول = ا، تو ہوک کے کلیہ کی رُو سے* ڈوری میں تناؤ یا زور

$= \text{م ج} = \text{ی}\,\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$ جہاں ی = ڈوری کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک

اب اگر جسم اہتزاز کر رہا ہو اور کچھ وقت میں فاصلہ لا اپنے پہلے مقام سے نیچے اُتر جائے تو ڈوری میں زور یا تناؤ $= \text{ی}\,\frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ل}}$

اور دوسری قوت یا زور جو عمل کر رہا ہے = م ج



شکل ع ۱۳

∴ حاصل قوت $= \frac{\text{ی}(\text{ا}+\text{لا})}{\text{ل}} - \text{م ج}$

$= \text{ی}\,\frac{(\text{ا}+\text{لا})}{\text{ل}} - \text{ی}\,\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$

$= \frac{\text{ی لا}}{\text{ل}}$

∴ جسم کا اسراع $= \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر و}^2} = \frac{\text{ی لا}}{\text{م ل}}$ ،

یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

∴ وقت دوران $\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{م ل}}{\text{ی}}}$ .... (۱۳)

اور چونکہ $\text{م ج} = \text{ی}\,\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$ ∴ $\frac{\text{ل م}}{\text{ی}} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}$

∴ $\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}$ .... (۱۴)

اس سے ج کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اور اگر و، م، اور ل کی قیمتیں معلوم ہو جائیں تو ی کی بھی پیمائش ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ وزن کے اضافہ مَ ج کی وجہ سے طول میں اضافہ ب ہوتا ہے۔

اوپر کے طریقہ سے، $\text{مَ ج} = \text{ی}\,\frac{\text{ب}}{\text{ل}}$

ی کو ساقط کرنے کے بعد $\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ب م}}{\text{مَ ج}}}$

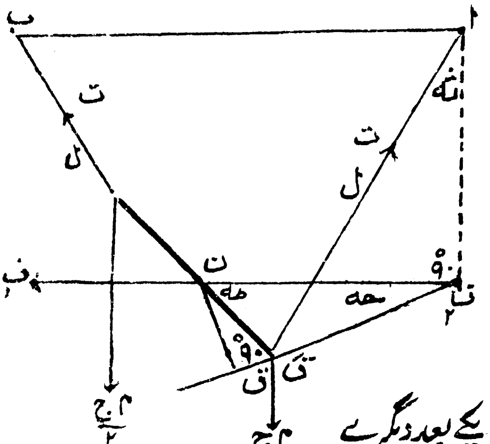
---

* چوتھا باب دیکھو۔

پس ج کی قیمت معلوم ہو جا سکتی ہے۔ صحیح قیمت حاصل کرنے کے لئے ڈوری کی کمیت کا تیسرا حصہ م میں جمع کرنا چاہیئے یعنی و = ۲ π $\sqrt{\dfrac{ب\,(م + \frac{ک}{۳})}{م\ ج}}$

جہاں ک = ڈوری کا وزن۔

دو ریشی تعلیق فرض کرو کہ شکل ۱۴ میں ایک سلاخ جسکا مرکز ن ہے دو مساوی طول ل کی ڈوریوں کے ذریعہ ا اور ب پر لٹکائی گئی ہے۔ فرض کرو کہ



شکل ۱۴

ا اور ب کا درمیانی فاصلہ = د۱ اور سلاخ کا طول = د۲ ف۱ ف۲ کوئی افقی خط فرض کیا جائے جس پر سلاخ ابتدا میں تھی اور ا ب، ف۱ ف۲ کے متوازی ہے اگر سلاخ کے سروں کو یکے بعد دیگرے آگے اور پیچھے علی الترتیب اہتزاز میں لایا جائے۔

تو سلاخ کا مرکز افقی خط سے کوئی زاویہ بنائے گا۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ طہ کے مساوی ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ انتصابی وضع سے ڈوری جو زاویہ بناتی ہے وہ ثہ کے مساوی ہے۔

ف۲ سے ایک خط کھینچو جو سلاخ کے سرے قَ میں سے گزرے۔ ایک اور خط ن قَ کھینچو جو ف۲ قَ کے علی القوائم ہو۔

فرض کرو کہ ف۱ ف۲ اور ف۲ قَ کے درمیان زاویہ حہ کے مساوی ہے

اب اگر سلاخ کی کمیت = م

تو $\dfrac{\text{م ج}/۲}{\text{ت}} = \text{جم ثه}$ جہاں ڈوری کا تناؤ = ت

یعنی م ج = ۲ ت جم ثه

اور جفت = $\text{م فا}^{۲} \cdot \dfrac{\text{فر}^{۲}\text{طه}}{\text{فر و}^{۲}} = ۲\,\text{ن ق} \times \text{ت جیب ثه}$

جہاں فا = گردشی نصف قطر

یعنی $\text{م فا}^{۲} \cdot \dfrac{\text{فر}^{۲}\text{طه}}{\text{فر و}^{۲}} = ۲\,\text{ن ق} \times \dfrac{\text{م ج}}{۲}\ \text{مس ثه}$

$= ۲\,\dfrac{\text{ح}}{۲}\,\text{جب حه} \cdot \dfrac{\text{م ج}}{۲} \cdot \dfrac{\text{قَ ف}_{۲}}{\text{ل}}$ تقریباً

اگر ثه چھوٹا ہو

مثلث ن قَ ف$_{۲}$ میں

$\dfrac{\text{ف}_{۲}\text{قَ}}{\text{جب طه}} = \dfrac{\text{قَ ن}}{\text{جب حه}} = \dfrac{\text{د}_{۲}}{۲\,\text{جب حه}}$

یعنی $\text{ف}_{۲}\text{قَ} = \dfrac{\text{د}_{۲}\,\text{جب طه}}{۲\,\text{جب حه}}$

$\therefore \text{م فا}^{۲}\,\dfrac{\text{فر}^{۲}\text{طه}}{\text{فر و}^{۲}} = \dfrac{۲\,\text{د}_{۱}\,\text{د}_{۲}\,\text{جب طه م ج}}{۸\,\text{ل}} = \dfrac{\text{د}_{۱}\,\text{د}_{۲}\,\text{م ج طه}}{۴\,\text{ل}}$

یعنی $\dfrac{\text{فر}^{۲}\text{طه}}{\text{فر و}^{۲}} = $ زاویٔ اسراع $= \dfrac{\text{د}_{۱}\,\text{د}_{۲}\,\text{ج طه}}{۴\,\text{ل فا}^{۲}}$

چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے اس لئے وقت دوران و $= ۲\pi\sqrt{\dfrac{۴\,\text{ل فا}^{۲}}{\text{د}_{۱}\,\text{د}_{۲}\,\text{ج}}}$

$= ۴\pi\,\text{فا}\sqrt{\dfrac{\text{ل}}{\text{د}_{۱}\,\text{د}_{۲}\,\text{ج}}}$ ....(۱۵)

اگر سلاخ مستطیل کی شکل کی ہو تو $\text{فا}^{۲} = \dfrac{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}{۱۲}$

جہاں ا = سلاخ کا طول

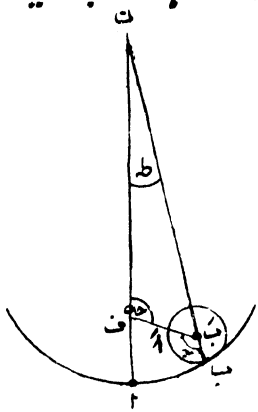
ب = " عرض

اور اگر استوانہ سماہو تو ف = $\left(\frac{\text{ل}^2}{12} + \frac{\text{ص}^2}{4}\right)$

جہاں ص = استوانہ کا نصف قطر

ایک گولی کو مقعر آئینہ پر لڑھکا کر ج کی قیمت دریافت کرنا:-

شکل ۱۵ میں فرض کرو کہ ن مقعر آئینہ کا مرکز انحنا ہے اور ب ایک گولی ہے جو مقعر آئینہ پر لڑھک رہی ہے۔



شکل ۱۵

ایک نقطہ ۲ گولی پر اس طرح کا اگر لیا جائے کہ جب وہ بائیں جانب لڑھکے تو آئینہ کے مرکز ۱ سے منطبق ہو جائے یعنی قوس ب ۲ = قوس ب ۱ کے۔

فرض کرو کہ گولی کا مرکز بَ، اس کا نصف قطر ص₂ اور آئینہ کا نصف قطر انحنا ص₁ ہے۔ بَ ۲ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ن ۱ کو یہ نقطہ ف پر قطع کرتا ہے۔ ن بَ کو ملاؤ

چونکہ قوس ۲ ب = قوس ب ۱ اس لئے $\text{ص}_1\,\text{ط} = \text{ص}_2\,\text{بہ}$

اور $\text{حہ} = \text{بہ} - \text{ط} = \frac{\text{ص}_1\,\text{ط}}{\text{ص}_2} - \text{ط} = \frac{\text{ط}\,(\text{ص}_1 - \text{ص}_2)}{\text{ص}_2}$

فرض کرو کہ گولی کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو کہ ب میں سے گزر رہا ہے = مج = جمود کے معیار اثر اس کے ایسے متوازی محور کے گرد جو بَ میں سے گزر رہا ہے + $\text{م ص}_2^2 = \frac{2}{5}\text{م ص}_2^2 + \text{م ص}_2^2 = \frac{7}{5}\text{م ص}_2^2$ [جہاں م = گولی کی کمیت]

گولی کی زاویئی رفتار $= \frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}} = \frac{\frac{\text{فرط}\,(\text{ص}_1 - \text{ص}_2)}{\text{ص}_2}}{\text{فرو}} = \text{سلا}$ [فرض کرو]

گولی کی توانائی بالفعل $= \frac{١}{٢}$ مج $ل^{٢} =$

$$= \frac{١}{٢}\left(\frac{٧}{٥}\,م\,ص_{٢}^{٢}\right)\left(\frac{ص_{١}-ص_{٢}}{ص_{٢}}\right)^{٢}\left(\frac{فرط}{فرو}\right)^{٢}$$

اور توانائی بالقوہ = گولی کا وزن × وہ فاصلہ جو گولی کا مرکز اوپر کی طرف ہٹا

$$= م\,ج\left\{(ص_{١}-ص_{٢})-(ص_{١}-ص_{٢})\,جم\,ط\right\}$$

$$= م\,ج\,(ص_{١}-ص_{٢})(١-جم\,ط)$$

چونکہ توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل

$$لہذا\ م\,ج\,(ص_{١}-ص_{٢})(١-جم\,ط)+\frac{١}{٢}\cdot\frac{٧}{٥}\,م\,ص_{٢}^{٢}\left(\frac{ص_{١}-ص_{٢}}{ص_{٢}}\right)^{٢}\left(\frac{فرط}{فرو}\right)^{٢}$$

= مستقل

$$اس\ کو\ تفرقانے\ سے\ م\,ج\,(ص_{١}-ص_{٢})\,جب\,ط\,\frac{فرط}{فرو}+$$

$$+\,٢\cdot\frac{٧}{١٠}\,م\,(ص_{١}-ص_{٢})^{٢}\,\frac{فرط}{فرو}\cdot\frac{فر^{٢}ط}{فرو^{٢}}=صفر$$

اگر زاویہ ط چھوٹا ہو تو $ج\,ط+\frac{٧}{٥}(ص_{١}-ص_{٢})\frac{فر^{٢}ط}{فرو^{٢}}=صفر$

یعنی اسراع $= \frac{فر^{٢}ط}{فرو^{٢}} = \frac{-٥\,ج\,ط}{٧(ص_{١}-ص_{٢})}$

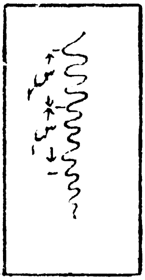
اور چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

لہذا وقت دوران $و = ٢\pi\sqrt{\frac{٧}{٥}\cdot\frac{(ص_{١}-ص_{٢})}{ج}}$ .... (١٦)

اس مساوات سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

دھندلی (دھوئیں سے سیاہ شدہ) تختی کو گرا کر ج کی قیمت کی دریافت:-

تجربہ میں ایک مستطیل شکل کی تختی کو کاجل کے ذریعہ دھندلا کیا جاتا ہے۔ ایک سر پیدا کرنے والے دوشاخہ کو لے کر اس کے ایک شاخ کے سرے پر پتلا تار لگا دیا جاتا ہے اور دوشاخہ کو تختی کے نچلے حصہ میں اسطرح رکھا جاتا ہے کہ تار کا سرا تختی کے ساتھ مس کرتا ہے دیکھو شکل ١٧ اب



اگر تختی کو گرا دیا جائے تو اس پر موجی شکل کا ایک منحنی بنے گا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے فرض کرو کہ ۲ تعداد کی موجوں کے لئے تختی نے جو فاصلہ طے کیا $= س_1$ اور اسی ۲ موجوں کے لئے فرض کرو کہ تختی کے دوسرے حصہ میں جو فاصلہ طے کیا گیا وہ $= س_2$

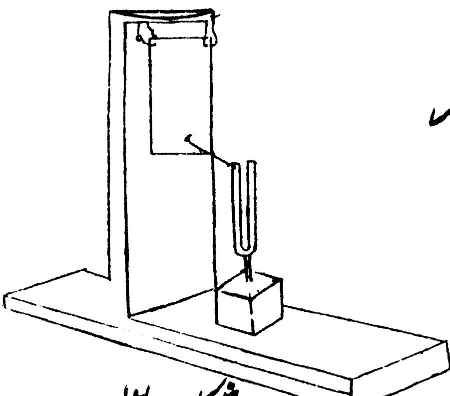
$$س_1 = م_1 \frac{۲}{ن} + \frac{1}{2}\, ج \left(\frac{۲}{ن}\right)^2$$

جہاں $م_1$ = ابتدا میں تختی کی رفتار جبکہ پہلی ۲ موجیں بنی تھیں

$$\therefore\ 2\, س_1 = 2\, م_1 \frac{۲}{ن} + ج \left(\frac{۲}{ن}\right)^2$$

اور

$$س_1 + س_2 = م_1 \left(\frac{2\,۲}{ن}\right) + \frac{1}{2}\, ج \left(\frac{2\,۲}{ن}\right)^2$$



شکل ۱۶

$$\therefore\ س_1 - س_2 = ج \left(\frac{۲}{ن}\right)^2 - \frac{1}{2}\, ج \left(\frac{2\,۲}{ن}\right)^2$$

$$= ج \left(\frac{۲}{ن}\right)^2 (1-2) \quad \therefore\ س_2 - س_1 = ج \left(\frac{۲}{ن}\right)^2$$

$$\therefore\ ج = \frac{ن^2}{۲^2} (س_2 - س_1) \quad \text{..........} \quad (17)$$

سطح زمین پر ج کی قیمت کا تغیر :-

سنہ ۱۶۷۲ء میں ریشر نامی شخص نے پہلی دفعہ یہ ثابت کیا کہ مختلف مقامات پر ج کی قیمت مختلف ہوتی ہے۔ چونکہ زمین اپنے محور پر گردش کرتی رہتی ہے اس وجہ سے اسکی سطح پر مختلف اشیاء میں اس امر کا تقاضا ہوتا ہے کہ

زمین کی سطح سے علیحدہ ہو کر دور پھینکے جائیں۔ یہ تقاضا خطِ استوا پر اعظم ہوتا ہے جہاں کہ گردش کی رفتار اعظم ہوتی ہے اور قطبوں کے قریب یہ اقل ہوتا ہے چونکہ زمین کے خطِ استوا کا نصف قطر، قطبی نصف قطر سے بہت بڑا ہے لہٰذا جو اشیا خطِ استوا پر واقع ہیں انکا فاصلہ زمین کے مرکز کمیت سے، بہ نسبت قطبوں پر واقع ہونے والی اشیا کے فاصلہ کے بہت زیادہ ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے خطِ استوا پر جاذبہ کی قوت کسی کمیت پر قطبوں کی بہ نسبت کم ہوتی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ ج کی قیمت خطِ استوا پر کم اور قطبوں پر زیادہ ہوتی ہے۔

۱۷۴۳ء میں کلیرو نے یہ ثابت کیا کہ کسی عرض البلد له پر ج کی قیمت کی تعبیر ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے:۔

ج له = ج ۱ [۱ + (۵/۲ ک - مہ) جب² له] (۸)

جہاں ج ۱ = خط استوا پر ج کی قیمت

ک = قوت مرکز گریز خط استوا پر / ج ۱

مہ = استوائی اور قطبی نصف قطروں کا فرق / استوائی نصف قطر

۱۸۸۴ء میں ہلمرٹ نے صحیح ضابطہ دریافت کیا جو آجکل بھی معیاری تصور کیا جاتا ہے۔

ج له = ۹۷۸٫۰۰ (۱ + ۰٫۰۰۵۳۱ جب² له)

سر جارج ایری وغیرہ نے یہ ثابت کر دکھایا کہ ایک ہی مقام پر ج کی قیمت زمین سے مختلف بلندیوں پر بدلتی رہتی ہے۔ کسی پہاڑ کی چوٹی پر

سطح سمندر کے مقابلہ میں ج کی قیمت کم ہوتی ہے اسکی وجہ یہ ہے کہ زمین کا مرکزی حصہ، بالائی حصہ کی بہ نسبت زیادہ کثیف ہے۔ لہذا کسی کان کے اندر ج کی قیمت، بلند مقامات کی بہ نسبت زیادہ ہوگی۔ ایوان تجارت نے حسب ذیل ضابطہ معین کیا ہے۔

یہ فرض کرتے ہوئے کہ زمین ن نصف قطر کا ایک کرہ ہے۔

$$ج_{له،ب} = ۹۸۰٫۶۲ (۱ - ۰٫۰۰۲۵۷ \text{ جم } ۲ له) \left[۱ - \frac{۵ ب}{۴ ن} \right]$$

جہاں $ج_{له،ب}$ = ج کی قیمت عرض البلد له اور سطح سمندر سے بلندی ب پر

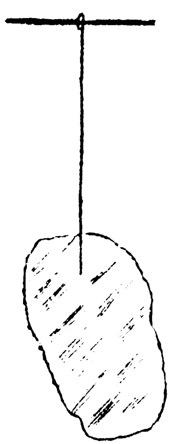
زمین کے مختلف مقامات پر ج کی قیمت حسب ذیل ہے:۔

مقام	عرض البلد	ج سمر فی ثانیہ فی ثانیہ
خط استوا	۰° — ۰'	۹۷۸٫۱۰
مدراس	۱۳° — ۴'	۹۷۸٫۲۹
حیدرآباد دکن	۱۷°–۲۵'– ۵۴''	۹۷۸٫۳۰
کلکتہ	۲۲° — ۳۳'	۹۷۸٫۷۷
کیپ ٹاؤن	۳۳° — ۵۶'	۹۷۹٫۶۴
ٹوکیو	۳۵° — ۴۱'	۹۷۹٫۹۵
ملبورن	۳۷° — ۵۰'	۹۷۹٫۹۸
نیویارک	۴۰° — ۴۴'	۹۸۰٫۲۲
پیرس	۴۸° — ۵۰'	۹۸۰٫۹۴
لندن	۵۱° — ۳۱'	۹۸۱٫۱۹

مقام	عرض البلد	ج سمر فی ثانیہ فی ثانیہ
کیمبرج	۵۲° - ۱۳'	۹۸۱٫۲۵
اڈنبرا	۵۵° - ۵۶'	۹۸۱٫۵۸
قطب شمالی	۹۰° - ۰'	۹۸۳٫۲۱

مروڑی اہتزاز:-

فرض کرو کہ ایک جسم دائری وضع میں اہتزاز کر رہا ہے یعنی مروڑی اہتزاز ہو رہا ہے۔



شکل ۱۷

اگر یہ کسی وقت و میں زاویہ عہ گھومے تو جفت

$$= \text{مج} \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2}$$

اور یہ جفت = ٹہ عہ جہاں ٹہ = مروڑ کا جفت فی اکائی زاویہ

$$\therefore \text{مج} \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2} = \text{ٹہ عہ}$$

یعنی زاوئی اسراع $= \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2} = \frac{\text{ٹہ عہ}}{\text{مج}}$

اور چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے اس لئے وقت دوران

$$\text{و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{مج}}{\text{ٹہ}}} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

Chapter II.

(۱) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P69 (1927)
(۲) ,, ,, ,, ,, P71 (1927)
(۳) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P14 (1922)
(۴) Properties of Matter "Newman & Searle" P43 (1928)
(۵) ,, ,, ,, P46, (1928)
(۶) ,, ,, ,, P49, (1928)
(۷) Properties of Matter "Wagstaff" P85 (1928)
(۸) Phil. Trans. 40, 19 (1737)
(۹) Properties of Master "Wagstaff" P142, (1924)

تیسرا باب

قوت جاذبہ کا مستقل

نیوٹن کا کلیہ جاذبہ :- اگر دو جسموں کی کمیت ک_1 اور ک_2 ہو اور ان کے درمیان فاصلہ ف تو دونوں کے درمیان کشش کی قوت $\text{ق} \propto \frac{\text{ک}_1 \text{ک}_2}{\text{ف}^2}$

یعنی $\text{ق} = \text{جہ} \frac{\text{ک}_1 \text{ک}_2}{\text{ف}^2}$

جہ جاذبہ کا مستقل کہلاتا ہے۔ کیونڈش، بائز، جولی، اور پوائینٹنگ وغیرہ نے جہ کی قیمت تجربہ کے ذریعہ دریافت کی ہے۔

نیوٹن کے شہرۂ آفاق کلیہ کی رو سے کسی ک_2 کمیت کا اسراع کسی دوسرے جسم کی طرف $= \frac{\text{جہ ک}_1}{\text{ف}^2}$

اس نتیجہ کی مدد سے ہم مختلف اجرام سماوی کی کمیتیں بہ آسانی دریافت کر سکتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ چاند کی زاوئی رفتار $= \text{سلا}_{\text{چ}}$ اور اس کا فاصلہ زمین سے $= \text{ف}_{\text{چ}}$ اور س = سورج کی کمیت

ز = زمین کی کمیت اور $\text{سلا}_{\text{ز}}$ = زمین کی زاوئی رفتار اور $\text{ف}_{\text{ز}}$ = زمین کا فاصلہ سورج سے اس صورت میں چاند کا اسراع زمین کی طرف

$$= \text{ف}_{\text{چ}} \times \text{سلا}_{\text{چ}}^2$$

$$= \frac{\text{جہ ز}}{\text{ف}_{\text{چ}}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اور زمین کا اسراع سورج کی طرف = $ف_{ز} \times سلا_{ز}^{۲}$

$$= \frac{ج س}{ف_{ز}^{۲}} \quad .... \quad (۲)$$

مساوات (۱) کو (۲) سے تقسیم کرنے سے:-

$$\frac{سلا_{چ}^{۲} \times ف_{چ}}{ف_{ز} \times سلا_{ز}^{۲}} = \frac{ز}{س} \times \frac{ف_{ز}^{۲}}{ف_{چ}^{۲}}$$

$$\therefore \frac{ز}{س} = \frac{ف_{چ}^{۳} \times سلا_{چ}^{۲}}{ف_{ز}^{۳} \times سلا_{ز}^{۲}}$$

$$= \left(\frac{۲۴۰۰۰۰}{۹۲۰۰۰۰۰۰}\right)^{۳} . \left(\frac{۳۶۵}{۲۷}\right)^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۳۰۰۰۰۰}$$

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ زمین کا وزن تقریباً ۱۲۵×۱۰^{۲۵} پونڈ ہے

لہذا سورج کا وزن تقریباً $= ۱٫۲۵ \times ۱۰^{۲۵} \times ۳۰۰۰۰۰$

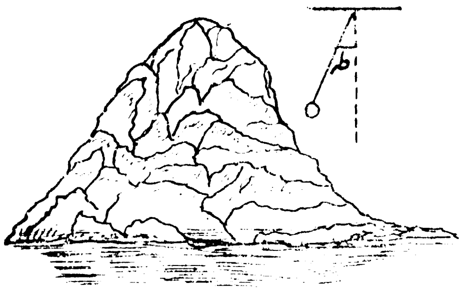
$= ۳٫۷۵ \times ۱۰^{۳۰}$ پونڈ

زمین کی کمیت کسی پہاڑ کی کمیت کے رقوم میں :- کسی پہاڑ کے کنارے کے قریب ایک چھوٹا سا گولا لٹکا دیا جائے تو پہاڑ کی کشش کی وجہ سے ایک افقی قوت گولہ کو اس کی طرف جذب کرے گی اور قوت جاذبہ زمین اس کو نیچے کی جانب انتصابی سمت میں کھینچے گی، لہذا گولہ جس ڈوری سے بندھا ہوا ہوگا یہ ڈوری اِن دونوں قوتوں کی حاصل سمت اختیار کرے گی۔ اگر انتصابی سمت سے ڈوری زاویہ ط بنائے تو

$$مس\ ط = \frac{ق_{۱}}{ق_{۲}}$$

یہاں ق۱ = پہاڑ کی کشش کی وجہ افقی قوت
ق۲ = جاذبۂ زمین کی وجہ انتصابی قوت

فرض کرو کہ ک۱ پہاڑ کی اور م گولہ کی کمیت ہے۔ پہاڑ کی کشش کے مرکز سے گولہ کا فاصلہ = ف، اور زمین کی کمیت ز ہے اور زمین کے مرکز کا فاصلہ گولہ سے = ص،



تب ق۱ =
$$= \frac{\text{ج ک}_1 \text{ م}}{\text{ف}^2}$$

$$\text{اور ق}_2 = \frac{\text{ج ز م}}{\text{ص}^2}$$

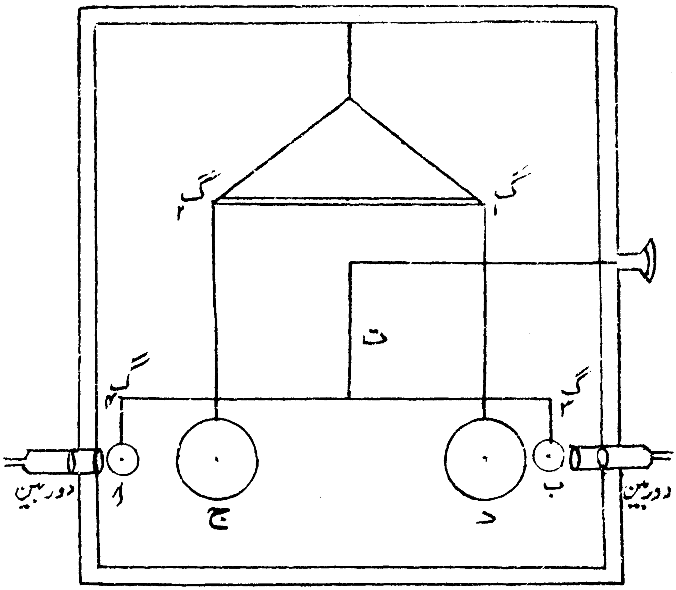
$$\therefore \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \text{مس ط} = \frac{\text{ک}_1 \text{ص}^2}{\text{ز ف}^2}$$

لہذا ز کی قیمت حساب کے ذریعہ معلوم کی جاسکتی ہے۔ زمین کا حجم اگر معلوم ہو تو اس کی کثافت بھی دریافت کی جاسکتی ہے۔

پہلے پہل سنہ ۱۷۴۰ء میں اس قسم کا تجربہ کرنے کی کوشش بوگے نے کی تھی۔ اس کے بعد سنہ ۱۷۷۴ء میں میسکیلین نامی ایک انگریز ہیئت داں نے اسی قسم کے تجربہ کو دوہرایا اور زمین کی کثافت اس سے ۵٫۴ دریافت کی(۱)۔ لیکن پہاڑ کی کمیت صحیح طور پر معلوم کرنے کے بعد زمین کی کثافت کی صحیح قیمت ۵ نکلی۔ سنہ ۱۸۵۴ء میں ایبری نے زمین کی کثافت ۶٫۵ دریافت کی(۲)۔

ج کی قیمت کی دریافت ہنری کیونڈش کے طریقہ سے:۔ اصل میں اس تجربہ کی

بنیاد جان مشیکل نے ڈالی تھی لیکن بعد میں کیونڈش نے ۱۷۹۷ء میں



شکل ۱۰

صحیح طور پر اس کو کیا تھا[۳]۔

شکل ۱۰ میں ج، د دو بڑے سیسہ کے گولے ہیں جنکا قطر ۱۲ اسم ہے اور یہ ایک سلاخ گ۱ گ۲ کے ذریعہ لٹکائے گئے ہیں۔ اس سلاخ کو ہم دائری وضع میں گھما سکتے ہیں۔ گ۳ گ۴ ایک پتلی ہلکی سلاخ ہے جس کے ذریعہ دو چھوٹے سیسہ کے گولے ب اور ا آویزاں کئے گئے ہیں۔ اِن چاروں گولوں کے مرکز ایک ہی اُفقی مستوی میں واقع ہیں۔

تجربہ میں یہ کُل چیزیں ایک بند صندوق میں رکھ دی جاتی ہیں تاکہ بیرونی اثرات سے محفوظ رہیں۔ شروع میں گ۱ گ۲ کو اس طرح گھمایا جاتا ہے کہ اس کی سمت گ۳ گ۴ کے علی القوائم ہوجائے اور مروڑے ہوئے تار ت کی مروڑ

نکال دی جاتی ہے۔ پھر سلاخ گ$_۱$ گ$_۲$ کو اسکی پہلی وضع میں اسطرح گھمایا جاتا ہے کہ ج، ا کے اور د، ب کے قریب آجائے ۔ اور ج اور ب اور د میں کشش ہوگی اور اس کی وجہ سے سلاخ گ$_۱$ گ$_۲$ میں انصراف ہوگا۔ یہ انصراف معلوم کرلیا جاتا ہے۔ اس کے بعد سلاخ گ$_۱$ گ$_۲$ کو دوسری طرف گھماکر اسی طرح تجربہ دوہرایا جاتا ہے۔ اور یہ انصراف دوربینوں کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے تجربہ کے دوران میں تپش کا مستقل رکھنا ضروری ہے۔ کیونڈش نے یہ تجربہ ایک بند کمرے میں کیا تھا تاکہ ہوا کے اثرات نہ ہونے پائیں۔ چونکہ آلات میں خود کشش کا خوف تھا اس لئے کیونڈش نے ایک شیشہ کا صندوق بنایا۔ ا، ب اور ج، د کی کمیت اور حسامت علی الترتیب یکساں ہونی چاہیئے۔ فرض کرو کہ ک$_۱$ کسی ایک بڑے گولے کی کمیت ہے اور ک$_۲$ کسی چھوٹے گولے کی، اور ب اور د کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ = ف جبکہ سلاخ گ$_۱$ گ$_۲$ میں انصراف = عہ اور سلاخ گ$_۱$ گ$_۲$ کا طول = ۲ ل

تب ب اور د کے درمیان کشش کی قوت ق = جہ $\dfrac{\text{ک}_{۱}\ \text{ک}_{۲}}{\text{ف}^{۲}}$

اور انکے محور کے گرد معیار اثر = $\dfrac{\text{۲ ل جہ ک}_{۱}\ \text{ک}_{۲}}{\text{ف}^{۲}}$ = جفت

= ٹہ عہ جہاں ٹہ پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ ہے

$$\therefore \text{جہ} = \dfrac{\text{ٹہ عہ ف}^{۲}}{\text{۲ ل ک}_{۱}\ \text{ک}_{۲}} \qquad \text{(۳)}$$

اس مساوات سے اگر ٹہ کی قیمت معلوم ہو تو جہ کی قیمت معلوم ہوجاتی ہے اگر گ$_۱$ گ$_۲$ کو دائری وضع میں اہتزاز کراکے اس کا وقت دوران و معلوم ہوجائے اور اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر جج ہو تو ٹہ کی قیمت

$$\text{و} = ۲\pi \sqrt{\dfrac{\text{جج}}{\text{ٹہ}}}$$ سے معلوم ہوجائے گی

اگر جہ معلوم ہو جائے تو زمین کی کثافت آسانی سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ زمین پر ایک جسم جس کی کمیت ک ہے رکھا ہوا ہے۔ زمین اور جسم کے درمیان کشش کی قوت = اس جسم کے وزن کے جو زمین کی جانب عمل کر رہا ہے۔ چونکہ زمین کی کمیت = $\frac{۴}{۳}\pi$ ص^{۳} ث

جہاں ص = زمین کا نصف قطر

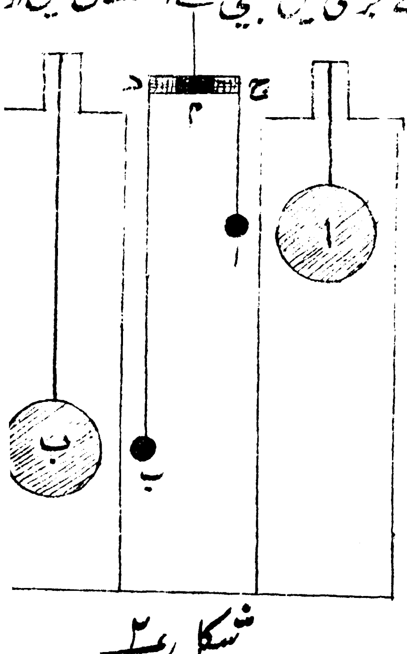
$$\therefore \text{کشش کی قوت} = \text{ک ج} = \frac{\text{جہ}\left(\frac{۴}{۳}\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{ث}\right)\text{ک}}{\text{ص}^{۲}}$$

$$\therefore \text{ث} = \text{زمین کی کثافت} = \frac{۳\,\text{ج}}{۴\pi\,\text{جہ ص}}$$

تجربہ سے جہ = $۶٫۶۶ \times ۱۰^{-۸}$

اس سے ث معلوم ہو جاتا اگر ہمیں ص معلوم ہو ص کی قیمت درج کرنے سے ث کی قیمت ۵٫۴۵ گرام فی مکعب سمر حاصل ہوتی ہے۔

بعد میں اس تجربہ کو رائشی نے جرمنی میں بیلی نے انگلستان میں اور کارنو اور بیلی نے فرانس میں دوہرایا۔ ان تمام کے نتائج کیونڈش کے نتائج کے بہت ہی قریب ہیں۔



شکل ۲

جہ کی قیمت کی دریافت

ورنن بائز کے تجربہ سے:-

پروفیسر بائز نے سنہ ۱۸۹۵ء میں جو تجربہ کیا وہ حسب ذیل ہے (۲)

اس نے کوارٹز کے بہت ہی

باریک ریشے بنانے کا ایک طریقہ دریافت کیا اس نے دیکھا کہ یہ ریشے بہت مضبوط ہوتے ہیں اور لچک دار خواص ان میں صحیح طور پر پائے جاتے ہیں۔ اسوجہ سے اسنے کوارٹز کے ریشوں کو اپنے تجربہ میں ایسی جگہ استعمال کیا جہاں چھوٹی چھوٹی قوتیں ناپنے کی ضرورت تھی شکل ۲ میں ا ب سونے کے دو چھوٹے کرّے ہیں جن کے قطر ۲۵ء ۰ انچ ہیں۔

ان کو کوارٹز کے ریشوں کے ذریعہ ایک بہت چھوٹی مروڑی سلاخ ج د کے دونوں سروں پر لٹکایا جاتا ہے جس کے ساتھ ایک آئینہ م بھی لگا ہوا ہوتا ہے۔ کشش کرنے والی کمیتین ا اور ب سیسہ کے کرّے تھے جنکا قطر ۵ء۴ انچ تھا۔ کیونڈش کے تجربہ کی طرح کشش کرنے والی قوتیں ایک ہی سطح میں ہوتیں تو اتنی چھوٹی مروڑی سلاخ کے ساتھ ا اور ب دونوں سونے کے کرّوں کو تقریباً مساوی قوت سے جذب کرتے۔ اس کو روکنے کے لئے پروفیسر بائز نے ا، ا کو ایک سطح میں اور ب، ب کو ۶ انچ نیچے، دوسری سطح میں رکھا۔

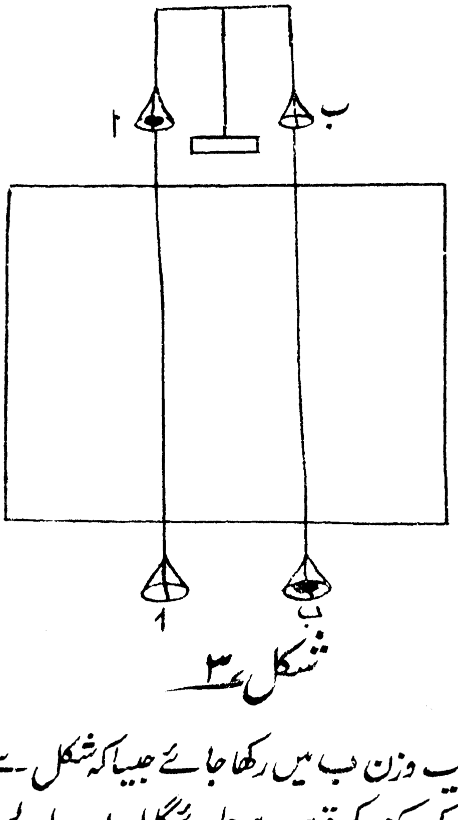
کشش کرنے والی کمیتین ا اور ب ایک کھوکھلے استوانہ نما بکس کے ڈھکن سے جس کا قطر ۱۰ انچ تھا اور جو گھوم سکتا تھا لٹکائی گئیں، اور کرّے اُب ایک نلی کے اندر لٹکائے گئے جس کا قطر تقریباً ۵ء۱ انچ تھا۔

تجربہ میں کمیتیں ا اور ب، بکس کے ڈھکن کو گھما کر اسطرح رکھی گئی تھیں کہ پہلے ایک سمت میں اور پھر دوسری سمت میں طلائی کرّوں پر اُن کا اعظم جفت عمل کرے۔ بائز نے جہ کی قیمت مساوات (۳) کی مدد سے دریافت کی اور یہ ۶۶۵۷ء۶ × ۱۰⁻⁸ کے مساوی تھی۔

اس تجربہ کو ۱۸۹۶ء میں ڈاکٹر بران نے بھی اس میں کچھ تھوڑی سی تبدیلی کرنے کے بعد دوہرایا۔ اسنے بھی جہ کی قیمت تقریباً وہی دریافت

کی جو بائز کو حاصل ہوئی تھی۔

جہ دریافت کرنے کے لئے پروفیسر جولی کا تجربہ :- پہلے پہل سنہ ۱۸۸۱ء میں جولی نے اس تجربہ کو کیا تھا، شکل ۳ میں ایک ترازو دکھایا گیا ہے۔ اس ترازو کو جرمنی میں ایک مینار کی چھت سے لٹکایا گیا۔ چھوٹے پلڑوں ا اور ب سے دو بڑے پلڑے اَ، بَ لمبے تاروں کے ذریعے ۲۱.۰ سم نیچے لٹکائے گئے۔ فرض کرو کہ ا اور ب میں دو ایسے وزن ڈالے گئے کہ دونوں پلڑے



شکل ۳

تعادل میں رہیں، اب اگر ایک وزن ب میں رکھا جائے جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے تو یہ وزن زمین کے مرکز کے قریب ہو جائے گا اور اوپر والے وزن سے بھاری ہو جائے گا۔ جولی نے دریافت کیا کہ ۵ کلوگرام کے وزن میں تقریباً ۳۲ ملی گرام کا اضافہ ہوا۔ اس کے بعد جولی نے ایک بڑا لوہے کا ۳۶ انچ قطر والا کرہ نچلے پلڑے کے نیچے رکھا اور اس وقت ۵ کلوگرام میں ۳۲٫۵ ملی گرام کا اضافہ ہوا جبکہ وزن پیشتر کی طرح اوپر سے نیچے کے پلڑے میں لایا گیا، لہذا صرف کرہ کی وجہ سے ٫۵ ملی گرام کے مساوی کشش ہوئی۔

فرض کرو کہ پلڑے میں کمیت = م اور زمین کی کمیت = ز اور کرہ کی کمیت = ک تب زمین اور پلڑے کی کمیتوں میں قوت جاذبہ = $\frac{جہ\, ز\, م}{ص^2}$ = ۵۰۰۰ گرام جہاں ص = زمین کا نصف قطر اگر $ص_1$ = کرہ کا نصف قطر تو

پلڑے کی کمیت اور کرہ کے درمیان جاذبہ کی قوت = $\frac{جہ\, ک\, م}{ص_1^2}$

= ۵ ، ملی گرام = ۰۰۰۵، گرام

لہذا ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے :-

$$\frac{ز}{ص^2} \times \frac{ص_1^2}{ک} = \frac{۵۰۰۰}{۰۰۰۵،} = ۱۰^۷$$

$$لہذا \quad \frac{ز}{ک} = \frac{\frac{4}{3}\pi\, ص^3 \times ث}{\frac{4}{3}\pi\, ص_1^3 \times ث_1} = \frac{۱۰^۷ \times ص_1^2}{ص^2}$$

$\therefore$ ث = $\frac{ص_1 \times ۱۰^۷ \times ث_1}{ص}$ جہاں $ث_1$ = کرہ کے مادہ کی کثافت

اور ث = زمین کی کثافت

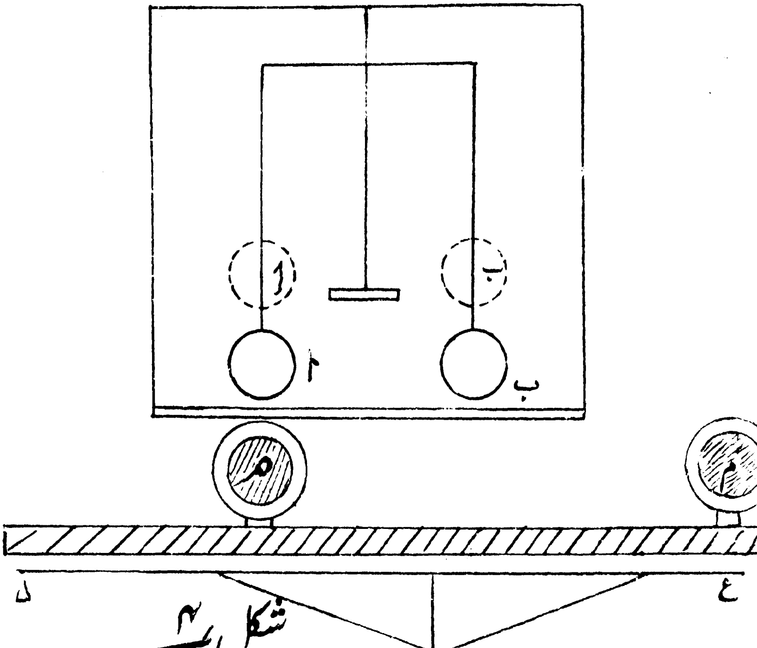
اسطرح جولی نے ث کی قیمت ۵،۶۹ گرام فی مکعب سمر حاصل کی۔

چونکہ اسطرح ث کی قیمت معلوم ہو چکی ہے اس وجہ سے جہ آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اسکے بعد ۱۸۹۸ء میں ریچرڈ اور کریگر منسل نے بھی جولی کی طرح تجربہ کیا اور انہوں نے ث کی قیمت ۵،۵۱ حاصل کی۔

جہ معلوم کرنے کے لئے پوائنٹنگ کا تجربہ ⑤ :- شکل ۴۳ میں طریقہ عمل کی عام ترتیب بتائی گئی ہے۔

ا اور ب دو سیسہ کے گولے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ۵۰ پونڈ ہے۔ ان کو ایک مضبوط ترازو کے سروں پر لٹکایا جاتا ہے۔ ترازو کو ایک لکڑی کے بکس میں بند کر دیا جاتا ہے۔



شکل ۴

ھ ایک بڑا سیسہ کا کرہ ہے جسکا وزن تقریباً ۳۵۰ پونڈ ہے اس کو ایک نالی دار نلی ل ع میں رکھا جاتا ہے۔حسب ضرورت اس کرہ کو نالی میں لڑھکا کر ا کے یا ب کے نیچے لایا جاسکتا ہے۔ م توازن قائم رکھنے والا وزن ہے، ا اور ھ کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ تقریباً ایک فٹ ہوتا ہے۔جب ھ ا کے نیچے ہوتا ہے تو ا پر کشش کا عمل کرتا ہے جس سے اسکا وزن بڑھ جاتا ہے۔

اُ اور بَ، وہ دو مقامات ہیں جہاں ا اور ب، ایک فٹ اور اونچے کردئے جائیں تو واقع ہوں گے۔اس صورت میں چونکہ ترازو کی ڈنڈی اور معلق تاروں پر ھ کی کشش وہی رہتی ہے جو پہلے تھی لہذا ان دو مقاموں پر ا اور ب کی کشش میں علی الترتیب فرق لینے سے ڈنڈی وغیرہ کی کشش کے اثرات زائل ہو جاتے ہیں اور صرف فاصلوں کی تبدیلی سے

کشش کا فرق حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح پروفیسر پوائنٹنگ نے جہ کی قیمت 6.698×10^{-8} دریافت کی۔ اب ہم اُن امور پر بحث کرینگے جن کی وجہ سے کلیہ تجاذب میں تغیر واقع ہوسکتا ہے:۔

قوت جاذبہ اور واسطہ:۔ اوپر، قوت جاذبہ کے متعلق جن تجربوں کا ذکر کیا گیا ہے، ان میں تجاذبی اجسام کی کمیتوں کے درمیان ہوائی واسطہ تھا، یہاں یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ واسطہ کی نوعیت کا تجاذبی مستقل کی قیمت پر کوئی اثر بھی ہوتا ہے یا نہیں۔ آسٹن اور تھوئنگ نے اس کو دریافت کرنے کے لئے متعدد تجربے کئے، انہوں نے مختلف اشیا کی تختیاں تجاذبی کمیتوں کے درمیان رکھیں اور یہ دریافت کیا کہ "جہ" کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا اور اگر ہوتا بھی ہو تو مقناطیسیت اور برق میں نفوذ پذیری اور نوعی امالی گنجائش کے اثرات کی بہ نسبت بعید خفیف ہوتا ہے۔

قوت جاذبہ اور کشش کرنے والی کمیتیں:۔ نیوٹن کے کلیہ کی رو سے کشش کرنے والی کمیتوں کی نوعیت زیادہ اہمیت نہیں رکھتی، صرف کمیت کی مقدار پر، جہ کی قیمت منحصر ہوتی ہے نہ کہ جوہر کی خاصیت پر، یہ ممکن ہے کہ بعض مادہ پر، اسکی کمیت کا مقابلہ کرتے، زیادہ کشش عمل کرتی ہو اور بعض پر کم، کیونڈش کے طریقہ والے تجربوں میں جہ کی قیمت دریافت کرتے وقت، مختلف نوعیت کی اشیا تجاذبی کمیتوں کے طور پر رکھی گئی تھیں مگر جہ کی قیمت میں کوئی فرق نہیں ہوا، اسی طرح کرۂ زمین کی اوسط کثافت کی دریافت میں بھی مختلف نوعیت کی اشیا کو رکھ کر تجربے کئے گئے لیکن عملی طور پر تمام کے لئے نتیجہ ایک ہی حاصل ہوا۔

قوت جاذبہ اور قلمی مادہ:۔ اکثر صورتوں میں کسی قلمی شی کے طبعی خواص، اسکے اندر مختلف سمتوں میں، مختلف ہوتے ہیں، مثلاً، ان میں

حرارت کی وجہ سے پھیلاؤ مختلف ہوتا ہے، اُن کی موصلیت حرارت یکساں نہیں ہوتی اور ان میں سے نور جب گزرتا ہے تو مختلف سمتوں میں اس کی رفتار بھی مختلف ہوتی ہے۔ اس سے ہم فوراً اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ کسی قلم میں قوت جاذبہ کے خطوط بھی مختلف سمتوں میں غیر مساوی طور پر پھیل جاتے ہیں۔ ڈاکٹر میکینزی (۷) نے امریکہ میں اس ہی کی دریافت کے لئے تجربہ کیا تھا، لیکن نتیجہ کچھ حاصل نہ ہوا، کچھ دنوں بعد پوائنٹنگ اور گرے (۸) نے بھی اس اثر کے معلوم کرنے کے لئے تجربے کئے۔ انہوں نے قسری اہتزاز کے نظریہ کو کام میں لانے کی کوشش اسطرح کی، کہ کوارٹز کا ایک کرہ لیکر، لٹکے ہوئے ایک دوسرے کرہ کے قریب، گھمایا، اگر قوتِ جاذبہ کے خطوط کی تقسیم کوارٹز کے مختلف محوروں پر مختلف ہو تو لٹکے ہوئے اہتزاز کرنے والے کرہ پر ایک جفت عمل کرے گا۔ اگر قسری جفت کا وقت دوران، لٹکے ہوئے نظام کے آزاد وقت دوران کے تقریباً مساوی ہو تو اس کا نتیجہ ایک بڑا اہتزاز ہوگا، لیکن تجربہ سے ایسی کوئی بات نہیں واقع ہوئی جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قلموں کی صورت میں بھی جہ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی۔

قوت جاذبہ اور تپش (۹) :۔ پوائنٹنگ، فلپ اور لینڈالٹ وغیرہ نے یہ معلوم کیا کہ جہ کی قیمت پر تپش کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ بعد میں شا نے ۱۹۱۶ء میں تجربہ سے یہ دریافت کیا کہ جہ کی قیمت، جبکہ کشش کرنے والی کمیتیں گرم کی جاتی ہیں، کسی قدر بڑھ جاتی ہے، لیکن اسکے بعد کے نتائج سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ صفر° م اور ۲۵۰° م کے درمیان جہ کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے۔

نیوٹن کے کلیہ کی صحت (۱۰) :۔ متعدد تجربوں سے نیوٹن کا کلیہ تجاذب ثابت ہو چکا ہے لیکن مشاہدات اور نتیجے میں کسی قدر فرق ہو تو اس کی

وجہ یہ ہے کہ کلیہ مذکور تقریباً صحیح ہے۔ اس کلیہ میں دو بڑی دقتیں پیش آتی ہیں۔ اول یہ کہ آئنسٹائین کے "نظریۂ اضافیت" کی رو سے کسی شئے کی کمیت اسکی رفتار کے ساتھ متغیر ہوتی ہے اور اس وجہ سے ہمیں شبہ یہ ہونے لگتا ہے کہ نیوٹن کے ضابطے میں درج کرنے کے لئے کونسی قیمت لینی ہوگی۔

دوم یہ کہ "فاصلے" کا مفہوم اتنا سادہ نہیں ہے جتنا کہ عام طور پر خیال کیا جاتا ہے اسکی پیمائش مشاہد کے حالات پر منحصر ہوتی ہے نظریہ اضافیت کی رو سے دو نقطوں کے درمیان فاصلہ تجربہ کرنے والے کے ساتھ متغیر ہوتا رہتا ہے۔

نیوٹن کے کلیہ کی ان دونوں خامیوں سے، مشاہدات اور واقعات کی صحیح قیمتوں کے فرق کی توضیح ہوتی ہے۔ آئنسٹائین نے اپنے نظریہ اضافیت کی بنا پر نیوٹن کے کلیہ کی تصحیح کرنے کی کوشش کی، اس لئے اس تصحیح شدہ کلیہ کو ہم "آئنسٹائین نیوٹنی کلیہ یا اضافیتی کلیۂ تجاذب سے" موسوم کریں گے۔

نور کی شعاع ہی اپنی تیز رفتار کی وجہ سے کچھ کمیت رکھتی ہے اور اس میں جبکہ وہ کسی طاقتور تجاذبی میدان میں حرکت کر رہی ہو، انصراف کا ہونا ضروری ہے۔ ایسا انصراف اور چنانچہ مبدء نور کا اپنے مقام سے ظاہری طور پر ہٹا ؤ آئنسٹائین نیوٹنی کلیہ کی مدد سے، حسابی طور پر بالکل صحیح پیمانہ پر دریافت کیا جا سکتا ہے لیکن صرف نیوٹن کے کلیہ سے نصف ہٹاؤ حاصل ہوتا ہے اسکے متعلق یہاں پر ہم اس سے زیادہ تفصیلی بحث نہیں کر سکتے اسلئے کہ تشفی صرف اس صورت میں حاصل ہو سکتی ہے جبکہ نظریہ اضافیت کا مطالعہ نہایت گہرے طور پر کیا جائے۔ یہاں البتہ اتنا کہا جا سکتا ہے کہ نیوٹن کا کلیہ "بالکل" صحیح نہیں ہے اور صرف اقل ترین فاصلوں کی صورت میں اس سے کام لیا جا سکتا ہے۔

Chapter III.

(۱) Properties of Matter 'Poynting & Thomson" P33 (1922)
(۲) Phil. Trans. 141, 297, (1856)
(۳) Phil. Trans. 83, 388 (1798)
(۴) General Physics for students "Edser". P207, (1926)
(۵) Phil. Trans. A. 182, 565, (1891)
(۶) Phys. Rev. 5 (1897)
(۷) Phys. Rev. 2, (1895)
(۸) Phil. Trans. 192, 245 (1899)
(۹) Properties of Matter ' Newman & Searle" P74, (1928)
(۱۰) " " " " P76 (1928)

چوتھا باب

لچک، مروڑ، خماؤ اور مرغولہ دار کمانیاں

تعریفات:۔ ایک متجانس جسم وہ ہے کہ جب دو مساوی مستطیلی ٹکڑے اُسمیں سے کاٹے جائیں اور ایک ٹکڑے کے ایسے کنارے جو دوسرے ٹکڑے کے متناظر کناروں کے متوازی ہوں تو بالکل ایک دوسرے کے مماثل ہوں اور آپس میں مطلق تمیز نہ کئے جاسکیں۔ سیسہ، موم، کوارٹز، شیشہ وغیرہ متجانس اجسام کی مثالیں ہیں۔

کوارٹز کے ایک کرہ کو اگر گرم کیا جائے تو چونکہ وہ ایک سمت میں، دوسری سمت کی نسبت زیادہ پھیلتا ہے اسوجہ سے کرہ نہیں باقی رہتا۔ ایسے اجسام غیر متساوی السموت کہلاتے ہیں۔

ایک ایسا جسم جس کے دو مساوی متشابہ ٹکڑے کسی وضع سے کاٹے جائیں جو بالکل مماثل اور آپس میں تمیز نہ کئے جاسکیں تو وہ متساوی السموت کہلاتا ہے، مثلاً شیشہ متساوی السموت شے ہے جب کسی جسم کی شکل یا حجم میں تبدیلی ہوتی ہے تو کہا جاتا ہے کہ اس میں بگاڑ یا فساد واقع ہو رہا ہے اور یہ تبدیلی، بگاڑ یا فساد کہلاتی ہے۔

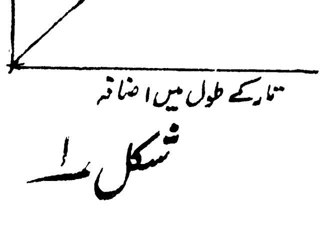
کسی جسم کے دو خطوط جو بگاڑ کے پہلے مساوی اور متوازی تھے، بگاڑ کے بعد بھی مساوی اور متوازی رہیں تو ایسا بگاڑ "متجانس بگاڑ" کہلاتا ہے۔

ایسی تین سمتیں جو کسی جسم میں علی القوائم تھیں اور بگاڑ کے بعد بھی اگر

ایک دوسرے کے علی القوائم رہیں تو یہ بگاڑ کے صدر محورین کہلاتے ہیں۔

ایسا بگاڑ جو کسی جسم کی شکل میں تو تبدیلی پیدا کرتا ہے لیکن جسامت کو نہیں بدلتا جز کہلاتا ہے۔ لچک دار جسم وہ ہے کہ اگر قوتوں کے اثر سے اسکی جسامت اور حجم میں تبدیلی پیدا ہو جائے تو ان قوتوں کو علیحدہ کر دینے کے بعد، جسم مذکور اپنی اصلی حالت پر واپس آجائے۔

اگر ایک تار سے ہم وزن لٹکائیں تو تار کے طول میں اضافہ ہوگا۔ اگر تار لچک دار ہو تو یہ اضافہ طول لٹکائے ہوئے وزن کے متناسب ہوگا۔ اگر وزن کو ہم بتدریج بڑھاتے جائیں تو کسی خاص کلیہ کے تحت طول میں بھی بتدریج اضافہ ہوتا جائے گا اگر وزن ایک خاص حد سے بڑھایا جائے تو ایک ایسا وقت آئے گا کہ تار کے طول میں، ایک بالکل چھوٹے وزن کے اضافہ سے بھی، انتہائی اضافہ ہونے لگے گا۔ ایسے وزن کو کہ جس کے لگانے کے بعد تار میں لچک کے خواص باقی نہ رہیں، اس تار کے "نقطہ مغلوبیت" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ شکل ۱ کی ترسیم کو دیکھو، نقطہ ۱ تک پہنچنے تک تار کامل لچک دار رہتا ہے۔



شکل ۱

نوٹ۔ یہاں ہم جو ضابطے اخذ کریں گے اور جن تجربوں کا ذکر کریں گے ان سب میں یہ فرض کر لیا جائے گا کہ جسم اپنی کامل لچک کے خواص کو برقرار رکھتا ہے۔

ہوک کا کلیہ:۔ لاطینی زبان میں جملہ "UT TENSIO SIC VIS" سے اسکی تعبیر ہوتی ہے یعنی ہم اگر کسی لچک دار چیز کو کھینچیں تو کھنچاؤ، کھینچنے

والی قوت کے متناسب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم ایک ایسا تار لیتے ہیں جسکا طول ل اور تراش عمودی کا رقبہ ۱ ہے۔ اگر ایک قوت ق لگانے سے تار میں کھچاؤ لَ ہو تو ہوک کا کلیہ یہی ہے کہ لَ ∝ ق ینگ نے ہوک کے کلیہ کو اسطرح بیان کیا۔

زور ∝ بگاڑ کی یعنی $\frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}}$ = گ = مستقل

لیکن زور = $\frac{\text{ق}}{\text{۱}}$ اور بگاڑ = $\frac{\text{لَ}}{\text{ل}}$

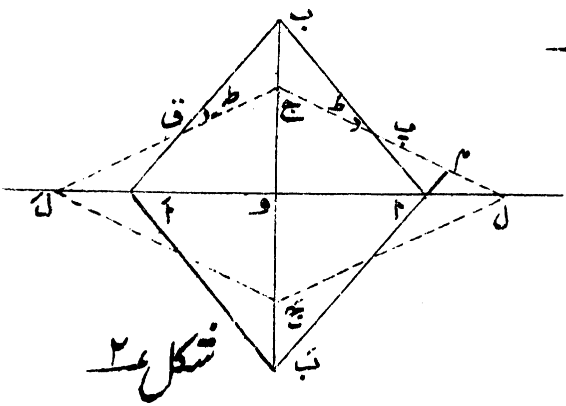
لہذا $\dfrac{\frac{\text{ق}}{\text{۱}}}{\frac{\text{لَ}}{\text{ل}}} = \frac{\text{ق ل}}{\text{۱ لَ}}$ = گ = ی فرض کرو

اس ی کو "ینگ کے معیار لچک" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

بگاڑ سے پہلے کسی جسم کا جو اکائی حجم ہوتا ہے، اس حجم کی کمی اگر بگاڑ ہے تو ایسی صورت میں گ = ح جہاں ح حجمی لچک کا معیار کہلاتا ہے۔

اگر بگاڑ جزئی ہو جس کی قیمت اُس زاویہ سے ناپی جاتی ہے جو مماسی زور کی وجہ سے بنتا ہے تو گ = د جہاں د، استواری کی شرح کہلاتا ہے۔

متجانس بگاڑ جو کسی جسم کی شکل کو تو بدل دیتا ہے لیکن حجامت کو نہیں بدلتا[1]:—



شکل ۲

کسی جسم میں فرض کرو کہ و ۲ اور و ب وہ محور ہیں جن کی سمتوں میں

پھیلاؤ یا سکڑاؤ واقع ہوتا ہے۔

اور نیز یہ بھی فرض کرو و ا = و ب = و اَ = و بَ = ۱

یعنی بگاڑ سے پہلے فرض کرو کہ ا ب اَ بَ ایک مربع ہے بگاڑ کے بعد فرض کرو کہ مربع، ایک متوازی الاضلاع ل ج لَ جَ بن جاتا ہے۔

یہ فرض کرتے ہوئے کہ بگاڑ متجانس ہے

و ا کی سمت میں اضافہ = و ب کی سمت میں کمی

= ن (فرض کرو)

تب و ل = ۱ + ن اور و ج = ۱ − ن

چونکہ (و ل)² + (و ج)² = (ل ج)²

∴ (ل ج)² = ۲ + ۲ ن² .... ≏ ۲

کیونکہ ن کی قیمت بہت ہی چھوٹی ہونے کی وجہ سے ن کے بڑے قوت نماؤں والی رقموں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

(ا ب)² = ۱² + ۱² = ۲

لہذا ا ب = ل ج

اور اسی طرح اَ بَ = لَ جَ

چونکہ ا ب = √۲ = اَ بَ

∴ ابتدائی رقبہ = √۲ × √۲ = ۲

اور بگاڑ کے بعد جدید رقبہ = ل ج × ل جَ

≏ √۲ × √۲ = ۲

لہذا رقبہ یا یوں کہنا چاہیئے کہ جسامت میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوئی۔

ل ج لَ جَ کو اگر اسطرح گھمایا جائے کہ خط ل ج، ا ب سے

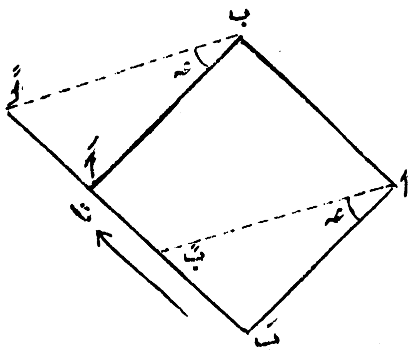
منطبق ہو جائے اور ل ج کو ا ب کی سمت میں اتنا ہٹایا گیا ہے کہ ج نقطہ ب سے منطبق ہو گیا ہے۔

اس صورت میں ج لَ ، ب اَ کے ساتھ جو زاویہ بنائے گا وہ

$= \angle$ب ق ج $+ \angle$ب پ ج $=$ ۲ ط

یہی چیز اسوقت بھی ہوتی اگر ہم ا ب کو قائم رکھتے اور جسم کے اندر کے ہر ایک نقطہ کو ا ب کے متوازی ایک مماسی قوت ت سے اتنے فاصلہ تک ہٹاتے جو ا ب کے متناسب ہوتا۔

دیکھو شکل ۳ ل ج کو ا ب کی سمت میں گھمانے اور ہٹانے کے بعد اَ بَ ، لَ جَ کا نیا مقام ہوگا۔



شکل ۳

لہذا $\angle$اَ ب اَ $=$ عہ

$=$ ۲ ط

زاویہ عہ جزئی زاویہ کہلاتا ہے۔

شکل ۲ میں ا م ایک ایسا خط کھینچو جو ج ل پر عمود ہو۔

چونکہ $\angle$ل پ ا بہت چھوٹا ہے، لہذا

$\angle$پ ل ا $\simeq \angle$پ ا و $= ۴۵^\circ$

اور دائری پیمانہ میں زاویہ ط $= \dfrac{\text{ا م}}{\text{ا پ}}$

$= \dfrac{\text{ال جب } \angle\text{پ ل ا}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

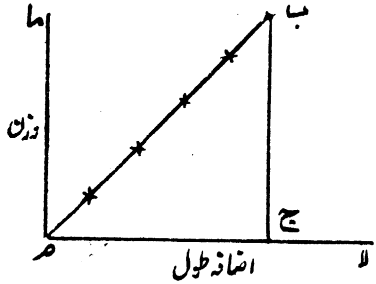
= ال = ن

چونکہ ا پ ≏ ½ ا ب

لہذا جزئی زاویہ عہ = ۲ طہ = ۲ ن

کام جو بگاڑ پیدا کرنے میں صرف ہوتا ہے ۲ :-

اگر یہ ہم فرض کر لیں کہ ہوک کا کلیہ صحیح ہے تو تار کے اضافۂ طول کی ترسیم اُس پر لگائے ہوئے متناظر اوزان کے مقابلہ میں جو آئیگی وہ شکل ۴ کے مطابق ہوگی۔



شکل ۴

تار کو م سے ج تک کھینچنے میں جو کام ہوا اُس کی تعبیر مثلث م ج ب کے رقبہ سے ہوگی اور

یہ = ½ م ج × ج ب

اگر تار کی تراش عمودی کا رقبہ = ا اور تار کا طول = ل

تو زور = ج ب / ا

اور بگاڑ = م ج / ل

∴ کام جو ہوا = ½ × ا × ل × بگاڑ × زور

لیکن ا × ل = تار کے حجم کے

لہذا تار کے فی اکائی حجم میں توانائی = ½ × زور × بگاڑ

اگر جسم کے ذرات ایک مماسی زور سے آگے کی جانب کھینچے جائیں جیسا کہ شکل ۳ میں دکھایا گیا ہے اور جزئی زاویہ عہ ہو تو اس جسم کی توانائی فی اکائی حجم = ½ ت عہ اگر کسی کھینچنے والی قوت ق کی سمت میں جو اضافۂ طول ہوتا ہے وہ ن فرض کیا جائے تو ن ایک ایسی سمت میں بھی گھٹاؤ ہوگا جو کھنچاؤ کی سمت کے علی القوائم ہو اور ایسی

صورت میں ق ایک ڈھکیلنے والی قوت ہوگی۔

لہذا جسم کے فی اکائی حجم کے لئے کھنچاؤ سے جو کام ہوگا وہ

= $\frac{1}{2}$ ق × ن

لہذا جسم کے فی اکائی حجم کیلئے ڈھکیلنے سے جو کام ہوگا وہ

= $\frac{1}{2}$ ق × ن

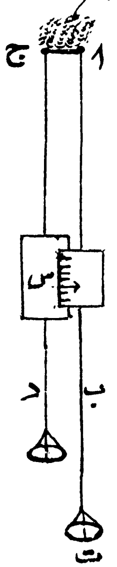
لہذا مجموعی توانائی فی اکائی حجم = $\frac{1}{2}$ ق ن + $\frac{1}{2}$ ق ن = ق ن

∴ ق ن = $\frac{1}{2}$ ت ع   مگر ہم کو معلوم ہے کہ ع = ۲ ن

∴ ق = ت

اگر د = استواری کی شرح تو د = ت/ع = ق/۲ن

ینگ کا معیار لچک حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جاتا ہے:-



شکل ۵

ا ب اور ج د دو تار ہیں جو ا اور ج پر مضبوطی کے ساتھ جما دئے گئے ہیں، س ایک کسر پیما ہے۔ پہلے دونوں پلڑوں میں جسکا وزن مساوی ہوتا ہے، مساوی بانٹ رکھ دئے جاتے ہیں پھر ت پلڑے میں اضافہ وزن ک ج رکھا جاتا ہے اور کسر پیما س کے ذریعہ تار ا ب کا اضافہ طول لَ معلوم کر لیا جاتا ہے اگر ا ب کا ابتدائی طول ل معلوم ہو اور تار کے تراش عمودی کا رقبہ ا ہو تو:-

ینگ کا معیار لچک ی = ک ج ل / ا لَ

ی کی دریافت کے دیگر طریقے آئندہ اس باب میں بیان کئے جائیں گے۔

آواز کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ر = √(ح/ثہ)

جہاں ح = واسطہ کی حجمی لچک کا معیار

ثہ = واسطہ کی کثافت

اور سا = آواز کی رفتار اس مادی واسطہ مین

اس سے ح کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

کسی گیس کے لئے نیوٹن نے بائیل کے کلیہ کی مدد سے ثابت کیا تھا کہ

ح = د یعنی دباؤ کے

لیکن لاپلاس (۳) نے بعد میں یہ ثابت کر دکھایا کہ ح = لا د

جہاں لا = $\dfrac{\text{مستقل دباؤ کے تحت حرارت نوعی}}{\text{مستقل حجم کے تحت حرارت نوعی}}$

پواساں کی نسبت :- فرض کرو کہ ایک سلاخ جس کی تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے ق قوت سے کھینچی جارہی ہے اور بڑھاؤ یا طول میں اضافہ فی اکائی طول = عہ ق ، جہاں عہ کوئی مستقل ہے

سلاخ جیسی جیسی کھنچتی جائے گی اسکے تراش عمودی کا رقبہ بھی کم ہوتا جائیگا۔

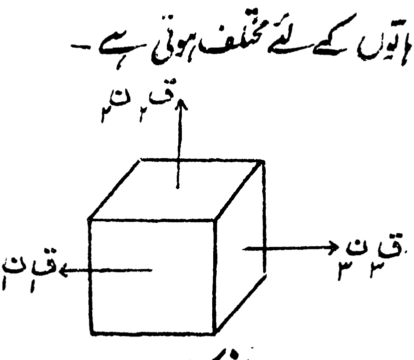
فرض کرو کہ سلاخ کی موٹائی میں فی اکائی طول کمی = بہ ق = گھٹاؤ ،

جہاں بہ کوئی مستقل ہے۔

تب $\dfrac{\text{بہ ق}}{\text{عہ ق}} = \dfrac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ ، اس نسبت کو پواسان کی نسبت سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

پواسان کی نسبت مختلف دھاتوں کے لئے مختلف ہوتی ہے۔

ایک مکعب کی شکل میں تبدیلی :- فرض کرو کہ شکل ۶ع میں جو مکعب دکھایا گیا ہے اسکے ہر ایک ضلع کا طول اکائی ہے۔



شکل ۶ع

فرض کرو کہ ق$_1$، ق$_2$، ق$_3$ قوتیں فی اکائی رقبہ مکعب کے ضلع کے دونوں جانب علی الترتیب لا، ما، یا کی سمتوں میں عمل کر رہی ہیں اور فرض کرو کہ ن$_1$، ن$_2$، ن$_3$ کھنچاؤ یا اضافہ لا، ما، یا کی سمتوں میں ہوتا ہے۔

چونکہ مکعب کا ابتدائی حجم = ۱

اور بعد میں اسی مکعب کا حجم = (۱ + ن$_1$)(۱ + ن$_2$)(۱ + ن$_3$)

= ۱ + ن$_1$ + ن$_2$ + ن$_3$ جبکہ ن$_1$، ن$_2$ اور ن$_3$ کی قیمتیں بالکل چھوٹی ہوں۔

لہذا اضافہ حجم = ن$_1$ + ن$_2$ + ن$_3$

= اضافہ طول فی اکائی طول لا کی سمت میں + اضافہ طول فی اکائی طول ما کی سمت میں + اضافہ طول فی اکائی طول یا کی سمت میں

اب اگر ق$_1$ کی سمت میں کھنچاؤ اور ق$_2$ اور ق$_3$ کی سمت میں گھٹاؤ واقع ہو

تو ن$_1$ = عہ ق$_1$ − بہ ق$_2$ − بہ ق$_3$

= عہ ق$_1$ − بہ (ق$_2$ + ق$_3$)

اور اسیطرح ن$_2$ = عہ ق$_2$ − بہ ق$_1$ − بہ ق$_3$

= عہ ق$_2$ − بہ (ق$_1$ + ق$_3$) .... (۱)

اور ن$_3$ = عہ ق$_3$ − بہ ق$_1$ − بہ ق$_2$

= عہ ق$_3$ − بہ (ق$_1$ + ق$_2$)

اگر ق$_1$ = ق$_2$ = ق$_3$ تو ن$_1$ = ن$_2$ = ن$_3$

∴ ن = عہ ق − ۲ بہ ق

کھچاؤ یا گھٹاؤ فی اکائی حجم میں اور اضافہ دباؤ فی اکائی رقبہ میں جو نسبت ہوتی ہے وہ پچکاؤ کی شرح کہلاتی ہے اور اسکے مقلوب یعنی $\frac{1}{\text{پچکاؤ کی شرح}}$

کو حجمی لچک کے معیار سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

یعنی اگر $ن_۱ = ن_۲ = ن_۳$ اور $ق_۱ = ق_۲ = ق_۳$

تو پچکاؤ کی شرح $= \dfrac{\text{کھنچاؤ یا گھٹاؤ فی اکائی حجم}}{\text{کھینچنے والا زور یا دباؤ فی اکائی رقبہ}} = \dfrac{۳ن_۱}{ق_۱}$

اسلئے، حجمی لچک کا معیار اگر ح فرض کیا جائے تو:۔

$$ح = \left[\dfrac{ق_۱}{۳ن_۱}\right] = \dfrac{ق_۱}{۳(عہ\,ق_۱ - ۲\,بہ\,ق_۱)}$$

$= \dfrac{۱}{۳(عہ - ۲\,بہ)}$ بشرطیکہ $ق_۱ = ق_۲ = ق_۳$

اور $ن_۱ = ن_۲ = ن_۳$

اب فرض کرو کہ $ق_۱ = -ق_۲$ اور $ق_۳ =$ صفر یعنی $ن_۱ = -ن_۲$ اور $ن_۳ =$ صفر

تب $ن_۱ = عہ\,ق_۱ + بہ\,ق_۱ = ق_۱(عہ + بہ)$

لیکن استواری کا معیار $= \left[\dfrac{ق_۱}{۲ن_۱}\right] =$ فرض کرو د

$$= \dfrac{ق_۱}{۲ق_۱(عہ + بہ)}$$

$= \dfrac{۱}{۲(عہ + بہ)}$ بشرطیکہ $ق_۲ = -ق_۱$ اور $ق_۳ =$ صفر

اور ینگ کا معیار لچک ی $= \dfrac{ق_۱}{ن_۱} = \dfrac{۱}{عہ}$ بشرطیکہ $ق_۲ = ق_۳ =$ صفر

ح اور د کی اوپر والی مساواتوں کی مدد سے ہم عہ اور بہ کی قیمتیں معلوم کرسکتے ہیں۔

اُن مساواتوں کو حل کرنے سے $\text{ع} = \dfrac{\text{٣ح} + \text{د}}{\text{٩ح د}}$ اور $\text{ب} = \dfrac{\text{٣ح} - \text{٢د}}{\text{١٨ ح د}}$

حاصل ہوتے ہیں۔

$\therefore \text{ی} = \dfrac{1}{\text{ع}} = \dfrac{\text{٩ح د}}{\text{٣ح} + \text{د}}$ اور پواسان کی نسبت $\dfrac{\text{ب}}{\text{ع}}$

= م فرض کرو = $\dfrac{\text{٣ح} - \text{٢د}}{\text{٢(٣ح} + \text{د)}}$ حاصل ہوگی۔

اب چونکہ $\text{ی} = \dfrac{\text{٩ح د}}{\text{٣ح} + \text{د}}$

$\therefore \text{٣ح ی} + \text{د ی} = \text{٩ح د}$

یعنی $\text{ح(٩د} - \text{٣ی)} = \text{د ی} \quad \therefore \text{ح} = \dfrac{\text{د ی}}{\text{٩د} - \text{٣ی}} = \dfrac{\text{د ی}}{\text{٣(٣د} - \text{ی)}}$

$$\therefore \text{م} = \frac{\text{٣ح} - \text{٢د}}{\text{٢(٣ح} + \text{د)}} = \frac{\left(\dfrac{\text{٣د ی}}{\text{٣(٣د} - \text{ی)}} - \text{٢د}\right)}{\text{٢}\left(\dfrac{\text{٣د ی}}{\text{٣(٣د} - \text{ی)}} + \text{د}\right)}$$

$$= \frac{\text{ی}}{\text{٢د}} - 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

پھر چونکہ $\text{م} = \dfrac{\text{٣ح} - \text{٢د}}{\text{٢(٣ح} + \text{د)}}$

اسلئے $\text{٢م(٣ح} + \text{د)} = \text{٣ح} - \text{٢د}$

یعنی $\text{٣ح(١} - \text{٢م)} = \text{٢د(م} + \text{١)}$

$\therefore$ م کی قیمت کو -1 اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان ہونا چاہیئے۔

اب شکل ۶ پر غور کرو۔ ق_1، ن_1 کے متناسب ہے اور دوسری دو سمتوں میں وہ ن_2 اور ن_3 کے متناسب ہے۔

$\therefore \text{ق}_1 = \text{ک ن}_1 + \text{گ}(\text{ن}_2 + \text{ن}_3)$

اسیطرح $ق_۲ = ک ن_۲ + گ (ن_۱ + ن_۲)$

اور $ق_۳ = ک ن_۳ + گ (ن_۱ + ن_۲)$ جہاں ک اور گ مستقل ہیں ......(۴۲)

اگر $ن_۲ = ن_۳ =$ صفر تو $\frac{ق_۱}{ن_۱} = ک = ی$

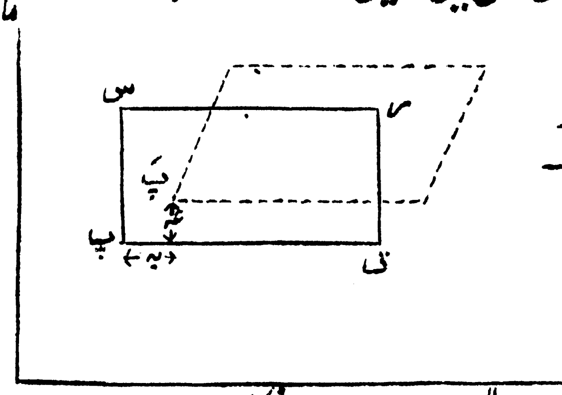
اگر $ن_۱ = ن_۲ = ن_۳$ تو $\frac{ق_۱}{۳ ن_۱} = ح = \frac{ک + ۲گ}{۳}$

اور اگر $ن_۱ = - ن_۲$ اور $ن_۳ =$ صفر تو $\frac{ق_۱}{۲ ن_۱} = د = \frac{ک - گ}{۲}$

اوپر کی آخری دو مساواتوں کو حل کرنے سے :-

$ک = ح + \frac{۴}{۳} د$ اور $گ = ح - \frac{۲}{۳} د$

ایک مستطیلی حصہ کی شکل میں تبدیلی :- فرض کرو کہ پ ق ر س سے کسی شے کے ایک چھوٹے مستطیل ٹکڑے کی تعبیر ہوتی ہے - (دیکھو شکل ۷) نقطہ پ کے محدد فرض کرو کہ لا، ما ہیں اور نقطہ ی کے (لا + ﻻ)، (ما + ما) ہیں اس صورت میں پ ق = ﻻ اور ق ر = ما



شکل ۷

فرض کرو کہ نقطہ پ کا نقل مکان، بگاڑ کی وجہ سے (عہ، بہ) ہوتا ہے

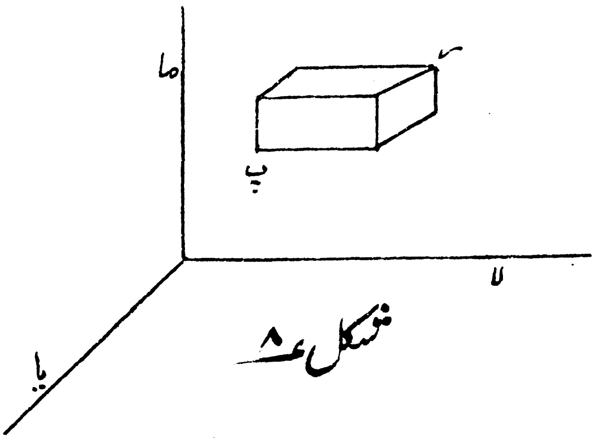
تب نقطہ ق کا نقل مکان $\left(عہ + \frac{فر عہ}{فر لا} . ﻻ\right)، \left(بہ + \frac{فر بہ}{فر لا} . ﻻ\right)$ ہوگا

اسی طرح نقطہ س کا نقل مکان $= \left(عہ + \frac{فر عہ}{فر ما} . ما\right)، \left(بہ + \frac{فر بہ}{فر ما} . ما\right)$

اور نقطہ س کا نقل مکان = (عہ + فرعہ/فزلا . لا + فربہ/فرما . ما)

(بہ + فربہ/فرما ما + فربہ/فزلا . لا)

سہ ابعادی حالت میں فرض کرو کہ س کے جدید محدّد، پ کا لحاظ کرتے لاَ، مَا، یاَ ہیں اور تینوں سمتوں میں س کا نقل مکان علی الترتیب عَہ، بَہ، جَہ ہے۔



شکل ع۸

عَہ = عہ + فرعہ/فزلا لا + فرعہ/فرما . ما + فرعہ/فریا . یا

بَہ = بہ + فربہ/فرما ما + فربہ/فزلا . لا + فربہ/فریا یا

جَہ = جہ + فرجہ/فریا . یا + فرجہ/فزلا . لا + فرجہ/فرما ما

∴ لاَ = لا + عَہ − عہ = لا (۱ + فرعہ/فزلا) + فرعہ/فرما . ما + فرعہ/فریا . یا

مَا = ما + بَہ − بہ = فربہ/فزلا . لا + ما (۱ + فربہ/فرما) + فربہ/فریا . یا

یاَ = یا + جَہ − جہ = فرجہ/فزلا . لا + فرجہ/فرما . ما + یا (۱ + فرجہ/فریا)

خالص متجانس بگاڑ اگر واقع ہو رہا ہو تو
بگاڑ کے صدر محور اسی سمت میں برقرار رہتے ہیں لہذا

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}} &= \frac{\text{فرعہ}}{\text{فریا}} = \text{صفر} \\ \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}} &= \frac{\text{فربہ}}{\text{فریا}} = \text{صفر} \\ \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرلا}} &= \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرما}} = \text{صفر} \end{aligned}\right\}$$

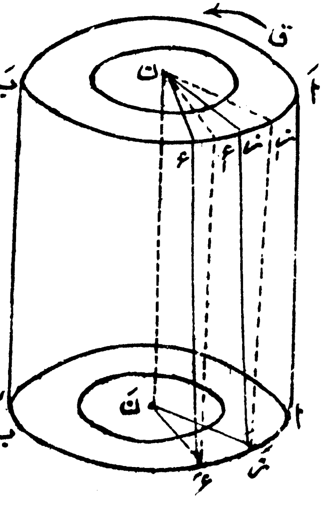
$$\therefore \acute{\text{لا}} = \text{لا}\left(1 + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}}\right) = \text{لا}\,(1 + \text{ن}_1)$$

$$\acute{\text{ما}} = \text{ما}\left(1 + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}}\right) = \text{ما}\,(1 + \text{ن}_2)$$

$$\text{اور}\ \acute{\text{یا}} = \text{یا}\left(1 + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فریا}}\right) = \text{یا}\,(1 + \text{ن}_3)$$

جہاں ن_1، ن_2، ن_3 لا، ما اور یا سمتوں میں اضافہ طول کو علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں۔

ٹھوس اسطوانہ کی مروڑ: شکل ع۹ میں ایک اسطوانہ دکھلایا گیا ہے۔



شکل ع۹

فرض کرو کہ اس اسطوانے کا طول ل اور اسکا محور ن نَ ہے، اسکی اوپر والی سطح کے کنارہ پر دو نقطے جو ایک دوسرے سے قریب ہوں ع اور ش لو، اور نچلے رخ کی سطح پر بھی دو نقطے عَ اور شَ اسی

طرح لو۔ فرض کرو کہ اسطوانہ کا نچلا حصہ ا ب مضبوطی کے ساتھ جکڑ دیا گیا ہے اور اوپر کے حصہ میں دائری وضع میں ایک جفت عمل کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ اسطوانہ مروڑ کی وجہ سے زاویہ عہ مروڑا جاتا ہے، یعنی بالفاظ دیگر، فرض کرو کہ اسطوانہ میں مروڑ = عہ

اب اس اسطوانہ کے حصہ ع ن نَ عَ پر غور کرو۔ نقاط ع ن، اب، ع۱ ن۱ پر آگئے ہیں۔

لیکن نَ عَ وہیں اپنی پہلی وضع میں قائم ہیں۔

زاویہ مروڑ عہ = $\angle$ ع ن ع۱ = $\angle$ ن ن ن۱

اور ع ع۱ = ص عہ جہاں ص = اسطوانہ کا نصف قطر

اور $\angle$ ع عَ ع۱ = $\dfrac{\text{ص عہ}}{\text{ل}}$

فرض کرو کہ مروڑی قوت = س فی اکائی رقبہ = زور

چونکہ $\dfrac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}}$ = استواری کا معیار د

$\therefore$ زور = س = د × بگاڑ = د × $\dfrac{\text{ص عہ}}{\text{ل}}$

فرض کرو کہ ع کے اطراف کے ایک چھوٹے ٹکڑے کا رقبہ = ا

لہذا مماسی قوت = $\dfrac{\text{د ص عہ}}{\text{ل}}$. ا

لہذا محور کے گرد قوتوں کا معیار اثر = $\dfrac{\text{د ص عہ}}{\text{ل}}$ ا ص = $\dfrac{\text{د عہ ا ص}^2}{\text{ل}}$

تمام چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں کے معیار اثر کا مجموعہ محور کے گرد =

= $\dfrac{\text{د عہ}}{\text{ل}} . \Sigma$ ا ص^2

لیکن Σ ا ص^2 قطبی جمود کا معیار اثر کہلاتا ہے جو فرض کرو = مج

$\therefore$ قوتوں کے اثری معیاروں کا مجموعہ = جفت = ق = $\dfrac{\text{د عہ}}{\text{ل}}$. مج

لیکن کسی اسطوانے کا مج اسکے محور کے گرد = $\dfrac{\pi \text{ ص}^4}{2}$

$\therefore$ ق = $\dfrac{\text{د عہ}}{\text{ل}} . \dfrac{\pi \text{ ص}^4}{2}$ .... (۴)

اگر ٹھوس سلاخ کی بجائے ہم ایک موٹی نلی لیں جس کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر علی الترتیب ص۱ اور ص۲ ہوں تو اس کو زاویہ عہ میں مروڑنے کے لئے جو جفت ق درکار ہوگا وہ حسب ذیل ہے :-

$$\text{ق} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \pi \left(\frac{\text{ص}_2^4 - \text{ص}_1^4}{2} \right)$$

اور اسطوانہ کو کسی زاویہ عہ میں مروڑنے کے لئے جو کام مطلوب ہوگا وہ $= \frac{1}{2}\,\text{ق} \times \text{عہ}$ اسکو ثابت کرنیکا طریقہ بالکل اسی طرح کا ہے جیسا کہ کسی تار میں بگاڑ کی صورت میں پہلے سمجھایا گیا ہے۔

لہذا کام جو کیا گیا یا ایک ٹھوس مروڑی ہوئی سلاخ کی صورت میں توانائی $= \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{د عہ}^2 \pi \text{ص}^4}{\text{ل}}$ اس ٹھوس اسطوانہ کے بجائے فرض کرو کہ ایک تار جس کا طول ل اور نصف قطر ص ہے ایک سرے پر جکڑ دیا گیا ہے اور اسکا دوسرا سرا مروڑا جا رہا ہے۔

$$\text{تب جفت} = \text{ق} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi \text{ص}^4}{2} = \text{ٹہ عہ}$$

[جہاں ٹہ = پیچیدگی کا معیار فی اکائی زاویہ]

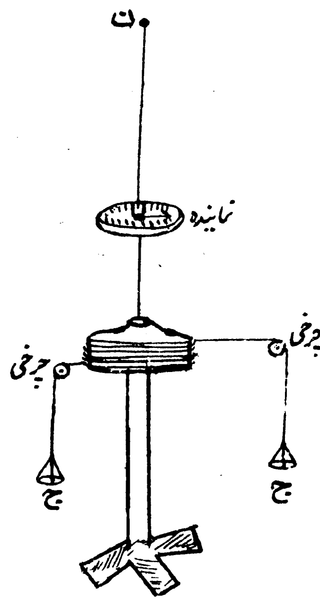
$\therefore \text{ٹہ} = \frac{\text{د}\, \pi\, \text{ص}^4}{2\,\text{ل}}$ ، اسطرح ٹہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$\text{اور د} = \frac{2\,\text{ق ل}}{\text{عہ}\, \pi\, \text{ص}^4}$$

اسکے ذریعے ہم د کی تعریف کر سکتے ہیں۔

استواری کا معیار $= \frac{2\,\text{ق}}{\text{عہ}}$ بشرطیکہ اسطوانہ کا طول اکائی اور تراش عمودی کا رقبہ بھی اکائی ہو۔

د کی دریافت کا طریقہ :- ج ج ترازو کے دو پلڑے ایک ڈوری کے ذریعہ جو ایک اسطوانہ پر لپیٹ دی



شکل ۱۰

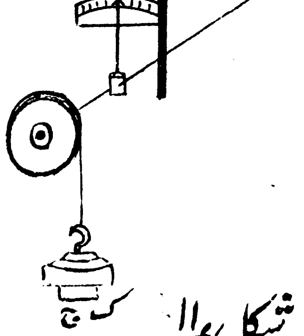
جاتی ہے (شکل ۱۰) لٹکائے جاتے ہیں۔
یہ اسطوانہ تار کے نچلے سرے پر نصب کیا
جاتا ہے۔ تار کے ایک حصہ پر نمایندہ
لگا دیا جاتا ہے جس کی مدد سے پیمانہ پر
مروڑ کا زاویہ عہ پڑھا جا سکتا ہے۔
تار کے اوپر کا سرا اس طرح جما دیا گیا
ہے کہ وہ گھوم نہ سکے۔ صرف نچلا سرا
ج ج میں وزن رکھنے سے گھوم سکتا
ہے۔ تجربہ میں دونوں پلڑوں میں مساوی
وزن ک ج رکھے جاتے ہیں اور زاویہ
عہ پڑھ لیا جاتا ہے۔

چونکہ دونوں طرف ہر ایک وزن
ک ج ہے، اسلئے جفت = ۲ ک ج ف

$$= \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^{4}}{2}$$

جہاں ف اس اسطوانہ کا نصف قطر ہے۔

د معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ:۔
ایک دائری وضع کی سلاخ کا ایک
سرا ن پر جما دیا جاتا ہے اور
دوسرا سرا۔ ایک پہیہ کے مرکز پر
قائم کیا جاتا ہے (شکل ۱۱) پہیہ
کے گرد مضبوطی کے ساتھ ایک
ڈوری ثابت کر دی جاتی ہے اور



شکل ۱۱

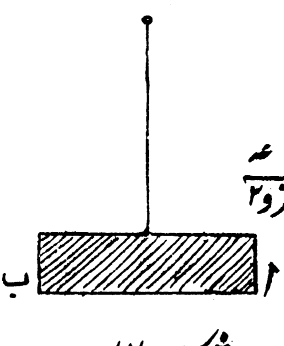
اس ڈوری کے دوسرے سرے پر وزن ک ج لٹکا کر پہیہ جو زاویہ عہ گھومتا ہے پیمانہ پر نمایندہ کے ذریعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ چونکہ یہاں صرف ایک ہی وزن ہے، اسلئے جفت = ک ج ف، جہاں ف پہیہ کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore \text{ک ج ف} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\, \text{ص}^{4}}{2}$$

اس سے د کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے۔

یادداشت:— تجربہ میں اس امر کو یاد رکھنا ضروری ہے کہ زاویہ عہ کی قیمت دائری پیمانہ میں ہوتی ہے۔ اس لئے ضروری ہے کہ اگر دائری پیمانہ میں تبدیل کرنا ہو تو درجوں کو $\frac{\pi}{180}$ سے ضرب دیا جائے۔

د معلوم کرنے کا تیسرا طریقہ:— ا ب ایک یکساں وضع کی سلاخ ہے جو ایک تار کے نچلے سرے سے آویزاں کی گئی ہے۔ دیکھو شکل ۱۲ تار کا اوپر کا سرا ثابت کر دیا جاتا ہے اور نچلا سرا سلاخ کے بیچ حصہ سے جوڑ دیا گیا ہے۔ اگر سلاخ کو دائری وضع میں اہتزاز میں لایا جائے اور اس کا وقت دوران دریافت کر لیا جائے تو تار کی استواری کا معیار دریافت کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۱۲

فرض کرو کہ کسی آن میں ا ب اپنی پہلی وضع سے زاویہ عہ گھومتا ہے۔

$$\text{تو جفت} = \text{مج}\, \frac{\text{فر}^{2}\, \text{عہ}}{\text{فرو}^{2}} = \text{ک ف}^{2}\, \frac{\text{فر}^{2}\, \text{عہ}}{\text{فرو}^{2}}$$

$$= \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\, \text{ص}^{4}}{2}$$ جہاں

ف = سلاخ کا گردشی نصف قطر اور ک

= سلاخ کی کمیت

$$\therefore \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر}\,\text{و}^2} = \frac{\text{د}\,\text{عہ}}{\text{ل}\,\text{ک}\,\text{ف}^2} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$

(سلاخ کے بجائے ایک قرص بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ قرص کو دائری وضع میں اہتزاز کرنے دو۔ قرص کا مج اس کے مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد = $\frac{\text{م}\,\text{ص}^2}{2}$ جہاں م = کمیت اور ص = نصف قطر)

چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت ہے لہذا وقت دوران

$$\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,\text{ک}\,\text{ل}\,\text{ت}^2}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

اس سے د کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

اگر سلاخ اسطوانی وضع کی ہو تو ک ف² = مج

$= \text{ک}\left(\frac{\text{ل}_1^2}{12} + \frac{\text{ص}_1^2}{4}\right)$ جہاں ص_1 = سلاخ کا نصف قطر

اور ل_1 = سلاخ کا طول

اگر سلاخ مستطیلی شکل کی ہو تو

$\text{مج} = \text{ک}\,\frac{(\text{ل}_1^2 + \text{ل}_2^2)}{12}$ جہاں ل_1 = اس سلاخ کا طول

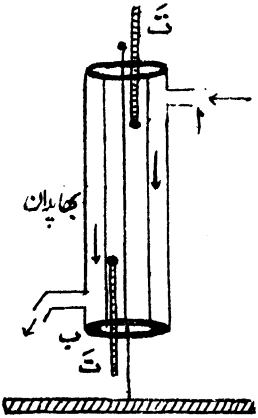
اور ل_2 = " " عرض

ی، د اور ح میں تپش کی تبدیلی کی وجہ سے اچھی خاصی تبدیلی ہو جاتی ہے۔ اس دوران تجربہ میں تپش کا مستقل رکھنا ضروری ہے۔ ی اور د میں گھٹاؤ، اضافۂ تپش کی وجہ سے ہوتا ہے۔ د میں تپش کے لحاظ سے جو تبدیلی ہوتی ہے وہ حسبِ ذیل مساوات سے ظاہر ہے

$\text{د}_{\text{ت}} = \text{د}_0(1 - \text{عہ}\,\text{ت})$ جہاں $\text{د}_{\text{ت}}$ = استواری کا معیار ت° مئی پر اور د_0 = استواری کا معیار صفر درجہ مئی پر

عہ = استواری کے معیار کی تپش کی قدر

عہ کی قیمت معلوم کرنا ہو تو $و_{ت_1}$ کی
قیمت تپش $ت_1$ پر اور $و_{ت_2}$ کی قیمت تپش $ت_2$
پر معلوم کی جاتی ہے۔ شکل نمبر ۱۳ میں ا ب
ایک نلی ہے جسکے درمیان سے تار گزرتا ہے،
ا میں سے بھاپ داخل ہوتی ہے اور
ب سے باہر نکل جاتی ہے۔ تَ اور تَ
دو تپش پیما ہیں جن کے مدد سے تار کی اوسط
تپش معلوم کی جاسکتی ہے۔



شکل ۱۳

$و^2_{ت_1} = \frac{ن}{د_{ت_1}}$ جہاں ن مستقل ہے
جو کہ مساوی ہے $\frac{8\pi ک^2 ل ف^2}{\pi ص^4}$

اور $و^2_{ت_2} = \frac{ن}{د_{ت_2}}$

$$\therefore \frac{د_{ت_1}}{د_{ت_2}} = \frac{و^2_{ت_2}}{و^2_{ت_1}} = \left\{1 - عہ(ت_1 - ت_2)\right\}$$

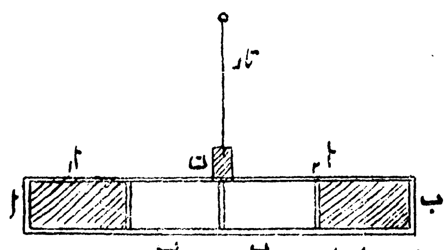
$$\therefore عہ = \frac{\left(1 - \frac{و^2_{ت_2}}{و^2_{ت_1}}\right)}{(ت_1 - ت_2)}$$

اوپر جو استواری کی دریافت کے طریقے بیان کئے گئے ہیں ان میں یہ اعتراض ہوسکتا ہے کہ چونکہ ص کی قوت چار ہے اس لئے اسکی دریافت میں ذرا سی بھی غلطی د کی صحیح قیمت میں بہت بڑے فرق کا باعث ہو جاتی ہے۔ جب تک اس سلاخ کا مادہ جو تجربہ میں استعمال کی جاتی ہے متجانس نہ ہو، د کی قیمت حاصل کرنے کے لئے ضابطہ کا استعمال صحیح

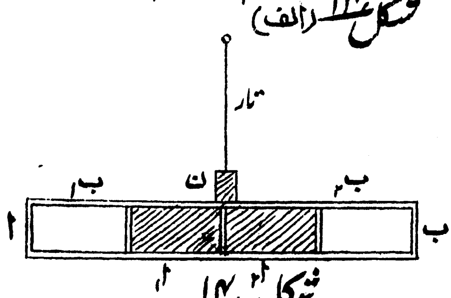
نہیں ہوگا۔ عملاً، سلاخ متجانس نہیں ہوتی۔

نِکل کے لئے، ینگ کے معیار لچک کی تپشی قدر کو پروفیسر ہیریسن نے دریافت کیا۔ اس نے نِکل کے تار کو برقی طریقے سے گرم کرکے تپش کو تار کی مزاحمت کی رقوم میں، کیلنڈر اور گریفتھ کے پل سے معلوم کیا۔ تپش کو مستقل رکھ کر تناؤ تار میں پیدا کیا گیا اور طول میں اضافہ ناپ لیا گیا۔ ۴۰۰ مئی کی تپش تک اس نے تجربہ کیا اور اس کے بعد اس نے ایک منحنی کھینچا جس میں ینگ کے معیار لچک اور تپش کا تعلق بتایا گیا تھا۔ اس منحنی سے یہ نتیجہ نکلا کہ تپش کے اضافہ سے ینگ کے معیار لچک میں کمی واقع ہوتی ہے۔

میکسول کی سوئی :- شکل ۱۴ میں ا ب ایک کھوکھلی اسطوانہ نما سلاخ ہے جسکا طول فرض کرو ط کے مساوی ہے، اسکا اصول وہی ہے جو پہلے بیان ہو چکا ہے۔ اگر اس کھوکھلی سلاخ ا ب کے جمود کا معیار اثر صحیح طور پر دریافت کر لیا جائے تو وقت دوران معلوم ہوسکتا ہے اور آسانی کے ساتھ د یعنی استواری کا معیار دریافت کیا جاسکتا ہے، لیکن پیچوں، آئینہ وغیرہ کی موجودگی سے جسکو شکل میں ن سے ظاہر کیا گیا ہے کھوکھلے استوانہ کا صحیح جمود کا معیار اثر نہیں معلوم ہوسکتا بلکہ اسکی قیمت کچھ بڑھ جاتی ہے



شکل ۱۴ (الف)



شکل ۱۴ (ب)

جس کی وجہ سے تجربہ میں خطا عائد ہوتی ہے۔

میکسول نے ن کی وجہ سے جو خطا ہوتی ہے اس کی صحت کے لئے کھوکھلے اسطوانہ ا ب کے جمود کے معیار اثر کو حسب ذیل تفریق کے عمل سے ساقط کر دیا۔ اگر ن کا صحیح جمود کا معیار اثر ہم کو معلوم ہو جائے تو پھر ا ب کے جمود کے معیار اثر کو ساقط کرنے کی ضرورت نہیں رہتی۔

شکل میں ا۱، ا۲ پیتل کے دو ٹھوس اسطوانے اور ب۱، ب۲ پیتل کے دو کھوکھلے استوانے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کا طول = ط/۴ اور یہ اسطوانہ ا ب میں آسانی کیساتھ ٹھیک بٹھائے جا سکتے ہیں۔

تجربہ میں شکل ۱۴ (الف) کی طرح ٹھوس اسطوانے ا۱ ا۲ کو ا ب کے بیرونی حصہ میں رکھا جاتا ہے۔ اور ب۱، ب۲ کو اندرونی حصہ میں۔ اس کے بعد ا ب کو اہتزاز میں لاکر ن سے منعکس شعاع اور دوربین وغیرہ کی مدد سے وقت دوران و۱ دریافت کر لیا جاتا ہے اور پھر کھوکھلے اسطوانہ ب۱ ب۲ کو ا ب کے بیرونی حصہ میں اور ا۱ ا۲ کو اندرونی حصہ میں (جیسا کہ شکل ۱۴ (ب) میں دکھلایا گیا ہے) رکھ کر اس صورت میں وقت دوران و۲ معلوم کر لیا جاتا ہے۔ ا۱ یا ا۲ کی کمیت ک۱ معلوم کر لی جاتی ہے اور اسی طرح کھوکھلے اسطوانہ ب۱ یا ب۲ کی کمیت ک۲ بھی دریافت کر لی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ کھوکھلے اسطوانہ ا ب کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد جو تار کا خود محور ہے = مج اور ا۱ یا ا۲ کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزر رہا ہو اور تار کے محور کے متوازی ہو = مج۱ اور ب۱ یا ب۲ کے جمود کا معیار اثر اسی طرح کے محور کے گرد = مج۲

لہذا متوازی محوروں کے اصول سے اگر شکل ۱۴ (الف) کی طرح ا۱ اور ا۲

ہوں تو ا_1 یا ا_2 کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد فرض کرو = $\bar{\text{مج}}_1$

$$= \text{مج}_1 + \text{ک}_1 \left(\frac{\text{ط}}{4} + \frac{\text{ط}}{8}\right)^2$$

$$= \text{مج}_1 + \text{ک}_1 \left(\frac{3\text{ط}}{8}\right)^2$$

∴ ا_1 اور ا_2 دونوں اسطوانوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

$$= 2\,\bar{\text{مج}}_1 = 2\,\text{مج}_1 + 2\,\text{ک}_1 \left(\frac{3\text{ط}}{8}\right)^2$$

اور اسی شکل ۱۴ (الف) میں متوازی محوروں کے اصول سے ب_1 یا ب_2 کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $\bar{\text{مج}}_2$ فرض کرو

$$= \text{مج}_2 + \text{ک}_2 \left(\frac{\text{ط}}{8}\right)^2$$

∴ ب_1 اور ب_2 دونوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $2\,\bar{\text{مج}}_2$

$$= 2\,\text{مج}_2 + 2\,\text{ک}_2 \left(\frac{\text{ط}}{8}\right)^2$$

شکل ۱۴ (الف) کی وضع کے لئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $\bar{\text{مج}}$

$$\text{تو}\ \bar{\text{مج}} = \underline{\text{مج}} + 2\,\bar{\text{مج}}_1 + 2\,\bar{\text{مج}}_2 = \text{مج} + 2\,\text{مج}_1 + 2\,\text{ک}_1 \left(\frac{3\text{ط}}{8}\right)^2 + 2\,\text{مج}_2 + 2\,\text{ک}_2 \left(\frac{\text{ط}}{8}\right)^2 + \underline{\text{مج}} \quad \ldots\ldots (6)$$

جہاں $\underline{\text{مج}}$ = فرض کرون کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

اور اس صورت میں وقت دوران $\text{و}_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{\text{مج}}}{\text{ثہ}}} \quad \ldots\ldots (7)$

جہاں ثہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

اب شکل ۱۴ (ب) پر غور کرو

اس صورت میں بھی متوازی محوروں کے اصول سے ا_1 یا ا_2 کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\bar{\text{مج}}_1$

$$= \text{مج}_1 + \text{ک}_1 \left(\frac{\text{ط}}{8}\right)^2$$

∴ دونوں اسطوانوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= ۲\,\underline{\text{مج}}_{۱}$

$$= ۲\,\text{مج}_{۱} + ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

اسی طرح، متوازی محوروں کے اصول سے اُسی شکل میں $\text{ب}_{۱}$ یا $\text{ب}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\underline{\text{مج}}_{۲}$

$$= \text{مج}_{۲} + \text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۴} + \frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} = \text{مج}_{۲} + \text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

∴ دونوں اسطوانوں $\text{ب}_{۱}$، $\text{ب}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

$$= ۲\,\underline{\text{مج}}_{۲} = ۲\,\text{مج}_{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

∴ شکل ع۱۴ (ب) کی وضع کیلئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= \text{مج}''$

$$\text{تو}\ \text{مج}'' = \text{مج} + ۲\,\underline{\text{مج}}_{۱} + ۲\,\underline{\text{مج}}_{۲} + \underline{\text{مج}}$$

$$= \text{مج} + ۲\,\text{مج}_{۱} + ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + ۲\,\text{مج}_{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + \underline{\text{مج}} \quad \text{......(۸)}$$

اور اس صورت میں وقت دوران $\text{و}_{۲} = ۲\,\pi\sqrt{\frac{\text{مج}''}{\text{ط}}}$ ......(۹)

اوپر کی مساوات (۸) کو مساوات (۶) میں سے تفریق کرنے سے:-

$$\text{مج}' - \text{مج}'' = ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} =$$

$$= ۲\,\text{ک}_{۱}\left\{\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - \left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲}\right\} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left\{\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - \left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}\right\}$$

$$= ۲\,\text{ک}_{۱}\cdot\frac{\text{ط}^{۲}}{۸} - ۲\,\text{ک}_{۲}\cdot\frac{\text{ط}^{۲}}{۸} = \frac{\text{ط}^{۲}}{۴}\cdot(\text{ک}_{۱} - \text{ک}_{۲}) \quad \text{......(۱۰)}$$

اب چونکہ ہمکو $ک_1$، $ک_2$ اور ط معلوم ہیں اسلئے $مج' - مج''$ معلوم ہوسکتا ہے۔

مساوات (۷) اور (۹) کو مربع کرنیکے بعد تفریق کرنے سے :-

$$و_1^2 - و_2^2 = \frac{4\pi^2}{ٹہ}\left(مج' - مج''\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

مساوات (۱۱) سے چونکہ اب $مج' - مج''$ کی قیمت معلوم ہے اس لئے ٹہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{یعنی}\ ٹہ = \frac{4\pi^2}{و_1^2 - و_2^2}\left\{\frac{ط^2}{4}\left(ک_1 - ک_2\right)\right\}$$

$$\text{اور چونکہ جفت جو عمل کر رہا ہے وہ} = \frac{د\,عہ}{ل} \times \frac{\pi\,ص^4}{2} = ٹہ\,عہ$$

$$\therefore د = \frac{2\,ل\,ٹہ}{\pi\,ص^4} = \frac{2\,ل}{\pi\,ص^4} \times \frac{4\pi^2}{و_1^2 - و_2^2}\left\{\frac{ط^2}{4}\left(ک_1 - ک_2\right)\right\}$$

$$= \frac{2\,ل\,\pi}{ص^4\left(و_1^2 - و_2^2\right)}\left\{ط^2\left(ک_1 - ک_2\right)\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

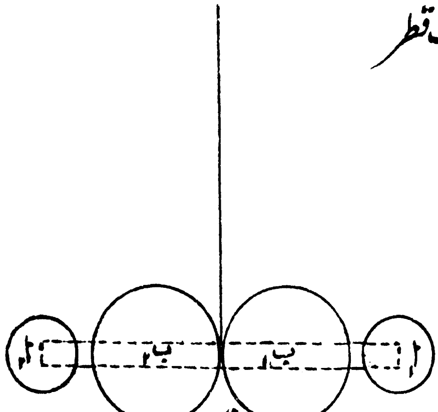
مثال :- ایک اسطوانہ نما لمبی سلاخ جسکا طول ط ہے وسطی نقطہ سے ایک تار کے ذریعے لٹکائی گئی ہے اور یہ $ا_1$، $ا_2$، $ب_1$، $ب_2$ چار پیتلی ٹھوس کروں کے مرکزوں سے مس کرتی ہوئی گزرتی ہے - $ا_1$ اور $ا_2$ بالکل مساوی جسامت کے ہیں اور ہر ایک کا نصف قطر $ص_1$ اور کمیت $ک_1$ ہے، اور اسی طرح $ب_1$ اور $ب_2$ مساوی ہیں اور ان میں سے ہر ایک کا نصف قطر $ص_2$ اور کمیت $ک_2$ ہے۔ مروڑ کے تحت سلاخ کا وقت دوران $و_1$ ہوتا ہے جبکہ $ا_1$ اور $ا_2$ میں سے سلاخ کو گزار کر اس کے وسطی حصہ میں (مس کرتے ہوئے) اور $ب_1$ اور $ب_2$ کے مرکزوں کو

سلاخ کے سروں پر رکھا جاتا ہے۔ اگر وسطی کروں کے محل سروں کے کروں سے باہم بدل دیئے جائیں تو سلاخ کا وقت دوران و_2 ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس تار کے مادہ کا استواری کا معیار =

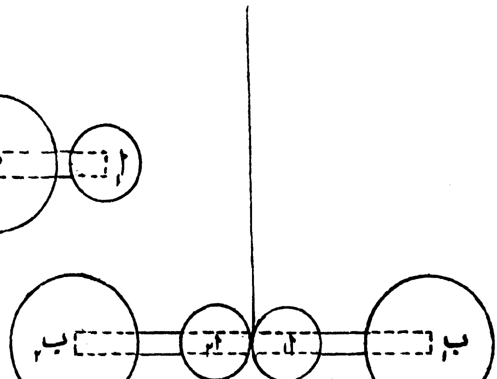
$$= \frac{16\,\pi\,\text{ل}\left\{\text{ک}_1\left(\text{ص}_1^2 - \frac{\text{ط}^2}{4}\right) + \text{ک}_2\left(\frac{\text{ط}^2}{4} - \text{ص}_2^2\right)\right\}}{\text{ص}^4\left(\text{و}_1^2 - \text{و}_2^2\right)}$$

جہاں ص = تار کا نصف قطر

ل = تار کا طول



شکل ۱۵



شکل ۱۶

حل :- فرض کرو کہ سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو خود تار کا محور ہے = مج

اور ا_1 یا ا_2 کرہ کا اسکے ایسے محور کے گرد جمود کا معیار اثر جو کرہ کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہو اور تار کے محور کے متوازی ہو فرض کرو = مج_1

نیز یہ بھی فرض کرو کہ ب_1 یا ب_2 کے جمود کا معیار اثر اس کے ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہو اور تار کے محور

کے متوازی ہو = $\text{مج}_{۲}$

شکل ۱۵ میں جبکہ وقت دوران $\text{و}_{۱}$ ہو تو $\text{ا}_{۱}$ یا $\text{ا}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد متوازی محوروں کے اصول سے = فرض کرو

$$\overline{\text{مج}}_{۱} = \text{مج}_{۱} + \text{ک}_{۱}\,\text{ص}_{۱}^{۲}$$

اور اسی طرح $\text{ا}_{۱}$ اور $\text{ا}_{۲}$ دونوں کروں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $۲\,\text{مج}_{۱} + ۲\,\text{ک}_{۱}\,\text{ص}_{۱}^{۲}$

اور اسی شکل میں متوازی محوروں کے اصول سے $\text{ب}_{۱}$ یا $\text{ب}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = (فرض کرو) $\overline{\text{مج}}_{۲} = \text{مج}_{۲} + \text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۲}\right)^{۲}$

$\therefore$ $\text{ب}_{۱}$ اور $\text{ب}_{۲}$ دونوں کے جمود کا معیار اثر = $۲\,\overline{\text{مج}}_{۲}$ = $۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۲}\right)^{۲} + ۲\,\text{مج}_{۲}$

شکل ۱۵ میں اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = مجَ تو $\text{مجَ} = \text{مج} + ۲\,\overline{\text{مج}}_{۱} + ۲\,\overline{\text{مج}}_{۲} + \underline{\text{مج}}$ [جہاں $\underline{\text{مج}}$ = پیچوں وغیرہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد]

$$= \text{مج} + ۲\,\text{مج}_{۱} + ۲\,\text{ک}_{۱}\,\text{ص}_{۱}^{۲} + ۲\,\text{مج}_{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۲}\right)^{۲} + \underline{\text{مج}} \quad \text{.........} \quad (۱۳)$$

اور اس صورت میں

وقت دوران $\text{و}_{۱} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{مجَ}}{\text{طہ}}}$ .... (۱۴)

اب شکل ۱۶ پر غور کرو:-

اس صورت میں بھی متوازی محوروں کے اصول سے $\text{ا}_{۱}$ یا $\text{ا}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\underline{\text{مج}}_{۱} = \text{مج}_{۱} + \text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۲}\right)^{۲}$

∴ دونوں کروں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = ۲ مجَ۱

$$= \text{۲ مج}_{\text{۱}} + \text{۲ ک}_{\text{۱}} \left(\frac{\text{ط}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}}$$

اسی طرح متوازی محوروں کے اصول سے ب۱ یا ب۲ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\text{مجَ}_{\text{۲}} = \text{مج}_{\text{۲}} + \text{ک}_{\text{۲}} (\text{ص}_{\text{۲}})^{\text{۲}}$

∴ دونوں ب۱ اور ب۲ کے جمود کا معیار اثر = ۲ مجَ۲

$$= \text{۲ مج}_{\text{۲}} + \text{۲ک}_{\text{۲}} \cdot \text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۲}}$$

شکل ع۱۶ کے لئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = مجً

تو $\text{مجً} = \text{مج} + \text{۲ مجَ}_{\text{۱}} + \text{۲ مجَ}_{\text{۲}} + \text{مجِ}$

$$\text{لہذا مجً} = \text{مج} + \text{۲ مج}_{\text{۱}} + \text{۲ک}_{\text{۱}} \left(\frac{\text{ط}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}} + \text{۲ مج}_{\text{۲}} + \text{۲ک}_{\text{۲}} \text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۲}} + \text{مجِ} \quad \text{......(۱۵)}$$

$$\text{اور اس صورت میں وقت دوران } \text{و}_{\text{۲}} = \text{۲}\pi \sqrt{\frac{\text{مجً}}{\text{طہ}}} \quad \text{......(۱۶)}$$

اوپر کی مساوات (۱۵) کو (۱۳) میں سے تفریق کرنے سے:—

$$\text{مجَ} - \text{مجً} = \text{۲ک}_{\text{۱}}\text{ص}_{\text{۱}}^{\text{۲}} + \text{۲ک}_{\text{۲}}\left(\frac{\text{ط}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}} - \text{۲ک}_{\text{۱}}\left(\frac{\text{ط}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}} - \text{۲ک}_{\text{۲}}\text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۲}}$$

$$= \text{۲ک}_{\text{۱}}\left(\text{ص}_{\text{۱}}^{\text{۲}} - \frac{\text{ط}^{\text{۲}}}{\text{۴}}\right) + \text{۲ک}_{\text{۲}}\left(\frac{\text{ط}^{\text{۲}}}{\text{۴}} - \text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۲}}\right) \quad \text{......(۱۷)}$$

اب چونکہ ص۱، ص۲، ک۱، ک۲ اور ط کی قیمتیں معلوم ہیں لہذا مجَ ـ مجً کی قیمت معلوم ہوسکتی ہے۔ اوپر کی مساواتوں (۱۴) اور (۱۶) کو مربع کرنے کے بعد اگر تفریق کریں تو:—

$$\text{و}_{\text{۱}}^{\text{۲}} - \text{و}_{\text{۲}}^{\text{۲}} = \frac{\text{۴}\pi^{\text{۲}}}{\text{طہ}} (\text{مجَ} - \text{مجً}) \quad \text{......(۱۸)}$$

مساوات (۱۸) میں چونکہ (مجَ ـ مجً) کی قیمت معلوم ہے اور و۱

اور $\text{و}_٢$ بھی معلوم ہیں اس لئے ٹہ معلوم ہو جاتا ہے۔
اب تار پر جو جفت عمل کر رہا ہے وہ

$$=\frac{\text{د عہ}}{\text{ل}}\times\frac{\pi\,\text{ص}^٤}{٢}=\text{ٹہ عہ}\quad \text{جہاں عہ = زاویہ انصراف}$$

$$\therefore\ \text{د}=\frac{٢\,\text{ل ٹہ}}{\pi\,\text{ص}^٤}=$$

$$=\frac{٢\text{ل}}{\pi\,\text{ص}^٤}\left\{\frac{٤\,\text{ہ}\,\pi^٢}{\text{و}_١^٢-\text{و}_٢^٢}\left(\text{مَج}-\text{مجؔ}\right)\right\}$$

$$=\frac{٨\,\text{ل}\,\pi}{\text{ص}^٤\left(\text{و}_١^٢-\text{و}_٢^٢\right)}\left\{٢\text{ک}_١\left(\text{ص}_١^٢-\frac{\text{ط}^٢}{٤}\right)+٢\text{ک}_٢\left(\frac{\text{ط}^٢}{٤}-\text{ص}_٢^٢\right)\right\}$$

$$=\frac{١٦\,\text{ل}\,\pi}{\text{ص}^٤\left(\text{و}_١^٢-\text{و}_٢^٢\right)}\left\{\text{ک}_١\left(\text{ص}_١^٢-\frac{\text{ط}^٢}{٤}\right)+\text{ک}_٢\left(\frac{\text{ط}^٢}{٤}-\text{ص}_٢^٢\right)\right\}$$

ہندی ربر کے لئے پواساں کی نسبت دریافت کرنیکا طریقہ:۔

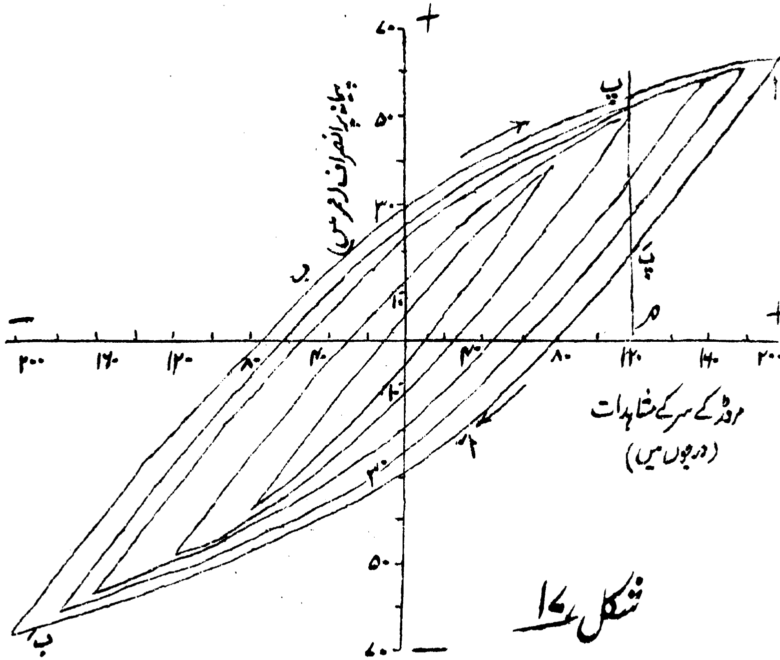
ایک گول تراش والے لمبے ٹھوس ہندی ربر کے ٹکڑے کو جس کا قطر تقریباً نصف انچ ہوتا ہے ایک سرے سے باندھ کر لٹکایا جاتا ہے اور اس کے دوسرے سرے پر ایک پلڑے میں بوجھ رکھا جاتا ہے۔ ربر کی طولی سمت میں تقریباً دس مقامات پر نشانات بنائے جاتے ہیں اور ان مقامات پر خردہ پیما پیچ سے ربر کا قطر ہر بوجھ کے لئے جو پلڑے میں رکھا جاتا ہے، ناپ لیا جاتا ہے۔ متحرک خوردبین کی مدد سے ربر کا طول بھی ہر بوجھ کے لئے معلوم کر لیا جاتا ہے۔ اس طرح ہر وزن کے لئے عرضی سکڑاؤ اور طولی اضافہ کی قیمتیں علی الترتیب معلوم کر لی جاتی ہیں۔ عرضی سکڑاؤ کی صورت میں ہر وزن یا بوجھ کے تناظر تقریباً دس پیمائشوں کی اوسط قیمت لی جاتی ہے۔

$$\text{پواسان کی نسبت مہ} = \frac{\dfrac{\text{عرضی سکڑاؤ}}{\text{ابتدائی قطر}}}{\dfrac{\text{طولی اضافہ}}{\text{ابتدائی طول}}}$$

اس طرح ہر بوجھ کے لئے مہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے - تمام مشاہدات کو، بوجھ کے ترتیب دینے کے پانچ یا دس منٹ بعد پڑھنا مناسب ہوتا ہے - مہ کی قیمت ربر کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے اور نیز کسی ایک بوجھ کے اضافہ کرنے کی صورت میں جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ اسی بوجھ کے کمی کرنے کی قیمتوں سے، کسی قدر مختلف ہوتی ہیں-

مروڑی اختناق :- اگر کوئی تانبے کا تار اس طرح مروڑا جائے کہ مروڑ کا جفت بتدریج بڑھنے لگے تو یہ ثابت ہوا ہے کہ جفت کی قیمت پہلے تو مروڑ کے متناسب، اور ہوک کے کلیہ کے تابع رہتی ہے لیکن جوں جوں زاویہ مروڑ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے، مروڑ کا جفت، مروڑ کی بہ نسبت کم ہونے لگتا ہے، اب اگر کسی وقت میں، مروڑ کے جفت کی سمت، کو الٹا دیا جائے تو کسی دئے ہوئے زاویہ کے لئے، الٹی سمت میں مروڑ کا جفت، ابتدائی سمت کے مروڑ کے جفت سے ہمیشہ کم ہوتا ہے (شکل ۱۷ میں پَ مَ، پ م سے چھوٹا ہے) لہذا تار کو کسی دئے ہوئے زاویہ میں مروڑے جانے کے لئے جو کام کرنا پڑتا ہے وہ زیادہ ہے بہ نسبت اس کام کے جو کہ تار الٹا مروڑے جاتے ہوئے کر سکتا ہے- اس خاصیت کو "مروڑ کے اختناق" سے تعبیر کیا جاتا ہے کسی بے مروڑے ہوئے تار کو لو اور فرض کرو کہ اولاً وہ ایک زاویہ + طہ درجے کسی سمت میں مروڑا جاتا ہے -پھر اس کو الٹا اتنا مروڑو

کہ وہ ایک زاویہ - طہ درجے بنائے اور اس کے بعد پھر پہلی سمت



شکل ۱۷

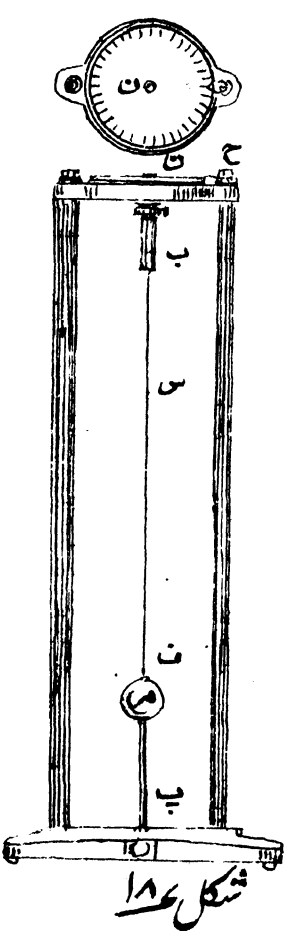
میں مروڑ کر زاویہ + طہ تک لے آؤ۔ تجربہ سے یہ ثابت ہوا ہے کہ مروڑ کا جفت، جبکہ دوسری مرتبہ تار + طہ زاویہ بناتا ہے، پہلی دفعہ کے + طہ زاویئے کے مروڑ کی جفت سے مختلف ہوتا ہے۔ لیکن اگر تار کو + طہ اور - طہ کی حد تک مروڑا جائے تو یہ ایک دور ہوگا اور متعدد دور اس طرح مکمل کئے جائیں کہ ہر دور ٹھیک یکساں طریقہ اور بالکل ایک ہی وقت کے وقفوں میں مکمل ہو جائے تو یہ دریافت کیا گیا ہے کہ تار ایک مستقل دَوری حرکت کرنے لگتا ہے جس میں + طہ اور - طہ کے تناظر جفتوں کی خاص خاص قیمتیں ہوتی ہیں اور کسی درمیانی زاویہ طہ کے لئے جفت کی دو قیمتیں ہوتی ہیں، ایک قیمت تار کے - طہ سے + طہ

تک مروڑے جانے کے اور دوسری + طہ سے - طہ تک مروڑے جانے کے متناظر ہوتی ہے - اس دَوری حالت کو شکل ۱۷ میں واضح طور پر دکھلایا گیا ہے -

تار کو ایک مکمل دَور تک مروڑنے میں جو کام کیا جاتا ہے اسکی تخمین :-

فرض کرو کہ طہ نیم قطریوں کے مروڑ کے متناظر جو جفت عمل کرتا ہے اسکی قیمت ق ڈائین سمر ہے -

تب اگر مروڑ کی قیمت میں فرطہ کا اضافہ ہوتا ہو تو جفت جو کام کرتا ہے وہ ق فرطہ کے مساوی ہوگا -



شکل ۱۸

لہذا تار پر ایک مکمل دور میں جو کام ہوا

وہ = ∫ق . ذطہ

= کسی بند حلقہ کے رقبہ کے، جس کی تعبیر ا ب بَ اَ سے ہوگی -

ہم اگر اس حلقہ کو عہ نیم قطریان فی سمر کے پیمانہ سے مروڑ کے لیئے، اور بہ ڈائین سمر فی سمر کے پیمانہ سے جفت کیلئے مرتسم کریں تو تار پر جو کام کیا جاتا ہے وہ

= عہ . بہ . ا ارگ کے، جہاں

ا بند حلقے کے رقبہ کے مساوی ہے -

عملی تفصیلات :- شکل ۱۸ میں جو آلہ دکھلایا گیا ہے وہ دو تاروں پر مشتمل ہے جس میں سے س تانبے کی ہے اور یہی زیر تجربہ ہے اور دوسری پ پیتل کی ہے جس کے تراش عمودی

کا رقبہ س سے زیادہ اور طول س سے کم ہے اور اسکے لچک کے خواص پہلے سے ہی ایک تجربہ کی مدد سے دریافت کر لئے گئے ہیں۔ دونوں تاروں کو ایک دھاتی کندہ ف میں مضبوطی سے ملاکر جما دیا جاتا ہے۔ تانبے کے تار کا دوسرا سرا مضبوطی کے ساتھ ایک درجہ دار مروڑ کے راس کے ساتھ باندھ دیا جاتا ہے جس پر مروڑ کا زاویہ پڑھا جا سکتا ہے۔ پیتل کی تار کا سرا آلہ کے قاعدے سے باندھ دیا جاتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ کوئی جفت اگر تانبے کے تار پر لچک کی حد سے بڑھ کر عمل کرنا چاہے، تو پیتل کے تار کی مزاحمت کی باعث، ایسا نہیں کر سکتا۔ لہذا، ف جو زاویہ گھومتا ہے اس کو اگر معلوم کر لیا جائے تو مروڑ کا جفت جو پیتل کے تار پر عمل کرتا ہے دریافت کیا جا سکتا ہے، اور اس سے تانبے کے تار پر عمل کرنے والا جفت معلوم ہو سکتا ہے۔ کندہ ف کے ساتھ ایک آئینہ ھر لگا دیا جاتا ہے۔ اس سے اور ایک لیمپ اور پیمانہ کی مدد سے، ف جو زاویہ گھومتا ہے اسکو پڑھا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ = عہ نیم قطری جبکہ پیمانہ پر انصراف لا سمر ہوتا ہے۔ تب چونکہ

مس ۲ عہ = $\frac{\text{لا}}{\text{ث}}$، عہ = $\frac{\text{لا}}{\text{۲ث}}$ نیم قطریوں کے، جہاں ث آئینہ سے پیمانہ کا فاصلہ ہے۔

$$\text{لہذا پیتل کی تار پر جفت} = \text{ق} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^{۴}}{۲}$$

$$= \frac{\pi\,\text{د ص}^{۴}\,\text{لا}}{\text{۴ ث ل}} \quad \cdots\cdots \quad (۱۹)$$

جہاں د = پیتل کی تار کے مروڑ کا معیار

ص = " " " کا نصف قطر

ل = " " " کا طول

لہذا تانبے کی تار پر عمل کرنے والا جفت معلوم ہو سکتا ہے۔

د کی دریافت:- تقریباً پچاس سمر طول کا ایک علیحدہ تار لے کر اجوب

کے نمونہ ہی کا ہونا چاہیئے) اسکے ایک سرے کو مضبوطی سے اس طرح باندھو کہ وہ انتصاباً لٹکنے لگے۔ تار کے دوسرے سرے سے ایک جمودی سلاخ کو باندھ کر تار کی مروڑ کے تحت اس سلاخ کو اہتزاز کرنے دو

اگر و = وقت دوران

مج = سلاخ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

لَ = اس علیحدہ تار کا طول

$$\text{تو}\quad و = ۲\pi\sqrt{\frac{۲\,لَ\,مج}{\pi\,د\,ص^{۴}}}$$

مساوات (۱۹) میں د کی قیمت لکھنے سے

$$ق = \frac{۲\,\pi^{۲}\,لَ\,مج\,لا}{ل\,ث\,و^{۲}} \quad \text{.......}\quad (۲۰)$$

اس ضابطہ سے تانبہ کی تار پر عمل کرنے والے جفت اور پیمانہ پر نقطہ نور کے انصراف کے درمیان تعلق معلوم ہو جاتا ہے۔

اور اس طرح ق کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

اس تجربہ میں دو مشاہد ملکر کام کرتے ہیں۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ایک ہی وقت میں، مروڑ کے راس کے اور نور کے نقطہ کے مشاہدات لینے ہوتے ہیں۔ آلہ کو اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ تاروں میں ابتدا میں بگاڑ نہیں ہوتا اور مروڑ کا راس صفر پر ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ انتہائی مروڑ کے دور مثلاً ۲۰۰°، ۱۸۰°، ۱۶۰°، ۱۲۰° وغیرہ زیر امتحان ہیں۔ مروڑ کے راس کو پہلے + ۲۰۰° گھمایا جاتا ہے اور پھر ۴۰° کی وقفوں سے کم کرتے ہوئے — ۲۰۰° تک لایا جاتا ہے۔ اب اس کی حرکت کی سمت الٹی کر دی جاتی ہے اور ۴۰° کے وقفوں سے مشاہدات دہرائے جاتے ہین حتیٰ کہ + ۲۰۰° تک پھر وہ پہنچ جاتا ہے۔

اس طرح بغیر درمیان میں رُکے ہوئے، متعدد دَور کے مشاہدات لئے جاتے ہیں، حتیٰ کہ دَوری حالت کا حصول پیمانہ پر کے مشاہدات کے مستقل ہونے سے ظاہر ہونے لگتا ہے۔ لیکن بہتر ترکیب یہ ہے کہ مشاہدات شروع کرنے سے قبل تار کو' مروڑ کے متعدد دوروں میں سے گزرنے دیا جائے۔

اختناق کے حلقے جو طہ = ۲۰۰°، ۱۸۰°، ۱۶۰°، ۱۲۰° وغیرہ قیمتوں کے متناظر ہوں مرتسم کئے جانے چاہئیں اور ان کے رقبہ جات کسی طریقہ سے دریافت کرلئے جائیں۔ ایک منحنی ایسا کھینچا جاسکتا ہے جس میں ہر دَور کی حاصل توانائی اور مروڑ کے انتہائی زاویہ طہ میں تعلق بتایا جاسکتا ہے۔

اس منحنی کو شکل ۱۹ میں دکھلایا گیا ہے۔

شکل ۱۹

مشاہدات کو قلمبند کرنے کا طریقہ اس مثال سے بخوبی واضح ہوجائے گا:—

مروڑ کے راس کے مشاہدات درجوں میں	پیمانہ کے مشاہدات سمر میں	پیمانہ کے مشاہدات سمر میں	پیمانہ کے مشاہدات سمر میں
+ ۱۵۰	۶۹٫۵ ۷۸٫۵	۷۸٫۵ ۷۹	۷۹ ۷۹٫۵
+ ۱۲۵	۵۵٫۵ ۷۵	۶۳٫۳ ۷۵	۶۴ ۷۵
+ ۱۰۰	۴۲ ۷۰	۴۹٫۵ ۷۰	۵۰ ۷۰

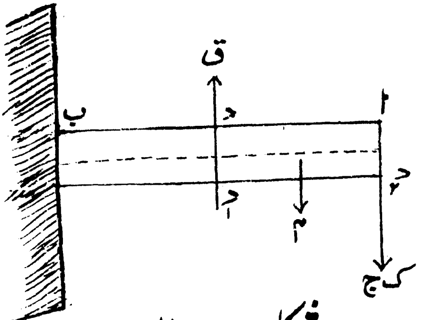
+۷۵	۳۰	۶۳٫۵	۳۶٫۵	۶۴	۳۷	۶۴٫۵
+۲۵	۹٫۵	۵۰٫۵	۱۳٫۵	۵۰٫۵	۱۳٫۵	۵۰٫۵
صفر	٫۵	۴۲	۳٫۵	۴۲	۴٫۰	۴۲
-۲۵	-۸	۳۲٫۵	-۵	۳۲٫۵	-۴٫۵	۳۲٫۵
-۵۰	-۱۴	۲۱	-۱۲	۲۱	-۱۱٫۵	۲۱
-۷۵	-۲۰	۸٫۵	-۱۸٫۵	۸٫۵	-۱۸	۸٫۵
-۱۰۰	-۲۵	-۴٫۵	-۲۴	-۵	-۲۳٫۵	-۵
-۱۲۵	-۲۹٫۵	-۱۸٫۵	-۲۹	-۱۸٫۵	-۲۸٫۵	-۱۸٫۵
-۱۵۰	-۳۳	-۳۳	-۳۳٫۵	-۳۳٫۵	۳۳٫۵	۳۳٫۵

سلاخوں کا خماؤ:- اگر ایک سیدھی سلاخ کو شکل عـ۲۰ کے مطابق خمایا جائے تو اس کے ریشے اوپر کے حصہ میں کھنچیں گے (یعنی اوپر کے حصہ کے ریشوں کے طول میں اضافہ ہوگا) اور نیچے کے حصہ کے طول گھٹنے لگیں گے۔ اس سلاخ کے ایک حصہ میں ایسی ہی کچھ سطح ہوگی جہاں ریشوں کے طول میں نہ تو اضافہ ہوگا اور نہ کمی، سلاخ کی ایسی سطح، تعدیلی سطح کہلاتی ہے اور ایک ایسا خط جو اُن تمام چھوٹے چھوٹے ریشوں میں سے جو نہ تو کھنچتے ہیں اور نہ گھٹتے ہیں گزرتا ہے، تعدیلی محور کہلاتا ہے۔ تعدیلی محور کے طول میں سلاخ کے خماؤ کی وجہ سے نہ اضافہ ہوتا ہے اور نہ کمی۔

شکل عـ۲۰

فرض کرو کہ ایک سلاخ ایسی ہے جسکا ایک سرا دیوار میں قائم کر دیا گیا ہے اور دوسرے سرے سے ایک وزن ک ج لٹکایا گیا ہے دیکھو شکل عـ۲۰ (الف)۔

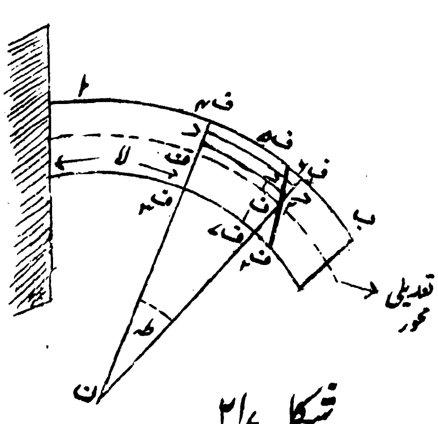
د د۱ کے پاس ایک چھوٹا سا رقبہ تصور کرو۔ چونکہ ایک قوت ک ج
نیچے کی جانب عمل کر رہی ہے



شکل ۲۰ (الف)

اور سلاخ کے ٹکڑے ۱ د۲ د۱ د کا وزن م بھی اسی جانب عمل کر رہا ہے۔ لہذا سلاخ کو تعادل کی حالت میں رکھنے کے لئے ایک جزّی قوت ق کو اوپر کی جانب اسطرح عمل کرنا چاہیئے کہ ق = م + ک ج

اس طرح تمام جزّی قوتیں ایک جفت پیدا کرتی ہیں جس کی وجہ سے تمام ریشے سلاخ کے اوپر کے حصہ میں تناؤ کی حالت میں ہیں اور نچلے حصہ میں دباؤ کی حالت میں۔ اس لئے اوپر کے حصہ میں د د۱ کے بائیں جانب ایسی قوتیں عمل کر رہی ہیں جنکا تقاضا سیدھے جانب کے ریشوں کو کھینچنے کا ہے اور سلاخ کے نچلے حصہ میں د د۱ کی بائیں جانب ایسی قوتیں عمل کرتی ہیں جو دھنے جانب کے ریشوں کو دبانے کا تقاضا رکھتی ہیں۔



شکل ۲۱

ان تمام قوتوں کا معیار اثر ایک جفت ہے اور یہ اس جفت کو توازن میں رکھتا ہے جو ک ج اور ق کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس جفت کو ”خمیدگی کے معیار اثر“ سے

تعبیر کیا جاتا ہے۔

شکل ۲۱ میں ایک خمی ہوئی سلاخ دکھلائی گئی ہے۔ ابتدا میں ف ف$_{۵}$ ایک فاصلہ تعدیلی محور کے اوپر اس طرح لیا گیا ہے کہ ف$_{۱}$ ف$_{۲}$ کے (جو تعدیلی محور کے نیچے کی جانب ہے) مساوی ہو۔ چونکہ سلاخ خمائی گئی ہے اس لئے اوپر کھنچاؤ کی وجہ سے ف$_{۵}$، ف$_{۶}$ پر چلا جائے گا۔

یعنی اوپر کی جانب اضافۂ طول = ف$_{۵}$ ف$_{۶}$

اور نیچے دباؤ کی وجہ سے ف$_{۲}$، ف$_{۳}$ پر چلا جائے گا یعنی کمی طول = ف$_{۲}$ ف$_{۳}$ لیکن تعدیلی محور ف$_{۱}$ ف (جو مساوی ہے ف$_{۵}$ ف$_{۶}$ = ف$_{۱}$ ف$_{۲}$) اپنی اصلی حالت پر رہتا ہے یعنی اس میں نہ اضافہ طول ہوتا ہے اور نہ کمی۔

اب ایک چھوٹا سا ٹکڑا د د$_{۱}$ طول اور ا تراش عمودی کے رقبہ کا تعدیلی محور کے اوپر تصور کرو جبکہ سلاخ خمائی نہیں گئی ہو (اس ٹکڑے کا طول بھی = ف$_{۱}$ ف = ف$_{۱}$ ف$_{۲}$ = ف$_{۵}$ ف$_{۶}$)

سلاخ اگر خمائی جائے تو اس ٹکڑے میں اضافۂ طول = د$_{۱}$ د$_{۲}$

لہذا اضافۂ طول فی اکائی طول = $\frac{د_{۱} د_{۲}}{د د_{۱}}$

ف$_{۶}$، ف$_{۱}$ کو اور ف$_{۵}$، ف$_{۶}$ کو ملاؤ اور ان کو اتنا خارج کرو کہ نقطہ ن پر ایک دوسرے کو یہ قطع کریں۔ ٹکڑے ف$_{۱}$ ف کا مرکز انحنا "ن" ہوگا۔

اگر ی = اس سلاخ کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک

$$\text{تو ی} = \frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}} = \frac{\frac{\text{قوت}}{ا}}{\frac{د_{۱} د_{۲}}{د د_{۱}}} = \frac{\text{قوت} \times د د_{۱}}{ا \times د_{۱} د_{۲}} = \frac{\text{قوت} \times ف ف_{۱}}{ا \times د_{۱} د_{۲}}$$

$$= \frac{\text{قوت} \times ص}{ا \times ما}$$ [کیونکہ دونوں مثلث د$_{۲}$ د$_{۱}$ ف اور ف$_{۱}$ ف ن متشابہ ہیں] جہاں ص = نصف قطر انحنا

اور ما = اس ٹکڑے کا فاصلہ تعدیلی محور سے

لہذا قوت = (ی ا ما) / ص

∴ اس قوت کا معیار اثر = (ی ا ما²) / ص

ایسی تمام قوتوں کا معیار اثر = (ی / ص) ∑ ا ما²

= جفت جو کہ اُن قوتوں کو توازن میں رکھتا ہے

= خمیدگی کا معیار اثر = م فرض کرو

∴ م = (ی مج) / ص .... (۲۱)

جہاں مج، جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد ہوگا جو کہ ضا میں سے گزرتا ہے اور کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

سلاخ جب کبھی خمائی جاتی ہے تو اس کے تراش عمودی کی شکل میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

اوپر کے ریشوں کے طول کے اضافہ کے ساتھ ساتھ عرضی گھٹاؤ سمتِ اضافہ کے علی القوائم واقع ہوتا ہے۔

مگر ہم کو معلوم ہے کہ (گھٹاؤ فی اکائی طول) / (بڑھاؤ فی اکائی طول) = مہ

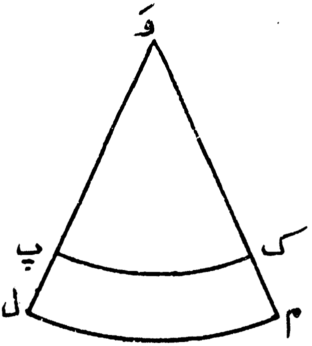
جہاں مہ = پواساں کی نسبت

∴ عرضی تخفیف فی اکائی طول = مہ × بڑھاؤ فی اکائی طول

اسی طرح نچلے ریشوں کے گھٹاؤ کے ساتھ ساتھ عرضی بڑھاؤ بھی واقع ہوتا ہے۔

تراش عمودی کی شکل اگر پہلے مستطیل تھی تو خمائے جانے کے بعد شکل ۲۲ کے مطابق پ ک م ل ہو جائے گی۔

فرض کرو کہ ل م وہ خط ہے جہاں تعدیلی سطح تراش عمودی کو قطع



شکل ۲۲

کرتی ہے۔

تب پ ک کا عرضی گھٹاؤ فی اکائی

$$\text{طول} = \frac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} = \text{بڑھاؤ فی اکائی طول} \times \text{مہ}$$

ہم جانتے ہیں کہ اضافہ طول فی اکائی

$$\text{طول} = \frac{\text{ک م}}{\text{ص}} = \frac{\text{ما}}{\text{ص}}$$

$$\therefore \frac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ک م}}{\text{ص}} \times \text{مہ}$$

اگر ل پ اور م ک نقطہ وَ پر ملتے ہوں تو پہلے کی طرح

$$\frac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ک م}}{\text{م وَ}} = \frac{\text{ک م}}{\text{ص}} \times \text{مہ}$$

$$\therefore \text{مہ} = \frac{\text{ص}}{\text{م وَ}} = \frac{\text{ص}}{\text{صَ}} \quad \text{..........} \quad (۲۲)$$

جہاں صَ = تعدیلی سطح کا نصف قطر انحناش مستوی میں جو سلاخ کے طول کے علی القوائم ہو۔

لہذا دونوں نصف قطر انحناؤں میں نسبت، پواساں کی نسبت کے مساوی ہے۔

سلاخ میں توانائی:— سلاخ جن ریشوں پر منقسم ہے اُن میں سے ایک ریشہ پر غور کرو۔

اگر سلاخ کا طول = ل = ریشہ کا طول

اور س = ریشہ کا تراش عمودی کا رقبہ۔

اب جبکہ ریشہ میں بڑھاؤ یا فساد واقع ہو رہا ہو تو

ہم کو معلوم ہے کہ ریشہ کے فی اکائی حجم میں توانائی

$$= \frac{۱}{۲} (\text{زور} \times \text{بگاڑ})$$

$$= \frac{۱}{۲} \frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}} \times (\text{بگاڑ})^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ی} (\text{بگاڑ})^{۲}$$

لہذا پورے ریشہ کی توانائی $= \frac{۱}{۲}$ ی (بگاڑ)^{۲}. س ل

مگر بگاڑ $= \frac{\text{ف}}{\text{ص}}$ جہاں ف = تعدیلی محور سے ریشہ کا فاصلہ اور ص = تعدیلی محور کا نصف قطر انحنا ظاہر ہے کہ توانائی پوری سلاخ میں = ریشوں کے توانائیوں کی حاصل جمع کے

$$= \sum \frac{۱}{۲} \text{ی س ل} \frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ص}^{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ی} \frac{\text{ل}}{\text{ص}^{۲}} \sum \text{س ف}^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ی} \frac{\text{ل}}{\text{ص}^{۲}} \cdot \text{مج}$$

جہاں مج = رقبی جمود کا معیار اثر، تعدیلی محور کے گرد،

لیکن $\frac{\text{مج ی}}{\text{ص}} = \text{م}$

∴ سلاخ کے اندر توانائی^{۵} $= \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\text{ل م}}{\text{ص}}$ ....(۲۳)

کسی سلاخ کے ایک سرے پر وزن رکھا ہو تو سلاخ میں جھکاؤ یا اُتار:۔ شکل ۲۱ پر غور کرو۔ اگر سلاخ کے قائم کردہ نقطہ سے ف تک فاصلہ = لا، اور اگر سلاخ کا وزن نظرانداز کر دیا جائے تو م = ک ج (ل - لا) جہاں ل سلاخ کے طول کے مساوی ہے اور ک وہ کمیت ہے جو سلاخ کے آزاد سرے پر رکھی ہوئی ہے۔

چونکہ $\frac{۱}{\text{ص}} = \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ (اگر خم کم ہو)

∴ ک ج (ل - لا) = $\frac{\text{ی}}{\text{ص}}$. مج = ی مج × $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}$

[جہاں ما = لا فاصلہ پر اُتار]

اس مساوات کو تکملانے سے:—

ک ج (ل لا - $\frac{\text{لا}^{2}}{٢}$) = ی مج $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + گ جہاں گ کوئی مستقل ہے۔

لیکن جبکہ لا = صفر تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = صفر ∴ گ = صفر

پھر دوبارہ تکملانے سے:۔ ک ج (ل $\frac{\text{لا}^{2}}{٢}$ - $\frac{\text{لا}^{3}}{٦}$)

= ی مج ما + گ$_{1}$ جہاں گ$_{1}$ = کوئی مستقل

لیکن جبکہ لا = صفر تو ما = صفر ∴ گ$_{1}$ = صفر

دوسرے سرے پر اُتار یا جھکاؤ معلوم کرنے کے لئے لا = ل رکھنا چاہیئے۔

اب فرض کرو کہ لا = ل پر جھکاؤ = مآ

تو مآ مج ی = ک ج ($\frac{\text{ل}^{3}}{٢}$ - $\frac{\text{ل}^{3}}{٦}$) = $\frac{\text{ک ج ل}^{3}}{٣}$

∴ اُتار مآ = $\frac{\text{ک ج ل}^{3}}{\text{٣ مج ی}}$ .... (٢٤)

اس امر کو یاد رکھنا چاہیئے کہ سلاخ کا وزن یہاں نظرانداز کر دیا گیا ہے۔
سلاخ کے مرکز ثقل پر اُتار لا = $\frac{\text{ل}}{٢}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،
پس اگر ما$_{1}$ = سلاخ کے مرکز ثقل کا اُتار

تو ما$_{1}$ = $\frac{٥}{٤٨}$. $\frac{\text{ک ج ل}^{3}}{\text{مج ی}}$ .... (٢٥)

یہاں بھی سلاخ کی کمیت نظرانداز کر دی گئی ہے۔
فرض کرو کہ سلاخ کی کمیت م بھی اب زیر بحث ہے

چونکہ سلاخ کی کمیت کی وجہ سے ایک قوت نیچے کی جانب عمل کر رہی ہے۔
اسلئے خمیدگی کا معیار اثر نقطہ فنا پر صرف اس کی وجہ سے

$$= \frac{\text{۴ (ل - لا)}^{۲}\ \text{ج}}{\text{ل}^{۲}}$$

لہذا خمیدگی کا مجموعی معیار اثر $= \text{ھ} = \text{ک ج (ل - لا)} + \frac{\text{۴ ج (ل - لا)}^{۲}}{\text{ل}^{۲}}$

$$= \text{ی جح}\ \frac{\text{فز}^{۲}\ \text{ما}}{\text{فز لا}^{۲}}$$

اس کو تکملانے سے :- $\text{ی جح}\ \frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}} = \text{ک ج}\left(\text{ل لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right)$

$$+ \frac{\text{۴ ج}}{\text{ل}^{۲}}\left(\text{ل}^{۲}\ \text{لا} - \text{ل لا}^{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right) + \text{گ} \quad \ldots\ldots (۲۶)$$

(جہاں گ کوئی مستقل ہے)

لیکن جبکہ لا = صفر تو $\frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}}$ = صفر

اس لئے گ = صفر

پھر دوبارہ تکملانے سے :-

$$\text{ی جح ما} = \text{ک ج}\left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right) +$$

$$+ \frac{\text{۴ ج}}{\text{ل}^{۲}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\ \text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ل لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲}\right) + \text{گَ} \quad \ldots\ldots (۲۷)$$

لیکن جبکہ لا = صفر تو ما = صفر اسلئے مستقل گَ = صفر
سرے پر اتار یا جھکاؤ دریافت کرنیکے لئے لا = ل رکھنا چاہیئے۔

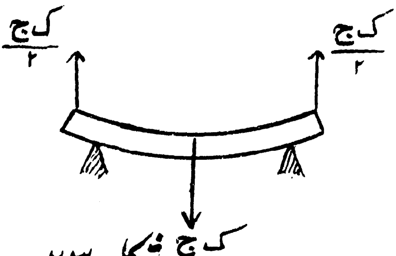
$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{\text{۳ ی جح}} + \frac{\text{۴ ج ل}^{۳}}{\text{۸ ی جح}} \quad \ldots\ldots (۲۸)$$

چنانچہ مرکز ثقل پر اتار لا = $\frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنے سے :-

$$\text{ما} = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{\text{ی جح}} + \frac{۱۷}{۳۸۴} \cdot \frac{\text{۴ ج ل}^{۳}}{\text{ی جح}} \quad \ldots\ldots (۲۹)$$

سلاخ جو دونوں سروں پر سہاری ہوئی ہو اور درمیان میں اس پر وزن رکھا گیا ہو۔

فرض کرو کہ شکل ۲۳ میں جو سلاخ دکھائی گئی ہے اس کے وسط میں ایک وزن ک ج لٹکایا جاتا ہے۔ سلاخ دو دھاریدار کناروں پر رکھی ہوئی ہے۔



شکل ۲۳

ایسی صورت میں سلاخ کے ایک سرے پر اوپر کی جانب $\frac{\text{ک ج}}{۲}$ کی قوت عمل کرے گی اور دوسرے سرے پر بھی $\frac{\text{ک ج}}{۲}$ کی قوت عمل کرے گی تاکہ تعادل قائم رہے۔

وسطی حصہ کا اُتار دریافت کرنے کے لئے اوپر کے ضابطہ (۲۴) میں ک ج کے بجائے $\frac{\text{ک ج}}{۲}$ اور ل کے بجائے $\frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنا چاہیئے یعنی وسطی حصہ میں اُتار اگر ما فرض کیا جائے تو

$$\text{ما} = \frac{\frac{\text{ک ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^{۳}}{۳\ \text{مج ی}} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۴۸\ \text{مج ی}} \quad \text{......(۳۰)}$$

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ یہاں بھی سلاخ کا وزن نظر انداز کر دیا گیا ہے۔ سلاخ کے وزن کو نظر انداز نہ کرنے کی صورت میں اور یہ یاد رکھتے ہوئے کہ اس کی کمیت م ہے، پہلے کی طرح سلاخ کے ایک سرے سے لا فاصلہ پر کوئی نقطہ ف تصور کرو۔

لہذا نقطہ ف پر خمیدگی کا مجموعی معیار اثر $= \text{ی مج}\ \frac{\text{فر}^{۲}\ \text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$

$$= \frac{\text{ک ج} + \text{م ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right) - \frac{\text{م ج}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right)^{۲}}{۲\ \text{ل}}$$

اس کو تکملانے سے:- $\text{ی مج}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ک ج} + \text{م ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل لا}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right) -$

$- \frac{\text{م ج}}{\text{ل}^{۲}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{لا}}{۴} - \frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right) + \text{گ}$ [جہاں گ مستقل ہے]

لیکن جبکہ لا = صفر تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = صفر اسلئے گ = صفر

اسکو دوبارہ تکملانے سے:-

$\text{ی مج ما} = \frac{\text{ک ج} + \text{م ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۴} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right) -$

$\frac{\text{م ج}}{\text{ل}^{۲}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۸} - \frac{\text{ل لا}^{۳}}{۶} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲}\right) + \text{گ}'$ [جہاں گ' مستقل]

لیکن جبکہ لا = صفر تو ما = صفر ∴ گ' = صفر

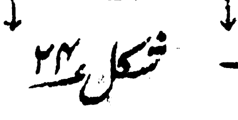
وسطی حصہ پر اُتار دریافت کرنے کیلئے لا = $\frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنا ہوگا۔

$$\text{لہذا ما}' = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۴۸\,\text{ی مج}} + \frac{۵\,\text{م ج ل}^{۳}}{۳۸۴\,\text{ی مج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۱)$$

اگر سلاخ کے دونوں سرے آزاد ہوں (۹) اور اسکا وسطی حصہ کسی سہارے پر لٹکا ہوا ہو۔ دیکھو شکل ۲۴ تو چونکہ وسطی حصہ پر تمام وزن مجتمع ہوگیا ہے لہذا ک ج = − م ج رکھ کر اوپر کی طرح عمل کریں تو

سروں پر خود سلاخ کے وزن م ج کی وجہ سے اُتار = $\frac{۱}{۱۲۸}\cdot\frac{\text{م ج ل}^{۳}}{\text{ی مج}}$

یعنے سلاخ کے وزن کی وجہ سے قوت



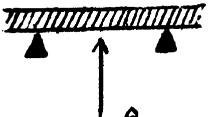
شکل ۲۴

چونکہ مخالف سمت میں عمل کررہی ہے اس لئے مساوات (۳۱) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:-

$$\text{ما}' = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۴۸\,\text{مج ی}} - \frac{۵}{۳۸۴}\cdot\frac{\text{م ج ل}^{۳}}{\text{مج ی}}$$

یہاں اگر ک ج = م ج رکھا جائے تو وہی نتیجہ حاصل ہوگا۔

اگر سلاخ کے دونوں سروں کو سہاروں پر ٹکا کر،[۱۰] سلاخ کے درمیانی حصہ پر اوپر کی جانب ایک قوت د کو عمل کرنے دیا جائے تو مساوات (۳۱) حسب ذیل ہو جائے گی:-



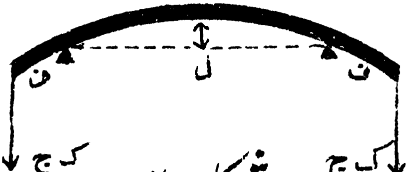
شکل ۲۵

$$\text{ما} = \frac{5}{384}\cdot\frac{\text{۴ ج ل}^3}{\text{بج ی}} - \frac{\text{د ل}^3}{\text{۴۸ بج ی}}$$

اگر ما = صفر تو $\text{د} = \frac{5}{8}\ \text{۴ ج}$

یعنی سلاخ کے درمیانی حصہ کو اوپر کی طرف $\frac{5}{8}$ ۴ ج قوت سے ڈھکیلنا ہوگا تاکہ خماؤ یا جھکاؤ صفر ہو۔

اگر سلاخ کے دونوں سرے سہاروں پر ٹکا دئے جائیں اور ہر ایک سرے پر ک ج وزن لٹکایا جائے (دیکھو شکل ۲۶) تو ایسی صورت میں سلاخ کا اپنے معمولی مقام سے چڑھاؤ "ما" حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہوگا:-



شکل ۲۶

فرض کرو کہ ل = سلاخ کا طول دھاریدار کناروں کے درمیان اور ف = سلاخ کے کسی ایک سرے سے دھاریدار کنارہ تک فاصلہ تو ظاہر ہے کہ جفت = $\text{ک ج ف} = \frac{\text{ی بج}}{\text{ص}}$ ...... (۳۲)

لیکن یہ ہمکو معلوم ہے کہ $\text{ما}(\text{۲ص} - \text{ما}) = \left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^2$

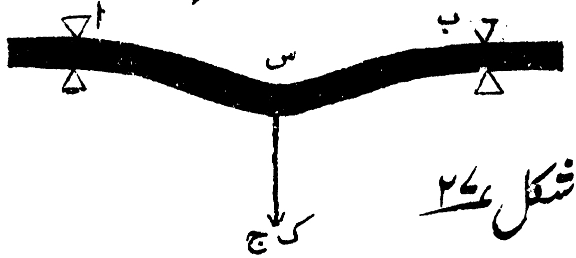
اگر ما کے مقابلہ میں ص بہت بڑا ہو تو $\text{ص} = \frac{\text{ل}^2}{\text{۸ ما}}$

$$\therefore\ \text{ک ج ف} = \frac{\text{۸ ما ی بج}}{\text{ل}^2}$$

یعنی $\text{ما} = \frac{\text{ک ج ف ل}^2}{\text{۸ ی بج}}$ ...... (۳۳)

ایسی سلاخ جو دونوں سروں پر جکڑ دی گئی ہے لیکن درمیان میں اس پر وزن رکھا گیا ہے:-

فرض کرو کہ ا ب ایک سلاخ ہے جو سروں ا اور ب پر جکڑ دی گئی ہے اور س پر وزن رکھا گیا ہے دیکھو شکل ۲۷۔



شکل ۲۷

ا اور ب پر سہاروں کا عمل سلاخ پر ایک انتصابی قوت اور ایک جفت کے مماثل ہوگا۔ یہاں بھی ہم سلاخ کے وزن کو لٹکائے ہوئے وزن کے مقابلہ میں نظر انداز کئے دیتے ہیں۔ فرض کرو

ا ب = ل

$$\text{سہاروں پر انتصابی قوت} = \frac{\text{ک ج}}{۲}$$

$$\text{جفت م} = \frac{\text{اس}}{۲} \times \frac{\text{ک ج}}{۲} = \frac{\text{اس} \times \text{ک ج}}{۴} = \frac{\text{ک ج ل}}{۸}$$

اگر سلاخ ا اور ب پر نہ جکڑی جاتی تو جفت $\left(\frac{\text{ک ج}}{۲} \cdot \text{اس}\right)$ کے مساوی ہوتا

لیکن چونکہ سلاخ جکڑی ہوئی ہے اسلئے جفت اسکا نصف ہوگا۔

سلاخ کے وزن کو نظر انداز کرتے ہوئے، صرف انتصابی قوت کی وجہ سے س پر اُتار $= \text{ہ}_۱ = \frac{\text{ک ج ل}^۳}{۴۸ \text{ ی مج}}$

فرض کرو کہ جھبت کی وجہ سے نقطہ س، اپنے افقی مقام سے کوئی فاصلہ ما اوپر ہٹتا ہے اور سلاخ ایک ایسے دائرہ کی شکل میں خم یا جاتا ہے جس کا نصف قطر ص کے مساوی ہے۔

سادہ علم ہندسہ سے $\text{اس}^2 = \text{ما}\,(\text{۲ص} - \text{ما})$

چونکہ ۲ص کے مقابلہ میں ما بہت چھوٹا ہے

$$\therefore\ \text{ما} = \frac{\text{اس}^2}{\text{۲ص}} \quad \text{یعنی} \quad \text{ما} = \frac{\text{ل}^2}{\text{۸ص}}$$

$$\text{لیکن}\ \text{م} = \frac{\text{مج ی}}{\text{ص}} = \frac{\text{مج ی} \times \text{۸ ما}}{\text{ل}^2}$$

$$\therefore\ \text{ما} = \frac{\text{م ل}^2}{\text{۸ ی مج}} = \frac{\text{ک ج ل}^3}{\text{۶۴ ی مج}}$$

لہذا اس پر اُتار جبکہ قوت اور جھبت دونوں عمل کرتے ہیں (۱۱) = حاصل اُتار کے

$$= \text{ما}_1 - \text{ما} = \frac{\text{ک ج ل}^3}{\text{۴۸ ی مج}} - \frac{\text{ک ج ل}^3}{\text{۶۴ ی مج}}$$

$$= \frac{\text{ک ج ل}^3}{\text{۱۹۲ ی مج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۳۴})$$

دھاریدار پتی کا خماؤ :- جس طرح سلاخوں کی صورت میں عمل کیا گیا تھا پتیوں کی صورت میں بھی تقریباً وہی عمل ہو سکتا ہے لیکن کسی قدر تصحیح کی اس میں ضرورت ہوتی ہے۔

شکل (۲۱) سے واضح ہوگا کہ طولی بگاڑن$_1 = \frac{\text{د}_1\text{د}_2}{\text{دد}_1} = \frac{\text{د}_1\text{د}_2}{\text{ف ف}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ص}} \ldots\ldots (\text{۳۵})$

اور یہ بھی ظاہر ہے کہ عرضی گھٹاؤ $\text{ن}_2 = \text{ن}_1 \times \text{مہ} = \frac{\text{مہ ما}}{\text{ص}} \ldots\ldots (\text{۳۶})$

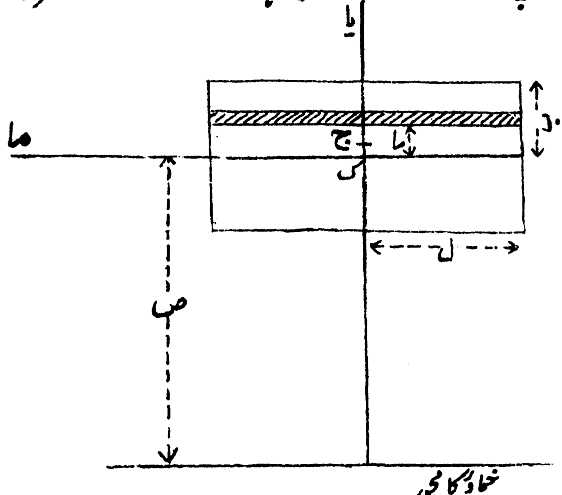
فرض کرو کہ اس ٹکڑے پر طولی زور $= \text{ت} = \frac{\text{قوت}}{\text{رقبہ}}$

∴ اس ٹکڑے پر قوت = ت ا

∴ پوری سلاخ یا پٹی کے عرضی مستوی پر حاصل قوت = ∑ ت ا

∴ جفت یا خمیدگی کا معیار اثر = ∑ ت ا ما .... (۳۷)

شکل ۲۸ میں پٹی کی تراش بتائی گئی ہے۔ فرض کرو اسکا مرکز ک اور ج مرکز ثقل ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ک ج = لا اور تراش کا عرض = ۲ ب اور تراش کا طول = ۲ ل یہاں بھی پہلے کی طرح ایک دھجی تصور کرو



شکل ۲۸

جسکا عرض ف ما ہے اور جو تعدیلی محور سے ما فاصلہ پر ہے اور اس کے تراش عمودی کا رقبہ = (فرض کرو) ا

فرض کرو کہ اس ٹکڑے پر عرضی وضع میں یعنی ما کی سمت میں زور = تَ

پہلے کی طرح ن₁ = عہ ت₁ − بہ (ق₂ + ق₃) =

= عہ ت − بہ مَتَ

$$= \frac{\text{ت}}{\text{ی}} - \frac{\text{تَ مہ}}{\text{ی}}$$

کیونکہ $\frac{1}{\text{عہ}}$ = ی اور $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ = بہ ی = مہ

$$\therefore \frac{\text{ما}}{\text{ص}} = \frac{۱}{\text{ی}}(\text{ت} - \text{تَ مہ}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۸)$$

اسی طرح $\text{ن}_۲ = \text{عہ تَ} - \text{بہ ت}$

$$= \frac{۱}{\text{ی}}(\text{تَ} - \text{ت مہ}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۹)$$

∴ ان دونوں مساواتوں (۳۸) اور (۳۹) سے :—

$$\text{ت}\,(۱ - \text{مہ}^۲) = \text{ی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} + \text{مہ ن}_۲\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۰)$$

$$\text{اور}\ \text{تَ}\,(۱ - \text{مہ}^۲) = \text{ی}\left(\frac{\text{مہ ما}}{\text{ص}} + \text{ن}_۲\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۱)$$

اس ٹکڑے پر قوت = ت ۲ل . فرما

∴ مجموعی قوت (جو تراش عمودی کے علی القوائم ہو) $= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \text{ت ۲ل فرما}$

$$= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \frac{\text{ی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} + \text{مہ ن}_۲\right)\text{ ۲ل فرما}}{۱ - \text{مہ}^۲}$$

$$= \left\{ \frac{\text{ی ۲ل}}{(۱ - \text{مہ}^۲)}\left(\frac{\text{۲ب لا}}{\text{ص}} + \text{۲ب مہ ن}_۲\right) \right\}$$

اب چونکہ مجموعی قوت (جو تراش عمودی کے علی القوائم ہے) اس قدر خفیف ہے کہ وہ تقریباً صفر کے مساوی ہے۔

$$\text{لہذا}\ \frac{\text{۲ب لا}}{\text{ص}} + \text{۲ب مہ ن}_۲ = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی}\ \text{ن}_۲ = -\frac{\text{لا}}{\text{ص مہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۲)$$

$$\therefore \text{ت}\,(۱ - \text{مہ}^۲) = \text{ی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} - \frac{\text{لا}}{\text{ص}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۳)$$

اب دوسری قوت جو اس ٹکڑے کے عرضی وضع میں عمل کر رہی ہے

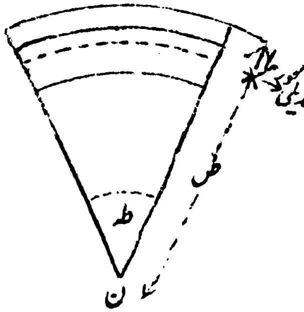
$= \text{تَ}\,(\text{ص} + \text{ما})\ \text{طہ فرما}$

چونکہ ٹکڑے کا طول = (ص + ما) طہ دیکھو شکل (۲۹)

∴ مجموعی قوت جو کہ ٹکڑے کے

عرضی وضع میں عمل کر رہی ہے $= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \text{ت}\,(\text{ص} + \text{ما})\,\text{ط زما}$

$$= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \frac{\text{ی}\left(\frac{\text{مہ ما}}{\text{ص}} + \text{ن}_{۲}\right)(\text{ص} + \text{ما})}{(۱ - \text{مہ}^{۲})}\,\text{ط زما}$$



شکل ۲۹

= صفر (کیونکہ ناقابل لحاظ ہے)

∴ اس صورت میں $\text{ن}_{۲}$

$$= -\,\text{مہ}\left\{\frac{\text{لاص} + \text{لا}^{۲} + \frac{\text{ب}^{۲}}{۳}}{\text{ص}(\text{ص} + \text{لا})}\right\}$$

$$= -\,\frac{\text{لا}}{\text{ص مہ}}$$

چونکہ یہ لا میں دوم درجہ کی مساوات ہے

$$\therefore\ \text{لا} = \frac{\text{ص}}{۲}\left\{-۱ \pm \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{مہ}^{۲}\,\text{ب}^{۲}}{۳(۱ - \text{مہ}^{۲})\,\text{ص}^{۲}}}\right\}$$

اس کی صرف مثبت قیمت لینے سے :-

$\text{لا} = \frac{\text{مہ}^{۲}\,\text{ب}^{۲}}{۳(۱ - \text{مہ}^{۲})\,\text{ص}}$ کیونکہ ص کے مقابلہ میں ب بہت چھوٹا ہے۔

چونکہ ب²، ص کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہے اس لئے لا بہت چھوٹا ہوگا
یعنی $\text{ن}_{۲}$ بہت ہی چھوٹا ہے۔

اسلئے مساوات (۲۰) سے :-

$$\text{ت}(۱ - \text{مہ}^{۲}) = \text{ی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} + \text{مہ ن}_{۲}\right) \simeq \frac{\text{ی ما}}{\text{ص}}$$

جفت یا خمیدگی کا معیار اثر $= \int \text{ت}\ \text{ا ما}$

$$= \int \frac{\text{ی ما}}{\text{ص}(\text{۱} - \text{مہ}^{\text{۲}})} \cdot \text{ا ما}$$

$$= \frac{\text{ی}}{\text{ص}(\text{۱} - \text{مہ}^{\text{۲}})} \int \text{ا ما}^{\text{۲}}$$

$$= \frac{\text{ی جھ}}{\text{ص}(\text{۱} - \text{مہ}^{\text{۲}})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۴۴})$$

پتیوں کی صورت میں یہ صحیح مساوات ہے۔

لچکدار منحنی[۱۲]:۔ فرض کرو کہ ایک سلاخ ا ب ایک کمان کی شکل میں خمائی گئی ہے یعنی ا اور ب نقطوں پر ایک ڈوری باندھ دی گئی ہے۔

حصہ س ب کے تعادل پر س پر کے زور اور ڈوری کے تناؤ ت کے تحت غور کرو۔

شکل ۳۰

اگر ص، س پر نصف قطر انحنا ہو تو:۔

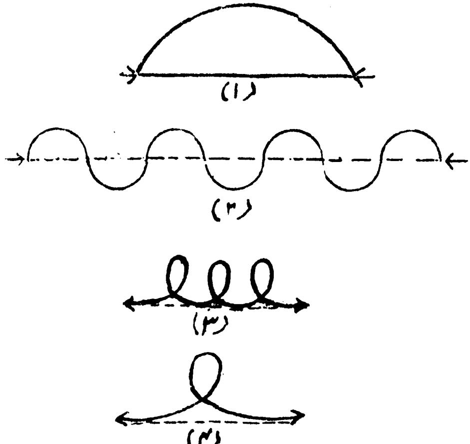
$$\text{جفت} = \text{ت} \times \text{ما} = \frac{\text{ی جھ}}{\text{ص}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۴۵})$$

جہاں ما = س ن اور ی = سلاخ کے مادے کا ینگ کا معیار لچک اور جھ = سلاخ کا سطحی جمود کا معیار اثر ایسے ایک محور کے گرد، جو خمائو کے مستوی کے علی القوائم ہو اور سلاخ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

ظاہر ہے کہ $\frac{\text{۱}}{\text{ص}} \propto \text{ما}$

لہذا وہ منحنی جس میں سلاخ کا مرکزی محور خمایا جاتا ہے ایسا ہوتا ہے کہ کسی نقطہ پر انحنا کے نصف قطر کا مقلوب، سیدھی سلاخ کے مقام سے نقطہ کے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے ایسی خواص کی منحنیاں لچکدار منحنیوں کے نام سے تعبیر کی جاتی ہیں۔ اس خاصیت کی منحنیاں مختلف شکلوں میں

ایک گھڑی کی کمانی لیکر اس کے سروں کو ایک ساتھ ڈھکیلنے یا کھینچنے سے بنائی جا سکتی ہیں۔ چند اس قسم کی منحنیوں کی شکلیں ذیل میں دکھائی گئی ہیں (شکل ۳۱)

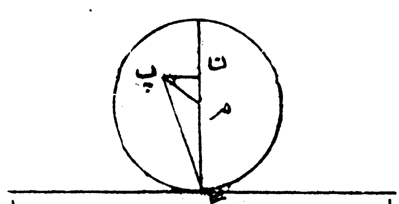


شکل ۳۱

پیکان کے نشانوں کی سمت سے لگائی ہوئی قوت کی سمت ظاہر ہوتی ہے۔

ہم اب یہ ثابت کریں گے کہ منحنی (۱) ایک نقطہ کا راستہ ہے اور یہ نقطہ ایک ایسے دائرے کے مرکز کے قریب واقع ہے جو پھسلنے کے بغیر ایک خط مستقیم میں لڑھکتا چلا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ (شکل ۳۲) میں ایک دائرہ جس کا مرکز م ہے پھسلنے کے بغیر یکساں زاویئی رفتار ω سے ایک خط مستقیم ا ب پر لڑھک رہا ہے۔ اور یہ بھی فرض کرو کہ پ ایک نقطہ ہے جو م سے قریب ہے۔ اور خط ا ب سے دائرہ کے تماس کا نقطہ گ ہے۔



شکل ۳۲

پ ت ایک خط ایسا کھینچو جو م گ کے علی القوائم ہو۔ اگر نقطہ پ کی رفتار ر اور اسکے راستہ کا نصف قطر انحنا ص سے تعبیر کئے جائیں تو پ کا اسراع راستہ کے عمود کی سمت میں $= \frac{ر^2}{ص}$

گ کی رفتار صفر ہے۔ اور چونکہ یہ پورا انتظام گ کے گرد گھوم رہا ہے اسلئے پ کی رفتار پ گ کی سمت کے علی القوائم ہے۔

∴ ر = ω × ف₁ جہاں پ گ = ف₁

پ کا اسراع = م کا اسراع + پ کا اضافی اسراع م کا لحاظ کرتے ہوئے۔

لیکن م یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے جبکہ دائرہ لڑھکتا رہتا ہے لہذا م کا اسراع صفر ہے۔

اور چونکہ م کے گرد پ ایک دائرہ بناتا ہے اس لئے پ کا اضافی اسراع پ م کی سمت میں م کا لحاظ کرتے = ف₂ × ω² جہاں ف₂ = م پ

لہذا پ کا اسراع اسکے راستہ کے عماد کی سمت میں =

= ω² ف₂ جم $\underline{|}$ م پ گ

$$= \frac{ر^2}{ص} = \frac{\omega^2 \, ف_1^2}{ص}$$

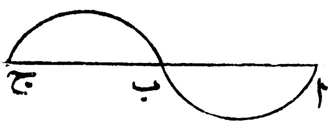
$$\therefore \frac{1}{ص} = \frac{ف_2 \; جم \; \underline{|م پ گ}}{ف_1^2}$$

چونکہ پ، م کے بالکل قریب ہے اسلئے $\underline{|}$ م پ گ بہت چھوٹا ہے اور تقریباً $\underline{|}$ پ م ن کے مساوی ہے اور نیز پ گ تقریباً دائرہ کے نصف قطر ن کے مساوی ہے۔

$$\therefore \frac{1}{ص} = \frac{ف_2 \frac{ن م}{پ م}}{ف_1^2} = \frac{ما}{ف_1^2} = \frac{ما}{ن^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴۶)$$

اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{1}{ص} \propto ما$

نقطہ پ کی حرکت سے جو منحنی بنتا ہے وہ شکل (۳۳) سے ظاہر ہے۔



شکل ۳۳

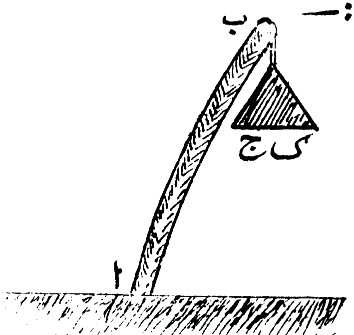
اس سے واضح ہے کہ کوئی دو نقطوں ا اور ج کے درمیان فاصلہ = ۲ π ن

مساوات (۴۵) سے:-

$$\text{ت ما} = \frac{\text{ی مج}}{\text{ص}} = \frac{\text{ی مج ما}}{\text{ن}^{۲}}$$

$$\therefore \text{ن}^{۲} = \frac{\text{ی مج}}{\text{ت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۴۷)$$

ایک ایسی سلاخ جو انتصاباً زمین میں ثابت کی گئی ہو اور اسکے اوپر کے سرے پر وزن رکھا گیا ہو:-



شکل ۳۴

شکل ۳۴ میں ایک سلاخ ا ب دکھلائی گئی ہے جو زمین میں ا پر انتصاباً قائم کی گئی ہے۔ فرض کرو کہ اسکے اوپر کے سرے ب سے ایک وزن ک ج لٹکایا جاتا ہے۔ اگر وزن بہت زیادہ ہو تو سلاخ خم جائے گی، جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے۔ اس سلاخ کی شکل کا (شکل ۳۳) کے منحنی سے مقابلہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ سلاخ کے قاعدہ کے خط اور نقطہ ب کے درمیان فاصلہ = شکل ۳۳ میں ا ج کا $\frac{۱}{۴}$ فاصلہ

اگر سلاخ کا طول = ل، تو تعادل کے لئے

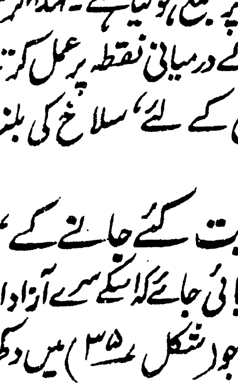
$$\text{ل} = \frac{\pi\,\text{ن}}{۲} = \frac{\pi}{۲}\sqrt{\frac{\text{تیا مج}}{\text{ک ج}}}$$

$$\therefore \quad ک\,ج = \frac{\pi^2\, ی\, مج}{۴\, ل^2}$$

یعنی ک ج کو $\frac{\pi^2\, ی\, مج}{۴\, ل^2}$ سے کم ہو جانا چاہیئے تاکہ سلاخ خم نہ سکے یا بالفاظ دیگر اگر اس سے ک ج بڑھ جائے تو سلاخ خم جائیگی۔
اگر سلاخ استوانہ نما ہو تو مج = $\frac{\pi\, ب^4}{۴}$ جہاں ب = سلاخ کا نصف قطر۔

چونکہ کوئی سلاخ کسی محدود وزن کو، بغیر خمے ہوئے سہار نہیں سکتی اور ل کے بڑھنے سے یہ وزن کم ہوتا جاتا ہے اسلئے ایک دی ہوئی تراش عمودی کی سلاخ، اگر کافی بلند ہو تو صرف اپنے وزن سے خمنے لگے گی، بشرطیکہ یہ فرض کیا جائے کہ سلاخ کا وزن اس کے مرکز پر مجتمع ہو گیا ہے۔ لہذا اگر سلاخ کا وزن خود ک ج کے مساوی ہو جو اس کے درمیانی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جاتا ہے، تو ایسی صورت میں تعادل کے لئے، سلاخ کی بلندی کی بھی ایک خاص حد ہوگی۔

لیکن سلاخ، بجائے ایک سرے پر ثابت کئے جانے کے، اگر دونوں سروں سے مساوی طور پر اس طرح دبائی جائے کہ اسکے سرے آزادانہ حرکت کر سکیں، تو سلاخ کی شکل ایسی ہو جائے گی جو (شکل ۳۵) میں دکھلائی گئی ہے۔ اس صورت میں اس کی شکل کو

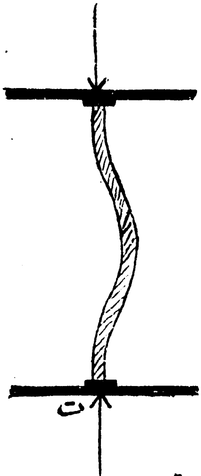


شکل ۳۵

شکل (۳۳) کے منحنی سے مقابلہ کرنے سے ہمکو یہ مساوات حاصل ہوگی:۔

$$ل = \pi\, ن = \pi \sqrt{\frac{ی\, مج}{ت}}$$

یعنی قوت ت کو $\frac{\pi^2\, ی\, مج}{ل^2}$ سے کم ہونا چاہیئے تاکہ بیشتر کی طرح سلاخ سیدھی رہے۔



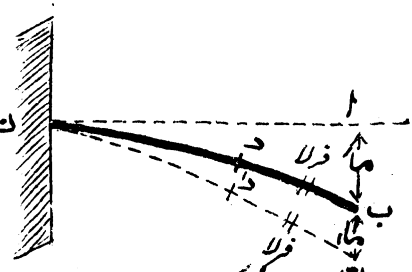
شکل ۳۶

اگر سلاخ کے سرے قائم کردئے جائیں
اور پھر ان کو ایک قوت ت سے دبایا جائے
تو سلاخ شکل (۳۶) اختیار کریگی۔
یہاں ایسی مساوات حاصل ہوگی:—

$$ل = 2\pi ن = 2\pi \sqrt{\frac{ی\ جم}{ت}}$$

یعنی اس صورت میں سلاخ کے
تعادل کے لئے ت کو $\frac{4\pi^2\ ی\ جم}{ل^2}$
سے کم ہونا چاہیئے۔

سلاخوں کا ارتعاش:— فرض کرو
کہ ایک سلاخ ا ن، کا ایک سرا دیوار میں جوڑ دیا گیا ہے اور وہ اُفقی
وضع میں کسی وزن رکھنے کے
قبل قائم رہتی ہے۔ اگر اسکے
سرے پر وزن ک ج رکھا
جائے تو



شکل ۳۷

فرض کرو کہ اُتار =
= ما، جو کہ شکل ۳۷ سے
ظاہر ہے۔

$$\text{تو ما} = \frac{ک\ ج\ ل^3}{3\ جم\ ی}$$ + (کچھ اور بشرطیکہ ہم اس سلاخ کی کمیت
کو بھی لیں)

فرض کرو کہ اب ایک نیا وزن کَ ج آویزاں کرنے کے بعد سلاخ
کا سرا تَ پر آجاتا ہے۔
یعنی کَ ج کی وجہ سے اُتار = مَا + ما، (فرض کرو)

تب $\text{مَا} + \text{ما} = \frac{\text{کَ ج ل}^{۳}}{\text{۳ مج ی}}$ + (کچھ اور، اگر ہم اس سلاخ کی کمیت کو بھی لیں)

اوپر کی دونوں مساواتوں کو تفریق کرنے سے:

$$\text{مَا} + \text{ما} - \text{مَا} = \text{ما} = \frac{(\text{کَ} - \text{ک})\ \text{ج ل}^{۳}}{\text{۳ مج ی}} \quad \ldots\ldots (۴۸)$$

یعنی $\text{کَ ج} - \text{ک ج} = \frac{\text{ما ۳ مج ی}}{\text{ل}^{۳}}$ = وہ قوت جو سلاخ کو تعادل میں لانے کی کوشش کرتی ہے = کمیت × اسراع =

$= \frac{\text{ج کً}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{فر}^{۲}\ \text{ما}}{\text{فر و}^{۲}}$ یہاں ج کً سے مراد وہ وزن ڈائینوں میں ہے جو اہتزاز کے وقت رکھا گیا تھا، یعنی کمیت کً گرام ہے۔

$\therefore \frac{\text{فر}^{۲}\ \text{ما}}{\text{فر و}^{۲}} = \frac{\text{۳ مج ما ی}}{\text{کً ل}^{۳}}$، یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے، لہذا

$$\text{وقت دوران و} = ۲\pi \sqrt{\frac{\text{کً ل}^{۳}}{\text{۳ ی مج}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۴۹)$$

اب ہم سلاخ کی کمیت کو لیکر بحث کرینگے۔

اگر سلاخ یکساں ہو تو اسکا مرکز ثقل د، درمیانی نقطہ سے تعبیر ہوگا جب ا، ب پر آئیگا تو فرض کرو کہ مرکز ثقل د کا اتار = فہ

اب جبکہ ب، ت پر آئے گا فرض کرو کہ د، دَ پر آگیا یعنے ددَ = فہ فرض کرو

اب سلاخ کو نیچے اتارنے کے لئے جو کام کیا گیا $= \int_{\text{صفر}}^{\text{ما}} (\text{کَ} - \text{ک})\ \text{ج} \cdot \text{فر ما}$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ما}_{۱}} \frac{۳\,\text{مج}\,\text{ی}\,\text{ما}_{۱}\,\text{فرما}_{۱}}{\text{ل}^{۳}} = \frac{۳\,\text{مج}\,\text{ی}\,\text{ما}_{۱}^{۲}}{۲\,\text{ل}^{۳}}$$

∴ پوری توانائی بالقوہ اس سلاخ کی ن ت وضع میں

$$= \frac{۳\,\text{مج}\,\text{ی}\,\text{ما}_{۱}^{۲}}{۲\,\text{ل}^{۳}} - \text{کؑ}\,\text{ج}\,\text{ما}_{۱} - \text{م}\,\text{ج}\,\text{فہ} \qquad \text{جہاں } \text{م} =$$

= سلاخ کی کمیت

لیکن مساوات (۲۹) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{فہَ} = \frac{۵\,\text{ک}\,\text{ج}\,\text{ل}^{۳}}{۴۸\,\text{ی}\,\text{مج}} + \frac{۱۷}{۳۸۴}\cdot\frac{\text{م}\,\text{ج}\,\text{ل}^{۳}}{\text{ی}\,\text{مج}}$$

$$\text{اور } \text{فہ} + \text{فہَ} = \frac{۵}{۴۸}\cdot\frac{\text{کَ}\,\text{ج}\,\text{ل}^{۳}}{\text{ی}\,\text{مج}} + \frac{۱۷}{۳۸۴}\cdot\frac{\text{م}\,\text{ج}\,\text{ل}^{۳}}{\text{ی}\,\text{مج}}$$

$$\therefore \text{فہ} = \frac{۵}{۴۸}\cdot\frac{(\text{کَ} - \text{ک})\,\text{ج}\,\text{ل}^{۳}}{\text{ی}\,\text{مج}} = \frac{۵}{۱۶}\,\text{ما}_{۱} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۵۰)$$

$$\therefore \text{پوری توانائی بالقوہ} = \frac{۳\,\text{مج}\,\text{ی}\,\text{ما}_{۱}^{۲}}{۲\,\text{ل}^{۳}} - \text{کؑ}\,\text{ج}\,\text{ما}_{۱} - \frac{۵}{۱۶}\,\text{م}\,\text{ج}\,\text{ما}_{۱} \quad\ldots\ldots (۵۱)$$

اب ہم اس سلاخ کی توانائی بالفعل ن ت کی وضع میں دریافت کریں گے۔

اس سلاخ میں ایک چھوٹا سا ٹکڑا فرلا طول کا ت سے لا فاصلہ پر تصور کرو۔

اس ٹکڑے کی کمیت $= \frac{\text{م}}{\text{ل}}\,\text{فرلا}$ لہذا اس کی توانائی بالفعل

$$= \frac{۱}{۲}\cdot\frac{\text{م}\,\text{فرلا}}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرو}}\right)^{۲} \quad\ldots\ldots\ldots (۵۲)$$

جہاں س سے مراد وہ فاصلہ ہے جو ٹکڑا نیچے اُترا جبکہ ب، مقام ت پر آیا۔ فرض کرو کہ سَ سے مراد وہ فاصلہ ہے جو وہ ٹکڑا نیچے اُترا جبکہ ا مقام ب پر آیا۔ مساوات (۲۷) سے ظاہر ہے کہ

$$\text{سَ} = \frac{\text{کَ ج}}{\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل لا}^{2}}{2} - \frac{\text{لا}^{3}}{6}\right) + \frac{\text{م ج}}{\text{ل}^{2}\,\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل}^{2}\,\text{لا}^{2}}{2} - \frac{\text{ل لا}^{3}}{3} + \frac{\text{لا}^{4}}{12}\right)$$

$$\text{اور س} + \text{سَ} = \frac{\text{کَ ج}}{\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل لا}^{2}}{2} - \frac{\text{لا}^{3}}{6}\right) + \frac{\text{م ج}}{\text{ل}^{2}\,\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل}^{2}\,\text{لا}^{2}}{2} - \frac{\text{ل لا}^{3}}{3} + \frac{\text{لا}^{4}}{12}\right)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(\text{کَ} - \text{ک})\,\text{ج}}{\text{ی مج}}\left\{\frac{\text{ل لا}^{2}}{2} - \frac{\text{لا}^{3}}{6}\right\} = \frac{3\,\text{ما}}{\text{ل}^{3}}\left\{\frac{\text{ل لا}^{2}}{2} - \frac{\text{لا}^{3}}{6}\right\}$$

$\therefore$ اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل =

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{م فرلا}}{\text{ل}}\left\{\frac{3}{\text{ل}^{3}}\left(\frac{\text{ل لا}^{2}}{2} - \frac{\text{لا}^{3}}{6}\right)\right\}^{2}\cdot\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}\right)^{2}$$

$\therefore$ پورے سلاخ کی توانائی بالفعل =

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{م فرلا}}{\text{ل}}\cdot\frac{9}{\text{ل}^{6}}\left(\frac{\text{ل لا}^{2}}{2} - \frac{\text{لا}^{3}}{6}\right)^{2}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}\right)^{2}$$

$$= \frac{33}{280}\,\text{م}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}\right)^{2}$$

اب چونکہ کمیت کَ، ارتعاش کر رہی ہے لہذا اسکی توانائی بالفعل نِ ت وضع میں

$$= \frac{1}{2}\,\text{کَ}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}\right)^{2}$$

$$\therefore \text{مجموعی توانائی بالفعل} = \frac{1}{2}\,\text{ک}\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}}\right)^2 + \frac{33}{280}\,\text{م}\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}}\right)^2 \quad \ldots(53)$$

لیکن بقائے توانائی سے توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\,\text{م}\right)\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}}\right)^2 +$$

$$+ \frac{3\,\text{مجھ ی ما}_1^2}{2\,\text{ل}^3} - \text{ک ج ما}_1 - \frac{5}{16}\,\text{م ج ما}_1 = \text{مستقل}$$

اس مساوات کو تفرقانے سے :-

$$\frac{1}{2}\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\,\text{م}\right) 2\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}}\right)\left(\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}_1}{\text{فر و}^2}\right) +$$

$$+ \frac{3\,\text{مجھ ی}}{2\,\text{ل}^3}\,.\,2\,\text{ما}_1\,.\,\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}} - \text{ک ج}\,\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}} - \frac{5}{16}\,\text{م ج}\,\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}} = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی}\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\,\text{م}\right)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}_1}{\text{فر و}^2} + \frac{3\,\text{مجھ ی ما}_1}{\text{ل}^3} - \left(\text{ک ج} + \frac{5}{16}\,\text{م ج}\right) = \text{صفر}$$

$$\text{فرض کرو کہ}\ \frac{3\,\text{مجھ ی ما}_1}{\text{ل}^3} - \left(\text{ک ج} + \frac{5}{16}\,\text{م ج}\right) = \text{عہ}$$

$$\text{تب}\ \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2} = \frac{3\,\text{مجھ ی}}{\text{ل}^3}\,.\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}_1}{\text{فر و}^2}\ \text{یعنی}\ \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}_1}{\text{فر و}^2} = \frac{\text{ل}^3}{3\,\text{مجھ ی}}\,.\,\frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2}$$

$$\therefore \left(\text{ک} + \frac{33}{140}\,\text{م}\right)\frac{\text{ل}^3}{3\,\text{مجھ ی}}\,.\,\frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2} + \text{عہ} = \text{صفر}$$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران د} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\,\text{م}\right)\text{ل}^3}{3\,\text{مجھ ی}}} \quad \ldots\ldots\ldots(54)$$

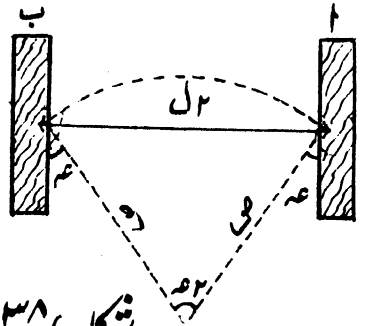
اس مساوات کے ذریعہ ہم کسی سلاخ کے مادے کا ینگ کا معیار لچک آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر سلاخ مستطیلی شکل کی ہو تو $\text{مجھ} = \frac{\text{ب د}^3}{12}$

جہاں ب = سلاخ کا عرض اور د = سلاخ کی گہرائی

(۱۴)

ی اور د کی قیمتیں دریافت کرنیکے لئے سرل کا طریقہ:-

فرض کرو کہ شکل ۳۸ میں ا اور ب دو بالکل ایک ہی شکل اور ایک ہی وزن کی دو سلاخیں ہیں اور ان کے درمیان ایک موٹے تار کے دونوں سرے قائم کئے گئے ہیں اور دونوں سلاخیں تپلی ڈوریوں کے ذریعے افقی وضع میں (سلاخوں کے درمیانی نقطوں سے اسطرح لٹکائی گئی ہیں کہ انکے طولوں کی سمتیں ایک دوسرے کی متوازی ہیں۔



شکل ۳۸

اب اگر سلاخوں کو افقی مستوی میں دائری وضع میں اسطرح اہتزاز کرنے دیں کہ انکے سرے پہلے ایک دوسرے کے قریب ہونے لگیں اور بعد میں آزادانہ حرکت کرنے لگیں تو تار میں خماؤ پیدا ہوگا۔ اگر تار کا طول = ۲ ل اور ہر ایک سلاخ کسی آن میں اپنی پہلی وضع سے زاویہ عہ گھومے تو تار میں جو اسکے خمانے کے لئے جفت پیدا ہوگا $= \dfrac{\text{مج ی}}{\text{ص}_{\text{۱}}}$

جہاں $\text{ص}_{\text{۱}}$ = نصف قطر انحنا جو تار کے خماؤ کی وجہ واقع ہوا۔

$$\therefore \frac{\text{مج ی}}{\text{ص}_{\text{۱}}} = \text{ک ف}_{\text{۱}}^{\text{۲}} \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{عہ}}{\text{فر و}^{\text{۲}}}$$ جہاں $\text{ک ف}_{\text{۱}}^{\text{۲}}$ = اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایسے انتصابی محور کے گرد جو اسکے مرکز جاذبیہ میں سے گزرتا ہو۔

$$\therefore \text{ک ف}_{\text{۱}}^{\text{۲}} \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{عہ}}{\text{فر و}^{\text{۲}}} = \frac{\text{مج ی} \times \text{۲ عہ}}{\text{۲ ل}}$$

یعنی $\dfrac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{عہ}}{\text{فر و}^{\text{۲}}} = \dfrac{\text{مج ی عہ}}{\text{ل ک ف}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}$، یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل ک ف}^{2}}{\text{مج ی}}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\text{۴ ل ک ف}^{2}}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}^{4}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(55)$$

جہاں ص = تار کا نصف قطر

لہذا اسکے ذریعہ تار کے مادے کا ینگ کا معیار لچک معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ اسکے بعد ایک سلاخ کو اوپر قائم کیا جاتا ہے اور دوسری سلاخ کو اسی ہی تار کے ذریعہ شکل ۳۹ کی طرح لٹکا کر دائری وضع میں اہتزاز کرنے دیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں تار میں مروڑ پیدا ہوگا۔

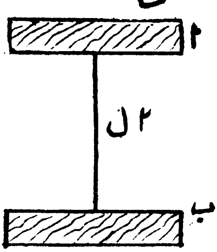
مساوات (۵) سے

$$\text{وقت دوران و}_{1} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{۲ ک ف}^{2}\text{ ل}}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^{4}}}$$

لیکن اس ضابطہ میں ل = تار کا طول،

اگر ۲ ل کو تار کا طول لیا جائے تو $\text{و}_{1} = \sqrt{\frac{\text{۴ ک ف}^{2}\text{ ل}}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^{4}}} \quad \ldots\ldots\ldots(56)$

اگر و_{1} کی قیمت معلوم ہو جائے تو د معلوم ہو جاتا ہے اور پوا سان کی نسبت = مہ $= \frac{\text{ی}}{\text{۲ د}} - 1$ آسانی سے دریافت کیجا سکتی ہے۔



شکل ۳۹

مہ، صرف و_{1} اور و معلوم ہونے سے بھی دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مساوات (۵۵) سے $\text{و}^{2} = \frac{\text{۴}\,\pi^{2}\text{ ۴ ل ک ف}^{2}}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}^{4}}$

$$\therefore \text{ی} = \frac{16\,\pi^{2}\text{ ل ک ف}^{2}}{\text{و}^{2}\,\pi\,\text{ص}^{4}}$$

اور مساوات (۵۶) سے

$$د = \frac{16 \pi^2 ک ف^2 ل}{و_1^2 \pi ص^4}$$

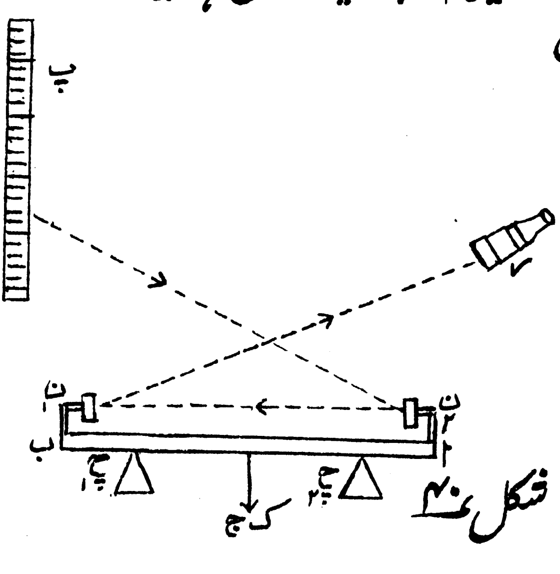
$$\therefore \; م = \frac{ی}{2د} - 1 = \frac{و_1^2}{2و_2} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

ی کی دریافت سلاخ کے خماؤ سے: ـ کسی سلاخ کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک عموماً ایک آسان طریقہ سے دریافت کیا جاتا ہے جس میں سلاخ دونوں سروں پر سہاری جاتی ہے اور وزن اس کے درمیان میں رکھا جاتا ہے۔ مساوات (۲۱) کی مدد سے ی کی قیمت دریافت کیجاتی ہے۔

ایک سوئی کے سرے کو سلاخ کے مرکز پر جما کر اور متحرک خوردبین سے سلاخ کے اُتار کو جبکہ اس کے مرکز پر مختلف اوزان لگائے جائیں، دیکھ کر اُتار کی قیمت دریافت کی جاتی ہے۔

ی کی دریافت کوئنگ کے طریقہ سے: ـ

شکل نمبر ۸۰ میں ا ب ایک سلاخ ہے جو دو دھاردار کناروں $چ_1$ اور $چ_2$ پر ٹکی ہوئی ہے $ن_1$ اور $ن_2$ دو سادہ مستوی آئینے ہیں جو سلاخ کے ساتھ اس کے سروں پر جوڑ دئے جاتے



شکل نمبر ۸۰

ہیں - ر ایک دوربین ہے اور پ ایک لکڑی کا انتصابی پیمانہ ہے۔
وزن ک ج سلاخ کے درمیانی نقطہ پر لگایا جاتا ہے۔

سلاخ پر وزن لگانے کے پہلے' دوربین کے اندر کے صلیبی یا جلیبائی تاروں سے پ کا جو خاص نشان منطبق ہوتا ہے اسکو دیکھ لیا جاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ سلاخ پر وزن لگانے کے بعد پیمانہ پ کا کوئی دوسرا نشان صلیبی تاروں سے منطبق ہوگا - اور آئینہ ن$_1$ داہنی جانب اور ن$_2$ بائیں جانب اپنے ابتدائی مقاموں سے مساوی زاویئے بناتے ہوئے خم جائیں گے - فرض کرو کہ آئینے جو زاویئے بناتے ہوئے خم جاتے ہیں وہ طہ کے مساوی ہے - یہ اس زاویہ کے مساوی ہوگا جو سلاخ کے آزاد سرے خم کر بناتے ہیں - تھوڑی دیر کے لئے اب یہ تصور کرو کہ نور کی شعاعوں کی سمت الٹ دی جاتی ہے - جب آئینہ ن$_1$ زاویہ طہ گھومتا ہے تو شعاع منعکس اپنے ابتدائی مقام سے زاویہ ۲ طہ گھوم جائیگی لہذا وہ نقطہ جہاں شعاع منعکس آئینہ ن$_2$ سے ٹکراتی ہے بقدر فاصلہ ۲ طہ ف$_1$ اپنے ابتدائی مقام سے ہٹ جائیگا' جہاں ف$_1$ = دونوں آئینوں کے درمیان فاصلہ -

چونکہ آئینہ ن$_2$ بھی زاویہ طہ گھوم جاتا ہے اس لئے ن$_2$ سے منعکس شعاع زاویہ ۴ طہ گھوم جائے گی - لہذا پیمانہ کی درجہ خوانی اس کی وجہ سے ۴ طہ ف$_2$ بدل جائے گی -

جہاں ف$_2$ = پ اور ن$_2$ کے درمیانی فاصلہ کے

∴ پیمانہ کے مشاہدات کا مجموعی ہٹاؤ جو دوربین میں نظر آئے گا =

= س (فرض کرو)

= ۲ طہ ف$_1$ + ۴ طہ ف$_2$

= ۲ طہ (ف$_1$ + ۲ ف$_2$)

$$\therefore \text{طہ} = \frac{\text{س}}{\text{۲}(\text{ف}_1 + \text{۲ ف}_2)} \qquad \text{(۵۸)}$$

اگر سلاخ کا ایک سرا قائم کر دیا جائے اور دوسرے پر وزن لٹکایا جائے تو مساوات (۲۶) سے ظاہر ہے کہ

$\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ک ج}{ی مج}\left(ل لا - \frac{لا^2}{2}\right)$ بشرطیکہ سلاخ کا وزن نظر انداز کر دیا جائے

اگر لا = ل رکھا جائے تو $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ک ج ل^2}{2 ی مج}$

مگر $\frac{فرما}{فرلا}$ = اس زاویہ کے مماس کے جو سلاخ خم جاتی ہی = مس ط

$\therefore مس ط = \frac{ک ج ل^2}{2 مج ی}$

لیکن اس صورت میں ک ج = $\frac{ک ج}{2}$ اور ل = $\frac{ل}{2}$ لے لینا چاہیے

$\therefore مس ط = \frac{ک ج ل^2}{16 مج ی}$

اگر اُتار بہت ہی کم ہو تو ط بہت ہی چھوٹا ہوگا۔

اسلئے مس ط $\simeq$ ط

$\therefore$ مساوات (۵۸) سے $ط = \frac{ک ج ل^2}{16 مج ی} = \frac{س}{2(ف_1 + 2ف_2)}$

$\therefore ی = \frac{ک ج ل^2 (ف_1 + 2ف_2)}{8 س مج}$ ....(۵۹)

اگر سلاخ مستطیلی وضع کی ہو تو $مج = \frac{ب د^3}{12}$

جہاں ب = اس سلاخ کا عرض اور د = گہرائی

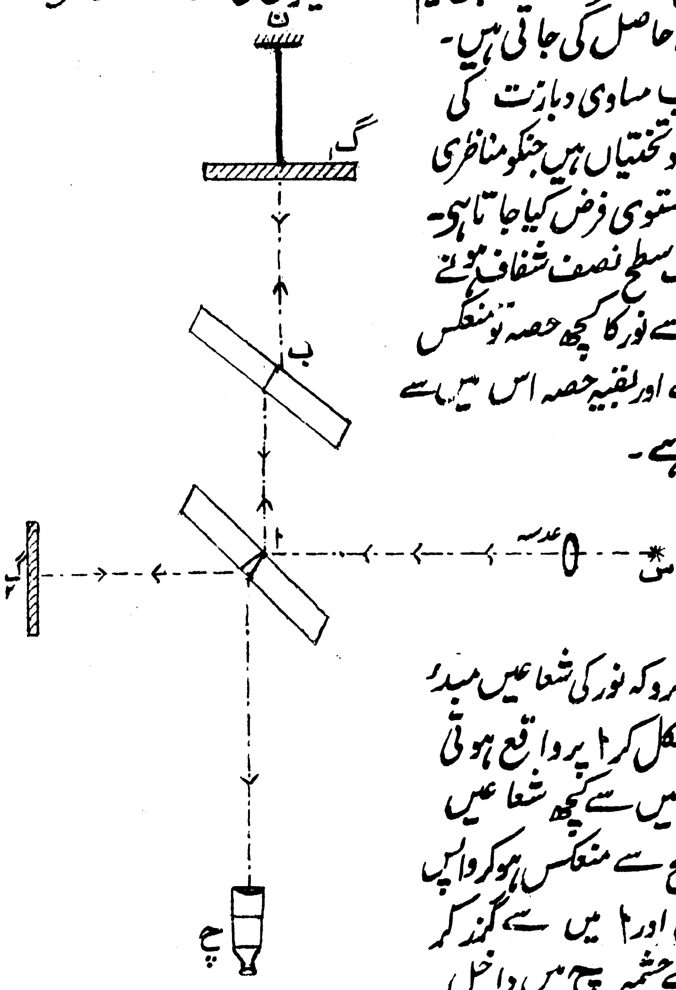
اگر سلاخ اسطوانہ نما ہو تو $مج = \frac{\pi ص^4}{4}$

جہاں ص = اسکا نصف قطر

ینگ کے معیار لچک کی دریافت (مناظری طریقہ سے)

پہلا طریقہ :- اس طریقہ کی توضیح شکل ۱۴۱ سے ہوتی ہے۔ اسمیں میکلسن کے طریقہ کے مطابق نیم شفاف تختیوں کی مدد سے تداخلی دھاریاں حاصل کی جاتی ہیں۔

ا اور ب مساوی دبازت کی شیشہ کی دو تختیاں ہیں جنکو مناظری لحاظ سے مستوی فرض کیا جاتا ہے۔ ا کی ایک سطح نصف شفاف ہونے کی وجہ سے نور کا کچھ حصہ تو منعکس ہوجاتا ہے اور بقیہ حصہ اس میں سے گزر جاتا ہے۔



فرض کرو کہ نور کی شعاعیں مبدء س سے نکل کر ا پر واقع ہوتی ہیں۔ ان میں سے کچھ شعاعیں اوپر کی سطح سے منعکس ہو کر واپس ہوتی ہیں اور ا میں سے گزر کر دوربین کے چشمہ چ میں داخل ہوتی ہیں۔

شکل ۱۴۱

شعاعوں کا بقیہ حصہ ا سے

منعطف ہوکر ایک دوسرے مستوی آئینہ گ۲ تک جاتا ہے اور پھر اس آئینہ سے منعکس ہوکر ا تک آتا ہے۔ بالآخر یہ شعاعیں بھی چشمہ میں داخل ہوتی ہیں۔ ظاہر ہے کہ ا پر واقع ہونے والی شعاعوں کے پہلے حصہ اور اس دوسرے حصہ میں تداخل ہوگا اور دوربین کے چشمہ میں تداخلی دھاریاں نظر آئیں گی۔ اگر کسی ایک آئینہ اور شیشہ کی تختی ا کا درمیانی فاصلہ بدل دیا جائے تو چشمہ میں دھاریاں ہٹتی ہوئی نظر آئیں گی۔

فرض کرو کہ گ۱ کے وسطی حصہ میں ایک چھوٹے تار کا ایک سرا اور اسکا دوسرا سرا ان پر جما دیا جاتا ہے۔ تار کو ہم اگر کسی طریقہ سے کھینچیں تو گ۱ نیچے جائے گا اور گ۱ اور ا کا درمیانی فاصلہ بدل جائے گا، اسلئے تداخلی دھاریاں بھی ہٹ جائیں گی۔ ان کا نقل مقام ایک ایسے چشمہ کی مدد سے جس کے اندر خرد پیما ہو، آسانی سے ناپا جا سکتا ہے۔ اس طرح آئینہ گ۱ کی حرکت $\frac{۱}{\text{دس لاکھ}}$ سمر تک ناپی جا سکتی ہے۔ یہ طریقہ بے حد حساس ہے اور کیمبرج میں شکسپیر نے اسکوینگ کے معیار لچک کی دریافت میں استعمال کیا تھا۔

فرض کرو کہ ایک لونی نور جسکا طول موج لہ ہے استعمال کیا جا رہا ہے۔
منور دھاریوں کے لئے راستوں میں تفاوت = ع لہ = لا
(فرض کرو) جہاں ع کوئی صحیح عدد ہے۔

فرض کرو کہ آئینہ گ۱ نیچے کی طرف ایک خاص فاصلہ ما تک حرکت کرتا ہے اور اسکی وجہ سے عَ تعداد کی منور دھاریاں نقل مقام کرتی ہیں۔

اس صورت میں راستوں کا تفاوت = (ع + عَ) لہ =
= (فرض کرو) لاَ

چونکہ ۲ اور گ۲ کے درمیان فاصلہ حسب سابق رہا

∴ لَاَ - لا = ۲ ما = عَ لہ

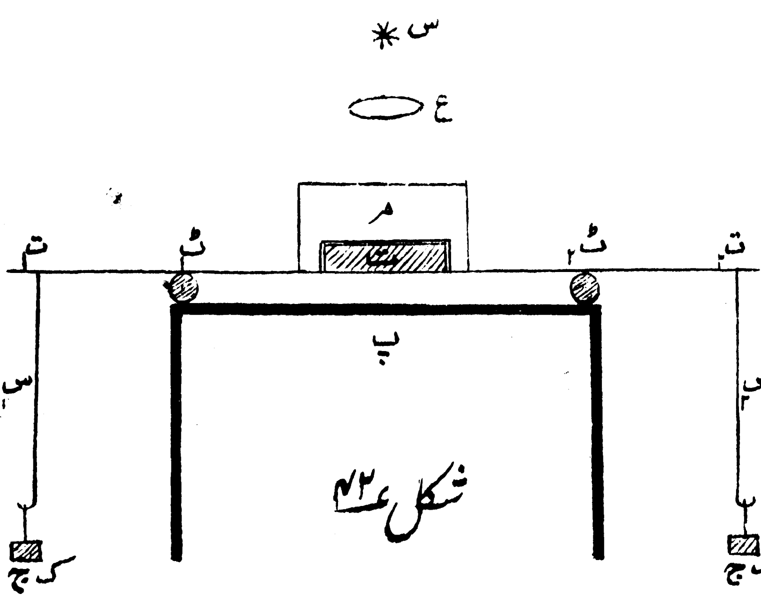
∴ ما = عَ لہ / ۲ .... (۶۰)

اسکے ذریعہ ما یعنی تار کا اضافۂ طول معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اگر کسی سلاخ کے سرے سہاروں پر ٹکادئے جائیں اور سلاخ کے درمیانی حصہ میں وزن لٹکایا جائے تو اس طریقہ سے اسکا اُتار بھی صحت کے ساتھ دریافت کیا جاسکتا ہے۔

دوسرا طریقہ :- اس طریقہ سے شیشہ کے لئے ینگ کا معیار لچک اور استواری کی شرح دریافت کی جاتی ہے۔

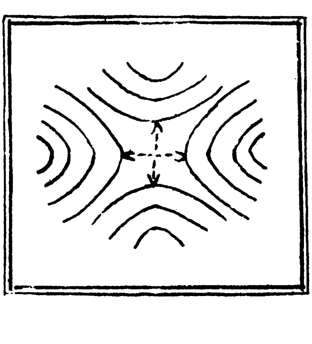
شکل ۴۲ میں ایک لمبی مستطیلی شیشہ کی تختی، دو شیشہ کی نلیوں ٹ۱ اور ٹ۲ پر (جو تخت موم کے ذریعہ لکڑی کے تختہ سے جوڑ دی جاتی ہیں) متشاکل طریقہ سے رکھی جاتی ہے، ت۱ اور ت۲ دو چھوٹی شیشہ



شکل ۴۲

کی نلیاں ہیں جس کو لاک سے شیشہ کی تختی کی اوپر والی سطح کے ساتھ جما دیا جاتا ہے اور ان دونوں چھوٹی شیشہ کی نلیوں میں سے تانبے کے تار کے لمبے رکاب نما ٹکڑے گزرتے ہیں جن کو شکل ۴۲ میں $س_1$ اور $س_2$ سے تعبیر کیا گیا ہے۔

ت ایک مناظری طور پر مستوی شیشہ کی موٹی تختی ہے جو پہلی تختی کے مرکز پر رکھ دی جاتی ہے۔ شیشہ کا ایک ٹکڑا ھ افق کے ساتھ ۴۵° بناتے ہوئے، شیشہ کی موٹی تختی ت پر رکھا جاتا ہے۔ ایک چھوٹا آئینہ جو شکل میں نہیں بتایا گیا ایک لوہے کے استادہ کو لگا کر ان سب کے اوپر کسی مناسب زاویہ پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ھ سے نیچے منعکس ہونے والی (سوڈیم کے مبدء نور س کی) شعاعوں سے کوئی تداخلی دھاریاں بنیں تو اچھی طرح نظر آ سکیں۔ ت اور شیشہ کی تختی کے درمیان ہوا کی پتلی جھلی بن جاتی ہے اور اس کی وجہ سے تداخلی دھاریاں جو شکل ۴۳ میں دکھلائی گئی ہیں پیدا ہوتی ہیں۔ ان کو ایک متحرک خوردبین سے، جو دوربین کی طرح (سامنے ایک عدسہ رکھ کر) استعمال کی جا سکتی ہے، دیکھا جاتا ہے۔ ایک وزن ک ج دونوں رکابیوں $س_1$ اور $س_2$ پر لگایا جاتا ہے۔ آئینہ اور شیشہ کی موٹی تختی ت کو ایک موزوں مقام پر اسطرح ترتیب دیتے ہیں کہ متحرک دوربین کے ذریعہ دیکھنے سے ہزلولی شکل کی دھاریاں شیشہ کی تختی اور ت کے درمیان نظر آنے لگیں۔ شیشہ کی تختی کے طولی خماد کی وجہ سے دھاریاں سیدھے اور بائیں جانب اور



شکل ۴۳

عرضی خماؤ کی وجہ سے اوپر اور نیچے کی جانب مقعر ہونے لگتی ہیں۔

مختلف دھاریوں کے قطر، متحرک دوربینیا سے احتیاط کے ساتھ ناپے جاتے ہیں۔

مساوات (۳۲) سے خمیدگی کا معیار اثر = ک ج × ل = $\frac{\text{ی مج}}{\text{ص}}$

جہاں ۲ل = (ٹ۱ اور ٹ۲ کا درمیانی فاصلہ) ـ (ٹ۱ اور ٹ۲ کا درمیانی فاصلہ)

ص = طولی خماؤ کا نصف قطر انحنا

مج = $\frac{\text{ب ا}^3}{12}$ جہاں ب = شیشہ کی تختی کا عرض

ا = " " کی گہرائی

اگر ن ویں تداخلی دھاری کا قطر ف ہو تو

$\frac{\text{ف}^2}{4}$ = ص ن لہ جہاں لہ = سوڈیم کے نور کا اوسط طول موج

= ۵۸۹۳ × ۱۰$^{-8}$ سمر

$$\therefore \text{ی} = \frac{\text{ک ج ل ص}}{\text{مج}} = \frac{\text{۳ک ج ل ف}^2}{\text{ن لہ ب ا}^3} \quad \ldots\ldots\ldots (61)$$

تجربہ میں ف^2 کو ن کے مقابل مرتسم کرو۔ ایک خطی رشتہ حاصل ہوگا اور اس خط مستقیم کی ڈھال سے کسی خاص وزن کے لئے اسکی اوسط قیمت حاصل ہوگی۔

اس کے بعد ک ج کو $\frac{\text{ن}}{\text{ف}^2}$ کی متناظر قیمتوں کے مقابل مرتسم کرو۔ پھر بھی ایک خط مستقیم حاصل ہوگا۔ اس کے ڈھال سے $\frac{\text{ک ج ف}^2}{\text{ن}}$ کی اوسط قیمت حاصل ہو جائے گی۔ لہذا مساوات (۶۱) میں یہ قیمت لکھنے سے (چونکہ دوسری تمام چیزیں معلوم ہیں) ینگ کے معیار لچک کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

اگر اسی طرح صَ = عرضی خماؤ کا نصف قطر انحنا

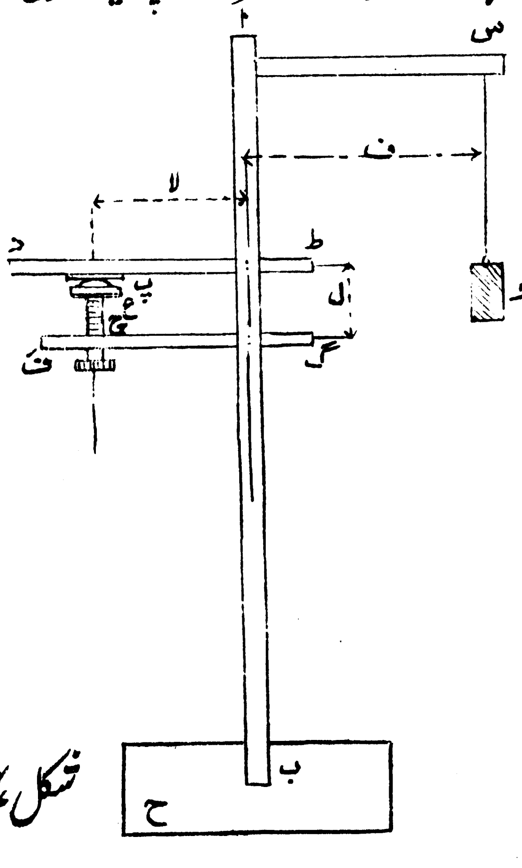
تو صَ نَ لہ = $\frac{\text{فَ}^2}{4}$ جہاں فَ = نَ ویں تداخلی دھاری کا قطر

∴ پواسان کی نسبت مہ = صَ/سَ = ف²/ن × نَ/فَ² ....(۶۲)

اس سے پواسان کی نسبت معلوم ہو جاتی ہے۔

اب چونکہ ی اور مہ معلوم ہیں اسلئے استواری کی شرح معلوم ہو سکتی ہے۔

تیسرا طریقہ:۔ ایک فولادی سلاخ ا ب جسکے تراش عمودی کی وضع دائری ہے اور جسکے مادّے کے ینگ کا معیار لچک دریافت طلب ہے، ایک بھاری قاعدہ ح میں اس طرح استادہ کی جاتی ہے کہ اس کا محور انتصابی رہتا ہے۔ ایک افقی بازو ا س سلاخ کے اوپر کے سرے کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے اور اس بازو کے سرے س پر ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ دیکھو شکل ۴۴ ا ب کے ساتھ مضبوطی سے پکڑی ہوئی دو تختیاں ط د اور گ فَ ہیں۔ اوپر والی تختی میں ایک مستوی شیشہ کا ٹکڑا پ پیچوں پر سہارا جاتا ہے (یہ پیچ شکل میں نہیں



شکل ۴۴

دکھلائے گئے ہیں) اور نچلی تختی میں سے ایک پیچ پ گزرتا ہے جس کے اوپر کے سرے پر ایک مستوی محدب عدسہ ع رکھا ہوا ہوتا ہے۔

اس پیچ کی مدد سے عدسہ ع کو اتنا اوپر ہٹایا جاتا ہے کہ یہ مستوی شیشہ پ کو چھونے لگے اگر تختی اور عدسہ کے نظام کو ایک لو لی نور (ط د کے اوپر اس سے ۴۵° مائل ایک شیشہ کی تختی رکھ کر سوڈیم کے شعلہ کے نور کو منعکس کیا جائے) سے منور کیا جائے تو نیوٹن کے حلقے نظر آئیں گے۔ ان حلقوں کا ایک خوردبین کی مدد سے (جسکا محور پ کے اوپر انتصابی ہو) امتحان کیا جاسکتا ہے تختی پ کو پیچوں کے ذریعہ اتنا ہٹانا چاہیئے کہ یہ عدسہ ع کے بلند ترین نقطہ پر مس کرنے لگے اور پ اور ع کی درمیانی فضا کو بغیر مس کئے حتی الامکان گھٹانا چاہیئے۔ ا س پر ہاتھ کا ہلکا سا دباؤ ان حلقوں کو اندر کی جانب بند ہونے پر مجبور کرے گا۔ لیکن یہ عمل اگر واقع نہ ہو تو اس کا مطلب یہ سمجھنا چاہیئے کہ پ اور ع ایک دوسرے کو مس کر رہے ہیں۔ ایسی صورت میں پیچ کو اتنا گھمانا چاہیئے کہ ایک بالکل چھوٹی سی جگہ پ اور ع کے درمیان چھوٹ جائے۔ س پر وزن کو بتدریج بڑھانے کے لئے انتظام ہوتا ہے، اس سے حلقے خوردبین کے میدان نظر میں اتنا آہستہ حرکت کرتے ہیں کہ انکو گن لیا جاسکتا ہے۔ پھر ایک دئے ہوئے وزن کو بتدریج لگانے سے حلقوں کی وہ تعداد جو مرکز کے پاس غائب ہوتے ہیں گن لی جاسکتی ہے۔ متبادل طور پر، مرکز پر بننے والے نئے حلقوں کی تعداد جبکہ وزن بتدریج کم کیا جاتا ہے شمار کی جاسکتی ہے۔ اس عمل کو مختلف وزن لگاکر دہرانا چاہیئے۔

فرض کرو کہ وزن جو لگایا جاتا ہے وہ ک ج کے مساوی ہے اور ا س = ف اور ط گ = ل اور لا = سلاخ کے محور

اور عدسہ اور تختی کے نقطہ تماس کے درمیان فاصلہ

چونکہ سلاخ کے سرے پر ایک جفت ک ج ف اور قوت ک ج عمل کر رہی ہے۔

لہذا جفت جو سلاخ کو خمائے گا اس کی تعبیر $\frac{\text{ی مج}}{\text{ص}} =$

$=$ ک ج ف سے ہوگی۔ جہاں ص $=$ نصف قطر انحنا

ی $=$ سلاخ کے ینگ کا معیار لچک

مج $=$ سلاخ کے تراش عمودی کے جمود کا معیار اثر قطر کے گرد

$= \pi\, \text{ص}_1^4$

لہذا $\frac{\text{مج}}{\text{ص}} = \frac{4\,\text{ک ج ف}}{\pi\,\text{ی ص}_1^4}$

ط د اور گ فَ تختیوں کے درمیانی زاویہ میں سلاخ کے خماؤ کی وجہ سے اضافہ $\frac{\text{ل}}{\text{ص}}$ ہوگا

یعنی خماؤ کی وجہ سے عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں اضافہ $=$

$= \text{لا} \times \frac{\text{ل}}{\text{ص}} = \frac{4\,\text{ک ج ف لا ل}}{\pi\,\text{ی ص}_1^4}$

اور وزن ک ج کی وجہ سے سلاخ کے طول میں فی سمر کمی

$= \frac{\text{ک ج}}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}_1^2}$

یعنی وزن کی وجہ سے عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں کمی $= \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}_1^2}$

لہذا عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں مجموعی اضافہ $=$

$$= \frac{4\,\text{ک ج ف لا ل}}{\pi\,\text{ی ص}_1^4} - \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}_1^2}$$

$$= \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}_{۱}^{۴}}\left(\text{۴ ف لا} - \text{ص}_{۱}^{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{ن لہ}$$

جہاں ن = ان حلقوں کی تعداد جو غائب ہو جاتے ہیں

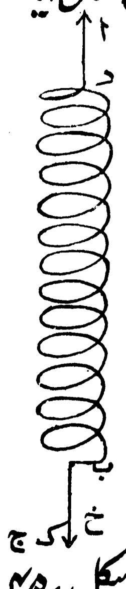
لہ = سوڈیم D خطوط کا اوسط طول موج

$= ۵٫۸۹۳ \times ۱۰^{-۵}$ سم

$$\text{لہذا ی} = \frac{\text{۲ک ج ل}\left(\text{۴ف لا} - \text{ص}_{۱}^{۲}\right)}{\text{ن لہ}\,\pi\,\text{ص}_{۱}^{۴}} \quad \text{........(۶۳)}$$

اگر ن کو ک کے مقابلہ میں مرتسم کیا جائے تو ایک خط مستقیم حاصل ہوگا جس کے ڈھلاؤ سے ی کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

مرغولہ دار کمانیاں :- ایک ایسی چپٹی مرغولہ دار کمانی پر غور کرو جس کے پیچ قریب قریب لپیٹے گئے ہوں اور جس کے تار کا نصف قطر خود کمانی کے نصف قطر کے مقابلہ میں چھوٹا ہو۔ اس قسم کی کمانی ایک موٹے تار کو مناسب قطر کے اسطوانہ پر اسطرح لپیٹنے سے بنائی جا سکتی ہے کہ تار کا مستوی ہر جگہ اسطوانہ کے محور کے علی القوائم رہے۔ فرض کرو کہ ایسی کمانی کے سرے دو دفعہ علی القوائم خم کئے جاتے ہیں جیسا کہ شکل ۴۵ میں ب خ اور ا د سے تعبیر کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ کمانی انتصابی وضع میں ا پر جکڑ دی جاتی ہے اور اسکے نقطہ خ پر وزن ک ج لگایا جاتا ہے۔ اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ۲ ص۱ = اس اسطوانہ کا قطر جس پر مرغولہ بنایا جاتا ہے۔



شکل ۴۵

اور ۲ ص۲ = خود تار کا قطر۔

اور کمانی کا طول (یہ تصور کرتے ہوئے کہ اسکو کھولکر اگر سیدھا کر دیا جائے) = ل
اور جب وزن کوئی فاصلہ لا نیچے اُترتا ہے تو مروڑ بقدر زاویہ طہ واقع ہوتی ہے

$$\text{تب جفت} = \frac{\text{د طہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\, \text{ص}_2^4}{2}$$

جہاں د = تار کے مادے کی استواری کی شرح
لیکن اس کے تراش پر جفت = ک ج ص۱

$$\therefore\ \text{ک ج ص}_1 = \frac{\text{د طہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\, \text{ص}_2^4}{2}$$

$$\text{اور وزن کا اُتار} = \text{لا} = \text{ص}_1\,\text{طہ} = \frac{2\,\text{ک ج ل ص}_1^2}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_2^4} \quad \ldots\ldots (۶۴)$$

اب ہم اس کمانی کی توانائی بالقوہ دریافت کرینگے :-
کمانی کو ایک چھوٹا فاصلہ فرلا، کھینچنے میں جو کام کرنا ہوتا ہے =
= ک ج فرلا

$$\therefore\ \text{مجموعی کام، جو کمانی کو فاصلہ لا تک کھینچنے میں کرنا ہوگا} = \int_{\text{صفر}}^{\text{لا}} \text{ک ج فرلا}$$

$$\text{یعنی کمانی کی توانائی بالقوہ} = \int_{\text{صفر}}^{\text{لا}} \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_2^4}{2\,\text{ص}_1^2\,\text{ل}} \cdot \text{لا فرلا} =$$

$$= \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_2^4\,\text{لا}^2}{4\,\text{ص}_1^2\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots (۶۵)$$

اب ہم اسکی توانائی بالفعل دریافت کرینگے :-
اگر کمانی ایک بہت ہی چھوٹا فاصلہ فرلا، ایک بالکل چھوٹے وقت کے وقفہ فرو میں طے کرے تو مرتعش کمیت کی توانائی بالفعل =

$$= \frac{1}{2}\,\text{ک} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (۶۶)$$

اس کمانی کے اوپر والے سرے سے س فاصلہ پر ایک چھوٹا سا ٹکڑا فرس تصور کرو۔

اگر اس کمانی کی پوری کمیت م ہو تو اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت $\frac{م\ فرس}{ل}$ ہوگی اور اس کی رفتار $\frac{س}{ل} \cdot \frac{فرلا}{فرو}$ ہوگی۔

$$\therefore \text{اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل} = \frac{١}{٢}\, م\, \frac{فرس}{ل} \cdot \frac{س^{٢}}{ل^{٢}} \left(\frac{فرلا}{فرو}\right)^{٢}$$

اسی طرح اور ٹکڑے لینے سے اس کمانی کی توانائی بالفعل

$$= \int_{صفر}^{ل} \frac{١}{٢} \left(م\, \frac{فرس}{ل}\right) \frac{س^{٢}}{ل^{٢}} \left(\frac{فرلا}{فرو}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١}{٦}\, م \left(\frac{فرلا}{فرو}\right)^{٢} \quad \ldots\ldots\ldots (٦٧)$$

$$\therefore \text{پوری توانائی بالفعل} = \frac{١}{٢} \left(\frac{فرلا}{فرو}\right)^{٢} \left\{ک + \frac{١}{٣}\, م\right\} \quad \ldots (٦٨)$$

لیکن بقائے توانائی کے مسئلہ سے توانائی بالقوہ +
+ توانائی بالفعل = مستقل

یعنی مساوات (٦٥) اور (٦٨) سے :—

$$\frac{د\, \pi\, ص_{٢}^{٤}\, لا^{٢}}{٤\, ص_{١}^{٢}\, ل} + \frac{١}{٢} \left(\frac{فرلا}{فرو}\right)^{٢} \left\{ک + \frac{١}{٣}\, م\right\} = \text{مستقل}$$

اس مساوات کو وقت کے لحاظ سے تفرقانے سے :—

$$\frac{د\, \pi\, ص_{٢}^{٤}}{٢\, ص_{١}^{٢}\, ل} \cdot لا \cdot \frac{فرلا}{فرو} + \left(ک + \frac{١}{٣}\, م\right) \frac{فرلا}{فرو} \cdot \frac{فر^{٢}لا}{فرو^{٢}} = صفر$$

$$\text{یعنی} \left(ک + \frac{١}{٣}\, م\right) \frac{فر^{٢}لا}{فرو^{٢}} + \frac{د\, \pi\, ص_{٢}^{٤}}{٢\, ص_{١}^{٢}\, ل}\, لا = صفر$$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے

اسلئے وقت دوران $\text{و} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(\text{ک} + \frac{1}{3}\text{م})\,4\,\text{ص}^2\,\text{ل}}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}^4}}$ ....(۶۹)

اس طرح کمانی کو انتصابی وضع میں اہتزاز میں لاکر اس کے مادّے کی استواری کی شرح دریافت کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۴۵ب میں بجائے وزن ک ج کو خ پر لٹکانے کے ایک سلاخ کو اس کے درمیانی نقطہ سے افقی وضع میں خ سے لٹکایا جاتا ہے اور سلاخ کمانی کے مستوی میں دائری اہتزاز کرتی ہے۔ اگر سلاخ اپنے ابتدائی مقام سے زاویہ ط گھومے اور کسی چھوٹے وقت کے وقفہ فرو میں زاویہ فرط بنے تو

کمانی کی توانائی بالقوہ = سلاخ کو زاویہ ط گھمانے میں جو کام کیا گیا =

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} (\text{جفت})\,\text{فرط} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} \text{ی}\,\frac{\text{مج}}{\text{ص}}\,\text{فرط}$$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} \text{ی}\,.\,\frac{\text{مج}\,.\,\text{ط}}{\text{ل}}\,.\,\text{فرط}$$

$$= \frac{\text{ی}\,.\,\text{مج}\,\text{ط}^2}{2\,\text{ل}} \quad \text{.........} (۷۰)$$

جہاں ی = تار کے مادے کا ینگ کا معیار لچک

$\text{مج} = \frac{\pi}{4}\,.\,\text{ص}^4$

اور ص = تعدیلی سطح کا نصف قطر انحنا۔

اب سلاخ کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2}\,\text{مجَ}\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2$ ....(۷۱)

جہاں مجَ = سلاخ کے جمود کا معیار اثر انتصابی محور کے گرد'

اب اسی طرح کمانی کے اوپر کے سرے سے س فاصلہ پر ایک چھوٹا سا

ٹکڑا فرس تصور کرو۔

اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2} م \frac{فرس}{ل} . \frac{س^2}{ل^2} . \left(ص_1 \frac{فرطہ}{فرو}\right)^2$

کیونکہ خطی رفتار $= \frac{ص_1}{ل} \times$ زاوئی رفتار

$\therefore$ کمانی کی توانائی بالفعل $= \int_{صفر}^{ل} \frac{1}{2} م \frac{فرس}{ل} . \frac{س^2}{ل^2} . ص_1^2 \left(\frac{فرطہ}{فرو}\right)^2$

$$= \frac{1}{6} م ص_1^2 \left(\frac{فرطہ}{فرو}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (۷۲)$$

$\therefore$ مجموعی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2}\left(\frac{فرطہ}{فرو}\right)^2 \left\{ مجَ + \frac{1}{3} م ص_1^2 \right\} \quad \ldots (۷۳)$

اب بقائے توانائی کے مسئلہ سے:—

توانائی بالقوہ + توانائی بالفعل = مستقل

$$\therefore \frac{ی\, مج\, طہ^2}{2 ل} + \frac{1}{2}\left(\frac{فرطہ}{فرو}\right)^2 \left\{ مجَ + \frac{1}{3} م ص_1^2 \right\} = مستقل$$

اس مساوات کو وقت کے لحاظ سے تفرقانے سے:—

$$\frac{ی\, مج}{ل} طہ . \frac{فرطہ}{فرو} + مجَ \frac{فرطہ}{فرو} . \frac{فر^2 طہ}{فرو^2} + \frac{1}{3} م ص_1^2 \frac{فرطہ}{فرو} . \frac{فر^2 طہ}{فرو^2} = صفر$$

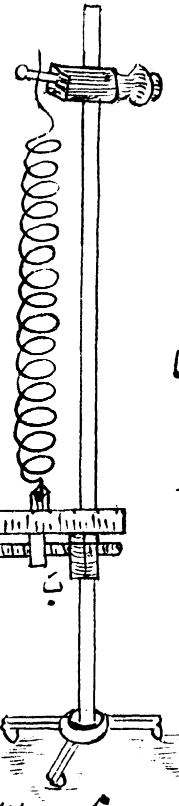
یعنی $\frac{فر^2 طہ}{فرو^2}\left(مجَ + \frac{1}{3} م ص_1^2\right) + \frac{ی\, مج}{ل} طہ = صفر$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$\therefore$ وقت دوران وَ $= 2\pi \sqrt{\frac{\left(مجَ + \frac{1}{3} م ص_1^2\right) ل}{ی\, مج}} \quad \ldots\ldots (۷۴)$

اس طرح کمانی کو دائری وضع میں اہتزاز میں لاکر اس کے مادّے کا ینگ کا معیار لچک معلوم کیا جا سکتا ہے۔

یہ تجربے ولبر فورس کے جمودی جسم کی مدد سے کئے جا سکتے ہیں،



شکل ۴۶

ذیل میں ایک نظام کی شکل دکھائی گئی ہے (شکل ۴۶) یہ ایک چپٹی کمانی پر منحصر ہے جسکا ایک سرا جما دیا جاتا ہے اور دوسرے سرے پر ولبر فورس کا بنایا ہوا ایک جمودی جسم جو کمانی کے محور کے لحاظ سے متشاکل ہوتا ہے، لگا دیا جاتا ہے - یہ جسم انتصابی اور زاوئی دونوں ہٹاؤ کے لحاظ سے اہتزار میں لایا جا سکتا ہے -

مساوات (۶۹) اور (۷۴) سے ظاہر ہے کہ:-

$$وَ = ۲\pi\sqrt{\frac{\left(جَ + \frac{۴ صَ_۱^۲}{۳}\right) ل}{\frac{\pi}{۴} ی صَ_۲^۴}}$$

$$\text{اور}\quad و = ۲\pi\sqrt{\frac{ک + \frac{۴}{۳}}{\frac{\pi د ص_۲^۴}{۲ ل ص_۱^۲}}}$$

زاوئی اہتزازات :- اوپر کے آلہ میں جمودی جسم کی شکل جمود کے معیار اثر کی دریافت کے لئے موزوں نہیں ہے بلکہ اسطرح اسکو بنایا گیا ہے کہ کمانی کے محور کے گرد اسکے جمود کا معیار اثر، دو مساوی پیتل کے اسطوانوں ب، بَ کو محور سے قریب لانے یا دور لے جانے سے بدل دیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ جمود کا معیار اثر مجَ ہے جبکہ اسطوانوں کی کمیت کے مرکزِ محور سے لا سمر کے فاصلہ پر ہوں۔ تب مساوات (۷۴) سے :-

وَ² = عہ (مجَ + ۴ص۱² / ۳) .... (۷۵)

جہاں عہ اسطوانوں کے تمام مقامات کیلئے مستقل ہے

اسی طرح اگر و۱، و۲، و۳ وغیرہ اوقات دوران ہوں جبکہ محور سے فاصلے لا۱، لا۲، لا۳ وغیرہ اور ان کے متناظر جمود کے اثری معیار مج۱، مج۲، مج۳ وغیرہ ہوں

تب و۱² = عہ (مج۱ + ۴ص۱² / ۳) .... (۷۶)

اور و۲² = عہ (مج۲ + ۴ص۱² / ۳) .... (۷۷)

اور و۳² = عہ (مج۳ + ۴ص۱² / ۳) .... (۷۸)

.... وغیرہ اگر لا > لا۱ > لا۲ > لا۳ وغیرہ

مساوات (۷۵) اور (۷۶) سے

(مجَ + ۴ص۱² / ۳) / (مجَ − مج۱) = وَ² / (وَ² − و۱²)

یا مجَ + ۴ص۱² / ۳ = [وَ² / (وَ² − و۱²)] (مجَ − مج۱)

= ۲ م۱ وَ² (لا² − لا۱²) / (وَ² − و۱²)

چونکہ مجَ − مج۱ = اوپر والے نظام کے جمود کے معیار اثر کی تبدیلی اسطوانوں کو لا سے لا۱ کے مقام تک تبدیل کرنے کی وجہ سے =

= ۲ م۱ (لا² − لا۱²) متوازی محوروں کے اصول سے

جہاں ۲م$_۱$ = اسطوانوں کے کمیتوں کا حاصل جمع

لہذا اگر وقت دوران کے مشاہدات، اسطوانوں کے مقامات سے متعدد مساوی فاصلوں کے لئے حاصل کئے جائیں تو $\left(\text{مج} + \frac{\text{۴ص}_۱^۲}{۳}\right)$ کی اوسط قیمت ذیل کی مساوات سے حاصل کی جاسکتی ہے :-

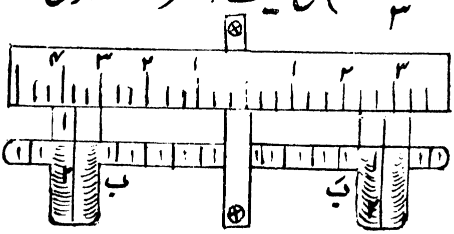
$$\text{مج} + \frac{\text{۴ص}_۱^۲}{۳} = \frac{\text{۴۲م}_۱ (\text{لا}_۰^۲ - \text{لا}_۱^۲)\, \text{و}^۲}{\text{و}^۲ - \text{و}_۱^۲}$$

$$= \frac{\text{۴۲م}_۱ (\text{لا}_۰^۲ - \text{لا}_۲^۲)\, \text{و}^۲}{\text{و}^۲ - \text{و}_۲^۲} \quad \text{وغیرہ وغیرہ}$$

اور مساوات (۴۷) سے ی کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

ولبر فورس کے جمودی جسم کی وضع مفصل طور پر شکل ۴۷ میں دکھائی گئی ہے۔

تجربہ میں $\left(\text{مج} + \frac{\text{۴ص}_۱^۲}{۳}\right)$ کی قیمت اسمر کے مساوی اضافوں سے اسطوانوں کے مقام کو بدل بدل کر، اس درجہ دار پیمانہ پر جو پیچ کے متوازی، اوپر لگا ہوا ہے، لینے سے بسہولت دریافت کی جاسکتی ہے۔ ایک چلر کنی گھڑی سے ہر ایک مقام کے متناظر، ارتعاش کا وقت دوران معلوم کیا جاسکتا ہے۔



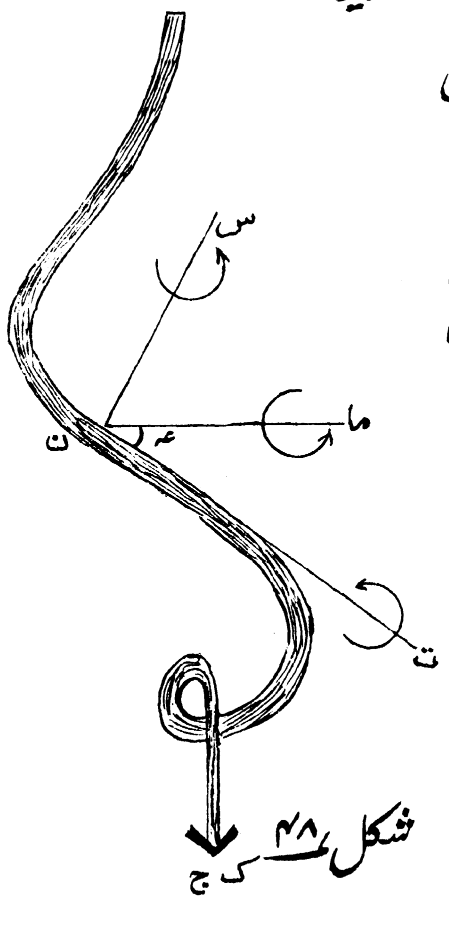
شکل ۴۷

چونکہ ٹھوس اسطوانوں کی کمیتیں بالکل مساوی نہیں ہوتیں ان کی کمیتوں کا مجموعہ ۲م$_۱$ کے مساوی لینا چاہیئے۔ کمان کی نصف قطر کی قوت ۴ ہونے کی وجہ سے اس کی پیمائش میں بڑی احتیاط چاہیئے۔

تار پر ایک ایک سمر کے فاصلوں پر قطر کے مشاہدات خُرد پیما پیچ سے لینے چاہئیں، تاکہ ص کی اوسط قیمت حاصل ہو سکے۔ اہتزاز گنتے وقت دوربین کا استعمال بہتر ہوگا۔

چونکہ انتصابی نقل مقام کی صورت میں وقت دوران کی قیمت اسطوانوں کے ہر متشاکل وضع کے لئے ایک ہی ہوتی ہے اس لئے مساوات (۶۹) کی مدد سے د معلوم ہو جاتا ہے۔

شکل (۱۳) کی طرح کمانی کو بھاپ کی نلی میں رکھ کر ی اور د کی تپشی قدر بھی ہم دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۴۸

مائل مرغولہ دار کمانی :-

مائل کمانی کا ایک حصہ جو دائری تار سے بنایا گیا ہے شکل ۴۸ میں دکھلایا گیا ہے۔

جب وزن ک ج نیچے کی جانب عمل کرتا ہے تو کمانی میں خماؤ اور مروڑ دونوں واقع ہوتے ہیں۔ اس صورت میں ہم یہ فرض کریں گے کہ وزن ک ج، اس اسطوانہ کے محور کی سمت میں جس پر کہ کمانی لپیٹی جاتی ہے عمل کرتا ہے۔ نقطہ ن کے پاس کمانی کے ایک چھوٹے سے حصہ پر غور کرو۔ یہاں جفت دو سمتوں

ن ت اور ن س میں تحلیل ہو جاتا ہے۔ ن ت، ن کے پاس کمانی کے چھوٹے سے حصہ کے متوازی ہے۔ اور ن س، ن تا پر عمود ہے۔

∴ ن ما اسطوانہ کی تراش عمودی کے مستوی کے متوازی اور ایک افقی خط ہے۔

فرض کرو کہ کمانی کا محور افقی خط ن ما سے زاویہ عہ بناتا ہے۔ اس صورت میں جفت ک ج ص$_1$ کے اجزائے تحلیلی ن ت کی سمت میں ک ج ص$_1$ جم عہ اور ن س کی سمت میں ک ج ص$_1$ جب عہ ہوں گے۔

ک ج ص$_1$ جم عہ مروڑی جفت ہے لہذا مروڑ فی اکائی طول =

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_1\ \text{جم عہ}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_2^4} \quad \cdots\cdots (۷۹)$$

اور ک ج ص$_1$ جب عہ خماؤ کا جفت ہے لہذا خماؤ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_1\ \text{جب عہ}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_2^4} \quad \cdots\cdots (۸۰)$$

صرف مروڑ کی حالت پر غور کرو۔ انتصابی سمت میں مروڑ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_1\ \text{جم عہ جم عہ}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_2^4}$$

∴ انتصابی نقل مقام مروڑ کی وجہ سے $= \frac{\text{۲ک ج ص}_1\ \text{جم}^2\ \text{عہ}\ .\ \text{ص}_1}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_2^4}$

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_1^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_2^4} \quad \cdots\cdots (۸۱)$$

اب صرف خماؤ کی حالت پر غور کرو۔ انتصابی سمت میں خماؤ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۴ ک ج ص}_{۱}\text{ جب}^{۲}\text{ عہ}}{\text{ی } \pi \text{ ص}_{۲}^{۴}}$$

∴ انتصابی نقل مقام خماؤ کی وجہ سے $= \dfrac{\text{۴ ک ج ص}_{۱}^{۲}\text{ جب}^{۲}\text{ عہ}}{\text{ی } \pi \text{ ص}_{۲}^{۴}}$ ..(۸۲)

∴ مجموعی انتصابی نقل مقام فی اکائی طول =

$$= \frac{\text{۲ ک ج ص}_{۱}^{۲}}{\pi \text{ ص}_{۲}^{۴}} \left\{ \frac{\text{جم}^{۲}\text{ عہ}}{\text{د}} + \frac{\text{۲ جب}^{۲}\text{ عہ}}{\text{ی}} \right\}$$

لہٰذا مجموعی انتصابی نقل مقام =

$$= \frac{\text{۲ ک ج ص}_{۱}^{۲}\text{ ل}}{\text{ص}_{۲}^{۴}\ \pi} \left\{ \frac{\text{جم}^{۲}\text{ عہ}}{\text{د}} + \frac{\text{۲ جب}^{۲}\text{ عہ}}{\text{ی}} \right\} \text{.....(۸۳)}$$

انتصابی نقل مقام کے علاوہ زاویٔ نقل مقام بھی واقع ہوگا۔
اگر صرف مروڑ کے جفت پر غور کیا جائے تو افقی زاویٔ نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے لپیٹے جانے کی سمت میں =

$$= \frac{\text{۲ ک ج ص}_{۱}^{۲}\text{ جم عہ جب عہ}}{\text{د } \pi \text{ ص}_{۲}^{۴}} \text{ ....(۸۴)}$$

اگر صرف خماؤ کے جفت پر غور کیا جائے تو افقی زاویٔ نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے کھلنے کی سمت میں =

$$= \frac{\text{۴ ک ج ص}_{۱}^{۲}\text{ جب عہ جم عہ}}{\text{ی } \pi \text{ ص}_{۲}^{۴}} \text{ ....(۸۵)}$$

∴ حاصل افقی زاویٔ نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے لپیٹے جانیکی سمت میں [۱۴]

$$= \frac{\text{۲ ک ج ص}_{۱}^{۲}\text{ جم عہ جب عہ}}{\pi \text{ ص}_{۲}^{۴}} \left\{ \frac{۱}{\text{د}} - \frac{۲}{\text{ی}} \right\} \text{...(۸۶)}$$

اگر ۱/د > ۲/ی سے یعنی ی > ۲ د سے

توکمانی میں لپیٹے جانے کا تقاضا ہوگا۔

دھاتوں میں ی عموماً ۲ د سے بڑا ہوتا ہے۔

اس لئے دائری تار سے بنی ہوئی کمانی پر جب وزن لٹکایا جاتا ہے تو لپیٹے جانے کا تقاضا ہوتا ہے۔ بعض اشیا کے معیار لچک کی قیمتیں حسب ذیل ہیں:-

نام شئے	ی / ۱۰ ^۱۱	د / ۱۰ ^۱۱	مر = ی / ۲د − ۱
الومنیم	۷٫۳	۲٫۳۸ — ۳٫۳۶	۰٫۳۴
پیتل	۹٫۷ — ۱۰٫۲	۳٫۴۴ — ۴٫۰۳	۰٫۳ — ۰٫۴
کانسٹنٹن	۱۶٫۳	۶٫۱	۰٫۳۳
تانبہ	۱۰٫۳ — ۱۲٫۹	۳٫۵ — ۴٫۴	۰٫۲۵ — ۰٫۳۵
سونا	۵٫۵ — ۸٫۰	۳٫۹ — ۴٫۲	۰٫۴۲
چاندی	۷٫۰ — ۷٫۹	۲٫۵ — ۲٫۹	۰٫۳۸
لوہا (ڈھلا ہوا)	۹٫۸ — ۱۶	۳٫۵ — ۵٫۳	۰٫۲۳ — ۰٫۳۱
لوہا (پٹا ہوا)	۱۷ — ۲۰	۶٫۶ — ۸٫۳	۰٫۲۸
فولاد	۱۸ — ۲۲	۷٫۹ — ۸٫۹	۰٫۲۵ — ۰٫۳۳
پلاطینم	۱۵ — ۱۷	۶٫۶ — ۷٫۴	۰٫۲۲
شیشہ	۵٫۴ — ۷٫۸	۱٫۲ — ۲٫۴	۰٫۲۰ — ۰٫۲۶

Chapter IV.

(۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P66, (1922)
(۲) ,, ,, ,, P70, (1922)
(۳) Text Book of Sound "Barton" P180, (1919)
(۴) Properties of Matter "Wagstaff" P105, (1924)
(۵) Proc. Roy. Soc. 73 P334. Phil. Trans. A 204 I (1904)
(۶) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P106, (1927)
(۷) Properties of Matter "Wagstaff" P118 (1924)
(۸) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P88, (1922)
(۹) Statics "Lamb" P323 (1924)
(۱۰) ,, ,, P324, (1924)
(۱۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P94, (1922)
(۱۲) ,, ,, ,, ,, P95, (1922)
(۱۳) Phil Mag 49, 193 (1900)
(۱۴) Properties of Matter "Newman & Searle" P119 (1928)

پانچواں باب

"حرحرکیات اور بگاڑوں میں تبدیلی" "حرناگزر لچک"

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی شئے کا معیار لچک اس کی تپش پر منحصر ہوتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ کسی جسم کی حالت جب تبدیل ہوتی ہے تو ساتھ ہی ساتھ اس کی تپش میں تغیر کا ہونا لازمی ہے کوئی جسم اگر بلند تر تپش پر کم تر تپش کے مقابلہ میں سخت ہو تو اسکے بگاڑ میں اضافہ کرنے سے اس کی تپش میں بھی اضافہ ہوگا، لیکن جسم اگر ایسا ہو کہ بلند تر تپش کے مقابلہ میں کمتر تپش پر اس میں سختی ہو تو بگاڑ میں اضافہ کرنے سے اسکی تپش میں کمی ہوگی۔ مثلاً ربر کی ڈوری کی پھیلاو کی شرح منفی ہے۔ اس ڈوری کو کھینچا جائے تو پہلے کی بہ نسبت یہ گرم ہو جائے گی نکل کے تار کی پھیلاؤ کی شرح مثبت ہوتی ہے اسکو کھینچنے سے یہ پہلے کی نسبت سرد ہو جائے گا۔ اس سردی کے اثر کو آسانی سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ نکل کا ایک موٹا سا تار لیکر لٹکا دیا جائے اور اس کے دونوں سروں کو وِٹسٹون پل کے ایک بازو سے جوڑ دیا جائے تو مزاحمت کی رقوم ہیں، اس تار پر وزن لٹکا کر تپش کی کمی دریافت کی جا سکتی ہے۔

لارڈ کلون نے حرحرکیات کی مدد سے سردی اور گرمی کے ان اثرات کا حساب لگایا تھا جو کسی جسم کی بگاڑ میں تغیر و تبدل کرنے سے جسم مذکور میں ظہور پذیر ہوتے ہیں۔ جول① کے تجربوں سے اس کی تصدیق بھی ہوتی ہے۔

کسی دھات سے بنے ہوئے ایک تار پر جس کی کمیت اکائی اور تراش عمودی کا رقبہ بھی اکائی ہو غور کرو۔ فرض کرو کہ اسکا طول ل ہے اور اس پر ق تناؤ عمل کر رہا ہے۔ تناؤ کی قیمت میں اضافہ "فرق" سے فرض کرو اس کے طول میں فرل اضافہ ہوتا ہے۔ یعنی جب تناؤ ق + + فرق ہو تو طول ل + فرل ہے۔

چونکہ تار کے طول میں اضافہ ہو رہا ہے لہذا اس پر کام کیا جا رہا ہے اور اس کے لئے تار کے جوہروں میں پھیلاؤ پیدا کرنے کے لئے بیرونی حرارت کی ضرورت ہوگی۔ تپش مستقل رکھی جاتی ہے لیکن تار سے مسلسل حرارت خارج ہونے کی وجہ سے تار سرد ہو جاتا ہے۔

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے :-

فرحہ = فربہ + فرکہ .... (۱)

جہاں فرحہ = حرارت کی وہ مقدار جو خارج ہوتی ہے

فربہ = اندرونی توانائی میں تبدیلی

فرکہ = بیرونی کام جو جبلی طریقہ سے کیا گیا = -ق فرل

لہذا فرحہ = فربہ - ق فرل .... (۲)

چونکہ یہ عمل برعکس بھی ہو سکتا ہے۔

اسلئے حرحرکیات کے دوسرے کلیہ سے :-

فرحہ = ت فرفہ .... (۳)

جہاں ت = تپش مطلق اور فرفہ = ناکارگی میں تبدیلی

مساوات (۳) اور (۲) سے فربہ = ت فرفہ + ق فرل

یعنی فر(بہ - ت فہ - ق ل) =

= - فہ فرت - ل فرق .... (۴)

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے :-

$\left(\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}}$ یعنی $(\text{فرفہ})_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}}$ فرق

یعنی $(\text{فرحہ})_{\text{ت}} = \text{ت} \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \text{فرق}$

$$= \frac{\text{ت ل فرل}}{\text{ل فرت}} \cdot \text{فرق}$$

لیکن $\frac{\text{فرل}}{\text{ل فرت}} = \text{عہ} =$ طولی پھیلاؤ کی شرح

$\therefore (\text{فرحہ})_{\text{ت}} = \text{ت ل عہ فرق}$ .... (۵)

چونکہ مساوات کے بائیں جانب کی تمام چیزیں کسی دھات کے لیے مثبت ہیں اسلیے اس دھات کے لیے (فرحہ)$_{\text{ت}}$ کی قیمت بھی مثبت ہوگی لیکن ربر کے لیے عہ کی قیمت منفی ہے اسلیے (فرحہ)$_{\text{ت}}$ بھی منفی ہے۔

لیکن $(\text{فرحہ})_{\text{ت}} = \text{فرت} \times \text{ن} \times \text{جو} \times ۱$

جہاں ن = حرارت نوعی

جو = حرارت کا معادل جیلی

فرت = دھاتوں میں، تناؤ کے اضافہ سے تپش میں کمی

$\therefore \text{فرت} = \frac{\text{ت ل عہ فرق}}{\text{ن جو}}$ .... (۶)

ڈاکٹر جول[1] نے مختلف دھاتوں کو استعمال کرکے اس مساوات کی تصدیق کی۔

مثلاً تانبے کے لیے ت = ۲۷۳٫۲، ل = $\frac{۱}{۸٫۹۵}$،

عہ = $۱۷٫۱ \times ۱۰^{-۶}$

فرق = ۱ر۰۸ × ۱۰^۹، ن = ۰ر۰۹۵

لہذا مساوات (۶) سے فرت = ۰ر۰۱۵۴ اور تجربہ سے فرت = ۰ر۰۱۴۷

فرض کرو کہ طول میں فرل اضافہ ہونے سے تپش میں کمی = فرت
تناؤ میں اضافہ فرق = (فرل / ل) . ی جہاں ی = ینگ کا معیار لچک

∴ فرت = (ت عہ ی فرل) / (ن جو) .... (۷)

اگر تار کی تپش میں تغیر = فرت، جبکہ اسکو گرم یا سرد ماحول سے متاثر کیا جاتا ہے، تو طول میں تبدیلی = ل عہ فرت
طول میں یہ جو تبدیلی واقع ہوئی ہے اسکا معاوضہ تناؤ میں ایسی تبدیلی کرنے سے ہوگا جس کی مقدار = فرق = (ل ی عہ فرت) / ل
= ی عہ فرت

اسکو مساوات (۷) میں لکھنے سے :-

فرت = (ت (فرق / فرت)ل فرل) / (ن جو) .... (۸)

مساوات (۸) مساوات (۶) کی طرح عملاً زیادہ نہیں استعمال ہوتی۔
اب تار کی مروڑ کی حالت پر غور کرو۔ فرض کرو کہ کسی دھات کا بنا ہوا ایک تار ایسا ہے کہ اسکا طول ل اور کمیت اور تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے اور اسپر مروڑ کا جفت ق عمل کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ مروڑ طہ بنتا ہے۔ جفت کی قیمت کو ق + فرق تک بڑھایا جائے تو فرض کرو مروڑ کا زاویہ طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے

فرحہ = فربہ - ق فرطہ .... (۹)

اور مساوات (۳) اور (۹) سے فربہ = ت فرفہ + ق فرطہ
یعنی فر(بہ - ت فہ - ق طہ) = - فہ فرت - طہ فرق

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے:-

$$\therefore \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فزت}}\right)_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فزت}}\right)_{\text{ق}} \text{ یعنی } \left(\text{فرفہ}\right)_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فزت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \text{فرق}$$

$$\therefore \text{ مساوات (۳) سے } \left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = \text{ت} \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فزت}}\right)_{\text{ق}} \text{فرق} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

مگر چوتھے باب میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ ق =

$$= \frac{\text{د ط}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi \, \text{ص}^{۴}}{۲}$$

{ جہاں د = استواری کی شرح اور
ص = تار کا نصف قطر

$$\therefore \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فزت}}\right)_{\text{ق}} = \frac{-۲\,\text{ق ل}}{\pi\,\text{ص}^{۴}} \cdot \frac{۱}{\text{د}^{۲}} \cdot \left(\frac{\text{فرد}}{\text{فزت}}\right)_{\text{ق}} =$$

$$= -\frac{\text{ط}}{\text{د}} \left(\frac{\text{فرد}}{\text{فزت}}\right)_{\text{ق}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

$$\therefore \left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = -\,\text{ت ط} \frac{\text{فرد}}{\text{د فزت}} \cdot \text{فرق} = -\,\text{ت ط گہ فرق} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

جہاں گہ = استواری کی تپشی قدر

اور $\frac{\text{فرد}}{\text{فزت}}$ = دھاتوں کے لئے ایک منفی مقدار، اس لئے $\left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}}$ مثبت ہوگا۔

$$\therefore \text{فزت} = \frac{-\,\text{ت ط گہ فرق}}{\text{ن جو}} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

جہاں فزت = مروڑ کے جفت میں اضافہ کی وجہ سے تپش میں کمی۔

اسی طرح سے سردی کا اثر جبکہ جسم کا حجم زیر غور ہو حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے:-

اکائی کمیت کے ایک جسم پر غور کرو جسکا ابتدائی حجم دباؤ ق کے تحت ح ہے۔

فرض کرو کہ دباؤ ق + فرق تک بڑھایا جاتا ہے جس کی وجہ سے

جمم ح - فرح ہوجاتا ہے۔

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے :-

فرحہ = فربہ - ق فرح .... (۱۴)

مساوات (۳) اور (۱۴) سے فر(بہ - ت فہ - ق ح) =

= - فہ فرت - ح فرق .... (۱۵)

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے :-

(فرفہ / فرق)ت = (فرح / فرت)ق یعنے (فرفہ)ت = (فرح / فرت)ق فرق

∴ (فرحہ)ت = ت (فرح / فرت)ق فرق = ت/ح (فرح / فرت)ق ح فرق

= ت عہ ح فرق .... (۱۶)

جہاں عہ = حجمی پھیلاؤ کی شرح

∴ فرت = ت ح عہ فرق / ن جو .... (۱۷)

حرناگزار اور ہم تپشی لچک :- جبکہ بگاڑ میں تبدیلی اسقدر تیز واقع ہو کہ حرارت کو باہر نکل جانے کے لئے وقت ہی نہ ملے تو اُس وقت کے معیار لچک کو ہم حرناگزار معیار لچک کہتے ہیں۔

اور جب بگاڑ مستقل ہو جیسا کہ معمولی صورتوں میں ہوا کرتا ہے تو ایسا معیار لچک، ہم تپشی کہلاتا ہے۔

ینگ کا حرناگزار معیار لچک :- فرض کرو کہ ہم ایک ایسے تار کی حالت پر غور کررہے ہیں جس کی کمیت اور تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے، اگر تناؤ کی قیمت میں فرق کا اضافہ کیا جائے اور حرارت یا سردی باہر نکلنے نہ پائے تو طول ل میں اضافہ کے دو وجوہات ہوں گے۔

ایک تو طول میں اضافہ تناؤ ف کی وجہ سے ہوگا اور دوسرا تپش ت کی وجہ سے۔ لہذا ظاہر ہے کہ ل کوئی تفاعل ہے ت اور ق کا

یعنی ل = ف (ق، ت)

$$\therefore\ \text{فرل} = \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \text{فرق} + \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \text{فرت}$$

فرض کرو کہ $\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}}$ سے طول کے تغیر کی تعبیر بلحاظ اضافۂ تناؤ حرناگزار حالات کے تحت ہوتی ہے اور $\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}}$ سے طول کے تغیر کی تعبیر بلحاظ اضافۂ تناؤ ہم تپشی حالات کے تحت ہوتی ہے اور $\text{ی}_{\text{فہ}}$ = ینگ کا حرناگزار معیار لچک اور $\text{ی}_{\text{ت}}$ = ینگ کا ہم تپشی معیار لچک۔

ایسی صورت میں $\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} = \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} + \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}}$ ......(۱۸)

مساوات (۲) اور (۳) سے $\text{فرہ} = \text{ت فرفہ} + \text{ق فرل}$

یعنی $\text{فر(ہ} - \text{ق ل)} = \text{ت فرفہ} - \text{ل فرق}$

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے:-

$$\left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} = -\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}} \quad \text{......(۱۹)}$$

لہذا مساوات (۱۸) کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں:-

$$\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} - \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} = -\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}}$$

$$\text{یعنی}\ \frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} - \frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} =$$

$$= -\frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}}$$

$$\text{یعنی}\ \frac{1}{\text{ی}_{\text{فہ}}} - \frac{1}{\text{ی}_{\text{ت}}} =$$

= (فرت/فرفہ)ق . ۱/ل (فرل/فرت)ق . (فرل/فرت)ق ل/ل — =

= (فرت/فرحہ) ل عہ^۲ ت — = (فرت/فرفہ)ق ل عہ^۲ — =

(۲۰) .... ل عہ^۲ ت/ن جو — = (فرت/فرت × ن × جو × ۱) ل عہ^۲ ت — =

چونکہ کسی دھات کے لئے اس مساوات کے بائیں جانب کی رقموں کی قیمت منفی ہے اس لئے ی فہ کی قیمت ی ت سے بڑی ہے۔

مثال کی طور پر تانبے کیلئے ل = ۱۱، ۳۰۰ مطلق = ۲۷۳ تمپش مطلق،

ت = ۰۹۵، ۰، عہ = ۲، ۱۷ × ۱۰^-۶

ی ت = ۲، ۱۲ × ۱۰^۱۱ ڈائین فی مربع سم

اور جو = ۲، ۴ × ۱۰^۷ ارگ

∴ مساوات (۲۰) سے :—

ی ت / ی فہ = ۱ — ی ت ل عہ^۲ ت / ن جو = ۰، ۹۹۷

لہٰذا دونوں لچک کے معیاروں میں بہت ہی کم فرق ہے۔

حرناگزار استواری کی شرح :—

فرض کرو اکائی کمیت اور اکائی تراش عمودی کا ایک تار لیا جاتا ہے جس کا طول ل ہے۔ اور حرناگزار حالات کے تحت فرض کرو کہ جفت کی قیمت ق سے ق + فرق تک بڑھا دی جاتی ہے اور زاویہ مروڑ طہ سے طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔

ایسی حالت میں طہ، ت اور ق کا کوئی تفاعل ہوگا۔

یعنی طہ = ف (ق، ت)

∴ فرطہ = (فرطہ/فرق)ت . فرق + (فرطہ/فرت)ق . فرت

فرض کرو $د_{فہ}$ = حرنا گزار استواری کی شرح

اور $د_{ت}$ = ہم تپشی استواری کی شرح

$$\therefore \left(\frac{فرطہ}{فرق}\right)_{فہ} = \left(\frac{فرطہ}{فرق}\right)_{ت} + \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{فہ}$$

یعنی
$$\frac{1}{د_{فہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{فہ} \quad \text{.........} (۲۱)$$

لیکن مساوات (۳) اور (۹) سے:-

فربہ = ت فرفہ + ق فرطہ

یعنی فر(بہ - ق طہ) = ت فرفہ - طہ فرق

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے:-

$$\left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{فہ} = -\left(\frac{فرطہ}{فرفہ}\right)_{ق} \quad \text{.........} (۲۲)$$

لیکن مساوات (۲۱) اور (۲۲) سے:-

$$\frac{1}{د_{فہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = -\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرطہ}{فرفہ}\right)_{ق} =$$

$$= -\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرفہ}\right)_{ق}$$

مساوات (۱۱) سے $\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق}$ کی قیمت اگر لکھی جائے تو

$$\frac{1}{د_{فہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = -\frac{طہ^2}{د^2}\left(\frac{فرد}{فرت}\right)^2_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرفہ}\right)_{ق} =$$

$$= -طہ^2 \left(\frac{فرد}{د فرت}\right)^2 \cdot \frac{ت فرت}{فرحہ} = -\frac{طہ^2 گہ^2 ت}{ن جو}$$

$$\therefore \frac{1}{د_{فہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = -\frac{طہ^2 گہ^2 ت}{ن جو} \quad \text{.........} (۲۳)$$

اس کو پروفیسر ہارٹن نے پہلی دفعہ ثابت کیا۔

چونکہ کسی دھات کے لئے بائیں جانب کی رقوم کی قیمت اس مساوات میں

منفی ہے۔

لہذا $\text{د}_{\text{فہ}}$ کی قیمت $\text{د}_{\text{ت}}$ سے زیادہ ہوتی ہے۔

لچک کا حرناگزار حجمی معیار:۔ اوپر کے طریقے کے مطابق لچک کے حرناگزار حجمی معیار اور ہم تپشی حجمی معیار کے درمیان فرق دریافت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک جسم ایسا لیا جاتا ہے جس کی کمیت اکائی ہے اور اس کے دباؤ میں ق سے ق + فرق تک اضافہ کیا جاتا ہے جس کی وجہ سے اسکا حجم ح سے ح - فرح ہو جاتا ہے۔

پہلے کی طرح یہاں بھی $\text{ح} = \text{ف}(\text{ق}،\text{ت})$

$$\therefore \text{فرح} = \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \text{فرق} + \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \text{فرت}$$

فرض کرو کہ $\text{ب}_{\text{فہ}}$ = لچک کا حرناگزار حجمی معیار

اور $\text{ب}_{\text{ت}}$ = " ہم تپشی "

$$\therefore \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} \cdot \frac{1}{\text{ح}} - \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \frac{1}{\text{ح}} =$$

$$= \frac{1}{\text{ح}} \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} \quad \text{.......} \quad (۲۴)$$

مساوات (۳) اور (۱۴) سے:۔

$$\text{فر}(\text{بہ} - \text{ق ح}) = \text{ت فرفہ} - \text{ح فرق}$$

یہ ایک مکمل تفرق ہونے کی وجہ سے:۔

$$\left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} = -\left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}} \quad \text{.......} \quad (۲۵)$$

مساوات (۲۴) اور (۲۵) سے:۔

$$\frac{1}{\text{ب}_{\text{فہ}}} - \frac{1}{\text{ب}_{\text{ت}}} = -\frac{1}{\text{ح}} \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}} =$$

$$= -\frac{1}{ح}\left(\frac{فرح}{فرت}\right)_ق \cdot \left(\frac{فرح}{فرت}\right)_ق \left(\frac{فرت}{فرفہ}\right)_ق =$$

$$= -ح\left(\frac{فرح}{ح\, فرت}\right)^2_ق \cdot ت\left(\frac{فرت}{فرحہ}\right)_ق = -\frac{ح\, ع_1^2\, ت}{ن\, جو}$$

لہذا $\frac{1}{ب_{فہ}} - \frac{1}{ب_{ت}} = -\frac{ح\, ع_1^2\, ت}{ن\, جو}$ .... (۲۶)

حسب سابق یہاں بھی $ب_{فہ}$ کی قیمت $ب_{ت}$ سے زیادہ ہے۔

مثال کی طور پر تانبے کے لئے :-

ت = ۲۷۳° تپش مطلق   ح = ۱۱ر۰ مکعب سمر

$ع_1$ = ۵ × $۱۰^{-۵}$ ن = ۰۹۵ر۰

جو = ۲ر۴ × $۱۰^{۷}$ ارگ $ب_{ت}$ = ۷ر۱ × $۱۰^{۱۲}$ ڈائین فی مربع سمر

$$\therefore \frac{ب_{ت}}{ب_{فہ}} = ۱ - \frac{ب_{ت}\, ح\, ع_1^2\, ت}{ن\, جو} = ۰٫۹۶۸$$

Chapter V.

(1) Phil. Trans. 149. 91 (1859)

چھٹا باب

مائعات کے پچکاؤ کی شرح اور تمدیدی طاقت

کسی خاص قیمت کے زور سے کسی مائع کے حجم میں، فی اکائی حجم جو کمی واقع ہوتی ہے وہ اس مائع کی پچکاؤ کی شرح کہلاتی ہے۔

سنہ ۱۶۶۰ء میں، پانی کے پچکاؤ کو ثابت کرنے کے لئے شہر فلورنس میں، چاندی کے کروں میں پانی بھر کر کروں کی شکل میں بگاڑ پیدا کیا گیا تھا مگر یہ تجربہ کچھ کامیاب نہیں ہوا۔ لیکن سنہ ۱۷۶۲ء میں کینٹن نامی ایک شخص نے اس امر کو ثابت کرنے میں کامیابی حاصل کی کہ دباؤ سے پانی میں پچکاؤ واقع ہوتا ہے۔ مگر اس کو بھی پچکاؤ کی شرح کی صحیح قیمت نہیں حاصل ہو سکی۔ بعد میں ماہرین طبیعیات نے مختلف مائعیات کے حجموں میں دباؤ سے جو تبدیلی ہوتی ہے اس کی پیمائش کی۔

کینٹن نے شیشہ کا بنا ہوا ایک بڑا جوفہ استعمال کیا جس کے ساتھ شیشہ کی ایک تنگ شعری نلی جوڑ دی گئی تھی، پہلے جوفہ اور نلی کے کچھ حصہ میں پارہ بھرا گیا اور پھر جوفہ کو اتنا گرم کیا گیا کہ پھیل کر پارہ پورے جوفہ میں سما گیا۔ اسکے بعد شعری نلی کو بالکل بند کر دیا گیا، سرد ہونے پر پارہ اس میں نیچے اتر آیا۔ پارہ کی سطح پر اسوقت جو دباؤ عمل کر رہا تھا وہ دوران تجربہ کی تپش پر صرف پارہ کا بخاری دباؤ تھا، شعری نلی کے ایک سرے کو توڑ دینے سے، کرہ ہوائی کا دباؤ پڑا ہوا اندر داخل ہوئی اور پارہ کی سطح اور نیچے اتر آئی۔ پارہ کے حجم میں جو کمی فی اکائی حجم، اضافہ دباؤ کے باعث واقع ہوئی اس میں سے کچھ تو شیشے کے جوفہ کے پھیلاؤ سے واقع ہوئی اور کچھ پارے کے پچکاؤ سے۔

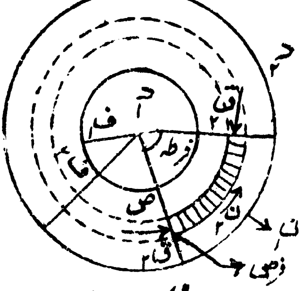
اسی تجربہ کو کینٹن نے پانی استعمال کر کے دہرایا اور یہ دریافت کیا کہ پانی کے

حجم میں فی اکائی حجم کمی' پارہ کی بہ نسبت زیادہ ہوتی ہے۔ لہذا پانی کے حجم میں فی اکائی حجم کمی کا' پانی کے لچکاؤ کی وجہ سے واقع ہونا ضروری ہے۔ پانی کے لچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کے لئے اول ہمیں یہ معلوم کرنا ہوگا کہ جو نہ کے حجم اور نلی میں جو حقیقی تبدیلی (اینیر متناظر دباؤ کی وجہ سے) واقع ہوتی ہے وہ کتنی ہے۔

لہذا ہم یہاں کسی قدر تفصیل کے ساتھ اس پر غور کریں گے کہ کسی برتن کے حجم میں جب کہ اس پر اندرونی اور بیرونی دباؤ پڑ رہا ہو حقیقی تبدیلی کیسے واقع ہوتی ہے۔

ایک لمبی اسطوانہ نما نلی کی صورت پر غور کرو جس کے دونوں سرے چپٹے ہوں۔ فرض کرو کہ اس پر بیرونی دباؤ $د_2$ اور اندرونی دباؤ $د_1$ عمل کر رہا ہے۔

ایسے اسطوانہ کی تراش (شکل ۱) میں دکھلائی گئی ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر علی الترتیب $ف_1$ اور $ف_2$ ہیں۔ اس کی ایک بالکل چھوٹی دائری دھجی کو لو جس کے نصف قطر ص' اور ص + فرص ہو اور موٹائی نیچے کی جانب اکائی ہو۔ فرض کرو کہ یہ دھجی مرکز پر ایک بالکل چھوٹا زاویہ فرطہ بناتی ہے



شکل ۱

اسطوانہ کے اندرونی اور بیرونی دباؤ کے فرق کی وجہ سے یہ بھی فرض کرو کہ مرکز سے فاصلہ ص پر کسی ذرے کا قطری نقل مکان فہ کے مساوی ہے۔

تب ص + فرص پر نقل مکان فہ + $\frac{فرفہ}{فرص}$. فرص کے مساوی ہوگا۔

$$\therefore \text{قطری سمت میں بگاڑ} = ت_1 = \frac{\left(فہ + \frac{فرفہ}{فرص} \cdot فرص\right) - فہ}{فرص} = \frac{فرفہ}{فرص} \quad ......(1)$$

فرض کرو کہ قطری آڑی سمت میں بگاڑ $= \text{ن}_{۲}$ جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔

اور یہ $\text{ن}_{۲} = \frac{۲\pi(\text{ص}+\text{فہ}) - ۲\pi\,\text{ص}}{۲\pi\,\text{ص}} = \frac{\text{فہ}}{\text{ص}}$ ....(۲)

فرض کرو کہ قطری دباؤ مرکز سے ص فاصلہ پر $= \text{ق}_{۱}$ اور ص + فرص فاصلہ پر $= \text{ق}_{۱} + \frac{\text{فرق}_{۱}}{\text{فرص}} . \text{فرص}$، اب چونکہ اس ٹکڑے کے طول ص فرطہ اور (ص + فرص) فرطہ ہوں گے۔

∴ اس چھوٹے ٹکڑے پر حاصل قطری قوت

$$= \left(\text{ق}_{۱} + \frac{\text{فرق}_{۱}}{\text{فرص}} . \text{فرص}\right)(\text{فرص} + \text{ص})\,\text{فرطہ} - \text{ق}_{۱}\,\text{ص}\,\text{فرطہ}$$

$$= \left(\text{ص}\,\frac{\text{فرق}_{۱}}{\text{فرص}} . \text{فرص} + \text{ق}_{۱}\,\text{فرص}\right)\text{فرطہ}$$ کیونکہ فرص بہت چھوٹا ہے اسلئے $(\text{فرص})^{۲}$ کو نظرانداز کر دیا گیا ہے۔

اب اگر اس ٹکڑے پر قطر کی آڑی سمت میں دباؤ $\text{ق}_{۲}$ ہو جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے اور جو اس ٹکڑے کے دونوں سروں پر عمل کر رہا ہے تو

قطر کی آڑی سمت میں قوت $= ۲\text{ق}_{۲} . \text{فرص} . \frac{\text{فرطہ}}{۲} = \text{ق}_{۲}\,\text{فرص}\,\text{فرطہ}$

اب تعادل کیلئے $\text{ق}_{۲}\,\text{فرص}\,\text{فرطہ} = \left(\text{ص}\,\frac{\text{فرق}_{۱}}{\text{فرص}} . \text{فرص} + \text{ق}_{۱}\,\text{فرص}\right)\text{فرطہ}$

$$\therefore \text{ق}_{۲} - \text{ق}_{۱} = \text{ص}\,\frac{\text{فرق}_{۱}}{\text{فرص}} \quad ....\ (۳)$$

چوتھے باب کی مساوات (۳) سے یہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{ق}_{۱} = \text{ک}\,\text{ن}_{۱} + \text{گ}\,(\text{ن}_{۲} + \text{ن}_{۳}) \quad ....\ (۴)$$

$$\text{ق}_{۲} = \text{ک}\,\text{ن}_{۲} + \text{گ}\,(\text{ن}_{۱} + \text{ن}_{۳}) \quad ....\ (۵)$$

$$\text{ق}_{۳} = \text{ک}\,\text{ن}_{۳} + \text{گ}\,(\text{ن}_{۱} + \text{ن}_{۲}) \quad ....\ (۶)$$

اور ان مساواتوں کی مدد سے ہم نے ان مستقلوں کی قیمت حاصل کی تھی۔

یعنی $\text{ک} = \text{ب} + \frac{۴}{۳}\text{د}$ اور $\text{گ} = \text{ب} - \frac{۲}{۳}\text{د}$ جہاں

ب = حجمی معیار لچک اور د = استواری کی شرح

اس صورت میں مساوات (۱)، (۲) اور (۴) کی مدد سے

$$-\text{ق}_{۱} = \text{ک}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرص}} + \text{گ}\left(\frac{\text{فہ}}{\text{ص}} + \text{ن}_{۳}\right) \quad \ldots\ldots (۷)$$

اور اسی طرح مساوات (۵) اور (۶) کو بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$-\text{ق}_{۲} = \text{ک}\,\frac{\text{فہ}}{\text{ص}} + \text{گ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرص}} + \text{ن}_{۳}\right) \quad \ldots\ldots (۸)$$

$$\text{اور}\ \text{ق}_{۳} = \text{ک}\,\text{ن}_{۳} + \text{گ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرص}} + \frac{\text{فہ}}{\text{ص}}\right) \quad \ldots\ldots (۹)$$

مساوات (۸) کو (۷) میں سے تفریق کرنے سے

$$\text{ق}_{۲} - \text{ق}_{۱} = (\text{ک} - \text{گ})\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرص}} - (\text{ک} - \text{گ})\,\frac{\text{فہ}}{\text{ص}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اب مساوات (۷) کو بلحاظ ص تفرقانے اور −ص سے ضرب دینے سے

$$\text{ص}\,\frac{\text{فرق}_{۱}}{\text{فرص}} = -\text{ک}\,\text{ص}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{فہ}}{\text{فرص}^{۲}} - \text{گ}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرص}} + \text{گ}\,\frac{\text{فہ}}{\text{ص}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

اور مساوات (۱۰) اور (۱۱) کو مساوات (۳) میں درج کرنے اور ص سے ضرب دینے سے

$$\text{ص}^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{فہ}}{\text{فرص}^{۲}} + \frac{\text{ص}\,\text{فرفہ}}{\text{فرص}} - \text{فہ} = \text{صفر}$$

یہ ایک دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے اسلئے اسکا حل :—

$\text{فہ} = \text{ج}\,\text{ص}^{\text{م}}$ جہاں ج اور م مستقل ہیں

فہ کی قیمت اس تفرقی مساوات میں درج کرنے سے

$$\text{ج}\,\text{ص}^{۲}\,\text{م}(\text{م}-۱)\,\text{ص}^{(\text{م}-۲)} + \text{ج}\,\text{ص}\,\text{م}\,\text{ص}^{(\text{م}-۱)} - \text{ج}\,\text{ص}^{\text{م}} = \text{صفر}$$

یعنی $\text{م}^{۲} - ۱ = \text{صفر}$ یعنی $\text{م} = \pm ۱$

$$\therefore \text{فہ} = \text{ج}_{1}\,\text{ص} + \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ص}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱۲)$$

جہاں ج_{1} اور ج_{2} مستقل ہیں

اس مساوات کو لیمی کی مساوات کہتے ہیں۔

اب مساوات (۷)، (۸) اور (۹) میں ک، گ اور فہ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$-\text{ق}_{1} = \left(\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{1} - \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ص}^{2}}\right) + \left(\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{1} + \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ص}^{2}} + \text{ن}_{3}\right)$$

$$-\text{ق}_{2} = \left(\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{1} + \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ص}^{2}}\right) + \left(\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{1} - \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ص}^{2}} + \text{ن}_{3}\right)$$

اور $\text{ق}_{3} = \left(\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د}\right)\text{ن}_{3} + \left(\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د}\right) 2\,\text{ج}_{1}$

جبکہ $\text{ص} = \text{ف}_{1}$ تو $\text{ق}_{1} = \text{د}_{1}$ اور جبکہ $\text{ص} = \text{ف}_{2}$ تو $\text{ق}_{1} = \text{د}_{2}$

$$\therefore -\text{د}_{1} = \left(\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{1} - \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ف}_{1}^{2}}\right) + \left(\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{1} + \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ف}_{1}^{2}} + \text{ن}_{3}\right)$$

اور $-\text{د}_{2} = \left(\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{1} - \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ف}_{2}^{2}}\right) + \left(\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{1} + \frac{\text{ج}_{2}}{\text{ف}_{2}^{2}} + \text{ن}_{3}\right)$

اب ان دونوں مساواتوں کی مدد سے

$$\text{ج}_{2} = \frac{1}{2\text{د}} \times \frac{(\text{د}_{2} - \text{د}_{1})\,\text{ف}_{1}^{2}\,\text{ف}_{2}^{2}}{(\text{ف}_{1}^{2} - \text{ف}_{2}^{2})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱۳)$$

اور $\frac{د_{۲} ف_{۲}^{۲} - د_{۱} ف_{۱}^{۲}}{ف_{۱}^{۲} - ف_{۲}^{۲}} = ج_{۱}(۲ب + \frac{۲}{۳}د) +$

$+ ن_{۲}(ب - \frac{۲}{۳}د)$ .... (۱۴)

شکل نمبر ۲ کے اسطوانہ پر غور کرو جس کا اندرونی نصف قطر $ف_{۱}$ اور بیرونی نصف قطر $ف_{۲}$ ہے۔

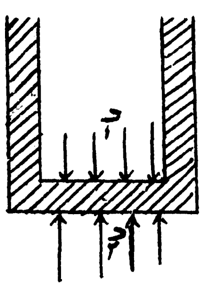
حاصل طولی قوت $= د_{۱}\,\pi\, ف_{۱}^{۲} - د_{۲}\,\pi\, ف_{۲}^{۲}$

∴ اوسط طولی زور جو کہ محور کے متوازی ہے =

$= ق_{۲} = \frac{د_{۱}\pi ف_{۱}^{۲} - د_{۲}\pi ف_{۲}^{۲}}{\pi ف_{۲}^{۲} - \pi ف_{۱}^{۲}}$

یعنی $ق_{۲} = \frac{د_{۱} ف_{۱}^{۲} - د_{۲} ف_{۲}^{۲}}{ف_{۲}^{۲} - ف_{۱}^{۲}} =$

$= ۲ج_{۱}(ب - \frac{۲}{۳}د) + ن_{۲}(ب + \frac{۴}{۳}د)$ .... (۱۵)



شکل نمبر ۲

ہمکو معلوم ہے کہ $ن_{۲} = \frac{ق_{۲}}{۳ب}$

∴ $ن_{۲} = \frac{د_{۲} ف_{۲}^{۲} - د_{۱} ف_{۱}^{۲}}{۳ب(ف_{۱}^{۲} - ف_{۲}^{۲})}$ .... (۱۶)

اب $ن_{۲}$ کی اس قیمت کو مساوات (۱۴) میں درج کرنیسے

$\frac{د_{۲} ف_{۲}^{۲} - د_{۱} ف_{۱}^{۲}}{ف_{۱}^{۲} - ف_{۲}^{۲}} = ج_{۱}(۲ب + \frac{۲}{۳}د) +$

$+ \left\{\frac{د_{۲} ف_{۲}^{۲} - د_{۱} ف_{۱}^{۲}}{۳ب(ف_{۱}^{۲} - ف_{۲}^{۲})}\right\}(ب - \frac{۲}{۳}د)$

یعنی $ج_{۱} = \frac{د_{۲} ف_{۲}^{۲} - د_{۱} ف_{۱}^{۲}}{۳ب(ف_{۱}^{۲} - ف_{۲}^{۲})} = ن_{۲}$ .... (۱۷)

اگر $د_{۱} = د_{۲} = ق$ تو $ن_{۲} = \frac{-ق}{۳ب} = \frac{فرل}{ل}$ جہاں فرل اضافہ طول ہے

$$\therefore \text{ب} = \frac{-\text{ق}}{\frac{\text{۳ فرل}}{\text{ل}}} = \text{حجمی معیار لچک}$$

اگر د۱ = ق اور د۲ = صفر تو

$$\text{ن}_{۲} = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_{۱}^{۲}}{\text{۳ ب}(\text{ف}_{۲}^{۲} - \text{ف}_{۱}^{۲})}$$

اگر ٹ = اسطوانہ کی موٹائی تو

$$\text{ن}_{۲} = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_{۱}^{۲}}{\text{۳ ب ٹ}(\text{ف}_{۲} + \text{ف}_{۱})}$$

اگر ٹ بمقابلہ ف۱ بہت چھوٹا ہو تو

$$\text{ن}_{۲} = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_{۱}}{\text{۲ ب ٹ}}$$

اسی طریقہ کو میلیک (۱) نے مختلف اشیاء کی ب کی قیمت دریافت کرنے کیلئے استعمال کیا تھا۔ اسطوانہ کا اندرونی دباؤ سکون سیالات کے طریقہ سے لگایا گیا تھا، اور طول میں تبدیلی فی اکائی طول ناپ کر دریافت کرلی گئی تھی لہٰذا ب کی قیمت اسطوانہ کا نصف قطر اور موٹائی معلوم کرنے سے دریافت کی گئی تھی۔

اگر د۲ = ق اور د۱ = صفر تو

$$\text{ن}_{۲} = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{-\text{ق ف}_{۲}^{۲}}{\text{۳ ب}(\text{ف}_{۲}^{۲} - \text{ف}_{۱}^{۲})}$$

یہاں منفی علامت اس وجہ سے حاصل ہوئی ہے کہ بیرونی دباؤ اسطوانہ کو پچکا دیتا ہے جس کی وجہ سے اس کا طول بڑھ جاتا ہے۔

اب ہم قطری دباؤ ق۱ اور ق۲ کو د۱ اور د۲ وغیرہ کی رقموں میں حاصل کریں گے:-

یہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$-\text{ق}_{۱} = \left(\text{ب} + \frac{۴}{۳}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{۱} - \frac{\text{ج}_{۲}}{\text{ص}_{۱}^{۲}}\right) + \left(\text{ب} - \frac{۲}{۳}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{۱} + \frac{\text{ج}_{۲}}{\text{ص}_{۱}^{۲}} + \text{ن}_{۲}\right)$$

اور

$$-\text{ق}_{۲} = \left(\text{ب} + \frac{۴}{۳}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{۱} + \frac{\text{ج}_{۲}}{\text{ص}_{۲}^{۲}}\right) + \left(\text{ب} - \frac{۲}{۳}\text{د}\right)\left(\text{ج}_{۱} - \frac{\text{ج}_{۲}}{\text{ص}_{۲}^{۲}} + \text{ن}_{۲}\right)$$

ان دونوں مساواتوں میں ج۱ اور ج۲ اور ت۲ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$-ق_۱ = \frac{د_۲ ف_۲^۲ - د_۱ ف_۱^۲}{ف_۱^۲ - ف_۲^۲} - \frac{(د_۲ - د_۱) ف_۱^۲ ف_۲^۲}{ص^۲ (ف_۱^۲ - ف_۲^۲)} \quad .... (۱۸)$$

اور
$$-ق_۲ = \frac{د_۲ ف_۲^۲ - د_۱ ف_۱^۲}{ف_۱^۲ - ف_۲^۲} + \frac{(د_۲ - د_۱) ف_۱^۲ ف_۲^۲}{ص^۲ (ف_۱^۲ - ف_۲^۲)} \quad .... (۱۹)$$

اگر $د_۲ =$ صفر

تو
$$-ق_۱ = \frac{-د_۱ ف_۱^۲}{ف_۱^۲ - ف_۲^۲} + \frac{د_۱ ف_۱^۲ ف_۲^۲}{ص^۲ (ف_۱^۲ - ف_۲^۲)}$$

یعنی قطری دباؤ
$$ق_۱ = \frac{د_۱ ف_۱^۲}{ف_۱^۲ - ف_۲^۲} \left\{ ۱ - \frac{ف_۲^۲}{ص^۲} \right\} \quad .... (۲۰)$$

اسی طرح قطری دباؤ
$$ق_۲ = \frac{-د_۱ ف_۱^۲}{ف_۲^۲ - ف_۱^۲} \left\{ ۱ + \frac{ف_۲^۲}{ص^۲} \right\} \quad .... (۲۱)$$

اب ہم ایک ایسے مائع کی صورت پر غور کریں گے جو ایک اسطوانہ نما برتن میں پچکایا جاتا ہے جب یہ مائع پچکتا ہے تو فرض کرو کہ ص، ص + فہ اور اسطوانہ کا طول ل، ل + فل ہو جاتا ہے۔

یعنی کی مساوات میں ج۱ اور ج۲ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$فہ = \frac{ص}{۳ب} \left(\frac{د_۱ ف_۱^۲ - د_۲ ف_۲^۲}{ف_۱^۲ - ف_۲^۲} \right) + \frac{۱}{۲د} \left\{ \frac{(د_۱ - د_۲) ف_۱^۲ ف_۲^۲}{ص (ف_۱^۲ - ف_۲^۲)} \right\}$$

$ص = ف_۱$ پر فرض کرو کہ $فہ = فہ_۱$

$$\therefore فہ_۱ = \frac{ف_۱}{۳ب} \left(\frac{د_۱ ف_۱^۲ - د_۲ ف_۲^۲}{ف_۱^۲ - ف_۲^۲} \right) +$$

$$+ \frac{۱}{۲د} \left\{ \frac{(د_۱ - د_۲) ف_۱ ف_۲^۲}{(ف_۱^۲ - ف_۲^۲)} \right\} \quad .... (۲۲)$$

فرض کرو کہ برتن کا اندرونی حجم ابتداء میں ح_1 تھا اور دباؤ کے بعد $\text{ح}_1 + \text{فرح}_1$ ہوگیا۔

تب $\text{ح}_1 = \pi\, \text{ف}_1^2\, \text{ل}$ اور $\text{ح}_1 + \text{فرح}_1 = \pi (\text{ف}_1 + \text{فہ}_1)^2 (\text{ل} + \text{فرل})$

اب اگر یہ مان لیا جائے کہ فرل اور فہ۱ بہت چھوٹے ہیں تو ان کے اونچی طاقت والے رقوم نظر انداز کئے جا سکتے ہیں۔

$$\therefore \frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}_1} = \frac{2\,\text{فہ}_1}{\text{ف}_1} + \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{2\,\text{فہ}_1}{\text{ف}_1} + \text{لن}_3$$

مساوات (۱۷) اور (۲۲) کی مدد سے :-

$$\frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}_1} = \frac{\text{د}_2 \text{ف}_2^2 - \text{د}_1 \text{ف}_1^2}{\text{ب}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} + \frac{(\text{د}_2 - \text{د}_1)\,\text{ف}_2^2}{\text{د}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} \quad \text{.........} (۲۳)$$

اسی طرح بیرونی حجم کے لئے :-

$$\frac{\text{فرح}_2}{\text{ح}_2} = \frac{\text{د}_2 \text{ف}_2^2 - \text{د}_1 \text{ف}_1^2}{\text{ب}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} + \frac{(\text{د}_2 - \text{د}_1)\,\text{ف}_1^2}{\text{د}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} \quad \text{.........} (۲۴)$$

پچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کے طریقے :- یہاں ریغو کا وہ طریقہ بیان کیا جائے گا جس کے ذریعہ مائعات کے پچکاؤ کی شرح دریافت کی گئی تھی اگر مساوات (۲۳) میں $\text{د}_2 = \text{د}_1 = \text{ق}$ فرض کریں

تو $\frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}_1} = -\frac{\text{ق}}{\text{ب}}$ جہاں ب = برتن کے مادہ کا حجمی معیار لچک

اسی طرح مائع کے لئے جو اس برتن میں رکھا گیا ہے

$\frac{\text{فرح}}{\text{ح}} = -\frac{\text{ق}}{\text{بَ}}$ جہاں بَ = اس مائع کا حجمی معیار لچک

اب چونکہ برتن اور مائع کا حجم ایک ہی ہے۔

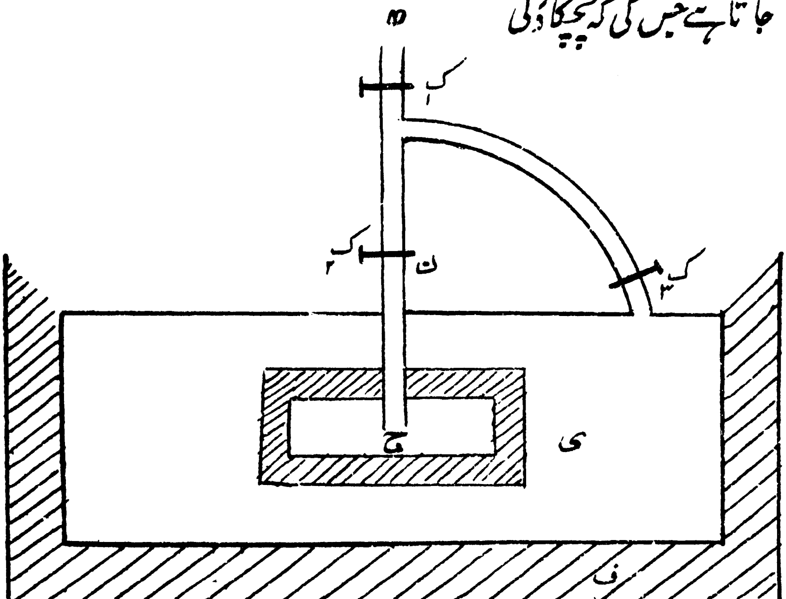
اس لئے حاصل کمی جو حجم میں واقع ہوگی $= \frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}} - \frac{\text{فرح}}{\text{ح}}$

$$= \frac{\text{فرح}_1 - \text{فرح}}{\text{ح}}$$

$$= \text{ق}\left(\frac{1}{\text{بَ}} - \frac{1}{\text{ب}}\right)$$

ریِنو نے اس طریقہ سے، اندرونی اور بیرونی دباؤ ایک ہی رکھ کر بَ کی قیمت دریافت کی اور چنانچہ اسی طرح $\frac{1}{ب\,بَ}$ یعنی مائع کے پچکاؤ کی شرح دریافت کی گئی۔ اس تجربہ میں ب کا معلوم کرنا ضروری ہے۔

جن آلات کا ریِنو نے استعمال کیا تھا وہ شکل نمبر ۳ میں بتائے گئے ہیں۔ ج ایک اسطوانہ نما برتن ہے جس میں اس مائع کو رکھا جاتا ہے جس کی کہ پچکاؤ کی



شکل ۳

شرح دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ اس برتن کو ایک دوسرے برتن ی میں رکھا جاتا ہے اور اس میں پانی بھر دیا جاتا ہے۔ ان سب کو پھر ایک اور بڑے برتن ف میں داخل کیا جاتا ہے جس میں یا تو برف رکھی جاتی ہے یا بھاپ گزاری جاتی ہے۔ اس برتن کو استعمال کرنے کا مقصد صرف یہ ہے کہ تپش مستقل رہے۔ ج میں کا مائع نلی ن کے درجہ دار تنے تک پہنچ جاتا ہے، نلی ن کا حجم کسی دو

متوازن نشانوں کے درمیان دریافت کیا جاتا ہے۔ اس کی اس وقت ضرورت نہیں ہوتی جبکہ خود نلی کی درجہ بندی کی گئی ہو۔ ک_1، ک_2 اور ک_3 ٹونٹیاں ہیں جن کو حسب خواہش کھولا یا بند کیا جا سکتا ہے، ہ سے نکلی ہوئی ہوا کے ذریعہ دباؤ ڈالا جا سکتا ہے اور اس دباؤ کو داب پیما سے ناپا بھی جا سکتا ہے۔ نلیاں اس طرح ترتیب دی گئی ہیں کہ مناسب ٹونٹیوں کو کھولنے سے دباؤ یا تو صرف ج کے بیرونی جانب عمل کرتا ہے اور اندرونی جانب بالکل نہیں عمل کرتا، یا اس کے برعکس عمل کرتا ہے یا بیک وقت نلی کے بیرونی اور اندرونی دونوں جانب اثر کرتا ہے۔ د_1 کو د_2 کے مساوی رکھتا ہو تو ک_1 اور ک_2 دونوں ٹونٹیاں کھول دی جائیں اور دباؤ کو عمل کرنے دیا جائے۔

اس صورت میں اگر مائع کی سطح ا_1 کے مساوی نیچے اتر آئے

$$\text{تو } \text{ا}_1\,\text{س} = \text{فر}\,\text{ح}_1 - \text{فر}\,\text{ح}_2 = \text{ح}\,\text{ق}\left(\frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{بَ}}\right) \quad \ldots\ldots (۲۵)$$

جہاں س = نلی ن کے تراش عمودی کا رقبہ

لہذا مساوات (۲۵) سے ب کی قیمت دریافت کرنے کے بعد ہم بَ کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں اور اس طرح مائع کے پچکاؤ کی شرح دریافت کی جا سکتی ہے۔

اس صورت میں مائع کی سطح کا چڑھاؤ اگر ا_2 کے مساوی ہو اور ق = د_2 اور ح_2 = صفر

$$\text{تو } \text{ا}_2\,\text{س} = \frac{\text{ح}\,\text{ق}\,\text{ف}_2^2}{\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2}\left\{\frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{د}}\right\} \quad \ldots\ldots (۲۶)$$

یہاں بَ اس لئے غائب ہو جاتا ہے کہ اس صورت میں مائع پچکایا نہیں جا رہا ہے اگر مائع کی سطح کا اتار اس صورت میں = ا_3 اور ق = د_1 اور د_2 = صفر

$$\text{تو } \text{ا}_3\,\text{س} = \frac{\text{ح}\,\text{ق}}{\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2}\left\{\frac{\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2}{\text{بَ}} + \frac{\text{ف}_1^2}{\text{ب}} + \frac{\text{ف}_2^2}{\text{د}}\right\} \quad \ldots\ldots (۲۷)$$

اب مساوات (۲۵)، (۲۶) اور (۲۷) سے :-

$$ا_1 س = ا_2 س + ا_3 س$$

$$\therefore ا_1 = ا_2 + ا_3 \quad \text{......(۲۸)}$$

رینو نے اس ضابطہ کی تجربی طور پر تحقیق کی اور اس طرح نظریہ کی صحت کا ثبوت حاصل کیا۔ لیمی کا یہ خیال تھا کہ پواسان کی نسبت سب مادی اشیاء کے لئے $\frac{1}{4}$ کے مساوی ہے۔

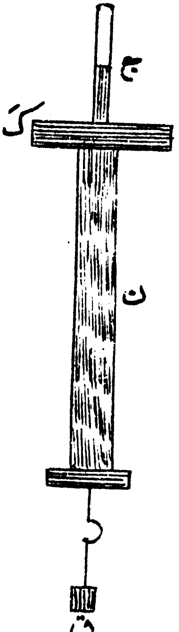
چنانچہ چوتھے باب کی مساوات (۲) سے $د = \frac{3}{5} ب$

اسی بنا پر رینو نے مساوات (۲۶) میں د کے بجائے $\frac{3}{5}$ ب رکھ کر ب کی قیمت پہلے تجربہ سے دریافت کی اور اس کے بعد مساوات (۲۵) کی مدد سے مائع کے لئے ب کی قیمت دریافت کی لیکن یہ طریقہ ٹھیک نہیں۔ لیمی کی رائے بعد میں غلط ثابت ہوئی لہذا یہی بہتر ہے کہ ب کی قیمت ایک علیحدہ تجربہ سے دریافت کی جائے اور پھر اس آسان ضابطہ سے ب کی قیمت معلوم کی جائے۔ ب کی قیمت جیسا کہ اوپر بیان ہو چکا ہے میلک کے طریقے سے بھی دریافت کی جا سکتی ہے مگر جو طریقہ ذیل میں لکھا جاتا ہے وہ اس سے بھی زیادہ آسان ہے۔

شکل ۴۷ میں ت ایک ٹھوس نلی ہے جس کیلئے ب کی قیمت دریافت کرنی ہے۔ یہ نلی ایک اور درجہ دار پتلی نلی ج سے بند کر دی گئی ہے اور اس میں پانی بھرا جاتا ہے ک، ک پر نلی کو اچھی طرح جما دینے کے بعد ایک تناؤ ق لگایا جاتا ہے۔

نلی بڑھتی ہے اور اسکا اندرونی حجم زیادہ ہو جاتا ہے حجم میں یہ اضافہ فرح جو واقع ہوتا ہے وہ پتلی نلی ج میں پانی کے نیچے اتر آنے سے ناپا جاتا ہے۔ نلی کا ابتدائی حجم ح اگر معلوم ہو تو حسب ذیل مساوات سے (جو چوتھے باب صفحہ ۸۲ سے لی گئی ہے) ب کی قیمت آسانی سے معلوم ہو جاتی ہے:-

$$\frac{\text{ز}\,\text{ح}_{۱}}{\text{ح}_{۱}} = \frac{\text{ق}}{\text{۳ ب}} \quad \text{..............} \quad (۲۹)$$



شکل ۳

کسی مائع کے پچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ شکل ۳ کے آلات میں پہلے کوئی مائع (مثلاً پارہ) بھر دیا جائے جس کی پچکاؤ کی شرح معلوم ہے اور اس کے بعد جب برتن کے اندرونی اور بیرونی جانب دباؤ ایک ہی ہو تو حجم میں جو ظاہری تبدیلی ہوتی ہے اس کو معلوم کر لیا جائے۔ پھر برتن میں ایسا مائع بھر دیا جائے جس کے پچکاؤ کی شرح دریافت طلب ہے۔ اب اسی طرح حجم کی ظاہری تبدیلی کو دریافت کر لیں جبکہ اندرونی اور بیرونی دباؤ ایک ہی ہو۔

پارہ کی صورت میں جس کے پچکاؤ کی شرح $\frac{۱}{\text{بَ}}$ معلوم ہے مساوات (۲۵) سے ہمکو یہ مساوات حاصل ہوگی۔

$$\text{آ س} = \text{ح قَ} \left(\frac{۱}{\text{بَ}} - \frac{۱}{\text{ب}} \right) \quad \text{..............} \quad (۳۰)$$

جہاں آ = پارہ کی سطح کا اُتار اور $\text{ح}_{۱} = \text{قَ} = \text{ح}_{۲}$

لہٰذا مساوات (۲۵) اور (۳۰) سے دونوں نامعلوم مقادیر ب اور بَ کی قیمتیں دریافت کر لی جا سکتی ہیں:—

آواز کی رفتار کی مدد سے بھی کسی مائع کی پچکاؤ کی شرح دریافت کی جا سکتی ہے۔ آواز کی کسی کتاب سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\text{ر} = \sqrt{\frac{\text{معیار لچک}}{\text{کثافت}}}$$ جہاں ر = کسی واسطہ میں آواز کی رفتار۔

بارتھی نے ۴° م اور ۲۵° م پر معیار لچک کی قیمت معلوم کرنے کے بعد پانی کی پچکاؤ کی شرح دریافت کی تھی(۳)۔

دباؤ، تپش اور ارتکاز کا اثر پچکاؤ کی شرح پر :- ٹیٹ نے یہ دریافت کیا کہ کسی مائع کے پچکاؤ کی شرح دباؤ کے بڑھنے سے گھٹنے لگتی ہے(۴)۔ اکثر مائعات کی پچکاؤ کی شرح تپش کے بڑھنے سے بڑھتی ہے۔ گراسی نے تجربہ کرنے کے بعد یہ ثابت کیا کہ پانی کے پچکاؤ کی شرح صفر درجہ مئی اور ۴ مئی کے درمیان اعظم ہوتی ہے(۵)۔ پیگلیانی اور دیگر سائنسدانوں نے یہ ثابت کیا کہ ۴۰° م اور ۷۰° م کے درمیان پانی کے پچکاؤ کی شرح اقل ہوتی ہے(۶)۔ پارہ کے پچکاؤ کی شرح کے لئے ڈی مٹز نے ت° م پر جو مساوات حاصل کی تھی وہ حسب ذیل ہے(۷) :-

پچکاؤ کی شرح = $۳۷٫۴ \times ۱۰^{-۷} + ۸۷٫۷ \times ۱۰^{-۱۰}$ ت

زنگلن اور شنیڈر نے مختلف محلولوں کیلئے پچکاؤ کی شرح دریافت کی تھی، انہوں نے یہ ثابت کیا کہ کسی محلول کی پچکاؤ کی شرح، پانی سے کم ہوتی ہے اور جیسے جیسے محلول کا ارتکاز بڑھتا ہے، پچکاؤ کی شرح بھی کم ہوتی جاتی ہے۔ چند مائعات کے پچکاؤ کی شرح ذیل کی جدول میں دی گئی ہیں :-

مائع	تپش مئی درجوں میں	پچکاؤ کی شرح فی ہوا کے کرہ کا دباؤ
پانی	۴	$۵٫۰۰ \times ۱۰^{-۵}$
سمندر کا پانی	۱۷٫۵	$۴٫۳۶ \times ۱۰^{-۵}$
ایتھر	صفر	$۱۱٫۵۶ \times ۱۰^{-۵}$
الکوحل	صفر	$۸٫۲۸ \times ۱۰^{-۵}$
تارپین	صفر	$۵٫۸۲ \times ۱۰^{-۵}$

کلوروفارم	۸٫۵	$۶٫۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
زیتون کا تیل	صفر	$۴٫۸۶ \times ۱۰^{-۵}$
گلیسرین	صفر	$۲٫۵۲ \times ۱۰^{-۵}$
پٹرولیم	۱۹٫۲	$۷٫۴۵ \times ۱۰^{-۵}$
پارہ	۴	$۰٫۳۸ \times ۱۰^{-۵}$

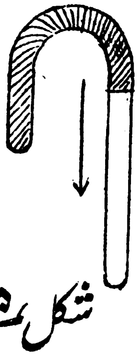
نوٹ۔ اس جدول سے ایک عجیب بات یہ معلوم ہوتی ہے کہ ۴° م پر پارہ کے پچکاؤ کی شرح تقریباً پانی کے پچکاؤ کی شرح کی $\frac{۱}{۱۳٫۶}$ گنی ہے۔ یعنی اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کی پچکاؤ کی شرح پانی کے پچکاؤ کی شرح کی $\frac{۱}{\text{کثافت}}$ گنی ہے۔ دیگر صورتوں میں یہ صحیح نہیں ہے۔

مائعات کی تمدیدی طاقت:۔ معمولی مشاہدات سے ظاہر ہے کہ مائعات کو علیحدہ حصص میں جدا کرنے کے لئے ایک بالکل چھوٹی قوت کافی ہوتی ہے اور اس سے بادی النظر میں یہ نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ ایک مائع کے ذرّوں کے درمیان بہت ہی کم قوت اتصال ہونی چاہیئے۔ مگر ایسا نہیں ہوتا۔ مائع جب حصص میں تقسیم یا جدا کیا جاتا ہے تو اس کی علیحدگی ہمیشہ سطح پر سے بہنے کی شکل میں وقوع پذیر ہوتی ہے اور کبھی بھی ایسا نہیں ہوتا کہ اس کے اندرونی حصص کو شکست کرنا پڑے۔ اس کی مثال کاغذ کے ایک ٹکڑے کی سی ہے جس پر تمدیدی زور لگایا جاتا ہے۔ اس زور کی مزاحمت اگرچہ کاغذ ایک حد تک کر سکتا ہے لیکن کاغذ کو کنارے پر سے کتر دیا جائے تو پھر ایک بالکل چھوٹی قوت آسانی سے اسکو پھاڑ سکتی ہے۔

جن مائعات میں سے ہوا بالکل نکال لی جاتی ہے وہ ٹوٹنے کے بغیر معتدبہ کھنچاؤ کی قوت کی مزاحمت کر سکتے ہیں۔ اس کی بہترین مثال بارپیما کی نلی کے اوپر

پارہ کے چمٹ جانے سے ملتی ہے۔ ایک بارپیما کی نلی کو، جس میں پارہ بھرا ہوا ہو، احتیاط کے ساتھ جھکا کر انتصاباً اُلٹ دیا جائے تو بعض دفعہ پارہ نلی کے اوپر چمٹ جاتا ہے۔ اگرچہ کہ پارہ کا یہ طول اس طول سے زیادہ ہوتا ہے جس کو طبعی طور پر بارپیما سہار سکتا ہے لیکن پھر بھی نلی میں پارہ رہتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اُلٹنے سے، پارہ کے اسطوانہ کے اس زائد طول میں تناؤ ضرور پیدا ہوتا ہے مگر اسطوانہ ٹوٹتا نہیں۔

شکل ۵ میں بتائی ہوئی وضع کی ایک نلی لو اور اسکو پانی اور آبی بخار سے بھر لو۔ پھر پانی کو جوش دے کر اس میں سے احتیاط کے ساتھ کُل ہوا کو نکال لو اور نلی کو بند کر دو۔ جب پانی شکل ۵ میں بتایا ہوا مقام اختیار کرے تو نلی کو تیزی کے ساتھ پیکان کی سمت دھکا دے کر حرکت دو۔



شکل ۵

پانی کے اسطوانہ پر گو ایک معتدبہ تناؤ عمل کرتا ہے لیکن اسطوانہ ٹوٹتا نہیں۔ جب کبھی پانی کا اسطوانہ ٹوٹے گا، ہوا کا ایک چھوٹا بلبلہ وہاں ضرور نظر آئے گا اور اسی کی موجودگی اسطوانہ کے ٹوٹنے کی وجہ ہوتی ہے۔

لہذا اگر یہ مطلوب ہو کہ پانی کا اسطوانہ ٹوٹنے کے بغیر ایک بڑے دھکے کو سہار لے تو حتی الامکان پانی میں سے ہوا کے بلبلوں کو نکال دینا ضروری ہے۔

ان مثالوں سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ پانی، پارہ اور دیگر مائعیات بڑی حد تک ٹوٹنے کے بغیر تمدیدی زور کو سہار سکتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ مائع کے ذرات آپس میں خوب چمٹے ہوئے رہتے ہیں اور ان کو کھینچ کر علیحدہ کرنے کے لئے ایک معتدبہ قوت درکار ہوتی ہے۔

مائعات میں سے ہوا کو بالکل علیحدہ کرنا ایک ایسا مشکل امر ہے کہ اس کی موجودگی کی وجہ سے اس مطلق زور یا تناؤ کی قیمت صحیح طور پر دریافت نہیں

کی جا سکتی جو مائع کے اسطوانہ کو توڑنے کے لئے درکار ہوتا ہے۔ پروفیسر اسبورن رینالڈ نے یہ دریافت کیا ہے کہ پانی ۵ ر ۷۲ پونڈ فی مربع انچ کے تناؤ کو بغیر ٹوٹے ہوئے سہار سکتا ہے۔

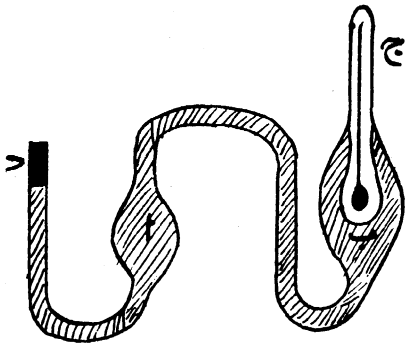
پروفیسر ورڈنگٹن نے یہ معلوم کیا کہ سلفیورک ترشہ ۱۷۳ پونڈ فی مربع انچ اور الکحل ۱۱۶ پونڈ فی مربع انچ کے تناؤ کو سہار سکتا ہے[۵]۔ سنہ ۱۹۰۹ء میں ایچ ایچ ڈکسن ایسے طریقہ سے ایک تجربہ کی بنیاد ڈالی جس کو برتھیلو نے ابتدا میں پانی کے تمدیدی زور کو اس کے لچک اور بگاڑ کی رقموں میں دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا تھا[۹]۔

ایک مضبوط شعری نلی جس کا ایک سرا بند کر دیا گیا تھا ۲۸° م کی تپش کے پانی سے بھری گئی۔ اس کو ۱۸° م تک ٹھنڈا کیا گیا، اور ایک چھوٹا سا ہوا کا بلبلا اس کے اندر داخل کیا گیا۔ اب نلی کو بالکل بند کر دیا گیا۔ نلی کو گرم کرنے سے ہوا بتدریج پانی میں حل ہو گئی اور پوری نلی میں پانی بھر گیا۔ نلی کو جب پھر ۱۸° م تک ٹھنڈا کیا گیا تو پوری نلی میں صرف پانی ہی بھرا ہوا رہا۔ اس سے ظاہر ہے کہ پانی کے حجم میں بگاڑ پیدا ہوا ہوگا اور اسکو ہوا کے بلبلے کے حجم کی اس نسبت سے جو پانی کے حجم کے ساتھ ہوگی، ناپا جا سکتا ہے پانی کے حجمی معیار لچک کی معلوم قیمت سے، پانی کے تمدیدی زور کی قیمت حساب کے ذریعہ حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ بہت دیر تک جوش دئیے ہوئے پانی سے، جس میں سے ہوا قریب قریب بالکل نکالی جا چکی ہے ہم شعری نلی کو تقریباً بھر دیتے ہیں اور اس کے بقیہ حصہ میں پانی کا بخار موجود ہے۔ اس نلی کو ایک کسی خاص تپش تک گرم کیا جائے تو پوری نلی میں پانی بھر جاتا ہے اور نلی کو سرد کرنے پر پانی کی سطح کچھ دیر تک ٹوٹتی نہیں، لیکن ایک خاص تپش پر فرض کرو کہ اسطوانہ ایک بلند "کلک" کی آواز سے ٹوٹ جاتا ہے اور بخار کا بلبلا پھر نمودار ہوتا ہے۔ بلبلا کے اس

حجم اور پانی کے حجم کی نسبت سے بگاڑ کی پیمائش ہوتی ہے۔ لہذا پانی کے حجمی معیار لچک کی معلوم قیمت سے برتھیلو نے پانی کے اس تمدیدی زور کی قیمت معلوم کی جس کو بغیر ٹوٹے ہوئے پانی کا اسطوانہ سنبھال سکتا ہے۔

پروفیسر ورڈنگٹن نے اس طریقہ کو پیش نظر رکھ کر اس میں ترمیم کی شکل ۶ میں ج ایک شعری نلی ہے جسکا ایک سرا ناقص کی شکل کا جوفہ ہے۔ اس میں پارہ اور ا اور ب میں مائع ڈالا جاتا ہے۔ د ہوا کا یا بخار کا ایک بلبلہ ہے۔



شکل ۶

یہ ظاہر ہے کہ جب مائع تناؤ کی حالت میں رہتا ہے (جیسا کہ ڈکسن کے تجربہ میں تھا) تو ناقصی جوفہ پھیلتا ہے اور پارہ کا سوت شعری نلی میں نیچے اتر جاتا ہے۔ اسکے اتار کی مقدار سے پہلے کی طرح بگاڑ کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے اور اس طرح تمدیدی زور دریافت کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقہ سے ورڈنگٹن نے پانی اور الکحل کی حجمی معیار لچک کی قیمتیں بھی دریافت کی ہیں۔ [۱۰]

سطحی تناؤ کے باب میں تمدیدی طاقت کا تفصیلی بیان دیا جائیگا۔

Chapter VI.

(۱) Proc Roy. Soc. A, 74 P50 (1904)
(۲) Memoires de l'Institut, 21 429 (1847)
(۳) Properties of Matter "McEwen" P162 (1923)
(۴) Properties of Matter "Tait" P190, (1885)
(۵) Properties of Matter "Newman & Searle" P131 (1928)
(۶) ,, , .. P131 (1928)
(۷) Properties of Matter 'Poynting & Thomson" P122, (1922)
(۸) ,, ,, ,, P123, (1922)
(۹) General Physics for Students "Edser" P282 (1926)
(۱۰) Phil, Trans. A, P. 355 (1892)

ساتواں باب

مائعات کا سطحی تناؤ

مائعات میں سالماتی اندرونی قوتوں کی موجودگی، ان مظاہر کا باعث ہوتی ہے جن کو سطحی تناؤ سے تعبیر کیا جاتا ہے متعدد مشاہدات سے اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ مائع کی سطح ایک ایسی جھلی کی طرح عمل کرتی ہے جو پتلی، پھیلی ہوئی اور لچک دار ہو۔ مائع کی سطح کا عمل حسب ذیل مشاہدات سے واضح ہوگا :۔

جب پارہ کا ایک قطرہ کسی شیشہ کی تختی یا دھاتی سطح پر ڈالا جاتا ہے تو بجائے پھیل جانے کے ایک جا جمع ہو جاتا ہے، اس کی گہرائی کئی ممر کی ہوسکتی ہے۔ پانی کا قطرہ بھی کسی چکنائی دار تختی پر اسی طرح عمل کرتا ہے اور پھیلنے کے بجائے مجتمع ہوکر ایک جا قائم ہو جاتا ہے۔

سطح کو جو مائعات بھگوتے ہیں وہ پھیل جاتے ہیں اور جو سطح کو نہیں بھگوتے وہ متذکرہ بالا طریقہ سے ایک جا جمع ہو جاتے ہیں۔ یہ عمل صرف ان کے وزن کی قوتوں پر مبنی نہیں ہوتا بلکہ دیگر قوتوں مثلاً تماسی سطح کی خاصیت وغیرہ پر بھی منحصر ہوتا ہے۔

مائعات کے اوپر ایک پتلی جھلی دار سطح کا وجود تصور کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً مچھر جب پانی پر بیٹھتا ہے تو اس کے نیچے پانی کی سطح دب جاتی ہے۔ چاندی کی خشک سوئی پانی کی سطح پر آہستہ رکھ دی جائے تو وہ تیرنے لگتی ہے۔

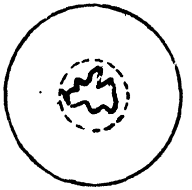
رنگ کرنے کا معمولی برش پانی میں ڈبویا جاتا ہے تو اس کے بال ایک دوسرے پر جم جاتے ہیں، یعنی سطحی تناؤ کی وجہ سے بال ایک دوسرے

کے قریب کھنچ جاتے ہیں۔

دائری وضع کے ایک تار کو ڈوری ۱ ب سے باندھ کر صابون کے محلول میں ڈبو کر باہر نکالو تو تار پر ایک پتلی جھلّی بنتی ہے۔ حصہ ج کو چھونے سے ڈوری ۱ ب (جیسا کہ شکل ۱ میں نقطہ دار خط سے دکھایا گیا ہے) سطحی تناؤ کے باعث کھنچ کر دائری وضع اختیار کر لیتی ہے۔

شکل ۱

شکل ۲ کے مطابق پتلے دھاگے کا ایک حلقہ بنا کر صابوں میں بھگو لو اور احتیاط کے ساتھ اس کو تار کے حلقہ پر بنی ہوئی صابون کی جھلّی کے اوپر رکھ دو۔ دھاگے کے اندر کی جھلّی کو سوئی سے توڑ دو تو دھاگا کھنچ کر ایک دائرے کی شکل اختیار کر لیتا ہے جس کو نقطہ دار خط سے دکھایا گیا ہے۔



شکل ۲

اسی طرح دھاگے کے متعدد چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں کو تار کے حلقہ کے مختلف نقطوں پر ڈھیلا باندھ کر جھلّی کو توڑنے سے مختلف شکلیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

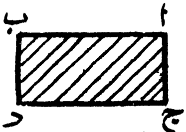
کسی جھلّی نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہو تو وہ تعادل کی حالت میں مستحکم طور پر ہوتا ہے۔ کسی دیئے ہوئے حجم کے لئے صرف کرہ کی سطح کا رقبہ اقل ہوتا ہے اسلئے لازمی طور پر مائع کا قطرہ کرّوی شکل اختیار کرے گا۔ اس صورت میں سطحی تناؤ کی وجہ توانائی بھی اقل ہوتی ہے۔

بچّے اس طرح کھیلا کرتے ہیں کہ کسی نلی کے ایک سرے پر صابون کے محلول کی جھلّی بنا کر دوسرے سرے سے پھونکتے ہیں تو صابون کا بلبلا کرّوی بنتا ہے۔
پانی سے بھرے ہوئے کسی برتن میں ایک شعری نلی ڈال دی جائے تو نلی کے

اندر پانی کی سطح بیرونی سطح سے بلند تر رہتی ہے۔ چونکہ نلی کی دیواروں کے قریب مائع کا سطحی تناؤ بہت کم ہوتا ہے اس لئے پانی شعری نلی میں اوپر چڑھ جاتا ہے۔

یہ سب سطحی تناؤ کی مثالیں ہیں۔

سطحی تناؤ اور سطحی توانائی :۔ فرض کرو کہ شکل ۳ کے مطابق ایک مستطیلی شکل کے تار ا ب ج د پر مائع کی ایک جھلی بنائی جاتی ہے۔ ا ب اوپر یا نیچے متحرک ہو سکتا ہے۔



شکل ۳

ا ب کو تعادل میں رکھنے کے لئے اس کے علی القوائم ایک قوت لگانی ہوگی۔ اس قوت کو جھلی کے ہر ایک رُخ پر کے تناؤ کو تعادل میں رکھنا ہوگا۔ اس تناؤ کو مائع کا سطحی تناؤ کہتے ہیں یعنے مائع کی جھلی کی وجہ قوت فی اکائی طول مائع کا سطحی تناؤ کہلاتی ہے۔

$$\text{پس}\quad \text{س} = \frac{\text{ق}}{\text{۲ ا ب}} \qquad \text{جہاں س = سطحی تناؤ}$$

$$\text{اور}\quad \text{ق} = \text{قوت}$$

سطحی تناؤ کے ابعاد ا کمیت اور -۲ وقت ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب، ج د سے منطبق ہو جاتا ہے، ایسی صورت میں قوت

$$= \text{س} \times \text{۲ ا ب}$$

اور سطحی تناؤ سے کام جو کیا گیا = جھلی کی توانائی بالقوہ جو پہلے تھی

$$= \text{س} \times \text{۲ ا ب} \times \text{ا ج}$$ اور اس صورت میں

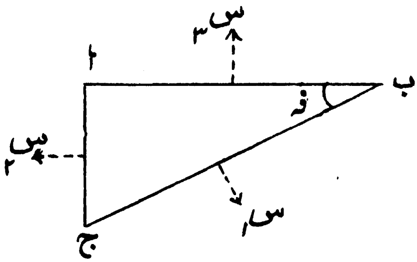
$$\text{س} = \frac{\text{جھلی کی توانائی بالقوہ}}{\text{جھلی کا رقبہ (اسکے دو رخ کا لحاظ کرکے)}} = \frac{\text{جھلی کی توانائی بالقوہ}}{\text{۲ ا ب} \times \text{ا ج}}$$

لہذا کسی مائع کے سطحی تناؤ کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے :۔

"سطحی تناؤ وہ کام ہے جو مائع کی سطح میں ہم تپشی حالات کے تحت' اکائی

رقبہ کا اضافہ کرنے میں کیا جاتا ہے۔"

مائع کا سطحی تناؤ ہر جگہ ایک ہوتا ہے[۱] **:۔** کسی مائع کی سطح کے تعادل پر غور کرو۔



شکل ۴

فرض کرو کہ ا ب ج اس سطح میں ایک قائم الزاویہ مثلث کی شکل کا ٹکڑا ہے (شکل ۴) اور ب ج، ج ا اور ا ب کے کناروں پر سطحی تناؤ بالترتیب $س_{1}$، $س_{2}$ اور $س_{3}$ ہے۔

ان تینوں کناروں پر عموداً عمل کرنے والی قوتیں بالترتیب $س_{1}$(ب ج)، $س_{2}$(ا ج) اور $س_{3}$(ا ب) ہوں گی۔

ا ب کے علی القوائم سمت میں تحلیل کرنے سے :۔

$س_{3}$(ا ب) = $س_{2}$(ا ج) ممم فہ = $س_{1}$(ب ج) جم فہ

∴ $س_{1}$ = $س_{2}$ = $س_{3}$

لہذا ہر جگہ سطحی تناؤ کی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔

کسی شکل کا ایک مثلثی یا مستطیلی ٹکڑا سطح پر لیکر اوپر کے نتیجہ کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔

قطرے کے اہتزازات :۔ جس نلی کے سرے پر قطرہ بنتا ہے اس پر سے گرنے کے قبل کروی شکل کا نہیں ہوتا۔ اسکا انتصابی قطر افقی قطر کی بہ نسبت، نلی سے باہر نکلنے میں، بڑا ہو جاتا ہے۔ اس لمحہ میں جبکہ وہ نلی کے سرے سے علیحدہ ہوتا ہے اس کی شکل لیمو جیسی ہوتی ہے۔ خلا میں آزادانہ گرنے کے دوران میں اس پر جاذبہ زمین کا اثر چونکہ نظر انداز کئے جانے کے قابل ہوتا ہے لہذا اس وقت صرف سطحی تناؤ کا لحاظ کیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ سے قطرہ

کی شکل ایک کامل کرہ کی سی ہو جاتی ہے (بارش کا قطرہ بھی ہوا میں سے جس کی لزوجت بہت چھوٹی ہوتی ہے، گرتے ہوئے یہی شکل اختیار کرلیتا ہے)۔ لہٰذا لیموں کی طرح بننے کے بعد، قطرہ کی شکل قلیل وقفہ کے لئے کروی ہو جاتی ہے۔ چونکہ قطرہ کے ذرات میں سطحی قوتوں کے عمل سے توانائی اور معیار حرکت پیدا ہو جاتا ہے اس لئے ذرات ایک دوسرے کے اضافی نقطۂ نظر سے ساکن نہیں ہو سکتے۔ اسی وجہ سے زیادہ دیر تک قطرہ کی شکل کروی نہیں رہ سکتی اور وہ چپٹا ہو کر تربوز کی شکل اختیار کر لیتا ہے۔ پھر یہی کیفیت دہرائی جاتی ہے اور قطرہ مختلف شکلیں بدلتا ہے اور تھوڑی دیر کے لئے پھر کروی شکل اختیار کر لیتا ہے۔ آخر کار ان تبدیلیوں میں بتدریج کمی واقع ہوتی ہے اور اندرونی رگڑ وغیرہ کی وجہ سے، یہ بالکل غائب ہو جاتی ہیں۔

شکل ۵

شکل ۵ میں پانی کی ایک دھار بتائی گئی ہے جو ایک گول سوراخ میں سے بہہ کر نکلی ہے۔ ابتدا میں یہ ایک مائع کے لمبے اسطوانہ کی شکل اختیار کر لیتی ہے لیکن بعد میں تعادل میں نہ ہونے کی وجہ سے اس کی گردنیں بننے لگتی ہیں اور وہ پھولنے لگتا ہے حتیٰ کہ جس طرح شکل میں دکھایا گیا ہے وہ متفرق قطروں میں منقسم ہو جاتا ہے۔ اسی شکل میں چھوٹے چھوٹے وہ قطرے بھی دکھائے گئے ہیں جو بڑے قطروں کے ٹوٹنے سے بنتے ہیں۔ اس پوری کیفیت کی عکسی تصویر لی گئی ہے

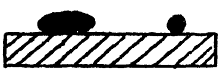
لارڈ کلون نے، پانی کے ایک قطرے کے اہتزاز کا وقت دوران حسابی طریقہ سے دریافت کیا ہے (۲)۔ (یعنی اس وقفہ کو دریافت کیا ہے جس میں قطرہ مختلف تبدیلیوں کے بعد پھر کروی شکل اختیار کر لیتا ہے) اور اس کی قیمت $\frac{۱}{۴}$ ص$^{\frac{۳}{۲}}$ دریافت کی گئی ہے، جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر

کسی مائع کا، ٹھوس یا کسی دوسرے مائع کی سطح پر پھیلنا (زاویہ تماس)

جب کبھی کسی مائع کا قطرہ ایک ٹھوس کی چکنی اور افقی سطح (مثلاً شیشہ کی تختی) پر رکھا جاتا ہے تو جو شکل وہ اختیار کرتا ہے اس کی نوعیت مختلف چیزوں پر منحصر ہوتی ہے۔ جتنا زیادہ وہ پھیلے گا اتنا ہی اس کا مرکز جاذبہ پست ہونے لگے گا، اور اُسی قدر اس کی تجاذبی توانائی کم ہونے لگے گی۔ لیکن قطرہ کے پھیلنے سے اس کا سطحی رقبہ بڑھنے لگتا ہے اور اسکے لئے کام کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

تعادل کے لئے، تجاذبی توانائی کی ایسی کمی کا جو ایک چھوٹے سے رقبہ کے بڑھنے کی وجہ سے واقع ہوتی ہے، اس کام کے مساوی ہونا ضروری ہے جو سطح کے بڑھنے کے لئے درکار ہوتا ہے۔

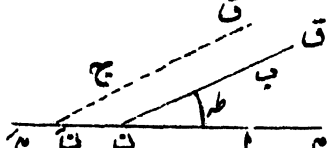
اگر قطرہ چھوٹا ہو تو وہ کروی شکل اختیار کر لیتا ہے اور اگر وہ بڑا ہو تو ایک ایسی شکل اختیار کر لیتا ہے جو صابون کی ٹکیا کی طرح ہوتی ہے۔ دیکھو شکل ۶



شکل ۶

اس صورت میں ہمیں تین مختلف واسطوں پر غور کرنا ہوگا یعنی دوسرے الفاظ میں تین مختلف سطحی تناؤ کا لحاظ کرنا ہوگا۔ اول شیشہ اور ہوا کی تماسی سطح پر جس کو ہم س۱ سے تعبیر کریں گے غور کرنا ہوگا۔ دوم مائع اور ہوا کی تماسی سطح پر جس کی تعبیر س سے کی جائے گی اور سوم مائع اور شیشہ کی تماسی سطح پر جس کو س۲ سے تعبیر کیا جائیگا۔

مائع کے تعادل کی حالت پر غور کرو جس پر سوائے سطحی تناؤ کے اور کوئی قوت عمل نہیں کرتی ہو۔ فرض کرو شکل ۷ میں ا ٹھوس کی، ب مائع کی اور ج ہوا کی تعبیر کرتا ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ مائع اور ہوا کے درمیان سطح فاصل ق ن ہے اور م م ٹھوس کی سطح ہے۔



شکل ۷

فرض کرو کہ زاویہ ق ن م = ط

زاویہ (۱۸۰ − ط) ٹھوس کے ساتھ مائع کا "زاویہ تماس" کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ مائع اور ہوا کی سطح فاصل ق ن، سے مقام قَ نَ میں آجاتی ہے جو ق ن کے متوازی ہے۔ اس ہٹاؤ سے، ٹھوس کی ایک دھجی پر جس کا عرض ن نَ ہے مائع پھیل جاتا ہے۔

فرض کرو کہ اس دھجی کا رقبہ سا ہے۔ ہٹاؤ کی وجہ سے توانائی میں تبدیلی اگر ہم ہر صورت پر علیحدہ غور کریں

تو (۱) ا اور ب کی درمیانی سطح میں رقبہ سا کے بڑھنے کی وجہ سے ہوگی اور

(۲) ب اور ج کی درمیانی سطح میں رقبہ سا جم ط کے بڑھنے سے ہوگی اور

(۳) ا اور ج کی درمیانی سطح میں رقبہ سا کی کمی کی وجہ سے ہوگی۔

پہلی صورت پر غور کرنے سے ظاہر ہے کہ توانائی میں اضافہ = $\text{سا} \times \text{س}_{۲۱}$

اور دوسری صورت پر غور کرنے سے، توانائی میں اضافہ = $\text{س}_{۲}\ \text{سا جم ط}$

اور تیسری صورت میں توانائی میں کمی = $\text{س}_{۱} \times \text{سا}$

تعادل یا توازن کے لئے توانائی میں مجموعی اضافہ ہمیشہ توانائی میں مجموعی کمی کے مساوی ہونا چاہیئے۔

یعنی $\text{س}_{۱}\ \text{سا} = \text{س}_{۲۱}\ \text{سا} + \text{س}_{۲}\ \text{سا جم ط}$

یعنی $\text{جم ط} = \dfrac{\text{س}_{۱} - \text{س}_{۲۱}}{\text{س}_{۲}}$

ایسے پارہ میں جو شیشہ سے تماس کرتے ہوئے رکھا گیا ہو ط کی قیمت = ۱۴۰°

ظاہر ہے کہ $\text{س}_{۱} - \text{س}_{۲۱}$ کی قیمت مثبت، اور $\text{س}_{۲}$ سے کم ہوگی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $\dfrac{\text{س}_{۱} - \text{س}_{۲۱}}{\text{س}_{۲}}$ کی قیمت +۱ سے زیادہ اور −۱ سے کم کسی حالت میں نہیں ہو سکتی۔ اگر ایسا ہو تو ط کی قیمت مساوات پر صادق نہیں آتی اور اسی لئے کسی ٹھوس کی سطح پر قطرہ بننے کے بغیر مائع پوری طور سے پھیل

جاتا ہے۔

جب کسی مائع کا ایک قطرہ دوسرے مائع کی سطح پر رکھا جاتا ہے تو اسی طرح کے حالات واقع ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں $س_{21}$ سے، دونوں مائعوں کے درمیانی سطح کے سطحی تناؤ کی تعبیر ہوتی ہے۔

اوپر بیان ہو چکا ہے کہ $\frac{(س_1 - س_{21})}{س_2} < +1$

$$یعنی\ س_1 < (س_{21} + س_2) \quad اور \quad \frac{(س_1 - س_{21})}{س_2} > -1$$

$$یعنی\ س_1 + س_2 > س_{21}$$

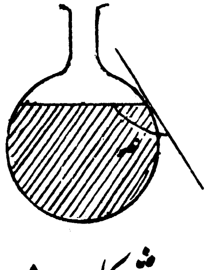
لہذا $س_1$، $س_2$ اور $س_{21}$ میں کے کسی دو مقداروں کا مجموعہ، تیسرے سے بڑا ہونا ضروری ہے۔ اس لئے ایک ایسے مثلث کا کھینچنا ممکن ہے جس کے ضلعوں کے طول $س_1$، $س_2$، اور $س_{21}$ کے مساوی ہوں۔ یہ مثلث نیومن کی مثلث کہلاتی ہے[۴]۔

اگر کوئی دو مقداروں کا مجموعہ تیسرے سے کم ہو تو مثلث کا کھینچنا ناممکن ہوگا لہذا مائع کسی دوسری سطح پر قطرہ بننے کے بغیر پھیلنے لگتا ہے۔

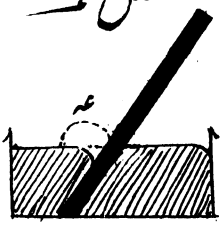
زاویہ تماس دریافت کرنے کا طریقہ :- کروی شکل کی ایک صراحی میں پارہ کو ڈالکر، شیشہ سے پارہ کا زاویۂ تماس دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اگر گہرائی کم ہو تو پارہ کی سطح محدب ہوتی ہے۔ اگر اور زیادہ پارہ بتدریج صراحی میں ڈالا جائے تو ایک خاص موقعہ پر اس کی سطح بالکل چپٹی ہو جاتی ہے اور پھر مقعر ہونے لگتی ہے۔ پارہ کی سطح سے (جبکہ وہ بالکل چپٹی ہوتی ہے) شیشہ کے ساتھ جو زاویہ منفرجہ بنتا ہے وہ زاویۂ تماس ع کہلاتا ہے۔ شکل ۸۵ میں یہ زاویہ دکھایا گیا ہے۔ یہ گے لوزک کا طریقہ کہلاتا ہے۔

ایک اور سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ شیشہ کی ایک تختی لیکر اس کا کچھ حصہ

ایک پارے سے بھرے ہوئے برتن میں ڈبو دو اور شیشہ کو اتنا زاویہ بناتے ہوئے جھکاؤ کہ اس کے نیچے کی پارہ کی سطح بالکل مستوی ہو جائے۔ (دیکھو شکل ۹) شیشہ کی تختی پارہ کی افقی سطح سے جو زاویہ منفرجہ بناتی ہے وہ زاویہ تماس عہ ہوگا۔



شکل ۸



شکل ۹

پانی کی سطح پر چکنائی کی پرت :-

کافور کے چھوٹے چھوٹے ذرے لیکر پانی کی صاف سطح پر ڈالو تو عجیب طریقے سے وہ اِدھر اُدھر ناچنے لگتے ہیں۔ مارنگونی نے اس کی توضیح یوں کی کہ یہ عمل پانی میں کافور کے حل ہونے کی وجہ سے ہوتا ہے۔ کافور اور پانی کے محلول کا سطحی تناؤ خالص پانی کے سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے۔ کافور کے ہر ذرہ کے گرد پانی کی ہر ایک چھوٹی سطح کا سطحی تناؤ اطراف کے سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے اس لئے سطح کا یہ ٹکڑا اردگرد کی سطح سے باہر کھینچ کر نکالا جاتا ہے اور اسی وجہ سے کافور کے ذرے متحرک ہوتے ہیں۔ اگر پانی پر چکنائی یا تیل کی ایک پتلی سی جھلی موجود ہو تو کافور کے ذرّوں کی حرکت غائب ہو جاتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تیل کی ایک پتلی سی جھلی پانی کے سطحی تناؤ کو اتنا کم کر دیتی ہے کہ کافور کے محلول سے سطحی تناؤ میں مزید کوئی کمی نہیں ہو سکتی۔

لارڈ ریلے نے تیل کی جھلی کی اُس موٹائی کو ناپا ہے جو پانی پر کافور کے ذرّوں کی حرکت کو روک دینے کے لئے کافی ہوتی ہے۔ اس کی قیمت 2×10^{-7} سمر ہوتی ہے لیکن 10^{-7} کی یا اس سے کم موٹائی کی جھلی کا،

پانی کے سطحی تناؤ پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ اس موٹائی کی حد تک پانی کی سطحی تناؤ میں کمی نہیں ہوتی، لیکن اس کے بعد سطحی تناؤ میں تیزی کے ساتھ کمی واقع ہونے لگتی ہے حتیٰ کہ موٹائی ۲×۱۰^{-۷} سم تک پہنچ جاتی ہے جھلی کی موٹائی کی اس قیمت کے بعد سطحی تناؤ کی قیمت میں کمی بتدریج واقع ہوتی ہے۔ لارڈ ریلے نے بعض وجوہات کی بنا پر یہ رائے قائم کی کہ تیل کے ایک سالمہ کا قطر $۱۰^{-۷}$ سم ہے لیکن اس سے نصف موٹائی کے تیل کی جھلیوں کی تصدیق ہو چکی ہے جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ تیل کے ایک سالمہ کا قطر $۱۰^{-۷}$ سم سے کم ہونا چاہیئے۔

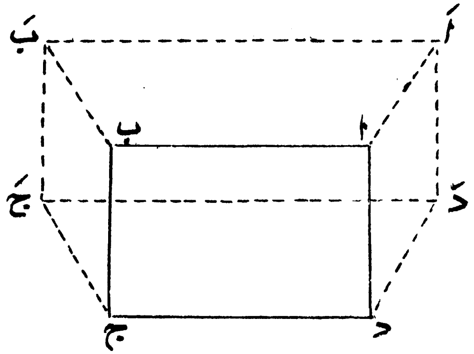
سمندر میں طوفان برپا ہو تو پانی کی سطح پر تیل یا چکنائی چھوڑ کر موجوں کو بڑی حد تک سکون میں لایا جا سکتا ہے۔ تیل والی سطح کے ایک حصہ پر جب ہوا چلتی ہے تو یہ تیل کو آگے ڈھکیلتی ہے اور پانی کی تقریباً خالص سطح کو پیچھے چھوڑ دیتی ہے چونکہ اسکا سطحی تناؤ تیل والی سطح کی بہ نسبت زیادہ ہوتا ہے اس لئے اس سطح پر جس کو ہوا حرکت دیتی ہے، پیچھے کی طرف کھنچاؤ واقع ہوتا ہے اور آگے کی جانب موجوں کی حرکت رک جاتی ہے۔ کچھ موجیں اگر بنتی بھی ہیں، تو چکنائی دار سطح پر گزرتے ہوئے یہ روک دی جاتی ہیں اس کا سبب یہ ہے کہ موجی حرکت پانی کی سطح کی پرت میں کھنچاؤ پیدا کرنی چاہتی ہے اور ایک حصہ میں دیگر حصص کی بہ نسبت جہاں کہ چکنائی ہوتی ہے کسی لمحہ میں کھنچاؤ زیادہ ہوتا ہے۔ اس سے کم کھنچے ہوئے حصوں پر زیادہ کھنچے ہوئے حصے کھنچاؤ کی قوت لگاتے ہیں۔ لہذا موجوں کی توانائی پانی کی سطح میں حرکت پیدا کرنے میں صرف ہو جاتی ہے۔

گیس اور مائع کی سطحوں کا تماس :- کسی مائع کے سطحی تناؤ کا انحصار اس گیس پر ہوتا ہے جو مائع کی سطح کے ساتھ تماس کرتی ہے۔ ریبیسے اور شیلڈ کی رائے میں پانی کا

سطحی تناؤ جبکہ آبی بخار اس کی سطح سے مس کر رہا ہو صفر درجہ مئی تپش پر ۷۳ء۳ ڈائین فی سمر کے مساوی ہوتا ہے۔

اگر پانی کی سطح کا تماس ہوا کے ساتھ ہو تو صفر درجہ مئی پر سطحی تناؤ کی قیمت ۷۵ء۸ ڈائین فی سمر ہوتی ہے۔ اسٹاکل نے یہ دریافت کیا کہ پارہ کے سطحی تناؤ کی قیمت پارہ کے بخار کے ساتھ جب تماس ہو رہا ہو تو کم ہوتی ہے بہ نسبت اس قیمت کے جبکہ ہوا کے ساتھ تماس ہو رہا ہو (بشرطیکہ دونوں حالتوں میں تپش ایک ہی ہو۔) پارہ کے سطحی تناؤ کی قیمت کا انحصار جبکہ ہوا کے ساتھ اس کی سطح کا تماس ہو رہا ہو وقت کے اس عرصہ پر بھی ہوتا ہے جس میں کہ پارہ ہوا میں رکھا رہتا ہے۔

سطحی تناؤ، مائع کی سطح کا انحنا اور دباؤ لاپلاس[۴] کی مساوات:۔



شکل ۱

اب ج د مستطیل شکل کا ایک بہت ہی چھوٹا عنصر مائع کی سطح پر لیا جاتا ہے (شکل ۱)

جہاں اب = عہ

اور ب ج = بہ

(فرض کرو)

نیز یہ فرض کرو کہ مائع کی سطح کے دونوں رخوں کے درمیان فرق دباؤ

= د

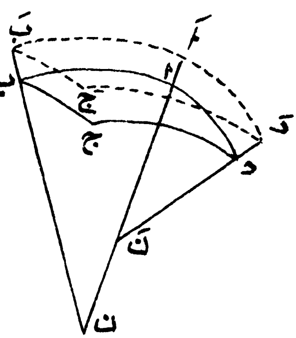
فرض کرو کہ اب عنصر مذکور بیرونی جانب سطح کے علی القوائم ایک

چھوٹا سا فاصلہ فرما طے کرتا ہے اس کے نئے مقام کو اَ بَ جَ دَ سے تعبیر کرو۔ جہاں اَ بَ = عَہ اور بَ جَ = بَہ۔

دباؤ نے جو کام کیا = د × عہ × بہ × فرما

سطحی تناؤ نے جو کام کیا = س (عَہ بَہ − عہ بہ)

تعادل کے لئے یہ ضروری ہے کہ د عہ بہ فرما = س (عَہ بَہ − عہ بہ) ....(۱)

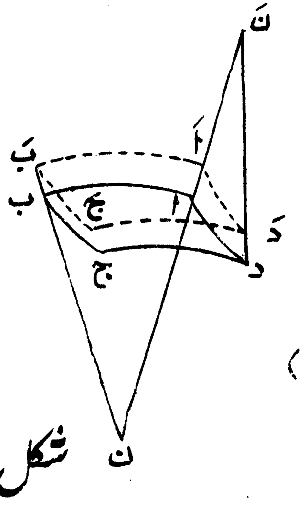


شکل ۱۱

چونکہ عنصر ا ب ج د منحنی سطح کا ایک حصہ ہے۔

لہٰذا اَ بَ جَ دَ کی سطح بھی منحنی ہوگی جیسا کہ شکل ۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔

ا اور ب پر کے سطح کے عمود ن پر اور ا اور د پر کے سطح کے عمود نَ پر متقاطع ہوتے ہیں، نقاط ن اور نَ سطح کے مقابل جانب بھی ہو سکتے ہیں جیسا کہ شکل ۱۲ میں دکھایا ہے۔



شکل ۱۲

شکل ۱۱ پر غور کرو:—

چونکہ مثلث ا ب ن اور اَ بَ ن متشابہ ہیں لہٰذا

$$\frac{\text{بَ اَ}}{\text{بَ ن}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ب ن}}$$

یعنی عَہ = عہ . (ص۱ + فرما) / ص۱ ....(۲)

جہاں ص۱ = ب ن = ا ب کا نصف قطر انحنا۔

اسی طرح مثلث ۲ د ن̄ اور ۲ د̄ ن̄ چونکہ ایک دوسرے کے متشابہ ہیں

$$\therefore \bar{\text{بہ}} = \frac{\text{بہ}(\text{ص}_{۲} + \text{فرما})}{\text{ص}_{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

جہاں ص$_{۲}$ = ۱ ن̄ = ۲ د کا نصف قطر انحنا۔

چونکہ عنصر زیر غور بہت چھوٹا ہے لہذا شکل ۱۱ میں ۲ ب ج د اور ۲ ب̄ ج̄ د̄ کو ہم مستطیل شکلیں تصور کر سکتے ہیں۔

∴ مساوات (۲) اور (۳) سے:-

$$\bar{\text{عہ}}\,\bar{\text{بہ}} = \frac{\text{عہ بہ}}{\text{ص}_{۱}\text{ص}_{۲}} \left\{(\text{ص}_{۱} + \text{فرما})(\text{ص}_{۲} + \text{فرما})\right\}$$

ص$_{۱}$ اور ص$_{۲}$ کے مقابلہ میں اگر فرما بہت چھوٹا ہو تو $\frac{(\text{فرما})^{۲}}{\text{ص}_{۱}\text{ص}_{۲}}$ کو ہم نظر انداز کر سکتے ہیں۔

$$\therefore \bar{\text{عہ}}\,\bar{\text{بہ}} = \frac{\text{عہ بہ}}{\text{ص}_{۱}\text{ص}_{۲}} \left\{\text{ص}_{۱}\text{ص}_{۲} + \text{ص}_{۱}\,\text{فرما} + \text{ص}_{۲}\,\text{فرما}\right\}$$

$$= \text{عہ بہ}\left\{۱ + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_{۲}} + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_{۱}}\right\} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اوپر کی مساواتوں (۱) اور (۴) سے:-

$$\text{د عہ بہ فرما} = \text{س}\left[\text{عہ بہ فرما}\left(\frac{۱}{\text{ص}_{۲}} + \frac{۱}{\text{ص}_{۱}}\right)\right]$$

$$\therefore \text{د} = \text{س}\left(\frac{۱}{\text{ص}_{۱}} + \frac{۱}{\text{ص}_{۲}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اسی طرح شکل ۱۲ پر غور کرنے سے ہمیں $\bar{\text{عہ}} = \text{عہ}\left(\frac{\text{ص}_{۱} + \text{فرما}}{\text{ص}_{۱}}\right)$

اور $\bar{\text{بہ}} = \text{بہ}\left(\frac{\text{ص}_{۲} - \text{فرما}}{\text{ص}_{۲}}\right)$ حاصل ہوتے ہیں

$$\text{چنانچہ } \bar{\text{عہ}}\,\bar{\text{بہ}} = \text{عہ بہ}\left\{۱ - \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_{۲}} + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_{۱}}\right\}$$

اب مساوات (١١) میں درج کرنے سے :-

$$د = س \left[\frac{1}{ص_1} - \frac{1}{ص_2} \right] \quad \text{.................} \quad (٦)$$

اگر نصف قطر انحنا مثبت اُس صورت میں فرض کیا جائے جبکہ انحنا کا تناظر مرکز، مائع کی سطح کے اس جانب ہو جہاں دباؤ زیادہ ہے، اور منفی اُس صورت میں جبکہ انحنا کا مرکز سطح کے اس جانب ہو جہاں دباؤ کم ہے، تو دونوں صورتوں میں عام مساوات حسب ذیل ہو گی۔

$$د = س \left(\frac{1}{ص_1} + \frac{1}{ص_2} \right) \quad \text{..........} \quad (٧)$$

یہ مساوات عملی مسائل کے حل کرنے میں نہایت اہم ہے۔

اگر سطح کروی ہو تو $ص_1 = ص_2$

یعنی اس صورت میں $د = \frac{٢ س}{ص_1}$

اگر سطح استوانہ نما ہو تو $ص_2 = \infty$

یعنی اس صورت میں $د = \frac{س}{ص_1}$

اگر $د$ = صفر یعنی جھلی کے دونوں رخوں کے درمیان دباؤ میں کوئی فرق نہ ہو تو $ص_1 = - ص_2$ اس کی عملی طور پر تصدیق کرنے کے لئے دو مساوی ناپ کی قیفیں لو اور ان کے چوڑے کناروں کے درمیان صابون کی ایک جھلی اس طرح بناؤ کہ دونوں قیفوں کے کنارے ایک دوسرے کے متوازی اور ان کے مستوی ان کے مرکزوں کو ملانے والے خط کے علی القوائم رہیں (جس طرح کہ شکل ١٣ میں دکھایا گیا ہے)

شکل ١٣

چونکہ قیفوں کے سرے کرۂ ہوائی کے دباؤ کے لئے کھلے ہوئے ہیں لہذا قیفوں کے اندرونی اور بیرونی دباؤ یکساں ہوں گے۔

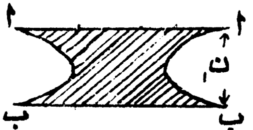
∴ $ص_۱ = ص_۲$ شکل میں نقطہ دار خطوط سے واضح طور پر بتایا گیا ہے۔
اب ایک قیف کی نلی کو بند کر دو اور دوسری قیف کی نلی سے دباؤ کو اس طرح ترتیب دو کہ جھلی اسطوانہ نما ہو جائے۔ دونوں قیفوں کو علیحدہ کر دو لیکن اس امر کا خیال رکھو کہ جھلی کی شکل ہر حالت میں اسطوانہ نما رہے۔ اس طرح اس اسطوانہ کا اعظم طول دریافت کرو جو بغیر ٹوٹے قائم رہ سکتا ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوگا کہ اسطوانہ کا یہ اعظم طول قیف کے کنارے کے دَور یا اس اسطوانہ کے محیط سے کسی حالت میں بھی بڑھ نہیں سکتا، اگر ذرا سا بھی زیادہ کر دیا جائے تو اسطوانہ نما جھلی فوراً پھٹ جائے گی۔

پروفیسر بائز اور پروفیسر رکر نے نہایت ہی عمدگی سے اس تجربہ کو دکھایا تھا۔

اسی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مختلف شکلوں کی جھلیاں چند خاص خاص شرائط کے تحت قائم رہ سکتی ہیں۔

سطحی تناؤ کے باعث دو متوازی تختیوں کے درمیان قوت (۵) :-

شکل ۱۴ میں ا اور ب دو متوازی تختیاں ہیں، ان کے درمیان ایسا مائع موجود ہے جس سے تختیاں بھیگ جاتی ہیں، اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ $ن_۱$ اور مائع سے بھیگے ہوئے حصہ کے رقبہ کا قطر $ن_۲$ ہو تو مائع کی آزاد سطح پر نصف قطر انحنا $+\frac{ن_۱}{۲}$ اور $-\frac{ن_۲}{۲}$ ہونگے



شکل ۱۴

لہذا مساوات (۷) سے کرہ ہوائی کے دباؤ اور جھلی کے اندر کے دباؤ میں فرق ذیل کی مساوات کے مطابق ہوگا :-

$$د = ۲س \left(\frac{۱}{ن_۱} - \frac{۱}{ن_۲} \right)$$

اگر $ن_۱$ کی قیمت $ن_۲$ کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہو

$$\text{تو}\quad د = \frac{۲\,س}{ن_۱}$$

اگر جھلی سے بھیگے ہوئے حصہ کا رقبہ ر ہو تو قوت جو ۱ کو ب کی طرف دبائے گی حسب ذیل ہو گی۔

$$\text{قوت} = د\,ر = \frac{۲\,س\,ر}{ن_۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

اس سے ظاہر ہے کہ قوت، تختیوں کے درمیانی فاصلہ سے معکوس اور تختیوں کے رقبہ سے راست تناسب رکھتی ہے۔ لہذا شیشہ کی دو متوازی تختیوں کے درمیان، پانی کا قطرہ رکھا جائے تو چونکہ $ن_۱$ کی قیمت گھٹ جاتی ہے اور ر کی قیمت بڑھ جاتی ہے اس لئے تختیاں زیادہ قوت سے ایکدوسرے کی طرف کھنچ آئیں گی۔

مثال:۔ پانی کے ایک قطرہ کو جس کا وزن ۰٫۱ گرام ہے دو متوازی مستوی شیشہ کی تختیوں کے درمیان داخل کیا جاتا ہے۔ اگر دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ ۰٫۰۰۱ سمر ہو تو کتنی قوت عمل کرے گی؟

چونکہ پانی کا قطرہ تختیوں کے درمیان ایک خاص رقبہ والے مدور قرص کی شکل میں پھیل جاتا ہے اس لئے فرض کرو کہ پانی سے تختیوں کا جو حصہ بھیگتا ہے اس مدور قرص کا رقبہ ر ہے۔ فرض کرو کہ اُس قرص کا نصف قطر ص ہے۔

$$\therefore\ ر = \pi\,ص^۲$$

$$\text{یعنی قوت} = \frac{۲\,س\,\pi\,ص^۲}{ن_۱}$$

چونکہ پانی کی کثافت ۱ ہے لہذا قطرہ کا حجم = ۰٫۱ مکعب سمر

جبکہ دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ = $ن_۱$ تو قطرہ کا حجم =

$$= ن_۱\,\pi\,ص^۲ = ۰٫۱\ \text{مکعب سمر}$$

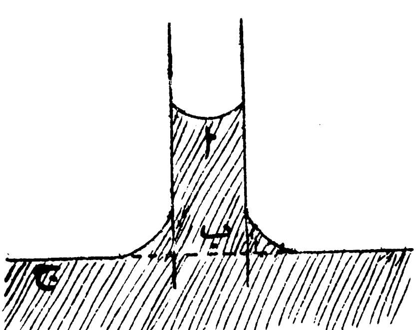
$$\text{یعنی}\ \pi\,ص^۲ = \frac{۰٫۱}{ن_۱} = \frac{۰٫۱}{۰٫۰۰۱}\ \text{مربع سمر}$$

$$\therefore \text{قوت} = \frac{75 \times 2}{0.001} \times \frac{0.1}{0.001}$$

$$= 1.5 \times 10^{9} \text{ ڈائین}$$

متوازی تختیوں کے درمیان جذب یا دفع کا عمل :-

چھوٹے اجسام مثلاً کاک کے ٹکڑے یا لکڑی کے چھوٹے ٹکڑے جب کسی مائع کی سطح پر تیرتے ہیں تو ایک دوسرے کو جاذب کرتے ہوئے ایک جگہ جمع ہو جاتے ہیں - یہ اس وقت ہوتا ہے جبکہ تمام اجسام یا تو مائع سے بھیگے ہوئے ہوتے ہیں یا بالکل خشک ہوتے ہیں - اگر ان میں سے ایک خشک اور دوسرا بھیگا ہوا ہو تو ایک دوسرے کو دفع کرتا ہے - اس کی توجیہہ یہاں کی جائے گی -



شکل ۱۵ ع

شکل ۱۵ ع پر غور کرو - یہاں دو متوازی شیشہ کی تختیاں ایک ایسے مائع میں رکھی ہوئی دکھائی گئی ہیں جو ان کی سطح کو بھگوتا ہے - ان دونوں تختیوں کے درمیان مائع اپنی سطح سے اونچا رہتا ہے -

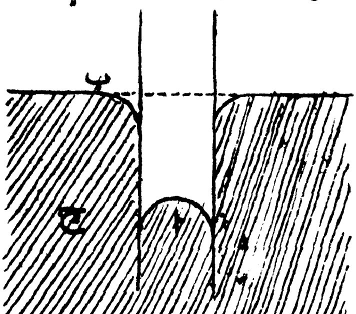
ج پر دباؤ = ب پر کے دباؤ کے (ہمسطح ہونے کی وجہ سے)
= کرہ ہوائی کا دباؤ

اور ب پر دباؤ = ا پر دباؤ ہلالی سطح کے ٹھیک نیچے + ا ب گہرائی کی وجہ دباؤ اس سے ظاہر ہے کہ ا پر کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ سے کم ہے - لہٰذا کرہ ہوائی کا دباؤ دونوں تختیوں کو ایک دوسرے کے قریب لانے کا تقاضا کرے گا - اس کے علاوہ تختیوں کے درمیان جو مائع موجود

ہے ایک منفی دباؤ ڈالے گا یعنی ایک تناؤ کی قوت ڈالے گا جس کے تحت تختیاں ایک دوسرے کو جذب کریں گی۔

اگر مائع تختیوں کو نہیں بھگوتا تو مائع کے اسطوانہ کا سرا اپنی سطح سے نیچے رہتا ہے۔ دیکھو شکل ۱۶ نتیجہ پھر بھی وہی رہتا ہے۔

مائع کی ہلالی سطح ا کے اوپر، کرہ ہوائی کا دباؤ ہوگا، اور ج پر مائع کا دباؤ (جو ا کے ہم سطح نقطہ ہے)

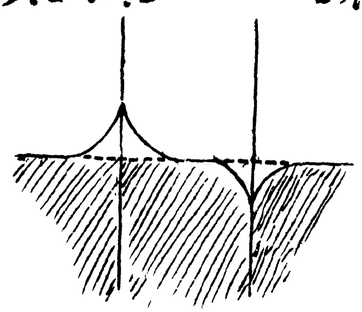


شکل ۱۶

= کرہ ہوائی کا دباؤ + ب ج گہرائی کی وجہ دباؤ۔

یعنی ج پر دباؤ ا پر کے دباؤ سے زیادہ ہے۔ لہذا مائع کا دباؤ جو تختیوں کو ایک دوسرے کے قریب ڈھکیلنے کی کوشش کرتا ہے، کرہ ہوائی کے دباؤ سے زیادہ ہوتا ہے اور اسلئے تختیوں کو ایکدوسرے سے علیحدہ کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ اس وجہ سے تختیاں ایک دوسرے کو جذب کریں گی۔

فرض کرو کہ دونوں تختیوں میں سے ہر ایک مختلف مادہ کی بنی ہوئی ہو

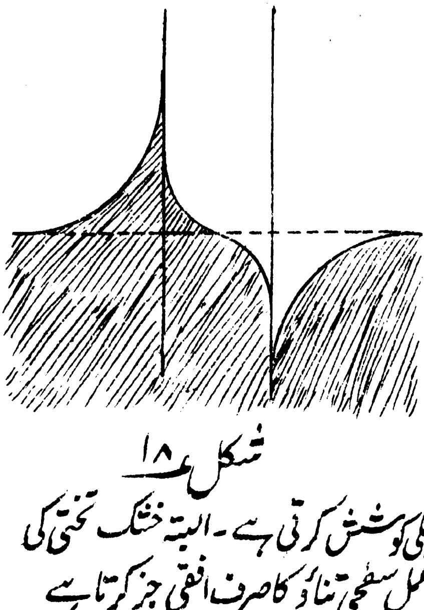


شکل ۱۷

اور اس میں سے ایک کو مائع بھگو سکتا ہے اور دوسری کو نہیں بھگو سکتا اور یہ بالکل خشک رہتی ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ بہت زیادہ ہے۔ مائع کی سطح کی تراش شکل ۱۷ کے مطابق ہوگی۔ ایک تختی کے لئے سطح کے انحنا کی علامت

ایک ہوگی اور دوسری تختی کے لئے اس کے متضاد ہوگی۔ تختیوں کے درمیان مائع کی افقی سطح، بیرونی سطح کے برابر رہتی ہے۔ لہذا تختیوں کے درمیان نہ تو جذب کا عمل ہوتا ہے اور نہ تو دفع کا۔

فرض کرو کہ تختیاں ایک دوسرے کے قریب لائی جاتی ہیں۔ ان کے درمیان افقی سطح اب بدل جائے گی اور شکل ۱۸ کے مطابق ہوگی۔ اس صورت میں تختیاں ایک دوسرے سے علیحدہ ہونے لگیں گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ بھگوئی ہوئی تختی میں اندر کی جانب مائع جس بلندی تک پہنچے گا وہ بیرونی جانب کی بلندی سے کم ہوگا اور خشک تختی سے اندرونی جانب مائع کی سطح جتنی نیچے اترے گی وہ بیرونی سطح سے کم ہوگی۔ بھیگی ہوئی تختی، خشک تختی سے



شکل ۱۸

سطحی تناؤ کی وجہ سے علیحدہ ہونیکی کوشش کرتی ہے۔ البتہ خشک تختی کی طرف بھیگی ہوئی تختی کو کھینچنے کا عمل سطحی تناؤ کا صرف افقی جز کرتا ہے جو خود سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے۔ لہذا علیحدہ کرنے والی قوت کا عمل قریب ڈھکیلنے والی قوت کے عمل سے زیادہ ہوتا ہے جس کی وجہ سے دونوں تختیوں میں دفع کا عمل ہوتا ہے۔

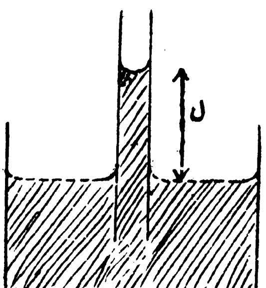
اگر دونوں تختیاں ایک دوسرے کے بالکل قریب رکھی جائیں تو دونوں کے درمیان مائع اوپر چڑھے گا اور دفع کے بجائے پھر جذب کا عمل ہونے لگے گا۔

سطحی تناؤ معلوم کرنے کے طریقے

(۱) شعری نلی میں مائع کو چڑھا کر سطحی تناؤ کی دریافت:- فرض کرو کہ شکل نمبر ۱۹ میں ایک شعری نلی کسی برتن میں مائع کے اندر انتصابی وضع میں رکھی ہوئی ہے اور سطحی تناؤ کی وجہ سے مائع نلی میں اوپر چڑھ گیا ہے اور شعری نلی کا نصف قطر = ص اور چڑھے ہوئے مائع کی بلندی = ل

شعری نلی میں مائع کے اوپر کی سطح ایک منحنی شکل اختیار کرے گی جو شکل میں بتلائی گئی ہے۔

دراصل ل = منحنی کے نچلے حصہ سے برتن میں مائع کی مستوی سطح تک طول سطحی تناؤ س کی سمت شکل نمبر ۲۰ میں بتلائی گئی ہے۔



شکل نمبر ۱۹

انتصابی وضع میں سطحی تناؤ = س جم فہ

لیکن منحنی کا طول = ۲ π ص

$\therefore$ قوت کا انتصابی جزء = ۲ π ص س جم فہ

= پورے چڑھے ہوئے مائع کا وزن جو تعادل کی حالت پیدا کرتا ہے۔

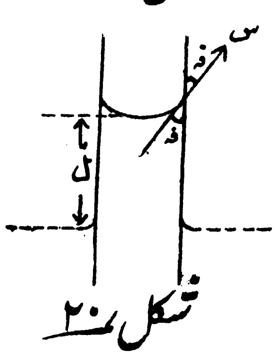
اس چڑھے ہوئے مائع کا حجم

= π ص^{2} ل، اسلئے کمیت = π ص^{2} ل ثہ

جہاں ثہ = کثافت

اسلئے وزن = π ص^{2} ل ثہ ج

$\therefore$ ۲ π ص س جم فہ = π ص^{2} ل ثہ ج



شکل نمبر ۲۰

پارے کی صورت میں فہ ۹۰° سے زائد ہے اس لئے جم فہ نفی ہو گا یعنی ل نفی ہو گا اس کا

مطلب یہ ہے کہ نلی میں اوپر چڑھنے کے بجائے پارہ نیچے کی جانب اوسط سطح سے زیادہ اوتر آئے گا۔

اگر مائع نلی کو بھگو دے تو فہ = صفر یعنی جم فہ = ۱

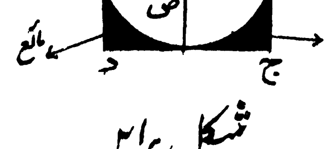
$$\therefore\ 2\,\pi\,\text{ص}\,\text{س} = \pi\,\text{ص}^2\,\text{ل}\,\text{ثہ}\,\text{ج}$$

یعنی $\text{س} = \dfrac{\text{ص}\,\text{ل}\,\text{ج}\,\text{ثہ}}{2}$ ، اگر پانی ہو تو ثہ = ۱

$$\therefore\ \text{س} = \frac{\text{ص}\,\text{ل}\,\text{ج}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

تجربہ میں ل خوردبین سے ناپا جاتا ہے۔ عملی کام میں ل کو ہمیشہ نلی سے دور ہٹ کر ناپنا چاہیئے (چونکہ مائع کی سطح نلی کے قریب کچھ اُٹھی ہوئی ہوتی ہے اسلئے مستوی سطح سے ناپنا ہوتا ہے)

ل منحنی کے نچلے حصہ سے ناپا جاتا ہے۔ چونکہ منحنی کے نیچے دونوں جانب بھی تھوڑا سا کچھ مائع ہوتا ہے جیسا کہ شکل ع ۲۱ میں دکھایا گیا ہے اس لئے جواب صحیح حاصل ہونے کے لئے اُس مائع کے وزن کا تعین بھی ضروری ہے۔ اس وزن کو دریافت کرنے کے بعد نلی میں چڑھے ہوئے مائع کے وزن کو اس میں جمع کر لینا چاہیئے۔



شکل ع ۲۱

اسطوانہ ا ب ج د کا حجم

$$= \pi\,\text{ص}^2 \times \text{ص} = \pi\,\text{ص}^3$$

اور نصف کرہ کا حجم $= \frac{2}{3}\,\pi\,\text{ص}^3$

اس لئے ان ٹکڑوں کا حجم جس میں مائع موجود ہے $= \pi\,\text{ص}^3 - \frac{2}{3}\,\pi\,\text{ص}^3$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\,\text{ص}^3$$

$\therefore$ اس مائع کا وزن $= \frac{1}{3}\,\pi\,\text{ص}^3\,\text{ج}\,\text{ثہ}$

$\therefore$ کل چڑھے ہوئے مائع کا وزن $= \pi\,\text{ص}^2\,\text{ج}\,\text{ثہ}\,\text{ل} + \frac{1}{3}\,\pi\,\text{ص}^3\,\text{ج}\,\text{ثہ}$

$$= \pi\,\text{ص}^2\,\text{ج ثہ}\left(\frac{\text{ص}}{۳} + \text{ل}\right)$$

$$= ۲\,\pi\,\text{ص س جم فہ}$$

اگر مائع نلی کو بھگو دے تو فہ = صفر

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ص ج ثہ}\left(\frac{\text{ص}}{۳} + \text{ل}\right)}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

یہ صحیح ضابطہ ہے۔

(۱) ب۔ متوازی تختیوں کے ذریعہ سطحی تناؤ کی دریافت :۔

شعری نلی کے بجائے شیشہ کی دو متوازی تختیوں کو تصور کرو جن کا عرض اکائی ہے۔

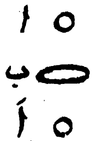
فرض کرو کہ پہلے کی طرح مائع کے چڑھاؤ کی قیمت ل ہے۔ اگر دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ ن ہو تو چڑھے ہوئے مائع کا وزن = ج ل ثہ ن،
ایک جانب سے انتصابی وضع میں جو قوت عمل کرتی ہے وہ = س جم فہ
اسی طرح دوسری طرف سے بھی قوت س جم فہ عمل کرتی ہے۔ لہذا سطحی تناؤ کی وجہ سے پوری قوت جو کہ مائع کو تعادل کی حالت میں قائم رکھتی ہے

$$= ۲\,\text{س جم فہ} = \text{ج ل ثہ ن}،$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ج ل ثہ ن}}{۲\,\text{جم فہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

(۲) مائع کے قطرے کے اہتزاز سے سطحی تناؤ کی دریافت :۔ سطحی تناؤ کی قوت کے زیر اثر اگر قطرہ تعادل کی حالت میں ہو تو اس کی شکل کروی ہوگی۔ (دیکھو شکل $\frac{۲۲}{۱}$)۔ اگر قطرے کو ابتدا میں کسی قوت سے اس کی کروی شکل کو بدل کر چھوڑ دیا جائے تو سطحی تناؤ کی وجہ سے تھوڑی دیر میں پھر وہ کروی وضع اختیار کرلے گا۔ لیکن قطرہ کے اندر اس وقت چونکہ مائع حرکت کرتا رہتا ہے اس

لئے جمود کی وجہ سے قطرہ کی شکل پھر بدل جاتی ہے جیسا کہ شکل (۲۲ ب) سے ظاہر ہے۔ شکل کی یہ بتدریج تبدیلی اس وقت تک ہوتی رہتی ہے جب تک کہ سطحی تناؤ کی قوت اس کے مائع کے جمود پر غالب نہ آجائے۔ جب یہ قوت غالب ہو جاتی ہے تو پھر قطرہ کروی شکل اختیار کرنے لگتا ہے جیسا کہ شکل (۲۲ اَ) میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے بعد فوراً پھر مائع کے جمود کی وجہ سے قطرہ کی شکل کوئی دوسری ہو جائے گی۔ پھر سطحی تناؤ کی قوت جب غالب ہوگی تو اپنی اصلی کروی حالت میں قطرہ عود کر آئے گا۔ اس کی مثال رقاص کی سی ہے۔



شکل ۲۲

جب یہ ایک دفعہ کسی قوت کے ساتھ حرکت میں لایا جاتا ہے تو وہ اہتزاز کرتا رہتا ہے۔ اس کو اپنی تعادل کی وضع پر آنے کے بعد رک جانا چاہیئے تھا لیکن رقاص کے جمود کے معیار اثر کی وجہ سے وہ ٹھہرنے کے بجائے اہتزاز کرتا رہتا ہے۔ اسی طرح کروی وضع میں قطرہ کو جو اس کی تعادل کی وضع تھی ٹھہر جانا چاہیئے تھا لیکن جمود کی وجہ سے اس کی شکل میں تبدیلی ہونے لگتی ہے اور اس طرح وہ کروی اور غیر کروی وضع میں بتدریج گردش کرتا رہے گا۔
وقت کا وہ وقفہ جو مائع کے قطرہ کو اپنی پہلی کروی وضع سے پھر دوسری مرتبہ اسی کروی وضع میں آنے کے لئے درکار ہوتا ہے وقت دوران یا وقت ارتعاش کہلاتا ہے جیسا کہ پہلے بیان کیا جا چکا ہے۔ شکل ۲۲ پر غور کرو۔ مقام ا میں پہلے قطرہ کروی وضع میں تھا۔ ایک خاص وقفہ کے بعد مقام اَ پر پھر وہ کروی وضع اختیار کر لیتا ہے۔ اس خاص وقفہ کو وقت ارتعاش یا وقت دوران و سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
چونکہ و متناسب ہے مائع کی کثافت کے سطحی تناؤ اور قطرے کے نصف قطر کے اس لئے ابعاد کے ذریعہ سے ہم ایک ضابطہ حاصل کر سکتے ہیں:۔

$$\text{و} \propto [\text{کثافت}]^{\text{لا}} [\text{سطحی تناؤ}]^{\text{ما}} [\text{نصف قطر}]^{\text{یا}}$$

جہاں لا، ما، یا، کوئی عدد ہیں۔

$$\therefore\ \text{و} \propto \left[\text{ک}\ \text{ص}^{-۳}\right]^{\text{لا}} \left[\text{ک}\ \text{و}^{-۲}\right]^{\text{ما}} \left[\text{ص}\right]^{\text{یا}}$$

جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر

اور ک = قطرہ کی کمیت

$$\therefore\ \text{و} \propto \text{ک}^{\text{لا}}\ \text{ص}^{-۳\text{لا}}\ \text{ک}^{\text{ما}}\ \text{و}^{-۲\text{ما}}\ \text{ص}^{\text{یا}}$$

$$\text{یعنے}\ \text{و} \propto \text{ک}^{(\text{لا}+\text{ما})}\ \text{ص}^{(-۳\text{لا}+\text{یا})}\ \text{و}^{(-۲\text{ما})}$$

اس مساوات کو صحیح ہونے کے لئے

$-۲\text{ما} = ۱$، $-۳\text{لا} + \text{یا} = \text{صفر}$ اور $\text{لا} + \text{ما} = \text{صفر}$

یعنے $\text{ما} = -\frac{۱}{۲}$ $\therefore$ $\text{لا} = \frac{۱}{۲}$ اور $\text{یا} = \frac{۳}{۲}$

$$\therefore\ \text{و} \propto \left[\text{ثہ}\right]^{\frac{۱}{۲}} \left[\text{س}\right]^{-\frac{۱}{۲}} \left[\text{ص}\right]^{\frac{۳}{۲}}$$

$\therefore\ \text{و} = \text{مر}\ \text{ص}^{\frac{۳}{۲}} \sqrt{\frac{\text{ثہ}}{\text{س}}}$ جہاں مر کوئی مستقل ہے اور ثہ مائع کی کثافت

لینارڈ نے مر کی قیمت $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$ ما حرکیات کے ذریعہ حاصل کی

پس قطرہ کا وقت ارتعاش $\text{و} = \frac{\pi}{\sqrt{۲}} \cdot \sqrt{\frac{\text{ص}^{۳}\ \text{ثہ}}{\text{س}}}$ .... (۱۲)

اگر نصف قطر ص اور وقت دوران و معلوم ہو جائے تو مائع کا سطحی تناؤ س آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر پانی کے قطرہ کا نصف قطر ۰۰۲۵ء۰ سم

ہو تو وہ ایک ثانیہ میں $۱۰^{۶}$ مرتبہ ارتعاش کرے گا۔

اگر پانی کے قطرہ کو کاربن ڈائسلفیڈ (CS_2) اور پٹرولیم کے آمیزہ میں جس کی کثافت پانی کی کثافت کے مساوی ہو ڈال دیا جائے تو صرف آنکھ کے ذریعہ ہم وقت ارتعاش معلوم کر سکتے ہیں۔ اسی طرح زیتون کے تیل کے قطرہ کو الکوہل اور پانی کے ایسے امیزہ میں جس کی کثافت زیتون کے تیل کی کثافت کے مساوی ہو ڈالنے سے ہی وقت ارتعاش معلوم کیا جا سکتا ہے۔

لینارڈ نے قطروں کی عکسی تصویریں آناً فاناً کھینچ کر د کی قیمت معلوم کی۔ اور اس کی مدد سے س کی قیمت دریافت کی۔ قطرہ کا نصف قطر خوردبین سے ناپا جا سکتا ہے۔

(۳) قطروں کی جسامت سے سطحی تناؤ کی دریافت :- فرض کرو کہ شکل ۲۳ میں ایک شعری نلی سے مائع کے قطرے گر رہے ہیں کسی قطرہ پر سطحی تناؤ کی وجہ سے جو قوت اوپر عمل کرتی ہے وہ = ۲ π ص س

جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر یا شعری نلی کا نصف قطر اور دوسری قوت جو نیچے کی طرف عمل کرتی ہے = قطرہ کا وزن م + دباؤ کی وجہ سے قطرہ میں قوت $= م + \frac{س}{ص} \pi ص^{۲}$

$\therefore ۲ \pi ص س = م + س \pi ص$

$\therefore \pi ص س (۲ - ۱) = م$

$\therefore س = \frac{م}{\pi ص}$ .... (۱۳)

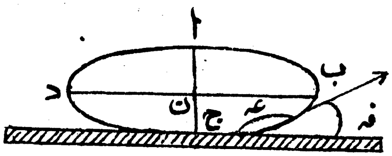
م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے کئی قطروں کو ایک ہی رفتار کے ساتھ آہستہ آہستہ ایک برتن میں گرنے دیا جاتا ہے۔ ان سب کا وزن معلوم کرنے کے بعد ایک قطرہ کا وزن دریافت کیا جاتا ہے۔

شکل ۲۳

لارڈ ریلے نے π کی قیمت ۸ ر ۳ رکھی تھی۔

(۴) کوینکے کے طریقے سے سطحی تناؤ کی دریافت:-

اگر پارہ کو شیشہ کی تختی پر رکھا جائے تو جیسا کہ پہلے ذکر ہو چکا ہے وہ ایک خاص طریقہ سے پھیل کر تختی سے تماس کرے گا۔ شکل ۲۴ میں زاویۂ تماس زاویہ عہ ہے جو (۱۸۰ - فہ) کے مساوی ہے۔ فرض کرو کہ قطرہ بہت بڑا ہے اور ب اور د قطرے کے بائیں اور دائیں جانب کے درمیانی حصہ میں۔ اگر قطرہ چھوٹا ہو تو ظاہر ہے کہ ا ن > ن ج سے چونکہ انحنا اوپر ہوگا۔

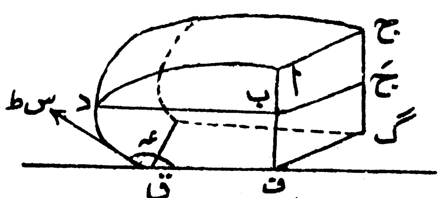


شکل ۲۴

اگر قطرہ کافی بڑا ہو تو اوپر کی سطح مستوی تصور کی جا سکتی ہے۔

اس بڑے قطرہ کو اس کے درمیان میں سے ایک ایسا ٹکڑا بناتے ہوئے کاٹو جس کے دو متوازی انتصابی مستویوں ج گ اور ا ف میں کوئی فاصلہ 'ط' رہے۔ یعنی گ ف = ط

اس ٹکڑے کے دو حصے اس طرح کرو کہ کٹے ہوئے ٹکڑے کو پھر اس کے طول کی سمت کے علی القوائم درمیان میں سے کاٹا جائے تو شکل ۲۵ کے مطابق ہو۔



شکل ۲۵

شکل ۲۴ سے مقابلہ کرنے سے ا ب = ا ن = ل (فرض کرو)

ب د کے اوپر کے حصہ والے' افقی مستوی میں سطحی تناؤ کی وجہ سے قوت = س ط

اور اوسط دباؤ = $\frac{1}{2}$ (ا ب) ج ثہ (کیونکہ آدھا ٹکڑا کاٹ دیا گیا ہے)

جہاں ثہ = کثافت

لہذا اوسط قوت انتصابی دیوار ا ج جَ ب پر دائیں جانب سے بائیں جانب = $\frac{1}{2}$ (ا ب) ج ثہ × (ا ب) ط = س ط

∴ س = $\frac{1}{2}$ (ا ب)^{2} ج ثہ .... (۱۴)

یعنی شکل ۲۵ میں ا ب یا شکل ۲۴ میں ا ن معلوم ہو جائے تو س کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے اگر ہم پورے ٹکڑے ا د ق ف گ ج پر غور کریں

تو اس صورت میں سطحی تناؤ کی قوتیں = س[۵۱] ط + س ط جم عہ[۵۲]

∴ س ط (۱ + جم عہ) = $\frac{1}{2}$ (ا ف) ج ثہ × (ا ف) ط

= اوسط قوت دیوار ا ج گ ف پر دائیں جانب سے بائیں جانب

∴ س (۱ + جم عہ) = $\frac{1}{2}$ (ا ف)^{2} ج ثہ .... (۱۵)

جہاں (ا ف) = قطرے کی پوری گہرائی جو خوردبین کے ذریعے ناپ لی جاتی ہے۔

[ا ب یا ا ن ناپنے کے لئے خوردبین کو د پر اس طرح ماسکہ میں لاؤ کہ اس کا انتصابی صلیبی تار اس حصہ کو مس کرے اور افقی صلیبی تار د پر منطبق ہو جائے۔ اسی طرح ا پر بھی ماسکہ میں لاؤ اور فاصلہ ا ب یا ا ن ناپ لو۔ اسی طرح مائع میں ڈوبے ہوئے مقعر عدسہ کی سطح کے نیچے ہوا کا ایک بلبلا بنا کر سطحی تناؤ کی قیمت ان ہی اصول پر دریافت کی جا سکتی ہے]

اگر س کی قیمت مساوات (۱۴) سے حاصل ہو جائے تو زاویہ عہ مساوات (۱۵) سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

---

۵۱ قوت کی سمت شکل میں بتائی گئی ہے۔

۵۲ قوت افقی وضع میں چونکہ نیچے کا ٹکڑا ہی لیا گیا ہے۔

سطحی تناؤ کی ان دونوں مساواتوں کو ایک دوسرے سے تقسیم کرنے سے:-

$$\frac{۱}{۱ + \text{جم ع}} = \frac{(\text{ا ب})^{۲}}{(\text{ا ف})^{۲}}$$

$$\text{یعنی جم ع} = \frac{(\text{ا ف})^{۲}}{(\text{ا ب})^{۲}} - ۱$$

میگی نے اس طریقہ سے مختلف مائعات کے لئے شیشہ کے ساتھ زاویۂ تماس کی قیمتیں معلوم کیں۔

(۵) وِلہلمی کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت ⑧ :- ایک صاف پلاطینم کے تار کے ٹکڑے کو مستطیل کی شکل میں موڑ دو۔ فرض کرو کہ اسکا عرض = ل۔ اس تار کو ترازو کے ایک سرے پر لٹکا دو اور اس کو مائع میں اس طرح ڈبو دو کہ اس کے اوپر کی سطح مائع کی سطح کے قریب ہو جائے۔ اب ترازو کے دوسرے پلڑے میں اتنے باٹ ڈالو کہ تعادل قائم ہو جائے۔ اس کے بعد تار کو مائع میں پوری طرح ڈوبنے دو۔ مائع کی ایک جھلی تار پر قائم ہو جائے گی جبکہ تار اوپر کی طرف اوٹھے گا (دیکھو شکل ۲۶)۔ چونکہ جھلی کی وجہ سے سطحی تناؤ والی قوتیں نیچے کی طرف عمل کرتی ہیں اس لئے باٹوں میں اضافہ کرنا چاہئے تاکہ تعادل قائم ہو جائے۔

اگر تعادل قائم کرنے کے لئے اضافہ کمیت ک ہو تو

قوت = ک ج

اور دوسری قوت سطحی تناؤ کی وجہ سے = س ۲ ل

= ک ج

شکل ۲۶

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ک ج}}{۲\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

اس طرح تجربہ کو کئی بار دُھرانا چاہیئے اور ک کی اوسط قیمت لینی چاہیئے۔

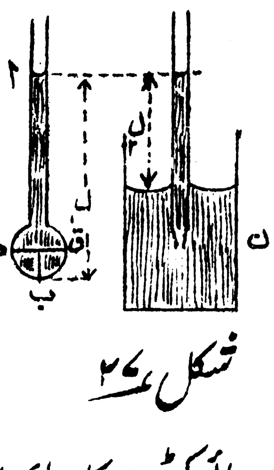
[نوٹ۔ تار کو ابتدا میں ریگمال کاغذ سے خوب صاف کر لو اور پھر بنسنی شعلہ میں اچھی طرح گرم کرو۔ تجربہ کے دوران میں تار کے ٹکڑے کو دونوں صورتوں میں مائع کی سطح سے ایک ہی بلندی پر رکھنا چاہیئے۔]

(۶) سِنٹس کے طریقے سے سطحی تناؤ کی دریافت:-

اس طریقہ میں شکل ۲۷ کے مطابق، شعلہ پر ایک پتلی نلی کو گرم کرنے کے بعد کھینچ کر چھوٹے سوراخ والی بنا لیا جاتا ہے اور پھر اس مائع میں جس کا کہ سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے اس پتلی نلی کو ڈبو کر نکال لینے کے بعد، ایک لوہے کے استادہ کے ذریعہ انتصابی وضع میں جکڑ دیا جاتا ہے۔

چونکہ مائع کی سطح نیچے اُترنے لگتی ہے اس لئے ایک قطرہ ق ب د آخر کار نلی کے سرے پر بننے لگتا ہے۔

قطرہ کی شکل کو کروی تصوّر کرتے ہوئے فرض کرو کہ اسکا نصف قطر = ص اور شعری نلی میں مائع کی دوڑی کا سرا ا اور قطرہ کے سب سے نچلے نقطہ ب کے درمیان فاصلہ = ل۱



شکل ۲۷

شعری نلی کو حرکت دیئے بغیر یہ فرض کرو کہ اس کا نچلا سرا ایک برتن ن میں رکھا جاتا ہے جس میں وہی مائع بھرا ہوا ہے۔ شعری نلی میں مائع کی ڈوری کی بلندی نیچے اتر آئے گی

لیکن برتن ن کو اوپر اُٹھانے سے شعری نلی میں مائع کی ڈوری کا سرا پھر اسی بلندی پر لایا جا سکتا ہے جتنا کہ پہلے تھا۔ فرض کرو کہ برتن میں مائع کی آزادانہ سطح اور شعری نلی میں مائع کی ڈوری کے سرے کے درمیان فاصلہ = ل۲

قطرہ میں ایک افقی مستوی ق د، ایسی کھینچو جو قطرہ کے مرکز میں سے گزرے تاکہ ب اور ق د کے مرکز کے درمیان فاصلہ ص ہو جائے۔

ق د سے ا تک (جو شعری نلی میں مائع کی ڈوری کا سرا ہے) فاصلہ =
$= (\text{ل}_1 - \text{ص})$ اس مستوی ق د پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ $(\text{ل}_1 - \text{ص})$ طول میں سے ل_2 طول کو وہ قوتیں سہارتی ہیں جو سطحی تناؤ کی وجہ سے اوپر کی جانب عمل کرتی ہیں۔

لہٰذا ق د پر دباؤ ڈالنے والا حاصل استوانہ $= (\text{ل}_1 - \text{ص} - \text{ل}_2)$

$\therefore$ ق د پر دباؤ $= \text{ج ثہ} (\text{ل}_1 - \text{ص} - \text{ل}_2)$ جہاں ثہ مائع کی کثافت ہے

اس لئے ق د پر نیچے کی جانب عمل کرنے والی قوت =

$$= \text{ج ثہ} (\text{ل}_1 - \text{ص} - \text{ل}_2)\, \pi\, \text{ص}^2$$

لیکن ق د پر کرہ کا نصف وزن بھی نیچے کی جانب عمل کرتا ہے اور یہ

$$= \frac{2}{3} \pi\, \text{ص}^3\, \text{ج ثہ}$$

لہٰذا نیچے کی جانب مجموعی قوت =

$$\text{ج ثہ} (\text{ل}_1 - \text{ص} - \text{ل}_2)\, \pi\, \text{ص}^2 + \frac{2}{3} \pi\, \text{ص}^3\, \text{ج ثہ}$$

سطحی تناؤ کی وجہ قوت $= \text{س}\ 2\pi\, \text{ص}$

لہٰذا تعادل کے لئے :- $2\pi\, \text{ص}\, \text{س} =$

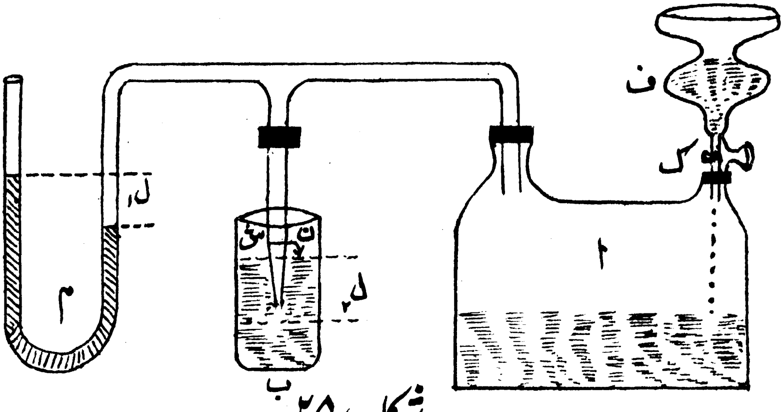
$$\text{ج ثہ}\, \pi\, \text{ص}^2 \left\{ (\text{ل}_1 - \text{ص} - \text{ل}_2) + \frac{2}{3}\text{ص} \right\}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ج ثہ ص}}{2} \left\{ (\text{ل}_1 - \text{ل}_2) - \frac{\text{ص}}{3} \right\} \quad \ldots\ldots\ (17)$$

متحرک خوردبین سے ل_1، ل_2 اور $\text{ق د} = 2\,\text{ص}$ ان سب کی قیمتیں ناپ لی جائیں تو س کی قیمت حسابی عمل سے دریافت کی جا سکتی ہے۔

(۷) اینگر کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت :- شکل ۲۸ میں ب ایک برتن ہے جس میں وہ مائع رکھا جاتا ہے جس کا سطحی تناؤ مطلوب ہوتا ہے۔

مق ایک سیدھی پتلی نلی ہے جس کا سرا شعری نلی کی طرح بنایا گیا ہے اور اس سرے کا قطر تقریباً ۲ر یا ۴ر مم ہے ۔ ن ایک نمایندہ ہے جو مائع کی سطح کو بتاتا ہے ۔ ۴ ایک داب پیما ہے جس میں ذیلال یا اور کوئی مائع جس کی کثافت معلوم ہو، ڈال دیا جاتا ہے ۔ ۱ ایک بوتل ہے جس میں ابتداً ہوا کرۂ ہوائی کے دباؤ پر رہتی ہے ۔ ف ایک قیف ہے جس میں پانی بھر دیا جاتا ہے اور ک کاک کے ذریعہ نہایت ہی آہستہ آہستہ ۱ میں گرتا ہے ۔



شکل ۲۸

اس طریقے میں ہوا کے بلبلے اس مائع میں بنائے جاتے ہیں جس کا کہ سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے ۔ ظاہر ہے کہ جوں جوں پانی ف میں سے گرتا جائے گا ۱ کے اندر ہوا کے دباؤ میں اضافہ ہوگا جس کی وجہ سے شعری نلی کے سرے پر ہوا کا بلبلا بنے گا اور یہ ایک خاص کروی جسامت تک پہنچنے کے بعد ٹوٹ جائے گا۔ اس کے ٹوٹنے کا سبب یہ ہے کہ اس کا اندرونی دباؤ، بیرونی دباؤ سے بڑھ جاتا ہے۔ جب یہ بلبلا ٹوٹنے کو ہوتا ہے تو اس کا قطر اعظم قیمت پر پہنچ جاتا ہے اور اس قیمت سے کسی طرح بڑھ نہیں سکتا ۔ اس کے ٹوٹنے کے لمحہ میں اس کے اندر کے دباؤ کی قیمت ظاہر ہے کہ ۱ کے اندر کے دباؤ کے مساوی ہوگی،

اور یہ دباؤ م میں مائع کی بلندیوں کا فرق پڑھ لینے سے معلوم کیا جا سکتا ہے، اور جب بلبلا ٹوٹتا ہے تو اس وقت اس کا دباؤ پھر کرۂ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہو جاتا ہے اور م میں کے مائع کی سطح ایک ہی بلندی پر آ جاتی ہے۔ اس کے بعد یہی عمل پھر اسی طرح دہرایا جاتا ہے۔ دوبارہ جب بلبلا ٹوٹتا ہے تو داب پیما میں بلندیوں کے فرق کے مختلف مشاہدات لئے جاتے ہیں۔

فرض کرو کہ جوں ہی بلبلا ٹوٹتا ہے م کے مائع کی بلندیوں میں فرق = ل_1

بلبلے کے اندر دباؤ = $\pi + \text{ثہ}_1 \, \text{ج} \, \text{ل}_1$

جہاں π = کرہ ہوائی کا دباؤ

ج = اسراع بوجہ جاذبہ زمین

اور ثہ_1 = م کے مائع کی کثافت

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ بلبلے کے ٹوٹتے ہی شعری نلی مش کا سرا مائع کی سطح سے ل_2 فاصلہ نیچے رہتا ہے۔ دیکھو شکل ۲۸

تب بلبلے کے باہر دباؤ = $\pi + \text{ثہ}_2 \, \text{ج} \, \text{ل}_2$

جہاں ثہ_2 = اس مائع کی کثافت جس کا سطحی تناؤ دریافت طلب ہے۔

اب چونکہ بلبلا ٹوٹ گیا ہے اس کی وجہ یہ ہوئی کہ اندر کا دباؤ باہر کے دباؤ سے بڑھ گیا۔

لہٰذا بلبلے کے اندر اضافۂ دباؤ = $(\pi + \text{ثہ}_1 \, \text{ج} \, \text{ل}_1) - (\pi + \text{ثہ}_2 \, \text{ج} \, \text{ل}_2)$

$$= \text{ج} \, (\text{ثہ}_1 \, \text{ل}_1 - \text{ثہ}_2 \, \text{ل}_2)$$

بلبلے کے لئے لاپلاس کے ضابطہ سے اندرونی دباؤ میں بیرونی دباؤ سے اضافہ $\text{د} = \text{س} \left(\frac{1}{\text{ص}_1} + \frac{1}{\text{ص}_2} \right)$

اگر بلبلا کروی شکل کا ہو تو $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$

$\therefore \text{د} = \frac{2\,\text{س}}{\text{ص}_1}$ جہاں ص_1 = بلبلے کا نصف قطر

= تقریباً شعری نلی کے سرے کا نصف قطر

∴ د = ٢س / ص١ = ج (ثہ ل١ - ثہ ل٢)

∴ س = ج ص١ / ٢ (ثہ ل١ - ثہ ل٢) .... (١٨)

تجربہ میں ل١، ل٢ اور ص١ متحرک خوردبین کے ذریعہ ناپ لئے جاتے ہیں۔ پس ان سے سطحی تناؤ س کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

اس طرح سب میں کے مائع کو مختلف تپشوں پر گرم کر کے اس مائع کے سطحی تناؤ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے اور تپش کی وجہ سے اس پر جو اثرات ہوتے ہیں وہ دریافت کئے جا سکتے ہیں۔

کسی نمک کے مختلف ارتکاز کے محلول دئے ہوئے ہوں تو ان کے سطحی تناؤ بھی معلوم کئے جا سکتے ہیں اور ارتکاز کے جو اثرات سطحی تناؤ پر ہوتے ہیں وہ بھی دریافت کئے جا سکتے ہیں۔

اس تجربہ میں نقص یہ ہے کہ ہم بلبلے کو کروی وضع کا تصور کرتے ہوئے ص١ = ص٢ مانتے ہیں لیکن ٹھیک طور پر یہ کہا نہیں جا سکتا کہ ہمارا یہ مفروضہ صحیح ہے۔

اس میں ایک اور نقص یہ ہے کہ بلبلے کے نصف قطر کو ہم تقریباً شعری نلی کے سرے کے نصف قطر کے مساوی لیتے ہیں لیکن بلبلے کا نصف قطر اس کے ٹوٹتے وقت شعری نلی کے نصف قطر سے بڑا ہوتا ہے۔ اس کی تصحیح کے لئے دیکھو مساوات (٤٧)

اے فرگوسن نے کروی شکل وغیرہ فرض کرنے کے بغیر ایک صحیح ضابطہ اخذ کیا جو اوپر کے نقائص سے پاک[١٠] ہے:-

س = ج گ + [ص³ √٣ / ١٢ √گ]

جہاں ص = شعری نلی کا نصف قطر

اور $گ = \frac{ص}{۲} \left[ث_{ه} ل_{۱} - ث_{ه} \left(ل_{۲} + \frac{۲ ص}{۳} \right) \right]$

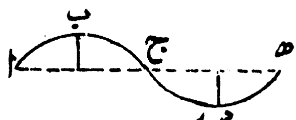
(۸) شعری موجوں کے ذریعہ سطحی تناؤ کی دریافت :- پانی کی سطح پر کی موجیں دو قسم کی ہوتی ہیں، ایک کو شعری موج یا لہر کہتے ہیں جو کہ ہلکی ہلکی ہوا کے چلنے سے پیدا ہوتی ہیں' اور دوسری جو بڑی دکھائی دیتی ہیں' ان کو ارضی تجاذبی موجوں سے موسوم کیا جاتا ہے۔ شعری موجوں کا طول تقریباً ۱ر۷ سم سے بھی چھوٹا ہوتا ہے اور ان کا حیطۂ ارتعاش بھی اسی طرح بہت کم ہوتا ہے۔ ذرّات کی حرکت چونکہ سادہ موسیقی ہوتی ہے اس لئے ایسی موجوں کی تعبیر جیبی منحنی کی شکل سے ہوتی ہے۔ یہ موجیں پانی کے سطحی تناؤ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔ جاذبۂ ارض کا اثر ان پر بالکل خفیف سا ہوتا ہے جو قابل نظر انداز ہے۔

ارضی تجاذبی موجوں کا طول اور حیطۂ ارتعاش کافی بڑا ہوتا ہے۔ ایسی موج میں ذرات کی حرکت کی سمت' موج کی روانی کی سمت کے علی القوائم ہونے کے علاوہ اس کے متوازی بھی ہوتی ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ عمودی اور افقی حرکتوں کے ملنے سے ہر ایک ذرّہ ایک خاص وضع کے ناقص کی شکل میں حرکت کرتا ہے' گہرے پانی میں ان دونوں عمودی اور افقی حرکتوں کے حیطۂ ارتعاش مساوی ہوتے ہیں۔

چنانچہ موج کے راستہ میں ہر ایک ذرّہ مساوی نصف قطر کے دائروں میں حرکت کرتا ہے۔ ذرات کی اس قسم کی حرکت سے پانی کی سطح جو شکل اختیار کرتی ہے وہ سائکلائڈ کی سی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۲۹ میں ا ب ج د ہ ایک ایسی موج ہے جو جاذبۂ ارض کے باعث گہرے پانی میں پیدا ہوئی ہے۔ سہولت کی غرض سے منحنی کی شکل جیبی بنائی گئی ہے۔

موج سے پہلے پانی کی سطح ا ج ھ تھی۔ فرض کرو کہ موج کی رفتار س ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ پانی کو اس کے مساوی رفتار مخالف سمت میں (یعنی − س) دے کر موجوں کو قائم کر دیا گیا ہے۔ اب حضیض اور اوج اپنے ابتدائی مقامات پر قائم رہیں گے



شکل ع۲۹

صرف پانی بہ کر چلا جائے گا۔ ب پر کے ذرات کی رفتار $= \frac{۲\pi\,\text{ا}}{\text{و}} + \text{س}$

جہاں ا = ذرات کے دائروں کا نصف قطر

اور و = موج کا وقت دوران

لہذا ان ذرات کی توانائی بالفعل $= \frac{۱}{۲}\text{ک}\left(\frac{۲\pi\,\text{ا}}{\text{و}} + \text{س}\right)^{۲}$

جہاں ک = اس پانی کی کمیت جو ب پر ہے۔

اب چونکہ د پر کے ذرات ب پر کے ذرات کے مخالف سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔

اس لئے اس کمیت کا پانی جب ب سے د پر پہنچے گا تو اس کی توانائی بالفعل
$= \frac{۱}{۲}\text{ک}\left(\frac{۲\pi\,\text{ا}}{\text{و}} - \text{س}\right)^{۲}$

لہذا ب سے د پر پہنچنے میں توانائی بالفعل کی کمی =

$$= \frac{۱}{۲}\text{ک}\left\{\left(\frac{۲\pi\,\text{ا}}{\text{و}} + \text{س}\right)^{۲} - \left(\frac{۲\pi\,\text{ا}}{\text{و}} - \text{س}\right)^{۲}\right\}$$

$$= \frac{۴\pi\,\text{ک}\,\text{ا}\,\text{س}}{\text{و}}$$

اور توانائی بالقوہ میں اضافہ = ۲ ک ج ا جہاں ج = اسراع بوجہ جاذبہ زمین

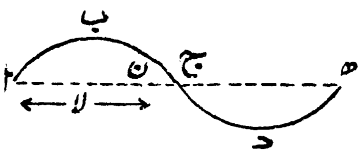
∴ بقائے توانائی کے کلیہ سے $۲\,\text{ک}\,\text{ج}\,\text{ا} = \frac{۴\pi\,\text{ک}\,\text{ا}\,\text{س}}{\text{و}}$

یعنی $\text{س} = \frac{\text{ج}\,\text{و}}{۲\pi} = \frac{\text{ج}\,\text{ل}}{۲\pi\,\text{س}}$ جہاں ل = طول موج

∴ ر٢ما = ج له / ٢π .... (١٩)

اب ہم شعری موجوں کی رفتار دریافت کریں گے جو کہ سطحی تناؤ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے جیسا کہ اوپر بیان ہو چکا ہے ان موجوں کو جیبی منحنی کی شکل سے تعبیر کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ شکل نمبر ٣٠ میں ا ب ج د ھ ایک شعری موج ہے جس میں ا ج ھ پانی کی ابتدائی سطح ہے۔ ا سے لا فاصلہ پر کوئی ایک ذرہ ن، سطح پر تصور کرو۔ تب ذرہ کا نقل مکان ما کسی ایک خاص وقت ت میں:-



شکل نمبر ٣٠

ما = ا جب ω ت

جہاں ا = حیطۂ ارتعاش اور ω = زاوئی رفتار

یعنی ما = ا جب ٢π لا / له

یعنی فر٢ ما / فر لا٢ = − ٤π٢ ما / له٢ .... (٢٠)

اب اگر موج کا حیطۂ ارتعاش ذرا سا زیادہ ہو جائے تو نقطۂ ن ایک چھوٹا فاصلہ بقدر فا اوپر کی طرف چڑھے گا۔ اس لئے ن کے قریب ایک چھوٹا سا پانی کا رقبہ عہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

سطح پر دباؤ کی مقدار = س / ص جہاں ص = سطح کا نصف قطر انحنا

∴ قوت = س عہ / ص یعنی ن کے اوپر چڑھنے کی وجہ سے کام = س عہ ف / ص

جاذبۂ ارض کی وجہ سے جو کام عمل میں آیا = عہ ف ثہ ج ما جہاں ثہ = پانی کی کثافت

پس ان دونوں کی وجہ حاصل کام = عہ ف ثہ ج ما − س عہ ف / ص .... (٢١)

لیکن $\frac{1}{\text{ص}} = \dfrac{\dfrac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$

اگر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ بہت چھوٹا ہو تو $\frac{1}{\text{ص}} \simeq \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} =$

$= -\dfrac{4\pi^2\,\text{ما}}{\text{لہ}^2}$

اب مساوات (۱۲) میں ص کی قیمت درج کرنے سے حاصل کام یا

حاصل توانائی بالقوہ $= \text{عہ ف}\left(\text{ثہ ج ما} + \dfrac{4\pi^2\,\text{ما س}}{\text{لہ}^2}\right)$

$= \text{عہ ف ما ثہ}\left(\text{ج} + \dfrac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)$

اس سے ظاہر ہے کہ سطحی تناؤ کی وجہ سے ج میں جو اضافہ ہوا وہ $\frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}$ کے مساوی ہے۔ صرف جاذبۂ زمین کے اثر کی وجہ سے کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

لہذا جاذبۂ زمین اور سطحی تناؤ کے مشترکہ عمل سے جو موجیں بنیں گی ان کی رفتار مساوات (۱۹) میں ج کے بجائے $\left(\text{ج} + \frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)$ لکھنے سے حاصل ہوگی۔

$$\therefore \text{ر}^2 = \left(\text{ج} + \frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)\cdot\frac{\text{لہ}}{2\pi}$$

$$\therefore \text{ر} = \sqrt{\left\{\frac{\text{ج لہ}}{2\pi} + \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}}\right\}} \quad\ldots\ldots\ldots(۲۲)$$

جاذبۂ ارض کی موجوں میں لہ کے اضافہ سے ر کی قیمت بڑھے گی لیکن شعری موجوں میں لہ کے بڑھنے سے ر میں کمی واقع ہوگی۔

ر کو اقل ہونے کے لئے $\frac{\text{ج لہ}}{2\pi} = \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}}$

لیکن شعری موجوں کے لئے س جب اقل ہوگا لہ اعظم ہوگا۔

$$\therefore \text{شعری موجوں کے لئے لہ}_{\text{اعظم}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ج ثہ}}}$$

$$\text{اور ارضی موجوں کیلئے لہ}_{\text{اقل}} = \text{شعری موجوں کے لئے لہ}_{\text{اعظم}}$$

مساوات نمبر ۲۲ کے استعمال سے سب سے پہلے لارڈ ریلے نے مائع کا سطحی تناؤ کامیابی کے ساتھ معلوم کیا[11] اور اس کے بعد ڈاکٹر ڈارسے نے بھی اسی طریقہ سے مختلف محلولوں کے سطحی تناؤ کی قیمتیں معلوم کیں[12]۔

جس مائع کا سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے اس کو ایک بڑے چھچھلے برتن میں رکھا جاتا ہے۔ دو شاخے کی ایک شاخ سے ٹین یا ایلومینیم کی ایک پتلی دھجی باندھ دی جاتی ہے جس کا کچھ حصہ مائع میں اس طرح ڈوبا رہتا ہے کہ جب دوشاخہ مرتعش کیا جاتا ہے تو شعری موجیں بننے لگتی ہیں، دوشاخہ کا تعدد ۶۰ کے قریب ہوتا ہے اور اس کو برقی طریقہ سے مرتعش کیا جاتا ہے۔

چونکہ ان موجوں کی رفتار بہت تیز ہوتی ہے اس وجہ سے وہ بالراست نظر نہیں آسکتیں لیکن غیر مسلسل نور کی شعاعوں سے (جن کی تنویری چمک کا تعدد، شعری موجوں کے پیدا کرنے والے مبدء کے تعدد کے مساوی ہو) ان کو دیکھا جائے تو یہ قائم موجوں کی طرح نظر آسکتی ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب مشاہد، مائع کی سطح کو غیر مسلسل طریقہ پر اس طرح سے دیکھتا ہے کہ اس کے دیکھنے کا تعدد، شعری موجوں کو پیدا کرنے والے دوشاخہ کے تعدد کے مساوی ہو، تو ایک مرتبہ دیکھنے کے بعد، پھر جب وہ دوسری مرتبہ دیکھے گا تو اس کے وقفہ میں موجیں ایک طول موج کے مساوی فاصلہ آگے بڑھیں گی اور اس طرح یہ اس مقام پر ہوں گی جہاں ان سے پہلے کی موجیں تھیں۔ اس طرح موجیں ساکن نظر آئیں گی۔

اس غیر مسلسل طریقہ سے مائع کی سطح کو دیکھنے کا انتظام یوں کیا جاتا ہے کہ ایک اور دوشاخہ جس کا تعدد پہلے دوشاخہ کے تعدد کے مساوی ہو لے کر اسی برقی دور کے ذریعہ چلایا جاتا ہے جو پہلے دوشاخہ کو مرتعش کرتا ہے۔ اس دوسرے دوشاخے کے دونوں شاخوں کے ساتھ الومنیم کے دو پتلے ٹکڑے اس طرح باندھ دیئے جاتے ہیں کہ ان ٹکڑوں کی وجہ سے مائع کی سطح جبکہ دوشاخہ ساکن ہوتا ہے بالراست نہیں نظر آسکتی، لیکن جب شاخیں انتہائی علیحدگی کے مقام پر ہوتی ہیں تو ان میں سے مائع کی سطح نظر آتی ہے۔ لہذا دوشاخہ کے ہر مکمل ارتعاش پر سطح کو دیکھا جائے تو موجیں ساکن نظر آتی ہیں۔ یہ اسی طرح کا عمل ہے جیسا کہ گردش نمائی طریقے سے دوشاخہ کا تعدد دریافت کرنے میں تیزی سے گھومنے والے قرص کے سوراخ، ساکن نظر آتے ہیں۔

طول موج تقسیمی پرکار یا ایسے ایک پیمانہ کے ذریعہ جو سطح پر ترتیب دیا جاسکتا ہے دریافت کیا جاتا ہے۔ پانی یا کسی دوسرے ہلکے مائع کی صورت میں اچھے نتائج حاصل کرنا ہو تو ایک برقی گولہ سطح سے دو یا تین گز اوپر رکھا جاتا ہے تاکہ موجیں واضح طور پر نظر آسکیں۔ اگر دوشاخہ کا تعدد ع کے مساوی ہو تو مساوات (۲۲) سے

$$\text{ر} = \text{ع}\,\text{له} = \sqrt{\frac{\text{ج}\,\text{له}}{2\pi} + \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ث}\,\text{له}}}$$

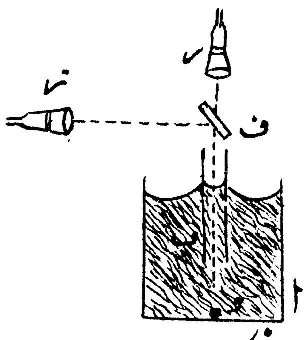
$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ث}\,\text{له}^2}{4\pi^2}\left\{2\pi\,\text{ع}^2\,\text{له} - \text{ج}\right\} \qquad \text{(۲۳)}$$

اس ضابطہ سے س کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

یہ طریقہ مختلف نمکوں کے محلول کے سطحی تناؤ، متفرق ارتکازوں پر، دریافت کرنے میں نہایت کارآمد ہوتا ہے۔

(۱۴۳)

(۹) اینڈرسن اور بوئن کا طریقہ :۔ شکل ۳۱ پر غور کرو - اس میں
۱ ایک مستطیل شیشہ کا برتن ہے جس کے پیندے میں ایک نشان و کیا گیا ہے
شیشہ کی ایک نلی ب عموداً اس میں اس
طرح رکھی گئی ہے کہ و اس کے محور پر
(بشرطیکہ یہ خارج کیا جائے) واقع ہوتا
ہے۔



شکل ۳۱

م ایک خوردبین ہے جو افقی یا
انتصابی سمتوں میں ہٹائی جا سکتی ہے۔
تجربہ میں خوردبین کو اس طرح ترتیب
دیا جاتا ہے کہ و اس میں ماسکہ پر ہو
اور اس کے کسرپیما کو پڑھ لیا جاتا ہے۔ جس مائع کا سطحی تناؤ دریافت کرنا
ہو اس کو برتن ۱ میں ڈال دیا جاتا ہے۔ نلی ب میں مائع شکل ۳۱ کے
مطابق ہوگا۔ خوردبین میں اب و کے خیال کو جو ہلالی سطح میں سے منعطف
ہو کر بنتا ہے ماسکہ پر لایا جاتا ہے، اور پھر کسرپیما کو پڑھ لیا جاتا ہے۔ اس کے
بعد خوردبین میں نلی میں کے مائع کی اوپر کی ہلالی سطح کے مرکز کو ماسکہ پر لاکر
کسرپیما کو آخری دفعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ کسرپیما کے ان مشاہدات سے ش
اور خ یعنی شخص کے اور خیال کے فاصلے ہلالی سطح کے مرکز سے معلوم ہو جاتے
ہیں علم ہندسی مناظر سے $\frac{1}{خ} - \frac{ن}{ش} = \frac{ن-1}{ص}$ ....(۲۴)

جہاں ص = ہلالی سطح کا نصف قطر انحنا

اور ن = مائع کا انعطاف نما

اب اگر یہ فرض کیا جائے کہ کسی تراش عمودی پر ہلالی سطح کا انحنا ایک ہی

رہتا ہے تو اسکے دونوں رخوں پر فرق دباؤ $= \dfrac{۲\,\text{س}}{\text{ص}} = \text{ج ثہ ل}$ ......(۲۵)

جہاں ثہ = مائع کی کثافت

اور ل = برتن ۲ میں مائع کی آزاد سطح سے ہلالی سطح کے مرکز کی بلندی ہے۔

ان دونوں مساواتوں (۲۴) اور (۲۵) سے :۔

$$\text{س} = \frac{\text{ج ثہ ل}}{۲} \left\{ \frac{(\text{ن} - ۱)}{\left(\frac{۱}{\text{خ}} - \frac{\text{ن}}{\text{سو}} \right)} \right\} \quad ......(۲۶)$$

اس سے س کی قیمت حسابی طریقہ سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس طریقہ میں بعض مائعیات کے ہلالی سطحوں (مثلاً تارپین وغیرہ) کے مرکز کو خوردبین میں ماسکہ پر لانا بے حد دشوار ہوتا ہے۔ اس سے بچنے کے لئے انعکاس سے ایک اور خیال بنایا جاتا ہے۔ شکل ۱۳۱ میں تا ایک توازی گر ہے جس میں سے نور کی متوازی شعاعیں شیشہ کی ایک چھوٹی تختی ف پر واقع ہوتی ہیں (ف نلی کے محور سے °۴۵ کا زاویہ بناتے ہوئے رکھا جاتا ہے) جہاں سے وہ ہلالی سطح کی جانب نیچے منعکس ہوتی ہیں اور ہلالی سطح کے مرکز سے $\frac{\text{ص}}{۲}$ فاصلہ پر نلی کے نیچے ایک خیال بناتی ہیں۔ یہاں چونکہ شعاعیں لامتناہی فاصلے سے (متوازی ہونے کی وجہ سے) آرہی ہیں۔

$$\text{لہذا ل}_۱ = \frac{\text{ص}}{۲} + \frac{\text{ص}}{\text{ن} - ۱}$$

$$\text{یعنی ص} = \frac{۲(\text{ن} - ۱)}{(\text{ن} + ۱)} \,.\, \text{ل}_۱ \quad ....(۲۷)$$

جہاں ل۱ = منعطف اور منعکس خیالوں کے متناظر خوردبین کے کسر پیما والے مشاہدات میں فرق

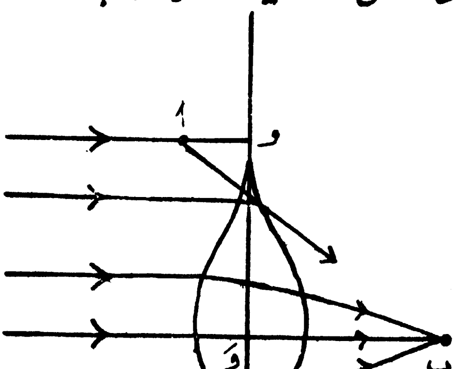
اسلئے مساوات (۲۵) اور (۲۷) سے :۔

$$س = ج\ ث\ ل \left\{ \frac{ن-۱}{ن+۱} \right\} ل_۱ \qquad \text{(۲۸)}$$

اس صورت میں خوردبین میں مائع کی ہلالی سطح کو ماسکہ پر لانے کی ضرورت باقی نہیں رہتی اور ضابطہ بھی پہلے سے زیادہ آسان ہے۔

کچھ دنوں بعد اینڈرسن اور بوئن نے ایک دوسرا طریقہ اُن مائعات کے سطحی تناؤ کو معلوم کرنے کا دریافت کیا جو شیشہ کے ساتھ صفر زاویۂ تماس بناتے ہیں۔

اگر پتلے شیشہ کا ایک صاف مستطیلی شکل کا ٹکڑا لیکر کسی مائع میں ڈبویا جائے اور انتصابی مستوی میں اس طرح رکھا جائے کہ اس کے دو کنارے افقی رہیں، تو اس کے ساتھ ایک لمبا اسطوانہ نما مائع کا قطرہ چمٹ جائیگا۔ اس کے تراش عمودی کی شکل، شکل ۳۲ میں دکھائی گئی ہے۔



شکل ۳۲

قطرہ دو اسطوانہ نما عدسے بناتا ہے جن میں سے ایک محدب (وَ مرکز) اور دوسرا مقعر (و مرکز) ہوتا ہے۔ عملاً مقعر عدسے کا صرف نچلا نصف حصہ موجود ہوتا ہے۔ اگر ایک توازی گرا ایسا لیا جائے کہ اس کا محور بھی افقی اور جھری بھی افقی ہو اور قطرہ کے بائیں طرف اس کو رکھا جائے تو شیشہ کی تختی پر متوازی شعاعیں عموداً اس سمت میں واقع ہوں گی جیسا کہ پیکان کے نشانوں سے شکل ۳۲

میں دکھلایا گیا ہے مقعر عدسہ، چھری کا ایک مجازی خیال ا پر بنائے گا جس کے مقام کو ایک خوردبین کے افقی صلیبی تار سے جو قطرہ کے داہنی جانب رکھا ہوا ہو، منطبق کیا جا سکتا ہے۔ اگر خوردبین کو اب فاصلہ و ا پیچھے ہٹایا جائے، تو شیشہ کی تختی کو اس کے ماسکہ پر لایا جا سکتا ہے۔ علیٰ ہذا محدب عدسہ کی صورت میں چھری کا ایک حقیقی خیال ب پر بنتا ہے جس کا مقام بھی متعین کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ $\text{ف}_{1} = \text{و ا}$ $\qquad \text{ف}_{2} = \text{وَب}$

$\text{ل} = \text{و ا}$ اور وَب کے درمیان عمودی فاصلہ

$\text{ص}_{1} =$ مقعر عدسے کے ہر رُخ کا نصف قطر انحنا یہ فرض کرتے ہوئے کہ انحنا ایک ہی ہے۔

$\text{ص}_{2} =$ محدب عدسہ کے ہر رُخ کا نصف قطر انحنا

$\text{د}_{1} =$ و پر مائع کا اندرونی دباؤ

اور $\text{د}_{2} =$ وَ " " "

چونکہ شعاعیں متوازی آرہی ہیں اور عدسوں کو بالکل پتلے فرض کیا جاتا ہے اس لئے

$$\frac{1}{\text{ف}_{1}} = (\text{ن} - 1)\frac{2}{\text{ص}_{1}} \qquad \text{اور} \qquad \frac{1}{\text{ف}_{2}} = (\text{ن} - 1)\frac{2}{\text{ص}_{2}}$$

اگر π کرہ ہوائی کا دباؤ ہو تو

$$\text{د}_{2} - \pi = \frac{\text{س}}{\text{ص}_{2}} \qquad \text{اور} \qquad \pi - \text{د}_{1} = \frac{\text{س}}{\text{ص}_{1}}$$

$$\therefore \text{د}_{2} - \text{د}_{1} = \text{س}\left(\frac{1}{\text{ص}_{1}} + \frac{1}{\text{ص}_{2}}\right)$$

$$= \frac{\text{س}}{2(\text{ن} - 1)}\left(\frac{1}{\text{ف}_{1}} + \frac{1}{\text{ف}_{2}}\right)$$

لیکن $\text{ج ثہ ل} = \text{د}_1 - \text{د}_2$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{2(\text{ن}-1)\,\text{ج ثہ ل}}{\left(\frac{1}{\text{ف}_1} + \frac{1}{\text{ف}_2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۹)$$

اگر شیشہ کی تختی کا صرف ایک ہی رُخ بھیگا ہوا ہو تو

$$\text{س} = \frac{(\text{ن}-1)\,\text{ج ثہ ل}}{\left(\frac{1}{\text{ف}_1} + \frac{1}{\text{ف}_2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۰)$$

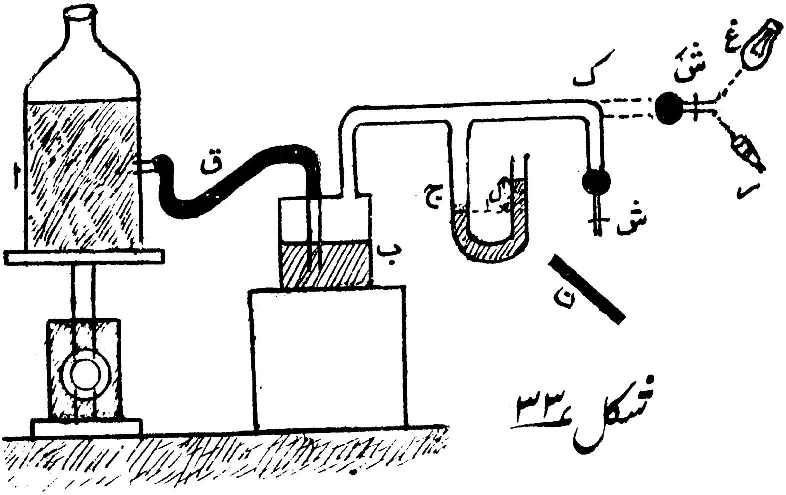
یہ طریقہ، تبخیر کی وجہ سے قطرہ کی شکل میں تغیرات ہونے سے، زیادہ صحیح نہیں ہے خصوصاً طیران پزیر مائعات کے لئے اس سے صحیح نتائج نہیں حاصل ہوتے اس لئے بہتر یہ ہے کہ مشاہدات بہت ہی تیزی کے ساتھ لئے جائیں۔

زیادہ لزج مائعات کے لئے بھی نتائج صحیح نہیں حاصل ہوتے چونکہ اس صورت میں قطرے زیادہ موٹے ہوتے ہیں اور پتلے عدسوں کا یہ ضابطہ ان پر صادق نہیں آتا۔

(۱۰) اے فرگوسن کے طریقہ[۱۴] سے سطحی تناؤ کی دریافت:۔

اس طریقہ میں مائع کی بہت کم مقدار کی ضرورت ہوتی ہے یعنی تقریباً ایک مکعب ملی میٹر مائع بالکل کافی ہوجاتا ہے۔ آلات کی ترتیب بہت ہی سادہ ہوتی ہے جو شکل ۳۳ میں دکھائی گئی ہے۔ ا ایک شیشہ کی بوتل ہے جس میں پانی رکھا جاتا ہے۔ ق ایک ربر کی نلی ہے جو ایک برتن ب سے ملی ہوئی ہے۔ ا کو اونچا یا نیچا کرنے سے ب میں دباؤ بڑھایا یا گھٹایا جاسکتا ہے۔ ج ایک ل نما نلی کی شکل کا داب پیما ہے۔ ش ایک شعری نلی ہے جو انتصاباً رکھی ہوئی ہوتی ہے اور اس میں مائع کی ایک ڈوری لی جاتی ہے جس کا کہ سطحی تناؤ مطلوب ہوتا ہے۔ ن ایک مستوی آئینہ ہے جو شعری نلی کے نچلے سرے

کے قریب ۴۵° درجہ کا زاویہ بناتے ہوئے اس طرح رکھا جاتا ہے کہ شعری نلی کو آئینہ میں دیکھا جائے تو وہ افقی نظر آتی ہے (نوٹ۔ سردست، شکل کی داہنی

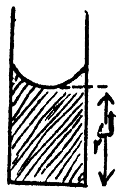


شکل ۳۲

جانب جو نقطہ دار خطوط دکھائے گئے ہیں ان پر کوئی غور نہ کیا جائے)۔ تجربہ میں بوتل ۱ کو اتنا اونچا رکھا جاتا ہے کہ مائع کی ڈوری شعری نلی میں نیچے ہٹائی جا کر اس کے کھلے سرے پر ہلالی سطح کا انحنا ٹھیک طور پر مستوی ہو جائے۔ ہلالی سطح کے مستوی ہونے کو جانچنے کے لئے ایک محدب عدسہ کے ذریعہ دس وولٹ کے ایک چھوٹے برقی لیمپ کے ریشہ کے خیال کو، ہلالی سطح میں دیکھا جاتا ہے۔ لیمپ کو ترچھی وضع میں نلی کے نیچے کسی مناسب فاصلہ پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ اس کے ریشوں کا خیال آئینہ ن میں نظر آنے لگے۔ جب ہلالی سطح مستوی ہوتی ہے تو ریشوں کا خیال جوڑا ہو کر نور کا ایک چھوٹا سا بقعہ بن جاتا ہے لیکن جب وہ محدب یا مقعر رہتی ہے تو ریشے واضح طور پر نظر آتے ہیں، یہ ایک بہت حساس طریقہ ہے اور دباؤ کے اُن مشاہدات سے جو ہلالی سطح کو مستوی کرنے کے لئے درکار ہوتے ہیں، مائع کے سطحی تناؤ کی

قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۳۴ کے مطابق، مائع کا ایک چھوٹا طول $ل_۲$ ایک ایسی شعری نلی میں رکھا ہوا ہے جسکا نصف قطر $ص_۱$ ہے۔



شکل ۳۴

اوپر بیان ہو چکا ہے کہ کرہ ہوائی کا دباؤ اگر Π ہو تو $د$ دباؤ جو مائع کی ہلالی سطح کے عین نیچے واقع ہوتا ہے حسب ذیل ہے:-

$$د_۱ = \Pi - ج\, ثہ_۲\, ل_۲$$

جہاں $ثہ_۲$ = مائع کی کثافت

اگر مائع کی ہلالی سطح کے ٹھیک اوپر دباؤ $د_ب$ ہو تو ہلالی سطح کے دونوں جانب فرق دباؤ لاپلاس کی مساوات سے حسب ذیل ہوگا:-

$$د_ب - د_۱ = \frac{۲س}{ص}$$

جہاں ص = ہلالی سطح کا نصف قطر انحنا

لیکن ہم کو یہ معلوم ہے کہ $د_ب = \Pi + ج\, ثہ_۱\, ل_۱$

جہاں $ثہ_۱$ = داب پیما کے مائع کی کثافت۔

اور $ل_۱$ = جب ہلالی سطح مستوی ہوتی ہے تو داب پیما میں مائع کی بلندی

$$\therefore (\Pi + ج\, ثہ_۱\, ل_۱) - (\Pi - ج\, ثہ_۲\, ل_۲) = \frac{۲س}{ص}$$

یعنی $س = \frac{ج\, ص}{۲}\left\{ثہ_۱\, ل_۱ + ثہ_۲\, ل_۲\right\}$ .... (۳۱)

ایسے مائع کے لئے جسکا زاویہ تماس صفر ہوتا ہے مساوات (۴۷) میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ $ص = ص_۱\left(۱ + \frac{ص_۱^۲}{۶ ا^۲}\right)$ جہاں $ا^۲ = \frac{س}{ج\, ثہ_۲}$

ہم اگر ص کی قیمت مساوات (۳۱) میں لکھیں تو

$$س = \frac{ج\, ص_۱}{۲}\left\{ثہ_۱\, ل_۱ + ثہ_۲\, ل_۲\right\} + \frac{ج\, ثہ_۲\, ص_۱^۲}{۶} \quad ......(۳۲)$$

اس مساوات سے ہم آسانی کے ساتھ دئیے ہوئے مائع کے لئے س کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں مائع کی کثافت ث۲ معلوم ہو۔ لیکن چونکہ مائع کی مقدار بہت تھوڑی سی ہے ث۲ کی قیمت علیحدہ دریافت کرنا بعید دشوار ہوتا ہے اس کے لئے دو راستے اختیار کئے جا سکتے ہیں۔ یا تو ڈوری ل۲ کا طول کم کرنا ہوگا حتیٰ کہ ث۲ ل۲ کی قیمت مساوات (۳۱) میں ث۱ ل۱ کے مقابلہ میں نظر انداز کرنے کے قابل ہو جائے یا ل۲ کو بدل بدل کر متعدد مشاہدات لینے ہوں گے۔

مساوات (۳۲) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:۔

$$۲\text{س} = \text{ج}\,\text{ص}_۱ \left\{ \text{ث}_۱ \text{ل}_۱ + \text{ث}_۲ \text{ل}_۲ + \frac{\text{ث}_۲ \text{ص}_۱}{۳} \right\} \quad \ldots\ldots (۳۳)$$

$$\text{یعنی}\ \text{ل}_۱ = -\frac{\text{ث}_۲}{\text{ث}_۱}\left(\text{ل}_۲ + \frac{\text{ص}_۱}{۳}\right) + \frac{۲\text{س}}{\text{ج}\,\text{ص}_۱ \text{ث}_۱} \quad \ldots\ldots (۳۴)$$

ہم اگر ل۱ کی $\left(\text{ل}_۲ + \frac{\text{ص}_۱}{۳}\right)$ کے مقابلہ میں ترسیم کریں تو س کی قیمت بغیر ث۲ کی قیمت معلوم کرنے کے منحنی سے آسانی کے ساتھ حاصل ہو جا سکتی ہے۔ اس کے بعد فرگوسن اور کنیڈی نے ایک نیا طریقہ اختیار کیا جو (۳۱) سے بہت آسان ہے اور نیز اس میں ث۲ نظر انداز بھی کیا جا سکتا ہے[۱۵]:۔

پھر شکل ۱۳۳ پر غور کرو۔ اب ک مثی کو چھوڑ دو اور شکل میں ک مثی کو شامل کر لو۔ مثی کوہی اگلی شعری نلی ہے جس میں مائع کی ایک چھوٹی سی ڈوری افقی حالت میں رکھی ہوئی ہے۔ س ایک خوردبین ہے اور غ ایک چھوٹے ۱۰ وولٹ کی برقی لمپ کا ریشہ یا سوت ہے۔

ابتدا میں مائع کی ہلالی سطح مقعر رہتی ہے اور جیسا اوپر بیان ہو چکا ہے دباؤ کے اضافہ سے یہ مستوی ہونے لگتی ہے اور پھر محدب۔ پہلے کی طرح دباؤ کو اس طرح ترتیب دو کہ ہلالی سطح مستوی ہو جائے۔ اس تجربہ میں شعری نلی کا نصف قطر بالکل چھوٹا ہونا چاہیئے ورنہ جاذبہ ارض کی وجہ سے ہلالی سطح کی

شکل میں تبدیلی ہو جائے گی۔

مساوات (۳۳) سے انتصابی شعری نلی کی صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$\frac{\text{۲س}}{\text{ج ص}_{\text{۱}}} = \text{ثہ ل}_{\text{۱}} + \text{ثہ}_{\text{۲}} \left(\text{ل}_{\text{۲}} + \frac{\text{ص}_{\text{۱}}}{\text{۳}}\right)$$

اب افقی شعری نلی کی صورت میں یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس کا نصف قطر بہت چھوٹا ہے اور سطحی تناؤ کی قوت کے مقابلہ میں جاذبۂ ارض کی قوتوں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے :—

$$\frac{\text{۲س}}{\text{ج ص}_{\text{۱}}} = \text{ثہ ل}_{\text{۱}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۳۵})$$

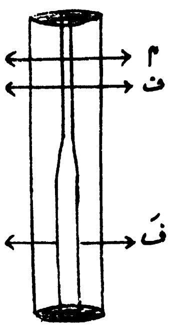
عملاً تجربہ کے اغراض کے لئے یہ سادہ ضابطہ بیحد مفید ہوتا ہے۔ اس میں مائع کی کثافت ثہ کے معلوم ہونے کی کوئی ضرورت نہیں ہے۔

اس طریقہ سے مختلف مائعات کے سطحی تناؤ کی قیمتیں دریافت کی گئی ہیں جن میں سے چند حسب ذیل ہیں :—

مائع	تپش درجہ مئی	سطحی تناؤ ڈائین فی سمر
ایتھر	۱۶٫۰	۱۷٫۴۱
کاربن ٹیٹرا کلورائیڈ	۱۶٫۵	۲۷٫۰۵
بنزین	۱۵٫۰	۲۹٫۱۴
کلوروفارم	۱۵٫۰	۲۷٫۵۰
ٹولوئین	۱۶٫۰	۲۸٫۸۴
ایتھل برومائیڈ	۱۷٫۰	۲۴٫۵۲

(۱۱) سی سٹن کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت (۱۶) :-

اس طریقہ میں بھی مائع زیر تجربہ کا حجم بہت چھوٹا ہوتا ہے اور نیز مائع کی کثافت کے جاننے کی بھی ضرورت باقی نہیں رہتی۔ شکل ع۳۵ میں دو شعری نلیاں جن کے قطر مختلف ہوتے ہیں گرم کرکے ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ دیئے گئے ہیں۔ ان میں اتنا مائع داخل کیا جاتا ہے کہ جوڑ میں پہنچنے کے علاوہ نلی کے یکساں حصوں تک پھیل جائے۔ اس صورت میں مائع میں تقاضا یہ ہوتا ہے کہ چھوٹے قطر کی نلی میں چلا جائے۔ اگر چھوٹی قطر کی نلی کو اوپر کی جانب رکھا جائے تو مائع کے استوانہ کا وزن اس تقاضے کو تعادل میں رکھتا ہے۔



شکل ع۳۵

تعادل کے لئے $\frac{س}{۲\pi ص_۱} - \frac{س}{۲\pi ص_۲} =$

$$= ث ج ل \quad .... (۳۶)$$

جہاں $ص_۱$ اور $ص_۲$ دونوں شعری نلیوں کے نصف قطر ہیں۔ ث مائع کی کثافت اور ل مائع کی بلندی ہے۔ اس مساوات سے س کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔ مائع کا اگر زاویہ تماس طہ ہو تو اوپر کی مساوات میں س کے بجائے س جم طہ لکھنا ہوگا۔

لیکن اس صورت میں طہ کی قیمت صفر فرض کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ نلی کا سرا کسی گیس کے خزانہ سے جوڑا جاتا ہے جسمیں فرگوسن کے طریقہ کی طرح ایک داب پیما بھی شامل ہے۔

دباؤ کو اب اس طرح ترتیب دو کہ مائع کی ہلالی سطح چھوٹی قطر کی نلی میں نشان ف تک پہنچ جائے۔ اس صورت میں تعادل کے لئے :-

$$\frac{س}{۲\pi ص_۱} - \frac{س}{۲\pi ص_۲} - ث ج ل_۱ = د_۱ \quad .... (۳۷)$$

جہاں $\text{ل}_۱$ = مائع کے استوانہ کی بلندی

اور $\text{د}_۱$ = داب پیما کا دباؤ

اب نلی کو الٹ دو تاکہ چھوٹی قطر کی نلی نیچے آجائے۔ ایسی حالت میں سطحی تناؤ کی قوت اور مائع کے استوانہ کا وزن، دونوں ملکر مائع کو نیچے ڈھکیلنے کی کوشش کرتے ہیں۔ دباؤ کو اتنا رکھو کہ مائع پھر نشان ف تک پہنچ کر قائم رہے۔ تعادل کے لئے :-

$$\left(\frac{\text{س}}{۲\pi\,\text{ص}_۱} - \frac{\text{س}}{۲\pi\,\text{ص}_۲}\right) + \text{ثہ ج ل}_۱ = \text{د}_۲ \quad \ldots\ldots (۳۸)$$

جہاں $\text{د}_۲$ = داب پیما کا دباؤ

اب فرض کرو کہ $\left(\frac{۱}{۲\pi\,\text{ص}_۱} - \frac{۱}{۲\pi\,\text{ص}_۲}\right) = \frac{۱}{\text{گ}}$ = کوئی مستقل

مساوات (۳۷) اور (۳۸) سے $\frac{۲\,\text{س}}{\text{گ}} = \text{د}_۱ + \text{د}_۲$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{گ}}{۲}\left(\text{د}_۱ + \text{د}_۲\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۹)$$

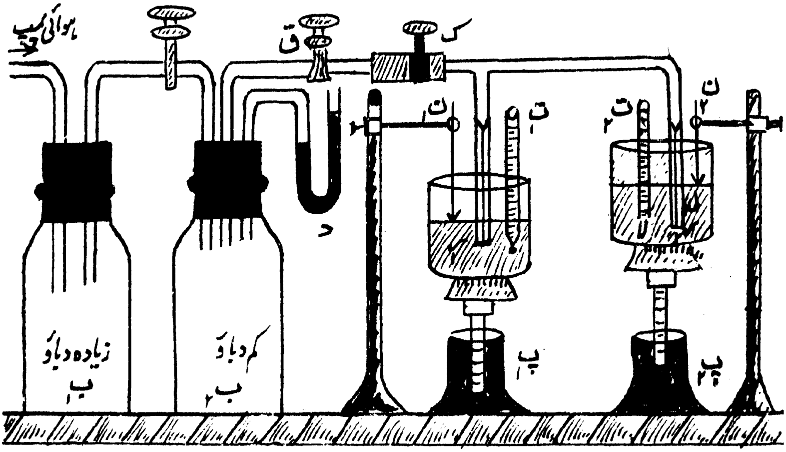
$$\text{اور نیز}\quad \text{ثہ} = \frac{\text{د}_۲ - \text{د}_۱}{۲\,\text{ج ل}_۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۰)$$

لہٰذا اس طریقہ سے نہ صرف ایک بالکل کم مقدار مائع کا سطحی تناؤ دریافت کیا جا سکتا ہے بلکہ اس کی کثافت بھی علیحدہ طور پر معلوم کی جا سکتی ہے۔ یہ طریقہ دو مختلف مائعات کے سطحی تناؤ کے مقابلہ کے لئے بھی بہت کارآمد ہوتا ہے۔ اسکے لئے حسب ذیل ضابطہ مساوات (۳۹) کی مدد سے حاصل ہوتا ہے:-

$$\frac{\text{س}}{\text{سَ}} = \frac{\text{د}_۱ + \text{د}_۲}{\text{دَ}_۱ + \text{دَ}_۲} \quad \ldots\ldots (۴۱)$$

سطحی تناؤ کا میزان (۱۷) :- یہاں جس طریقہ سے بحث کی جائے گی وہ خاص

طور پر سطحی تناؤ کی تپشی قدر کی دریافت کے لئے مرتب کیا گیا ہے۔
اور نیز مختلف نمکوں کے محلولوں اور آمیزوں کا بھی سطحی تناؤ خواہ وہ کسی ارتکاز کے ہوں



شکل ۳۶

اس کی مدد سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ تمام ضروری پیمائشیں مستقل تپش پر کسی معیاری مائع (مثلاً خالص پانی) کے سطحی تناؤ کی رقوم میں ظاہر کی گئی ہیں۔
شکل ۳۶ میں پ۱ اور پ۲ دو چھوٹی تپائیوں پر دو منقرے رکھے ہوئے ہیں جن میں مائعات ڈالے جاتے ہیں۔ ن۱ اور ن۲ ایک ہی تراش عمودی کی دو شعری نلیاں ہیں جو مائعوں میں ڈوبی رہتی ہیں اور ان کی گہرائیوں کو چھوٹے گھمائی کے پیچ سے جو پ۱ اور پ۲ میں ہوتے ہیں حسب ضرورت بدلا جا سکتا ہے۔ ت۱ اور ت۲ دو تپش پیما ہیں جو دونوں منقروں میں کے مائعات کی تپش، بتلاتے ہیں۔ ک ایک چٹکی اور ق ایک ٹونٹی ہے۔ د، ایک ل نما داب پیما ہے۔ شعری نلیاں ایک دوسرے کے ساتھ ملی ہوئی

ہوتی ہیں۔ دو بوتلیں ب$_۱$ اور ب$_۲$ بھی ان شعری نلیوں سے ملے ہوتے ہیں اور ان بوتلوں میں ہوا کا دباؤ بدلا جا سکتا ہے۔ بوتل ب$_۲$ کے ذریعہ جس میں دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ سے کسی قدر زیادہ ہوتا ہے ہوا کے بلبلے، شعری نلیوں کے نچلے سروں کے پاس بنائے جا سکتے ہیں۔

یہ پورا انتظام بے حد حساس ہے۔ دونوں شعری نلیوں کی (مائع کے اندر) گہرائیاں ابتدا میں پ$_۱$ اور پ$_۲$ پیچوں کی مدد سے اس طرح ترتیب دی جاتی ہیں کہ ہوا کے بلبلے دونوں شعری نلیوں سے ایک ہی وقت میں ساتھ ساتھ پیدا ہوتے ہیں۔ بلبلوں کی حساس ترتیب کے لئے چٹکی ک کا استعمال (دباؤ میں کسی قدر تبدیلی کرنے کے لئے) کیا جاتا ہے۔ ارتفاع پیما کے ذریعہ شعری نلیوں کے ڈوبے ہوئے حصوں کی گہرائی دریافت کر لی جاتی ہے۔

اگر بلبلا کروی ہو تو، تعادل کے لئے :-

$$د = \frac{۲س}{ص} = د_ا - د_ب$$

جہاں ص = بلبلے کا نصف قطر انحنا

$د_ا$ = بلبلے کا اندرونی دباؤ

$د_ب$ = بلبلے کا بیرونی دباؤ = π + ج ثہ ل$_۱$

ثہ = اس مائع کی کثافت جس میں شعری نلی، ل$_۱$ گہرائی تک ڈوبی ہوئی ہوتی ہے۔

اور π = کرہ ہوائی کا دباؤ

$$\therefore \frac{۲س}{ص} = د_ا - (\pi + ج\ ثہ\ ل_۱) \quad .... (۴۲)$$

اگر اسی شعری نلی میں مائع کے چڑھاؤ کی بلندی ل ہو تو ہم جانتے ہیں کہ

$$س = \frac{ص_۱\ ج\ ثہ\ (\frac{ص_۱}{۳} + ل)}{۲}$$ جہاں ص$_۱$ = شعری نلی کا نصف قطر

اب فرض کرو کہ $\frac{\text{س}}{\text{ج ث}_{۱}} = \text{ا}^{۲}$

اِس $\text{ا}^{۲}$ کو نوعی اتصال سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

اس صورت میں :-

$$۲\,\text{ا}^{۲} = \text{ص}_{۱}\,\text{ل}\left(۱ + \frac{\text{ص}_{۱}}{۳\,\text{ل}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۳)$$

لاپلاس کی مساوات سے راس پر :-

$$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}} = \text{ج ث ل} \quad \text{یعنی} \quad ۲\,\text{ا}^{۲} = \text{ص ل} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۴)$$

مساوات (۴۳) اور (۴۴) سے :-

$$\text{ص} = \text{ص}_{۱}\left(۱ + \frac{\text{ص}_{۱}}{۳\,\text{ل}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۵)$$

مساوات (۴۳) سے اگر پہلی تقریبی قیمت لی جائے تو

$$\text{ل} = \frac{۲\,\text{ا}^{۲}}{\text{ص}_{۱}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۶)$$

مساوات (۴۶) والی ل کی قیمت کو مساوات (۴۵) میں لکھنے سے :-

$$\text{ص} = \text{ص}_{۱}\left(۱ + \frac{\text{ص}_{۱}^{۲}}{۶\,\text{ا}^{۲}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۷)$$

لہٰذا مساوات (۴۲) کو ہم اِس طرح لکھ سکتے ہیں :-

$$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}_{۱}\left(۱ + \frac{\text{ص}_{۱}^{۲}}{۶\,\text{ا}^{۲}}\right)} = (\text{د}_{\text{ن}} - \pi) - \text{ج ث ل}_{۱}$$

اس کو پھیلا کر $\frac{\text{ص}_{۱}^{۲}}{۶\,\text{ا}^{۲}}$ کی اونچی طاقت والی رقموں کو نظرانداز کرنے سے :-

$$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}_{۱}}\left(۱ - \frac{\text{ص}_{۱}^{۲}}{۶\,\text{ا}^{۲}}\right) = (\text{د}_{\text{ن}} - \pi) - \text{ج ث ل}_{۱}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}_{۱}} - \frac{\text{ص}_{۱}\,\text{ج ث}_{۱}}{۳} = \text{لا} - \text{ج ث}_{۱}\,\text{ل}_{۱}$$

جہاں لا = بلبلے کے اندر کرہ ہوائی کے دباؤ سے جتنا دباؤ زیادہ ہو

$$= (\text{د}_{\text{ن}} - \pi)$$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{\text{ص}_۱}{۲}\left(\text{لا} - \text{ج ثہ ل}_۱\right) + \frac{\text{ص}_۱^۲\,\text{ج ثہ}_۱}{۶} \quad\ldots\ldots\ (۴۸)$$

یہ مساوات، دونوں شعری نلیوں پر جن کے تراش مساوی ہیں صادق آتی ہے۔ فرض کرو کہ $\text{س}_۲$ سطحی تناؤ $\text{ثہ}_۲$ کثافت اور $\text{ل}_۲$ زیر امتحان مائع کے اندر ڈوبی ہوئی شعری نلی کی گہرائی ہے۔

$$\text{تب}\ \text{س}_۲ = \frac{\text{ص}_۱}{۲}\left(\text{لا} - \text{ج ثہ}_۲\,\text{ل}_۲\right) + \frac{\text{ص}_۱^۲\,\text{ج ثہ}_۲}{۶} \quad\ldots\ldots\ (۴۹)$$

اگر مساوات (۴۸) معیاری مائع کی تعبیر کرتا ہو جس کا سطحی تناؤ $\text{س}_۱$ ہو تو مساوات (۴۸) اور (۴۹) سے:—

$$\text{س}_۱ - \text{س}_۲ = \frac{\text{ج ص}_۱}{۲}\left(\text{ثہ}_۲\,\text{ل}_۲ - \text{ثہ}_۱\,\text{ل}_۱\right) + \frac{\text{ج ص}_۱^۲}{۶}\left(\text{ثہ}_۱ - \text{ثہ}_۲\right) \quad\ldots\ldots\ (۵۰)$$

یہ مساوات اوپر کے عملی انتظام پر صادق آتی ہے۔

اس میزان کو بعض مائعات کی مثلاً بنزین، ایتھر وغیرہ کی "تپش فاصل" (وہ تپش جس پر سطحی تناؤ غائب ہو جاتا ہے) کی دریافت میں استعمال کیا جاتا ہے اور نیز مختلف ارتکاز کے محلولوں میں سطحی تناؤ کے تغیرات بھی اس سے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

اوپر جو نظریہ بیان کیا گیا ہے اس میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ دونوں شعری نلیاں بالکل ناپ وغیرہ میں ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ایسی نلیاں ایک بڑی لمبی نلی کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے حاصل کی جا سکتی ہیں یا اس کی جانچ یوں کی جا سکتی ہے کہ دونوں منفردوں میں ایک ہی مائع استعمال کر کے تجربہ کیا جائے تاکہ $\text{ل}_۱$ اور $\text{ل}_۲$ بلبلوں کی ترتیب کے بعد مساوی ہو جائیں۔

اس تجربہ میں یہ بے حد ضروری ہے کہ شعری نلیوں کو معمولی طریقوں سے نہایت احتیاط کے ساتھ پاک کر لیا جائے اور معیاری مائع کو مستقل تپش پر رکھا جائے۔

اس طریقہ کو ڈاکٹر وارن نے پیش کیا تھا نمک کے محلولوں کا سطحی تناؤ عموماً خالص پانی سے زیادہ ہوتا ہے۔ اگر کسی محلول کا سطحی تناؤ $س_ن$ جبکہ اس کے محلول کے ایک لیٹر میں ن گرام سالمات نمک موجود ہوئے ہیں ہے تو

$$س_ن = س_پ + گ\,ن \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۱)$$

جہاں $س_پ$ = خالص پانی کا سطحی تناؤ اسی تپش پر

اور گ = ہر ایک خاص نمک سے لئے ایک مستقل، اس کی قیمت ذیل کی جدول میں دی گئی ہے:-

نمک کا نام		گ
سوڈیم کلورائڈ	$NaCl$	۱٫۵۳
پوٹاسیم کلورائڈ	KCl	۱٫۷۱
$\frac{1}{2}$ سوڈیم کاربونیٹ	$\frac{1}{2}(Na_2CO_3)$	۲٫۰۰
$\frac{1}{2}$ پوٹاسیم کاربونیٹ	$\frac{1}{2}(K_2CO_3)$	۱٫۷۷
$\frac{1}{4}$ زنک سلفیٹ	$\frac{1}{4}(ZnSO_4)$	۱٫۸۶

مائعات کے سطحی تناؤ پر تپش کا اثر:- تپش بڑھتی ہے تو تمام مائعات کا سطحی تناؤ گھٹنے لگتا ہے اور ایک خاص تپش پر صفر ہوجاتا ہے۔ اس تپش کو "تپش فاصل" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

پانی کا ایک اتھلا یعنی چپٹے پیندے کے برتن میں لو اور اس کی سطح پر تھوڑا سا کوئلے کا سفوف چھڑک دو۔ اس کی سطح کے کسی مقام کو اس کے قریب گرم دھات کا کوئی ٹکڑا لاکر گرم کرو۔ اس مقام کا پانی گرم ہوگا اور اس کا سطحی تناؤ کم ہونے لگے گا۔ اطراف کے ٹھنڈے پانی کی سطح سکڑنے لگتی ہے جس کی وجہ سے کوئلے کا سفوف برتن کے کناروں کی طرف حرکت کرنے لگتا ہے۔ بجائے گرم

دھات کے، محدب عدسہ میں سے سورج کی شعاعوں کو پانی کی سطح کے کسی نقطہ پر مستدق کیا جائے تو اس نقطہ کے پاس پانی گرم ہو جائے گا۔

بعض مائعات کا سطحی تناؤ $\text{س}_{\text{ت}}$ ، ت° م تپش پر حسب ذیل ضابطہ سے ظاہر کیا جاتا ہے:۔

۱۸

$$\text{س}_{\text{ت}} = \text{س}_{\text{صفر}} \left(۱ - \text{گہ ت} \right) \qquad (۵۲)$$

جہاں $\text{س}_{\text{صفر}}$ = صفر درجہ مئی پر سطحی تناؤ

اور گہ = سطحی تناؤ کی تپشی قدر

ذیل کی جدول میں چند مائعات کے لئے گہ کی قیمتیں دی گئی ہیں:۔

مائع	$\text{س}_{\text{صفر}}$	گہ
ایتھر ($C_4H_{10}O$)	۱۹٫۳	۰٫۱۱۵
الکوہل (C_2H_6O)	۲۵٫۳	۰٫۰۸۷
بنزین (C_6H_6)	۳۰٫۶	۰٫۱۳۲
پانی (H_2O)	۷۵٫۸	۰٫۱۵۲
پارہ (Hg)	۵۲۷٫۲	۰٫۳۷۹

ایتواس نے متعدد مائعات کے لئے س، $\text{ح}^{\frac{۲}{۳}}$ کے حاصل ضرب کی قیمت دریافت کی ہے جہاں ح = سالمی حجم = $\frac{\text{سالمی وزن}}{\text{کثافت}}$

اس نے دریافت کیا کہ اس حاصل ضرب کی، تبدیلی کی شرح بلحاظ تپش، (تمام مائعات کے لئے جن پر اس نے تجربہ کیا) مستقل رہتی ہے اور اس مستقل کی قیمت ۲٫۱ ہے۔ پانی کی صورت میں ایتواس کا قاعدہ صادق نہیں آتا۔ اس واسطے کہ ۱۰۰° م اور ۲۰۰° م کے درمیان، اس قاعدے کا صرف اسی وقت

اطلاق ہوتا ہے جبکہ پانی کے سالمی وزن کو ہم بجائے ۱۸ کے ۳۶ لیں۔
اس سے ہمیں یہ ماننا ہوگا کہ ۱۰۰° مئی سے زائد تپش پر پانی کی ترکیب $(2H_2O)$ ہوتی ہے اور اس تپش سے نیچے (nH_2O) جہاں (n) کوئی عدد ہے جس کی قیمت ۲ سے زیادہ ہے۔

ایتواس (۱۹) کے قاعدے سے :-

س ح^{۲/۳} = ۲٫۱۲ (تہ - ت) .... (۵۳)

جہاں تہ = کوئی مستقل تپش

ت = مائع کی تپش مئی درجوں میں

اگر ت = تہ تو س = صفر

لہذا تہ کی یہ قیمت مائع کی تپش فاصل ہوگی۔

مائع	تہ کی قیمت تجربہ سے	فانڈروال کی تپش فاصل کی قیمتیں
ایتھر	۱۸۰° م	۱۹۰° م
الکوہل	۲۹۵° م	۲۵۶° م
پانی	۵۶۰° م	۳۹۰° م

کسی مائع کی جھلی کے پھیلنے سے تپش میں تغیرات :-

چونکہ کسی مائع کا سطحی تناؤ تپش کے ساتھ ساتھ بدلتا ہے لہذا حرناگزار حالات کے تحت اگر جھلی کے رقبہ میں کوئی تبدیلی ہو تو یہ ضروری ہے کہ اس کے ساتھ تپش بھی متبدل ہو جائے۔

حرارت کی وہ مقدار جو جذب یا خارج ہوتی ہے حرحرکی اصول کی مدد سے دریافت کی جا سکتی ہے :-

فرض کرو کہ کسی مائع کی ایک جھلی جس کی کمیت اکائی ہے مستقل مطلق

تپش ت پر رکھی جاتی ہے اور اسکا رقبہ ا ہے۔ جب جھلی کا رقبہ ا سے ا + فر ا تک ذرا سا کھینچ کر بڑھایا جائے تو جھلی پر کام کیا جائے گا اور اسکے لئے باہر سے حرارت لینے کی ضرورت ہوتی ہے۔ چونکہ تپش مستقل رکھی جاتی ہے اس وجہ سے جھلی میں تبرید واقع ہوگی۔

(سطح کے دونوں رخوں پر غور کرتے ہوئے) جھلی کے رقبہ کو "فر ا" بڑھانے کے لیے کام = ۲ س فر ا

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے [پانچواں باب مساوات (۱)]

فرحہ = فر بہ + فر کا

= فر بہ − ۲ س فر ا .... (۵۴)

چونکہ یہ عمل اُلٹایا جاسکتا ہے، حرحرکیات کے دوسرے کلیہ سے :-

فرحہ = ت فرفہ .... (۵۵)

جہاں فرفہ = ناکارگی میں تبدیلی

ان دونوں مساواتوں سے :-

فر بہ = ت فرفہ + ۲ س فر ا

یعنی فر (بہ − ۲ س ا) = ت فرفہ − ۲ ا فر س

چونکہ یہ کامل تفرق ہے

$$\therefore \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}}\right)_{\text{ت}} = -۲\left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\right)_{\text{س}} \quad \text{.........................} \quad (۵۶)$$

مساوات (۵۵) اور (۵۶) سے :-

$$\left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = -۲\,\text{ت}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right).\,\text{فرا}$$

اگر گہ سطحی تناؤ کی تپشی قدر ہو تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{گہ}$$

∴ (فرحہ)ت = -۲ ت گہ فر۲ .... (۵۷)

چونکہ تپش کے اضافہ سے تمام مائعات کا سطحی تناؤ کم ہوتا ہے اس لئے گہ منفی ہے، لہذا اوپر کی مساوات میں بائیں جانب کی رقم مثبت ہوگی، یعنی (فرحہ)ت مثبت ہے۔ لہذا جھلی کو حرارت پہنچانی ہوگی جبکہ کھینچکر بڑا کرنے کی صورت میں اس کی تپش کو مستقل رکھنا منظور ہو۔

اگر جھلی کے پھیلنے کی وجہ سے تپش میں کمی = فرت تو

(فرحہ)ت = فرت × ن × جو × ۱

جہاں ن = حرارت نوعی مائع کی

جو = حرارت کا معادل جیلی

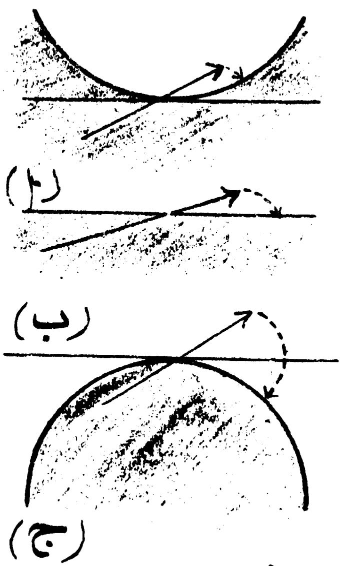
∴ فرت = (-۲ ت گہ فر۲) / (ن جو) .... (۵۸)

کسی مائع کی منحنی سطح پر بخار کا دباؤ:- نظریہ تحرک کی رو سے، کسی مائع کی تبخیر کا عمل، مائع کی سطح سے، اسکے سالمات کے بتدریج باہر نکل جانے کا دوسرا نام ہے، مائع کی سطح کے کسی دئے ہوئے رقبہ سے اکائی وقت میں سالمات کی جو تعداد نکلے گی وہ سطح کے انحنا پر منحصر ہوگی۔ اگر سطح مقعر ہو جیسی کہ شکل ۳۷ (ا) میں دکھائی گئی ہے تو ایک پیکان کی سمت میں، سطح میں سے گزرنے والا تیز رفتار سالمہ سالمی کشش کی حد کے باہر نکلنے میں کامیاب ہوتے ہوتے رہ جائے گا۔

لہذا اس قسم کا سالمہ پھر مائع میں واپس ہو جائے گا۔

لیکن یہی سالمہ فضا میں باہر نکل سکتا ہے بشرطیکہ مائع کی سطح شکل ۳۷ (ب) کی طرح مستوی ہو۔ اگر سطح شکل ۳۷ (ج) کی طرح محدب ہو تو پیکاں کے نشان کی سمت میں سالمہ کا باہر نکل جانا ممکن ہے لیکن اس بات کا بھی امکان ہے کہ مستوی سطح والے مائع میں سے یہ نکلنے نہ پائے۔

اس سے ظاہر ہے کہ کسی خاص تپش پر ایسے سالمات کی تعداد جو فی ثانیہ کسی محدب سطح کے مائع سے باہر نکلتے ہوں زیادہ ہوتی ہے بہ نسبت ان سالمات کی تعداد کے جو فی ثانیہ کسی مستوی سطح والے مائع سے باہر نکلتے ہیں اور کسی مقعر سطح سے سالمات کے باہر نکلنے کی شرح بلحاظ وقت، مستوی سطح سے نکلنے والے سالمات کی شرح سے کم ہوتی ہے۔



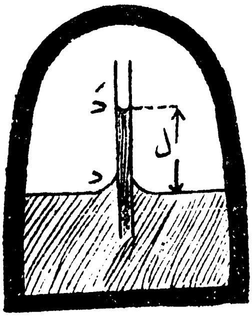
شکل ۳۷

اگر ذیل کے وجوہات پر غور کریں تو ہم اسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں :—

کسی مائع میں جب اس کی مستوی سطح سے تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو سطح کے رقبہ میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی اور اسی لئے سطحی تناؤ کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔ کسی منحنی سطح (مثلاً کروی قطرہ) کی صورت میں جب مائع میں تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو سطح کے رقبہ میں کمی ہو جاتی ہے جس کی باعث سطحی تناؤ سے توانائی بالقوہ میں کمی ہونے لگتی ہے۔ لہذا چونکہ تبخیر کے ساتھ توانائی بالقوہ میں کمی واقع ہونا ضروری ہے اس لئے سالمات کے باہر نکل جانے کی شرح، یعنی تبخیر، کروی قطرے میں، مستوی سطح کی بہ نسبت، بڑھ جاتی ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ کروی قطرہ کے ساتھ جو بخاری دباؤ تعادل میں رہتا ہے وہ مستوی سطح کی بہ نسبت زیادہ ہوتا ہے۔

لارڈ کلون پہلا شخص ہے جس نے بخاری دباؤ پر سطح کے انحنا کے اثر کو حسب ذیل طریقہ سے ظاہر کیا[۱۰] :—

شکل ۳۸ میں ایک شعری نلی دکھائی گئی ہے یہ ایسے مائع میں رکھی ہوئی ہے جو شیشہ کو بھگوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس پورے انتظام کو ایک بند برتن میں رکھ دیا جاتا ہے اور یہ بھی فرض کرو کہ شعری نلی کا اندرونی نصف قطر ص ہے اور شعری نلی میں مائع کی سطح، آزاد مستوی سطح سے ل بلندی پر واقع ہے۔



شکل ۳۸

اگر مستوی سطح کے عین اوپر بخاری دباؤ د اور اس سے ل بلندی پر بخاری دباؤ دَ ہو تو

د = دَ + ج ث ل .... (۵۹)

جہاں ث = بخار کی کثافت

لیکن لاپلاس کی مساوات سے ہمکو یہ معلوم ہے کہ
شعری نلی میں کے مائع کی نصف کروی سطح کے دونوں جانب کا فرق دباؤ =

$$= \frac{\text{۲س}}{\text{ص}}$$

= ج (ثہ ـ ث) ل

جہاں ثہ = مائع کی کثافت۔

(یہ یاد رہے کہ ہم نے اس سے پہلے ث کو بمقابلہ ثہ نظر انداز کر دیا تھا)

یعنی ج ث ل = $\frac{\text{۲س}}{\text{ص}} \left(\frac{\text{ث}}{\text{ثہ ـ ث}} \right)$

∴ مساوات (۵۹) سے

دَ = د ـ $\frac{\text{۲س}}{\text{ص}} \left(\frac{\text{ث}}{\text{ثہ ـ ث}} \right)$ .... (۶۰)

لہذا مقعر سطح پر بخاری دباؤ مستوی سطح کے مقابلہ میں (ایک ہی تپش پر) بمقدار

$\frac{۲ س}{ص}\left(\frac{ث}{ثہ - ث}\right)$ کم ہوتا ہے۔ اس لئے مقعر سطح پر بستگی، بہ نسبت مستوی سطح کے زیادہ تیزی کے ساتھ واقع ہوتی ہے (یہ مانتے ہوئے کہ دونوں صورتوں میں تپش ایک ہی ہے) اگر مائع کی سطح محدب ہو جیسا کہ کسی شعری نلی کو پارہ میں ڈبونے کی صورت میں ہوتی ہے تو بھی اسی طریقے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ محدب سطح پر بخاری دباؤ دَ، مستوی سطح کے بخاری دباؤ سے بالکل اتنا ہی زیادہ ہوتا ہے جتنا کہ اوپر بتایا گیا ہے۔

لہذا عام مساوات :-

$$دَ = د \mp \frac{۲ س}{ص}\left(\frac{ث}{ثہ - ث}\right) \quad .... (۶۱)$$

(مقعر سطح کیلئے منفی علامت اور محدب سطح کیلئے مثبت علامت استعمال ہوتی ہے)

لہذا محدب سطح کی صورت میں بستگی بہ نسبت مستوی سطح کے آہستہ واقع ہوتی ہے (یعنی تبخیر زیادہ تیزی کے ساتھ واقع ہوتی ہے)

اب پانی کے ایک قطرہ پر غور کرو جسکا نصف قطر صفر درجہ مئی پر $۱۰^{-۴}$ سمر ہے۔
سیر شدہ بخار کی کثافت ث صفر درجہ مئی پر $= ۴ر۸ \times ۱۰^{-۶}$ گرام فی مکعب سمر
چونکہ س = ۷۰ ڈائین فی سمر صفر درجہ مئی پر اور ثہ = ۱

$\therefore \frac{۲ س}{ص}\left(\frac{ث}{ثہ - ث}\right) = ۳ر۷$ ڈائیں فی مربع سمر

لہذا بخاری دباؤ اس صورت میں، بہ نسبت مستوی سطح کے ۳ر۷ ڈائین فی مربع سمر زیادہ ہے۔

لیکن صفر درجہ مئی پر $د = ۶ \times ۱۰^{۳}$ ڈائین فی مربع سمر

لہذا $دَ = (۶ \times ۱۰^{۳} + ۳ر۷)$ ڈائین فی مربع سمر

$\therefore \frac{دَ}{د} = ۱۲۰۰ر۱$

اگر قطرہ کا نصف قطر $۱۰^{-۷}$ سمر (۱ ململ) صفر درجہ مئی پر ہو تو

اس صورت میں $\frac{۲ س}{ص}\left(\frac{ث}{ثہ - ث}\right) = ۳ر۷ \times ۱۰^{۳}$ ڈائین فی مربع سمر

اور $\frac{d'}{d}$ = ۲ر۲۲

اس سے ظاہر ہے کہ اگر قطرے بہت چھوٹے ہوں تو بخاری دباؤ پر انحنا کا اثر کافی بڑا ہوتا ہے۔ چونکہ ص جوں جوں کم ہوتا ہے، یہ اثر بڑھتا ہے اس لئے بالکل چھوٹے ناپ کے قطرے بہت تیزی کے ساتھ بخار میں متبدل ہو جائیں گے اگر ان کو ایسی فضا میں رکھا جائے جو بخار سے سیر شدہ ہو۔

بادلوں کی ساخت: — فرض کرو کہ آبی بخار کی بستگی سے جو ایک بے انتہا چھوٹے قطرۂ آب کی سطح پر واقع ہوتی ہے یہ بے انتہا چھوٹا قطرہ بڑھنے لگتا ہے۔ اس صورت میں یہ ایک ایسی فضا میں واقع ہوگا جس میں آبی بخار "زاید سیر شدہ" حالت میں ہے ورنہ بستگی کا مرکزہ ہونے کے بجائے بخار میں متبدل ہو جانے سے اسکا ناپ کم ہونے لگے گا۔

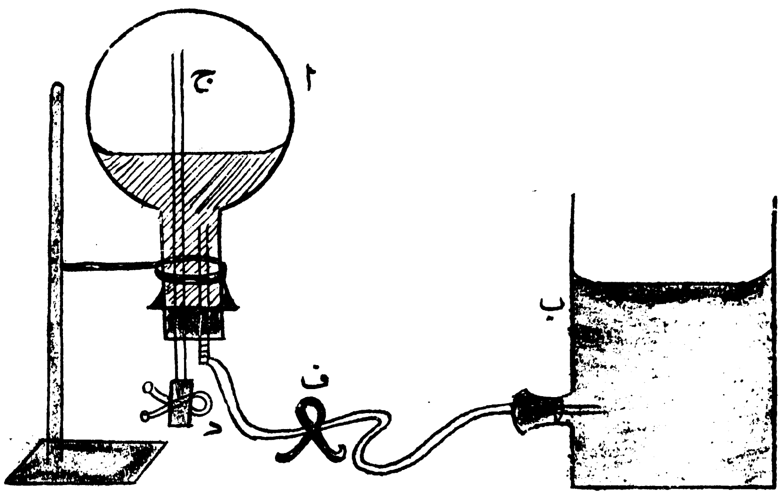
اس سے عموماً یہ ظاہر ہوتا ہے کہ بہت چھوٹے قطرے قائم نہیں رہ سکتے اور بہت جلد غائب ہو جاتے ہیں۔ لہذا بارش کے قطروں یا بادل کی ساخت کا بڑا دشوار مسئلہ معلوم ہوتا ہے جبکہ یہ قطرے ابتدائی حالت میں بہت چھوٹے ہیں۔

۱۸۸۰ء میں ایٹکن نے یہ ثابت کیا کہ معمولی حالات میں جبکہ پانی اور آبی بخار زائد سیر شدہ حالت میں موجود ہوں تو یہ قطرے نہیں بنتے۔ بارش اور کہر کے لئے گرد کے ذرات کی موجودگی لازمات سے ہے۔ گرد کے ذرات پر پانی جمع ہونے لگتا ہے اور اس طرح سے قطرہ کا ابتدائی نصف قطر مقابلتاً بڑا رہتا ہے اور وہ دشواری جاتی رہتی ہے جو قطرہ کے ابتدائی حالت میں درپیش تھی۔

کسی بڑے شہر میں جہاں کارخانے، دود کش اور گاڑیوں وغیرہ کی آمد و رفت کافی رہتی ہے دھوئیں اور گرد و غبار کے ذرات بیشمار تعداد میں ہوا میں موجود ہوتے ہیں جن پر آبی رطوبت جم سکتی ہے اور چنانچہ ان کی وجہ سے تاریک کہر واقع ہوتا ہے۔

بادل کے بننے میں گرد کے ذرات کے اثر کو حسب ذیل تجربہ سے ثابت کیا

جا سکتا ہے۔ شکل ۳۹ میں ایک لچکدار نلی ف کے ذریعہ ا اور ب دو برتن ایک دوسرے سے ملے ہوئے ہیں۔ ب میں پانی رکھا جاتا ہے اور اس کو جب اوپر اُٹھایا جاتا ہے تو ا کا کچھ حصہ پانی سے بھر جاتا ہے، جب ب کو

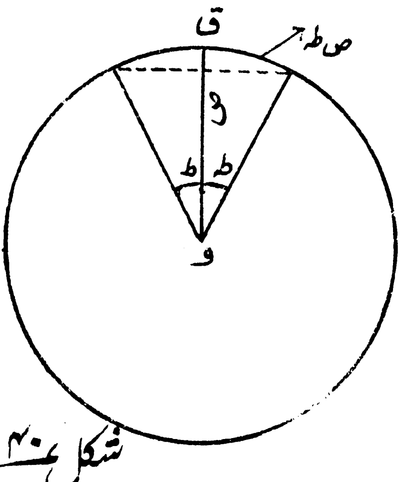


شکل ۳۹

نیچے اُتارا جاتا ہے تو پانی ا کے باہر نکل جاتا ہے اور ا میں ہوا کا حجم بڑھ جاتا ہے اس طرح ہوا کے پھیلنے کی وجہ تبرید کا عمل شروع ہوتا ہے، حتیٰ کہ ا میں آبی بخار زائد سیر شدہ ہونے لگتا ہے۔ اگر ا میں گرد آلود ہوا بھر دی جائے تو ب کو نیچے کرنے سے ا میں دھندلا سا بادل بننے لگتا ہے۔ یہ بادل ا کے پانی میں گرد کے چند ذرات اپنے ساتھ لیکر گر جاتا ہے۔ اسی عمل کو دوبارہ دُھرانے سے پانی میں گرد کی زیادہ مقدار گر جاتی ہے اور ا کی ہوا میں پہلے کی نسبت گرد کے کم ذرات موجود رہتے ہیں۔ اسی طرح متعدد دفعہ تجربہ کو دوھرانے سے ا میں کی ہوا بالکل گرد سے پاک ہو جاتی ہے اور اس نوبت پر پھر کوئی بادل ا میں ہوا

کے پھیلاؤ سے نمودار نہیں ہوتا۔ اگر اس وقت د کے ذریعہ ذرا سی گرد ا
میں داخل کر دی جائے تو تبرید سے فوراً بادل بننے لگتا ہے۔ اس سے
ظاہر ہے کہ بادل کے نمودار ہونے کے لئے گرد کے ذرات کا موجود ہونا لازمی ہے۔
۱۸۹۷ء میں ولسن نے یہ ثابت کیا کہ گرد کے ذرات کے بغیر بھی گیسوں
کے رواں کو مرکزے قرار دیکر، بادل نمودار ہو سکتے ہیں بشرطیکہ بخار ایک
خاص قیمت سے زیادہ "زاید سیر شدہ" ہو۔

برقایا ہوا صابون کا بلبلا :۔ صابون کے ایک ایسے بند بلبلے پر غور
کرو جس کا نصف قطر ص ہے۔ اگر کرہ ہوائی کا دباؤ د ہو تو بلبلے کے
اندر دباؤ د سے کسی قدر زیادہ ہوگا چنانچہ بیرونی حاصل قوت، بلبلے کے
سطحی تناؤ سے توازن میں رہے گی۔ اگر اس بلبلے کو برقایا جائے تو ایک
مزید قوت بلبلے کی سطح پر باہر کی جانب عموداً عمل کرنے لگتی ہے جس
کی وجہ سے بلبلا اتنا پھیلتا ہے کہ توازن قائم ہو جائے۔ چونکہ نصف قطر
میں تبدیلی واقع ہوتی ہے
اس وجہ سے اس کا اندرونی
دباؤ، حجم کے لحاظ سے معکوس
بدلتا ہے۔ کلیہ بائیل کی رو
سے دباؤ $\frac{م}{ص^۳}$ کے مساوی
ہوگا جہاں م = مستقل۔
بلبلے کی سطح پر ایک ایسے
بالکل چھوٹے عنصر کے
تعادل پر غور کرو جو ایک مدوّر
مخروط کے ذریعہ، نیم انتصابی
زاویہ طہ مرکز سے بناتے ہوئے، قطع کیا گیا ہو [دیکھو شکل ۴۰]



شکل ۴۰

اس پر حسب ذیل قوتیں عمل کرتی ہیں :-

(۱) کرہ ہوائی کے دباؤ کی وجہ سے جو قوت اندر کی جانب عمود وار عمل کرتی ہے $= د\,\pi\,ص^{۲}\,ط^{۲}$

(۲) سطحی تناؤ کی وجہ سے جو قوت بلبلے کی سطح پر عمل کرتی ہے۔ اس قوت کے اجزا کو ایک مماسی مستوی میں اور دوسرا و ق کی سمت میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔ مماسی مستوی کے اجزائے تحلیلی ایک دوسرے کو زائل کر دیتے ہیں لیکن و ق کی سمت میں عمل کرنے والے اجزا جو اندر کی جانب عمل کرتے ہیں

$= ۲\,\pi\,ص\,ط\,س\,جب\,ط$

$\approx ۲\,\pi\,ص\,ط^{۲}\,س$ کیونکہ ط چھوٹا ہے۔

(۳) اندرونی دباؤ کی وجہ سے جو قوت باہر کی جانب عمودوار عمل کرتی ہے

$= \frac{م}{ص^{۳}}\,\pi\,ص^{۲}\,ط^{۲}$

(۴) برقانے کی وجہ سے جیسی قوت جو باہر کی طرف عمودوار عمل کرتی ہے =

$= ۲\,\pi\,ثہ^{۲}\cdot\pi\,ص^{۲}\,ط^{۲}$

جہاں ثہ = برقی بھرن فی اکائی رقبہ

تعادل کے لئے ایسی تمام قوتیں جو عمود وار اندر کی جانب عمل کرتی ہیں، اُن تمام قوتوں کے مساوی ہونی چاہئیں جو باہر کی جانب عمودوار عمل کرتی ہیں۔

$\therefore د\,\pi\,ص^{۲}\,ط^{۲} + ۲\,\pi\,ص\,ط^{۲}\,س =$

$= \frac{م}{ص^{۳}}\cdot\pi\,ص^{۲}\,ط^{۲} + ۲\,\pi\,ثہ^{۲}\,\pi\,ص^{۲}\,ط^{۲}$

یعنے $د + \frac{۲س}{ص} = \frac{م}{ص^{۳}} + ۲\,\pi\,ثہ^{۲}$ ....(۶۲)

فرض کرو کہ بلبلے کا نصف قطر برقانے کے قبل $= ص_{۱}$

اور بوجہ بھرن سے برقائے جانے کے بعد بلبلے کا نصف قطر $= ص_{۲}$

پہلی صورت میں $د + \frac{۲س}{ص_{۱}} = \frac{م}{ص_{۱}^{۳}}$ ....(۶۳)

دوسری صورت میں چونکہ ثہ $= \dfrac{\text{بھ}}{\text{۴}\,\pi\,\text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۲}}}$ اور یہ فرض کرتے ہوئے کہ سطحی تناؤ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی :-

$$\text{د} + \frac{\text{۲س}}{\text{ص}_{\text{۲}}} = \frac{\text{م}}{\text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۳}}} + \frac{\text{بھ}^{\text{۲}}}{\text{۸}\,\pi\,\text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۴}}} \quad \text{......... (۶۴)}$$

ان دونوں مساواتوں سے س کو ساقط کرنے سے :-

$$\text{د}(\text{ص}_{\text{۲}} - \text{ص}_{\text{۱}}) - \text{م}\left(\frac{\text{۱}}{\text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۲}}} - \frac{\text{۱}}{\text{ص}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}\right) = \frac{\text{بھ}^{\text{۲}}}{\text{۸}\,\pi\,\text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۳}}}$$

اگر بلبلے کو ایسی نلی پر پھونک کر بنایا جائے جو ہوا کے لئے کھلی ہوئی ہو تو مساوات (۶۲) کو یوں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \pi\,\text{ثہ}^{\text{۲}}$$

اگر ہم بلبلے کو یکساں طور پر برقایا ہوا کرہ فرض کریں تو اس کا قوہ قو = $= \text{۴}\,\pi\,\text{ص ثہ}$

ایسی صورت میں $\text{س} = \dfrac{\text{قو}^{\text{۲}}}{\text{۱۶}\,\pi\,\text{ص}}$

مثال :- کسی صابون کے بلبلے کا نصف قطر اور سطحی تناؤ علی الترتیب ص اور س ہو تو ثابت کرو اس کے نصف قطر کو دوگنا کرنے کے لئے جو برقی بھرن درکار ہوگی وہ $= \text{۴}\left\{\pi\,\text{ص}^{\text{۳}}(\text{۶س} + \text{۷ د ص})\right\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$

جہاں د کرہ ہوائی کا دباؤ ہے۔

پہلی صورت میں مساوات (۶۳) سے چونکہ $\text{ص}_{\text{۱}} = \text{ص}$

$$\therefore\ \text{م} = \text{د ص}^{\text{۳}} + \text{۲س ص}^{\text{۲}}$$

دوسری صورت میں مساوات (۶۴) سے چونکہ $\text{ص}_{\text{۲}} = \text{۲ص}$

$$\therefore\ \text{د} + \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{م}}{\text{۸ ص}^{\text{۳}}} + \frac{\text{بھ}^{\text{۲}}}{\text{۱۲۸}\,\pi\,\text{ص}^{\text{۴}}}$$

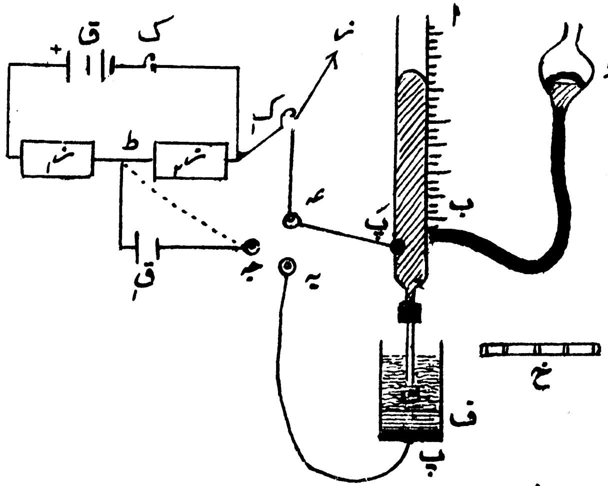
یعنی $\text{د} + \dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{د}}{\text{۸}} + \dfrac{\text{س}}{\text{۴ ص}} + \dfrac{\text{بھ}^{\text{۲}}}{\text{۱۲۸}\,\pi\,\text{ص}^{\text{۴}}}$

یعنی $\text{بھ}^{2} = 16\,\pi\,\text{ص}^{3}\,(\text{۷ د ص} + \text{۶ س})$

$\therefore\ \text{بھ} = 4\left\{\pi\,\text{ص}^{3}\,(\text{۶ س} + \text{۷ د ص})\right\}^{\frac{1}{2}}$

شعری برق پیما :—

مائعات کے سطحی تناؤ پر جو برقی اثرات مرتب ہوتے ہیں ان کو مدنظر رکھ کر شعری برق پیما بنایا گیا ہے۔ شکل ۱۴۱ میں ا ب ایک لمبی



شکل ۱۴۱

شیشہ کی نلی ہے جس کے ایک سرے پر پتلی شعری نلی ت ربر کی نلی کے ذریعہ جوڑ دی گئی ہے۔ ا ب کے عقب میں لکڑی کا ایک پیمانہ نصب کیا گیا ہے۔ د پارہ سے بھرا ہوا برتن ہے جو ب پر ربر کی نلی سے جوڑ دیا گیا ہے۔ د کو اونچا نیچا کرنے سے شعری نلی پر کے دباؤ کو کم و بیش کیا جا سکتا ہے۔ شعری نلی میں پارہ کی سطح ' ا ب میں پارہ کی بلندی پر منحصر ہوتی ہے۔ ایک پلاٹینم کا تار پ' نلی ف کے پیندے میں پگھلا کر جوڑ دیا جاتا ہے اور اس میں (یعنی ف میں) شعری نلی کا کچھ حصہ نکل آتا ہے۔ ف کے پیندے میں

کچھ پارہ ڈال دیا جاتا ہے اور اس پیرافن کے اوپر کے سرے تک سلفورک ترشہ اور پانی کا ہلکا یا ہوا محلول، جس کو "مرکیورس سلفیٹ" سے سیر شدہ بنا کر بھرا جاتا ہے۔ لمبی نلی ا ب میں پلاٹینم کا ایک دوسرا تار پ گھلا کر جوڑ دیا جاتا ہے۔ شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح کو خوردبین خ سے دیکھا جاتا ہے۔

ن۱ اور ن۲ دو مزاحمتوں کے بکس ہیں اور عہ، بہ، جہ پیرافن موم کے کندے میں سوراخ ہیں جن میں پارہ بھر دیا جاتا ہے ق ایک ذخیرہ خانہ ہے، ک اور ک دو کنجیاں ہیں اور ن کا زمین کے ساتھ تعلق کر دیا جاتا ہے۔

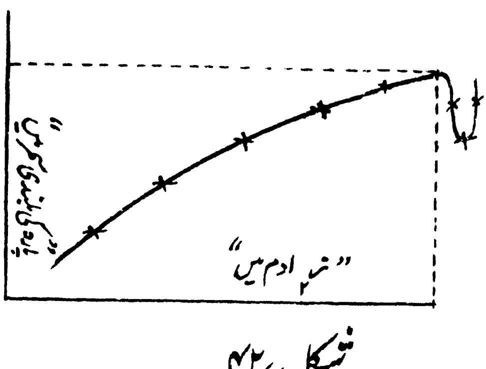
شکل ۱۸۱ کے مطابق اس میں دکھائے ہوئے ضروری چیزوں کو جوڑ دینے کے بعد، ا ب میں دباؤ کو اس طرح بڑھاؤ کہ پارہ شعری نلی میں سے باہر نکلنے لگے اور پھر دباؤ کو اتنا کم کردو کہ نلی ا ب میں پارہ کسی موزوں مقام پر ٹھہر جائے۔ اس طرح کرنے سے برق پیما کی حساسیت بڑھ جاتی ہے۔ شعری نلی میں پارہ کا سطحی تناؤ، عہ اور بہ کے درمیانی فرق قوہ کا کوئی تفاعل ہے۔ تجربہ میں، عہ اور بہ کو ملاؤ، اس طرح کہ پ اور پَ کے درمیان فرق قوہ صفر ہو جائے اس حالت میں د کو اس طرح ترتیب دو کہ شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح، خوردبین کے چشمہ کے پیمانہ پر کسی موزوں مقام پر ٹھہر جائے۔ ن۱ اور ن۲ مزاحمتوں کو اب اس طرح ترتیب دو کہ ان کا مجموعہ ہمیشہ دس ہزار اوم کے مساوی ہو۔

ق خانہ کو علیحدہ کر دو اور ط اور جہ کو ملاؤ (جس طرح کہ نقطہ دار خط سے شکل میں دکھایا گیا ہے) ک اور ک کنجیوں کو دباؤ۔ جب بہ، جہ کے ساتھ جوڑ دیا جائے تو شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح کی حرکت، خوردبین میں نظر آئے گی، اب د کو اتنا اونچا کرو کہ پارہ کی ہلالی سطح پھر خوردبین کے پیمانہ میں اسی نشان پر آجائے جس پر وہ پہلے تھی۔ ا ب میں پارہ کی سطح کے نشانات پیمانہ پر پڑھ لو۔ اس طرح ن۱ اور ن۲ مزاحمتوں کو بدل

بدلکر، لیکن ہر صورت میں ان دونوں کی حاصل جمع مزاحمت دس ہزار اوم کے مساوی ہونی ضروری ہے) ا ب میں پارہ کی اوپر کی سطح جن درجوں کے مقابل رہے ان کے مشاہدات اس وقت حاصل کرلو جبکہ خوردبین والے چشمے کے پیمانہ پر، پارہ کی ہلالی سطح، اپنے ابتدائی نشان پر آجائے۔

نر$_2$ کی مزاحمتوں کو، ا ب میں متناظر درجوں کی قیمتوں کے مقابلہ میں مرتسم کرو۔ شکل ۴۲ کے مطابق ایک منحنی حاصل ہوگی۔

اگر ق ذخیرہ خانہ کا ق۔م۔ب، نر$_1$ بکس نر$_2$ کی مزاحمت اور برق پیما کے سروں کے درمیان فرق تو وہ ق$_2$ ہو تو ق$_2$ = $\frac{\text{ق نر}_2}{10000}$



شکل ۴۲

ترسیم سے نر$_2$ کی وہ قیمت حاصل کرو جو ا ب میں پارہ کی اعظم بلندی کے متناظر ہوتی ہے۔ پھر نر$_2$ کی اس قیمت سے ق$_2$ کی قیمت دریافت کرو۔

دو خانوں کے برقی محرکوں کے مقابلہ میں، روپیما کے بجائے یہ برق پیما استعمال کیا جاسکتا ہے اس غرض کے لئے ک$_1$ کنجی کو کھول دو اور ط اور جہ کے درمیان ایک خانہ ق$_1$ (جس کے ق۔م۔ب کا مقابلہ معیاری خانہ کے ساتھ کرنا ہو) جوڑ دو۔ نر$_2$ کی مزاحمت کو اب اس طرح ترتیب دو کہ شعری نلی والے پارے کی ہلالی سطح میں، بہ کو جہ یا عہ کے ساتھ جوڑنے سے، کوئی حرکت نہ ہونے پائے۔ فرض کرو کہ بکس نر$_2$ کی مزاحمت، تعادل کی صورت میں نر$_2$ ہے۔ اس کے بعد بجائے ق کے معیاری خانہ کو، ق$_1$ کی جگہ جوڑ دو۔ تعادل کے لئے پھر تجربہ کو اس طرح دہراؤ کہ نر$_1$ اور نر$_2$ کا مجموعہ

ہر حالت میں دس ہزار ادم کے مساوی رہے۔

اگر ثہ۲، یکس ثہ۲ کی مزاحمت اس صورت میں ہو تو

$$\frac{ق_1}{ق_1} = \frac{ثہ_2}{ثہ_3}$$

اس ترتیب کو ویلے کے قوہ پیما سے موسوم کیا جاتا ہے۔

لاپلاس والا سطحی تناؤ کا سالمی نظریہ (٢٢) :۔

کسی شئے کے بین السالماتی فاصلے جب ایک خاص حد سے (جو بہت چھوٹی ہوتی ہے) بڑھ جاتے ہیں تو کسی دو سالمات کے درمیان قوت جاذبہ بالکل کم ہو جاتی ہے۔

ہر سالمہ کے گرد اگر ہم کرے اس طرح کھینچیں کہ ان کا نصف قطر ایسے اعظم ممکن فاصلہ کے مساوی ہو جہاں سے دوسرے سالمہ پر قابل لحاظ قوت جاذبہ عمل کر سکے تو ایسے کروں کو "سالمی کشش کے کروں" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

گیس کی حالت کے برخلاف، مائع کی حالت میں کسی شے کے سالمات ایک دوسرے کے بالکل قریب رہتے ہیں۔ یعنی اس صورت میں سالمی کشش کا کرہ سالمات کی ایک کثیر تعداد کو اپنے گرفت میں رکھتا ہے جن میں سے ہر ایک پر ایک خاص کششی قوت عمل کرتی ہے۔ نیوٹن کے تیسرے کلیہ قوت کی رو سے عمل اور رد عمل ہمیشہ مساوی اور متضاد ہوتے ہیں۔ لہذا مائع کے اندر ہر سالمہ کو اس کے قریب کے دیگر سالمات مساوی قوت سے مختلف سمتوں میں جذب کرتے رہتے ہیں جس سے سالمہ اپنے ابتدائی مقام پر قائم رہتا ہے۔

ایک ایسے سالمہ پر اگر غور کیا جائے جو مائع کی آزاد سطح سے قریب ہوتا ہے تو ظاہر ہے کہ یہ بالکل مختلف حالات کے تحت رہتا ہے۔

سالمات گیس کی یا بخار کی حالت میں جو مائع کی سطح کے اوپر رہتے ہیں چونکہ ان کے درمیانی فاصلے بہت زیادہ ہوتے ہیں اس لئے مائع کی سطح پر کے سالمات

والے سالمی کشش کے کروں کے اثر سے باہر ہوتے ہیں جس سے سطح پر کا کوئی سالمہ صرف اپنے گرد کے سطحی سالمات اور دیگر ایسے سالمات کی کشش سے جو سطح کے نیچے اس کے قریب میں واقع ہوتے ہیں متاثر ہوتا ہے۔ لہٰذا جب کوئی سالمہ مائع کے اندر سے سطح تک پہنچتا ہے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ اسنے حاصل کشش کو' جو مائع کے اندر اس کو واپس کھینچ لیجانے کا تقاضا کرتی ہے' مغلوب کر لیا' اور ظاہر ہے کہ اس طرح مائع کے اندر سے سطح تک پہنچنے میں سالمہ کو کام کرنا ہوگا جو اس کی توانائی بالفعل کے خرچ سے کیا جاتا ہے۔ لیکن مائع کی تپش کا انحصار اس کے سالمات کی توانائی بالفعل پر ہوتا ہے' اور چونکہ مائع کی سطح کی تپش بھی وہی ہوتی ہے جو اس کے اندرونی حصص کی ہے لہذا ایک سالمہ جو سطح تک پہنچا ہو توانائی بالفعل میں اضافہ کے ساتھ مائع کی سطحی تپش میں بھی' بیرونی مبدا سے حرارت حاصل کر کے اضافہ کرتا ہے۔

جب کسی مائع کی سطح پھیلتی ہے تو اسکا رقبہ بڑھتا ہے جس کی وجہ سے سالمات کی ایک بڑی تعداد جو پہلے مائع کے اندر تھی اب مائع کی سطح پر آجاتی ہے۔ ان سالمات کی توانائی بالفعل وہی ہونے کے لیے جو مائع کے اندرونی سالمات کی ہے' بیرونی ذرائع سے حرارت کا داخل ہونا ضروری ہے تاکہ تعادل قائم رہے۔ اس طرح جب حرنا گزار حالات کے تحت کسی مائع کی سطح پھیلتی ہے تو ہمیشہ تبرید کے اثرات ظاہر ہوتے ہیں۔ سالمات جو مائع کی سطح پر ایک دوسرے کے بالکل قریب واقع ہوتے ہیں آپس میں ایک خاص قوت سے چمٹ جاتے ہیں۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ مائع کی سطح کھنچی ہوئی لچک دار جھلی کی طرح عمل کرتی ہے جس سے سطحی تناؤ کے وجود کا پتہ چلتا ہے۔

جب کوئی سالمہ مائع کی سطح سے باہر فضا میں نکل جاتا ہے تو مائع کے اندر ہی سے اس کی رفتار اتنی تیز ہوتی ہے کہ سطحی سالمات کی کشش اس کو روک کر قابو میں نہیں رکھ سکتی۔ لہذا جب کسی مائع میں تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو صرف

زیادہ تیز حرکت والے سالمات مائع سے باہر کی فضا میں نکل جاتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اسکا اثر ہمیشہ تبرید ہوتا ہے جو مائع کے تبخیر کا نتیجہ ہے کیونکہ تبخیر کے عمل کو جاری رہنے کے لئے یہ ضروری ہے کہ سالمات بیرونی ذرائع سے حرارت حاصل کرتے ہیں کسی مائع کے ایک گرام کو بخار میں تبدیل کرنے کے لئے اسکی مخفی حرارت کے مساوی مقدار حرارت اس میں داخل کرنی ہوتی ہے۔ حرارت کی یہ مقدار اس کام کے مساوی ہوتی ہے جو ایک گرام مائع کے سالمات کو اس کی اندرونی سطح سے، آزاد سطح تک اور پھر آزاد سطح سے سطحی سالمات کے کشش اثر کے باہر فضا میں، پہنچانے کے لئے درکار ہوتا ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ سطحی تناؤ اور مائع کے بخار کی حرارت مخفی میں ضرور کوئی خاص تعلق ہے۔ تبخیر کی تپش جب بڑھتی ہے تو کسی مائع کے بخار کی حرارت مخفی گھٹنے لگتی ہے، اس لئے تپش کے اضافہ سے سطحی تناؤ کی قیمت کو بھی گھٹنا چاہیئے۔

اوپر بیان کیا گیا ہے کہ تیل کی ایک پتلی جھلی اگر پانی پر موجود ہو، تو پانی کا سطحی تناؤ کم ہو جاتا ہے، اس کی وجہ غالباً یہ ہے کہ پانی اور تیل کے سالمات میں قوت کشش بالکل کم ہوتی ہے اس لئے سطح پر پانی کے سالمات کی درمیانی فضا میں جب تیل کے سالمات گھس جاتے ہیں تو پانی کے سالمات کے لئے یہ امر بہت دشوار ہو جاتا ہے کہ اس پہلی بڑی قوت سے آپس میں اسطرح چمٹ جائیں جیسا کہ تیل کی عدم موجودگی میں وہ چمٹ جایا کرتے تھے۔ اسوجہ سے پانی کے سطحی تناؤ میں کمی واقع ہوتی ہے۔

اب ہم یہاں ایک ایسے نظریہ کو عام فہم شکل میں بیان کرنا چاہتے ہیں جو لاپلاس اور اس کے ساتھیوں نے پہلے پہل دنیا کے سامنے پیش کیا:۔

بخار کی حرارت مخفی:۔ فرض کرو کہ ک قیمت کا ایک سالمہ کسی مائع کی سطح سے چلکر، اوسکے اوپر کی خالی فضا میں ایک ایسے فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے جو سالمی کشش کرے کے نصف قطر سے زیادہ ہے۔ ظاہر ہے کہ سالمہ پر کام صرف اس وقت کیا

جائے گا جب کہ وہ سطح سے، سالمی کشش کے نصف قطر کے فاصلے کی حد سے باہر ہوگا۔ سالمی کشش کی قوتوں کے کلیہ کو فرض کرنے کے بغیر یہ تصور کرو کہ سالمی کشش کے نصف قطر ص کو عین سطح مائع کے اوپر ہم طول کے ن چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح ہر چھوٹے ٹکڑے یا عنصر کا طول $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$ کے مساوی ہوگا۔ فرض کرو کہ سالمہ پر قوت جبکہ وہ ان عناصر کے پہلے عنصر میں گزرتا ہے ک ثہ ق$_1$ کے مساوی اور، جبکہ وہ دوسرے عنصر میں سے گزرتا ہے ک ثہ ق$_2$ کے مساوی ہے۔ علیٰ ہٰذا القیاس آخری عنصر میں جب سالمہ گزرتا ہے تو قوت ک ثہ ق$_{\text{ن}}$ ہوگی جہاں ثہ = مائع کی کثافت اور ق$_1$، ق$_2$، ق$_3$ ...... وغیرہ سطح سے فاصلوں پر منحصر ہوں گے اور ان کی قیمتیں بتدریج گھٹتی جائیں گی۔

پہلے عنصر کو طے کرنے میں کام جو کیا گیا = ک ثہ ق$_1$. $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$

دوسرے " " " = ک ثہ ق$_2$ $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$

اسی طرح مجموعی کام جو سالمہ پر ن عنصروں میں گزرنے، یعنی فاصلہ ص طے کرنے میں کیا گیا

$$= \frac{\text{ص}}{\text{ن}}\left\{\text{ک ثہ ق}_1 + \text{ک ثہ ق}_2 + \text{ک ثہ ق}_3 + \ldots\ldots + \text{ک ثہ ق}_{\text{ن}}\right\}$$

$$= \text{ک ثہ ص}\left\{\frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + \ldots\ldots\ \text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ن}}\right\}$$

$$= \text{ک ثہ ص ق} \quad \text{جہاں ق} = \frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + \ldots\ldots + \text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ن}}$$

"لیکن کسی سالمہ کو مائع کے اندر سے مستوی سطح تک لانے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ اُس کام کے مساوی ہوتا جو سالمہ کو مائع کی سطح سے، مائع کی اوپر کی فضا میں ایسے فاصلے تک لیجانے میں کرنا ہوتا ہے جو سالمہ کے کششی قوت کی حد سے باہر ہو"

لہذا ایک سالمہ کو مائع کے اندر سے مستوی سطح تک لانے اور پھر یہاں سے

سطح کی اوپر کی فضا میں، سالمی کشش قوت کی حد سے باہر لے جانے میں جو کام کیا جائے گا وہ = ۲ک ثہ ص ق

فرض کرو کہ مائع کے اکائی حجم میں سالمات کی تعداد = ع

تب اکائی حجم مائع کی کمیت = ک ع = ثہ

لہذا ع سالمات کو مائع کی سطح سے اوپر کی فضا میں لے جانے کے لئے کام

= ع ک ثہ ص ق = ثہ^۲ ص ق = گ^ع (فرض کرو)

اکائی حجم کے مائع کی تبخیر کی صورت میں، اکائی حجم میں جو سالمات موجود ہوتے ہیں، وہ سطح کے اندر سے، کششی کرے کی حد کے باہر تک، فاصلہ طے کرتے ہیں اور چونکہ اکائی حجم کے سالمات کی کمیت = ثہ لہذا کام جو اس صورت میں کیا جائے گا

= ۲ ثہ^۲ ص ق = ۲ گ^ع

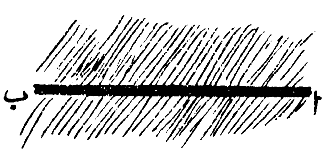
اگر مائع کی فی اکائی کمیت حرارت مخفی مخ ہو تو

ثہ مخ جو = ۲ گ^ع .... (۶۵)

جہاں جو = حرارت کی اکائی مقدار کا معادل حیلی۔

کسی مائع کی تمدیدی طاقت :۔

فرض کرو کہ ا ب (شکل ۴۳) کسی مائع کی سطح کے اندر کھینچے ہوئے ایک فرضی مستوی کی تراش کو تعبیر کرتا ہے۔



شکل ۴۳

مائع کی تمدیدی طاقت سے ا ب کے فی مربع سمر پر عمل کرنے والی وہ قوت مراد ہے (مثلاً ثہ ڈائین فی مربع سمر) جو ا ب کے اوپر کے مائع کو نیچے کے مائع سے علیحدہ کرنے کے لئے درکار ہوگی۔

ا ب کے نیچے کا مائع ان تمام سالمات کو جذب کریگا جو ا ب کے اوپر فاصلہ ص کے اندر واقع ہوں۔

چونکہ ۱ب کے فی مربع سمر پر مجموعی قوت تہ عمل کرتی ہے لہذا ۱ب کے اوپر اگر مائع میں ایک چھوٹا سا فاصلہ فہ ہٹاؤ واقع ہو تو فی اکائی رقبہ جو کام کیا جائے گا تہ فہ ہوگا' یہ کام اس قوت کشش کو مغلوب کرنے کے کام کے مساوی ہوگا جس قوت سے ۱ب کے نیچے کا مائع' ۱ب کے اُن اوپر کے سالمات پر عمل کرتا ہے (جو کہ ص موٹائی اور اکائی رقبہ والے مائع کی ایک پرت میں واقع ہوتے ہیں) فرض کرو کہ ص موٹائی کی اس پرت کو ہم سالمات کے ن پرتوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک پرت میں فی اکائی رقبہ ع سالمات ہیں۔

اس صورت میں ص موٹائی اور اکائی رقبہ والی پوری پرت کی کمیت' ن ع ک کے مساوی ہوگی جہاں ک ایک سالمہ کی کمیت ہے۔

$$\text{لہذا کمیت فی اکائی حجم} = \frac{\text{ن ع ک}}{\text{ص}} = \text{ثہ} = \text{مائع کی کثافت}$$

$$\therefore \text{ن ع ک} = \text{ثہ ص}$$

فرض کرو کہ ۱ب کے نیچے کا مائع جس قوت سے' ۱ب کی اوپر والی پہلی پرت کے ہر سالمہ پر عمل کرتا ہے وہ ک ثہ ق_1 کے مساوی ہے اور دوسرے' تیسرے .... ن ویں پرت تک قوتیں بالترتیب ک ثہ ق_2' ک ثہ ق_3 .... ک ثہ $\text{ق}_\text{ن}$ کے مساوی ہیں۔ جب ۱ب کے اوپر اور عین نیچے کے مائع کے درمیان چھوٹا سا نقل مکان فہ واقع ہو تو سالمات کی ہر پرت میں بھی یکساں فاصلہ فہ کا نقل مکان اس قوت کے مقابلہ میں واقع ہوگا جو ۱ب کی طرف اُن کو کھینچتی ہو۔

مائع جس قوت سے پہلی پرت کے تمام سالمات کو جذب کرتا ہے وہ ک ع ثہ ق_1 کے مساوی ہے۔ لہذا فہ نقل مکان کی وجہ سے جو کام ہوا = ک ع ثہ ق_1 فہ

اسی طرح دوسری پرت کے لئے کام = ک ع ثہ ق_2 فہ

لہذا مجموعی کام جو تمام پرتوں کی کشش کو مغلوب کرنے میں کیا گیا

= ک ع ثہ ق$_1$ فہ + ک ع ثہ ق$_2$ فہ + ... + ک ع ثہ ق$_ن$ فہ

= ک ن ع ثہ فہ $\left\{ \frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + \cdots + \text{ق}_\text{ن}}{\text{ن}} \right\}$

= ثہ^2 ص فہ ق = گ' فہ = ثہ فہ

∴ گ' = ثہ .... (٦٦)

لہذا مساوات (٦٥) اور (٦٦) سے مخ اور ثہ کے درمیان ہمیں ایک راست تعلق حاصل ہو جاتا ہے۔ لیکن اس نظریہ میں مائع کے سالمات کی حرکت کا کوئی لحاظ نہیں رکھا گیا، اس کی وجہ یہ ہے کہ لاپلاس کا یہ نظریہ اس وقت پیش کیا گیا تھا جبکہ گیسوں اور مائعات کے نظریہ تحرک کی بنیاد قائم نہیں ہوئی تھی۔

ہمیں اب اس بات کا علم ہے کہ جیسے تپش بڑھتی ہے، سالمات کی رفتار بھی بڑھنے لگتی ہے لہذا گ' کی قیمت کم ہونے لگتی ہے۔ یعنی اس کا مطلب یہ ہے کہ مائع کی تمدیدی طاقت کم ہونے لگتی ہے۔

اب فانڈر وال کی مساوات پر غور کرو جس سے کسی گیس یا مائع کے دباؤ د اور حجم ح کے درمیان تعلق ظاہر ہوتا ہے:-

$\left(\text{د} + \frac{\text{ا}}{\text{ح}^2}\right)(\text{ح} - \text{ب}) = \text{لا ت}$ .... (٦٧)

جہاں ا، ب اور لا مستقل ہیں اور ت مطلق درجوں میں تپش ہے۔

حرارت کی کتابوں سے یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات میں $\frac{\text{ا}}{\text{ح}^2}$ اس قوت کشش کو تعبیر کرتا ہے جو ایک مربع سمر رقبہ کے مستوی پر مقابل کے رُخ کے سالمات لگاتے ہیں۔ پس جب کوئی شے مائع کی حالت میں ہوتی ہے تو $\frac{\text{ا}}{\text{ح}^2}$ کی قیمت وہی ہوتی ہے جو گ' کی ہے۔

اگر اوپر کی مساوات کسی شے کے ایک گرام پر صادق آتی ہے تو $\frac{1}{\text{ح}}$ اس شے کی کثافت ثہ ہو جاتی ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ گ'، $\frac{\text{ا}}{\text{ح}^2}$ کے

یا η^2 کے متناسب ہے۔

پانی کے لئے تجربہ سے، گ کی قیمت بھی $\frac{1}{\text{ح}^2}$ کے رتبہ کی حاصل ہوئی ہے۔ اس سے لاپلاس کے نظریہ کی تصدیق عجیب طرح سے ہوتی ہے۔

سطحی تناؤ :۔ شکل ۴۳ میں مستوی ا ب کے اوپر کے مائع کو، ا ب کے نیچے کے مائع سے اس طرح علیحدہ کریں کہ درمیانی فاصلہ ص سے زیادہ ہو جائے تو مائع کی دو نئی سطحیں حاصل ہوں گی۔ چونکہ کسی مائع کا سطحی تناؤ اس کام کے مساوی ہے جو مائع کی سطح میں اکائی رقبہ کا اضافہ کرنے کے لئے درکار ہوتا ہے لہذا ا ب کے ہر اکائی رقبہ کے لئے کام جو کرنا ہوگا وہ زیر بحث دو سطحوں کی وجہ سے مائع کے سطحی تناؤ کا دوگنا ہوگا۔

ہم یہاں یہ فرض کر لیتے ہیں کہ قوت کشش اس وقت تک مستقل رہتی ہے جب تک کہ سالمہ، سطح ا ب سے فاصلہ ص طے نہیں کرتا اور اس کے بعد وہ بالکل صفر ہو جاتی ہے۔

یہ اگرچہ کہ غیر تشفی بخش مفروضہ ہے لیکن اس سے ہمیں بہت سے قیمتی معلومات حاصل ہوں گے۔

جب ا ب کے اوپر کا مائع، اس مستوی کے علی القوائم ہٹایا جاتا ہے تو سالمات کے پرت یکے بعد دیگرے ا ب کے نیچے کے مائع کی سالمی کششی قوت کے حد سے باہر گزرتے ہیں، حتیٰ کہ تمام پرتیں اس حد کے باہر ہو جاتے ہیں جبکہ نقل مکان ص ہوتا ہے۔ لہذا، ص نقل مکان کے دوران میں، ا ب کے نیچے کے مائع سے، سالمات کے جن پرتوں پر قوت کشش عمل کرتی ہے، ان پرتوں کی اوسط تعداد $\frac{\text{ن}}{2}$ ہوگی۔

جہاں ن سالمات کے پرتوں کی وہ مجموعی تعداد ہے جس میں ص پہلے کی طرح تقسیم کیا جاتا ہے لہذا مساوات (۶۶) کے حاصل کرنے میں جو طریق عمل اختیار کیا گیا تھا اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کام جو کیا جاتا ہے وہ

$\left(\frac{\text{گ ع}}{۲} \times \text{ص}\right)$ کے مساوی ہے۔
لیکن یہ کام جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے مائع کے سطحی تناؤ کا دوگنا ہوتا ہے۔

$$\therefore ۲\text{س} = \frac{\text{گ ع ص}}{۲}$$

یعنی $\text{س} = \frac{\text{گ ع ص}}{۴}$ .... (۶۸)

اس مساوات سے ص کی کم از کم ممکن قیمت حاصل ہوتی ہے جو سالمی کشش کا نصف قطر ہے۔ پانی کے لئے صفر درجہ مئی پر س = $۷۶ \ \frac{\text{ڈائین}}{\text{سمر}}$ =

اور گ ع = $۲۶ر۱ \times ۱۰^{۱۰} \ \frac{\text{ڈائین}}{\text{مربع سمر}}$

لہذا پانی کے لئے ص کی کم از کم قیمت $۴ر۲ \times ۱۰^{-۸}$ سمر حاصل ہوتی ہے ینگ نے ص کی کمترین قیمت دریافت کرنے کے لئے اس طریقہ کو استعمال کیا تھا۔

اوپر جو مساوات (۶۸) حاصل کی گئی ہے یہ کچھ زیادہ اطمینان کے قابل نہیں ہے۔ بعد میں یہ فرض کرنے کے بعد کہ دو سالمات ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتے ہیں جو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کی ن ویں طاقت سے تناسب معکوس رکھتی ہے س اور گ ع کے درمیان حسب ذیل تعلق دریافت کیا گیا:۔

$$\frac{\text{س}}{\text{گ ع}} = \frac{۳}{۱۶} \cdot \frac{(\text{ن} - ۴)}{(\text{ن} - ۵)} \cdot \text{ف}$$

جہاں ف = سالمی قطر

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ ن کی قیمت ۵ سے زیادہ ہونی چاہئے۔
اکثر مائعات کے لئے (تجربہ سے تصدیق کے بعد) یہ دریافت کیا گیا ہے کہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{۴}} = \frac{\text{س}}{\text{گ ع}}$$

اس مساوات سے ن کی قیمت ۸ ہونی چاہیئے - لہذا اس سے ظاہر ہے کہ سالمی کشش قوت فاصلہ کی ۸ ویں طاقت سے تناسب معکوس رکھتی ہے۔

مائع کی سطح سے نکل کر باہر جانے والے سالمہ کی رفتار :-

ایک ایسے سالمہ کے لئے جو مائع کی سطح کے نیچے ص فاصلہ پر ہو اس بات کا امکان ہے کہ سطح کو پہنچنے تک یہ دوسرے سالمات کے ساتھ متعدد دفعہ متصادم ہو - ہر تصادم کے ساتھ سالمہ کی رفتار میں تبدیلی واقع ہوتی ہے - اس لئے مائع کی سطح کے نیچے کسی سالمہ کی رفتار کا تعین ناممکن ہے اور یہ بھی یقین کے ساتھ نہیں کہا جا سکتا کہ آیا اس کی کوئی خاص رفتار سطح کے باہر اس کو لے جائے گی یا نہیں۔

اگر کوئی سالمہ مائع کی سطح کو انتصاباً سا رفتار سے چھوڑتا ہو تو وہ اس صورت میں باہر بچ نکلے گا جبکہ اس کی توانائی بالفعل اس کام سے زیادہ ہو جو اس کو مائع کے سالمی کشش کی حد سے باہر لے جانے کے لئے درکار ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ع سالمات کو مائع کی سطح سے اوپر کی فضا میں لے جانے کے لئے گ ع کام درکار ہوتا ہے جہاں ع مائع کے اکائی حجم میں سالمات کی تعداد ہے۔

چونکہ ثہ = ک ع لہذا ک کمیت کے ہر سالمہ کو لے جانے میں کام جو کرنا ہوتا ہے

$$= \frac{\text{گ ع}}{\text{ع}} = \frac{\text{ک گ}}{\text{ثہ}}$$

لہذا ایک سالمہ باہر نکل جائے گا اگر

$$\frac{۱}{۲}\,ک\,ر^{۲} > \frac{ک\,گ^{۴}}{ثہ}$$

یعنی اگر $ر^{۲} > \frac{۲\,گ^{۴}}{ثہ}$

پانی کے لئے صفر درجہ مئی پر چونکہ ثہ کی قیمت ۱ ہوتی ہے اور $گ^{۴} =$

$= ۱٫۲۶ \times ۱۰^{۱۰}\ \frac{ڈائین}{مربع\ سمر}$

لہذا ر کی قیمت $۱٫۴۵ \times ۱۰^{۵}\ \frac{سمر}{ثانیہ}$ سے زیادہ ہونی چاہیئے۔
لیکن بخار کی حالت میں پانی کے سالمہ کی اوسط رفتار صفر درجہ مئی پر
$= ۶ \times ۱۰^{۴}$ سمر فی ثانیہ

لہذا اس سے ظاہر ہے کہ ایک سالمہ، مائع کی سطح کے باہر نہیں نکل سکتا جب تک کہ اس کی رفتار اس کے ہمسایہ سالمات کی اوسط رفتار سے زیادہ نہ ہو۔

Chapter VII.

(۱) Properties of Matter "Wagstaff" P237, (1924)
(۲) " " " P233, (1924)
(۳) General Physics for Students "Edser," P305 (1926)
(۴) Properties of Matter "McEwen". P214 (1923)
(۵) Properties of Matter "Poynting & Thomson", P152 (1922)
(۶) " " " P154, (1922)
(۷) Wiedemann's Annalen, 30 P209
(۸) Pogg Annalen, 119, 176 (1863) or
Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P125 (1927)
(۹) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P143, (1927)
(۱۰) " " " P142, (1927)
(۱۱) Phil Mag; 30, 386, (1890)
(۱۲) Phil. Mag. 44, 369 (1897)
(۱۳) Phil. Mag. Feb. & April (1916)
(۱۴) Proc Phys. Soc. 36, 73 (1923)
(۱۵) " " 44, 511, (1932)
(۱۶) " " 45 88 (1933)
(۱۷) Phil. Mag. 4,358 (1927)
(۱۸) Properties of Matter "Newman & Searle" P171 (1928)
(۱۹) Wiedemann's Annalen, 27, 448 (1886)
(۲۰) Properties of Matter "Poynting & Thomson", P167 (1922)
(۲۱) Electricity and Magnetism "J. H. Jeans" P81 (1925)
(۲۲) General Physics for students "Edser" P289, P351 (1926)

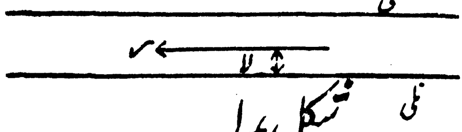
آٹھواں باب

لزوجت

مائع اگر کسی نالی میں سے بہہ رہا ہو تو اس کے مختلف پرت مختلف رفتاروں کے ساتھ ایک دوسرے پر سے پھسلتے ہوئے حرکت کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اوپر کے پرت کی رفتار، نچلے پرتوں کی رفتار سے اس وجہ سے زیادہ ہوگی کہ نچلے پرت نالی کی سطح سے چمٹے ہوئے ہوتے ہیں۔ نالی کی نچلی سطح پر مائع کی رفتار اسی لئے صفر تصور کی جاتی ہے۔ کناروں پر بھی درمیانی حصوں کی بہ نسبت مائع کی رفتار بہت کم ہوا کرتی ہے۔

اگر کسی شعری نلی میں سے مائع بہہ رہا ہو تو نلی کی سطح کے قریب رفتار بہت کم اور محور پر بہت زیادہ ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں مائع کے پرتوں کی رفتاریں، ان کے درمیانی فاصلوں اور مائع کی لزوجت کے لحاظ سے تبدیلی ہوتی رہتی ہے۔

ٹھوس اشیاء میں استواری کے معیار سے بحث کی گئی تھی لیکن مائعات اور گیسوں میں استواری کے معیار کے بجائے "لزوجت" سے بحث کی جاتی ہے میکسول کے کہنے کے مطابق قدر لزوجت اس قوت کو کہتے ہیں جس کی وجہ سے یکائی رقبہ والی دو ایسی سطحوں کے درمیان جو ایک دوسرے سے یکائی فاصلہ پر ہوں یکائی تفاوت رفتار پیدا ہوتی ہے۔

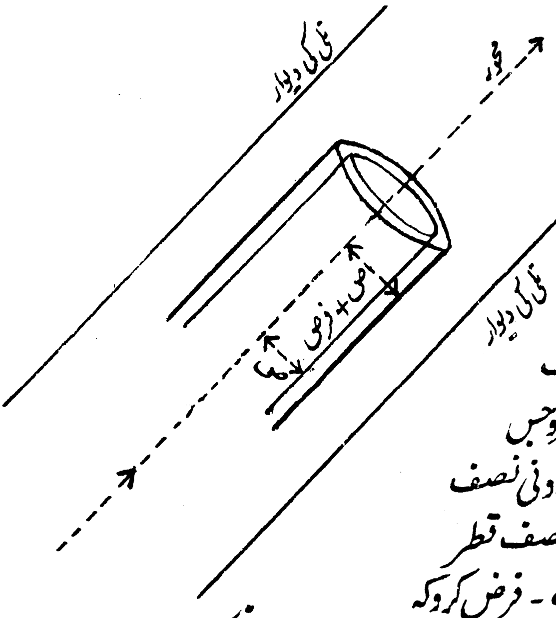


شکل ۸۔۱

$$\text{چنانچہ لزوجیت لہ} = \frac{\dfrac{\text{قوت}}{\text{رقبہ}}}{\dfrac{\text{تفاوت رفتار}}{\text{سطحوں کا درمیانی فاصلہ}}} = \frac{\dfrac{\text{ق}}{\text{ر}}}{\dfrac{\text{س}}{\text{لا}}} = \frac{\text{ق لا}}{\text{ر س}}$$

اس سے لہ کی تعریف کی جا سکتی ہے۔

(۱) **شعری نلی میں سے مائع کا بہنا :-** مائع کو ہم، چونکہ پچکا نہیں سکتے لہذا کسی نلی میں جتنے حجم کا مائع داخل ہوگا اتنا ہی اس میں سے خارج بھی ہوگا۔



شکل ۲ع

شکل ۲ع میں ایک شعری نلی بڑے پیمانہ پر دکھائی گئی ہے جس میں مائع بہہ رہا ہے۔ اس مائع کے ایک ایسے اسطوانہ پر غور کرو جس کا طول یکائی اور اندرونی نصف قطر ص اور بیرونی نصف قطر ص + فرص ہے۔ فرض کرو کہ مائع کی اندرونی سطح کی رفتار س + فرس (محور کے قریب ہونے کی وجہ سے) اور بیرونی سطح کی س ہے۔

میکسول کے کلیہ کی رو سے اس اسطوانہ کی اندرونی سطح پر مماسی قوت

$$= 2\pi \text{ ص لہ } \frac{\text{فرس}}{\text{فرص}} = \text{ص کا کوئی تفاعل} = \text{ف (ص)}$$

اور مماسی قوت اُس اسطوانہ کی بیرونی سطح پر $= \text{ف}(\text{ص} + \text{فرص}) =$

$= \text{ف}(\text{ص}) + \text{فرص}\ \text{فَ}(\text{ص})$

لہذا حاصل قوت مائع کے اسطوانہ پر $= \text{ف}(\text{ص} + \text{فرص}) - \text{ف}(\text{ص})$

$= \text{فرص}\ \text{فَ}(\text{ص})$

$= \text{فرص}\ ۲\pi\ \text{لہ} \frac{\text{فر}}{\text{فرص}}\left(\text{ص} \frac{\text{فرس}}{\text{فرص}}\right)$

فرض کرو کہ نلی کا طول = ل اور اسکے دونوں سروں کا فرق دباؤ = د

اس صورت میں دباؤ فی اکائی طول $= \frac{\text{د}}{\text{ل}}$

اس اسطوانہ پر دباؤ کی وجہ سے حاصل قوت $= ۲\pi\ \text{ص}\ \text{فرص} \frac{\text{د}}{\text{ل}}$

اب چونکہ مائع کی حرکت یکساں ہے اسوجہ سے کہ وہ بچکایا نہیں جارہا ہے۔

$\therefore ۲\pi\ \text{ص}\ \text{فرص} \frac{\text{د}}{\text{ل}} + \text{فرص}\ ۲\pi\ \text{لہ} \frac{\text{فر}}{\text{فرص}}\left(\text{ص} \frac{\text{فرس}}{\text{فرص}}\right)$

$= \text{صفر}$

یعنی $\text{لہ} \frac{\text{فر}}{\text{فرص}}\left(\frac{\text{ص}\ \text{فرس}}{\text{فرص}}\right) = -\frac{\text{د}}{\text{ل}} \text{ص}$

$\therefore \text{لہ}\ \text{فر}\left(\frac{\text{ص}\ \text{فرس}}{\text{فرص}}\right) = -\frac{\text{د}}{\text{ل}} \text{ص}\ \text{فرص}$

اس کو تکملانے سے $\text{لہ} \frac{\text{ص}\ \text{فرس}}{\text{فرص}} =$

$= -\frac{\text{د}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{ص}^۲}{۲} + \text{گ}^{\text{ع}}$

جہاں $\text{گ}^{\text{ع}}$ = مستقل

یعنی $\text{لہ}\ \text{فرس} = -\frac{\text{د}}{\text{ل}} \frac{\text{ص}}{۲} \text{فرص} + \text{گ}^{\text{ع}} \frac{\text{فرص}}{\text{ص}}$

اس کو دوبارہ تکملانے سے $\text{لہ}\ \text{س} = -\frac{\text{د}}{\text{ل}} \frac{\text{ص}^۲}{۴} +$

$+ \text{گ}^{\text{ع}}\ \text{لوک}\ \text{ص} + \text{گ}^{\text{عو}}$

جہاں $\text{گ}^{\text{عو}}$ = دوسرا مستقل

اب جبکہ ص = صفر یعنی محور پر رفتار س‌ جیساکہ ضابطہ میں اندراج سے حاصل ہوتا ہے ـ ∞ کے مساوی نہیں ہے (بلکہ صرف اعظم ہے) اس لئے گ′ کو صفر ہونا چاہیئے۔

$$\therefore \text{لہ}\,\text{س} = -\frac{\text{د}}{\text{ل}}\cdot\frac{\text{ص}^2}{4} + \text{گ}'$$

اب جبکہ ص = ف = نلی کا نصف قطر

تو س = صفر (کیونکہ نلی کی دیوار پر رفتار صفر ہے)

ان کا اندراج کرنے سے :—

$$\text{گ}' = \frac{\text{د}}{\text{ل}}\cdot\frac{\text{ف}^2}{4}$$

$$\therefore \text{لہ}\,\text{س} = \frac{\text{د}}{4\,\text{ل}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right)$$

$$\text{یعنی}\ \text{س} = \frac{\text{د}}{4\,\text{ل}\,\text{لہ}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

مائع کا وہ حجم جو فی ثانیہ خارج ہوا = حہ = رفتار × رقبہ

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ف}} \text{س}\left(2\pi\,\text{ص}\,\text{ذص}\right) = \int_{\text{صفر}}^{\text{ف}} \frac{\text{د}}{4\,\text{ل}\,\text{لہ}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right) 2\pi\,\text{ص}\,\text{ذص}$$

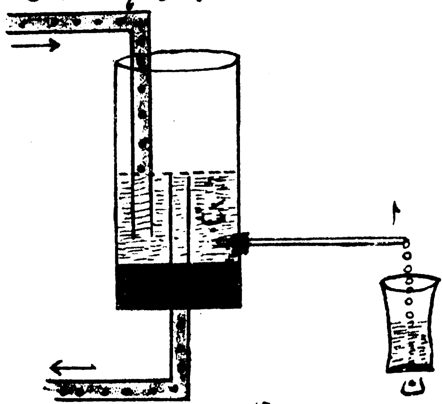
$$= \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ف}^4}{8\,\text{لہ}\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

اس ضابطہ کو پوائسیل نے سنہ ١٨٤٠ء میں حاصل کیا تھا۔

تجربی تفصیلات :— شکل ٣٢ میں ا ب ایک شعری نلی ہے جو ایک استوانہ نما برتن میں قائم کردی گئی ہے۔ برتن میں پانی کی بلندی مستقل رکھی جاتی ہے تاکہ نلی کے سرے ب پر دباؤ مستقل رہے۔

اس بلندی کو اور نیز شعری نلی کو بدل بدل کر مشاہدات لئے جاتے ہیں۔

ن میں پانی کی وہ مقدار جو ایک خاص وقفہ کے بعد جمع ہوتی ہے، تول لی جاتی ہے اور اس طرح فی ثانیہ جمع ہونے والے پانی کا وزن دریافت ہو جاتا ہے۔ چونکہ پانی کی کثافت (جو ایک ہے) ہمیں معلوم ہے لہذا فی ثانیہ جس حجم کا پانی جمع ہوا یا نلی سے خارج ہوا معلوم ہو جاتا ہے۔



شکل ۳

اگر د، ف اور ل کی قیمتیں معلوم ہوں تو ہم لہ معلوم کر سکتے ہیں۔

۱ پر صرف کرہ ہوائی کا دباؤ ہے اور ب پر کرہ ہوائی کا دباؤ + ب ج ثہ جہاں ب = پانی کے اسطوانہ کی بلندی، سطح سے ب تک اور ثہ = پانی کی کثافت

∴ فرق دباؤ = ب ج ثہ = ب ج چونکہ پانی کے لئے ثہ = ۱

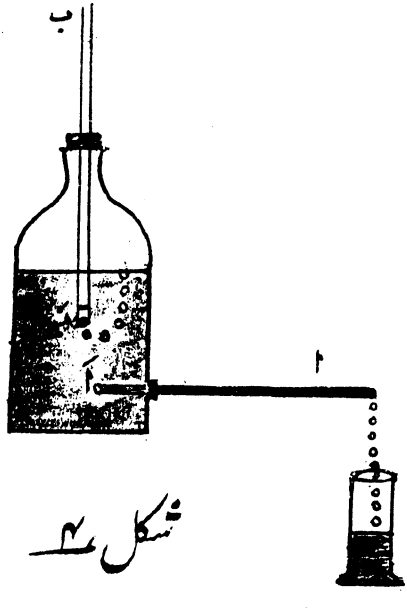
$$\therefore \text{ح} = \frac{\text{ب ج } \pi \text{ ف}^{4}}{\text{۸ لہ ل}}$$

اس سے پانی کیلئے لزوجت معلوم کر سکتے ہیں۔

لزوجت کو "ڈائین فی مربع سمر فی رفتاری ڈھال" یا زیادہ سہولت کے لئے "پوائیسوں" میں لکھا جاتا ہے۔ اس اصطلاح کو سب سے پہلے ڈیلی اور پارنے ۱۹۱۳ء میں پیش کیا تھا۔

اگر کوئی مائع لیا جائے تو $\frac{\text{ب ج ثہ } \pi \text{ ف}^{4}}{\text{۸ لہ ل}} = \frac{\text{م}}{\text{ثہ}}$، جہاں م = فی ثانیہ جمع شدہ مائع کی کمیت۔

اسی تجربہ کو شکل ۴۷ کی ترتیب کے مطابق بھی کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۴۷

ب بَ ایک معمولی شیشہ کی نلی ہے جو ایک بوتل میں شکل ۴۷ کے مطابق کاک اور موم یا لاک وغیرہ سے جوڑ دی جاتی ہے۔ نچلا سرا بَ مائع میں ڈوبا ہوا ہوتا ہے۔ ا اَ ایک شعری نلی ہے جس میں سے مائع جب باہر نکلتا ہے تو بوتل میں چونکہ ہوا بند ہے، ایک خاص وقت کے بعد نلی کے سرے بَ سے ہوا کے بلبلے نکلنے لگتے ہیں۔

یعنی اس کا مطلب یہ ہوگا کہ بَ پر کرہ ہوائی کا دباؤ ہے جو وہاں مستقل ہوتا ہے۔ اَ پر کے دباؤ کو ہم معلوم کر سکتے ہیں اور یہ، بَ پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ + ب چ ثہ کے مساوی ہے جہاں ب سے اَ اور بَ کی درمیانی بلندی مراد ہے جس کو متحرک خوردبین کے ذریعہ معلوم کر لیا جا سکتا ہے۔

اس طرح کے عمل سے یہ فائدہ ہے کہ اَ پر دباؤ مستقل رہتا ہے اور مائع کی زیادہ مقدار لینے کی ضرورت نہیں رہتی۔ اس کو میریٹ کی بوتل سے موسوم کیا جاتا ہے۔

اس تجربہ میں ضروری ہے کہ شعری نلی کے تراش عمودی کا رقبہ حتی الامکان یکساں ہو۔ نلی کے نصف قطر کی چوتھی طاقت ضابطۂ لزوجت میں استعمال ہونے کی وجہ سے نہایت احتیاط کے ساتھ نلی کے نصف قطر کی

قیمت دریافت کرنی ہوگی۔ اس کے لئے نلی کو پارے سے بھر کر ڈوری کے طول کو نہایت صحت کے ساتھ دریافت کرلینا چاہیئے۔ پھر پارے کو تول کر اس کی معلوم کثافت سے اس کا حجم دریافت کرنا ہوگا۔ پارے کے اس حجم کو اس کی ڈوری کے طول سے تقسیم کرنے سے نلی کے تراش عمودی کا رقبہ معلوم ہو جائے گا۔ اس طرح نصف قطر کی صحیح قیمت معلوم ہو جائے گی۔

چونکہ مائع کی لزوجت، اس کی تپش کے ساتھ فوراً متغیر ہونے لگتی ہے اس لئے دوران تجربہ میں تپش کو مستقل رکھنا بھی ضروری ہے۔

صحیح ضابطہ:۔ شعری نلی کے سرے ب پر دباؤ وہ نہیں ہے جو ب کے اوپر کے حصہ پر ہوتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ اوپر والے مائع کا حصہ، لزوجت کی قوتوں کے باوجود، مائع کو صرف شعری نلی میں، داخل ہی نہیں کرتا بلکہ مائع میں رفتار، یعنی توانائی بالحرکت بھی پیدا کرتا ہے۔ اوپر والے مائع کا حصہ مائع کو متحرک رکھنے کے لئے کام بھی کرتا رہتا ہے، اس لئے دباؤ د، ب ج ثہ کے مساوی نہ ہوگا بلکہ اس سے کم ہوگا کیونکہ مائع کے داخل کرنے اور اس میں توانائی بالحرکت پیدا ہونے سے دباؤ بٹ کر کم ہو جاتا ہے۔

لہٰذا کام اکائی وقت میں = دباؤ × حہ = ب ج ثہ حہ، بشرطیکہ مائع ساکن ہوتا۔ لیکن یہ کام، مائع کو، لزوجت والی قوتوں کی مزاحمت کے باوجود نلی میں داخل کرنے اور اس میں توانائی بالحرکت پیدا کرنے میں، صرف ہوتا ہے۔

اور صحیح کام جو اکائی وقت میں ہمیں چاہیئے = د حہ

جہاں د = صحیح دباؤ

اس لئے یکائی وقت میں کام میں فرق = ب ج ثہ حہ − د حہ

= وہ کام جو یکائی وقت میں توانائی بالحرکت پیدا کرنے میں صرف ہوا

$$= \frac{1}{2}\,\text{ثہ} \int_{\text{صفر}}^{\text{ق}} \text{ر}^{2} \times \text{ر}\;2\,\pi\;\text{ص}\;\text{فرص}$$

مساوات (۱) اور (۲) کی مدد سے $\text{س} = \frac{\text{۲ح}}{\pi\,\text{ف}^{۴}}(\text{ف}^{۲} - \text{ص}^{۲})$

لہذا وہ کام جو یکائی وقت میں توانائی بالحرکت پیدا کرنے میں صرف ہوا

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{ثہ}\int_{\text{صفر}}^{\text{ف}} \left\{\frac{\text{۲ح}}{\pi\,\text{ف}^{۴}}(\text{ف}^{۲} - \text{ص}^{۲})\right\}^{۳} ۲\pi\,\text{ص}\,\delta\text{ص}$$

$$= \frac{\text{ثہ ح}^{۳}}{\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

$$\therefore \text{ب ج ثہ ح} - \text{د ح} = \frac{\text{ثہ ح}^{۳}}{\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

$$\text{یعنی ب ج ثہ} - \text{د} = \frac{\text{ثہ ح}^{۲}}{\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

$$\text{یعنی ج ثہ}\left(\text{ب} - \frac{\text{ح}^{۲}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}\right) = \text{د}$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ د، ب ج ثہ کے مساوی نہیں ہے بلکہ اس سے کم ہے، یعنی بلندی ب، اصل سے کسی قدر کم ہے لہذا اس تجربہ میں بلندی ب (جو خوردبین سے حاصل ہوتی ہے) میں سے $\frac{\text{ح}^{۲}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$ کو تفریق کرنا چاہیئے۔

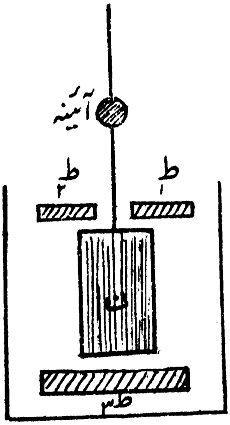
$$\text{چنانچہ صحیح بلندی} = \text{ب} - \frac{\text{ح}^{۲}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

$$= \text{ب} - \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ج ثہ}^{۲}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

یہ ولبرفورس، ہیگن باق اور کاڈیٹے کی تصحیح کہلاتی ہے۔[1]

لہذا کسی مائع کے لئے صحیح ضابطہ:-

$$\frac{\text{م}}{\text{ثہ}} = \frac{\left(\text{ب} - \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ج ثہ}^{۲}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}\right)\text{ج ثہ}\,\pi\,\text{ف}^{۴}}{\text{۸ لہ ل}} \quad \text{.......(۳)}$$



شکل ۵

(۲) گردشی اسطوانہ کا طریقہ: شکل ۵ میں ن ایک پیتل کا ٹھوس اسطوانہ ہے اور ن۱ اسطوانہ نما برتن ہے۔

ن کو فاسفر برانز کے تار کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ ن اور ن۱ کے درمیانی حصہ میں وہ مائع ڈالا جاتا ہے جس کی لزوجت دریافت کرنی ہوتی ہے۔

بیرونی اسطوانہ ن۱ کو موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے چنانچہ مائع کے پرت بھی دائری وضع میں گھومتے ہیں جوں جوں ہم اسطوانہ ن کی سطح سے قریب ہوتے جائیں گے ان دائری پرتوں کی رفتار بھی بتدریج گھٹتی جائے گی۔ جب ن۱ کو گھمایا جاتا ہے تو ن بھی ایک خاص زاویہ میں گھوم جاتا ہے۔ اس کو آئینہ کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ط۱، ط۲ اور ط۳ محافظ حلقے ہیں جو ن کے اوپر اور نیچے گھومنے والے مائع کے اثر کو ساقط کر دیتے ہیں۔ یہاں مائع کی حرکت دائری ہے لیکن شعری نلی میں مائع خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔

لہ = ق لا / س۱

فرض کرو کہ ن ویں پرت کی زاوئی رفتار ω ہے اور نصف قطر ص اور (ن + ۱) ویں پرت کی زاوئی رفتار ω + فرω اور نصف قطر ص + فرص ہے اس صورت میں دونوں کے زاوئی رفتاروں میں فرق = فرω

اور دونوں پرتوں کے درمیان فاصلہ لا = فرص

اور دونوں میں تفاوت رفتار = ص فر ω

$\therefore$ قوت ق = $\dfrac{\text{لہ ا ص فر}\,\omega}{\text{فر ص}}$ =

= $\dfrac{\text{لہ}\ 2\pi\ \text{ص ل ص فر}\,\omega}{\text{فر ص}}$

جہاں ل = اندرونی اسطوانہ ن کا طول مائع کی سطح سے اس کے نچلے حصہ تک۔

$\therefore$ جفت جو اس اسطوانہ ن پر عمل کرتا ہے = گ (فرض کرو)

= $\dfrac{\text{لہ}\ 2\pi\ \text{ص ل ص فر}\,\omega\ \text{ص}}{\text{فر ص}}$

یعنی $\dfrac{\text{گ فر ص}}{\text{ص}^3}$ = 2π لہ فر ω ل

لہذا پورا جفت = $\displaystyle\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \dfrac{\text{گ فر ص}}{\text{ص}^3} = \int_{\text{صفر}}^{\bar{\omega}} 2\pi$ لہ ل فر ω

جہاں ا = اندرونی اسطوانہ کا نصف قطر، ب = بیرونی اسطوانہ کا نصف قطر

اور $\bar{\omega}$ = بیرونی اسطوانہ کی زاویی رفتار

$\therefore$ گ $\left[-\dfrac{1}{2\,\text{ص}^2}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}} = 2\pi$ لہ ل $\bar{\omega}$

یعنی $\dfrac{1}{\text{ب}^2} + \dfrac{1}{\text{ا}^2} = \dfrac{4\pi\ \text{لہ}\ \bar{\omega}\ \text{ل}}{\text{گ}}$

$\therefore$ گ = 4π لہ $\bar{\omega}$ ل $\cdot \dfrac{\text{ا}^2\,\text{ب}^2}{\text{ب}^2 - \text{ا}^2}$ = ٹ ط .... (۴)

جہاں ٹ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

اور ط = زاویۂ انصراف

اس ضابطہ میں اگر ٹہ معلوم ہو جائے تو لہ معلوم ہو سکتا ہے۔

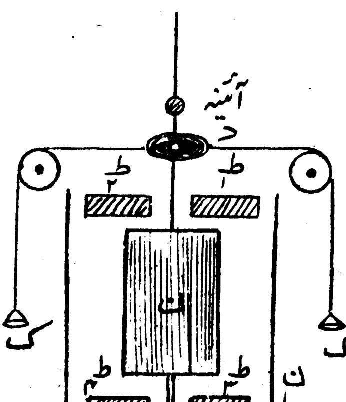
ہمیں معلوم ہے کہ اندرونی اسطوانہ کا وقت دوران و =

= ۲ π √(مج / ٹہ) جہاں مج = جمود کا معیار اثر اندرونی اسطوانہ کا اسکے محور کے گرد۔

ٹہ اس ضابطہ سے معلوم ہو جاتا ہے۔

اس آلہ سے پانی، تیل وغیرہ کی لزوجیت معلوم کی جا سکتی ہے۔

ایسے مائعات مثلاً ارنڈی کا تیل، گلیسرین وغیرہ جن کی لزوجت بہت زیادہ ہوتی ہے دیئے جائیں تو شکل ۶ میں بتایا ہوا آلہ استعمال کیا جاتا ہے، اس لئے کہ پچھلے طریقہ میں (مائع زیادہ لزج ہونے کی وجہ سے) زاویہ ط کے کافی بڑھ جانے کا احتمال ہے۔



شکل ۶

اس شکل میں د ایک چرخی ہے جس کے اطراف ایک ڈوری لپیٹی جاتی ہے اور اسکے دونوں سروں سے دو ترازو کے پلڑے باندھ دئے جاتے ہیں، اس تجربہ میں بھی بیرونی اسطوانہ، پہلے کی طرح موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے اور دونوں پلڑوں میں ایسی مناسب کمیتیں ک رکھی جاتی ہیں کہ اندرونی اسطوانہ میں کوئی حرکت یا انصراف نہ ہو، یعنی یہ اپنی اصلی حالت پر جبکہ بیرونی اسطوانہ گھوم رہا ہو قائم رہے۔

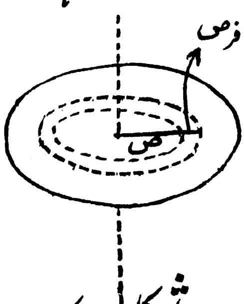
اس صورت میں جفت گ = ۲ ک ج ف جہاں ف = چرخی کا نصف قطر اور ک ج = کسی ایک پلڑے کا وزن

$$\therefore\ ۲\,ک\,ج\,ف = ۴\pi\,لہ\,\omega\,ل \cdot \frac{ا^{۲}\,ب^{۲}}{ب^{۲} - ا^{۲}}$$

پس لہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس میں بھی محافظ حلقے استعمال کئے جاتے ہیں ورنہ سروں کا اثر زائل کرنے کے لئے دو تجربے کرنے کی ضرورت ہوگی۔ ک، ل اور ω کو بدلکر درج کرنے اور اس طرح حاصل کردہ دونوں مساواتوں کو تفریق کرنے سے سروں کے اثر کا مستقل ساقط کیا جا سکتا ہے۔

(۳) **گردشی قرص کا طریقہ** (۲) :- فرض کرو کہ بڑے قطر کا ایک دائری قرص، مستقل رفتار سے، ایسے انتصابی محور کے گرد گردش کر رہا ہے جو قرص کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور قرص کے مستوی کے علی القوائم بھی ہے۔ اس قرص کے ٹھیک اوپر فرض کرو کہ ایک دوسرا دائری قرص، نہایت پتلے تار سے لٹکایا جاتا ہے اور اس تار کے ساتھ ایک مستوی آئینہ جوڑا جاتا ہے۔



شکل ۱۷

اوپر کا قرص اس طرح رکھا جاتا ہے کہ دونوں قرص ایک دوسرے کے متوازی رہتے ہیں اور تار نچلے قرص کے محور سے منطبق رہتا ہے۔ اب اگر دونوں قرصوں کے درمیان ایسا کوئی مائع بھر دیا جائے جس کی لزوجت مطلوب ہو تو نچلے قرص کی گردش کی وجہ سے متحرک مائع کا، تقاضا یہ ہوگا کہ اوپر کے قرص کو اس کے محور کے گرد گھمانے لگے۔

فرض کرو کہ نچلے قرص کی زاوئی رفتار ω ہے۔ تب اس پر کے کسی نقطہ کی (جو مرکز قرص سے ص فاصلہ پر ہو) رفتار ω ص کے مساوی ہوگی۔ اوپر کے قرص کو ہم مرکزی چھوٹے چھوٹے دھجیوں میں تقسیم کرو (دیکھو شکل ۱۷)

اور ان میں سے ایک دھجی کی، جو مرکز سے ص فاصلہ پر ہے، موٹائی فرص
کے مساوی تصور کرو۔ اس صورت میں دھجی کا رقبہ ۲ π ص فرص ہوگا۔
میکسول کے کلیہ سے، اوپر والے قرص کے اس چھوٹے سے رقبہ پر عمل کرنے
والی مماسی قوت

$$= \frac{\text{لہ}\ 2\pi\ \text{ص فرص ص}\ W}{\text{ف}}$$

(جہاں ف دونوں قرصوں کا درمیانی فاصلہ ہے)

$$\therefore \text{جفت جو محور کے گرد عمل کریگا} = \frac{\text{لہ}\ 2\pi\ \text{ص فرص ص}\ W\ \text{ص}}{\text{ف}}$$

لہذا دیگر دھجیوں کی باعث جو مجموعی جفت عمل کرے گا =

$$\int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} \frac{\text{لہ}\ 2\pi W\ \text{ص}^3\ \text{فرص}}{\text{ف}} = \frac{\text{لہ}\ \pi W\ \text{ط}^4}{2\ \text{ف}}$$

جہاں ط = اوپر والے قرص کا نصف قطر
لہذا اوپر کا قرص اگر عہ زاویہ گھوم جائے تو تھامنے والا
جفت = ٹہ عہ جہاں ٹہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

$$\therefore \text{ٹہ عہ} = \frac{\text{لہ}\ \pi W\ \text{ط}^4}{2\ \text{ف}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اگر اس قرص کو اہتزاز میں لاکر اسکا وقت دوران دریافت کر لیا جائے اور اس کے جمود کا معیار اثر معلوم ہو تو ٹہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے اور اس طرح مائع کے لیئے لہ کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔
اس طریقہ کا اطلاق کسی گیس کے لیئے بھی ہو سکتا ہے۔

(۴) قرص کو اہتزاز میں لانے سے ۳ :- کوئی جسم کسی لزج مائع میں اہتزاز کرے تو اس کی حرکت میں واسطہ کی اندرونی رگڑ کی وجہ سے رکاوٹ پیدا ہونے لگے گی۔ لزوجیت کی رقوم میں اس اثر کا حسابی طریقہ سے دریافت

کرنا، آسان نہیں ہے۔

او۔ ای۔ میئیر نے ثابت کیا ہے کہ اگر ایک پتلے قرص کو اس تار کی مروڑ کے زیر اثر جس سے کہ یہ قرص بندھا ہوا ہوتا ہے، کسی مائع یا گیس میں اہتزاز کرنے دیا جائے تو

$$\text{له} = \frac{16\,\text{مج}^2}{\pi\,\text{ثہ}\,\text{و}\,(\text{ط}^4 + 2\,\text{ط}^3\,\text{ف})^2} \cdot \left\{ \left(\frac{\text{فہ}_1 - \text{فہ}}{\pi}\right) + \frac{(\text{فہ}_1 - \text{فہ})^2}{\pi} + \ldots\ldots \right\}^2$$

جہاں مج = قرص اور اسکے سہاروں کے جمود کا معیار اثر

ط = قرص کا نصف قطر

ف = قرص کی موٹائی

و = وقت دوران جبکہ قرص خلا (یا ہوا) میں لٹکایا گیا ہو

فہ_1 = لوکارثمی تنزل (اساس "قو" پر) . مائع میں چھوٹے اہتزاز کیلئے۔

فہ = " " " " ہوا " "

ثہ = مائع کی کثافت

(۵) اسٹوک کے کلیہ سے :۔ ایک چھوٹا کرہ کسی واسطہ (مائع یا گیس) میں بالکل خفیف یکساں رفتار سے حرکت کرے تو اس کی حرکت کو روکنے والی (یا مزاحم) قوت = ۶ π له ص س جہاں له = واسطہ کی لزوجت، ص = کرہ کا نصف قطر،

اور س = کرہ کی یکساں رفتار۔

اس ضابطہ کو سب سے پہلے سر جارج اسٹوک نے پیش کیا۔

جب کرہ کسی مائع یا گیس میں گرتا ہے تو ابتدا میں اس کی رفتار کم ہوتی ہے یعنی اس وقت واسطہ کی مزاحم قوت (جو لزوجت کی وجہ سے ہوتی ہے) زیادہ ہوتی ہے۔ پھر رفتار بڑھتی جاتی ہے حتیٰ کہ مزاحم قوت کرہ کے موثر وزن کے

مساوی ہو جاتی ہے اور اس کے وقوع کے بعد کرہ یکساں رفتار سے گرنے لگتا ہے۔ اس یکساں رفتار کو "فاصل رفتار" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

کرہ کا موثر وزن $= \frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3\,(\text{ث} - \text{ثہ})\,\text{ج}$

جہاں ث = کرہ کی کثافت

ثہ = واسطہ کی کثافت

ص = کرہ کا نصف قطر

تعادل کیلئے $6\pi\,\text{لہ}\,\text{ص}\,\text{ر} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3\,(\text{ث} - \text{ثہ})\,\text{ج}$

یعنی $\text{لہ} = \dfrac{\frac{2}{9}\,\text{ص}^2\,(\text{ث} - \text{ثہ})\,\text{ج}}{\text{ر}}$

اگر کرہ کی کمیت = ک تو $\dfrac{\text{ک}}{\frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3} = \text{ث}$

یعنی $\text{ص}^3 = \dfrac{3\,\text{ک}}{4\pi\,\text{ث}}$

$\therefore\ \text{ص}^2 = \left(\dfrac{3\,\text{ک}}{4\pi\,\text{ث}}\right)^{\frac{2}{3}}$

لہذا واسطہ کی لزوجت $\text{لہ} = \left\{\frac{2}{9}\,\text{ج}\left(\dfrac{3\,\text{ک}}{4\pi\,\text{ث}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \dfrac{(\text{ث} - \text{ثہ})}{\text{ر}}\right\}$

اگر کرہ کی کمیت اور اس کی رفتار و کثافت معلوم ہو جائے تو آسانی سے واسطہ کی لزوجیت دریافت کی جا سکتی ہے۔

کوئی لزج مائع مثلاً ارنڈی کا تیل یا گلیسرین وغیرہ لیکر شیشہ کے

شکل ۸

اسطوانہ میں رکھ دیا جاتا ہے اور پارہ کے نہایت چھوٹے چھوٹے قطرے (جو کروی وضع کے تصور کئے جا سکتے ہیں) مائع میں سے گرائے جاتے ہیں۔

اسطوانے کی دیوار کے درمیانی حصہ میں لا اور ما

دو نشانات مقرر کرلئے جاتے ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ پیمانہ سے ناپ لیا جاتا ہے۔ چلرکنی گھڑی کی مدد سے لا ما فاصلہ طے کرنے کے لئے پارہ کا قطرہ جو وقت لیتا ہے وہ دریافت کرلیا جاتا ہے اس طرح پارہ کے قطرہ کی رفتار معلوم ہو جاتی ہے جس کو یکساں اس وجہ سے مان لیا جا سکتا ہے کہ لا اور ما نقطے اسطوانہ کے درمیانی حصہ میں واقع ہیں۔ پارہ کی کثافت معلوم ہے۔ کرہ کا وزن کسی حساس ترازو کی مدد سے دریافت کرلیا جاتا ہے اور مائع کی کثافت ثہ کثافت اضافی کی بوتل سے معلوم کرلی جا سکتی ہے۔

تجربہ میں پارہ کے قطروں کو بہت چھوٹے لینا چاہیئے ورنہ نظریہ صحیح نہ ہوگا۔ گرتے وقت قطرے اگر بڑے ہوں تو ان کی شکل کروی نہیں بلکہ ناقص نما ہوگی اور قطروں کے اطراف جو مائع ہوگا اس میں تلاطم یا ہیجان پیدا ہو جائیگا۔ تجربہ میں چونکہ ک کی قیمت بالکل چھوٹی ہونی چاہیئے (تاکہ نتائج صحیح حاصل ہوں) اس لئے ک کو ۰۰۱ گرام سے بھی کم لینا چاہیئے لیکن اتنا کم وزن معمولی ترازو سے زیادہ صحت کے ساتھ نہیں دریافت کیا جا سکتا اس میں فیصد خطا کے زیادہ ہو جانے کا احتمال رہتا ہے اس لئے تجربہ میں ایک بڑا قطرہ تقریباً ۰۱ گرام کا لیا جاتا ہے اور ایک حساس ترازو میں تول کر اسکا صحیح وزن ک گرام معلوم کرلیا جاتا ہے۔ اسکے بعد اس قطرہ کو تقریباً مساوی جسامت والے دس بارہ قطروں میں تقسیم کر دیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ان کی کمیتیں $ک_1$، $ک_2$، $ک_3$ .... وغیرہ ہیں اور ان کی یکساں رفتاریں ما اور لا کے درمیان بالترتیب $ر_1$، $ر_2$، $ر_3$ .... وغیرہ ہیں۔

تب پہلے قطرہ کے لئے $لہ = \left\{ \frac{2}{9} ج \left(\frac{3 ک_1}{4 \pi ث} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{ث - ثہ}{ر_1} \right) \right\}$

$$= \frac{ع (ک_1)^{\frac{2}{3}}}{ر_1}$$ جہاں $ع$ = مستقل =

$$= \frac{۲}{۹} ج \left(\frac{۳}{۲\pi ث}\right)^{\frac{۲}{۳}} (ث - ثہ)$$

اسی طرح دوسرے قطرہ کے لئے $ل_۲ = \frac{ع (ک_۲)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۲}$

اور تیسرے قطرہ کے لئے $ل_۳ = \frac{ع (ک_۳)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۳}$

علیٰ ہذا ن قطروں تک ....

چونکہ لزوجیت ایک خاص تپش پر مستقل رہتی ہے اسلئے

$ل_۱ = ل_۲ = ل_۳ = \dots\dots$ ن اعداد تک

یعنی $\frac{(ک_۱)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۱} = \frac{(ک_۲)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۲} = \frac{(ک_۳)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۳} = \dots\dots$ ن اعداد تک

ہم جانتے ہیں کہ اگر $\frac{ا_۱}{ب_۱} = \frac{ا_۲}{ب_۲} = \frac{ا_۳}{ب_۳} \dots\dots\dots$ ن عدد تک

تب $\frac{ا_۱}{ب_۱} + \frac{ا_۲}{ب_۲} + \frac{ا_۳}{ب_۳} + \dots\dots\dots$ ن عدد تک $=$

$$= ن \left(\frac{ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + ا_۴ + \dots\dots\dots \text{ن عدد تک}}{ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + \dots\dots\dots \text{ن عدد تک}}\right)$$

کیونکہ $(ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + \dots \text{ن عدد تک}) \left(\frac{ا_۱}{ب_۱} + \frac{ا_۲}{ب_۲} + \frac{ا_۳}{ب_۳} + \dots \text{ن عدد تک}\right)$

$$= (ا_۱ + ا_۱ + ا_۱ + \dots \text{ن مرتبہ}) + (ا_۲ + ا_۲ + ا_۲ + \dots \text{ن مرتبہ}) +$$

$$+ (ا_۳ + ا_۳ + ا_۳ + \dots \text{ن مرتبہ}) + (ا_۴ + ا_۴ + ا_۴ + \dots \text{ن مرتبہ}) +$$

$$(\dots\dots\dots) + (\dots\dots\dots) \dots\dots\dots \text{ن عدد تک}$$

$$= \text{ن}\left(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4 + \ldots\ldots \text{ ن عدد تک}\right)$$

اسی طرح

$$\text{لہ}_1 + \text{لہ}_2 + \text{لہ}_3 + \ldots\ldots = \text{عہ}\frac{(\text{ک}_1)^{\frac{2}{3}}}{\text{س}_1} + \text{عہ}\frac{(\text{ک}_2)^{\frac{2}{3}}}{\text{س}_2} + \ldots\ldots$$

$$= \text{عہ}\left[\frac{(\text{ک}_1)^{\frac{2}{3}}}{\text{س}_1} + \frac{(\text{ک}_2)^{\frac{2}{3}}}{\text{س}_2} + \frac{(\text{ک}_3)^{\frac{2}{3}}}{\text{س}_3} + \ldots\ldots \text{ن قطروں تک}\right]$$

$$= \text{عہ ن}\left[\frac{(\text{ک}_1)^{\frac{2}{3}} + (\text{ک}_2)^{\frac{2}{3}} + (\text{ک}_3)^{\frac{2}{3}} + \ldots\ldots \text{ن قطروں تک}}{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \ldots\ldots \text{ن قطروں تک}}\right]$$

$$= \text{عہ ن}\left\{\frac{\Sigma(\text{ک}_1)^{\frac{2}{3}}}{\Sigma\,\text{س}_1}\right\}$$

$$\therefore \text{لزوجت کی اوسط قیمت} = \text{لہ} = \frac{\text{لہ}_1 + \text{لہ}_2 + \text{لہ}_3 + \ldots\ldots \text{ن قطروں تک}}{\text{ن}}$$

$$= \text{عہ}\left\{\frac{\Sigma\,\text{ک}_1^{\frac{2}{3}}}{\Sigma\,\text{س}_1}\right\} \qquad \therefore \text{لہ}^{\frac{3}{2}} = \text{عہ}^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\frac{\Sigma\,\text{ک}_1}{\Sigma\,\text{س}_1^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\text{لیکن } \Sigma\,\text{ک}_1 = \text{ئ} = \text{سب قطروں کی کمیت} = \text{بڑے قطرے کی کمیت}$$

$$\therefore \text{لہ}^{\frac{3}{2}} = \frac{\text{عہ}^{\frac{3}{2}}(\text{ئ})}{\Sigma\,\text{س}_1^{\frac{3}{2}}} \quad \text{یعنی} \quad \text{لہ} = \frac{\text{عہ ئ}^{\frac{2}{3}}}{\left[\Sigma\,\text{س}_1^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore \text{لہ} = \frac{\frac{2}{9}\,\text{ج}\,(\text{ث} - \text{ثہ})\left(\frac{3\,\text{ئ}}{4\pi\,\text{ث}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left\{\Sigma\,\text{س}_1^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

اس طریقہ سے جونس نے ۱۸۹۴ء میں گلیسرین کی لزوجت دریافت کی تھی۔

مائعات کی لزوجت پر تپش کا اثر:۔ تپش میں اضافہ ہو تو مائعات کی لزوجت تیزی کے ساتھ گھٹنے لگتی ہے۔ پوائیسل (۴) پہلا شخص تھا

جس نے تپش اور لزوجت کے درمیان تعلق دریافت کیا۔ اسکا ضابطہ حسب ذیل ہے :- $\text{لیت} = \frac{\text{لہ}}{1 + \text{عہ}\,\text{ت} + \text{یہ}\,\text{ت}^2}$

جہاں لیت = لزوجت ت° م پر اور لہ = لزوجت صفر° می پر اور عہ اور یہ مستقل ہیں۔

کاق نے دریافت کیا کہ پارہ کی لزوجت −۲۱ر۴° م اور +۳۴۰° م کے درمیان حسب ذیل ضابطہ سے حاصل کی جاسکتی ہے (۳) :-

$\text{لیت} = 0.016969 - 0.0000066052\,\text{ت} + 0.000000020847\,\text{ت}^2$ ۔

یومتی کے مطابق پارہ کی لزوجت ۰° م پر = ۰ر۰۱۵۷۷ پوائس

اکثر سائنس دانوں نے متعدد ضابطے تجویز کئے۔ کم تپشوں کے لئے میئر نے یہ ضابطہ تجویز کیا (۴) $\text{لیت} = \frac{\text{لہ}}{1 + \text{عہ}\,\text{ت}}$

سلاٹ (۵) نے بھی متعدد ضابطے تجویز کئے جن میں سے ایک ہماری اغراض کے لئے حسب ذیل ہے :- $\text{لیت} = \frac{\text{ج}}{(1 + \text{ب}\,\text{ت})^{\text{ن}}}$ جہاں ج، ب اور ن مستقل ہیں جو مائع کی نوعیت پر منحصر ہوتے ہیں۔ اس ضابطہ کو تھارپ اور راجر نے تجربہ سے صحیح پایا اور عملی کاموں میں یہ کارآمد ثابت ہوا ہے۔ تھارپ اور راجر نے ان مستقلوں کی قیمتیں بہت سے مائعات کے لئے دریافت کی تھیں جن میں سے چند حسب ذیل ہیں (۶) :-

مائع	ج	ب	ن
پانی	۰ر۰۱۷۹۴۴	۰ر۰۲۳۱۲۱	۱ر۵۴۲۳
بردمین	۰ر۰۱۲۵۳۵	۰ر۰۰۸۹۳۵	۱ر۴۰۷۷
کلوروفارم	۰ر۰۰۷۰۰۶	۰ر۰۰۶۳۱۶	۱ر۸۱۹۶

کاربن بائیسلفائڈ	۰٫۰۰۴۲۹۴	۰٫۰۰۵۰۲۱	۱٫۶۳۲۸
ایتھر	۰٫۰۰۲۸۶۴	۰٫۰۰۷۳۳۲	۱٫۴۶۴۴
بنزین	۰٫۰۰۹۰۵۵	۰٫۰۱۱۹۶۳	۱٫۵۵۵۴
میتھل الکوہل	۰٫۰۰۸۰۸۳	۰٫۰۰۶۱۰۰	۲٫۶۷۹۳
ایتھل الکوہل	۰٫۰۱۷۷۵۳	۰٫۰۰۴۷۷۰	۴٫۳۷۳۱

ازمکاز کا اثر مائع کی لزوجیت پر:۔ جب کسی مائع میں کوئی شے حل کی جاتی ہے تو محلول کی لزوجیت، خالص مائع کی لزوجیت سے زیادہ بھی ہوسکتی ہے یا کم بھی، لہٰذا آمیزوں یا محلولوں کے لئے کوئی عام کلیہ اب تک نہیں دریافت کیا گیا ہے۔

دباؤ کا اثر مائع کی لزوجیت پر[7]:۔

لزج مائعات کی لزوجیت پر دباؤ کا اثر بالکل کم ہوتا ہے رونٹگن نے یہ دریافت کیا کہ پانی کی لزوجیت دباؤ کے اضافہ سے کم ہوجاتی ہے۔
کاربن ڈائی آکسیڈ، ایتھر اور بنزین وغیرہ کے لئے وار برگ نے یہ ثابت کیا کہ لزوجیت، دباؤ کے اضافہ سے بڑھتی ہے اور اس کے لئے حسب ذیل ضابطہ اس نے پیش کیا:۔

لہ = لہ (۱ + عہ د) جہاں لہ = دباؤ د پر لزوجیت
لہ = کرہ ہوائی کے دباؤ پر لزوجیت
اور عہ = کوئی مستقل

عام طور پر کئی سو کرۂ ہوائی کے دباؤ پر اکثر مائعات کی لزوجیت میں اضافہ ہوتا ہے۔

مائعات کی لزوجیت پر ترکیب کا اثر:۔ گارتن میسٹر نے حسب ذیل ضابطہ ایسے مرکبات کے لئے اخذ کیا جن میں تمام تیشوں پر کاربن کے یکساں تعداد کے جواہر موجود ہوں[8] لہ / م = مستقل

جہاں م = مائع کا سالمی وزن

تھارپ اور راجر نے (۹) "سالمی لزوجیت" کی اصطلاح وضع کی، انھوں نے
لہ اور ح کے حاصل ضرب کو مائع کی "سالمی لزوجیت" سے تعبیر کیا۔
جہاں ح = سالمی حجم۔ انہوں نے یہ بھی دریافت کیا کہ (CH_2)
گروپ کے لئے (لہ ح) کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے۔

ڈنسٹن نے حسب ذیل ایک اہم ضابطہ دریافت کیا: (۱۰)

لوگ لہ = ا م + ب

جہاں ا = ایک مشترک مستقل

اور ب بھی ایک مستقل ہے جو زیر غور سلسلہ پر منحصر ہوتا ہے۔

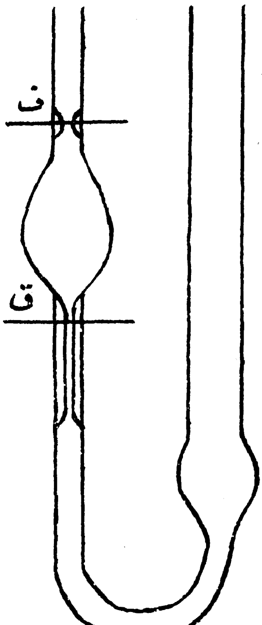
وقت کا اثر مائع کی لزوجیت پر: (۱۱) — مارڈلس نے یہ دریافت کیا کہ
بعض محلولوں مثلاً سلولوز ایسٹیٹ (cellulose acetate)
بنزائل الکوہل وغیرہ کی لزوجیت، وقت کے گزرنے پر بڑھتی جاتی ہے۔

لزوجیت پیما (مائعات کی اضافی لزوجیتوں کی دریافت کیلئے): —

بعض دفع کسی خاص مائع کی لزوجیت، کسی دوسرے معیاری مائع
مثلاً خالص پانی کی لزوجیت کے رقوم میں مستقل تپش پر دریافت کرنے
سے بہت سہولت ہوتی ہے۔

اس غرض کے لئے عموماً شعری نلی کا طریقہ اختیار کیا جاتا ہے اور وہ
آلہ جو تقریباً ہر جگہ استعمال کیا جاتا ہے اوسٹوالڈ کا لزوجیت پیما ہے جس کی
معمولی ساخت کو شکل ۹ میں دکھایا گیا ہے۔

داہنی ساق میں مائع کا ایک مستقل حجم رکھا جاتا ہے، اور بائیں ساق
میں نشان ف کے اوپر کھینچ کر اس کو لایا جاتا ہے۔ اس کے بعد پھر مائع
کو واپس بہنے دیا جاتا ہے اور ف سے ق تک گرنے میں جتنا وقفہ ہوتا



شکل ۹

ہے اسکو ایک چلرکنی گھڑی کی مدد سے دریافت
کرلیا جاتا ہے۔ مائع کے بہنے کی وجہ اوسط
دباؤ کی قیمت ب ج ثہ تصور کی جاسکتی
ہے۔ جہاں ب = مائع کی اوسط بلندی
اور ثہ = مائع کی کثافت
فرض کرو کہ یکساں بلندی ب کے تحت
دونوں نشانوں ف اور ق کے درمیان
گرنے میں لہ لزوجیت کے مائع کے لئے
جو وقفہ و اور لہَ لزوجیت کے معیاری
مائع کے لئے جو وقفہ وَ درکار ہوتا ہے
دریافت کرلیا جاتا ہے۔ پوائسیل کے
ضابطہ سے:-

$$\frac{\text{لہَ}}{\text{لہ}} = \frac{\text{ثہَ وَ}}{\text{ثہ و}} \quad \text{......... (۷)}$$

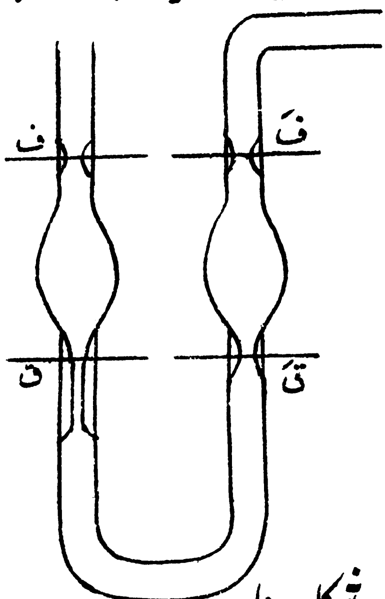
جہاں ثہَ = معیاری مائع کی کثافت

لہذا معیاری مائع کی رقوم میں کسی دوسرے مائع کی مطلوبہ لزوجیت دریافت
کی جاسکتی ہے۔

مائع کی لزوجیت اور کثافت میں نسبت "حرکی لزوجیت" کہلاتی ہے۔
اس آلہ سے دونوں مائعات کی حرکی لزوجیتوں میں نسبت' آسانی کے
ساتھ' ف اور ق کے نشانوں کے درمیان مائع کے گرنے کے اوقات
کی نسبتوں کے رقوم میں دریافت کی جاسکتی ہے۔

مائع کی کثافت کو جاننے کی (جو اوسٹوالڈ کے لزوجیت پیما میں ضروری ہے)
یو بلاڈ اور بنگھیم (۱۲) کے لزوجیت پیما میں ضرورت باقی نہیں رہتی۔ یو بلاڈ کا

آلہ شکل ۱۰ میں دکھلایا گیا ہے۔ اس آلہ میں مائع بیرونی ہوا کے دباؤ سے بہنے لگتا ہے۔



شکل ۱۰

دونوں جوفے ایک ہی ناپ اور گنجائش کے ہوتے ہیں اور ایک ہی بلندی پر ایک دوسرے کے متصل رکھے جاتے ہیں۔

لزوجت پیما میں مائع کو کھینچکر اتنا بھرا جاتا ہے کہ اُس کی سطح ف اور قَ پر رہتی ہے۔ پھر ہوا کے دباؤ سے اس کو اوپر چڑھایا جاتا ہے اور فَ اور قَ کے نشانوں کے درمیان مائع کے چڑھنے کا وقت دریافت کر لیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ لہ لزوجت کے مائع کے لئے وقت اور دباؤ کی قیمتیں بالترتیب و اور د ہیں اور معیاری مائع کے لئے جس کی لزوجت لہَ ہے متناظر وقت اور دباؤ وَ اور دَ ہیں تب

دَ وَ / د و = لہَ / لہ .... (۸)

اس امر کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ توانائی بالفعل کی رقم یہاں نظر انداز کر دی گئی ہے۔ بنگھیم نے اس آلہ کے ذریعہ مطلق لزوجت کی قیمت دریافت کی تھی، اس نے آلہ کے ابعاد کا حساب پہلے ہی سے لگا لیا تھا۔

اوپر جس لزوجت پیما کا ذکر کیا جا چکا ہے اس میں اساسی مفروضہ یہ ہے کہ

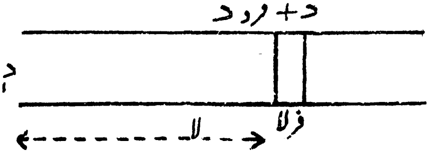
مائع کی اوسط بلندی مستقل رہتی ہے جس کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ یہ آلہ میں ایک مستقل حجم کا مائع بھرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر تپش کی وسعت بہت چھوٹی نہ ہو تو لزوجت پیما اور شیشہ کے آلہ کے پھیلاؤ کو مستقل حجم کی پیمائش میں نظر انداز نہیں کیا جا سکتا لہذا اوسط بلندی مستقل نہیں رہ سکتی۔ مائعات کے سطحی تناؤ کی مختلف قیمتوں کی وجہ سے بھی اوسط بلندی میں فرق ہونے لگتا ہے۔ متعدد سائنسدانوں نے" ان خطاؤں کو ساقط کرنے کی مختلف ترکیبیں اختیار کی ہیں۔ ولیم اور واشبرن[۱۳] نے آلہ کی شکل میں ایسی تبدیلیاں کی ہیں کہ نہ صرف مذکورہ بالا خطاؤں کی تصحیح ہو جاتی ہے بلکہ چند چھوٹے چھوٹے نقائص بھی مثلاً صاف کرنے والے مائعات اور پانی کے عمل سے نلی کے اندرونی قطر میں تبدیلی کا واقع ہونا اور حل شدہ شیشہ سے پانی کا خالص پن باقی نہ رہنا وغیرہ، دور ہو جاتے ہیں۔

انھوں نے آلہ کو کوارٹز سے بنایا" اور اس کے ابعاد مناسب رکھے آلے کی اس پوری ترتیب کو ایک تھرموسٹیٹ (مستقل تپش کے حمام) میں داخل کر دیا جاتا ہے، اور دونوں ساقوں کو تبخیر سے بچانے کے لیے (اگر کوئی طیران پزیر مائع استعمال کیا جائے) ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے۔ اضافی لزوجت دریافت کرنے کا طریقۂ عمل وہی ہے جو اوسٹوالڈ کے لزوجت پیما میں بیان کیا جا چکا ہے۔

بعد میں ڈکلا نے یہ رائے دی کہ بہت ہی کم لزوجت کے مائعات کے لیے شعری نلی کو نکال کر آلہ میں ایسے مسام دار مادّے کو رکھنا چاہیے کہ جس کے مسامات نہ تو دائری ہوں اور نہ تراش عمودی میں بالکل سیدھے رہیں، اور اسی طریقۂ عمل سے کام لیکر جو اوسٹوالڈ نے اختیار کیا تھا، کسی مائع کی اضافی لزوجت دریافت کی جا سکتی ہے۔ ان چیزوں کا تفصیلی بیان موجودہ حالت میں زیادہ ضروری نہیں معلوم ہوتا لہذا یہاں اس کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔

گیسوں اور بخارات کی لزوجیت :۔ پوائسیل کے ضابطہ کو حاصل کرنے کے دوران میں یہ فرض کیا گیا تھا کہ شعری نلی کے کسی تراش میں سے گزرنے والے مائع کا حجم مستقل رہتا ہے یعنی دباؤ کے باوجود کثافت وہی رہتی ہے۔ اس میں کوئی شک نہیں کہ مائعیات کے لئے یہ مفروضہ صحیح ہے لیکن گیسوں کی صورت میں چونکہ دباؤ کی تبدیلی کے ساتھ کثافت میں بھی تبدیلی واقع ہوتی ہے اس لئے یہ ضابطہ نہیں استعمال کیا جا سکتا۔

حقیقت میں گیس کی وہ کمیت، جو نلی کے کسی تراش میں سے ایک دئے ہوئے وقت میں گزرتی ہے مستقل ہوتی ہے۔



شکل ۱۱

ایک شعری نلی پر جو شکل ۱۱ میں دکھائی گئی ہے غور کرو۔ فرض کرو کہ اسکا طول ل اور اسکے دونوں سروں پر دباؤ علی الترتیب د۱ اور د۲ ہے۔ نلی میں گیس کی ایک چھوٹی مقدار ایسی لو جس کی موٹائی فرلا اور نلی کے ایک سرے سے فاصلہ لا پر واقع ہو، اس چھوٹے سے ٹکڑے کے دونوں سروں پر فرض کرو کہ دباؤ بالترتیب د اور د + فرد ہے، نیز یہ بھی فرض کیا جائے کہ گیس کا یہ ٹکڑا اتنا چھوٹا ہے کہ گیس کی کثافت اس کے درمیان مستقل تصور کی جا سکتی ہے۔

اس ٹکڑے کے دونوں سروں کے درمیان دباؤ میں فرق = ۔ فرد

پوائسیل کے ضابطہ سے، گیس کا وہ حجم جو فی ثانیہ اس ٹکڑے میں سے گزرتا ہے :۔

$$\text{حہ} = -\frac{\text{فرد}\ \pi\ \text{ف}^{4}}{8\ \text{لہ}\ \text{فرلا}}$$

یعنی ثہ لہ حہ فرلا = $-\dfrac{\text{ثہ فرد} \ \pi \ \text{ف}^{4}}{}$

جہاں ثہ = اُس ٹکڑے کے درمیان گیس کی کثافت (جس کو مستقل فرض کیا گیا ہے۔)

$\therefore$ م لہ فرلا = $-\dfrac{\text{ثہ} \ \pi \ \text{ف}^{4} \ \text{فرد}}{8}$

جہاں م = گیس کی وہ کمیت جو فی ثانیہ اُس ٹکڑے میں سے گزرتی ہے۔

کلیہ بائیل کی رو سے :-

$\dfrac{\text{د} \ \text{م}}{\text{ثہ}} = \text{لا ت}$

یعنی د = گ ثہ جہاں

م = سالمی وزن
ت = تپش مطلق
لا = گیس کا مستقل فی گرام سالمہ
گ = ایک مستقل

$\therefore$ م لہ فرلا = $-\dfrac{\pi \ \text{ف}^{4} \ \text{د} \ \text{فرد}}{8 \ \text{گ}}$

$\therefore$ کُل نلی کے لئے :-

$$\text{م لہ} \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \text{فرلا} = -\frac{\pi \ \text{ف}^{4}}{8 \ \text{گ}} \int_{\text{د}_1}^{\text{د}_2} \text{د فرد}$$

$$\therefore \text{م گ} = \frac{\pi \ \text{ف}^{4}}{16 \ \text{ل لہ}} \left(\text{د}_1^{2} - \text{د}_2^{2}\right) \quad \text{............ (۹)}$$

فرض کرو کہ حہ_1 = گیس کا وہ حجم جو د_1 دباؤ پر فی ثانیہ نلی کے اندر داخل ہوتی ہے

$\therefore$ نلی میں فی ثانیہ جو کمیت داخل ہوگی = م = $\dfrac{\text{حہ}_1 \ \text{د}_1}{\text{گ}} = \text{حہ}_1 \ \text{ثہ}_1$

$\therefore$ م گ = $\text{حہ}_1 \ \text{د}_1$

چونکہ فی ثانیہ جو گیس کی کمیت نلی میں داخل ہوتی ہے، وہ مساوی ہے اُس گیس کی کمیت کے جو کہ نلی سے فی ثانیہ خارج ہوتی ہے

$\therefore$ م = $\text{حہ}_2 \ \text{ثہ}_2 = \dfrac{\text{حہ}_2 \ \text{د}_2}{\text{گ}}$

جہاں $ح_۲$ = گیس کا وہ حجم جو $د_۲$ دباؤ پر فی ثانیہ نلی میں داخل ہوتا ہے۔

$\therefore$ م گ = $ح_۲ د_۲$ = $ح_۱ د_۱$

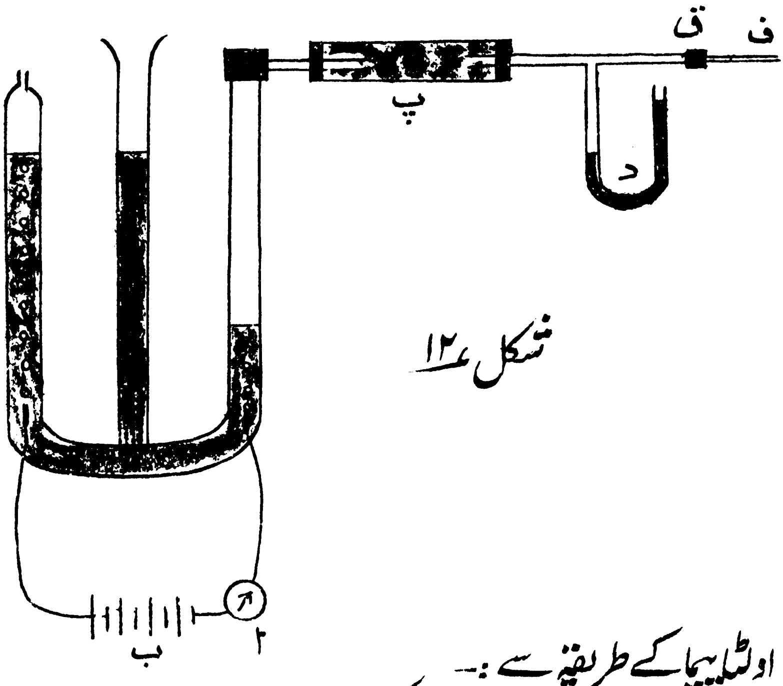
$$\therefore ح_۲ د_۲ = ح_۱ د_۱ = \frac{\pi ف^{۴}}{۱۶ ا ل ل} \left(د_۱^{۲} - د_۲^{۲}\right) \quad .... \quad (۱۰)$$

یہ کسی گیس کے لئے ''میئر'' کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

مساوات (۹) سے

$$م = \frac{م}{لا ت} \cdot \frac{\pi ف^{۴}}{۱۶ ا ل ل} \left(د_۱^{۲} - د_۲^{۲}\right)$$

مساوات (۱۰) کو ڈاکٹر لیفلڈ نے ہائڈروجن اور آکسیجن کی لزوجت بالراست دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا تھا[14]۔ اسکا طریقہ حسب ذیل ہے:۔



شکل ۱۲؎

او لٹا پیما کے طریقہ سے :۔

شکل ۱۲؎ میں ہائیڈروجن اور آکسیجن معمولی کیمیائی آبی ولٹا پیما سے

حاصل کئے جاتے ہیں، آکسیجن کو آزادانہ ہوا میں نکل جانے دیا جاتا ہے اور ہائڈروجن کو جس کی لزوجیت دریافت کرنی ہے ایک خشک کرنے والی نلی پ میں گزارنے کے بعد ایک شعری نلی ف ق میں سے گزرنے دیا جاتا ہے۔ ہائڈروجن جس دباؤ د پر شعری نلی میں داخل ہوتی ہے اس کو داب پیما د کی مدد سے دریافت کر لیا جاتا ہے، جس دباؤ د پر گیس شعری نلی میں سے نکلتی ہے ظاہر ہے کہ وہ کرہ ہوائی کا دباؤ ہوگا۔ برقی رد جو گزاری جاتی ہے اس کو ام پیما ا سے پڑھ لیا جاتا ہے۔ فیرڈے کے کلیہ برق پاشی کی رو سے، ہائڈروجن کی وہ کمیت جو فی ثانیہ حاصل ہوتی ہے، بذریعہ حساب دریافت کی جا سکتی ہے۔

کلیہ بائیل اور شارل کی رو سے $\frac{د_۱ حہ_۱}{ت_۱} = \frac{د حہ}{ت}$ ...... (۱۱)

جہاں $ت_۱$ = گیس کی تپش مطلق

د = طبعی دباؤ

ت = طبعی تپش

حہ = طبعی دباؤ اور تپش پر فی ثانیہ حاصل ہونے والی گیس کا حجم

فیرڈے کے کلیہ برق پاشی کی رو سے

فی ثانیہ خارج ہونے والی گیس کی کمیت = ع × س

جہاں ع = ہائڈروجن کا برقی کیمیائی معادل

س = رو امپیروں میں

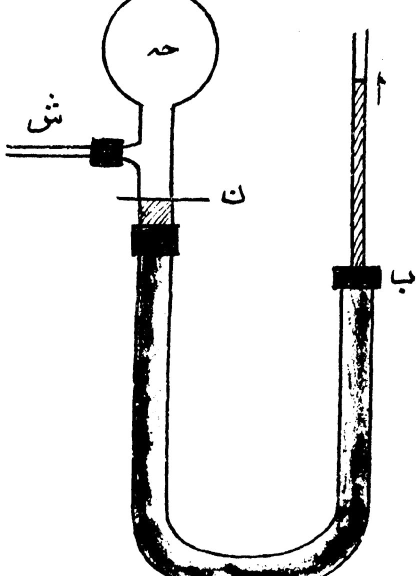
لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ طبعی تپش اور دباؤ پر ایک گرام ہائڈروجن کا حجم = ۱۱۱۲۰ مکعب سمر

لہٰذا ع س گرام ہائڈروجن کا حجم طبعی تپش اور دباؤ پر = ۱۱۱۲۰ × ع س مکعب سمر، اور یہ مقدار = حہ

∴ مساوات (۱۱) سے $د_۱ حہ_۱ = \frac{د ت_۱}{ت}$ (۱۱۱۲۰ × ع س) ...... (۱۲)

لہذا اس مساوات سے دحہ کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے اور د۱ اور د۲ کی قیمتیں تو پہلے ہی سے معلوم ہیں اسلئے مساوات (۱۰) سے لہ کی قیمت ہائڈروجن کے لئے دریافت کی جا سکتی ہے۔

۱۔ اینڈرسن کا طریقہ: ۔ اس طریقہ کو بعض دفعہ ’’مستقل حجم کے طریقہ سے‘‘ بھی موسوم کیا جاتا ہے۔ ۱۹۲۱ء میں پروفیسر اینڈرسن (۱۵) نے گیسوں کی لزوجیت کی دریافت کے لئے اسکو استعمال کیا تھا۔



شکل نمبر ۱۳

آلہ کی ترتیب شکل نمبر ۱۳ میں دکھائی گئی ہے۔ یہ ایک الٹی صراحی حہ پر مشتمل ہے جس کی گردن ربر کی نلی کے ذریعہ ایک شیشہ کی نلی ا ب کے ساتھ جوڑ دی جاتی ہے۔ نلی ا ب اور صراحی حہ میں پارہ ایک خاص بلندی تک جس کو ا اور ن سے تعبیر کیا گیا ہے بھر دیا جاتا ہے۔ صراحی کے جوڑ کے نیچے ایک شعری نلی ش بھی جوڑ دی جاتی ہے جس کے دوسرے سرے پر ربر کی نلی لگائی جاتی ہے، اس ربر کی نلی کو حسب ضرورت چٹکی سے بند کر دیا جاتا ہے۔ اس پورے آلہ کو لوہے کے ایک استادہ کے ساتھ لگا دیا جاتا ہے اور بازو ا ب کو ایک حساس ترتیب کی مدد سے اوپر یا نیچے ہٹایا جا سکتا ہے۔

تجربہ میں گیس کا وہ حجم دریافت کر لیا جاتا ہے جو صراحی کے اندر (معہ شعری نلی کے) کسی خاص نشان ن تک بھری ہوئی ہوتی ہے۔ پھر ۲ ب کو ترتیب دے کر پارہ نشان ن کے نیچے لایا جاتا ہے۔ اسکے بعد شعری نلی کے سرے پر جو چھوٹی ربر کی نلی ہوتی ہے اس کو بند کرکے اور ۲ ب کو اوپر اٹھا کر گیس بچکائی جاتی ہے تاکہ پارہ کی سطح پھر ن تک آ جائے۔ چند دقیقوں کے بعد جب اسکا یقین ہو جاتا ہے کہ گیس کی تپش کمرے کی تپش پر آ گئی ہے، پارہ کی ڈوری کی سطح کا فرق لکھ لیا جاتا ہے۔ نلی کے پاس والی چھوٹی ربر کی نلی کو پھر ایک معلوم وقفہ تک کھلا رکھ کر (جیسے جیسے گیس شعری نلی میں سے باہر نکلتی جاتی ہے) پارہ کی سطح کو مسلسل اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ وہ ہمیشہ نشان ن پر قائم رہے۔ اس طرح گیس، صراحی میں ہمیشہ مستقل حجم کے تحت رہتی ہے۔ اس وقفہ کے اختتام پر پارہ کی سطح کا فرق پھر لکھ لیا جاتا ہے۔ گیس کے مستقل حجم حہ، اور وقفہ و کے دوران میں بالترتیب دونوں دباؤ $د_1$ اور $د_2$ سے، اور نیز بارپیما کی بلندی د کے مشاہدات سے، گیس کی لزوجیت دریافت کی جاتی ہے۔ اگر فی ثانیہ نلی میں داخل ہونے والی گیس کا حجم $حہ_1$ اور اسکا دباؤ $د_1$ ہو تو $حہ_1 د_1 = د \frac{فرحہ}{فرو}$

کلیہ بائیل اور شارل کی رو سے گیس کے داخلہ کے وقت اگر حجم اور دباؤ کی قیمتیں حہ اور د ہوں تو د حہ = مستقل

$$\therefore د \frac{فرحہ}{فرو} + حہ \frac{فرد}{فرو} = صفر$$

$$\therefore د \frac{فرحہ}{فرو} = - حہ \frac{فرد}{فرو} = حہ_1 د_1$$

لہذا مساوات (۱۰) سے $(د_1^2 - د_2^2) \frac{\pi}{16} \frac{ف^4}{ل لہ} =$

$$= - حہ \frac{فرد}{فرو} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱۳)$$

جہاں $\frac{\text{فرد}}{\text{فرو}}$ داخلہ کے اختتام پر شرح تغیر دباؤ ہے اور حہ گیس کا مستقل حجم ہے۔

تجربہ میں د_{2} کرہ ہوائی کا دباؤ ہے اور د_{1} کی قیمتیں و ثانیوں کے دوران میں دَ اور دً ہیں۔

مساوات (۱۳) سے:-

$$\frac{\pi\,\text{ف}^{4}}{16\,\text{ال لہ حہ}}\int_{\text{صفر}}^{\text{و}}\text{فرو}=\frac{1}{2\,\text{د}_{2}}\int_{\text{دَ}}^{\text{دً}}\left(\frac{1}{\text{د}_{1}+\text{د}_{2}}-\frac{1}{\text{د}_{1}-\text{د}_{2}}\right)\text{فرد}$$

$$=\frac{1}{2\,\text{د}_{2}}\left[\text{لوک}\,\frac{\text{د}_{1}+\text{د}_{2}}{\text{د}_{1}-\text{د}_{2}}\right]_{\text{دَ}}^{\text{دً}}$$

$$\therefore\ \frac{\pi\,\text{ف}^{4}\,\text{و}}{16\,\text{ال لہ حہ}}=\frac{1}{2\,\text{د}_{2}}\left[\text{لوک}\,\frac{\text{دً}+\text{د}_{2}}{\text{دً}-\text{د}_{2}}-\text{لوک}\,\frac{\text{دَ}+\text{د}_{2}}{\text{دَ}-\text{د}_{2}}\right]$$

اب چونکہ $\text{د}_{2}=\text{د}=$ کرۂ ہوائی کا دباؤ

$$\therefore\ \text{لہ}=\frac{\pi\,\text{ف}^{4}\,\text{د}\,\text{و}}{8\,\text{ل حہ لوک}\left[\left(\frac{\text{دً}+\text{د}}{\text{دً}-\text{د}}\right)\cdot\left(\frac{\text{دَ}-\text{د}}{\text{دَ}+\text{د}}\right)\right]}\quad\ldots\ldots(14)$$

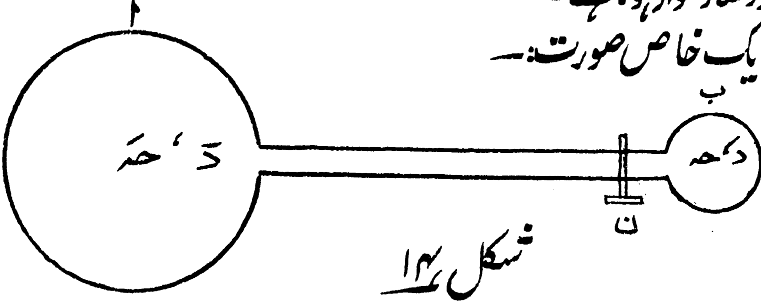
$\frac{\pi\,\text{ف}^{4}}{8\,\text{ل حہ}}$ آلہ کے لئے مستقل ہے، اگر اس کی قیمت ایک مرتبہ دریافت کر لی جائے تو پھر اسکے دریافت کرنے کی ضرورت نہیں باقی رہتی۔ اس طریقہ سے گیسوں کی لزوجت مختلف تپشوں پر ایڈورڈ نے دریافت کی تھی۔

لہ کی قیمت "مستقل دباؤ کے طریقہ" سے بھی دریافت کی جا سکتی ہے یعنی اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کی ڈوری کو کسی خاص فرق بلندی پر رکھ کر دباؤ کے فرق کو مستقل رکھنے سے یہ قیمت دریافت ہو سکتی ہے۔ نقطہ ن کو صراحی کی گردن کے نیچے لیا جا سکتا ہے اور کسی حجم مثلاً حم کے وقفہ کو جون کے ابتدائی

اور آخری مقاموں کے درمیانی طول کے متناظر ہو لکھ لیا جاتا ہے۔
فرض کرو کہ صراحی کے اندر مجموعی دباؤ دَ ہے تو مساوات (۱۰) سے:۔

$$\text{حہ} = \frac{(\text{دَ}^2 - \text{دِ}^2)\ \pi\ \text{ف}^4}{\text{۱۶ ال لہ دَ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱۵)$$

تجربہ میں پارہ کی سطحوں کو ہمیشہ ایک دوسرے کے درمیان ایک خاص فاصلہ پر رکھنا دشوار ہوتا ہے۔
ایک خاص صورت:۔



شکل ۱۴۲

شکل ۱۴۲ میں گیس کے دو برتن ا اور ب ایک شعری نلی کے ذریعہ ملائے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ ا میں ابتدائی دباؤ د اور حجم حہَ اور ب میں ابتدائی دباؤ د۲ اور حجم حہ ہے، جب ٹونٹی ن کھولی جاتی ہے تو و وقفہ کے بعد فرض کرو کہ ا میں دباؤ دَ اور حجم حہَ اور ب میں دباؤ د اور حجم حہ علی الترتیب ہوجاتا ہے۔

مساوات (۹) سے $\quad \text{م} = \frac{\text{م}}{\text{لات}} \cdot \frac{\pi\ \text{ف}^4}{\text{۱۶ ال لہ}} (\text{دَ}^2 - \text{دِ}^2)$

لیکن اگر ثہ گیس کی کثافت ہو تو

$$\text{م} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}(\text{حہ ثہ}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\frac{\text{حہ د م}}{\text{لات}}\right) =$$

$$= \frac{\text{حم}}{\text{لات}} \cdot \frac{\text{فر د}}{\text{فر و}}$$

$$\therefore \frac{\text{حہ م}}{\text{لات}} \cdot \frac{\text{فرد}}{\text{فرو}} = \frac{\text{م}}{\text{لات}} \cdot \frac{\pi\, \text{ف}^{۴}}{۱۶\, \text{ل لہ}} \left(\text{دَ}^{۲} - \text{د}^{۲}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{حہ فرد}}{\left(\text{دَ}^{۲} - \text{د}^{۲}\right)} = \frac{\pi\, \text{ف}^{۴}}{۱۶\, \text{ل لہ}} \cdot \text{فرو}$$

چونکہ ا میں دباؤ دَ گر رہا ہے اور ب میں دباؤ د بڑھ رہا ہے اس وجہ سے دَ اور د دونوں یہاں متغیر ہونے والی مقداریں ہیں، اس لئے اس جملہ کو آسانی سے تکملایا نہیں جا سکتا۔

کلیہ بائیل سے $\text{دَ حہَ} + \text{د حہ} = \text{د}_{۱}\,\text{حہَ} + \text{د}_{۲}\,\text{حہ} =$
$=$ مستقل $=$ عہ فرض کرو

$$\therefore \text{دَ} = \frac{\text{د}_{۱}\,\text{حہَ} + \text{د}_{۲}\,\text{حہ} - \text{د حہ}}{\text{حہَ}} = \frac{\text{عہ} - \text{د حہ}}{\text{حہَ}}$$

$$\therefore \frac{\text{حہ فرد}}{\left(\frac{\text{عہ} - \text{د حہ}}{\text{حہَ}}\right)^{۲} - \text{د}^{۲}} = \frac{\pi\, \text{ف}^{۴}}{۱۶\, \text{ل لہ}} \cdot \text{فرو}$$

و وقفہ کے لئے ا اور ب میں اوسط دباؤ کی حد فرض کرو $\text{د}_{۳}$ سے $\text{د}_{۴}$ تک ہوگی

$$\therefore \int_{\text{د}_{۳}}^{\text{د}_{۴}} \frac{\text{حہَ}^{۲}\,\text{حہ فرد}}{\text{عہ}^{۲} + \text{د}^{۲}\text{حہ}^{۲} - ۲\,\text{عہ د حہ} - \text{حہَ}^{۲}\,\text{د}^{۲}} = \int_{\text{صفر}}^{\text{و}} \frac{\pi\, \text{ف}^{۴}}{۱۶\, \text{ل لہ}}\, \text{فرو}$$

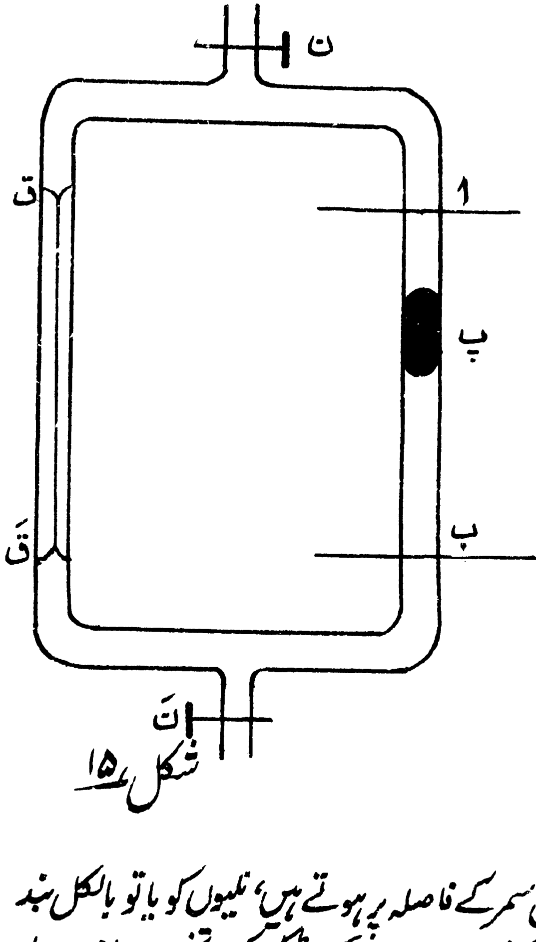
اسکو تکملانے سے :-

$$\frac{\text{حہَ حہ}}{۲\,\text{عہ}} \text{لوک} \frac{\text{حہ} + \text{حہَ}}{\text{حہ} - \text{حہَ}} + \frac{\text{حہَ حہ}}{۲\,\text{عہ}} \text{لوک} \left[\frac{\{(\text{حہ} - \text{حہَ})\,\text{د}_{۴} - \text{عہ}\}\{(\text{حہ} + \text{حہَ})\,\text{د}_{۳} - \text{عہ}\}}{\{(\text{حہ} + \text{حہَ})\,\text{د}_{۴} - \text{عہ}\}\{(\text{حہ} - \text{حہَ})\,\text{د}_{۳} - \text{عہ}\}}\right] = \frac{\pi\, \text{ف}^{۴}\, \text{و}}{۱۶\, \text{ل لہ}}$$

اس مساوات سے گیس کیلئے لہ کی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔

رینکن کا لزوجت پیما:۔ پروفیسر اے، او، رینکن نے سنہ ۱۹۱۰ء میں (۱۶) مختلف گیسوں کی لزوجت دریافت کرنے کے لئے ایک لزوجت پیما تجویز کیا۔ عملی کام کے لئے یہ لزوجت پیما نہایت سادہ سی چیز ہے لیکن اسکا نظریہ کسی قدر مشکل ہے۔ خصوصاً کمیاب گیسوں مثلاً کرپٹن، نیین، وغیرہ کی لزوجت کی دریافت میں یہ بیحد کارآمد ہے۔

شکل ۱۵ میں اس لزوجت پیما کو دکھایا گیا ہے۔ اس میں دو بالکل پاک صاف شیشہ کی نلیاں ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کا تقریباً طول ۵۰ سمر ہوتا ہے۔ ان میں سے ایک ق قَ، بالکل پتلی شعری نلی ہوتی ہے جس کا قطر تقریباً ۰٫۲ ممر کا ہوتا ہے اور موٹی نلی کا اندرونی قطر تقریباً ۴ ممر کا ہوتا ہے۔



شکل ۱۵

موٹی نلی پر ۱ اور ب دو نشانات کئے جاتے ہیں جو اسکے ہر ایک سے تقریباً دس سمر کے فاصلہ پر ہوتے ہیں، نلیوں کو یا تو بالکل بند کر دیا جاتا ہے یا ربر کی نلیوں سے ان کو جوڑ کر ایک تختہ سے باندھ دیا

جاتا ہے جو انتصابی مستوی میں گھوم سکتا ہے۔ پ پارہ کا ایک نمایندہ ہے جسکا طول تقریباً ۵ ر اسم ہے۔ جب پارہ کا یہ نمایندہ آہستہ آہستہ نیچے اُترتا ہے تو اس کی نیچے کی گیس شعری نلی میں داخل ہونے پر مجبور ہوتی ہے، اور پھر نمایندے کی اوپر کی فضا میں پھیل جاتی ہے۔ کسی خاص وقت میں نمایندہ کی دُم، نشان ا پر سے اور سر نشان ب سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ گیس کا مجموعی حجم = ح اور کسی وقفہ و پر پارہ کے نیچے اور اوپر گیس کا دباؤ اور حجم علی الترتیب د_1، ح_1 اور د_2، ح_2 ہے۔

اس صورت میں میئبر کے کلیہ سے:-

$$\text{م} = \frac{\text{م}}{\text{لا}\,\text{ت}} \cdot \frac{\pi\,\text{ف}^4}{16\,\text{ل}\,\text{له}} \left(\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2\right)$$

جہاں م = شعری نلی میں فی ثانیہ داخل ہونے والی، یا اس میں سے خارج ہونے والی گیس کی کمیت،

$$\therefore \text{م} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{ح}_2\,\text{ث}_2\right) = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\frac{\text{ح}_2\,\text{د}_2\,\text{م}}{\text{لا}\,\text{ت}}\right)$$

جہاں ث_2 = گیس کی کثافت

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{لا}\,\text{ت}} \cdot \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{د}_2\,\text{ح}_2\right) = \frac{\text{م}}{\text{لا}\,\text{ت}} \cdot \frac{\pi\,\text{ف}^4}{8\,\text{ل}\,\text{له}}\left(\text{د}_1 - \text{د}_2\right) \cdot \frac{\left(\text{د}_1 + \text{د}_2\right)}{2}$$

$$\therefore \text{فر}\left(\text{د}_2\,\text{ح}_2\right) = \frac{\text{گ}\,\text{فرو}}{2}\left(\text{د}_1 - \text{د}_2\right)\left(\text{د}_1 + \text{د}_2\right)$$

جہاں $\text{گ} = \frac{\pi\,\text{ف}^4}{8\,\text{ل}\,\text{له}}$

$$\therefore \text{د}_2\,\text{فرح}_2 + \text{ح}_2\,\text{فرد}_2 = \frac{\text{گ}\,\text{فرو}}{2}\left(\text{د}_1 - \text{د}_2\right)\left(\text{د}_1 + \text{د}_2\right)$$

جب پارہ کا نمایندہ یکساں طریقہ سے نیچے اُترتا ہے تو نمایندہ کے وزن کی وجہ دباؤ د اور وہ دباؤ جو اوپر سے اُسے دباتا ہے، نمایندہ کے نیچے کے دباؤ کو تعادل میں رکھتا ہے۔

$$\therefore\ \text{د}_1 = \text{د}_2 + \text{د} = \text{د}_2 + \frac{\text{م ج}}{\text{یہ}}$$ جہاں م = پارہ کے نمایندہ کی کمیت اور یہ = اسکے تراش عمودی کا رقبہ

$$\therefore\ \text{د}_2\,\text{فرحہ}_2 + \text{حہ}_2\,\text{فرد}_2 = \frac{\text{گ فرو}}{2}(\text{د}_1 + \text{د}_2)\,\text{د} \ldots\ldots\ldots (16)$$

فرض کرو کہ نلی کے اندر جبکہ وہ افقی ہو، یکساں دباؤ = ع

اب چونکہ $\text{ح} = \text{حہ}_1 + \text{حہ}_2$ اسلئے کلیہ بائیل سے:—

$$\text{ع ح} = \text{د}_1\,\text{حہ}_1 + \text{د}_2\,\text{حہ}_2 = (\text{د}_2 + \text{د})(\text{ح} - \text{حہ}_2) + \text{د}_2\,\text{حہ}_2$$

$$\therefore\ \text{د}_2 = \text{ع} - \text{د} + \frac{\text{د حہ}_2}{\text{ح}}$$

اب مساوات (۱۶) میں د_1 اور د_2 کی قیمتیں لکھنے سے:—

$$\left(\text{ع} - \text{د} + \frac{\text{د حہ}_2}{\text{ح}}\right)\text{فرحہ}_2 + \text{حہ}_2\,\text{د}\,\frac{\text{فرحہ}_2}{\text{ح}} =$$

$$= \text{گ}\,\frac{\text{فرو}}{2}\left(2\text{ع} - \text{د} + \frac{2\text{د حہ}_2}{\text{ح}}\right)\text{د}$$

$$\text{یعنی}\left(\text{ع} + \frac{2\text{د حہ}_2}{\text{ح}} - \text{د}\right)\text{فرحہ}_2 =$$

$$= \frac{\text{گ د}}{2}\left(2\text{ع} - \text{د} + 2\text{د}\,\frac{\text{حہ}_2}{\text{ح}}\right)\text{فرو}$$

فرض کرو کہ $\text{لا} = 2\text{ع} - \text{د} + 2\text{د}\,\frac{\text{حہ}_2}{\text{ح}}$

$$\therefore\ \text{فرلا} = \frac{2\text{د}}{\text{ح}}\,\text{فرحہ}_2 \quad \text{یعنی}\quad \text{فرحہ}_2 = \frac{\text{ح}}{2\text{د}}\,.\,\text{فرلا}$$

$$\therefore\ \frac{\text{ح}}{\text{د}}(\text{لا} - \text{ع})\,\text{فرلا} = \text{گ د لا فرو} \ldots\ldots\ldots (17)$$

فرض کرو کہ و ثانیوں میں حہ_2، حہ_2 میں تغیر ہو جاتا ہے

$$\text{تب لاَ} = ٢\text{ع} - \text{د} + \frac{٢\,\text{د}\,\text{حہَ}^{٢}}{\text{ح}}$$

مساوات (١٧) کو حدود لاَ اور لاً کے درمیان وثانیوں میں تکملانے سے:—

$$\frac{\text{ح}}{\text{د}}\left(\text{لا} - \text{ع}\,\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا}\right)_{\text{لاَ}}^{\text{لاً}} = \text{گ د و}$$

اس مساوات میں لاَ اور لاً کی قیمتیں لکھنے سے:—

$$٢(\text{حہَ} - \text{حہ}_{٢}) - \frac{\text{ع ح}}{\text{د}}\,\text{لوگ}_{\text{و}}\left[\frac{١ - \frac{\text{د}}{\text{ع}٢}\left(١ - \frac{٢\,\text{حہَ}^{٢}}{\text{ح}}\right)}{١ - \frac{\text{د}}{\text{ع}٢}\left(١ - \frac{٢\,\text{حہ}_{٢}^{٢}}{\text{ح}}\right)}\right] = \text{گ د و}$$

اگر باہر نکلنے والی گیس کا حجم اس نظام کے ساتھ باقرینہ ہو اور حہ کے مساوی ہو، یعنی ا اور ب نشانوں کے درمیان گیس کا حجم اگر حہ کے مساوی ہو جو وقت و میں پارہ کے نمایندہ سے باہر نکالی جاتی ہے تو

$$\text{حہَ} - \text{حہ}_{٢} = \text{حہ} \quad \text{اور} \quad \text{حہَ} + \text{حہ}_{٢} = \text{ح}$$

$$\therefore\ ٢\,\text{حہَ} = \text{ح} + \text{حہ} \quad \text{اور} \quad ٢\,\text{حہ}_{٢} = \text{ح} - \text{حہ}$$

اور اوپر کی مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے:—

$$٢\,\text{حہ} - \frac{\text{ع ح}}{\text{د}}\,\text{لوگ}_{\text{و}}\left[\frac{١ + \frac{\text{د حہ}}{\text{ع}٢\text{ح}}}{١ - \frac{\text{د حہ}}{\text{ع}٢\text{ح}}}\right] = \text{گ د و}$$

اب چونکہ $\frac{\text{د حہ}}{\text{ع}٢\text{ح}}$ بہت چھوٹی مقدار ہے اسلئے لوگ$_{\text{و}}$ کے سلسلہ کو پھیلانے میں اسکے اونچے قوت نما والی رقوم کو نظرانداز کیا جاسکتا ہے۔

$$\therefore\ ٢\,\text{حہ} - \frac{\text{ع ح}}{\text{د}}\left[\left\{\frac{\text{د حہ}}{\text{ع}٢\text{ح}} - \frac{١}{٢}\cdot\frac{\text{د}^{٢}\text{حہ}^{٢}}{\text{ع}^{٢}٢^{٢}\text{ح}^{٢}} \cdots\cdots\right\} - \left\{-\frac{\text{د حہ}}{\text{ع}٢\text{ح}} - \frac{١}{٢}\cdot\frac{\text{د}^{٢}\text{حہ}^{٢}}{\text{ع}^{٢}٢^{٢}\text{ح}^{٢}} \cdots\cdots\right\}\right] = \text{گ د و}$$

یعنی $\text{۲حہ} \cdot \frac{\text{ح۶}}{\text{د}} \cdot \frac{\text{۲دحہ}}{\text{ح۶ب}} = \text{گ دو}$

$$\therefore \text{حہ} = \frac{\pi\, \text{ف}^{۴}\, \text{دو}}{\text{۸ ل لہ}} = \frac{\pi\, \text{ف}^{۴}\, \text{مَ ج و}}{\text{۸ ل لہ بہ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱۸)$$

یہاں ہم نے پارہ کی کمیت مَ کی وجہ سے جو دباؤ پڑتا ہے اسکو $\frac{\text{مَ ج}}{\text{بہ}}$ لیا تھا۔ لیکن سطحی تناؤ کی باعث اور پارہ کے نمایندہ کے دونوں سروں کے انحنا کی وجہ سے جبکہ نمایندہ حرکت میں ہو، نمایندہ کے دونوں رخوں پر موثر فرق دباؤ $\text{د} = \frac{(\text{مَ} - \text{فہ})\,\text{ج}}{\text{بہ}}$ جہاں فہ ایک بہت چھوٹی مقدار ہے اور تجربہ کے لئے مستقل ہے۔ یہاں یہ امر قابل لحاظ ہے کہ مَ کی قیمت میں ایک بالکل چھوٹی مقدار کی کمی ہوگئی ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کا نمایندہ نلی کے دیواروں کے ساتھ، گرنے کے دوران میں کسی قدر چمیٹ جاتا ہے۔

حہ کی قیمت تجربہ میں کچھ تھوڑی سی متغیر ہوتی ہے، اسکی وجہ نمایندہ کی حرکت ہے لیکن $\frac{\text{دو}}{\text{حہ}}$ کی قیمت تجربہ میں ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔

$$\therefore \frac{\text{دو}}{\text{حہ}} = \text{گہ} = \text{مستقل}$$

ہم نے پہلے یہ فرض کیا ہے کہ حہ، نشانات ا اور ب کے درمیان گیس کا حجم ہے لیکن حقیقت یہ ہے کہ ان دونوں نشانات کے درمیان نمایندہ کی موجودگی سے

$\text{حہ} = \text{حا} - \frac{\text{مَ}}{\text{ثہ}}$ جہاں حا = ا اور ب کے درمیان صحیح حجم، اسکی قیمت ا اور ب کے درمیان پارہ بھر کر تولنے سے دریافت کی جاسکتی ہے۔

اور ثہ = پارہ کی کثافت

$$\therefore \text{گہ}\left(\text{حا} - \frac{\text{مَ}}{\text{ثہ}}\right) = \frac{(\text{مَ} - \text{فہ})\,\text{ج و}}{\text{بہ}}$$

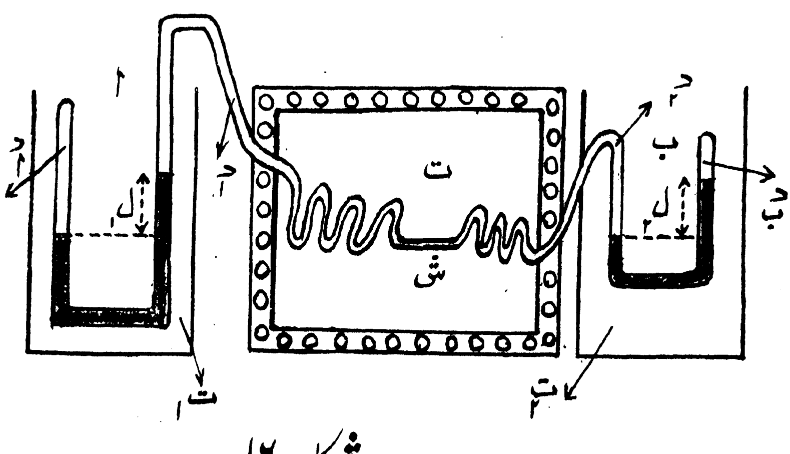
$$\text{یعنی}\ (\text{مَ} - \text{فہ}) = \frac{\text{گہ بہ}}{\text{ج و}}\left(\text{حا} - \frac{\text{مَ}}{\text{ثہ}}\right)$$

یہ مَ اور (حا − مَ/ش) کے درمیان خطی تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔ اسلئے مَ اور و کی مختلف قیمتیں لیکر منحنی مرتسم کرنے سے ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے جس کے میلان سے گہ/ج حاصل ہوتا ہے اور اس کی مدد سے گہ کی قیمت نکالی جاسکتی ہے۔ لہذا گیس کے لئے لہ کی صحیح قیمت مساوات (۱۸) سے دریافت کی جاسکتی ہے۔ اس خط کے مقطوعہ سے (حا − مَ/ش / و محور پر) فہ کی قیمت حاصل ہوجاتی ہے۔

اس طریقہ سے پروفیسر رینکن نے متعدد گیسوں کی لزوجیت دریافت کی اور یہ ثابت کیا کہ دباؤ کے ساتھ اسکا کوئی تعلق نہیں ہے۔

۱۹۲۸ء میں ایڈورڈ نے نیین کی لزوجیت صفر°ھ ـــ ۴۴۰°ھ کی وسعت کے اندر اسی لزوجیت پیما سے دریافت کی۔ اور ولیم نے صفر°ھ ـــ ۱۰۰۰°ھ تک اسکی پیمائش کرنے میں کامیابی حاصل کی اور یہ دریافت کیا کہ مختلف تپشوں پر گیسوں کی لزوجیت سے متعلق سدرلینڈ کے کلیہ میں کسی قدر فرق ہے۔

بخارات کی لزوجیت:— پروفیسر رینکن نے ۱۹۱۳ء میں برومین کے بخار کی لزوجیت دریافت کرنے کے لئے آلات جس طرح ترتیب دئے تھے ان



شکل ۱۶۱

کو شکل ۱۶ میں دکھایا گیا ہے۔ جن لانما نلیوں میں برومین مائع کی حالت میں رکھی گئی تھی، ان کو ا اور ب حماموں میں رکھا گیا ہے اور ان کی تپشیں ت_1 اور ت_2 مستقل رکھی گئی ہیں۔ چونکہ ت_1 تپش ت_2 سے زیادہ ہے، اس لئے بخاری دباؤ د_1، د_2 سے زیادہ ہوگا۔ $\text{د}_\text{ا}$ اور $\text{د}_\text{ب}$، دونوں نلیوں میں، علی الترتیب سیر شدہ دباؤ کی قیمتیں اُن خاص تپشوں پر ہیں۔ ب میں بخار ا سے آکر منجمد ہونے لگتا ہے اور لانما نلی میں ل_2 کی بلندی کے مساوی استوانہ نیچے اُتر آتا ہے۔ ا میں مائع کی سطحوں میں فرق ل_1 ہے۔ شعری نلی ش میں سے جب بخار گزرتا ہے تو یہ آتشدان کی مدد سے ت تپش تک زایہ گرم کیا جاتا ہے۔ مرغولہ نما نلیاں (جس طرح کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) آتشدان کے اندر اس لیے رکھی جاتی ہیں کہ بخارات ان میں سے گزرتے ہوئے آتشدان کی تپش تک گرم کئے جاسکیں۔

$$\text{د}_1 = \text{د}_\text{ق} - \text{ث}_1\,\text{ج}\,\text{ل}_1 \quad \text{اور} \quad \text{د}_2 = \text{د}_\text{ب} + \text{ث}_2\,\text{ج}\,\text{ل}_2$$

جہاں $\text{ث}_1 =$ برومین کے بخار کی کثافت ت_1° تپش پر

اور $\text{ث}_2 =$ 〃 〃 〃 〃 〃 ت_2°

میئر کے کلیہ سے $$\text{م} = \frac{\text{مے}}{\text{۸ت}} \cdot \frac{\pi\,\text{ف}^4}{16\,\text{ل لہ}}\left(\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2\right)$$

$$\text{اور}\quad \text{د}_1\,\text{ح}_1 = \frac{\pi\,\text{ف}^4}{16\,\text{ل لہ}}\left(\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2\right)$$

جہاں $\text{ح}_1 =$ تپش ت اور دباؤ د_1 پر فی ثانیہ تبخیر پانیوالے بخار کا حجم۔

کلیہ بائل اور شارل کی رو سے:- $\frac{\text{د}_1\,\text{ح}_1}{\text{ت}} = \frac{\text{د}_0\,\text{ح}_0}{\text{ت}_0}$

جہاں د_0 اور ت_0 کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش کی قیمتیں علی الترتیب ہیں، اور ح_0 اس تپش اور دباؤ پر فی ثانیہ تبخیر پانے والے بخار کا حجم ہے۔

$$\therefore \text{لہ} = \frac{\pi\,\text{ف}^4}{16\,\text{ل}}\left(\frac{\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2}{\text{د}_0\,\text{ح}_0\,\text{ت}}\right)\text{ت}_0$$

$$= \frac{\pi\ ف^{4}}{16\ ل}\left(\frac{د_{1}^{2} - د_{2}^{2}}{د_{0}\ م_{0}\ ت}\right) ت_{0}\ ث_{0} \quad\ldots\ldots\ldots (19)$$

جہاں $ث_{0}$ = کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش پر کثافت اور

$م_{0}$ = فی ثانیہ تبخیر پانے والے بخار کی کمیت کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش پر جس کی پیمائش گرم لانما نلی کی بلندی کے تغیر کی شرح سے کی جاتی ہے اگر کثافت معلوم ہو۔

لہٰذا اوپر کی مساوات میں $د_{1}$ اور $د_{2}$ کی قیمتیں درج کرنے سے برومین کے بخارات کی لزوجیت دریافت کی جا سکتی ہے۔ اس کے بعد ۱۹۲۴ء میں اسمیتھ اور ۱۹۲۹ء میں تیسینی نے اس آلہ میں خفیف سی تبدیلیاں کیں [۱۴]۔

اس طریقہ سے فائدہ یہ ہے کہ بغیر کسی علیحدہ داب پیما کے دباؤ کی پیمائش ہو سکتی ہے چونکہ شعری نلی میں سے گزرتے ہوئے بخارات ملطف ہو جاتے ہیں اس لئے گنڈسن نے یہ تجویز کی کہ اوپر کے ضابطہ سے لزوجیت کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اس کو $\left(1 + \frac{4\ جہ}{ف}\right)$ سے ضرب دینا ضروری ہے جہاں جہ تصحیحی جزو ہے اور جو سالمات کی اوسط آزاد راہ کے متناسب ہے۔

گیسوں کی لزوجیت پر دباؤ کا اثر:— گیسوں کے نظریہ تحرک سے میکسویل نے یہ ثابت کیا کہ لزوجیت پر دباؤ کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اس نتیجہ کی تصدیق پروفیسر رینکن اور دیگر اشخاص نے، دباؤ کی ایک بڑی وسعت تک کی ہے اور ہر حالت میں اس کو صحیح پایا۔

بہت ہی کم دباؤ پر (مثلاً پارہ کے $۰۱^{۲}$ مم کے نیچے) دباؤ کی کمی سے لزوجیت میں کمی واقع ہوتی ہے۔

اور بہت ہی اونچے دباؤ پر بھی میکسویل کا کہنا درست نہیں۔ اس کے متعلق دسویں باب میں بحث کی جائے گی۔

گیسوں کی لزوجیت پر تپش کا اثر:— عام طور پر تپش کے بڑھنے سے لزوجیت

میں اضافہ ہوتا ہے۔

میکسول کا بیان ہے کہ $لہ \propto ت^{\frac{1}{2}}$ جہاں ت = گیس کی تپش مطلق لیکن بعد میں $ق \propto \frac{1}{ص^{5}}$ کو کلیہ قوت فرض کرتے ہوئے، اس نے ایک کلیہ وضع کیا:—

$$لہ \propto ت$$

جہاں ق = دو سالمات کے درمیان کششی قوت

ص = سالمات کے درمیان فاصلہ

پروفیسر جیمن نے بعد میں صرف یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات کے درمیان دفع کی قوت $ق \propto \frac{1}{ص^{ن}}$ کی شکل کی ہوتی ہے یہ نتیجہ اخذ کیا:—

$$لہ \propto ت^{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{ن-1}\right)}$$ جہاں ن = کوئی صحیح عدد

اسکے بعد سدرلینڈ[18] نے کششی قوت ق کو $ف\left(\frac{1}{ص}\right)$ کے متناسب فرض کرتے ہوئے ایک کلیہ حاصل کیا جو حسب ذیل ہے:—

$$لہ \propto \frac{ت^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{س}{ت}} \propto \frac{ت^{\frac{3}{2}}}{س + ت}$$

جہاں س = ایک مستقل، جس کو سدرلینڈ کے مستقل سے موسوم کیا جاتا ہے۔ یہ ضابطہ تپش کی بڑی بڑی قیمتوں یعنی تقریباً ...اْم تک صحیح ثابت ہوا ہے۔ لیکن اس سے زائد تپش پر اسکا استعمال درست نہیں ہے۔

۱۹۲۴ء میں جونس نے دونوں کلیات قوت کو (یعنی جذب اور دفع دونوں کو) میکسول اور جیمن کی طرح فرض کرتے ہوئے یہ ثابت کیا:—

$$لہ \propto \frac{ت}{ت^{\frac{ن-گ}{۲(ن-1)}} + \frac{گ}{ت^{\frac{1}{2}}}}$$ جہاں گ = مستقل

سدرلینڈ کا کلیہ یوں لکھا جا سکتا ہے:۔ $لت = \frac{گہ\ ت^{\frac{3}{2}}}{س + ت}$

جہاں گہ = کوئی دوسرا مستقل

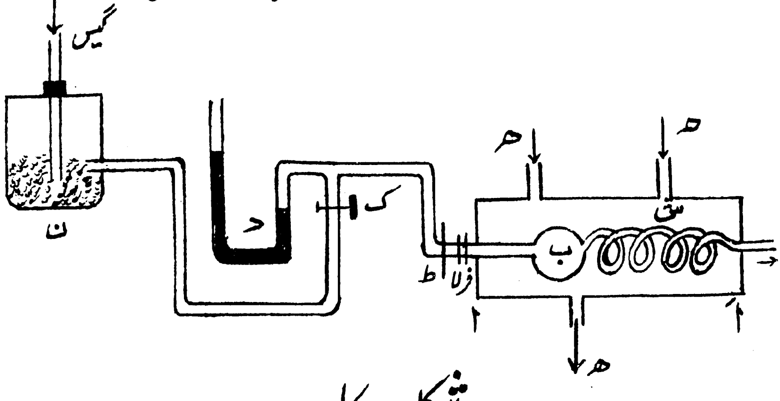
یعنی $\frac{گہ\ ت^{\frac{3}{2}}}{لت} = س + ت$

بطور تجربہ ہم اگر ت کو $\frac{ت^{\frac{3}{2}}}{لت}$ کے مقابلہ میں مرتسم کریں تو ایک خط مستقیم حاصل ہوتی ہے۔ اگر اس خط کو خارج کیا جاے تو یہ ت محور کو ایک نقطہ پر قطع کرے گی، اس نقطہ اور مبدء کے درمیانی فاصلہ سے سدرلینڈ کے مستقل س کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے اور اس خط کے ڈھلاؤ سے مستقل گہ کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

نظری طور پر سدرلینڈ کا ضابطہ، دسویں باب میں حاصل کیا جائے گا۔

سدرلینڈ کے مستقل (س) کی تجربہ کے ذریعہ دریافت۔

شکل ۱۷ع میں ۲ ۲ بیتس کا ایک بند استوانہ ہے جس کو روئی اور اون سے



شکل ۱۷ع

لپیٹ دیا جاتا ہے۔ اس اسطوانہ کے اندر شیشہ کا ایک بڑا جوفہ ب ہے جس کو شعری نلی نق سے احتیاط کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے۔ شعری نلی مرغولہ نما بنائی جاتی ہے۔ جوفہ کا دوسرا سرا پارے کے داب پیما د سے ملایا جاتا ہے۔ اس داب پیما میں، خشک کرنے والی ایک بوتل ن کے ذریعہ، ہوا یا گیس ٹونٹی ک کو کھول کر پمپ سے داخل کی جاتی ہے۔ بھاپ یا سرد پانی پیتل کے اسطوانہ میں سے گزارا جاتا ہے تاکہ شعری نلی میں سے گزرنے والی گیس کو کسی خاص تپش پر رکھا جا سکے۔ تجربہ کے وقت، داب پیما میں ہوا، پمپ کے ذریعہ داخل کی جاتی ہے اور ٹونٹی ک بند کر دی جاتی ہے۔ پارہ کی سطحوں میں باہمی فرق ہونے سے ہوا پر زائد دباؤ عمل کرتا ہے اور اس کی وجہ سے شعری نلی میں سے ہوا آہستہ آہستہ گزرتی ہے، اور چنانچہ داب پیما کی داہنی جانب پارہ کا اسطوانہ بتدریج بڑھنے لگتا ہے۔ ایک متحرک خوردبین (جس کو شکل میں نہیں دکھایا گیا ہے) میں پارے کے اسطوانہ کی داہنی ساق کو ماسکہ میں لایا جاتا ہے اور چشمہ والے پیمانہ کے کسی خاص نشان کو دیکھ لیا جاتا ہے۔ جب پارے کی ڈوری کا ہلالی سرا داہنی جانب بڑھتے ہوئے اس خاص نشان سے منطبق ہونے لگتا ہے تو ایک چلر کنی گھڑی چلا دی جاتی ہے۔ اس کے بعد متحرک خوردبین کو اُس کے پیمانہ پر کچھ فاصلہ (مثلاً "۵" ملی میٹر) اوپر اُٹھایا جاتا ہے، اور پھر جب پارے کی ہلالی سطح اس خاص نشان سے منطبق ہونے لگے تو چلر کنی گھڑی میں وقت کا وقفہ دیکھ لیا جاتا ہے۔ اس طرح زائد دباؤ کی ایک خاص قیمت سے کسی مقررہ دباؤ کی قیمت تک، وقت کے وقفہ کے متعدد مشاہدات حاصل کئے جاتے ہیں اور پھر ان سب وقفوں کا اوسط دریافت کر لیا جاتا ہے۔

دو تجربے کرنا ضروری ہے۔ ایک تجربہ میں، تپش کمرہ کی تپش کے مساوی رکھی جاتی ہے اور دوسرے تجربہ میں زائد دباؤ کی ان ہی قیمتوں کے لئے، بھاپ

کی تپش رکھنی ہوتی ہے یعنے کسی ایک ہی زائد دباؤ د سے، زائد دباؤ د تک پہنچنے میں جتنا وقفہ درکار ہوتا ہے، وہ دونوں صورتوں میں دریافت کرلیا جاتا ہے۔ درحقیقت، یہ طریقۂ عمل رینکن کے لزوجت پیما کی ایک خاص صورت ہے۔ پارہ کی ڈوری سے یہاں گیس ڈھکیلی جاتی ہے لیکن رینکن کے لزوجت پیما میں، پارے کا نمایندہ گیس کو ڈھکیلتا ہے۔

فرض کرو کہ کمرہ کی تپش ت ہے جو کہ ہلالی سرے سے ط تک تصور کی جاسکتی ہے۔

اور یہ بھی فرض کرو کہ اس حصہ کا دباؤ د، اور کسی وقت و میں حجم حہ ہے اور نیز بھاپ کی تپش یعنی جوفہ کے اندر گیس کی تپش ت ہے مرغولہ نما شعری نلی کے دوسرے سرے پر دباؤ ($\text{د}_{\text{.}}$) کرہ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہوگا۔

اب نلی میں ایک چھوٹی سی دھجی فرلا ط سے لا فاصلہ پر لو۔

لا پر تپش = ت کا کوئی تفاعل = ھ (ت)

∴ فرلا = ھَ (ت) فرت، جہاں ھَ (ت)، ھ (ت) کا تفرقی سر ہے۔

میئر کے ضابطہ سے

$$\text{م} = \frac{\text{ھ}}{\text{لا}_{\text{ت}}}\left(\text{د}'^{2} - \text{د}_{.}^{2}\right)\frac{\pi\,\text{ف}^{4}}{16\,\text{ل لہ}} \quad \cdots\cdots\cdots (۲۰)$$

$$\text{لیکن م} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{حہ}\,\text{ثہ}_{\text{ت}_1} + \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \text{ا}\;\text{فرلا}\;\text{ثہ}\right)$$

جہاں ثہ = گیس کی کثافت کمرہ کی تپش ت۱ پر

اور $\text{ثہ}_{\text{ت}}$ = 〃 〃 بھاپ 〃 ت 〃

اور $\text{ا}_{\text{ت}}$ فرلا = ط کی داہنی جانب اس چھوٹی سی دھجی کا حجم

$$\text{چونکہ} \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \text{ا}\;\text{فرلا}\;\text{ثہ} = \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \text{ا}\;\frac{\text{فرلا}\;\text{مد}}{\text{لا}_{\text{ت}}} = \frac{\text{ا}\,\text{د}\,\text{م}}{\text{لا}} \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \frac{\text{فرلا}}{\text{ت}} =$$

$$= \frac{\text{ا د م}}{\text{لا}} \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \frac{\text{ھ(ت) فرت}}{\text{ت}} =$$

$$= \frac{\text{ا د م}}{\text{لا}} \left(\text{۴(ت)} - \text{۴(ت}_1\text{)} \right) \text{ فرض کرو}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}} \left[\frac{\text{دم}}{\text{لا}} \left\{ \frac{\text{حہ}}{\text{ت}_1} + \text{ا} \left(\text{۴(ت)} - \text{۴(ت}_1\text{)} \right) \right\} \right]$$

$$= \frac{\text{دم}}{\text{لا ت}_1} \cdot \frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}}$$

مساوات (۲۰) سے

$$\frac{\text{دم}}{\text{لا ت}_1} \cdot \frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}} = \frac{\text{م}}{\text{لا ت}} \left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \frac{\pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل لہ}}$$

$$\therefore \text{د فرحہ} = \frac{\text{ت}_1}{\text{ت}} \left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \frac{\pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل لہ}} \cdot \text{فرو}$$

گیس کے مجموعی حجم ح کے لئے جو و ثانیوں میں گزرتا ہے تکملانے سے :-

$$\text{د ح} = \frac{\text{ت}_1}{\text{ت}} \left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \frac{\pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل لہ}} \cdot \text{و}$$

$$\therefore \text{لہ}_{\text{ت}} = \frac{\text{ت}_1}{\text{ت}} \left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \cdot \frac{\pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل د ح}} \cdot \text{و} = \frac{\text{ت}_1}{\text{ت}} \cdot \text{و بہ}$$

جہاں $\text{بہ} = \frac{\left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل د ح}}$ اور $\text{لہ}_{\text{ت}}$ = ت تپش پر گیس کی لزوجت۔

تجربہ میں جبکہ کمرہ کی تپش ت_1 ہو تو $\text{ت}_1 = \text{ت}$ اور $\text{لہ}_{\text{ت}_1} = \text{لہ}$

فرض کرو کہ وقت $\text{و} = \text{و}_1$ تب

$$\text{لہ}_{\text{ت}_1} = \text{و}_1 \text{ بہ} \qquad \text{(۲۱)}$$

تجربہ کے دوسرے حصہ میں جبکہ وہ بھاپ کی تپش ت پر کیا جاتا ہے، چونکہ بڑے جوفہ کے حجم کے مقابلہ میں، بھاپ کے اسطوانہ کی بیرونی نلی کا حجم بالکل چھوٹا ہوتا ہے اسلئے ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ شعری نلی میں داخل ہونے والی گیس کی تپش، بھاپ کی تپش ت کے مساوی ہے، یعنی پارے کے نمائندہ اور نشان ط کے درمیان گیس ت تپش پر ہے۔

لہٰذا اس صورت میں $\text{ت}_{۱} = \text{ت}$ اور وقت = و

∴ $\text{ل}_{\text{ت}} = \text{و}\ \text{ہ}$ .... (۲۲)

∴ مساوات (۲۱) اور (۲۲) سے

$$\frac{\text{ل}_{\text{ت}}}{\text{ل}_{\text{ت}_{۱}}} = \frac{\text{و}}{\text{و}_{۱}} = \left(\frac{\text{گہ}\ \text{ت}^{\frac{۳}{۲}}}{\text{س} + \text{ت}}\right) \times \left(\frac{\text{س} + \text{ت}_{۱}}{\text{گہ}\ \text{ت}_{۱}^{\frac{۳}{۲}}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{و}}{\text{و}_{۱}} = \left(\frac{\text{س} + \text{ت}_{۱}}{\text{س} + \text{ت}}\right) \cdot \frac{\text{ت}^{\frac{۳}{۲}}}{\text{ت}_{۱}^{\frac{۳}{۲}}} \quad .... (۲۳)$$

اس مساوات سے سدرلینڈ کے مستقل س کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

موصلیت حرارت اور کسی گیس کی لزوجت :- گیسوں کے نظریۂ تحرک سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ موصلیت حرارت اور لزوجت کے درمیان کوئی خاص تعلق ضرور ہے، یعنی

$\text{مہ} = \text{لہ} \cdot \text{ن}_{\text{ح}}$ جہاں $\text{ن}_{\text{ح}}$ = مستقل حجم پر کسی گیس کی حرارت نوعی

اور مہ = گیس کی موصلیتِ حرارت

گیس کے سالمات کو لچکدار کروں سے تعبیر کرتے ہوئے بعد میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ

$\text{مہ} = \text{ٹہ}\ \text{لہ}\ \text{ن}_{\text{ح}}$

جہاں ٹہ = مستقل = ۲٫۵۰ (پروفیسر چیپمین[۱۹] کے مطابق)

اس مساوات کو عملی طور پر جانچا گیا اور ایک جوہری گیسوں کے لئے یہ صحیح ثابت بھی ہو چکی ہے، لیکن ایسی گیسوں مثلاً ایتھیلین، کاربن ڈائی آکسیڈ وغیرہ کے لئے تجربی نتائج اور اس ضابطہ میں مطابقت نہیں ہوتی، صرف مطابقت اس وقت ہوتی ہے جبکہ ہم ث = $\frac{1}{4}$(٩ سہ - ٥) لیں۔

$$\text{جہاں سہ} = \frac{\text{گیس کی حرارت نوعی مستقل دباؤ پر}}{\text{گیس کی حرارت نوعی مستقل حجم پر}}$$

ذیل میں مختلف تپشوں پر چند گیسوں کی لزوجت کی قیمتیں دی گئی ہیں:-

گیس	تپش °م	لزوجت س۔گ۔ث اکائیوں میں
ہوا	صفر	٠٫٠٠٠١٧١
	١٥	٠٫٠٠٠١٨١
ہائیڈروجن	صفر	٠٫٠٠٠٠٨٦٤
	١٠٠	٠٫٠٠٠١٠٦
آکسیجن	صفر	٠٫٠٠٠١٨٧
	٥٤	٠٫٠٠٠٢١٦
نائٹروجن	صفر	٠٫٠٠٠١٦٦
	٥٤	٠٫٠٠٠١٩٠
کلورین	صفر	٠٫٠٠٠١٢٩
	٢٠	٠٫٠٠٠١٤٧
کاربن ڈائی آکسیڈ	صفر	٠٫٠٠٠١٣٩
	١٠٠	٠٫٠٠٠١٨٧
نائٹرس آکسیڈ	صفر	٠٫٠٠٠١٣٥
	١٠٠	٠٫٠٠٠١٨٣

کاربن مان آکسیڈ	صفر	٠٫٠٠٠١٦٣
	٢٠	٠٫٠٠٠١٨٤
پانی (بخار)	صفر	٠٫٠٠٠٠٩١
	١٠٠	٠٫٠٠٠١٣٤

ذیل کی جدول میں کمیاب گیسوں کے لئے لزوجتوں کی وہ قیمتیں دی گئی ہیں جن کو پروفیسر رینکن نے دریافت کیا تھا :—

گیس	تپش °م	لزوجت س۔گ۔ث اکائیوں میں
ہیلیم	٩٫٨	٠٫٠٠٠١٩١
نیین	١٠٫١	٠٫٠٠٠٣٠٤
آرگن	١٢٫٣	٠٫٠٠٠٢١٧
کرپٹن	١٠٫٦	٠٫٠٠٠٢٤١
زینن	١٠٫٩	٠٫٠٠٠٢١٨

ذیل کی جدول میں سدرلینڈ کے مستقل کی قیمتیں دی گئی ہیں :—

گیس	سدرلینڈ کا مستقل "س"	سدرلینڈ کا مستقل "ک"
ہوا	١٢٠	٠٫٠٨٧
ہائیڈروجن	٧٢	٠٫٠٧٧
آکسیجن	١٢٧	٠٫٠٨٩
نائٹروجن	١١٠	٠٫٠٨٥
ہیلیم	٨٠	٠٫٠٧٨

آرگن	۱۷۰	۰٫۰۹۸
کاربن ڈائی آکسیڈ	۲۴۰	۰٫۱۱۴
کاربن مان آکسیڈ	۱۰۲	۰٫۰۸۳
نائٹرس آکسیڈ	۳۱۳	۰٫۱۳۰

ذیل کی جدول میں $\frac{مہ}{لہ\, ن_ح}$ کی وہ قیمتیں دیگئی ہیں جو تجربہ سے حاصل ہوئیں اور ان کا مقابلہ ٹہ کی قیمتوں سے کیا گیا ہے :-

گیس	مشاہدہ کی ہوئی قیمتیں $\frac{مہ}{لہ\, ن_ح}$	$ٹہ = \frac{1}{4}(9\, نہ - 5)$
ہائیڈروجن	۱٫۸۹	۱٫۹۰
ہیلیم	۲٫۴۸	۲٫۴۴
کاربن مان آکسیڈ	۱٫۸۸	۱٫۹۱
نائٹروجن	۱٫۹۱	۱٫۹۱
ہوا	۱٫۹۱	۱٫۹۱
آکسیجن	۱٫۹۳	۱٫۹۰
کاربن ڈائی آکسیڈ	۱٫۵۴	۱٫۷۲
اتھیلین	۱٫۵۵	۱٫۵۵

Chapter VIII.

(۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson"; P210 (1922)
A Monograph of Viscometry by "G. Barr"; P17 (1931)

(۲) General Physics E. Edser; P504 (1926)

(۳) Properties of Matter "Newman & Searle"; P209 (1928)

(۴) Viscosity of Liquids "E. Hatschek"; P63 (1928)

(۵) ,, ,, ,, P65 (1928)

(۶) Phil. Trans; A, P1 (1894)

(۷) Viscosity of Liquids "E. Hatschek"; P79 (1928)

(۸) ,, ,, ,, P99, (1928)

(۹) Phil. Trans; AP397 (1894)

(۱۰) Viscosity of Liquids "Dunstan & Thole" P31 (1914)

(۱۱) Trans Faraday Soc. 18. P3 (1923)

(۱۲) Viscosity of Liquids "E. Hatschek"; P29 (1928)

(۱۳) J. Amer. Chem. Soc. 35. P737 (1913)

(۱۴) General Physics "E. Edser" P516 (1926)

(۱۵) Phil Mag. 42. P1022 (1921)

(۱۶) Proc. Roy. Soc. A83 P265 (1910)

(۱۷) A Monograph of Viscometry by "G. Barr"; P169 (1931)

(۱۸) Phil. Mag. 36. P507 (1893)

(۱۹) Properties of Matter "Newman & Searle"; P242 (1928)

(۲۰) Text Book of Heat "Saha & Srivastava"; P132 (1931)

نواں باب

نفوذ اور ولوجی دباؤ

نفوذ:۔ ایک گہرے برتن کے پیندے میں کسی نمک کے محلول کو ڈالدیا جائے اور احتیاط کے ساتھ پانی سے برتن کو اس طرح بھرا جائے کہ محلول میں رویں نہ پیدا ہوں تو یہ دیکھا گیا ہے کہ محلول برتن کے پیندے میں نہیں رہتا بلکہ پورے برتن میں سالمات کی حرکت کی وجہ سے بتدریج پھیل جاتا ہے۔
پوٹاسیم پرمنگنیٹ یا کاپر سلفیٹ، یا کرومک ترشہ کے مرتکز محلول کو کسی خاص گہرائی تک شیشہ کے گہرے برتن میں رکھ کر صاف پانی آہستہ آہستہ اس طرح اُس میں ڈالا جائے کہ مائع میں کوئی رویں نہ پیدا ہوں تو ابتدا میں رنگین اور بے رنگ حصہ کے درمیان نمایاں طور پر ایک واضح سطح نظر آتی ہے لیکن کچھ دیر کے بعد اوپر والا حصہ بتدریج رنگین ہونے لگتا ہے اور برتن کے نچلے حصہ والے مائع کا رنگ پہلے کی نسبت پھیکا ہونے لگتا ہے۔ رنگ کی یہ تبدیلی اسوقت تک برابر جاری رہتی ہے جب تک کہ پورے برتن میں مائع کا رنگ ایک نہ ہو جائے۔ اس عمل کو "نفوذ" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ مائعات میں یہ عمل گیسوں کے مقابلہ میں بہت سست ہوتا ہے۔
گیریہم پہلا شخص تھا جس نے ۱۸۵۱ء میں نفوذ پر تجربے کئے۔ اس نے ایک چوڑے منہ کی بوتل لی اور اس میں زیر تجربہ محلول کو بھر دیا۔ اس بوتل کو ایک اور بڑے برتن میں رکھ کر اتنا پانی اس برتن میں ڈالا گیا کہ پانی کی سطح کھلی بوتل کے اوپر آگئی۔ چند دنوں کے بعد بوتل کے اندر کے محلول کو یہ دریافت کرنے کی غرض سے جانچا گیا کہ کتنا نمک نفوذ کے ذریعہ بڑے برتن

میں پہنچ گیا ہے۔ اسوقت یہ معلوم ہوا کہ (الف) مختلف نمکوں کے محلولوں کی شرح نفوذ مختلف ہوتی ہے۔ (ب) نمک، شکر، دھاتی ترشوں وغیرہ کے محلول، البومن، گوند، جیلیٹن وغیرہ کی بہ نسبت بہت زیادہ تیزی سے نفوذ پزیر ہوتے ہیں۔ (ج) حل شدہ اشیاء کی وہ مقدار جو اکائی وقت میں ایک پرت سے دوسرے پرت تک گزرتی ہے، ان پرتوں کے درمیان جو فرقِ ارتکاز ہوگا اس کے متناسب ہوتی ہے۔ (د) نفوذ کی شرح، تپش کے ساتھ بڑھتی ہے۔ سادہ ریاضی کی شکل میں ۱۸۵۵ء میں فِک نامی ایک شخص نے ان نتائج کو پیش کیا تھا چنانچہ یہ فِک کے کلیہ سے تعبیر کیے جاتے ہیں۔

فک کا کلیہ:- (1) فوریئر کے موصلیت حرارت کے کلیہ کو پیش نظر رکھکر فِک نے نفوذ کے کلیہ کو اخذ کیا تھا۔ موصلیت حرارت کا کلیہ یوں بیان کیا جا سکتا ہے:-

$$\text{ح} = \text{م}\,\frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

جہاں ح حرارت کی وہ مقدار ہے جو اکائی وقت میں ایسی دو متوازی مستویوں کے اکائی رقبہ میں سے گزرتی ہے جن کے درمیان چھوٹا سا "فرلا" فاصلہ ہوتا ہے اور دونوں کی تپش علی الترتیب ت اور ت + فرت ہوتی ہے۔ م موصلیت حرارت کی شرح ہے۔

اسی طرح سے نفوذ کا کلیہ بھی لکھا جا سکتا ہے:-

$$\text{حہ} = \text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں حہ کسی نمک کی وہ مقدار ہے جو اکائی وقت میں ایسی دو متوازی مستویوں کے اکائی رقبہ میں سے گزرتی ہے جن کے درمیان بہت ہی چھوٹا فاصلہ "فرلا" ہو اور دونوں کے ارتکاز علی الترتیب ع اور ع + فرع ہوں۔ مہ ایک مستقل ہے جسکو حل پزیر شئے کے لئے نفوذ کی قدر کہتے ہیں۔

محلول میں اکائی رقبوں کے دو مستوی ایسے لو جو ایک دوسرے سے فرلا فاصلہ پر ہوں اس صورت میں پہلی مستوی سے اکائی وقت میں نمک کی درآمد مساوات (۲) سے مہ $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ کے مساوی ہے ۔ اکائی وقت میں دوسری مستوی سے نمک کی برآمد مساوی ہے

$$\text{فر}\left(\text{مہ}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right) + \text{مہ}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} =$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{مہ}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right)\text{فرلا} + \text{مہ}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

لہٰذا دونوں مستویوں کی درمیانی فضا میں $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{مہ}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right)\text{فرلا}$ نمک کی مقدار کا اضافہ اکائی وقت میں ہوتا ہے ۔ دونوں مستویوں کے درمیان چونکہ حجم فرلا ہے لہٰذا نمک کی مقدار میں اضافہ فی اکائی حجم فی اکائی وقت مساوی ہے مہ $\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2}$ اور یہ ارتکاز کی شرح تبدیلی کے مساوی ہے ۔ لیکن شرح تبدیلی ارتکاز مساوی ہے $\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$ جہاں فرت وقت کے وقفہ کی ایک چھوٹی مقدار ہے ۔

$$\text{لہٰذا}\quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{مہ}\ \frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2} \qquad \text{......} \quad (۳)$$

یہ تفرقی مساوات نفوذ کے سوالات کے حل کرنے میں بہت ہی مفید ہے بشرطیکہ ابتدائی حالات دیئے جائیں ۔

مثلاً ع صفر ارتکاز کا ایک ایسا محلول لو جو ایک اسطوانہ نما برتن میں ل طول رکھتا ہے ۔ فرض کرو کہ ل طول کا محلل اس پر اوپر کی جانب سے منطبق کیا جاتا ہے ۔ مساوات (۳) کو حل کرنے سے ل طول میں کسی نقطہ پر کسی وقت میں ارتکاز ع کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے جبکہ لا کی وسعت کے حدود (۲) لا = صفر سے لا = ل تک لئے جائیں جبکہ ت = صفر ہو اور نیز جبکہ ت = ∞ ہو :-

$$\text{ع} = \frac{\text{ع}_{\text{صفر}}}{\text{ل} + \text{ل}_{1}}\left[\text{ل} + \frac{\text{۴ل}}{\pi} - \text{ے}\ \text{و}^{-\text{صہ ن}^{2}\left(\frac{\pi}{\text{ل}}\right)^{2}\text{ت}}\ \text{جب}\frac{\text{ن}\pi\text{لا}}{\text{ل}}\right] \ldots (۴)$$

جبکہ ن = ۱، ۳، ۵، ۷، وغیرہ

نفوذ کی قدر کی دریافت :۔ مساوات (۴) سے مہ کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے بشرطیکہ وقتاً فوقتاً کسی نقطہ پر ارتکاز کی تبدیلی (مائع کو بحیثیت مجموعی کسی طرح چھیڑنے کے بغیر) معلوم کی جا سکے۔

۱۸۵۶ء میں لارڈ کلون نے ایک انتصابی برتن کے نچلے نصف حصہ میں محلول بھر کر اوپر کے نصف حصہ میں خالص پانی ڈالا۔ مختلف کثافتوں والے شیشہ کے منکے جب محلول میں رکھے گئے تو ابتدا میں وہ پانی اور محلول کے مقام اتصال پر تیرتے رہے لیکن جوں جوں نفوذ کا عمل ہونے لگا وہ علیحدہ ہونے لگے اور ان میں سے جو زیادہ وزن دار تھے نیچے بیٹھنے اور ہلکے اوپر آنے لگے۔ معلوم کثافت کے منکوں کے مقام سے محلول میں نمک کی تقسیم یا کسی نقطہ پر ارتکاز کسی خاص وقت میں معلوم کیا گیا اور اس طرح مہ کی قیمت دریافت کی گئی۔ اس طریقہ میں ایک یہ اعتراض پیدا ہوتا ہے کہ منکوں پر ہوا کے بلبلے پیدا ہو سکتے ہیں جن سے ان کی اوچھال میں تبدیلی ہو سکتی ہے۔

وائینر نے ۱۸۹۳ء محلول کے مختلف نقاط پر انعطاف نماؤں کی پیمائش کر کے مختلف پرتوں کے ارتکاز کو کسی خاص وقفہ کے بعد دریافت کرنے میں کامیابی حاصل کی۔ اس سے پہلے اس نے یہ دریافت کر لیا تھا کہ ارتکاز کے ساتھ ساتھ کس طرح انعطاف نما بدلتا ہے۔ شکر کے محلولوں کی صورت میں تقطیب کے مستوی کے گھماؤ کے ذریعہ ارتکاز کی قیمت دریافت کی گئی تھی۔

۱۸۷۹ء میں فک کے کلیہ کی تصدیق، زنک سلفیٹ کے محلول کی صورت میں، ملغم جست کی دو تختیوں کے درمیان قوت محرکہ برقی کو ناپ کر لیف و ببر نے کی تھی۔

اس نے پہلے یہ دریافت کر لیا تھا کہ قوت محرکۂ برق تختیوں سے مس کرنے والے محلول کے ارتکاز کے ساتھ ساتھ کس طرح متغیر ہوتی ہے بعد میں لُلوڈ نے ۱۹۲۲ء میں اور کلیک نے ۱۹۲۴ء میں، ایک خاص وقفہ کے بعد کسی نقطہ پر نفوذ کے دوران میں ارتکازوں کی قیمتیں نور کی شعاعوں کے خماؤ کے ذریعہ دریافت کی تھیں۔ شعاعوں کا یہ خماؤ گہرائی کے ساتھ کثافت کی تبدیلی کی وجہ سے اس صورت میں پیدا ہوتا ہے جبکہ شعاعیں اوپر کی سطح پر تقریباً مماسی زاویئے بناتی ہوئی واقع ہوں (۴)۔

یہاں اس کو یاد رکھنا چاہیئے کہ نفوذ کی قدر "مہ" کی قیمت نمک اور محلل کی نوعیت کے علاوہ تپش اور محلول کی طاقت پر بھی منحصر ہوتی ہے۔

یہ اوپر بیان کیا جا چکا ہے کہ گیسوں میں نفوذ مائعات کی بہ نسبت بہت زیادہ تیز واقع ہوتا ہے۔ گیسوں کے لئے بھی مائعات کی طرح فک کے کلیہ کی شکل کے ایک کلیہ کا اطلاق کیا جا سکتا ہے۔ دو ایسی گیسوں پر غور کرو جن میں سے پہلی کی کثافت کی ڈھال کسی خاص نقطہ پر فرث/فرلا ہے۔ ایسی صورت میں پہلی گیس کی کمیت جو افقی مستوی کے اکائی رقبہ میں سے اکائی وقت میں گزرے گی مہ فرث/فرلا کے مساوی ہوگی جہاں ث پہلی گیس کی کثافت کسی قائم افقی مستوی سے لا بلندی کے اوپر ہے اور مہ اُن دونوں گیسوں کی نوعیت پر منحصر ہے۔ مہ کی پیمائش آسان اس لئے نہیں ہے کہ دونوں گیسوں کی ابتدائی معلوم تقسیم کی ترتیب نہایت دشوار کام ہے۔

لاشمیٹ اور اوبرمئیر نے ایک لمبا اسطوانہ ایسا استعمال کیا جو ایک قرص سے دو حصوں میں تقسیم ہو جاتا تھا۔ اس کے نچلے حصہ میں زیادہ کثیف گیس رکھی گئی تھی اور اوپر کے حصہ میں ہلکی۔ اس کے بعد قرص یا

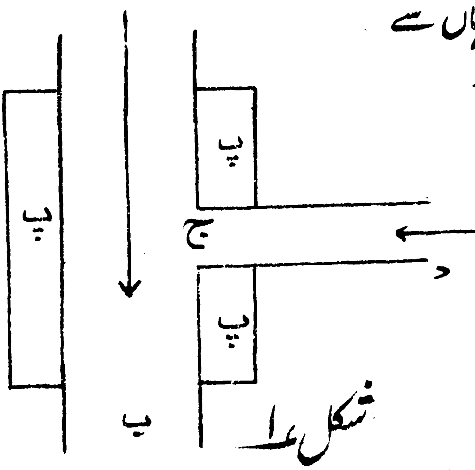
دیا فرغمہ کو باحتیاط تمام ردیں پیدا کرنے کے بغیر ہٹا دیا گیا اور گیسوں کو باہمی نفوذ پذیر ہونے کا موقع دیا گیا۔ ایک خاص وقت کے بعد قرص کو پھر رکھ دیا گیا اور اسطوانہ کے اوپر کے حصہ میں بھاری گیس کی مقدار معلوم کر لی گئی۔ اس سے مہ کی قیمت دریافت کی گئی۔ ۱۸۸۲ء میں وٹیز نے تڑامان کے تداخل پیما کے ذریعہ، کسی مقام پر انعطاف نما کی وقتاً فوقتاً پیمائش کر کے گیسوں کا تناسب کاربن مان آکسائڈ اور ہوا کی صورت میں دریافت کیا تھا۔ گیسوں کی صورت میں بھی مائعات کی طرح مہ کی قیمت تپش کے ساتھ بڑھتی ہے۔ گیسوں میں مہ دباؤ سے بھی متاثر ہوتا ہے یعنی گیسوں کے آمیزہ کے مجموعی دباؤ سے مہ کی قیمت تناسب معکوس رکھتی ہے۔

ایسی صورت میں جبکہ نفوذ پذیر گیسوں میں سے ایک کسی مائع کا بخار ہوتا ہے اور گیس اور اس بخار کے مابین نفوذ کی قدر مہ دریافت کرنا ہو تو ایک اسطوانہ نما نلی کے پیندے میں کسی تپش پر کچھ مائع لیا جاتا ہے اور بخارات سے پاک گیس کی تیز رو نلی کے منہ پر سے گزاری جاتی ہے[۴]۔ جب کچھ دیر تک یہ رو گزرتی ہے تو بخار کی یکساں کثافت کی ڈھال نلی میں پیدا ہوجاتی ہے۔ بخار کی یہ کثافت کی ڈھال $\frac{د}{ل}$ ہے جہاں د مائع کا اعظم بخاری دباؤ دوران تجربہ کی تپش پر ہے اور ل، نلی کے منہ سے مائع کی سطح تک کا فاصلہ ہے۔ اکائی وقت میں نلی سے باہر بہنے والے بخار کی کمیت، جو اکائی وقت میں تبخیر پانے والے مائع کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے (اور جس کی پیمائش آسانی سے کی جاسکتی ہے) مہ $\frac{د}{ل}$ کے مساوی ہوتی ہے۔ لہذا د اور ل کی قیمتیں معلوم ہوں تو مہ کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔ اس طریقہ سے اسٹیفان اور ونکلمین نے مہ کی قیمتیں مختلف بخارات اور گیسوں کے لئے دریافت کی ہے۔

ڈینیل[۵] نے یہ ثابت کیا کہ سیسہ، جست، ٹین، سونے اور چاندی میں

سے پارے کا نفوذ ہوتا ہے۔ سر رابرٹ آسٹن نے دھاتوں میں سے دھاتوں کے نفوذ پر مسلسل تجربے کئے اور مختلف دھاتوں کے لئے مہ کی قیمتیں سیسہ، ٹین، وغیرہ میں سے، مختلف تپشوں پر دریافت کیں۔

گیسوں اور بخارات کے مابین نفوذ کے مظاہر کا اطلاق:- پارہ کے نفوذی پمپ میں، نفوذ کے اس عمل سے مدد لیکر ایک قلیل وقفہ میں زبردست خلا پیدا کیا جا سکتا ہے۔ گائیڈے کے نفوذی پمپ کا اصول شکل ۱۰ میں دکھلایا گیا ہے۔ ہوا سے معرّا پارے کے بخارات نلی میں ا سے ب کی طرف گزرتے ہیں۔



شکل ۱۰

ج د ایک نلی ہے جہاں سے گیس داخل ہوتی ہے۔ گیس پارے کے بخارات میں نفوذ پزیر ہوتی ہے اور بخار کے ساتھ نیچے جاتی ہے۔ پ پانی سے سرد کئے ہوئے تھالے ہیں جن کی مدد سے بخارات منجمد ہوتے ہیں۔ گائیڈے نے یہ ثابت کیا کہ گیس کا وہ حجم جو بخارات میں نفوذ پزیر ہوتا ہے، نلی ج د کے طول اور قطر اور نیز گیس کی مہ کی قیمت پر منحصر ہوتا ہے۔ نلی ج د کا قطر گیس کے سالمات کے اوسط آزاد راستہ کے رتبہ کا ہوتا ہے۔

گائیڈے نے مختلف اقسام کے نفوذی پمپ کی ساخت کے متعلق تجاویز پیش کئے ہیں۔ ایسے تمام پمپ $۱۰^{-۷}$ مم پارہ کے دباؤ تک خلا پیدا کر سکتے ہیں۔

گائیڈے اور فولمر کے نفوذی پمپ کے عمل اور ترتیب وغیرہ کے متعلق معلومات ایک خاص فہرست ہے [نشان نمبر ۱۳۱، ای لیبولڈ ناخ فولگر اے جی کولن (۱۹۳۱)] کے ذریعہ دئے گئے ہیں۔

جب کبھی اس سے زیادہ خلا درکار ہوتا ہے تو اس قسم کے متعدد پمپ ہم توازی جوڑ دئے جاتے ہیں۔ نظریہ تحرک کے باب میں سالمی پمپ کا تفصیلی بیان دیا گیا ہے۔

ولوجی دباؤ:۔ گائے کے مثانہ کو جو الکُہل سے بھرا ہوا ہو اگر مضبوطی کے ساتھ بند کر کے پانی میں ڈبویا جائے تو پہلے تو وہ پھولنے لگتا ہے اور آخر کار پھٹ جاتا ہے۔ اگر بجائے الکُہل کے اس میں پانی بھرا جائے اور الکُہل میں اس کو ڈبویا جائے تو پھولنے کے عوض وہ سُکڑنے لگتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ پانی تو مثانہ میں سے گزر جاتا ہے لیکن الکُہل نہیں گزر سکتا۔ راؤلٹ نے دریافت کیا کہ جب خوک کا مثانہ بطور جھلی استعمال کیا گیا تو میتھل الکُہل، ایتھر کی سمت میں گزر گیا اور ربر کو جب جھلی کی طرح استعمال کیا گیا تو ایتھر الکُہل کی سمت میں گزر گیا۔ اس سے ظاہر ہے کہ سمت کا انحصار جھلی کی نوعیت پر ہے۔ ایسی جھلی جو کسی ایک گیس یا مائع کو اپنے میں سے گزرنے دیتی ہے لیکن کسی دوسرے گیس یا مائع کو نہیں گزرنے دیتی نیم نفوذ پذیر جھلی کہلاتی ہے۔ مثلاً گائے کا مثانہ جیسا کہ اوپر ذکر کیا جا چکا ہے نیم نفوذ پذیر جھلی ہے۔

کاپر فیرو سائینڈ کی جھلی بھی اسی طرح نیم نفوذ پذیر ہوتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ پانی تو اس میں سے گزر جاتا ہے لیکن کاپر سلفیٹ کے سالمات نہیں گزر سکتے۔ پلیڈیم کا ورق بھی نیم نفوذ پذیر ہے کیونکہ ہائیڈروجن تو اس میں سے گزر جاتی ہے لیکن نائیٹروجن نہیں گزر سکتی۔ پانی کی ایک جھلی میں سے امونیا تو گزر جاتی ہے لیکن آکسیجن نہیں گزر سکتی۔ نیم نفوذ پذیر جھلی میں سے

کسی گیس یا مائع کا گزر جانا "ولوج" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

سب سے پہلے فقر نے ولوجی کلیات کا مطالعہ کیا۔ ایک مسامدار برتن کو اس نے کیوپرک سلفیٹ کے محلول سے بھر کر پوٹاسیم فیرو سائینڈ کے ہلکائے ہوئے محلول میں ڈبو دیا۔ (۶) اس برتن کے دیواروں کے مساموں میں کیوپرک فیرو سائینڈ کی ایک جھلی پیدا ہوئی جس میں سے پانی تو نفوذ پزیر ہوتا تھا لیکن شکر نہیں گزر سکتی تھی۔ اس برتن کو دھو کر شکر کے محلول سے بھر دیا گیا اور اس کے منہ کو ایک ڈاٹ سے بند کرنے کے بعد (ڈاٹ میں سے ایک لمبی نلی حسب شکل ۲ گزاری گئی) جب اس کو خالص پانی میں ڈبو دیا گیا تو انتصابی نلی میں محلول چڑھنے لگا۔ اس سے ظاہر ہوا کہ نیم نفوذ پزیر جھلی میں سے پانی شکر کے محلول کی طرف گزر جاتا ہے۔

شکل ۲

جب اس انتصابی نلی میں مائع ایک خاص بلندی تک پہنچ جاتا ہے تو مسامدار برتن میں مزید پانی نہیں داخل ہوتا۔ نلی میں مائع کے استوانہ کی وجہ سے جو دباؤ پڑتا ہے وہ برتن میں مزید پانی کے داخل ہونے کو روک دیتا ہے۔ یہ اندرونی دباؤ جو پانی کے داخلہ کو مسدود کر دیتا ہے مسامدار برتن میں کے مائع کا "ولوجی دباؤ" کہلاتا ہے۔ لہذا کسی محلول کے ولوجی دباؤ کی پیمائش کرنا ہو تو سب سے پہلے خالص محلل سے اس کے محلول کو نفوذ پزیر جھلی کی مدد سے (جو محلل کو تو گزرنے دیتی ہو لیکن منحل کو نہیں گزرنے دیتی) جدا کرنا چاہیئے اور پھر اس ماسکونی دباؤ کو ناپنا چاہیئے جو محلول کے رخ پر جھلی کے اندر محلل کو داخل ہونے سے باز رکھتا ہے۔

فیفر نے یہ دریافت کیا کہ مستقل تپش پر ہلکائے ہوئے محلولوں کے لئے ولوجی دباؤ محلول کے ارتکاز کے متناسب ہوتا ہے۔

اگر د ولوجی دباؤ ہو اور مستقل تپش ت پر محلول کا ارتکاز ع ہو تو

د $\propto$ ع اور ساتھ ہی ساتھ د $\propto$ ت

$\therefore$ د $\propto$ ت . ع

یعنی د = لا ت ع جہاں لا = مستقل

اگر ع = منحل کے گرام سالمات فی لیٹر محلول میں

تو ع = ع$_1$ / ح

جہاں ع$_1$ = منحل کے گرام سالمات کی تعداد ح لیٹر محلول میں

$\therefore$ دح = ع$_1$ لا ت .... (۵)

کسی گیس کیلئے ہم جانتے ہیں کہ دح = ع$_ب$. لا ت ...... (۶)

جہاں د = گیس کا دباؤ اور ع$_ب$ = گیس کے گرام سالمات کی تعداد ح لیٹر میں

اور لا = گیس کا مستقل فی گرام سالمہ

لہٰذا ان دونوں مساواتوں کا مقابلہ کرنے سے فانٹ ہاف نے ہلکائے ہوئے محلولوں کی صورت میں یہ بیان کیا کہ کسی محلول کا ولوجی دباؤ گیس کے اس دباؤ کے مساوی ہے جو کہ منحل کی صورت میں ہوتا ہے جبکہ منحل گیس کی حالت میں ہو اور اتنا ہی حجم گھیرتا ہو جتنا کہ محلول کے لئے اسی ہی تپش پر درکار ہے۔

مساوات (۵) سے ـــ

دح = ک$_1$ / ل$_1$. لا ت .... (۷)

جہاں ک$_1$ = منحل کا وزن گرام میں اور ل$_1$ = منحل کا سالمی وزن

لہٰذا مساوات (۷) سے ظاہر ہے کہ کسی محلول کا ولوجی دباؤ ہمیں حل شدہ

شے کے سالمی وزن کی دریافت میں مدد دیتا ہے۔

بخاری دباؤ:۔ کسی محلول کا بخاری دباؤ $د_ا$ محلل کے بخاری دباؤ $د_ب$ سے کم ہوتا ہے۔ ($د_ب - د_ا$) بخاری دباؤ کا اُتار ہے اور ($\frac{د_ب - د_ا}{د_ب}$) بخاری دباؤ کا اضافی اُتار ہے۔ راولٹ نے مسلسل تجربے کئے اور مختلف محلولوں اور محللوں کے لئے بخاری دباؤ کے اضافی اُتار کی قیمتوں کی پیمائش کی۔ اس نے یہ ثابت کیا کہ کسی خاص ارتکاز کے لئے یہ تپش کے تابع نہیں ہے لیکن محلول کے ارتکاز کے راست متناسب ہے۔ اس جملہ

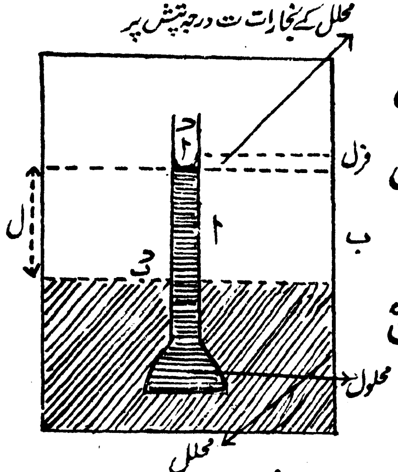
$$\frac{د_ب - د_ا}{د_ب} \cdot \frac{ل_ا}{ک_ا} \cdot \frac{ک_ب}{100}$$

کو بخاری دباؤ کے سالمی اُتار سے موسوم کیا جاتا ہے۔

جہاں $ک_ا$ سے مراد منحل کے گراموں کی تعداد ہے محلل کے $ک_ب$ گراموں میں۔ راؤلٹ نے دریافت کیا کہ اگر ہم اس جملہ کو محلل کے سالمی وزن $ل_ب$ سے تقسیم کریں تو تمام محللوں کے لئے نتیجہ تقریباً ۰.۰۱۰۴ کے مساوی حاصل ہوتا ہے۔ اس نے یہ بھی دریافت کیا کہ ($\frac{د_ب - د_ا}{د_ب}$) تقریباً $\frac{ع_ا}{ع_ب}$ کے مساوی ہے جہاں $ع_ا$ محلول کے ایک خاص حجم میں منحل کے گرام سالمات کی تعداد ہے اور $ع_ب$ سے مراد اسی حجم کے محلول میں محلل کے گرام سالمات کی تعداد ہے۔

اب ہم ایک آسان طریقہ سے بخاری دباؤ کے اُتار اور دلوجی دباؤ کے درمیان ایک رشتہ حاصل کرنے کی کوشش کریں گے شکل ۳۲ پر غور کرو۔

ا ایک لمبی نلی ہے جس میں محلول رکھا جاتا ہے۔ ا کے پیندے میں ایک نیم نفوذ پذیر جھلی لگی ہوئی ہے۔ ب ایک بند برتن ہے (جس میں ہوا نہیں ہے) اور اس میں محلل رکھا جاتا ہے۔ دلوج کی وجہ سے ا میں



شکل ۳

مائع کی سطح ب کی سطح سے بقدر ل زیادہ ہوگی۔ نیم نفوذ پذیر جھلی کے دونوں جانب دباؤ میں فرق د ہے اور یہی محلول کا ولوجی دباؤ ہوگا۔

لہٰذا د مساوی ہے ج ث ل کے، جہاں ث محلول کی کثافت ت° تپش پر ہے۔

لیکن اب محلل کا بخاری دباؤ اگر ولوجی دباؤ سے زیادہ ہو تو اس بلندی کو متاثر کرتا ہے اور اسطوانہ کو نیچے کی طرف ڈھکیلتا ہے

اب بخارات کی ایک چھوٹی سی دھجی پر غور کرو جس کی بلندی فرل ہے اور فرض کرو کہ اس پر دباؤ $(\text{د}_{\text{ب}} - \text{فر}\,\text{د}_{\text{ب}})$ ہے۔

ایسی صورت میں $-\text{فر}\,\text{د}_{\text{ب}} = \text{ج}\ \text{ث}\ \text{فرل}$

جہاں ث = محلل کے بخارات کی کثافت ت° تپش پر

لیکن $\text{د}_{\text{ب}} = \dfrac{\text{ث}\ \text{لا}\ \text{ت}}{\text{لٔ}_{\text{ب}}}$

∴ ان دونوں مساواتوں سے:—

$$-\text{فر}\,\text{د}_{\text{ب}} = \frac{\text{ج}\ \text{د}_{\text{ب}}\ \text{لٔ}_{\text{ب}}}{\text{لا}\ \text{ت}}\,.\,\text{فرل}$$

یعنی $-\dfrac{\text{فر}\,\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{ب}}} = \dfrac{\text{لٔ}_{\text{ب}}\ \text{ج}\ \text{فرل}}{\text{لا}\ \text{ت}}$

اس کو تکملانے سے $-\displaystyle\int_{\text{د}_{\text{ب}}}^{\text{دَ}_{\text{ب}}} \frac{\text{فر}\,\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{ب}}} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{\text{لٔ}_{\text{ب}}\ \text{ج}\ \text{فرل}}{\text{لا}\ \text{ت}}$

$$\text{یعنی لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{۱}}} = \frac{\text{ئ}_{\text{ب}}\ \text{ج ل}}{\text{لاٹ}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۸})$$

$$\therefore \text{د} = \text{ج ثہ ل} = \frac{\text{ثہ لاٹ}}{\text{ئ}_{\text{ب}}} . \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{۱}}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۹})$$

اس سے کسی محلول کے ولوجی دباؤ اور بخاری دباؤ کے اُتار کے درمیان ضروری تعلق معلوم ہو جاتا ہے۔

ہلکائے ہوئے محلولوں کے لئے مساوات (۵) کو یوں لکھا جا سکتا ہے:-

$\text{د ح}_{\text{ب}} = \text{ع}_{\text{۱}} . \text{لاٹ}$ جہاں $\text{ح}_{\text{ب}}$ = محلل کا حجم جس میں منحل کے $\text{ع}_{\text{۱}}$ گرام سالمات ہیں۔

$$\therefore \text{د} = \frac{\text{ع}_{\text{۱}} . \text{لاٹ} . \text{ثہ}_{\text{ب}}}{\text{ک}_{\text{ب}}}$$

جہاں $\text{ثہ}_{\text{ب}}$ = محلل کی کثافت اور $\text{ک}_{\text{ب}}$ = محلل کی کمیت

اب مساوات (۹) سے:-

$$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{۱}}} = \frac{\text{د ئ}_{\text{ب}}}{\text{ثہ لاٹ}} = \frac{\text{ع}_{\text{۱}}\ \text{ثہ}_{\text{ب}}\ \text{ئ}_{\text{ب}}}{\text{ثہ ک}_{\text{ب}}} =$$

$$= \frac{\text{ع}_{\text{۱}}}{\text{ع}_{\text{ب}}} . \frac{\text{ثہ}_{\text{ب}}}{\text{ثہ}}$$

$$\text{لیکن لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{۱}}} = \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{۱} + \frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{۱}}}{\text{د}_{\text{۱}}} \right)$$

$$= \left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{۱}}}{\text{د}_{\text{۱}}} \right) - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{۱}}}{\text{د}_{\text{۱}}} \right)^{\text{۲}} \ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq \left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{۱}}}{\text{د}_{\text{۱}}} \right)$$

اور کسی بہت ہی ہلکائے ہوئے محلول کیلئے $ت_ب \simeq ت_۱$

اور $د_ب \simeq د_۱$

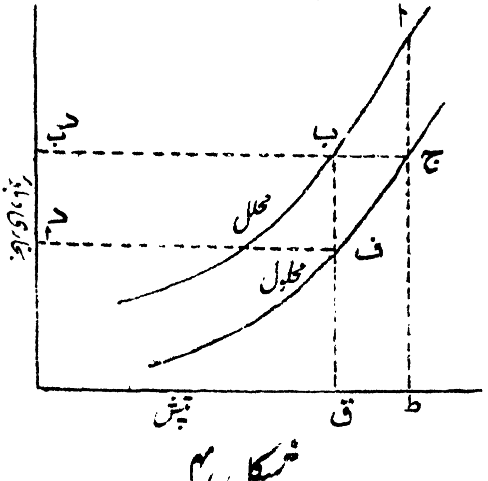
$$\therefore \frac{د_ب - د_۱}{د_ب} = \frac{ع_۱}{ع_ب} \quad .... \quad (۱۰)$$

اس سے بخاری دباؤ کے اضافی اُتار اور ارتکاز کے درمیان تعلق ظاہر ہوتا ہے اور یہ تپش کے غیر تابع ہے۔

محلولوں کے نقطۂ جوش اور نقطۂ انجماد:۔

کوئی مائع اُس وقت جوش کہاتا ہے جبکہ اس کا بخاری دباؤ، بیرونی دباؤ کے مساوی ہوتا ہے۔ ایک غیر طیران پذیر شے کو محلل میں حل کرنے کا اثر یہ ہوتا ہے کہ بخاری دباؤ کم ہو جاتا ہے۔

لہذا اُبلنے کیلئے محلول کی تپش کو اور زیادہ اونچا کرنا ہوتا ہے تاکہ بخاری دباؤ اور بیرونی دباؤ میں مساوات قائم ہو جائے۔ محلول کے نقطۂ جوش کے اس چڑھاؤ کو حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۱۴

شکل ۱۴ میں اوپر والا منحنی ایک محلل کے بخاری دباؤ اور اسکی تپش میں اور نیچے کا منحنی محلول کے بخاری دباؤ اور اسکی تپش میں تعلق بتاتا ہے۔

محلل کے دباؤ $د_ب$ پر محلول کو جوش دینے کے لئے محلول کی تپش کو بقدر ط ق بڑھانے کی ضرورت ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ نقطۂ جوش میں یہ اضافہ یا چڑھاؤ ط ق، Δ ت کے مساوی ہے۔

شکل میں اج = ب ج مس اب̂ ج =

$$= \Delta \text{ت} \, \frac{\text{فر دب}}{\text{فر ت}}$$

لیکن کلاؤشیس اور کلیپیران کی مساوات(۵) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{\text{فر دب}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{مخ دب}}{\text{لا ت}^{2}} \quad \ldots\ldots (11)$$

جہاں مخ = محلل کی سالمی حرارت مخفی (ابخار کی)

اور ت = محلل کا نقطۂ جوش

$$\therefore \text{اج} = \frac{\Delta \text{ت مخ دب}}{\text{لا ت}^{2}}$$

$$\therefore \frac{\text{اج}}{\text{ج ط}} = \frac{\Delta \text{ت مخ}}{\text{لا ت}^{2}} = \frac{\text{ب ف}}{\text{ف ق}} = \frac{\text{دب} - \text{د}_{1}}{\text{د}_{1}}$$

$$\therefore \Delta \text{ت} = \frac{\text{دب} - \text{د}_{1}}{\text{د}_{1}} \cdot \frac{\text{لا ت}^{2}}{\text{مخ}} \quad \ldots\ldots (12)$$

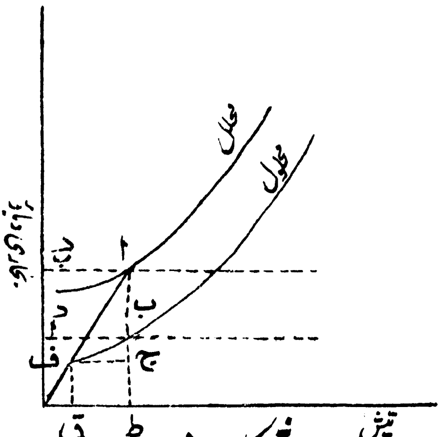
کسی محلول کے نقطۂ جوش کے چڑھاؤ کی یہ ایک عام مساوات ہے۔

اب مساوات (۹) اور (۱۲) سے:—

$$\Delta \text{ت} = \frac{\text{د لٔ}_{\text{ب}} \text{ ت}}{\text{ثہ مخ}} \quad \ldots\ldots (13)$$

اس مساوات سے محلل کا سالمی وزن دریافت کیا جا سکتا ہے۔

اسی طرح کسی محلول کے نقطۂ انجماد کا اُتار خالص محلل کے نقطۂ انجماد کے مقابلہ میں دریافت کیا جا سکتا ہے۔ شکل ۵ میں اوپر کا منحنی ایک محلل کے



شکل ۵ـ

بخاری دباؤ اور اس کی تپش کے درمیان تعلق بتاتا ہے اور نچلا منحنی محلول کے لئے تپش اور بخاری دباؤ میں تعلق ظاہر کرتا ہے۔ محلول کو محلل کے بخاری دباؤ پر منجمد کرنے کے لئے محلول کی تپش میں بقدر ط ق کمی کرنی ہوگی۔ فرض کرو کہ یہ کمی یا اُتار △ ت کے مساوی ہے۔ اب شکل ۵ـ میں

$$\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{ا}} = \text{ا ب} = \text{ا ج} - \text{ب ج}$$

$$= \text{ج ف مس ا}\hat{\text{ف}}\text{ج} - \text{ج ف مس ب}\hat{\text{ف}}\text{ج}$$

$$= \triangle\text{ت} \left\{ \frac{\text{فر د}_{\text{ب}}}{\text{فر ت}_{\text{ا}}} - \frac{\text{فر د}_{\text{ب}}}{\text{فر ت}_{\text{۲}}} \right\}$$

جہاں $\frac{\text{فر د}_{\text{ب}}}{\text{فر ت}_{\text{ا}}}$ = محلل کے تصعیدی منحنی کا ڈھال

اور $\frac{\text{فر د}_{\text{ب}}}{\text{فر ت}_{\text{۲}}}$ = محلل کے تبخیر کے منحنی کا ڈھال

اب کلاؤسیس اور کلیپیران کی مساوات سے :-

$$\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{ا}} = \triangle\text{ت} \left\{ \frac{\text{جہ د}_{\text{ب}}}{\text{لا ت}^{۲}} - \frac{\text{مخ د}_{\text{ب}}}{\text{لا ت}^{۲}} \right\}$$

$$= \frac{\triangle\text{ت د}_{\text{ب}}}{\text{لا ت}^{۲}} (\text{جہ} - \text{مخ})$$

$$= \frac{\triangle\text{ت د}_{\text{ب}} \text{ فہ}}{\text{لا ت}^{۲}}$$

جہاں جہ = محلل کیلئے تصعید کی سالمی حرارت مخفی

فہ = محلل کے انجماد کی سالمی حرارت مخفی

ت = محلل کا نقطۂ انجماد

$$\therefore \Delta ت = \frac{لا\, ت^{2}}{فہ} \cdot \frac{د_{ب} - د_{۱}}{د_{ب}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

یہ کسی محلول کے نقطۂ انجماد کے اُتار کی ایک عام مساوات ہے۔

مساوات (۱۰) اور (۱۴) سے

$$\Delta ت = \frac{لا\, ت^{2}}{فہ} \cdot \frac{ع_{۱}}{ع_{ب}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۵)$$

(۸) بکمین کے تپش پیما کے ذریعہ مختلف ارتکازوں کے محلولوں کے نقطۂ جوش کا چڑھاؤ اور نقطۂ انجماد کا اُتار دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات (۱۳) اور (۱۵) کی تصدیق عملی طور پر کی جا سکتی ہے۔

راؤلٹ نے یہ معلوم کیا کہ کسی محلول کیلئے نقطۂ جوش کا چڑھاؤ اور نقطۂ انجماد کا اُتار اس کے ارتکاز کے متناسب ہوتا ہے۔

Chapter IX.

(۱) Pogg Annalen 94. P59 (1855)

(۲) Properties of Matter by Newman & Searle P288 (1928)

(۳) Proc. Roy. Soc. A. 34, P3 (1932)
Proc Phys. Soc. 36, P.4 (1924)

(۴) Properties of Matter by Poynting & Thomson P.197 (1922)

(۵) ,, ,, P.204 (1922)

(۶) General Physics for Students by E. Edser P.574 (1926)

(۷) Text Book of Heat by M. N. Saha & B. N. Srivastava P443 (1931)

(۸) Text Book of Practical Physics by W. Watson, P258 (1926)

دسواں باب

نظریۂ تحرک

مادہ کے متعلق، نظریۂ تحرک ان مفروضات پر مبنی ہے کہ مادہ بے حد چھوٹے چھوٹے ذرات پر، جن کو جواہر اور سالمات سے تعبیر کیا جاتا ہے، مشتمل ہے۔ ایک ہی کیمیائی شئے کے سالمات، شکل جسامت اور کمیت وغیرہ میں بالکل یکساں ہوتے ہیں۔ ایک اور مفروضہ یہ بھی ہے کہ ہر شئے کے سالمات مستقل طور پر حرکت کرتے رہتے ہیں اور یہ حرکت، اس شئے کی تپش پر منحصر ہوتی ہے۔ حرکت کی وجہ سے، ان سالمات میں توانائی بالفعل ہوتی ہے۔ ٹھوس اشیا اور مائعات میں، سالمات ایک دوسرے کے بالکل قریب ہوتے ہیں لیکن گیس میں سالمات کے قطر کا مقابلہ کرتے، کسی دو قریبی سالمات کے درمیان اوسط فاصلہ معتدبہ ہوتا ہے۔ گیس کے سالمات آپس میں اکثر ٹکراتے رہتے ہیں اور ہر تصادم کے بعد ان کی رفتار کی سمت اور قیمت دفعتاً بدل جاتی ہے۔ گیسوں اور مائعات میں، سالمات کے درمیان جاذبہ کی قوت عمل کرتی ہے۔ مائعات کی صورت میں چونکہ سالمات قریب قریب ہوتے ہیں اس لئے ان میں گیس کے سالمات کی بہ نسبت، قوت جاذبہ بھی زیادہ ہوتی ہے۔ اگر کسی برتن میں گیس رکھی ہوئی ہو تو اس برتن کے دیواروں پر دباؤ پڑتا ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ان سالمات کے درمیان دفع کی ایک قوت بھی جو ان کو ایک دوسرے سے جدا کرنے کی کوشش کرتی ہے عمل پیرا ہے۔ سالمات کی شکل کی نوعیت کے متعلق چونکہ ہمارے پاس بہت ہی کم ثبوت ہے اس وجہ سے یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ چھوٹے لچک دار کرے ہوتے ہیں۔ کرے فرض کرنے کی

وجہ یہ ہے کہ یہ سادہ ترین ہندسی شکل ہے جو اختیار کی جا سکتی ہے۔ کامل گیس کے نظریہ سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ سالمات صرف ہندسی نقطے ہیں جن کی کمیتیں بہت چھوٹی ہوتی ہیں۔ اس باب میں ہم گیسوں کے (اور کسی حد تک مائعات کے بھی) نظریۂ تحرک سے بحث کریں گے۔ ٹھوس کے لئے چونکہ نظریۂ تحرک ابھی تک تکمیل کو نہیں پہنچ سکا اس وجہ سے اسکا ذکر اس کتاب میں نہیں کیا جائے گا۔

کامل گیس کا دباؤ:— ایک کامل گیس سے مراد ایسی گیس ہے جسکے سالمات بالکل چھوٹے فرض کئے جاتے ہیں اور آپس میں، یہ ایک دوسرے پر سوائے تصادم کی صورت کے، ناقابل ذکر قوتوں سے عمل کرتے ہیں۔ ایک کامل گیس کو ایسے ایک مکعب میں فرض کرو جس کا ضلع اکائی ہے اور یہ بھی فرض کرو کہ سالمات کا ایک حصہ $ر_۱$ رفتار سے، اس کی ایک سطح کے علی القوائم حرکت کر رہا ہے۔ توانائی اور معیار حرکت کے بقا کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ سالمات سطح سے ٹکرانے کے بعد اسی رفتار سے واپس ہوتے ہیں۔ لہذا ایک سالمہ کے معیار حرکت میں تصادم کے دوران میں تبدیلی، $۲ م ر_۱$ کے مساوی ہوگی جہاں $م$ = سالمہ کی کمیت۔

اس سطح سے ایک سالمہ $\frac{ر_۱}{۲}$ دفعہ فی ثانیہ ٹکراتا ہے لہذا معیار حرکت میں فی ثانیہ تغیر $= ۲ م ر_۱ \times \frac{ر_۱}{۲} = م ر_۱^۲$

چونکہ سطح پر جو دباؤ واقع ہوتا ہے وہ فی ثانیہ معیار حرکت کی تبدیلی کے مساوی ہے۔

لہذا ایک سالمہ سے سطح پر جو دباؤ واقع ہوتا ہے وہ $= م ر_۱^۲$

$\therefore$ سطح پر تمام سالمات سے جو دباؤ پڑتا ہے $= د = \Sigma م ر_۱^۲$

فرض کرو کہ ع سالمات فی مکعب سمر کیلئے $ر_۱^۲$ کا اوسط $= \overline{ر_۱^۲}$

تب $\overline{ر_۱^۲} = \frac{\Sigma ر_۱^۲}{ع}$ $\quad \therefore د = م ع \overline{ر_۱^۲}$

اگر $\overline{س_{۲}^{۲}}$ اور $\overline{س_{۳}^{۲}}$ دیگر دو عمودی سمتوں میں اوسط مربع رفتاروں کی تعبیر کریں تو چونکہ سالمات برتن کے کسی حصہ میں مجتمع ہونے کا تقاضا نہیں رکھتے اس لئے $\overline{س_{۱}^{۲}} = \overline{س_{۲}^{۲}} = \overline{س_{۳}^{۲}}$ ۔ اگر $س^{۲}$ حاصل اوسط مربع رفتار ہو تو

$$س^{۲} = \overline{س_{۱}^{۲}} + \overline{س_{۲}^{۲}} + \overline{س_{۳}^{۲}} \quad \text{یعنی} \quad \overline{س_{۱}^{۲}} = \frac{۱}{۳} س^{۲}$$

$\therefore د = \frac{۱}{۳} م ع س^{۲}$ لیکن $ع م = ثہ$ یعنی گیس کی کثافت کے

$$\therefore د = \frac{۱}{۳} ثہ س^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{یعنی}\ د = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} ثہ س^{۲} = \frac{۲}{۳} ق \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں ق = توانائی بالفعل فی اکائی حجم

لہذا مساوات (۱) سے ہم گیس کی جذر اوسط مربع رفتار س کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔

ہائیڈروجن کے لئے س کی قیمت صفر درجہ مئی پر ۴۱۰۰ میل فی گھنٹہ دریافت کی گئی ہے۔

گیس کے آسان کلیات :۔ اگر دو گیس ایک ہی دباؤ د پر ہوں تو مساوات (۱) سے

$$د = \frac{۱}{۳} م_{۱} ع_{۱} س_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۳} م_{۲} ع_{۲} س_{۲}^{۲}$$

جہاں $م_{۱}$، $ع_{۱}$ اور $س_{۱}$ پہلی گیس سے اور $م_{۲}$، $ع_{۲}$ اور $س_{۲}$ دوسری گیس سے متعلق ہیں۔

میکسول نے یہ ثابت کیا کہ ایک ہی تپش پر ایک قسم کی گیس کے سالمات کی اوسط توانائی بالفعل دوسری قسم کی گیس کے سالمات کی اوسط توانائی بالفعل کے مساوی ہوتی ہے یعنی

$$\frac{۱}{۲} م_{۱} س_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۲} م_{۲} س_{۲}^{۲}$$

$\therefore \text{ع}_1 = \text{ع}_2$

اس سے ظاہر ہے کہ دونوں گیسوں میں ایک ہی تپش اور دباؤ پر فی مکعب سمر سالمات کی تعداد مساوی ہے ۔ اس کلیہ کو کلیہ ائیوگیڈرو سے تعبیر کیا جاتا ہے ۔

اوپر کی مساوات (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ $\text{د} = \frac{1}{3}\,\text{ثہ}\,\text{ر}^2$ ۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ کسی گیس کا دباؤ، اس کی کثافت سے راست اور اسکے حجم سے معکوس تناسب رکھتا ہے بشرطیکہ اس کی تپش مستقل رہے ۔ اسکو کلیہ بائیل سے موسوم کیا جاتا ہے ۔

ثہ_1، ثہ_2 وغیرہ مختلف کثافتوں کی متعدد گیسیں جن کی اوسط مربع رفتاریں بالترتیب ر_1^2، ر_2^2، ر_3^2 وغیرہ ہوں ایک ہی حجم کی لے کر اگر ملادی جائیں تو مجموعی حاصل دباؤ د حسب ذیل ہوگا :۔

$$\text{د} = \frac{1}{3}\,\text{ثہ}_1\,\text{ر}_1^2 + \frac{1}{3}\,\text{ثہ}_2\,\text{ر}_2^2 + \ldots\ldots = \text{د}_1 + \text{د}_2 + \ldots\ldots$$

یعنی متعدد گیسوں کے آمیزہ کا دباؤ ان کے علیحدہ علیحدہ دباؤ کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے ۔

یہ ڈالٹن کا جزئی دباؤ کا کلیہ کہلاتا ہے ۔

ایک کامل گیس کے لئے ہم یہ جانتے ہیں کہ اگر اسکا دباؤ د، حجم ح، اور تپش ت درجہ مطلق ہو تو $\text{د}\,\text{ح} = \overline{\text{لا}}\,\text{ت}$

جہاں $\overline{\text{لا}}$ ایک مستقل ہے جسکی قیمت م اور ع کی قیمتوں پر منحصر ہوتی ہے ۔

کسی شے کی اتنی کمیت کو جو اس شے کے سالمی وزن کے مساوی ہو عموماً "گرام سالمہ" سے تعبیر کیا جاتا ہے، کسی گیس کا ایک گرام سالمہ جو حجم حہ گھیرتا ہے وہ اس گیس کا سالمی حجم کہلاتا ہے ۔

لہذا کسی کامل گیس کی مساوات کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں :۔

$\text{د}\,\text{حہ} = \text{لا}\,\text{ت}$ جہاں لا ایک مستقل ہے جو گیس کے ایک گرام سالمہ سے متعلق ہے ۔

مساوات (۱) سے $\text{د} = \frac{1}{3}\,\frac{\text{کَ}}{\text{حہ}}\,\text{ر}^{2}$

یعنی $\text{د حہ} = \frac{\text{کَ}}{3}\,\text{ر}^{2}$ جہاں کَ = سالمی وزن

$\therefore\ \frac{1}{3}\,\text{کَ}\,\text{ر}^{2} = \text{لا ت}$ .... (۳)

اسی طرح $\frac{1}{3}\,\text{م}\,\text{ر}^{2} = \text{لا ت}$ .... (۴)

$\therefore\ \frac{\text{لا}}{\text{لاَ}} = \frac{\text{کَ}}{\text{م}} = \text{ن}$ .... (۵)

جہاں ن ایوگیڈرو کا مستقل کہلاتا ہے اور اس کی قیمت $= ۶ر۰۶۲ \times ۱۰^{۲۳}$ یعنی گیس کے ایک گرام سالمہ میں سالمات کی تعداد اتنی ہے۔ کسی گیس کے لئے لا کی قیمت $۸ر۲۸ \times ۱۰^{۷}$ کے مساوی ہے۔ یہ حرارت کے معادل جیلی کی اس قیمت سے جو ارگ فی گرام حرارہ کے رقوم میں لکھی جاتی ہے تقریباً دوگنی ہے۔

مساوات (۳) سے $\text{ر}^{2} = \frac{\text{۳ لا ت}}{\text{کَ}}$

$\therefore$ ر^{2} کی قیمت گیس کی تپش مطلق کے لحاظ سے بدلتی ہے۔

مساوات (۴) اور (۵) سے فی سالمہ گیس کی اوسط توانائی

بالفعل $= \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ر}^{2}$

$= \frac{\text{۳ لا ت}}{\text{۲ ن}}$

رفتاروں کی تقسیم کے متعلق میکسول کا کلیہ[1]: — کسی گیس کے خواص کا مطالعہ کرنا ہو تو ہم کو رفتاروں کی تقسیم کا کلیہ جاننا ضروری ہے۔ اسکا یہ مطلب ہے کہ کتنے سالمات کوئی خاص رفتار رکھتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ تمام سالمات کی رفتاریں یکساں نہیں ہوسکتیں۔ اگر بالفرض کسی خاص لمحہ میں اتفاقیہ طور پر یہ یکساں ہو بھی جائیں تو دوسرے ہی لمحہ میں سالمات کے تصادم کی وجہ سے اُن کی رفتاروں میں بڑی حد تک تبدیلی واقع ہوگی۔ لہذا سالمات

کی رفتاریں صفر سے لیکر لاانتہا ہی تک، مختلف ہو سکتی ہیں۔ کلارک میکسول نے ۱۸۵۹ء میں اسکے متعلق ایک کلیہ پیش کیا جو خالصتاً "احتمال" پر غور کرنے سے، اس نے حاصل کیا تھا۔

فرض کرو کہ گیس کی کچھ مقدار کسی برتن میں مستقل حالات کے تحت رکھی ہوئی ہے۔ اگر سالمات کی تعداد اس میں کافی طور پر زیادہ ہو تو وہ ایک غیر متبدل حالت اختیار کرے گی اور اسکے فی مکعب سم سالمات کی تعداد ع کی قیمت میں تصادم کی وجہ سے کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوگی۔ تمام سمتوں میں مجموعی طور پر سالمات کی اوسط رفتاریں بھی ایک ہی ہوں گی۔ اگر ہر سالمہ کی رفتار کو لا، ما، یا سمتوں میں تحلیل کیا جائے تو فرض کرو $س_1$، $س_2$ اور $س_3$ علی الترتیب اس کے اجزائے تحلیلی ہیں جو ایک دوسرے سے بالکل آزاد ہیں۔

فرض کرو کہ جن سالمات کی رفتاریں $س_1$ اور $س_1$ + فر $س_1$ کے درمیان ہیں ان کی تعبیر ف ($س_1$) فر $س_1$ سے کی جاتی ہے جہاں $س_1$ کے تفاعل یعنی ف ($س_1$) کی قیمت دریافت طلب ہے۔ اسی طرح ایسے سالمات جن کی رفتاریں $س_2$ اور $س_2$ + فر $س_2$ کے درمیان ہوں فرض کرو کہ ف ($س_2$) فر $س_2$ ہے اور جن کی رفتاریں $س_3$ اور $س_3$ + فر $س_3$ کے درمیان ہوں ف ($س_3$) فر $س_3$ سے تعبیر کئے جاتے ہیں۔

جن سالمات کی رفتاروں کے اجزائے تحلیلی $س_1$ اور $س_1$ + فر $س_1$، $س_2$ اور $س_2$ + فر $س_2$، $س_3$ اور $س_3$ + فر $س_3$ کے درمیان ہوں ان کی دریافت کا احتمال، علیحدہ علیحدہ احتمالات کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا یعنی = ف ($س_1$) ف ($س_2$) ف ($س_3$) فر $س_1$ فر $س_2$ فر $س_3$

فرض کرو کہ حاصل رفتار کی تعبیر س سے ہوتی ہے جس کی وجہ سے
$س^2 = (س_1^2 + س_2^2 + س_3^2)$ ۔

رفتار کی ان سمتوں کی تعداد جن کے سروں کے نقاط فر سا$_1$ فر سا$_2$ فر سا$_3$ حجم کے عنصر میں ہوں گے ع ف (سا$_1$) ف (سا$_2$) ف (سا$_3$) فر سا$_1$ فر سا$_2$ فر سا$_3$ کے مساوی ہوگی

اس عدد کا انحصار سا کی قیمت پر ہونا ضروری ہے۔ یعنی یہ عدد =

= ع فہ (سا) فر سا$_1$ فر سا$_2$ فر سا$_3$

جہاں فہ (سا) = سا کے کسی تفاعل کے

∴ ع ف (سا$_1$) ف (سا$_2$) ف (سا$_3$) = ع فہ (سا)

= ع ھ (سا^2) جہاں ھ کسی دوسرے تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔

∴ ف (سا$_1$) ف (سا$_2$) ف (سا$_3$)

= ھ (سا$_1^2$ + سا$_2^2$ + سا$_3^2$) .... (۶)

اب سا کی کسی غیر متغیر یا خاص قیمت کے لئے ھ (سا^2) کی قیمت مستقل ہوگی۔

یعنی فر {ھ (سا^2)} = صفر

یعنی فر {ھ (سا$_1^2$ + سا$_2^2$ + سا$_3^2$)} = صفر

∴ سا کی ایک غیر متغیر یا خاص قیمت کے لئے :-

فر {ف (سا$_1$) ف (سا$_2$) ف (سا$_3$)} = صفر

یعنی فَ (سا$_1$) فر سا$_1$ ف (سا$_2$) ف (سا$_3$) +

+ فَ (سا$_2$) فر سا$_2$ ف (سا$_1$) ف (سا$_3$) +

+ فَ (سا$_3$) فر سا$_3$ ف (سا$_1$) ف (سا$_2$) = صفر

جہاں فَ (سا$_1$)، فَ (سا$_2$) اور فَ (سا$_3$) علی الترتیب ف (سا$_1$)، ف (سا$_2$) اور ف (سا$_3$) کے تفرقات ہیں۔

اوپر کی پوری مساوات کو ف (سہ۱) ف (سہ۲) ف (سہ۳) سے تقسیم کریں تو

$$\frac{\text{فَ}(\text{سہ}_1)\,\text{فر}\,\text{سہ}_1}{\text{ف}(\text{سہ}_1)} + \frac{\text{فَ}(\text{سہ}_2)\,\text{فر}\,\text{سہ}_2}{\text{ف}(\text{سہ}_2)} + \frac{\text{فَ}(\text{سہ}_3)\,\text{فر}\,\text{سہ}_3}{\text{ف}(\text{سہ}_3)} = \text{صفر} \ldots\ldots (\text{۷})$$

چونکہ سہ ایک مستقل ہے اسلئے $\text{سہ}^2 = \text{سہ}_1^2 + \text{سہ}_2^2 + \text{سہ}_3^2$ کو تفرقانے سے

$$\text{سہ}_1\,\text{فر}\,\text{سہ}_1 + \text{سہ}_2\,\text{فر}\,\text{سہ}_2 + \text{سہ}_3\,\text{فر}\,\text{سہ}_3 = \text{صفر}$$

$$\therefore\ \text{بہ}\,\text{سہ}_1\,\text{فر}\,\text{سہ}_1 + \text{بہ}\,\text{سہ}_2\,\text{فر}\,\text{سہ}_2 + \text{بہ}\,\text{سہ}_3\,\text{فر}\,\text{سہ}_3 = \text{صفر} \ldots\ldots (\text{۸})$$

جہاں بہ = کوئی مستقل

مساوات (۷) اور (۸) کو ملانے سے :-

$$\left\{\frac{\text{فَ}(\text{سہ}_1)}{\text{ف}(\text{سہ}_1)} + \text{بہ}\,\text{سہ}_1\right\}\text{فر}\,\text{سہ}_1 + \left\{\frac{\text{فَ}(\text{سہ}_2)}{\text{ف}(\text{سہ}_2)} + \text{بہ}\,\text{سہ}_2\right\}\text{فر}\,\text{سہ}_2 +$$

$$+ \left\{\frac{\text{فَ}(\text{سہ}_3)}{\text{ف}(\text{سہ}_3)} + \text{بہ}\,\text{سہ}_3\right\}\text{فر}\,\text{سہ}_3 = \text{صفر} \ldots\ldots (\text{۹})$$

چونکہ رفتار کے اجزائے تحلیلی سہ۱، سہ۲ اور سہ۳ ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں لہذا مساوات (۹) میں ہر علیحدہ رقم کی قیمت صفر کے مساوی ہو سکتی ہے۔

$$\therefore\ \left\{\frac{\text{فَ}(\text{سہ}_1)}{\text{ف}(\text{سہ}_1)} + \text{بہ}\,\text{سہ}_1\right\} = \text{صفر}$$

اسی طرح دیگر رقوم بھی صفر کے مساوی ہیں۔

$$\therefore\ \frac{\text{فَ}(\text{سہ}_1)}{\text{ف}(\text{سہ}_1)} = -\,\text{بہ}\,\text{سہ}_1$$ اسکو تکملانے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ف}(\text{سہ}_1) = -\,\text{بہ}\,\frac{\text{سہ}_1^2}{2} + \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$$ جہاں ا = کسی مستقل کے

$$\text{یعنی}\ \text{ف}(\text{سہ}_1) = \text{ا}\,\text{و}^{-\frac{\text{بہ}\,\text{سہ}_1^2}{2}} = \text{ا}\,\text{و}^{-\text{ب}\,\text{سہ}_1^2} \ldots\ldots (\text{۱۰})$$

جہاں $ب = -\frac{ہ}{۲}$ = ایک مستقل

اسی طرح $ف(س_۲) = ا\,و^{-ب\,س_۲^۲}$ اور $ف(س_۳) = ا\,و^{-ب\,س_۳^۲}$

$\therefore ف(س_۱)\,ف(س_۲)\,ف(س_۳) = ا^۳\,و^{-ب(س_۱^۲+س_۲^۲+س_۳^۲)}$ ....(۱۱)

اب ہم ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرنے کی کوشش کرینگے۔ سالمات کی مجموعی تعداد فی مکعب سمر = ع

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ع\,ف(س_۱)\,ف(س_۲)\,ف(س_۳)\; فرس_۱\,فرس_۲\,فرس_۳$$

یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} ا^۳\,و^{-ب(س_۱^۲+س_۲^۲+س_۳^۲)}\; فرس_۱\,فرس_۲\,فرس_۳ = ۱$

یعنی $ا^۳\left(\frac{\pi}{ب}\right)^{\frac{۳}{۲}} = ۱$ یعنی $ا = \sqrt{\frac{ب}{\pi}}$ ....(۱۲)

سالمات برتن کی دیوار کے فی اکائی رقبہ کو فی اکائی وقت میں $س_۱$ رفتار سے جو ٹکراتے ہیں ایک ایسے استوانہ میں موجود ہیں جسکا حجم $س_۱$ ہے سالمات کی تعداد فی مکعب سمر جن کی رفتار $س_۱$ اور $س_۱ + فرس_۱$ کے درمیان ہے $ع\,ف(س_۱)\,فرس_۱$ کے مساوی ہے یعنی $= ع\,ا\,و^{-ب\,س_۱^۲}\,فرس_۱$

لہذا $س_۱$ حجم میں سالمات کی تعداد فی ثانیہ $= ع\,ا\,و^{-ب\,س_۱^۲}\,س_۱\,فرس_۱$

اگر ایک سالمہ کی کمیت م کے مساوی ہو تو، برتن کے دیوار سے فی اکائی رقبہ فی اکائی وقت میں تمام سالمات کے ٹکرانے سے معیار حرکت میں تبدیلی = فی اکائی رقبہ قوت عاملہ کے = دباؤ د کے

لیکن ہر ایک سالمہ کے دیوار سے ٹکرانے سے معیار حرکت میں تبدیلی $= ۲\,م\,س_۱$

$\therefore$ $س_۱$ حجم کے اندر سالمات کی فی ثانیہ معیار حرکت میں مجموعی تبدیلی =

$$= ۴\,\text{م}\,\text{سہ}^۲ \left(\text{ع}\,\text{ا}\,\text{و}^{-\text{ب}\,\text{سہ}^۲}\,\text{سہ}\,\text{فر}\,\text{سہ}\right)$$

صرف مثبت رفتار کے جملہ سالمات کے لئے :-

$$\text{د} = \int_{\text{صفر}}^{\infty} ۴\,\text{م}\,\text{ع}\,\text{ا}\,\text{و}^{-\text{ب}\,\text{سہ}^۲}\,\text{سہ}^۲\,\text{فر}\,\text{سہ} = ۲\,\text{ع}\,\text{م}\,\text{ا}^{\frac{۱}{۴}} \sqrt{\frac{\pi}{\text{ب}^۳}}$$

مساوات (۱۲) سے $\text{د} = \dfrac{\text{ع}\,\text{م}}{۲\,\text{ب}}$ ....(۱۳)

لیکن کامل گیس کی مساوات :- $\text{د}\,\text{ح} = \text{لا}\,\text{ت}$

جہاں لا ایک مستقل ہے جو گیس کے ایک گرام سالمہ سے متعلق ہے اور ت گیس کی تپش مطلق ہے۔

یعنی $\text{د} = \dfrac{\text{ثہ}\,\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ك}}$ جہاں ثہ = گیس کی کثافت

مساوات (۵) سے $\text{د} = \dfrac{\text{ثہ}\,\text{لا}\,\text{ت}}{\text{م}\,\text{ن}} = \dfrac{\text{ع}\,\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ن}}$ ....(۱۴)

مساوات (۱۳) اور (۱۴) سے $\text{ب} = \dfrac{\text{ن}\,\text{م}}{۲\,\text{لا}\,\text{ت}}$ ....(۱۵)

لہذا ع سالمات میں سے فرع سالمات کی تعداد جن کے رفتار کے اجزائے تحلیلی $\text{سہ}_۱$ اور $\text{سہ}_۱ + \text{فر}\,\text{سہ}_۱$، $\text{سہ}_۲$ اور $\text{سہ}_۲ + \text{فر}\,\text{سہ}_۲$، $\text{سہ}_۳$ اور $\text{سہ}_۳ + \text{فر}\,\text{سہ}_۳$ کے درمیان لا، ما اور یا سمتوں میں علی الترتیب ہوں

حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{فرع} = \text{ع}\,\text{ف}(\text{سہ}_۱)\,\text{ف}(\text{سہ}_۲)\,\text{ف}(\text{سہ}_۳)\,\text{فر}\,\text{سہ}_۱\,\text{فر}\,\text{سہ}_۲\,\text{فر}\,\text{سہ}_۳$$

مساوات (۱۱) سے $\text{فرع} = \text{ع}\,\text{ا}^۳\,\text{و}^{-\text{ب}(\text{سہ}_۱^۲+\text{سہ}_۲^۲+\text{سہ}_۳^۲)}\,\text{فر}\,\text{سہ}_۱\,\text{فر}\,\text{سہ}_۲\,\text{فر}\,\text{سہ}_۳$

مساوات (۱۲) اور (۱۵) سے :-

$$\text{فرع} = \text{ع}\left(\frac{\text{ن}\,\text{م}}{۲\pi\,\text{لا}\,\text{ت}}\right)^{\frac{۳}{۲}} \text{و}^{-\frac{\text{ن}\,\text{م}}{۲\,\text{لا}\,\text{ت}}(\text{سہ}_۱^۲+\text{سہ}_۲^۲+\text{سہ}_۳^۲)}\,\text{فر}\,\text{سہ}_۱\,\text{فر}\,\text{سہ}_۲\,\text{فر}\,\text{سہ}_۳$$

$$\text{یعنی فرع} = \text{ع} \sqrt{\frac{\text{عہ}^{3}}{\pi^{3}}}\ \text{و}^{-\text{عہ}(\text{سا}^{2}+\text{سب}^{2}+\text{سج}^{2})}\ \text{فرسا فرسب فرسج} \quad \ldots\ldots(۱۶)$$

$$\text{جہاں عہ} = \frac{\text{ن}}{۲\,\text{لا ت}}$$

اس کو میکسول کے "رفتاروں کی تقسیم کے کلیہ" سے موسوم کیا جاتا ہے۔ یہ کلیہ کچھ اطمینان بخش نہیں ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ رفتاروں کے اجزائے تحلیلی کو بغیر کسی ثبوت کے ایک دوسرے سے بالکل آزاد فرض کر لیا گیا ہے۔

نوٹ گیسوں کے نظریہ تحرک میں حسب ذیل تکملات اکثر مستعمل ہوتے ہیں اور طلبا کو ان کے حل کرنے کے لئے ہدایت کی جاتی ہے :-

تکملی	حل	تکملی	حل
(۱) $\int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{و}^{-\text{عہ لا}^{2}}\ \text{فرلا}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ}}}$	(۴) $\int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{و}^{-\text{عہ لا}^{2}}\ \text{لا}^{3}\ \text{فرلا}$	$\frac{1}{2\,\text{عہ}^{2}}$
(۲) $\int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{و}^{-\text{عہ لا}^{2}}\ \text{لا فرلا}$	$\frac{1}{2\,\text{عہ}}$	(۵) $\int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{و}^{-\text{عہ لا}^{2}}\ \text{لا}^{4}\ \text{فرلا}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ}^{5}}}$
(۳) $\int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{و}^{-\text{عہ لا}^{2}}\ \text{لا}^{2}\ \text{فرلا}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ}^{3}}}$	(۶) $\int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{و}^{-\text{عہ لا}^{2}}\ \text{لا}^{5}\ \text{فرلا}$	$\frac{1}{\text{عہ}^{3}}$

اب ہم تعداد سالمات فی مکعب سمر کے لئے ایک ایسا جملہ حاصل کرنا چاہتے ہیں جن کے رفتاروں کے اجزا، لامحور کے متوازی ہیں اور سا اور سا + فرسا کے درمیان قائم کئے گئے ہیں۔ یعنی ہم صرف اب رفتار سا پر غور کریں گے اور ان سالمات کی تعداد فرع، معلوم کریں گے جن کی رفتار سا اور سا + فرسا

کے درمیان ہے :-

$$\text{فرع} = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\;\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}_1^2}\,\text{فرسا}_1\int_{-\infty}^{+\infty}\!\int_{-\infty}^{+\infty}\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}_2^2}\;\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}_3^2}\,\text{فرسا}_2\,\text{فرسا}_3$$

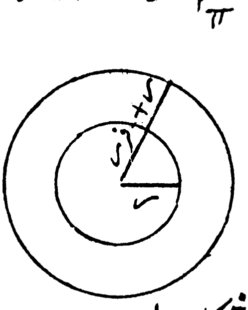
اب چونکہ $\int_{-\infty}^{+\infty}\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}_2^2}\,\text{فرسا}_2 = 2\int_{\text{صفر}}^{\infty}\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}_2^2}\,\text{فرسا}_2 = \frac{2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہم}}}$

$$\therefore\ \text{فرع} = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\;\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}_1^2}\,\text{فرسا}_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہم}}}\times\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہم}}}\right)$$

$$= \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہم}}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}_1^2}\,\text{فرسا}_1 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

اسی طرح کسی رفتاری جزء تحلیلی سا₂ یا سا₃ پر غور کرنے سے یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔
اب ہم ان سالمات کی تعداد فرع معلوم کرینگے جن کی رفتار سا اور سا + فرسا کے درمیان ہے۔
جہاں سا² کی قیمت (سا₁² + سا₂² + سا₃²) کے مساوی ہے اور جو کہ ایک مستقل مقدار ہے۔

میکسول کے کلیہ سے :- $\text{فرع} = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\;\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}^2}\;4\pi\,\text{سا}^2\,\text{فرسا}$



شکل ۱۰

چونکہ فرسا₁ فرسا₂ فرسا₃ کو اس حجم پر تکملانے سے، جو سا اور سا + فرسا نصف قطر والے دو کروں کے مابین واقع ہوتا ہے، $4\pi\,\text{سا}^2\,\text{فرسا}$ کے مساوی قیمت حاصل ہوتی ہے اسلئے :-

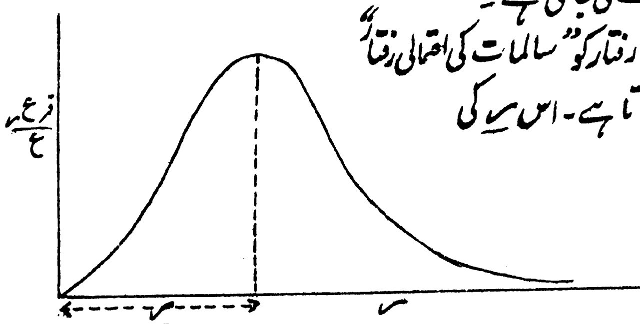
$$\text{فرع} = 4\,\text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہم}\,\text{سا}^2}\,\text{سا}^2\,\text{فرسا}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

مختلف نوعیت کی رفتاریں اور آپس میں انکا تعلق :- میکسول کے کلیہ کو ترسیمی وضع میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

اگر س کے مقابلہ میں ہم $\frac{\text{فرع}_{\text{س}}}{\text{ع}}$ کو مرتسم کریں تو ایک منحنی حاصل ہوتا ہے جس کو شکل ۲ میں تقریباً بتایا گیا ہے اس منحنی سے واضح ہے کہ اسکے راس پر سالمات کی تعداد کے لئے "احتمال" اعظم ترین ہے۔

فرض کرو کہ راس پر اس کے متناظر رفتار کی تعبیر $\text{س}_{\text{ا}}$ سے کی جاتی ہے۔

اس $\text{س}_{\text{ا}}$ رفتار کو "سالمات کی احتمالی رفتار" سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس $\text{س}_{\text{ا}}$ کی قیمت حسب ذیل طریقہ سے معلوم کی جا سکتی ہے:-



شکل ۲

مساوات (۱۸) سے:-

$$\text{فرع}_{\text{س}} = ۴\,\text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^{۳}\text{م}^{۳}}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہ م س}^{۲}}\,\text{س}^{۲}\,\text{فرس} = \text{ف}(\text{ع})$$

جہاں ف (ع)، ع کے کسی تفاعل کی تعبیر کرتا ہے۔

ف (ع) اعظم ہونے کیلئے $\frac{\text{فر ف(ع)}}{\text{فرس}} = \text{صفر}$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{و}^{-\text{عہ م س}^{۲}}\,\text{س}^{۲}\right) = \text{صفر}$

$$\therefore\; -\text{س}^{۲}\,\text{و}^{-\text{عہ م س}^{۲}}\,\text{عہ م ۲ س} + \text{و}^{-\text{عہ م س}^{۲}}\,\text{۲ س} = \text{صفر}$$

یعنی $\text{س}^{۲} = \frac{۱}{\text{عہ م}}$

اب جبکہ ف (ع) اعظم ہے تو $ر = ر_۱$

$$\therefore\ ر_۱ = \frac{۱}{\sqrt{عم}} \quad \text{......} \quad (۱۹)$$

فرض کرو کہ ع سالمات کو ہم مختلف حصوں میں تقسیم کر دیتے ہیں اور ان حصوں میں سالمات کی تعداد $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$ ...... وغیرہ ہے اور ان کی اوسط رفتاریں علی الترتیب $ر_۱$، $ر_۲$، $ر_۳$ ...... وغیرہ ہیں۔

$$\text{تب}\ ع = ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \text{......}$$

$$\text{اور مجموعی توانائی بالفعل} = \frac{۱}{۲}م \left\{ ع_۱ ر_۱^۲ + ع_۲ ر_۲^۲ + ع_۳ ر_۳^۲ + \text{......} \right\}$$

$$\therefore\ \text{اوسط توانائی بالفعل فی ذرہ} = \frac{۱}{۲}م \left\{ \frac{ع_۱ ر_۱^۲ + ع_۲ ر_۲^۲ + ع_۳ ر_۳^۲ + \text{......}}{ع} \right\}$$

$$= \frac{۱}{۲} م \bar{ر}^۲$$

$$\text{یعنی}\ \bar{ر}^۲ = \frac{\sum ع_۱ ر_۱^۲}{ع}$$

اس $\bar{ر}$ کو "جذر اوسط مربع رفتار" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

$$\therefore\ \bar{ر}^۲ = \frac{\sum ع_۱ ر_۱^۲}{ع} = \frac{\int_{صفر}^{\infty} ر^۲ \, فرع_ر}{ع} =$$

$$= ۴ \sqrt{\frac{ع^۳ م^۳}{\pi}} \int_{صفر}^{\infty} ہ^{-عم ر^۲} ر^۴ \, فرر$$

$$= ۴ \sqrt{\frac{ع^۳ م^۳}{\pi}} \cdot \frac{۳}{۸} \sqrt{\frac{\pi}{ع^۵ م^۵}} = \frac{۳}{۲ عم}$$

$$\therefore\ \bar{ر} = \sqrt{\frac{۳}{۲ عم}} \quad \text{......} \quad (۲۰)$$

ان مختلف حصوں کے سالمات کی مجموعی معیار حرکت =

$$= م ع_۱ ر_۱ + م ع_۲ ر_۲ + \text{......}$$

∴ اوسط معیار حرکت فی ذرہ $= م\left\{\frac{ع_۱ س_۱ + ع_۲ س_۲ + ع_۳ س_۳ + \cdots\cdots}{ع}\right\}$

فرض کرو $= م\,\bar{س}$

اس $\bar{س}$ کو "اوسط حسابی رفتار" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

یعنی $\bar{س} = \frac{\sum ع_۱ س_۱}{ع} = \int_{صفر}^{\infty} \frac{س\, فرع_س}{ع} =$

$= ۴\sqrt{\frac{عہ^۳ م^۳}{\pi}} \int_{صفر}^{\infty} س^۳\, ہ^{-عہ م س^۲}\, فرس = ۴\sqrt{\frac{عہ^۳ م^۳}{\pi}} \cdot \frac{۱}{۲ عہ^۲ م^۲}$

$$∴ \bar{س} = \frac{۲}{\sqrt{\pi\, عہ\, م}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (۲۱)$$

مساوات (۲۰) اور (۲۱) سے $\frac{\bar{س}}{س} = \sqrt{\frac{۸}{۳\pi}} = ۰٫۹۲ \cdots\cdots (۲۲)$

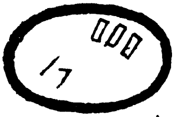
اور مساوات (۱۹) اور (۲۰) سے $\frac{\hat{س}}{س} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \cdots\cdots\cdots (۲۳)$

چند گیسوں کی سالمی رفتاریں (۲):—

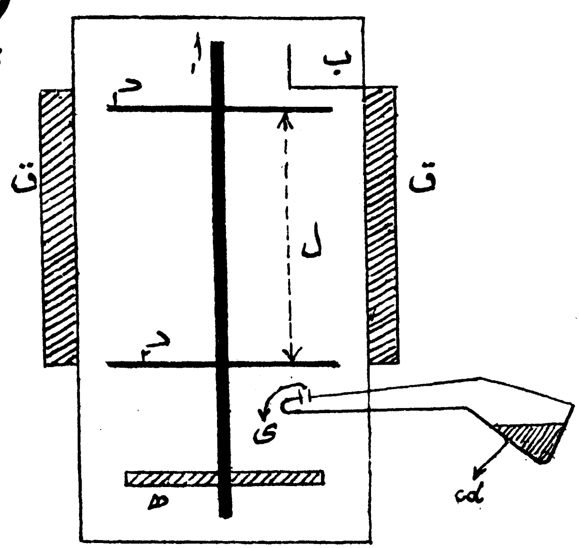
گیس	طبعی دباؤ اور تپش پر س سمر فی ثانیہ	طبعی دباؤ اور تپش پر $\bar{س}$ سمر فی ثانیہ
ہائیڈروجن	$۱۸٫۳۸ \times ۱۰^۴$	$۱۶٫۹۳ \times ۱۰^۴$
ہیلیم	$۱۳٫۱۱ \times ۱۰^۴$	$۱۲٫۰۸ \times ۱۰^۴$
امونیا	$۶٫۳۳ \times ۱۰^۴$	$۵٫۸۲ \times ۱۰^۴$
آبی بخار	$۶٫۱۵ \times ۱۰^۴$	$۵٫۶۵ \times ۱۰^۴$
نیین	$۵٫۸۴ \times ۱۰^۴$	$۵٫۳۸ \times ۱۰^۴$
کاربن مونا کسائڈ	$۴٫۹۳ \times ۱۰^۴$	$۴٫۵۴ \times ۱۰^۴$
نائٹروجن	$۴٫۹۳ \times ۱۰^۴$	$۴٫۵۴ \times ۱۰^۴$

ہوا	$۴٫۸۵ \times ۱۰^{۴}$	$۴٫۴۷ \times ۱۰^{۴}$
آکسیجن	$۴٫۶۱ \times ۱۰^{۴}$	$۴٫۲۵ \times ۱۰^{۴}$
آرگن	$۴٫۱۳ \times ۱۰^{۴}$	$۳٫۸۰ \times ۱۰^{۴}$
کاربن ڈائی آکسائڈ	$۳٫۹۳ \times ۱۰^{۴}$	$۳٫۶۲ \times ۱۰^{۴}$
کرپٹن	$۲٫۸۶ \times ۱۰^{۴}$	$۲٫۶۳ \times ۱۰^{۴}$
زینن	$۲٫۲۸ \times ۱۰^{۴}$	$۲٫۱۰ \times ۱۰^{۴}$
پارہ کا بخار	$۱٫۸۴ \times ۱۰^{۴}$	$۱٫۷۰ \times ۱۰^{۴}$

میکسول کے کلیہ کا عملی ثبوت:۔ متعدد سائنس دانوں نے رفتاروں کی تقسیم کے متعلق میکسول کے کلیہ کا ثبوت بالواسطہ طریقوں سے حاصل کیا ہے۔ اسٹرن پہلا شخص تھا جس نے چاندی کے جواہر سے تجربہ کرکے بالراست اس کلیہ کو ثابت



شکل ۳ (الف)



شکل ۳

کیا گو آلات میں بعض دشواریوں کے باعث نتائج اتنے اطمینان بخش نہیں نکلے۔ بعد میں کامپٹن، الڈرج اور دیگر اشخاص نے کامیابی کے ساتھ راست طور پر تجربے کئے۔ ۱۹۲۸ء میں الڈرج ایک امریکن سائنس داں نے جو آلات استعمال کئے تھے انکا تذکرہ یہاں خالی از دلچسپی نہ ہوگا۔ شکل ۳ میں ان کو دکھایا گیا ہے۔

دو دائری وضع کے قرص د۱ اور د۲ ایک خلادار برتن کے اندر ایک ہی دھری ا۱ پر رکھے ہوئے ہیں۔

ھ ایک زیادہ وزنی قرص ہے جو اُسی دھری پر رکھا ہوا ہے اور ایک امالی موٹر کے گھومنے والے چکّر کی طرح کام دیتا ہے، د۱ اور د۲ قرصوں پر کئی جھریاں بنی ہوئی ہیں جیسا کہ شکل ۳ (الف) میں دکھایا گیا ہے۔ برتن سے باہر نکلی ہوئی ایک تلی میں کیڈ میم (ملت) کو گرم کیا جاتا ہے جو جھری ی میں سے بخار بنکر (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) گزر جاتا ہے۔ ب ایک الومنیم کی تختی ہے جو مائع ہوا سے ٹھنڈی رکھی جاتی ہے۔ ق اور ق بیرونی برتن ہیں جن میں مائع ہوا غیر ضروری سالمات کو برتن کے بازوؤں سے نکلکر ب تک پہنچنے سے روکتی ہے۔

تجربہ میں کیڈ میم کے سالمات کی کچھ تعداد ایک خاص رفتار کے ساتھ جھری میں سے گزر کر د۲ کے نیچے رہتی ہے۔ جب موٹر کے ذریعہ د۱ اور د۲ کو گھمایا جاتا ہے تو ان میں سے چند سالمات د۲ کی جھری میں سے گزر جاتے ہیں۔ گزرنے کے دوران میں ان کی رفتاریں جو انتصابی سمت میں ہوتی ہیں د۲ کی رفتار کی وجہ سے (جو افقی سمت میں ہوتی ہے) بدل جاتی ہیں پس وہ د۱ اور د۲ کے درمیان مختلف سمتوں میں ایک خاص رفتار سے حرکت کرنے لگتے ہیں لیکن ان سالمات میں سے ایک خاص حصہ اوپر جاکر د۱ کی جھری میں سے گزر جاتا ہے اور ایک خاص رفتار کے ساتھ ب تک پہنچ کر وہاں مائع ہوا کی موجودگی سے جو اس کو سرد رکھتی

ہے، منجمد ہونے لگتا ہے۔ ظاہر ہے کہ تختی ب پر ان کے جمع ہونے کی کثافت کا انحصار منجمد ہونے والے سالمات کی تعداد پر ہوگا۔ اگر ب پر زیادہ سالمات کی تعداد منجمد ہوگی تو اس مقام پر زیادہ سیاہی نمایاں ہونے لگے گی۔ تجربہ میں قرصوں کو ابتداً بہت ہی آہستہ گھمایا جاتا ہے اور سالمات کا ایک مطروحہ حاصل کیا جاتا ہے۔ بعد میں قرص تیز رفتار سے گھمائے جاتے ہیں جبکہ تیز حرکت کرنے والے سالمات ابتدائی مطروحہ سے آہستہ حرکت کرنے والے سالمات کی بہ نسبت زیادہ قریب جمع ہونے لگتے ہیں۔ یہ مطروحے مستطیلی جھریوں کی وجہ سے طیفی خطوط کی طرح ہوتے ہیں۔ الڈرج نے ان مطروحوں کی کثافت کو تختی کے مختلف مقامات پر اس کے معیاری کثافت سے مقابلہ کر کے دریافت کیا۔

فرض کرو کہ د_1 اور د_2 کے درمیان سالمات کی تعداد = ع

مساوات (۱۸) سے تعداد سالمات فرع_1 جن کی رفتاریں س اور س + فرس کے درمیان ہیں حسب ذیل ہوگی:-

$$\text{فرع}_1 = ۴\,\text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہ}\,\text{س}^2}\;\text{س}^2\,\text{فرس}$$

لیکن مساوات (۱۹) سے $\text{س}_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{عہ}}}$

$$\therefore\ \text{فرع}_1 = \frac{۴\,\text{ع}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^3}\cdot\text{و}^{-\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^2}}\cdot\text{فرس}$$

ان فرع_1 سالمات میں سے سالمات کی ایک خاص تعداد انتصابی وضع میں د_2 کی طرف جانے کی کوشش کرے گی اور ان کی تعداد =

$$= \text{ف}\left(\frac{۴\,\text{ع}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^3}\,\text{و}^{-\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^2}}\cdot\text{فرس}\right)$$ جہاں ف = کوئی کسر

$\therefore$ تعداد سالمات جو د_2 کی جھری میں سے فی ثانیہ گزرے گی = $\text{ج}\,\text{س}^2\,\text{و}^{-\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^2}}\,\text{س}\,\text{فرس}$

$= ج\, ر^{۳}\, و^{-\frac{ر^{۲}}{ب^{۲}}}\, فرر = فرع$ فرض کرو جہاں ج = کوئی مستقل۔

فرض کرو کہ ابتدائی مطروحہ سے لا فاصلہ پر یا فرض پر کے کسی خاص نشان سے لا فاصلہ پر سالمات جمع ہوتے ہیں۔

تب $لا = ا و = \frac{ال}{ر}$ جہاں ا = اس فرض کی رفتار اور و = لا فاصلہ طے کرنے کے لئے وقت

فرض کرو کہ $ر = \frac{۱}{لہ}$ تب $فرر = -\frac{فرلہ}{لہ^{۲}}$

$$\therefore لا = \frac{ال}{ر} = ال\, لہ$$

$$\therefore فرع = -ج\, ر^{۵}\, و^{-\frac{ر^{۲}}{ب^{۲}}}\, فرلہ$$

اب مطروحہ کی کثافت (لا = ال لہ) پر $ر^{۵}\, و^{-\frac{ر^{۲}}{ب^{۲}}}$ کے متناسب ہے

لہٰذا ایسے مقام پر لہ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے جہاں اعظم مطروحہ یا سیاہی اعظم ہو:-

$$\frac{ف}{فرلہ}\left(لہ^{-۵}\, و^{-\frac{۱}{ب^{۲}\, لہ^{۲}}}\right) = صفر$$

$$یعنی\ ۵\, لہ^{-۶} = \frac{۲\, لہ^{-۸}}{ب^{۲}}$$

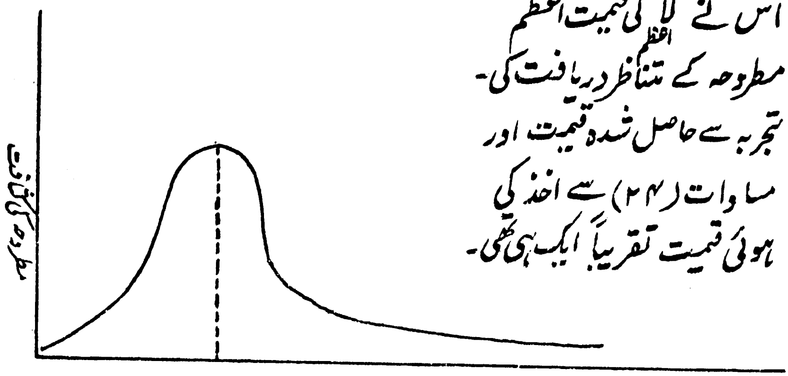
$$\therefore لہ = \sqrt{\frac{۲}{۵}} \cdot \frac{۱}{ب} = لہ_{اعظم}$$

لیکن مساوات (۱۹) سے:- $لہ_{اعظم} = \sqrt{\frac{۲\, عہ\, م}{۵}} = \sqrt{\frac{م\, ت}{۵\, لات}}$

$\therefore$ لا کی قیمت اعظم کثافت کے متناظر $= لا_{اعظم} = ال\, لہ_{اعظم}$

$$\therefore لا_{اعظم} = ال \sqrt{\frac{م\, ت}{۵\, لات}} \quad \text{..........} \quad (۲۴)$$

الڈرج نے ۴۰۰ ھ پر تجربہ کر کے مطروحہ کی کثافت اور (لا = ۱ ل لہ) کے درمیان ایک ترسیم کھینچی اس طرح جو منحنی حاصل ہوا اس کو شکل ۴ میں بتایا گیا ہے اس منحنی سے اس نے لا اعظم کی قیمت اعظم مطروحہ کے متناظر دریافت کی۔ تجربہ سے حاصل شدہ قیمت اور مساوات (۲۴) سے اخذ کی ہوئی قیمت تقریباً ایک ہی تھی۔



(لا = ۱ ل لہ)

شکل ۴

توانائی کی مساوی تقسیم کا کلیہ :— ہم اگر کسی سہ ابعادی صورت پر غور کریں اور کوئی سالمہ تینوں انتصابی سمتوں میں سے کسی ایک سمت میں حرکت کرے اور ان سمتوں میں سے کسی ایک سمت کی حرکت دوسری سمتوں کی حرکتوں کے غیر تابع ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ سالمہ میں "تین درجوں" کی آزادی ہے۔ عام صورت میں کسی جسم کی تعریف اس کے مقامی محددوں کی تعداد مثلاً لا۱، لا۲، لا۳ .... لا د وغیرہ پر اور نیز متعدد رفتاروں ر۱، ر۲، ر۳ .... ر د وغیرہ پر جو کہ ایکدوسرے کے غیر تابع ہیں منحصر ہوتی ہے۔ ان میں سے ہر ایک محدد کے متناظر توانائی ایک ہی ہوتی ہے۔ یعنی آزادی کے مختلف درجوں میں توانائی مساوی طور پر منقسم ہوتی ہے۔ اس کلیہ کو مساوی تقسیم توانائی کے کلیہ سے موسوم کیا جاتا ہے۔ میکسول نے ۱۸۵۹ء میں پہلی دفعہ اسکو بیان کیا تھا۔

کسی گیس کے ایک گرام سالمہ پر غور کرو جہاں کہ جملہ سالمات کی تعداد ن ہے - مساوات (۱۸) سے فرعِ سالمات کی تعداد، جن کی رفتاریں س اور س + فر س کے درمیان ہوں حسب ذیل ہو گی :-

$$\text{فرع} = ۴\text{ہ}\,\text{ت}\sqrt{\frac{\text{عہ}^{۳}\,\text{م}^{۳}}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہ}\,\text{م}\,\text{س}^{۲}}\;\text{س}^{۲}\,\text{فر}\,\text{س}$$

ان فرعِ سالمات کی توانائی بالفعل = $\frac{۱}{۲}\text{م}\;\text{فرع}\,.\,\text{س}^{۲}$

∴ مجموعی توانائی بالفعل گیس کے اس گرام سالمہ کی = $\int_{\text{صفر}}^{\infty}\frac{۱}{۲}\text{م}\;\text{فرع}\;\text{س}^{۲}$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\infty}\frac{۱}{۲}\text{م}\,\text{س}^{۴}\;۴\text{ہ}\,\text{ن}\sqrt{\frac{\text{عہ}^{۳}\,\text{م}^{۳}}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہ}\,\text{م}\,\text{س}^{۲}}\;\text{فر}\,\text{س}$$

$$= ۲\,\text{م}\,\text{ن}\sqrt{\frac{\text{عہ}^{۳}\,\text{م}^{۳}}{\pi}}\cdot\frac{۳}{۸}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ}^{۵}\,\text{م}^{۵}}} = \frac{۳}{۴}\cdot\frac{\text{م}\,\text{ن}}{\text{عہ}\,\text{م}}$$

لیکن $\text{عہ} = \frac{\text{ن}}{۲\,\text{لا}\,\text{ت}}$

∴ پوری توانائی بالفعل گیس کے گرام سالمہ کی = $\frac{۳}{۲}\text{لا}\,\text{ت}$ ....(۲۵)

∴ فی سالمہ توانائی بالفعل = $\frac{۳\,\text{لا}\,\text{ت}}{۲\,\text{ن}}$ .... (۲۶)

مساوی تقسیم توانائی کے کلیہ کی رو سے، چونکہ یہاں "آزادی کے تین درجے" زیر غور ہیں - لہذا ہر ایک ایسے رفتاری محددون کے متناظر توانائی (چونکہ مساوی ہے) = $\frac{۱}{۲}\text{لا}\,\text{ت}$ فی گرام سالمہ یا $\frac{\text{لا}\,\text{ت}}{۲\,\text{ن}}$ فی سالمہ۔

کسی نظام میں اگر آزادی کے ما درجے ہوں تو اس نظام کے ساتھ جو توانائی مضمر ہو گی وہ = $\frac{\text{ما}\,\text{لا}\,\text{ت}}{۲}$ فی گرام سالمہ یا = $\frac{\text{ما}\,\text{لا}\,\text{ت}}{۲\,\text{ن}}$ فی سالمہ

اشیا کی سالمی توانائیاں :- یک جوہر والی گیس میں، سالمات کے متعلق یہ

تصور کیا جاتا ہے کہ وہ لچک دار کرّے ہوتے ہیں اور ان میں صرف توانائی بالفعل ہوتی ہے، توانائی بالقوہ بالکل نہیں ہوتی۔

یہ باہم انتصابی، تین سمتوں میں سے کسی ایک سمت میں حرکت کر سکتے ہیں لہذا ان میں "آزادی" تین درجوں کی ہوتی ہے۔ ایسی گیس کے ایک گرام سالمہ میں جو مجموعی توانائی ی مضمر ہوگی وہ = $\frac{۳ک ت}{۲}$ (مساوات ۲۵ سے)

حرارت کی کسی معیاری کتاب سے واضح ہوگا کہ اگر کسی گیس کی حرارت نوعی مستقل حجم پر $ن_ح$ کے مساوی ہو تو $ن_ح = \frac{وی}{وت} = \frac{۳ک}{۲}$

کسی ایک کامل گیس کے لئے یہ ہمیں معلوم ہے کہ $ن_د - ن_ح = ک$ جہاں $ن_د$ = گیس کی حرارت نوعی مستقل دباؤ پر

∴ کسی یک جوہر والی گیس کیلئے $ن_د = \frac{۳ک}{۲} + ک = \frac{۵ک}{۲}$

∴ دونوں نوعی حرارتوں میں نسبت $\frac{ن_د}{ن_ح}$ = نہ (فرض کرو) $= \frac{۵}{۳}$
= ۱٫۶۶

ہیلیم، آرگن وغیرہ جیسی یک جوہری گیسوں کے لئے یہ قیمت تجربی نتائج سے ملتی جلتی ہے۔

دو جوہری گیس کے ایک سالمہ کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ دو متجانس لچکدار کروں پر مشتمل ہوتا ہے جو مضبوطی کے ساتھ ایک دوسرے سے جڑے ہوئے ہوتے ہیں۔ اصولاً چونکہ یہ دو علیحدہ کرّے ہوتے ہیں اس لئے مجموعی طور پر آزادی کے چھ درجوں کا ہونا ضروری ہے۔ لیکن ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ہر ایک کرہ ایک ایسا محور رکھتا ہے جو مشترک ہے یعنی دونوں کے مرکزوں کو ملانے والا خط ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ آزادی کے کل پانچ درجے ہونگے۔ لہذا دو جوہری گیس کے لئے توانائی ی = $\frac{۵ک ت}{۲}$

∴ $ن_ح = \frac{۵}{۲}ک$ اور $ن_د = \frac{۷}{۲}ک$، اس لئے نہ = ۱٫۴۰

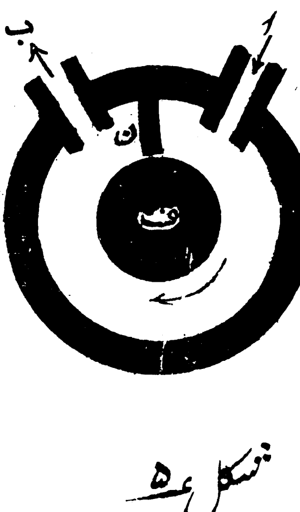
یہ قیمت ہائڈروجن، نائٹروجن وغیرہ کی تجربی قیمتوں سے بہت ہی قریب ہے سہ جوہری گیس کے لیے ہم آزادی کے چھ درجے لے سکتے ہیں۔ اس صورت میں $ن_ح = \frac{۶}{۲} ک$ اور $ن_ث = \frac{۸}{۲} ک$

$\therefore$ نہ = ۱٫۳۳

یہ قیمت بھی تجربہ کی قیمت سے تقریباً ملتی ہے۔

اس سے عملی طور پر ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ یک جوہری گیس کے لئے آزادی کے تین درجے، دو جوہری گیس کے لئے پانچ درجے، اور سہ جوہری گیس کے لئے آزادی کے چھ درجے ہوتے ہیں۔ بقیہ کو اسی طرح قیاس کیا جا سکتا ہے۔

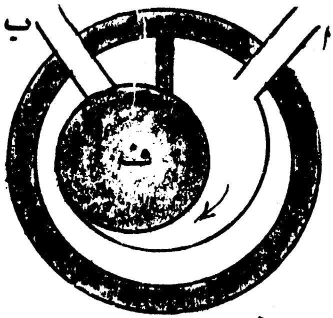
سالمی پمپ:— گائیڈے کا سالمی پمپ کیمیائی اور طبیعیاتی تجربہ خانوں میں بہت ہی کارآمد ثابت ہوا ہے۔ یہ ایک استوانہ ف پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵) جو ایک اور بیرونی استوانہ کے اندر گھومتا ہے، ن ایک دھاتی تختی ہے۔ اس کے اور استوانہ ف کے درمیان ایک چھوٹی سی جگہ ہوتی ہے یہ جگہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ سے بھی کم ہوتی ہے جس کی وجہ سے سالمات میں پیچھے کی طرف حرکت نہیں ہو سکتی۔ نلی ا اس برتن کے ساتھ جوڑ دی جاتی ہے جس میں ایک زبردست خلا کو پیدا کرنا مقصود ہوتا ہے۔ ف کو برقی طور پر یا کسی اور ذریعہ سے یکسانی سمت میں گھمایا جاتا ہے۔



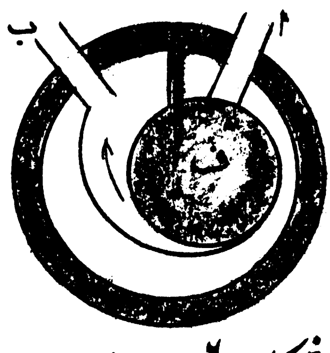
شکل ۵

ب میں سے گیس کے سالمات بتدریج باہر نکلتے ہیں۔

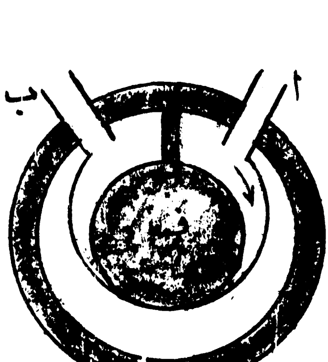
چونکہ یہ پمپ موجودہ زمانہ میں لوہے اور فولاد سے بنایا جاتا ہے اس وجہ سے پارہ کے بخارات کا اس پر اثر نہیں ہوتا۔ اس سے آسانی کے ساتھ ۰٫۰۰۲ مم پارہ کے دباؤ کے مساوی خلا پیدا کیا جا سکتا ہے اور فی گھنٹہ تقریباً ۵ر۱ مکعب میٹر گیس اس میں سے خارج کی جا سکتی ہے۔ حال میں ہالک نے اور پھر زیگبان اور ہینیک نے اس کے میکانی خاکہ میں بہت سی جدتیں پیدا کیں۔ مشہور ہینیک پمپ عام طور پر سنہ ۱۹۲۱ء سے دستیاب ہونے لگا ہے۔ یہ بہت ارزاں ہے اور ۰٫۰۰۰۴ مم پارہ کے مساوی خلا پیدا کرنے کے علاوہ چلنے میں بہت کم آواز کرتا ہے۔ اسکے پمپ کرنیکا میکانی اصول بالکل گائیڈے کی طرح ہے لیکن فشارہ یا اندرونی استوانہ



شکل ۶ (الف)



شکل ۶ (ب)

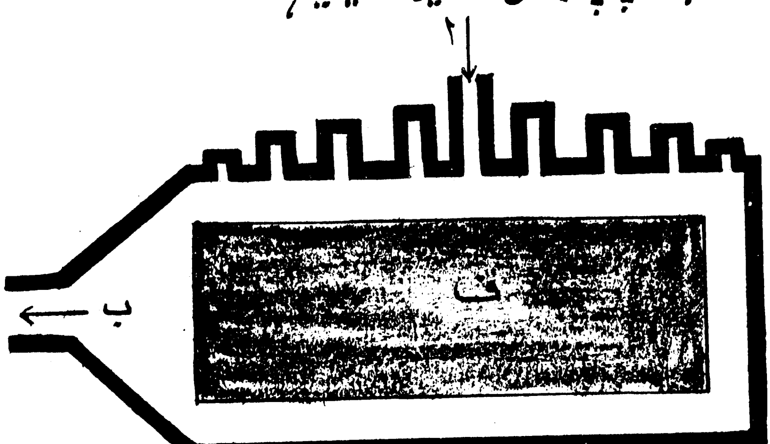


شکل ۶ (ج)

کا عمل اس سے مختلف ہے۔ اس پمپ کے کام کرنے کا اصول ان تین تراشی شکلوں سے جو ۶ (ا) ۶ (ب) اور ۶ (ج) میں دکھائی گئی ہیں سمجھ میں آجائے گا۔

جب ف کا مقام شکل ۶ (ا) کی طرح ہوتا ہے تو جس برتن میں خلا پیدا کرنا ہوتا ہے اس کو ا کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے جب شکل ۶ (ب) کی طرح ف کا مقام ہوتا ہے تو ف اور ا کے درمیانی گیس کی زیادہ مقدار ب کی طرف چلی جاتی ہے۔ وضع ۶ (ج) میں چونکہ ن مضبوطی کے ساتھ ف سے چمٹا ہوا ہوتا ہے اس وجہ سے گیس استوانہ ف کے گرد نہیں جا سکتی اور چنانچہ گیس کا ایک بڑا حصہ ب میں سے باہر نکل جاتا ہے۔ اس طرح متعدد دفعہ پورے دور ختم ہونے کے بعد زیر تجربہ برتن میں اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا ہوتا ہے۔

ہالک پمپ کو شکل ۷ میں دکھایا گیا ہے۔



شکل ۷

یہ ایک بیرونی فولاد کے استوانہ پر مشتمل ہے جس میں باقرینہ مرغولہ دار نالیاں

شکل کی طرح کٹی ہوئی ہوتی ہیں۔ ابتدا میں یہ نالیاں نہایت گہری ہوتی ہیں لیکن بتدریج ان کی گہرائی کم ہوتی جاتی ہے۔ ان کی بلندیاں تقریباً ۵ مم سے ا مم تک کی ہوتی ہیں۔ یہ نالیاں اس طریقہ سے بنائی جاتی ہیں کہ سالمات آسانی سے باہر کی طرف پھسل کر جا سکیں۔ ف ایک اندرونی استوانہ ہے جس کو ایک موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے۔ جس برتن میں زبردست خلا پیدا کرنا ہوتا ہے اس کو ا کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے جو بیرونی استوانہ کے ٹھیک درمیان میں ہے۔

نلیوں اور سوراخوں میں سے گیسوں کا بہنا :— فرض کرو کہ دو بند برتن جن میں ایک ہی گیس مقید ہے ایک پتلی نلی کے ذریعہ جوڑ دئے جاتے ہیں، اور ان میں سے ایک برتن میں گیس کا دباؤ دوسرے سے کم ہوتا ہے۔ اگر پتلی نلی میں سے گیس کو ڈھکیلنے والا دباؤ معمولی ہو تو فی ثانیہ اس میں سے بہنے والی گیس کی کمیت کا اندازہ گیسوں کی لزوجت کے مشہور میئر کے کلیہ سے ہو سکتا ہے۔ یعنی فی ثانیہ جتنی گیس بہتی ہے اس کی کمیت لزوجت سے تناسب معکوس رکھتی ہے۔ لیکن بالکل کم دباؤ پر گیس کا بہاؤ مستقل ہو جاتا ہے اور لزوجت پر اس کا انحصار نہیں ہوتا۔ چونکہ بالکل کم دباؤ پر گیس کے سالمات دور دور پھیلے ہوئے ہوتے ہیں اس وجہ سے بین السالماتی تصادم کو نظر انداز کر دیا جا سکتا ہے اور صرف برتن اور نلی کے دیواروں سے سالمات کے ٹکرانے پر اس صورت میں غور کرنا ہوگا۔ کنڈسن نے یہ فرض کیا کہ بالکل کم دباؤ پر سالمات دیوار پر جذب ہو جاتے ہیں اور پھر تمام سمتوں میں مساوی طور پر نکل پڑتے ہیں۔ اس نے ریاضی کی مدد سے اس مظہر کی عالمانہ طور پر تحقیق کی اور نتائج کی تصدیق بہترین تجربوں سے حاصل کی۔
میئر کے کلیہ سے نلی میں سے فی ثانیہ بہنے والی گیس کی کمیت کب =

$$= \text{نۂ حہ} = \frac{\text{دِ حہ ئ}}{\text{لا ت}}$$

$$= \frac{\pi\, ص^{4}}{8\, ل\, لہ} (د_{1} - د_{2}) \frac{(د_{1} + د_{2})}{2} \cdot \frac{ئ}{لات}$$

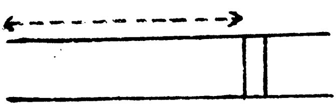
$$\therefore ک \propto د (د_{1} - د_{2})$$

جہاں $د = \frac{د_{1} + د_{2}}{2}$ = اوسط دباؤ، ثہ = گیس کی کثافت، $ح$ = فی ثانیہ بہنے والی گیس کا حجم، ص = نلی کا نصف قطر، ل = نلی کا طول اور لہ = گیس کی لزوجیت

لیکن بالکل کم دباؤ پر یہ کلیہ صحیح نہیں ہے۔

فرض کرو کہ ایک پتلی نلی (شکل ۸) کے ایک سرے سے لا فاصلہ پر دباؤ د اور لا + فرلا فاصلہ پر دباؤ د + فرد ہے۔ فرض کرو کہ گیس کی اوسط رفتار نلی کے دیواروں کے متوازی

س کے مساوی ہے۔



شکل ۸

دیوار کے اس فرلا ٹکڑے کا رقبہ

$= 2\pi$ ص فرلا

اب گیس میں ایک مربع سمر کا رقبہ

تصور کیا جائے تو ہم کو یہ دریافت کرنا ہے کہ ع سالمات فی مکعب سمر میں سے کتنے سالمات فی ثانیہ اس اکائی رقبہ میں سے گزرینگے

مساوات (۱۷) سے $فرع = ع \sqrt{\frac{عہ م}{\pi}}\; و^{-عہ م ہ_{1}^{2}}\; فرہ_{1}$

∴ تعداد سالمات جو فی ثانیہ اکائی رقبہ میں سے گزرتے ہیں =

$$= \int_{صفر}^{\infty} فرع\; ہ_{1} = \bar{ع}\ \text{فرض کرو}$$

$$\therefore \bar{ع} = ع \sqrt{\frac{عہ م}{\pi}} \cdot \frac{1}{2\, عہ م} = \frac{ع}{2\sqrt{\pi\, عہ م}}$$

لیکن مساوات (۲۰) سے $\text{ر} = \sqrt{\dfrac{۳}{۲\,\text{عہ}\,\text{م}}}$

$$\therefore\ \bar{\text{ع}} = \frac{\text{ع}\,\text{ر}}{\sqrt{۶\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۷)$$

اس فرلا ٹکڑے سے فی ثانیہ جو سالمات ٹکرا رہے ہیں ان کی تعداد

$$= \frac{۲\pi\,\text{ص}\,\text{فرلا}\,\text{ع}\,\text{ر}}{\sqrt{۶\pi}}$$

اور سالمی معیار حرکت فی ثانیہ، دیواروں کے متوازی =

$$= \frac{۲\pi\,\text{ص}\,\text{فرلا}\,\text{ع}\,\text{ر}\,\text{م}\,\text{س}}{\sqrt{۶\pi}}$$

$$= \text{حاصل قوت} = -\pi\,\text{ص}^{۲}\,\text{فرد}$$

$$\therefore\ -\pi\,\text{ص}^{۲}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} = \frac{۲\pi\,\text{ص}\,\text{ثہ}\,\text{ر}\,\text{س}}{\sqrt{۶\pi}}$$

جہاں ثہ = گیس کی کثافت

$$\text{فی ثانیہ برآمد ہونے والی گیس کی کمیت} = \pi\,\text{ص}^{۲}\,\text{س}\,\text{ثہ}$$

$$= -\pi\,\text{ص}^{۲}\,\text{ثہ}\,\text{ص}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} \cdot \frac{\sqrt{۶\pi}}{۲\,\text{ثہ}\,\text{ر}} =$$

$$= -\pi\,\text{ص}^{۳}\,\sqrt{\frac{\pi\,\text{ی}}{۲\,\text{لا}\,\text{ت}}} \cdot \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}$$

$$\left(\text{چونکہ}\ \text{ر} = \sqrt{\frac{۳\,\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ی}}}\right)$$

∴ پوری نلی کے طول ل سے برآمد ہونے والی گیس کی کمیت فی ثانیہ = $\text{ک}_{۱}$

$$= \pi\,\text{ص}^{۳}\,\sqrt{\frac{\pi\,\text{ی}}{۲\,\text{لا}\,\text{ت}}} \cdot \frac{(\text{د}_{۱} - \text{د}_{۲})}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۸)$$

یہ کنڈسن کے سالمی بہاؤ کے کلیہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

نلی کی مزاحمت :- نلی کی اکائی برآمد "مہ" کی تعریف (د ح) سے کی جاتی ہے جبکہ فرق دباؤ $(د_1 - د_2)$ ایک ڈائین فی مربع سم کے مساوی ہو اور ح گیس کا وہ حجم ہو جو اوسط دباؤ د پر فی ثانیہ اس سے برآمد ہو رہی ہے ۔

تعریف کی رو سے

$$مہ = (د\ ح) = \frac{ثہ\ لات}{لع} \cdot ح =$$

$$= \left(\frac{لات}{لع} \cdot ک_1\right)_{(د_1 - د_2) = ۱}$$

مساوات (۲۸) سے :-

$$مہ_1 = \frac{لات}{لع} \cdot \frac{\pi\ ص^3}{ل} \sqrt{\frac{\pi\ لع}{۲\ لات}} =$$

$$= \frac{\pi\ ص^3}{ل} \sqrt{\frac{\pi\ لات}{۲\ لع}} = \frac{\pi\ ص^3}{ل} \sqrt{\frac{\pi}{۲\ ثہ}}$$

جہاں ثہ = ایک ڈائین فی مربع سم دباؤ کے تناظر کثافت $= \frac{لع}{لات}$

نلی کے لئے گیس کی مجموعی برآمد دباؤ $(د_1 - د_2)$ کے لئے $= مہ_1 (د_1 - د_2)$

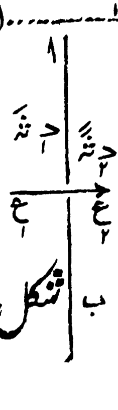
یعنی

$$مہ_1 = \frac{\text{مجموعی برآمد}}{د_1 - د_2}$$

کلیہ اوم سے اس کی مطابقت کی جائے تو چونکہ $\frac{\text{رو}}{\text{محرکۂ برق}} = \frac{۱}{\text{مزاحمت}}$

اس لئے $\frac{۱}{\text{مزاحمت}}$ مہ₁ کے تناظر ہوتی ہے ۔

$$\therefore \text{نلی کی مزاحمت} = \frac{۱}{مہ_1} = \frac{ل}{\pi\ ص^3} \sqrt{\frac{۲\ ثہ_1}{\pi}} \qquad \text{.........(۲۹)}$$



شکل ۹

سوراخ کی مزاحمت :- فرض کرو کہ ۱ ب شکل ۹ میں ایک پردہ ہے جس میں ایک بہت ہی چھوٹا سوراخ ہے اور پردہ کی بائیں جانب سالمات کی تعداد فی مکعب سم $ع_1$ اور داہنی جانب $ع_2$ ہے اور نیز گیس کا دباؤ اور کثافت پردہ کے بائیں

اور دائیں جانب بالترتیب د_1، ثہ_1 اور د_2، ثہ_2 ہیں۔

اس صورت میں گیس کی وہ کمیت جو بائیں جانب سے دائیں جانب فی ثانیہ سوراخ میں سے گزرے گی $= \dfrac{\pi\,\text{ص}^2\,\text{ع}_1\,\text{ر}\,۴}{\sqrt{6\pi}}$

گیس کی وہ کمیت جو داہنی جانب سے بائیں جانب فی ثانیہ گزریگی $= \dfrac{\pi\,\text{ص}^2\,\text{ع}_2\,\text{ر}\,۲}{\sqrt{6\pi}}$

جہاں $\text{ص} =$ سوراخ کا نصف قطر

$\therefore$ حاصل کمیت جو بائیں جانب سے داہنی جانب فی ثانیہ گزرے گی $=$

$= \text{ک}_2$ (فرض کرو)

$$= \frac{\pi\,\text{ص}^2\,\text{ر}}{\sqrt{6\pi}}\left(\text{ثہ}_1 - \text{ثہ}_2\right)$$

$$= \frac{\pi\,\text{ص}^2}{\sqrt{6\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3\,\text{لات}}{\text{ث}}}\left(\text{د}_1 - \text{د}_2\right)\frac{\text{ث}}{\text{لات}} =$$

$$= \pi\,\text{ص}^2\left(\text{د}_1 - \text{د}_2\right)\sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\,\text{لات}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

سوراخ کی اکائی برآمد "مہ_2" پہلے کی طرح اب بھی ($\text{د}\,\text{ح}$) کے مساوی ہوگی جبکہ فرق دباؤ ($\text{د}_1 - \text{د}_2$) ایک ڈائین فی مربع سمر کے مساوی ہو اور ح گیس کا وہ حجم ہو جو اوسط دباؤ د پر فی ثانیہ سوراخ سے برآمد ہو رہی ہے۔

$$\therefore\ \text{مہ}_2 = \text{د}\,\text{ح} = \frac{\text{ثہ}\,\text{لات}}{\text{ث}} \cdot \text{ح} = \left(\frac{\text{لات}}{\text{ث}} \cdot \text{ک}_2\right)_{(\text{د}_1 - \text{د}_2) = 1}$$

مساوات (۳۰) سے :- $\text{مہ}_2 = \dfrac{\text{لات}}{\text{ث}} \cdot \pi\,\text{ص}^2 \sqrt{\dfrac{\text{ث}}{2\pi\,\text{لات}}} =$

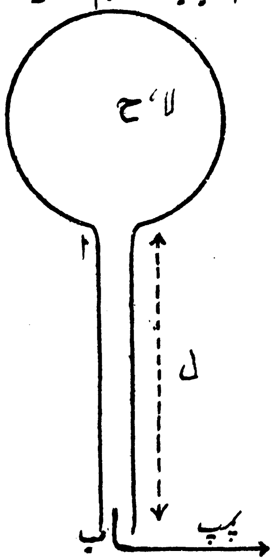
$$= \pi\,\text{ص}^2 \sqrt{\frac{\text{لات}}{2\pi\,\text{ث}}} = \pi\,\text{ص}^2 \sqrt{\frac{1}{2\pi\,\text{ثہ}_1}}$$

جہاں $\text{ثہ}_1 =$ ایک ڈائین فی مربع سمر دباؤ کے متناظر کثافت ۔ کلیہ اوم سے پہلے

کی طرح پھر مطابقت کی جائے تو سوراخ کی مزاحمت $= \frac{1}{مہ} =$

$$= \frac{1}{\pi\, ص^{2}} \sqrt{2\pi\, ث} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۱)$$

پمپ کی صورت میں ایک سادہ اطلاق :- فرض کرو کہ ایک برتن جس کا حجم ح ہے گیس سے بھرا ہوا ہے اور گائیڈے کے قسم کی پمپ سے ہم اس میں خلا پیدا کرنا چاہتے ہیں۔ شکل نمبر ۱۰ کے مطابق اس برتن کو نلی ۱ ب کے ذریعہ پمپ کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے۔



شکل نمبر ۱۰

فرض کرو کہ اس برتن میں دباؤ ث ثانیوں کے بعد لا ہے اور پمپ د دباؤ پر چل رہا ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ فرک گرام گیس اس برتن سے فرو ثانیہ میں خارج ہو رہی ہے تب

$$ک_{1}\, فرو = -\, فرک = -\, فر(ثہ\, ح) =$$

$$= -\, ح\, فرثہ = -\, \frac{ح\, ع}{لا\, ت} \,.\, فرلا$$

یعنی $-\, \frac{ح\, ع}{لا\, ت}\, فرلا =$

$$= \frac{\pi\, ص^{3}}{ل} \sqrt{\frac{\pi\, ع}{2\, لا\, ت}}\, (لا - د)\, فرو$$

$$\therefore -\, ح\, فرلا = \frac{\pi\, ص^{3}}{ل} \sqrt{\frac{\pi}{2\, ث}} \,.\, (لا - د)\, فرو = مہ\, (لا - د)\, فرو$$

$$\therefore -\, \frac{مہ\, فرو}{ح} = \frac{فرلا}{لا - د} = \frac{فر(لا - د)}{(لا - د)}$$

اس کو تکملانے سے ‏ - مہ و / ح = لوکو (لا - د) + ج

جہاں ج = کوئی مستقل

فرض کرو کہ جب وقت و = صفر تو لا = لاَ یعنی ابتدا میں گیس کا دباؤ لاَ ہے۔ اس صورت میں ج = - لوکو (لاَ - د)

∴ - مہ و / ح = لوکو ((لا - د) / (لاَ - د))

∴ برتن میں لاَ دباؤ کو لا دباؤ تک لانے میں جو وقت صرف ہوا:-

و = (ح / مہ) ۲٫۳۰۳ لوک۱۰ ((لاَ - د) / (لا - د)) ....(۳۲)

لہٰذا اگر ح، مہ، لاَ، لا اور د کی قیمتیں ہمیں معلوم ہو جائیں تو و دریافت کیا جا سکتا ہے۔ مساوات (۳۲) میں مہ کی قیمت درج کرنے سے:-

و = (ح ل / π ص۳) √(۲ ش / π) ۲٫۳۰۳ لوک۱۰ ((لاَ - د) / (لا - د)) .....(۳۳)

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ اگر نلی کا نصف قطر ص بڑھا دیا جائے اور ل گھٹا دیا جائے تو و کی قیمت کم ہو جائے گی۔ یعنی اگر جلد خلا پیدا کرنا مطلوب ہو تو ص کو بڑھانا اور ل کو گھٹانا چاہیئے۔

ایک چھوٹی ٹونٹی جس کا طول لَ ہو اس نلی میں لگا دی جائے تو یہ دریافت کیا جا سکتا ہے کہ نلی کے طول پر ٹونٹی کی مزاحمت کا کیا اثر ہوتا ہے:-

فرض کرو کہ نلی کی مزاحمت = ایسی ٹونٹی کی مزاحمت جس کا قطر فَ ہے۔

یعنی (۸ ل / π ف۳) √(۲ ش / π) = (۸ لَ / π فَ۳) √(۲ ش / π)

جہاں ف = نلی کا قطر

∴ ل = لَ . ف۳ / فَ۳

مثال کی طور پر اگر لَ = ۱ سمر اور ف = ۲ سمر اور فَ = ۰ء۲ سمر تو نلی کا طول ل یعنی ۱۰۰۰ سمر حاصل ہوگا۔

یعنی ۱۰۰۰ سمر طول کی نلی ایک چھوٹی سی ٹونٹی کے مماثل ہوتی ہے جس کا طول صرف ۱ سمر اور قطر ۰ء۲ سمر ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اس قدر چھوٹی ٹونٹی کی وجہ سے نلی کے طول میں کافی اضافہ ہو جاتا ہے اس لیے اگر جلد خلا پیدا کرنا مقصود ہو تو اس کی بڑی احتیاط کرنی چاہیے کہ ٹونٹیاں حتی الامکان کم تعداد میں رکھی جائیں۔

پمپ کی رفتار:۔ شکل ۱۰ پر غور کرو۔ برتن سے گیس کی جتنی کمیت خارج ہوتی ہے وہ اس کمیت کے مساوی ہے جو پمپ میں داخل ہوتی ہے، لیکن چونکہ دباؤ مختلف ہیں اس لئے برتن سے نکلنے والی گیس کا حجم، پمپ میں داخل ہونے والے حجم کے مساوی نہیں ہوتا۔

فرض کرو کہ فرو ثانیہ میں د دباؤ پر فرح$_{1}$ مکعب سمر گیس پمپ میں داخل ہوتی ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ فرو ثانیہ میں فرح$_{1}$ مکعب سمر گیس پمپ کے ذریعہ باہر خارج کی جاتی ہے، اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ اسی وقفہ فرو میں فرح$_{2}$ مکعب سمر گیس دباؤ لا پر برتن سے باہر نکلتی ہے ظاہر ہے کہ موثر دباؤ (لا - د) کے لئے گیس کی مجموعی برآمد = ھ$_{1}$ (لا - د) اور یہ اس حجم کے متناظر ہے جو فی ثانیہ باہر نکل رہا ہے۔

لہذا فرو ثانیوں میں مجموعی برآمد = ھ$_{1}$ (لا - د) فرو

کلیہ بائیل سے لا فرح$_{2}$ = د فرح$_{1}$ = ھ$_{1}$ (لا - د) فرو

گائیڈے کے مطابق پمپ کی حقیقی رفتار س$_{1}$ = $\frac{\text{فرح}_1}{\text{فرو}}$ اور ظاہری رفتار س$_{2}$ = $\frac{\text{فرح}_2}{\text{فرو}}$

$$\therefore \text{ھ}_1(\text{لا} - \text{د}) = \text{لا}\,\frac{\text{فرح}_2}{\text{فرو}} = \frac{\text{د فرح}_1}{\text{فرو}} = \text{لا س}_2 = \text{د س}_1$$

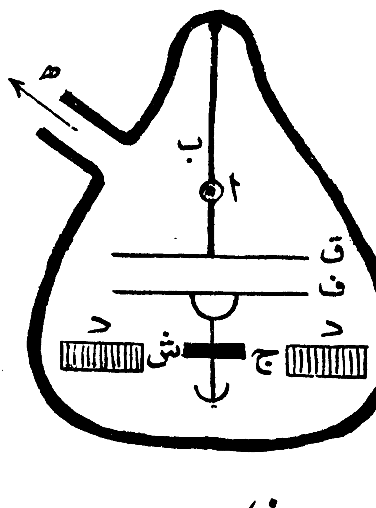
$$\therefore \frac{1}{\text{ہ}} = \frac{\text{لا} - \text{د}}{\text{لا}\,\text{س}_2} = \frac{1}{\text{س}_2} - \frac{\text{د}}{\text{لا}\,\text{س}_2} =$$

$$= \frac{1}{\text{س}_2} - \frac{\text{د}}{\text{د}\,\text{س}_1} = \frac{1}{\text{س}_2} - \frac{1}{\text{س}_1}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{س}_2} = \frac{1}{\text{ہ}} + \frac{1}{\text{س}_1} \quad \text{.................} \quad (۳۴)$$

خفیف دباؤ کی پیمائش :- میکلاڈ داب پیما سے تقریباً ہر شخص واقف ہے یہ کلیہ بائیل کے تحت کام کرتا ہے اور اس کو کئی شکلوں میں بنایا گیا ہے۔ ایک بڑی کارآمد شکل سنٹرل سائنٹفک کمپنی کے آلات کی فہرست میں دی گئی ہے، اس کے ذریعہ $۱۰^{-۴}$ مم پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک پارہ کی سطح کو پیچ کے ذریعہ ترتیب دینے کے انتظام کے ساتھ ناپا جاسکتا ہے اور بہت کارآمد ہے۔

ڈشمن کا سالمی داب پیما[۴] **:-** شکل ۱۱ میں، ق ایک ابرک کا قرص ہے جو ایک کوارٹز کے ریشہ ب کے ذریعہ ایک شیشہ کے جوفہ کے اندر لٹکایا جاتا ہے۔ ف ایک اور قرص ہے جو گردشی متقناطیسی میدان کے ذریعہ فی منٹ دس ہزار چکروں تک گھمایا جاسکتا ہے۔ د اور د لچھے ہیں جو اس گردشی متقناطیسی میدان کو پیدا کرتے ہیں۔ ج اور ش ایک معمولی مقناطیس کے قطب ہیں اور ۲ ایک مستوی آئینہ ہے جس سے



شکل ۱۱

لٹکے ہوئے قرص ق کا انصراف معلوم کیا جاتا ہے۔ ھ ایک کھلا ہوا حصہ ہے جہاں خفیف دباؤ والی گیس کا برتن جوڑ دیا جاتا ہے۔ جب ف گھومتا ہے تو اوپر کے قرص پر لزوجی کھنچاؤ پیدا ہوتا ہے اور چنانچہ یہ کچھ زاویہ میں گھوم جاتا ہے جس کو ۲ سے منعکس شدہ ایک شعاع نور کے ذریعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ ق کے انصراف سے گیس کا دباؤ حسابی عمل سے دریافت کر لیا جاتا ہے۔ عملی طور پر ف اور ق کا درمیانی فاصلہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ کے رتبہ کا ہوتا ہے۔

گنڈسن کے قول کے مطابق گیس کے سالمات متحرک مستوی سے چمٹ جاتے ہیں جس کی وجہ سے فی ثانیہ معیار حرکت میں تغیر واقع ہوتا ہے اور نیز متضاد سمت میں ایک مماسی قوت عمل کرنے لگتی ہے۔

مساوات (۲۷) سے مستوی کے فی مربع سمر رقبہ پر سالمات کی جو تعداد فی ثانیہ ٹکرائے گی

$$= \bar{ع} = \frac{ع\,\bar{ر}}{٦\pi}$$

∴ اس مستوی کے متوازی ان سالمات کا فی ثانیہ فی اکائی رقبہ معیار حرکت

$$= \frac{ع\,\bar{ر}}{٦\pi} \cdot ٢ث\,\bar{ر} = \frac{ث\,\bar{ر}\,\bar{ر}}{٦\pi} = \frac{ث\,د}{لا\,ت} \sqrt{\frac{٣\,لا\,ت}{ث}} \cdot \frac{\bar{ر}}{٦\pi}$$

$$= \bar{ر}\,د \sqrt{\frac{ث}{٢\pi\,لا\,ت}} \propto \text{مماسی قوت فی اکائی رقبہ}$$

جہاں $\bar{ر}$ = اس گیس کی رفتار جو متحرک ہے

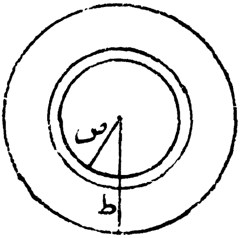
اور د = وہ دباؤ جس کی پیمائش مطلوب ہے۔

$$\therefore \text{مماسی قوت فی اکائی رقبہ} = گہ\,\bar{ر}\,د \sqrt{\frac{ث}{٢\pi\,لا\,ت}} \quad \text{..........} (٣٥)$$

جہاں گہ = ایک مستقل جس کی قیمت بیشتر گیسوں کے لئے ایک کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ قرص ف کی زاوی رفتار ω کے مساوی ہے اور اس کا نصف قطر ط ہے۔

قرص میں ایک چھوٹا حلقہ مرکز سے ص فاصلہ پر ایسا لو کہ اس کی موٹائی فرص کے مساوی ہو (شکل ع۱۲)



شکل ع۱۲

اس حلقہ کا رقبہ = ٢ π ص فرص

∴ اس حلقہ پر مماسی قوت =

$$= ٢\,\pi\,\text{ص تر د فرص}\sqrt{\frac{\text{ک}}{٢\pi\,\text{لات}}}$$

$$= ٢\,\pi\,\text{ص فرص ص}\,\omega\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ک}}{٢\pi\,\text{لات}}}$$

اس کے محور کے گرد جفت $= ٢\,\pi\,\text{ص}^{٣}\,\omega\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ک}}{٢\pi\,\text{لات}}}\;.\,\text{فرص}$

∴ اس پورے قرص کی وجہ سے جفت =

$$\int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} ٢\,\pi\,\text{ص}^{٣}\,\omega\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ک}}{٢\pi\,\text{لات}}}\;.\,\text{فرص}$$

$$= ٢\,\pi\,\omega\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ک}}{٢\pi\,\text{لات}}}\;.\,\frac{\text{ط}^{٤}}{٤} = \text{مہ عہ}$$

جہاں مہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ اور عہ = زاویہ انصراف

$$\therefore\ \text{عہ} = \frac{\pi\,\omega\,\text{د}}{٢\,\text{مہ}}\sqrt{\frac{\text{ک}}{٢\pi\,\text{لات}}}\;.\,\text{ط}^{٤}\ \ldots\ldots\ldots\ (٣٦)$$

لیکن $\text{و}_{١} = ٢\,\pi\sqrt{\frac{\text{مج}}{\text{مہ}}}$ جہاں $\text{و}_{١}$ = اس قرص کا وقت دوران

اور مج = اس قرص کے جمود کا معیار اثر

پس ہم اِن دونوں مساواتوں کے ذریعہ د کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔
اس داب پیما کے ذریعہ ہم $۱۰^{-۷}$ مم پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک ناپ سکتے ہیں۔ امریکہ میں یہ طریقہ اب تک رائج ہے۔
اس آلہ میں کسی دھاتی قرص کے عوض ابرک کا قرص ق استعمال کرنے کی غایت صرف یہ ہے کہ ایڈی رؤوں کو نہ پیدا ہونے دیا جائے جن سے قرص کی حرکت پر زبردست اثر پڑتا ہے

اہتزازی قرص کا طریقہ: — اس طریقہ میں ایک ابرک کا قرص کوارٹز کے ریشہ کے ذریعہ دو قرصوں کے درمیان اہتزاز کرنے کے لئے لٹکایا جاتا ہے اور اس پورے انتظام کو شکل ۱۱ کے قریب ایک شیشہ کے جوفہ میں رکھا جاتا ہے۔
خفیف دباؤ والی گیس کے برتن کو جوفہ سے جوڑ دینے کے بعد وقت دوران اور لوگارثمی تنزل دریافت کر لیا جائے تو خفیف دباؤ د کی قیمت حسابی عمل سے معلوم کی جا سکتی ہے۔
اگر کسی وقفہ فرو میں قرص کا زاویۂ انصراف فرعہ ہے تو زاویٔی رفتار $\omega = \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}$ جیسا کہ شکل ۱۲ میں بتلایا گیا تھا، حلقہ کا رقبہ =

$$= ۲\pi \,\text{ص فرص}$$

اور اس حلقہ پر مماسی قوت = $\text{متر د} \sqrt{\frac{\text{ٹ}}{۲\pi\,\text{لات}}} \cdot ۲\pi\,\text{ص فرص}$

$$= \text{ص}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}} \cdot \text{د} \sqrt{\frac{\text{ٹ}}{۲\pi\,\text{لات}}} \cdot ۲\pi\,\text{ص فرص}$$

سکے محور کے گرد جفت $= ۲\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{فرص} \cdot \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}} \cdot \text{د} \sqrt{\frac{\text{ٹ}}{۲\pi\,\text{لات}}}$

∴ اس پورے قرص کی وجہ سے جفت =

$$= \int_{صفر}^{ط} 2\pi \frac{فرعہ}{فرو} د \sqrt{\frac{ع}{2\pi لات}} \cdot ص^3 \, فرص$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot د \frac{فرعہ}{فرو} \sqrt{\frac{ع}{2\pi لات}} \cdot ط^4$$

جہاں ط = قرص کا نصف قطر.

اب چونکہ سالمات اس قرص کے دونوں طرف ٹکرا رہے ہیں اس لئے

قسر کی وجہ سے پورا جفت $= \pi د \cdot \frac{فرعہ}{فرو} \sqrt{\frac{ع}{2\pi لات}} \cdot ط^4$

$= گ \frac{فرعہ}{فرو}$ جہاں $گ = \pi د \sqrt{\frac{ع}{2\pi لات}} \cdot ط^4$

تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی :-

$$مج \frac{فر^2 عہ}{فرو^2} + گ \frac{فرعہ}{فرو} + مہ \, عہ = صفر$$

اس تفرقی مساوات کو حل کرنے سے :-

$$عہ = ا \, و^{-\frac{گ و}{2 مج}} \, جم\left(\sqrt{\frac{مہ}{مج} - \frac{گ^2}{4 مج^2}} \cdot و + ب\right) \quad \text{......(۳۷)}$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

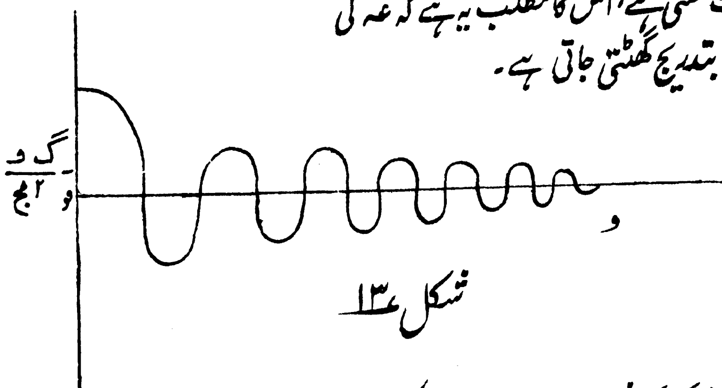
یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔ اسلئے وقت دوران

$$و_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{مہ}{مج} - \frac{گ^2}{4 مج^2}}} \quad \text{..................(۳۸)}$$

اگر ہمیں $و_1$ ، مہ اور مج کی قیمتیں معلوم ہوجائیں تو گ دریافت کیا

جاسکتا ہے اور پھر د کی قیمت آسانی کے ساتھ نکالی جاسکتی ہے۔

مساوات (۳۷) میں $\text{ا}\ \text{و}^{-\frac{\text{گ}\,\text{و}}{\text{۲مج}}}$ حیطۂ ارتعاش کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر ہم د کو $\text{و}^{-\frac{\text{گ}\,\text{و}}{\text{۲مج}}}$ کے مقابلہ میں مرتسم کریں تو ایک ایسا منحنی حاصل ہوتا ہے جو شکل ۱۳ میں دکھایا گیا ہے۔ اس منحنی سے یہ ظاہر ہے کہ و کی قیمت بڑھنے سے حیطۂ ارتعاش کی قیمت گھٹتی ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ عہ کی قیمت بتدریج گھٹتی جاتی ہے۔



شکل ۱۳

فرض کرو کہ شعاع نور جو آئینہ سے منعکس ہوکر آتی ہے جب پیمانہ کے ایک جانب حرکت کرتی ہے تو انصراف عہ_1 بنتا ہے اور پیمانہ کے اسی جانب ایک کامل وقت دوران کے بعد انصراف عہ_2 ہوتا ہے۔ تب:-

$$\frac{\text{عہ}_1}{\text{عہ}_2} = \frac{\text{و}^{-\frac{\text{گ}}{\text{۲مج}}\cdot\,\text{لا}\,\text{و}_1}}{\text{و}^{-\frac{\text{گ}}{\text{۲مج}}(\text{لا}+1)\,\text{و}_1}} = \text{و}^{\frac{\text{گ}}{\text{۲مج}}\cdot\,\text{و}_1}$$

جہاں لا = کوئی کسر

$$\therefore \text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{عہ}_1}{\text{عہ}_2} = \frac{\text{گ}\,\text{و}_1}{\text{۲مج}} = \text{مستقل} = \text{فہ} = \text{لوکارتمی تنزل}$$

$$\therefore \text{فہ} = \frac{\text{و}_1}{\text{۲مج}}\cdot \pi\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\,\text{لا}\,\text{ت}}}\cdot \text{ط}^2 \;\ldots\ldots\ldots (۳۹)$$

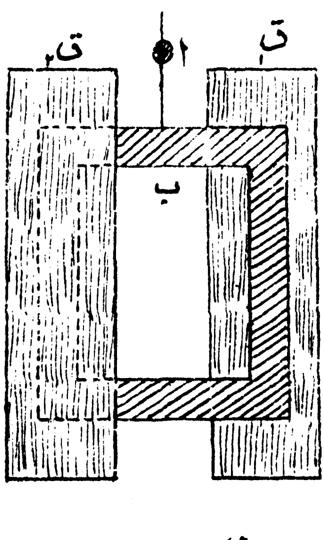
اگر ف، و، مج وغیرہ کی قیمتیں معلوم ہوں تو د کی قیمت حسابی طریقہ سے دریافت کی جا سکتی ہے

اس طریقہ سے $۱۰^{-۷}$ ممر پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے اور ڈاکٹر شنا نے اسکو استعمال بھی اسی کیلئے کیا تھا۔

کنڈسن کا داب پیما (۵): سنہ ۱۹۱۰ء میں کنڈسن نے کسی قدر خلا دار جوفہ میں گرم اور سرد تختیوں کو رکھنے کے بعد ان کے درمیان جو دفع کی قوت سالمی تصادم کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اس کو حسابی طریقہ سے دریافت کیا۔

اگر دو ایسی تختیاں اس طرح متوازی رکھی جائیں کہ ان کے درمیان فاصلہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ سے چھوٹا ہو تو تختیوں کے درمیان ایک دفع کی قوت عمل کرتی ہے جو گیس کے زیر غور دباؤ کے متناسب ہوتی ہے۔

شکل ۱۴۷ پر غور کرو۔ ق۱ اور ق۲ دو مستطیلی ثابت تختیاں ہیں جن کو کسی ذریعہ سے مثلاً برقی طریقہ سے گرم کیا جاتا ہے۔ ب ایک سرد مستطیلی تختی ہے جس کو کوارٹز کے ریشہ کے ذریعہ لٹکا دیا جاتا ہے اور اس کے ساتھ ایک مستوی آئینہ ا لگا ہوتا ہے۔ جب اس قسم کی ترتیب کو ایک لطیف گیس میں رکھا جاتا ہے (یعنی ایسی گیس میں جسکے سالمات ایک دوسرے سے بہت دور دور رہتے ہوں) تو سالمی دفعہ کی قوت تختی ب میں انصراف پیدا کرتی ہے۔ اس انصراف کو آئینہ ا اور شعاع نور کے ذریعہ ناپا جا سکتا ہے۔



شکل ۱۴۷

فرض کرو کہ ت۱ اور ت۲ بالترتیب

ق۱ اور ب کی تپشیں ہیں اور ع۱ فی مکعب سمر سالمات کی وہ تعداد ہے جو ق۱ سے ب تک س۱ جذر اوسط مربع رفتار سے حرکت کر رہے ہیں۔

اسی طرح یہ بھی فرض کرو کہ ع۲ سالمات کی وہ تعداد فی مکعب سمر ہے جو ب سے ق۱ کی طرف س۲ جذر اوسط مربع رفتار سے متحرک ہیں۔

تعادل کے لئے، سالمات کی وہ تعداد جو فی ثانیہ فی مربع سمر سطح سے ٹکراتے ہیں مساوی ہونی چاہیئے۔

یعنی $$\frac{\text{ع}_1\,\text{س}_1}{\sqrt{6\pi}} = \frac{\text{ع}_2\,\text{س}_2}{\sqrt{6\pi}}$$ یعنی $$\text{ع}_1\,\text{س}_1 = \text{ع}_2\,\text{س}_2$$

اگر پوری گیس کو ت تپش پر رکھا جائے اور سالمات کی تعداد فی مکعب سمر، ق۱ اور ب کی درمیانی فضا کے باہر، ع ہو، تو تعادل کیلئے فی ثانیہ فی مربع سمر، ق۱ اور ب کی درمیانی فضا سے باہر جانے والے سالمات کی تعداد، ان سالمات کی تعداد کے مساوی ہونا چاہیئے جو فی ثانیہ فی مربع سمر ق۱ اور ب کی درمیانی فضا میں گزرتے ہیں۔

یعنی $$\frac{\text{ع}_1\,\text{س}_1}{\sqrt{6\pi}} + \frac{\text{ع}_2\,\text{س}_2}{\sqrt{6\pi}} = \frac{\text{ع}\,\text{س}_2}{\sqrt{6\pi}}$$

یعنی $$\text{ع}_1\,\text{س}_1 + \text{ع}_2\,\text{س}_2 = \text{ع}\,\text{س}_2$$

$$\therefore\ \text{ع}_1\,\text{س}_1 = \text{ع}_2\,\text{س}_2 = \frac{\text{ع}\,\text{س}_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

اگر حاصل دفع کی قوت جو تختی کے اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہے ق ہو اور (د۱ + د۲) تختیوں کے درمیان مجموعی دباؤ کی قیمت ہو اور گیس کے برتن میں دباؤ د ہو تو:—

$$\text{ق} = \text{د}_1 + \text{د}_2 - \text{د} = \frac{1}{3}\,\text{ث}_1\,\text{س}_1^2 + \frac{1}{3}\,\text{ث}_2\,\text{س}_2^2 - \frac{1}{3}\,\text{ث}\,\text{س}_2^2$$

جہاں شہ₁، شہ₂ اور شہ بالترتیب کثافتوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$\therefore \text{ق} = \frac{1}{3}\,\text{م}\,\text{ع}_1\,\text{سہ}_1^2 + \frac{1}{3}\,\text{م}\,\text{ع}_2\,\text{سہ}_2^2 - \frac{1}{3}\,\text{م}\,\text{ع}\,\text{سہ}_2^2 =$$

$$= \frac{\text{م}}{3}\left(\text{ع}_1\text{سہ}_1^2 + \text{ع}_2\text{سہ}_2^2 - \text{ع}\,\text{سہ}_2^2\right)$$

$$= \frac{\text{م}}{3}\left(\text{ع}_1\text{سہ}_1^2 + \text{ع}_2\text{سہ}_2^2 - 2\,\text{ع}_2\text{سہ}_2^2\right) = \frac{\text{م}}{3}\left(\text{ع}_1\text{سہ}_1^2 - \text{ع}_2\text{سہ}_2^2\right)$$

$$= \frac{\text{م}}{3}\left(\frac{\text{ع}_1\text{سہ}_1^2}{\text{ع}_2\text{سہ}_2^2} - 1\right)\text{ع}_2\text{سہ}_2^2 = \frac{\text{م}\,\text{ع}}{2\times 3}\,\text{سہ}_2^2\left(\frac{\text{سہ}_1^2}{\text{سہ}_2^2} - 1\right) =$$

$$= \frac{\text{شہ}\,\text{سہ}_2^2}{6}\left(\frac{\text{سہ}_1^2}{\text{سہ}_2^2} - 1\right)$$

لیکن یہ ہم جانتے ہیں کہ $\sqrt{\text{ت}_1} \propto \text{سہ}_1$ اور $\sqrt{\text{ت}_2} \propto \text{سہ}_2$

$$\therefore \text{ق} = \frac{\text{د}}{2}\left(\frac{\text{ت}_1}{\text{ت}_2} - 1\right) \qquad \ldots\ldots\ldots (41)$$

کُنڈسن نے اس اصول کو اپنے داب پیما میں استعمال کیا۔ اس داب پیما کے ذریعہ 10^{-6} مم پارہ کے دباؤ تک کی قیمت بالراست معلوم کی جاسکتی ہے۔ ایگکرر نے ١٩١٣ء میں اس اصول کے عمل کا ایک مختصر ساخاکہ دیا تھا۔

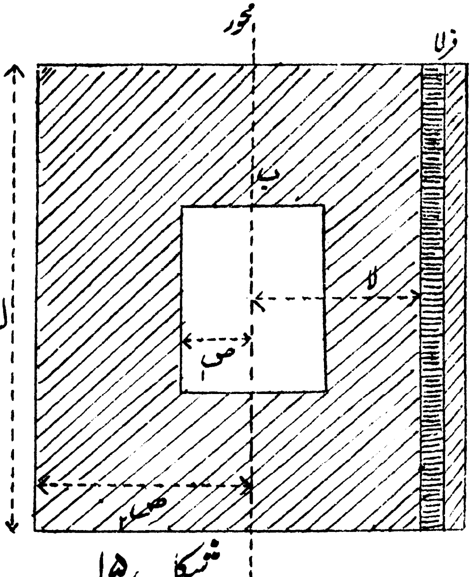
اگر ت₁ اور ت₂ میں فرق کچھ زیادہ بڑا نہ ہو تو $\text{ق} = \frac{\text{د}}{4}\left(\frac{\text{ت}_1 - \text{ت}_2}{\text{ت}_2}\right)$

ناڈ نے اس ضابطہ کو تقریبی طور پر ١٩١٨ء میں حاصل کیا تھا۔

اب فرض کرو کہ ص₁ اور ص₂ محورِ تعلیق سے ب کے انتصابی ضلعوں کے فاصلے ہیں۔ اور ل انتصابی ضلع کا طول ہے جیسا کہ شکل ١٥ میں بتایا گیا ہے۔

تختی میں ایک دھجی "فرلا" موٹائی کی محور سے لا فاصلہ پر لو۔

تب اس دھجی پر قوت = ق ل فرلا اور اس پر جو جفت عمل کرتا ہے وہ



شکل ۱۵

$= ق\ ل\ فزلا\ .\ لا$

دونوں ضلعوں کو زیربحث لیتے ہوئے پوری تختی کی وجہ سے جفت =

$$= \int_{ص_۱}^{ص_۲} ۲\ ق\ ل\ لا\ فزلا = مہ\ عہ$$

جہاں عہ = انفراف اور مہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

$$\therefore\ ق\ ل\ (ص_۲^۲ - ص_۱^۲)$$

$$= مہ\ عہ \quad ....(۴۲)$$

مساوات (۴۱) اور (۴۲) سے :-

$$\frac{د}{۲}\left(\frac{ت_۱}{ت_۲} - ۱\right) ل\ (ص_۲^۲ - ص_۱^۲) = مہ\ عہ \quad ....(۴۳)$$

اب اگر تختی کا وقت دوران د ہو تو $د = ۲\pi \sqrt{\frac{مج}{مہ}}$

جہاں مج = تختی کے جمود کا معیار اثر محور تعلیق کے گرد

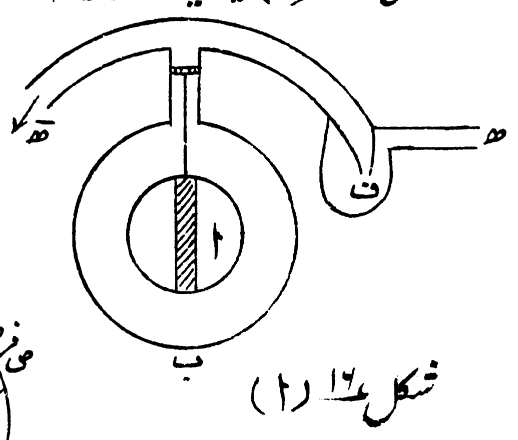
لہٰذا مہ کی قیمت معلوم کرنے کے بعد مساوات (۴۳) سے د کی قیمت حسابی طریقہ سے حاصل کی جاسکتی ہے گو گیس کی نوعیت نامعلوم رہے۔ سنہ ۱۹۱۴ء میں جے۔ ڈبلیو ووڈرو نے [۶] اسی اصول پر تختیوں کے درمیان ۱۰۰° ھ کی فرق تپش سے ایک داب پیما بنایا۔ اس نے گرم تختی کے لئے پلاٹینم کی پٹیاں استعمال کیں اور تختی کو برقی طریقہ سے گرم کیا، متحرک مستطیلی تختی المونیم کی تھی، اس نے تپشیں کو گرم پٹیوں کی برقی مزاحمت کی رقوم میں، تو وہ پیما استعمال کر کے، حسابی عمل سے حاصل کیا، خفیف دباؤ حاصل

کرنے کے لئے مائع ہوا میں کوئلہ استعمال کیا گیا تھا۔ اس کا دعویٰ ہے کہ متعدد گیسوں کو استعمال کر کے اس نے $۱۰^{-۸}$ ممر پارہ کے رتبہ کا دباؤ ناپا ہے۔

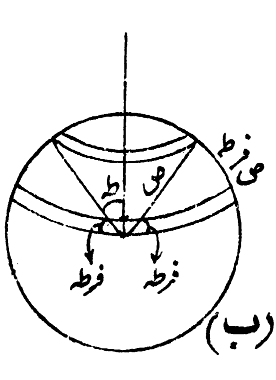
۱۹۱۸ء میں جے۔ ای۔ شرڈر اور آر۔ جی شیراوڈ نے کنڈسن کے داب پیما میں بڑی حد تک حساسیت پیدا کرنے میں کامیابی حاصل کی (۷)۔ داب پیما کو ایک سخت شیشہ کی نلی میں بند کر دیا گیا جس کا قطر ۲" اور طول ۹" تھا، پلاٹینم کی گرم پٹیوں کا طول ۸ء۱ سمر، عرض ۵ء۷ ممر اور موٹائی ۰۱۸ء ممر تھی، متحرک مستطیلی تختی جو الیومنیم کی تھی ۲ء۳ سمر لمبی ۴ سمر چوڑی اور ۰۰۷۶ء سمر موٹی تھی۔ متحرک تختی اور گرم پٹیوں کا درمیانی فاصلہ مقناطیسی گرفت کے ذریعہ باہر سے مرتب کیا گیا تھا۔ تعلیق ٹنگسٹن کے تار سے کی گئی تھی۔ ان دونوں نے بھی پلاٹینم کی تپشی قدر معلوم رکھ کر اوڈرد کی طرح پٹیوں کی تپش برقی مزاحمت کی رقوم میں حاصل کی۔ ان کا دعویٰ ہے کہ انھوں نے $۱۰^{-۹}$ ممر پارہ کے رتبہ کا دباؤ ناپا ہے۔

کنڈسن کے طریقے سے گیس کے سالمی وزن کی دریافت :-

شکل ۱۶ (ا) میں ایک ٹھوس کرہ 'ا' کوارٹز کے ریشہ کے ذریعہ



شکل ۱۶ (ا)



شکل ۱۶ (ب)

ایک اور کھوکھلے کرہ ب میں لٹکایا گیا ہے۔ کرہ ا کو جس کے وسطی حصہ میں موٹی پلاٹینم کی پٹی لگی ہوئی ہے دائری سمت میں مقناطیسی ذرائع سے اہتزاز کرنے کے لیے مجبور کیا جاتا ہے۔ ا اور ب کے درمیان فاصلہ تقریباً ۵ ممر کا ہوتا ہے۔ ف ایک مائع ہوا کا پھندا ہے جو سالمات کو گرفتار کر لیتا ہے۔ ھ کے ساتھ ایک سالمی پمپ جوڑا جاتا ہے جس سے حسب خواہش خفیف دباؤ ا اور ب کے درمیان پیدا کیا جا سکتا ہے۔ ھ پر ایک داب پیما جوڑا جاتا ہے جس کی مدد سے ا اور ب کے درمیان گیس کا دباؤ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ کرہ ا کو اہتزاز میں لا کر وقت دوران اور لوکارتمی تنزل دریافت کر لیا جاتا ہے۔

کرہ ا کو جس کا نصف قطر ص ہے چھوٹے چھوٹے منطقوں یا پٹوں میں تقسیم کرو۔ ایک ایسا پٹہ شکل ۱۶۱ (ب) میں دکھایا گیا ہے۔

اگر وقفہ فر و میں فرعہ انصراف پیدا ہو تو اس پٹہ کی خطی رفتار تر =

$$= \text{ص جب ط}\ \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}$$

مساوات (۳۵) سے اس پٹہ پر مماسی قوت =

$$= ۲\pi\,\text{ص}^{۲}\,\text{جب ط فر ط تر د}\sqrt{\frac{\text{ئ}}{۲\pi\,\text{ک ت}}}$$

چونکہ پٹہ کا رقبہ = ۲π ص . جب ط . ص فر ط

∴ اس پٹہ پر قوتوں کا معیار اثر =

$$= ۲\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط فر ط تر د}\sqrt{\frac{\text{ئ}}{۲\pi\,\text{ک ت}}}$$

لہٰذا پورا جفت =

$$\int_{\text{صفر}}^{\pi} ۲\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط ص جب ط}\ \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}\ .\ \text{فر ط د}\sqrt{\frac{\text{ئ}}{۲\pi\,\text{ک ت}}}$$

$$= \frac{۸}{۳}\,\pi\,\text{صٰ}^{۴}\,\text{د}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}\sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi\,\text{لات}}} = \text{گ}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}$$

$$\text{جہاں}\ \text{گ} = \frac{۸}{۳}\,\pi\,\text{صٰ}^{۴}\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi\,\text{لات}}}$$

تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{مج}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{عہ}}{\text{فرو}^{۲}} + \text{گ}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}} + \text{مہ}\,\text{عہ} = \text{صفر}$$

جہاں **مج** = کرہ کے جمود کا معیار اثر قطر کے گرد، اور مہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ۔

اس تفرقی مساوات کو حل کرنے سے :-

$$\text{عہ} = \text{ا}\ \text{و}^{-\frac{\text{گ و}}{۲\,\text{مج}}}\ \text{جم}\left(\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^{۲}}{۴\,\text{مج}^{۲}}}\ .\ \text{و} + \text{ب}\right)$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore\ \text{وقت دوران}\ \text{و}_{۱} = \frac{۲\pi}{\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^{۲}}{۴\,\text{مج}^{۲}}}}$$

اگر ہم $\text{و}^{-\frac{\text{گ و}}{۲\,\text{مج}}}$ کو و کے مقابل مرتسم کریں تو ایک منحنی حاصل ہوتا ہے جو شکل ۱۳ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ وقت جوں جوں بڑھتا ہے تو حیطۂ ارتعاش گھٹتا ہے۔

پہلے کی طرح، اگر پیمانہ کی داہنی جانب انصراف $\text{عہ}_{۱}$ ہو اور ایک کامل وقت دوران کے بعد اسی جانب انصراف $\text{عہ}_{۲}$ ہو تو $\frac{\text{عہ}_{۱}}{\text{عہ}_{۲}} = \text{و}^{\frac{\text{گ و}_{۱}}{۲\,\text{مج}}}$

یعنی $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{گ}\ \text{و}_1}{2\ \text{مج}} = \text{فہ} =$ لوکارتمی تنزل

گ کی قیمت درج کرنے سے :-

$$\text{فہ} = \frac{8}{3}\,\pi\,\text{ص}^4\,\text{د}\,\sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\,\text{لا ت}}}\cdot\frac{\text{و}_1}{2\ \text{مج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

اگر فہ، و_1 اور مج وغیرہ معلوم ہوں تو د حسابی عمل سے دریافت کیا جاسکتا ہے

مساوات (۴۴) سے :-

$$\frac{\text{ف فہ}}{\text{ف د}} = \frac{2}{3}\,\frac{\text{ص}^4}{\text{مج}}\sqrt{\frac{2\pi\,\text{ئ}}{\text{لا ت}}}\cdot\text{و}_1 = \text{مستقل}$$

$$\therefore\ \text{ئ} = \frac{9}{8}\cdot\frac{\text{لا ت مج}^2}{\pi\,\text{و}_1^2\,\text{ص}^8}\left(\frac{\text{ف فہ}}{\text{ف د}}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

د کی قیمت بدل بدل کر فہ کی متناظر قیمتیں معلوم کرلی جاتی ہیں اس طرح $\frac{\text{ف فہ}}{\text{ف د}}$ کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے، اس کے بعد مساوات (۴۵) سے گیس کا سالمی وزن ئ نکل جاتا ہے۔

آکسیجن کے لئے کُنڈسن نے ئ کی قیمت ۹ء۳۱ کے مساوی دریافت کی تھی۔

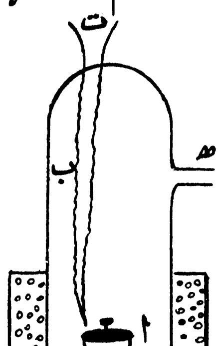
دھاتوں کا بخاری دباؤ :- اِگرٹن نے بعض دھاتوں مثلاً جست، کیڈمیم، سیسہ اور سوڈیم وغیرہ کے بخاری دباؤ کی قیمتیں، سوراخوں میں سے گیسوں کے بہاؤ کے کنڈسن والے اصول کی تحت دریافت کی تھیں[8]۔

۱۹۲۸ء میں ہارٹنگ نے اسی اصول کو استعمال کرکے، ایسے دھاتوں کے بخاری دباؤ دریافت کئے جن کے نقطہ جوش بہت اونچے ہوتے ہیں مثلاً سونا، چاندی، تانبا وغیرہ۔

ہارٹنک اور اگرٹن کے طریقے عملی طور پر یکساں ہیں۔ اول الذکر نے خصوصاً تپش کی پیمائش کے لیے ایک نہایت حساس طریقہ اختیار کیا۔ موخرالذکر نے دھاتوں کو گرم کرنے کے لئے تانبے کا ایک بڑا سا گرم کنندہ استعمال کیا تھا گو ہارٹنک نے اس غرض کے لئے برقی بھٹی استعمال کی تھی۔

یہاں ہارٹنک کے طریقے کا بیان خالی از دلچسپی نہ ہوگا:۔

شکل ۱۷ میں ایک چھوٹی کوارٹز کی کٹھالی ا بتائی گئی ہے جس میں دھات رکھہ دی جاتی ہے۔ اس کٹھالی کے ڈھکن میں ایک بالکل چھوٹا سا سوراخ ہوتا ہے۔ کٹھالی کو پہلے وزن کر لیا جاتا ہے اور پھر ایک کوارٹز کی نلی ب کے اندر رکھا جاتا ہے اور اس نلی کا نچلا سرا برقی بھٹی ف کے ذریعہ گرم کیا جاتا ہے۔ کٹھالی کی تپش حر برقی جفت ت کے ذریعہ معلوم کی جاتی ہے۔



شکل ۱۷

بازو میں ایک نلی ھ لگی ہوتی ہے جس کے ذریعہ نلی ب میں پمپ کے ذریعہ اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا کیا جا سکتا ہے۔ خلا پیدا کرنے کے بعد ہارٹنک نے مطلوبہ تپش تک نلی کو گرم کیا اور چند گھنٹوں تک اسکو مستقل رکھا۔ اس لئے پھر کٹھالی کو ٹھنڈا کر کے تول لیا۔ کٹھالی کے نقصان وزن سے اس دھاتی بخار کا وزن معلوم ہو گیا جو ایک خاص وقت میں سوراخ میں سے نکل آئی۔

مساوات (۳۰) سے، اگر سوراخ میں سے باہر کی فضا میں نکل آنے والی فی ثانیہ بخار کی کمیت $\text{ک}_{۲}$ ہو تو

$$\text{ک}_{۲} = \pi\, \text{ص}^{۲}\, \text{د}_{۱} \sqrt{\frac{\text{ع}}{۲\pi\, \text{ک}\, \text{ت}}}$$

چونکہ نلی ب میں اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا کیا گیا ہے اس لئے $\text{د}_{۲}$ عملاً صفر کے

مساوی ہے۔

$$\therefore د = \frac{ک_۲}{\pi ص^۲} \sqrt{\frac{۲\pi لا ت}{ئ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۶)$$

اس طرح د یعنی بخاری دباؤ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے۔ ص کی قیمت سوراخ کے فوٹو بڑے پیمانہ پر لیکر دریافت ہوسکتی ہے۔

لینگمویر(۹) نے ۱۹۱۳ء میں ایک اور طریقہ بھاری دھاتوں مثلاً ٹنگسٹن، پلاٹینم وغیرہ کے بخاری دباؤ کی دریافت کا بیان کیا تھا، ٹنگسٹن کا ایک پتلا سا ریشہ جس کا طول تقریباً ۱۰ سمر تھا ایک خلا دار جوفہ میں رکھا گیا اور برقی رو کے ذریعہ اس کو گرم کیا گیا۔ ایک معلوم وقت تک تپش مستقل رکھی گئی۔ گرم کرنے کے دوران میں ظاہر ہے کہ ریشہ سے بخار کے سالمات خارج ہو کر جوفہ کے دیواروں پر چونکہ اس کا دباؤ خفیف ہے منجمد ہوتے ہیں۔ اب جوفہ کو توڑ کر ریشہ کو ایک حساس ترازو میں تول لیا جاتا ہے۔ اگر ریشہ کا ابتدائی وزن معلوم ہو تو نقصان وزن معلوم ہو جاتا ہے۔

مساوات (۲۷) سے فی ثانیہ جوفہ کی سطح کے اکائی رقبہ کو ٹکرانے والے سالمات کی تعداد $= \frac{ع ہ}{\sqrt{۶\pi}}$ تعادل کے لئے بخار کی اس کمیت کا جو فی ثانیہ اکائی رقبہ کی سطح سے ٹکراتی ہے، اس بخار کی کمیت ک کے مساوی ہونا ضروری ہے جو ریشہ کے اکائی رقبہ سے فی ثانیہ خلا میں پیدا ہوتی ہے

اور یہ کمیت $ک = \frac{ع ہ م}{\sqrt{۶\pi}}$ جہاں $م =$ ایک سالمہ کی کمیت

اگر بخار کی کثافت ث ہو تو $ک = \frac{ث ع}{\sqrt{۶\pi}} = \frac{د ئ}{لا ت} \cdot \sqrt{\frac{۳ لا ت}{ئ}} \cdot \frac{۱}{\sqrt{۶\pi}} =$

$$= د \sqrt{\frac{ئ}{۲\pi لا ت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۷)$$

لہذا اگر ک معلوم ہو تو بخاری دباؤ د آسانی سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔
فرض کرو کہ گرم کرنے کے قبل اکائی طول کے تار کا وزن ک_{1} ہے اور ٹنگسٹن کے تار کی کثافت ث ہے اور نیز گرم کرنے کے قبل تار کا نصف قطر ص_{1} کے مساوی ہے۔ و ثانیوں تک گرم کرنے کے بعد جب وہ سرد کر کے تولا جاتا ہے تو فرض کرو اکائی طول کے تار کا وزن ک_{2} اور نصف قطر ص_{2} ہوتا ہے۔

$$\therefore \text{ک}_{1} = \pi\,\text{ص}_{1}^{2}\,\text{ث} \qquad \text{اور} \quad \text{ک}_{2} = \pi\,\text{ص}_{2}^{2}\,\text{ث}$$

$$\therefore \text{ص}_{1} = \sqrt{\frac{\text{ک}_{1}}{\pi\,\text{ث}}} \qquad \text{اور} \quad \text{ص}_{2} = \sqrt{\frac{\text{ک}_{2}}{\pi\,\text{ث}}}$$

ریشہ کے اکائی طول میں سے فی ثانیہ جو کمیت کم ہو جاتی ہے وہ =

$$= \frac{\text{فرک}_{1}}{\text{فرو}} = 2\pi\,\text{ث}\,\text{ص}_{1}\,\frac{\text{فرص}_{1}}{\text{فرو}}$$

∴ ریشہ کے اکائی رقبہ سے فی ثانیہ جس کمیت کا نقصان ہوتا ہے

$$= \text{ک} = \text{ث}\,\frac{\text{فرص}_{1}}{\text{فرو}} = \frac{1}{2\pi\,\text{ص}_{1}} \cdot \frac{\text{فرک}_{1}}{\text{فرو}}$$

$$\therefore \text{مجموعی وقت و کے لئے} \int_{\text{صفر}}^{\text{و}} \text{ک}\;\text{فرو} = \int_{\text{ص}_{2}}^{\text{ص}_{1}} \text{ث}\;\text{فرص}_{1}$$

$$\text{یعنی ک} = \frac{\text{ث}(\text{ص}_{1} - \text{ص}_{2})}{\text{و}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ث}}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\text{ک}_{1}} - \sqrt{\text{ک}_{2}}}{\text{و}}$$

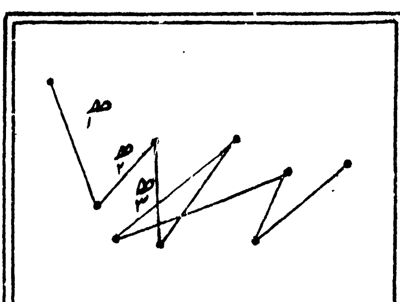
مساوات (۴۷) سے:—

$$\text{د}\sqrt{\frac{\overset{\text{ع}}{\text{ل}}}{2\pi\,\text{لات}}} = \sqrt{\frac{\text{ث}}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\text{ک}_{1}} - \sqrt{\text{ک}_{2}}}{\text{و}} \quad \text{......} \;(۴۸)$$

اس طرح د کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

تجربہ میں ٹنگسٹن کے لئے د کی قیمت جبکہ تپش ت ۲۴۰۰° مطلق تھی، $۲ء۹۴ \times ۱۰^{-۹}$ مم پارہ کے دباؤ کے مساوی نکلی۔ جبکہ ت ۳۰۰۰° مطلق تھی تو د کی قیمت $۶۲ء۳ \times ۱۰^{-۸}$ مم پارہ کے دباؤ کے مساوی حاصل ہوئی۔

سالمات کا اوسط آزاد راستہ:— ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی گیس کے سالمات معمولی تپش پر بڑی زبردست رفتاروں کے ساتھ حرکت کرتے رہتے ہیں وہ ایک دوسرے سے ٹکراتے بھی ہیں اور ان کی حرکت کی سمتیں بدلتی بھی رہتی ہیں۔ دو متواتر تصادم کے درمیان کسی ایک سالمہ کا راستہ خط مستقیم ہوتا ہے۔ لہٰذا کسی ایک سالمہ کا راستہ متعدد تصادم کے بعد بے قاعدہ یا آڑے ترچھے خطوط مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے جیسا کہ شکل ۱۸ میں دکھایا گیا ہے۔



شکل ۱۸

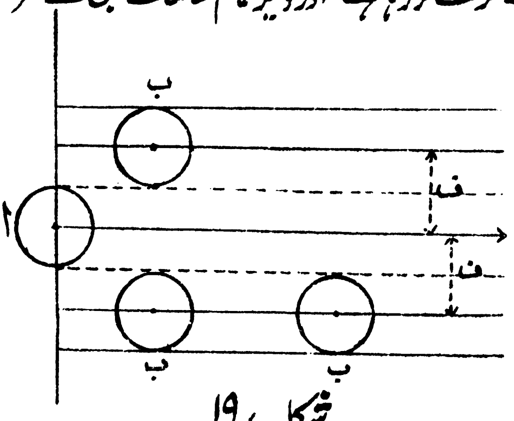
یہ ظاہر ہے کہ بعض راستے زیادہ لمبے اور بعض چھوٹے ہوتے ہیں۔ اگر ہم ھ۱، ھ۲، ھ۳ .... راستوں کی بڑی تعداد کے طولوں کو جمع کریں اور حاصل جمع کو راستوں کی مجموعی تعداد ع سے تقسیم کریں تو حاصل مقدار سالمات کا اوسط آزاد راستہ ھ کہلاتا ہے۔

$$\text{یعنی } ھ = \frac{ھ_{۱} + ھ_{۲} + ھ_{۳} + \cdots\cdots}{ع}$$

$$= \frac{\text{کل طے شدہ فاصلہ ایک ثانیہ میں}}{\text{تعداد تصادم فی ثانیہ}}$$

فرض کرو کہ شکل ۱۹ میں ا ایک سالمہ ہے جس کا قطر ف ہے اور یہ

لا سمت میں س رفتار سے حرکت کر رہا ہے، اور دیگر تمام سالمات جن کے قطر بھی یہی ہیں اپنی جگہ پر قائم ہیں - نیز یہ بھی فرض کرو کہ یہ سالمہ ا، ب سالمات کو چھوتا ہوا گزرتا ہے -



شکل ۱۹

∴ تعداد تصادم فی ثانیہ = تعداد سالمات جن کے مرکز اس حجم یعنی π ف^2 س کے اندر واقع ہیں = π ف^2 س ع

[چونکہ ع = تعداد سالمات فی مکعب سم]

$$\therefore \text{ھ} = \frac{\text{طے شدہ فاصلہ ایک ثانیہ میں}}{\text{تعداد تصادم فی ثانیہ}} = \frac{\text{س}}{\pi\,\text{ف}^2\,\text{س ع}} = \frac{1}{\pi\,\text{ف}^2\,\text{ع}}$$

$$\therefore \text{اوسط آزاد راستہ ھ} = \frac{1}{\pi\,\text{ف}^2\,\text{ع}} = \frac{\text{م}}{\pi\,\text{ف}^2\,\text{ثہ}}$$

$$= \frac{\text{م لا ت}}{\pi\,\text{ف}^2\,\text{د ک}} \qquad \text{.........} \quad (۴۹)$$

جہاں ثہ = گیس کی کثافت

م = ایک سالمہ کی کمیت

اور د = دباؤ

لیکن اوپر کے نتائج بالکل صحیح اس وجہ سے نہیں ہیں کہ ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ دیگر سالمات متحرک نہیں ہیں -

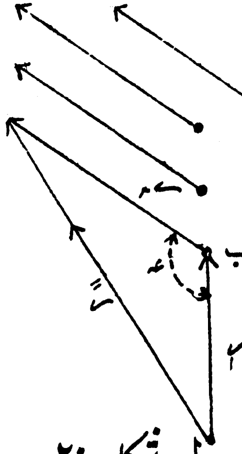
کلائوشیس نے اس لئے یہ فرض کیا کہ تمام سالمات بھی اسی رفتار سے حرکت کرتے ہیں اور چنانچہ اس خطا کو اسی قسم کی ایک اور مساوات حاصل کر کے رفع کیا۔

اگر سَر = سالمہ کی اضافی رفتار بلحاظ دوسرے سالمات کے اور

س = تمام سالمات کی اوسط رفتار تو

$$ھ = \frac{س}{\pi ف^{2} ع سر} \quad .... (۵۰)$$

عام صورت کے لئے فرض کرو کہ ایک سالمہ ۱ رفتار $س_1$ سے ایسی فضا میں پھینکا جاتا ہے جس میں ع سالمات فی مکعب سمر موجود ہیں اور یہ تمام اس سالمہ کی سمت حرکت سے زاویہ عہ بناتے ہوئے ایک سمت میں حرکت کر رہے ہیں جیسا کہ شکل نمبر ۲۰ میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اس پھینکے ہوئے سالمہ کی اضافی رفتار سَر ہے بلحاظ ایک دوسرے سالمہ ب کے جس کی رفتار $س_2$ ہے۔



شکل نمبر ۲۰

تب $سر^2 = س_1^2 + س_2^2 - 2 س_1 س_2$ جم عہ

اگر حقیقی طور پر دیکھا جائے تو رفتار $س_2$ کے لئے تمام سمتیں مساوی طور پر ممکن ہیں۔ لہذا سَر کی اوسط قیمت دریافت کرنے کے لئے ہمیں سَر کو اس احتمال سے ضرب دینا ہوگا جو کہ $س_2$ رفتار، عہ اور عہ + فرعہ کے درمیانی مجسم زاویہ میں واقع ہوتی ہے۔

لیکن اس مجسم زاویہ کی قیمت جو کُل یعنے ع سالمات فی مکعب سمر کے لئے پوری فضا میں ہوگی ۴ π کے مساوی ہے۔ مجسم زاویہ جو عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہوتے والی سمت کے متناظر ہے ۲ π جب عہ فرعہ کے

مساوی ہے۔

∴ ان سالمات کی تعداد فی مکعب سمر جو عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والی سمت میں آتے ہیں = $\frac{\text{ع}}{4\pi} \cdot 2\pi$ جب عہ فرعہ

∴ احتمال فی مکعب سمر ایسا ہے کا۔ کہ رفتار $ر_2$ عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والے مجسم زاویہ کے اندر رہے گی = $\frac{\text{ع}}{2}$ جب عہ فرعہ

∴ احتمال فی سالمہ کہ $ر_2$ رفتار عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والے مجسم زاویہ کے اندر ہوگی = $\frac{\text{جب عہ فرعہ}}{2}$

∴ $ر$ کی اوسط قیمت = $ر \, \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{2}$

∴ $ر$ کی اوسط قیمت بلحاظ دیگر سالمات = $\bar{ر} = \int_{\text{صفر}}^{\pi} ر \, \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{2}$

$$\therefore \bar{ر} = \int_{\text{صفر}}^{\pi} \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{2} \cdot \sqrt{ر_1^2 + ر_2^2 - 2 ر_1 ر_2 \text{ جم عہ}}$$

$$= \left\{ \frac{1}{6 ر_1 ر_2} \left(ر_1^2 + ر_2^2 - 2 ر_1 ر_2 \text{ جم عہ} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}_{\text{صفر}}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{6 ر_1 ر_2} \left(ر_1^2 + ر_2^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

کلاؤشیس کے مفروضہ کے مطابق، چونکہ تمام سالمات ایک ہی رفتار سے حرکت کر رہے ہیں۔ لہذا $ر_1 = ر_2 = ر$

$$\therefore \bar{ر} = \frac{(2ر)^3}{6 ر^2} = \frac{4}{3} ر \quad \text{یعنی} \quad \frac{ر}{\bar{ر}} = \frac{3}{4}$$

مساوات (۵۰) میں $\frac{ر}{\bar{ر}}$ کی قیمت لکھنے سے:-

$$\text{ھ} = \frac{3}{4\pi \, \text{ف}^2 \, \text{ع}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

بعد میں میکسول نے رفتاروں کی تقسیم کے کلیہ سے حسب ذیل نتیجہ حاصل کیا:- [10]

$$ه = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\,ف^{2}\,ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۲)$$

اس کے بعد جینس نے یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات سخت لچکدار کرے ہیں حسب ذیل مساوات حاصل کی :۔

$$ه = \frac{۱٫۳۱۹}{\sqrt{2}\,\pi\,ف^{2}\,ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۳)$$

لیکن چیپمن نے اپنا ضابطہ اس طرح پیش کیا :۔

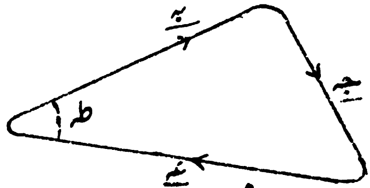
$$ه = \frac{۱٫۴۰۲}{\sqrt{2}\,\pi\,ف^{2}\,ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۴)$$

سدرلینڈ نے یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات کے درمیان بین السالماتی قوتیں یا تجاذبی قوتیں کسی خاص کلیہ کے تحت عمل کرتی ہیں، سالماتی قطر کے لئے ایک ضابطہ اخذ کیا[11]۔ اگر تجاذبی قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں تو سالمات ایکدوسرے سے قریب تر ہو جاتے ہیں اور اس طرح ان میں تصادم کا امکان بڑھ جاتا ہے لہٰذا ان کا اوسط آزاد راستہ گھٹ جاتا ہے۔ اس نقطۂ نظر سے سدرلینڈ کی تصحیح، اوسط آزاد راستہ کے لئے حاصل کرنے کی کوشش کی جائے گی :۔

سدرلینڈ کا ضابطہ اخذ کرنے کے قبل ہم چند ابتدائی باتیں سمتیوں کے متعلق یہاں بیان کردینا ضروری سمجھتے ہیں۔ طلبار کو چاہیئے کہ ان کو یاد رکھیں۔ ہر شخص یہ جانتا ہے کہ ایسی مقادیر جو سمت رکھتے ہیں مثلاً فاصلہ، رفتار، قوت وغیرہ سمتی مقادیر کہلاتے ہیں۔ جن مقادیر میں سمت نہیں ہوتی وہ مقداری کہلاتی ہیں کسی ایک سمتی کی ترسیمی طریقہ سے تعبیر ایک خط مستقیم سے ہوتی ہے، الجبری طریقہ سے اس کی تعبیر ایک علامت سے ہوتی ہے جس کے نیچے ایک چھوٹی سی لکیر کھینچ دی جاتی ہے۔ اگر دو سمتیاں عـ اور بـ ایک دوسرے سے زاویہ ط بناتے ہوں جیسا کہ شکل ۲۱ میں دکھایا گیا ہے

تو حاصل جمع = عہ + بہ

بہ ۸ عہ اگر لکھا جائے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ سمتی عہ کو سمتی طور پر سمتی بہ سے ضرب دیا گیا ہے۔



شکل ع ۲۱

اس حاصل ضرب کو مقداری میں لکھنے سے:-

عہ ۸ بہ = عہ. بہ جب ط = (اس مثلث کا رقبہ) ×۲

∴ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ عہ ۸ بہ .... (۵۵)

اگر بہ ۸ عہ = صفر تو ط = صفر، اس کا مطلب یہ ہے کہ عہ منطبق ہو جاتی ہے بہ سے، اسکے معنی یہ ہوں گے کہ عہ ۸ عہ = صفر

∴ عہ ۸ عہ = صفر .... (۵۶)

اب قوت کے معکوس مربع کے کلیہ سے:-

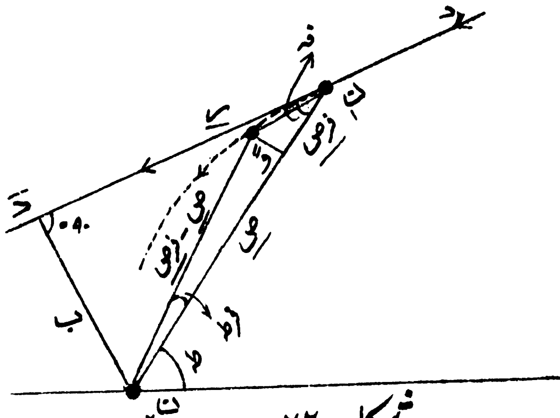
قوت ق $\propto$ $\frac{م^2}{ص^2}$ جہاں م = ایک ذرہ کی کمیت اور ص = دونوں ذرات کے درمیان فاصلہ لیکن ہم یقین کے ساتھ یہ نہیں کہہ سکتے کہ کلیہ بالا میں $ص^2$ کے بجائے، $ص^3$ یا $ص^4$ وغیرہ تو نہیں ہے۔ اسلئے سدرلینڈ نے یہ فرض کیا کہ دو ذرات کے درمیان تجاذبی قوت ق ہے جو $م^2$ ف $\left(\frac{1}{ص}\right)$ کے متناسب ہے جہاں ف سے مطلب کوئی تفاعل ہے۔

∴ قوت کا صحیح کلیہ حسب ذیل ہو گا:-

ق = مہ $م^2$ ف $\left(\frac{1}{ص}\right)$ .... (۵۷)

جہاں مہ = کوئی مستقل

فرض کرو کہ کسی خاص وقت میں $ن_1$ اور $ن_2$ دو ذرات کے مقامات ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ صہ ہے۔ $ن_1$ ذرہ ابتدا میں ر رفتار کیساتھ د سے نکلتا ہے اور د دَ سمت میں چلنے لگتا ہے لیکن تھوڑی دیر کے بعد



شکل ۲۲

ذرّہ ن۲ کی کشش کی وجہ سے اس کو ایک منحنی کی وضع کا راستہ اختیار کرنا پڑتا ہے جیسا کہ نقطہ دار خط سے شکل ۲۲ میں ظاہر کیا گیا ہے۔ چنانچہ وہ ایک مثلث ن۱ دَ ن۲ کا رقبہ بناتے ہوئے نیچے اُترتا ہے۔ اگر ن۲ کی کشش نہ ہوتی تو ذرہ ن۱ $\underline{\text{صی}}_1$ رفتار کے ساتھ د دَ کا راستہ اختیار کرتا۔

فرض کرو کہ ذرہ ن۱ فرو وقت میں $\underline{\text{فرص}}$ فاصلہ طے کیا یعنی فرو وقت کے بعد ن۱ اور ن۲ کا درمیانی فاصلہ ($\underline{\text{ص}} - \underline{\text{فرص}}$) ہے۔ ایسی صورت میں وہ رقبہ جو ذرہ نے فرو وقت میں بنایا مساوات (۵۵) سے = $\underline{\text{فرا}}$ (فرض کرو) $= \frac{1}{2}\,\underline{\text{ص}} \wedge (\underline{\text{ص}} - \underline{\text{فرص}})$

$$\therefore\ \underline{\text{فرا}} = \frac{1}{2}\left\{\underline{\text{ص}} \wedge \underline{\text{ص}} - \underline{\text{ص}} \wedge \underline{\text{فرص}}\right\}$$

∴ مساوات (۵۶) سے:—

$$\underline{\text{فرا}} = -\frac{1}{2}\,\underline{\text{ص}} \wedge \underline{\text{فرص}}$$

$$\therefore\ \text{سطحی رفتار} = \frac{\underline{\text{فرا}}}{\text{فرو}} = -\frac{1}{2}\,\underline{\text{ص}} \wedge \frac{\underline{\text{فرص}}}{\text{فرو}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\underline{\text{ص}} \wedge \underline{\dot{\text{ص}}} \quad \text{جہاں}\quad \underline{\dot{\text{ص}}} = \frac{\underline{\text{فرص}}}{\text{فرو}}$$

اب چونکہ رفتار مستقل ہے لہذا عرضی اسراع صفر ہے

$$\therefore\ \underline{\text{ص}} \wedge \underline{\dot{\text{ص}}} = -2\,\underline{\dot{\text{ا}}} = \text{مستقل} = \text{ج فرض کرو}$$

جہاں $\overset{\circ}{\text{ا}} = \frac{\text{فر ا}}{\text{فر و}}$

$\therefore \text{ج} = \underline{\text{ص}} \wedge \overset{\circ}{\underline{\text{ص}}} = \underline{\text{ص}} \wedge \underline{\text{سر}}$ .... (۵۸)

فرض کرو کہ ن۲ کے رفتار کی سمت پر عمود کھینچا گیا ہے اور اسکا طول = ب

تو $\text{ج} = \underline{\text{ص}} \wedge \underline{\text{سر}} = \text{ص} . \text{سر جب فہ} = \text{ب سر}$ .... (۵۹)

جہاں فہ = $\underline{\text{ص}}$ اور $\underline{\text{سر}}$ کا درمیانی زاویہ

اب اگر $\underline{\text{ص}}$ اور افقی سمت کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

$\frac{\text{فرص}}{\text{ص فرطہ}} = \text{مم فہ}$ لیکن $\frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \text{قم فہ}$ یعنی $\frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = \text{قم}^2 \text{فہ} = ۱ + \text{مم}^2 \text{فہ}$

$\therefore \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ۱ + \left(\frac{\text{فرص}}{\text{ص فرطہ}}\right)^2$ .... (۶۰)

اب فرض کرو کہ $\frac{۱}{\text{ص}} = \text{ن}$ یعنی ن ص = ۱

اسکو تفرق دینے سے $\text{ن} \frac{\text{فرص}}{\text{فرطہ}} + \text{ص} \frac{\text{فرن}}{\text{فرطہ}} = \text{صفر}$

یعنی $\frac{۱}{\text{ص}} . \frac{\text{فرص}}{\text{فرطہ}} + \frac{۱}{\text{ن}} . \frac{\text{فرن}}{\text{فرطہ}} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{۱}{\text{ص}^2} . \left(\frac{\text{فرص}}{\text{فرطہ}}\right)^2 = \frac{۱}{\text{ن}^2} \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرطہ}}\right)^2$ .... (۶۱)

لہذا مساوات (۶۰) اور (۶۱) سے :-

$\frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} - ۱ = \frac{۱}{\text{ن}^2} \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرطہ}}\right)^2$ یعنی $\frac{۱}{\text{ب}^2} = \frac{۱}{\text{ص}^2} + \frac{۱}{\text{ص}^2 \text{ن}^2} \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرطہ}}\right)^2$

$$\therefore \frac{1}{\text{ب}^2} = \text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرط}}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۶۲)$$

اب مساوات (۵۷) کی مدد سے سالمہ کی توانائی بالقوہ =

$$= ۴\text{م مہ} \int \text{ف}\left(\frac{1}{\text{ص}}\right) \text{فرص} = -۴\text{م مہ} \int \text{ف}(\text{ن}) \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2}$$

لیکن توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل = گ فرض کرو

$$\therefore \frac{1}{2}\text{م ر}^2 - ۴\text{م مہ} \int \text{ف}(\text{ن}) \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2} = \text{گ}$$

مساوات (۵۹) اور (۶۲) کی مدد سے:-

$$\text{ر}^2 = \frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2} = \text{ج}^2 \left\{\text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرط}}\right)^2\right\}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\text{م ج}^2 \left\{\text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرط}}\right)^2\right\} =$$

$$= ۴\text{م مہ} \int \text{ف}(\text{ن}) \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2} + \text{گ}$$

$$\therefore \text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرط}}\right)^2 = \frac{۲\text{مہ}۴}{\text{ج}^2} \int \text{ف}(\text{ن}) \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2} + \text{گَ}$$

$$\text{جہاں گَ} = \frac{۲\text{گ}}{\text{م ج}^2} = \text{مستقل}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ب}^2} = \frac{\text{ر}^2}{\text{ج}^2} = \frac{۲\text{مہ}۴}{\text{ج}^2} \text{فَ}(\text{ن}) + \text{گَ}$$

جہاں $\text{فَ}(\text{ن}) = \int \text{ف}(\text{ن}) \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2}$ فرض کرو اور گَ = کوئی دوسرا مستقل

اب جبکہ $\text{ص} = \infty$ تو ن = صفر $\therefore \text{گَ} = \frac{\text{ر}^2}{\text{ج}^2}$

$$\therefore \text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فن}}{\text{فط}}\right)^2 = \frac{2\text{م}^4}{\text{ج}^2}\bar{\text{ف}}(\text{ن}) + \frac{\text{س}^2}{\text{ج}^2} \;\ldots\ldots\; (۶۳)$$

لیکن جبکہ ص = ف = سالمہ کا قطر اس صورت میں سالمات صرف چھوتے ہوئے گزرتے ہیں لہذا وہ صرف مماسی رفتار رکھتے ہیں یعنی اس کے معنی یہ ہیں کہ $\frac{\text{فص}}{\text{فو}} =$ صفر

اس لئے جبکہ ص = ف تو

$$\frac{\text{فن}}{\text{فط}} = \frac{\text{ف}\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}{\text{فط}} \cdot \frac{\text{فو}}{\text{فو}} = \frac{\text{ف}\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}{\text{فص}} \cdot \frac{\text{فص}}{\text{فو}} \cdot \frac{\text{فو}}{\text{فط}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ف}^2} = \frac{2\text{م}^4}{\text{ج}^2}\bar{\text{ف}}\left(\frac{1}{\text{ف}}\right) + \frac{\text{س}^2}{\text{ج}^2} =$$

$$= \frac{2\text{م}^4}{\text{ب}^2\,\bar{\text{س}}^2}\bar{\text{ف}}\left(\frac{1}{\text{ف}}\right) + \frac{1}{\text{ب}^2}$$

$$\therefore \text{ب}^2 = \text{ف}^2\left\{\frac{2\text{م}^4\bar{\text{ف}}\left(\frac{1}{\text{ف}}\right)}{\bar{\text{س}}^2} + 1\right\} \;\ldots\ldots\ldots\; (۶۴)$$

چونکہ جاذبی قوتوں کی وجہ سے سالمات ایک منحنی راستہ اختیار کر رہے ہیں اس لئے تعداد تصادم فی ثانیہ = تعداد سالمات جن کے مرکز $\pi\,\text{ب}^2\,\bar{\text{س}}$ کے اندر واقع ہیں

$$= \pi\,\text{ب}^2\,\bar{\text{س}}\,\text{ع}$$

یعنی کشش کی وجہ سے مرکزوں کے درمیان اعظم فاصلہ ف نہیں ہے بلکہ ب ہے۔

پس اگر ہم چیپمین کا ضابطہ لیں تو صحیح ضابطہ حسب ذیل ہوگا:—

$$\text{ھ} = \frac{\frac{2}{\text{س}}\;\frac{\bar{\text{ص}}}{\pi}\;\text{۰٫۴۰۲}\;\text{م}\,\text{ر}}{\text{ع}\,\text{ف}^2\left\{\frac{2\text{م}^4\bar{\text{ف}}\left(\frac{1}{\text{ف}}\right)}{\bar{\text{س}}^2} + 1\right\}}$$

$$= \frac{۱٫۴۰۲}{\sqrt{۲}\,\pi\,\text{ع}\,\text{ف}^{۲}\left\{۱ + \dfrac{۲٫۴۴\,\text{ف}\left(\frac{۱}{\text{ف}}\right)\text{ک}}{۳\,\text{لا}\,\text{ت}}\right\}}$$

$$= \frac{۱٫۴۰۲}{\sqrt{۲}\,\pi\,\text{ع}\,\text{ف}^{۲}\left(۱ + \dfrac{\text{س}}{\text{ت}}\right)} \quad \text{......................} (۶۵)$$

جہاں $\text{س} = \dfrac{۲٫۴۴\,\text{ف}\left(\frac{۱}{\text{ف}}\right)\text{ک}}{۳\,\text{لا}}$ = سدرلینڈ کا مستقل

اوسط آزاد راستہ اور لزوجت (۱۲) :- میکسول پہلا شخص ہے جس نے اس مظہر کی گیسوں کے نظریہ تحرک کے نقطۂ نظر سے تشریح کرنے کی کوشش کی۔

لزوجت اور اوسط آزاد راستہ میں جو ربط ہے ہم اس کو ایک آسان طریقہ سے ثابت کرنے کی کوشش کریں گے۔

فرض کرو کہ ایک گیس کسی مستوی لا' یا کے متوازی حرکت کر رہی ہے۔ اس کے سالمات کی رفتار کسی متناظر پرت کے لئے فرض کرو کہ ایک ہی ہے اور جوں جوں فاصلہ ما بڑھتا جاتا ہے یعنی پرتوں کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے سالمات کی رفتار میں بھی بتدریج اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ سالمی رفتاروں میں دو ایسے پرتوں کی وجہ سے جن کے درمیان فاصلہ "فرما" ہے، فرق "فرسا" کے مساوی ہے۔

اس صورت میں دو ایسے پرتوں کے لئے جن کے درمیان فاصلہ ھ یعنی سالمات کے آزاد اوسط راستہ کے مساوی ہو سالمی رفتاروں میں فرق ھ $\dfrac{\text{فرسا}}{\text{فرما}}$ کے مساوی ہوگا۔ لہذا معیار حرکت میں تبدیلی فی سالمہ م ھ $\dfrac{\text{فرسا}}{\text{فرما}}$ کے مساوی ہوگی جہاں م سے مراد ایک سالمہ کی کمیت۔

چونکہ ان سالمات کی تعداد کا جو "لا" محور کی جانب حرکت کرتے ہیں، اُن سالمات کی تعداد کے تقریباً مساوی ہونا ضروری ہے جو "ما" یا "یا"

محور کی جانب حرکت کرتے ہیں

لہذا اگر لا محور کی جانب ہی کی حرکت پر غور کیا جائے تو $\frac{\text{ع}}{٣}$ سالمات کو ہم اس محور کے متوازی حرکت کرتے ہوئے لے سکتے ہیں جہاں ع سالمات کی تعداد فی مکعب سمر ہے۔ پس کسی ایک پرت کے اکائی رقبہ میں سے فی ثانیہ گزرنے والے سالمات کی تعداد $\frac{\text{ع}\,\bar{\text{ر}}}{٣}$ کے مساوی ہوگی جہاں $\bar{\text{ر}}$ حسابی اوسط رفتار ہے۔ لہذا فی مربع سمر رقبہ میں فی ثانیہ معیار حرکت کی مجموعی تبدیلی

$$= \frac{١}{٣}\,\text{ع}\,\bar{\text{ر}}\,\text{م}\,\text{ھ}\,\frac{\text{فر س}}{\text{فر ما}}$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ فی اکائی رقبہ وہ قوت جو تیز حرکت کرنے والی پرت کی رفتار میں گھٹاؤ پیدا کرنے کی کوشش کرتی ہے

$$= \frac{١}{٣}\,\text{ع}\,\bar{\text{ر}}\,\text{م}\,\text{ھ}\,\frac{\text{فر س}}{\text{فر ما}}$$

لیکن لزوجیت لہ کی تعریف سے یہ قوت فی اکائی رقبہ $\text{لہ}\,\frac{\text{فر س}}{\text{فر ما}}$ کے مساوی ہے۔

$$\therefore\ \text{لہ}\,\frac{\text{فر س}}{\text{فر ما}} = \frac{١}{٣}\,\text{ع}\,\bar{\text{ر}}\,\text{م}\,\text{ھ}\,\frac{\text{فر س}}{\text{فر ما}}$$

یعنی $\text{لہ} = \frac{١}{٣}\,\text{ثہ}\,\bar{\text{ر}}\,\text{ھ}$ .... (٦٦)

چونکہ $\bar{\text{ر}} \propto \sqrt{\text{ت}}$ اسلئے $\text{لہ} \propto \text{ثہ}\,\sqrt{\text{ت}}\,.\,\text{ھ}$

مساوات (٦٥) کی مدد سے $\text{لہ} \propto \frac{١،٤٠٢ \times \sqrt{\text{ت}}\,\text{ع}\,\text{م}}{\sqrt{٢}\,\pi\,\text{ع}\,\text{ف}^{٢}\left(١ + \frac{\text{س}}{\text{ت}}\right)}$

$$\therefore\ \text{لہ}_{\text{ت}} = \frac{\text{گہ}\,\text{ت}^{\frac{١}{٢}}}{١ + \frac{\text{س}}{\text{ت}}} \qquad \text{.................. (٦٧)}$$

جہاں گہ = مستقل اور $\text{لہ}_{\text{ت}}$ = لزوجیت ت درجے تپش مطلق پر

لہذا مساوات (٦٧) سے یہ ظاہر ہے کہ کسی گیس کی لزوجیت کو اسکی کثافت

یا دباؤ سے کوئی تعلق نہیں ہے بشرطیکہ تپش مستقل ہو۔ لیکن بعد میں عملی طور پر یہ ثابت ہو چکا ہے کہ یہ کلیہ بہت ہی اونچے، اور نیز بہت ہی کم دباؤ پر کام نہیں دے سکتا۔

کلیات گیس کا اطلاق شیرے کی صورت میں "پیران کا کلیہ":۔

پیران⁽¹³⁾ کو یہ خیال ہوا تھا کہ کسی لس ونتی محلول میں بھی ذرات کی تقسیم کے لئے، کرہ ہوائی میں ہوا کے سالمات کی تقسیم کے مماثل، ایک کلیہ ضرور ہونا چاہیئے۔ اس لئے شیرے کی صورت میں، "توانائی کی مساوی تقسیم" کے کلیہ کے اطلاق سے، مختلف گہرائیوں پر ذرات کی کثافت کے متعلق ایک ضابطہ حاصل کیا تھا۔

مساوات (۲۶) سے

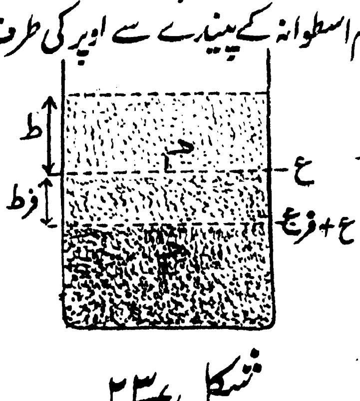
توانائی بالفعل فی ذرہ = $\frac{1}{2}$ م مر^2 = $\frac{3\ \text{لا ت}}{2\ \text{ن}}$ = فہ (فرض کرد)

مساوات (۱) سے

د = $\frac{1}{3}$ ثہ مر^2 = $\frac{1}{3}$ ثہ $\frac{2\ \text{فہ}}{\text{م}}$ = $\frac{2}{3}$ ع فہ .... (۶۸)

جہاں ع = تعداد ذرات فی مکعب سمر

فرض کرو کہ ہم اکائی تراش عمودی کے ایک اسطوانہ پر غور کرتے ہیں جس میں کوئی شیرہ بھرا ہوا ہے۔ جیسے جیسے ہم اسطوانہ کے پیندے سے اوپر کی طرف جائیں گے تو ارتکاز میں جاذبۂ زمین کی وجہ سے کمی ہونے لگے گی۔ شکل ۲۳ میں ایک ایسا پرت بتایا گیا ہے جو اوپر کی پرت سے ط فاصلے پر ہے۔



شکل ۲۳

فرض کرو کہ اس پرت کا ارتکاز ع اور رولوجی دباؤ د ہے۔

ایک اور پرت کا جس کا فاصلہ اوپر کی پرت سے ط + فرط ہے فرض کرو کہ ارتکاز ع + فرع اور ولوجی دباؤ $\text{د}_{۲}$ ہے۔

مساوات (۶۸) سے $\text{د}_{۱} = \frac{۲}{۳}\ \text{ع فہ}$ اور $\text{د}_{۲} =$

$$= \frac{۲}{۳}\ (\text{ع} + \text{فرع})\ \text{فہ}$$

∴ حاصل ولوجی دباؤ $= \text{د}_{۲} - \text{د}_{۱} = \frac{۲}{۳}\ \text{فرع فہ}$

∴ حاصل دباؤ فرط بلندی میں ذرات کی وجہ سے =

$$\text{فرط}\ (\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج ع حہ}$$

جہاں حہ = ایک ذرہ کا حجم، ثہ = ذرہ کی کثافت اور ث = مائع کی کثافت

لہذا تعادل کے لئے $\frac{۲}{۳}\ \text{فہ فرع} = \text{فرط}\ (\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج ع حہ}$

اسکو صفر گہرائی سے ط تک تکملانے سے :-

$$\int_{\text{ع}_{\text{صفر}}}^{\text{ع}} \frac{۲}{۳}\ \text{فہ}\ \frac{\text{فرع}}{\text{ع}} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} (\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج حہ فرط}$$

جہاں $\text{ع}_{\text{صفر}}$ = سب سے اوپر کی پرت کے پاس ارتکاز

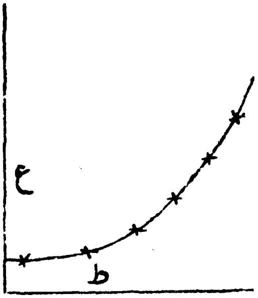
$$\therefore\ \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{صفر}}} = \frac{۳}{۲} \cdot \frac{\text{حہ}\ (\text{ثہ} - \text{ث})}{\text{فہ}} \cdot \text{ج ط}$$

$$\therefore\ \text{ع} = \text{ع}_{\text{صفر}}\ \text{و}^{\text{عہ ط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۶۹)$$

جہاں $\text{عہ} = \frac{۳}{۲} \cdot \frac{\text{حہ}\ (\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج}}{\text{فہ}}$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ شیرہ کے ذرات کا ارتکاز، گہرائی کے اضافہ سے بڑھتا ہے۔ لہذا اگر ہم ط کو ع کے مقابل مرتسم کریں تو ایک ایسا منحنی

حاصل ہوگا جس کی تقریبی شکل، شکل ۲۴ میں دکھائی گئی ہے۔



شکل ۲۴

پیران نے اس کلیہ کا ثبوت عملی طور پر سنہ ۱۹۰۹ء میں دیا۔ اس نے گیمبوج کو ایتھل الکوہل میں حل کرکے آمیزہ کو پانی کی کثیر مقدار کے ساتھ ملانے کے بعد ایک شیرہ تیار کیا۔ اس تیار شدہ محلول میں چھوٹے چھوٹے کرہ نما ذرات موجود تھے جن کے حجم معمولی لس ونتی محلول کے ذرات سے کسی قدر بڑے تھے۔ اس شیرہ کو ایک اسطوانہ میں رکھ کر اس کی ۰ء۱ ممر بلندی کو پیران نے ایک زبردست خوردبین سے دیکھا جو مختلف سطحوں پر ماسکہ میں لائی جاسکتی تھی، اس نے یہ معلوم کیا کہ ابتدا میں سالمات کی تقسیم بظاہر یکساں رہی لیکن چند دقیقوں کے بعد یہ ظاہر ہوا کہ ذرات، نچلے پرتوں میں بہ نسبت اوپر کے پرتوں کے ایک دوسرے کے قریب تر جمع ہو گئے۔ چند گھنٹوں کے بعد تقسیم یکساں ہوگئی۔ اسکا بیان ہے کہ پندرہ دن کے بعد تقسیم کی ترتیب عملاً بالکل اسی طرح کی تھی جیسی کہ تین گھنٹوں کے اختتام پر پائی گئی تھی۔ ایک تجربہ میں گیمبوج کے ذرات کے لئے جنکا قطر $۲ء۵ \times ۱۰^{-۵}$ سمر تھا، چار مختلف گہرائیوں پر جن میں علی الترتیب ۶×۱۰^{-۴} سمر کا فرق تھا، اس نے ذرات کی تعداد کو گن کر جب دریافت کیا تو عددوں میں ۳۰۵ : ۵۳۰ : ۹۴۰ : ۱۸۸۰ کی نسبت تھی۔

ذرات کی کثافت معمولی طریقہ سے یعنی خشک شے کو ابتدا ہی میں تولکر دریافت کی گئی تھی۔ ایک اور طریقہ بھی استعمال کیا گیا تھا یعنے ایک کثافت اضافی کی بوتل میں جس کا حجم ح تھا شیرہ بھرا گیا اور اسکا وزن معلوم کرلیا گیا، اسی بوتل کو پانی سے بھر کر یہ وزن بھی دریافت کیا گیا۔

فرض کرو کہ ان دونوں ح حجم کی کمیتوں کی قیمتیں بالترتیب $م_۲$ اور $م_۱$

کے مساوی ہیں۔ اس کے بعد ح حجم کا شیرہ لے کر اس کے پانی کو تبخیر کے ذریعہ خارج کر دیا گیا اور جو کچھ رسوب بچ رہا اس کو تول لیا۔ فرض کرو کہ اس رسوب کی کمیت م۳ ہے۔ اگر پانی کی کثافت ث ہو تو ح = $\frac{\text{م}_1}{\text{ث}}$ اور چونکہ ($\text{م}_2 - \text{م}_3$) = اس پانی کی کمیت جو ح حجم کے شیرے میں موجود تھی لہذا اس پانی کا حجم جو ح حجم کے شیرے میں موجود تھا = $\frac{(\text{م}_2 - \text{م}_3)}{\text{ث}}$

∴ ذرات جو حجم گھیرتے ہیں = $\frac{\text{م}_1}{\text{ث}} - \frac{\text{م}_2 - \text{م}_3}{\text{ث}}$

∴ ذرات کی کثافت ثہ = $\frac{\text{م}_3}{\left\{\frac{\text{م}_1 - \text{م}_2 + \text{م}_3}{\text{ث}}\right\}}$ ....(۷۰)

اس طرح گیمبوج کی کثافت ۱٫۲۰۷ گرام فی مکعب سمر نکلی۔

حہ یعنے ذرہ کے حجم کی دریافت کے لئے شیرہ میں اوپر کی سطح کے ذرات، جاذبۂ زمین کی تحت جس شرح سے نیچے گرتے ہیں وہ شرح ناپی گئی اور اسٹوک کے کلیہ سے اس ذرّے کا نصف قطر دریافت کیا گیا:—

$$6\pi\ \text{ص}\ \text{لہ}\ \text{سر} = \frac{4}{3}\pi\ \text{ص}^3 (\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج}$$

جہاں لہ = محلول کی لزوجیت

سر = ذرہ کی رفتار

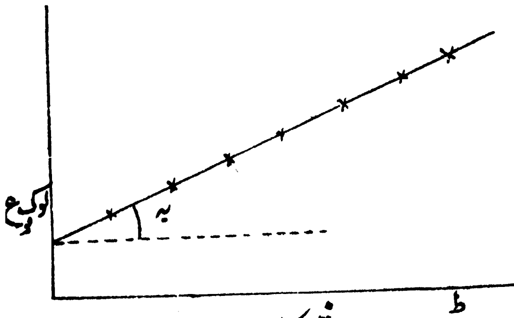
اور ص = ذرہ کا نصف قطر

چونکہ حہ = $\frac{4}{3}\pi\ \text{ص}^3$ لہذا ایک ذرہ کا حجم معلوم ہو جاتا ہے۔

ایک ذرہ کا حجم حسب ذیل طریقہ سے بھی دریافت کیا جا سکتا ہے:—

مساوات (۶۹) سے $\text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ع} = \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ع}_{\text{صفر}} + \text{عہ}\ \text{طہ}$

اگر $\text{لوک}_{\text{و}}$ ع کو ط کے مقابل مرتسم کیا جائے تو شکل ۲۵ع کی طرح ایک خط مستقیم حاصل ہوتی ہے۔ اس ترسیم کے میلان سے عہ کی قیمت دریافت



شکل ۲۵

کی جاسکتی ہے یعنی عہ = مس بہ اس طرح حہ کی قیمت بالراست معلوم ہو جاتی ہے ۔ اگر حہ معلوم ہو جائے تو عہ کی قیمت سے مستقل ن کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

پیراَن کے تقسیمی کلیہ کی تصحیح :- ای۔ لیف برٹن کی رائے میں پیراَن کا کلیہ صرف بہت ہی چھوٹی گہرائیوں یعنی ط کی بالکل چھوٹی قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔ مختلف گہرائیوں کے لئے چاندی کے لس ونتی محلولوں پر برٹن نے متعدد مشاہدات حاصل کئے اور یہ دریافت کیا کہ ذرات کی تقسیم سطح کے قریب پیراَن کے کلیہ کی مطابقت کرتی ہے لیکن بڑی گہرائیوں پر ارتکاز ع کی قیمت عملاً مستقل ہو جاتی ہے۔ پیراَن نے اپنے کلیہ کو حاصل کرنے میں، ذرات کے باہمی عمل کا لحاظ نہیں رکھا۔ برٹن کا یہ خیال ہے کہ اس قسم کے شیرے کے ذرات ایک ہی قسم کی بھرن رکھتے ہیں جس کی وجہ سے وہ ایک دوسرے کو دفع کرتے رہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے اس نے خوردبین سے ایسے ذرات کا مشاہدہ کیا جن میں آپس میں تصادم کی کوئی علامت نہیں پائی جاتی تھی۔

اس طرح پیراَن کی مساوات میں، اس زائد دباؤ کے لئے، جو ذرات کی "فرط" موٹائی کی بہت میں ان کے برقی دفع کے عمل سے پیدا ہوتا ہے، برٹن نے ایک تصحیحی رقم لکھ کر بڑی گہرائیوں کے لئے ایک مساوات حاصل کی جو حسب ذیل[۱۴] ہے :-

$$ع = \frac{حہ\,(ثہ - ث)\,ج}{گ\,بہ^{2}} \qquad \text{......} \quad (۷۱)$$

جہاں گ = ایک مستقل

بھ = ہر ذرہ پر بھرن برقی سکونی اکائیوں میں

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ ع کی قیمت مستقل رہتی ہے بشرطیکہ بھرن میں کوئی تبدیلی نہ ہو۔

اگر بھرن بھ کی قیمت گھٹتی ہے تو ع کی قیمت بڑھتی ہے۔

بعد میں پورٹر اور ہیجز نے یہ بتایا کہ لس ونتی محلول میں ایک ہی علامت کی بھرن والے ذرات نہیں ہوتے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ محلول تعدیلی ہے۔ ان دونوں نے زیادہ گہرائیوں کے لئے سیکر کی مشہور دباؤ "د" والی مساوات استعمال کرکے پیران کے کلیہ کو وسعت دینے کی کوشش کی۔

مساوات (۶۸) سے:-

$$\text{د} = \frac{۲}{۳}\,\text{ع فہ} = \frac{\text{ع لات}}{\text{ن}}$$

فرض کرو کہ $\text{د}_{۱} = \text{د}$ اور $\text{د}_{۲} = \text{د} + \text{فرد}$

$$\therefore \text{حاصل دباؤ} = \text{فرد} = \frac{۲}{۳}\,\text{فہ فرع} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}}\,\text{فرع}$$

$$= \text{فرط}\,(\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج ع حہ}$$

اسکے بجائے سیکر کی مساوات استعمال کرنے سے:-

$$\text{د} = \frac{\text{ع لات}}{\text{ن}\,(\text{ا} - \text{ب ع})} \qquad \text{جہاں ب} = \text{مستقل}$$

$$\therefore \text{فرد} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \left\{ \frac{(\text{ا} - \text{ب ع})\,\text{فرع} + (\text{ع ب فرع})}{(\text{ا} - \text{ب ع})^{۲}} \right\}$$

$$= \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{فرع}}{(\text{ا} - \text{ب ع})^{۲}}$$

تعادل کے لئے:- $\text{فرد} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{فرع}}{(\text{ا} - \text{ب ع})^{۲}} =$

= فرط (ثہ − ث) ج ع حہ

گہرائی ط کے لئے اسکو تکملا نے سے

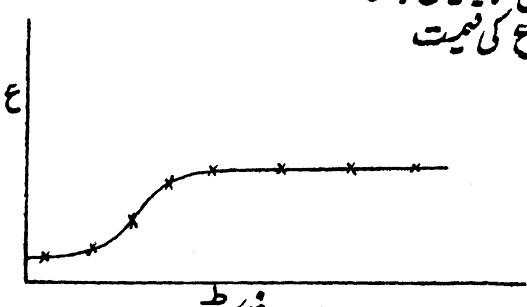
∫ لات فرع / ن ع (ا − ب ع)² = ∫ (ثہ − ث) ج حہ فرط

یعنی لات/ن { لوک_و ع − لوک_و (ا − ب ع) + ۱/(ا − ب ع) } =

= (ثہ − ث) ج حہ ط + گہ .... (۷۲)

جہاں گہ = کوئی مستقل

ط کو ع کے مقابل مرتسم کرنے سے شکل ۲۶ کے مطابق ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس ترسیم سے یہ ظاہر ہے کہ چھوٹی گہرائیوں کے لئے پیران کا کلیہ صحیح ہے لیکن بڑی گہرائیوں کے لئے عملاً ع کی قیمت مستقل رہتی ہے۔



شکل ۲۶

پروفیسر پورٹر نے اس ضابطہ کی تصدیق تجربہ سے حاصل کی۔ فانڈروال اور سیکر کی مساوات سے:-

(د + بہ/ح²) = ع لات / ن (ا − ب ع)

جہاں بہ = مستقل اور ح = مائع کا وہ حجم جس میں ایک ذرہ موجود ہے = ۱/ع

$$\therefore \text{د} = \frac{\text{ع لات}}{\text{ن (ا - ب ع)}} - \text{به ع}^{۲}$$

$$\therefore \text{فرد} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{فرع}}{(\text{ا - ب ع})^{۲}} - \text{۲ به ع فرع} =$$

$$= \text{فرط (ثہ - ث) ج ع حہ}$$

اس کو تکملانے سے:-

$$\int \frac{\text{لات}}{\text{ن ع}} \cdot \frac{\text{فرع}}{(\text{ا - ب ع})^{۲}} - \int \frac{\text{۲به ع فرع}}{\text{ع}} =$$

$$= \int (\text{ثہ - ث}) \text{ ج حہ فرط}$$

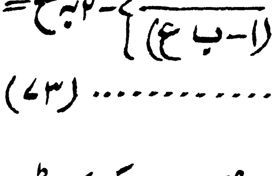
$$\text{یعنی } \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \left\{ \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{ع}}{(\text{ا - ب ع})} + \frac{۱}{(\text{ا - ب ع})} \right\} - \text{۲به ع} =$$

$$= (\text{ثہ - ث}) \text{ ج حہ ط} + \text{گہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۷۳)$$

جہاں گہ = مستقل

اس مساوات کی، جو کہ سابق مساوات سے زیادہ صحیح ہے پیراَن، برٹن اور پورٹر کے تجربات سے تصدیق ہوتی ہے۔

براؤنی حرکات:- ۱۸۲۷ء تک، پانی میں معلق خوردبینی اشیاء تیز تیز حرکت کرتے ہوئے مشاہدہ کئے گئے تھے، رابرٹ براؤن نامی ایک انگریز ماہر نباتیات نے اسکے متعلق مسلسل تجربے کئے اور یہ دریافت کیا کہ جب کسی ٹھوس شے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ذرات خالص پانی یا کسی اور مائع میں معلق ہوتے ہیں تو ان سے ایک عجیب بے قاعدہ یا غیر منظم وضع کی حرکات ظہور پذیر ہوتے ہیں (شکل ۲۷) - ایک زبردست خوردبین کی مدد سے چھوٹے سے چھوٹا ذرہ اس



شکل ۲۷

طرح حرکت کرتے ہوئے جو دیکھا گیا اسکا قطر $\frac{1}{3000}$ انچ کے رتبہ کا تھا۔

اسکے بعد متعدد سائنسدانوں نے مختلف محلولوں، آمیزوں اور مائعات کی صورت میں ان عجیب وغریب حرکات کا مشاہدہ کیا لیکن کئی برس تک اسکی صحیح توجیہہ کسی نے بھی نہ کی۔ پچاس برس کے بعد ایک بلجیم کے رہنے والے شخص نے یہ تجویز پیش کی کہ یہ مظہر مائعات کے نظریہ تحرک کا مرئی ثبوت ہے۔ مائع کے سالمات، ٹھوس کے معلق ذرات کو ہر طرف سے ٹکراتے اور ٹھکراتے رہتے ہیں اور اس سالمی تصادم کی وجہ سے ٹھوس کے ذرات اِدھر اُدھر حرکت کرتے ہوئے نظر آتے ہیں۔

براؤنی حرکات کو معلق ٹھوس ذرات کی نوعیت سے کوئی تعلق نہیں ہوتا اور انکو جاری رکھنے کیلئے ٹھوس ذرات کے حجم کو 10^{-4} سمر کے رتبہ سے چھوٹا رکھنا ضروری ہوتا ہے۔ ان حرکات کے مرئی ہونے کیلئے دوسری شرط یہ ہے کہ ٹھوس ذرات برتن کے پیندے سے دُور رکھے جائیں۔ ہنری نے دریافت کیا کہ ربر کے شیرہ میں، ایسیٹک تیزاب یا الکوہل کی قلیل مقدار ملانے سے براونی حرکات میں کمی ہونے لگتی ہے۔ ِبلس لکھتا ہے کہ ریت یا گیج کے نہایت ہی چھوٹے ذرات کے شیرے میں، بے حد خفیف سی قلیوں کی مقدار ملانے سے حرکات میں اضافہ ہونے لگتا ہے، لیکن قلیوں کی مقدار بڑھا دی جائے تو پھر براؤنی حرکات میں کمی واقع ہونے لگتی ہے (۱۶)۔

اس مظہر کا نظریہ جدید زمانہ کا ہے۔ سنہ ۱۹۰۵ء میں آئنسٹائین نے جرمنی میں ریاضی کی مدد سے، کسی دئے ہوئے وقت میں ایک ذرہ کے طے کردہ فاصلہ، اس ذرہ کے نصف قطر، مائع کی تپش اور اسکی لزوجیت کے درمیان ایک تعلق (۱۷) دریافت کیا۔ اسی زمانہ میں لینژوان نے فرانس میں ایک دوسرے سادہ طریقہ سے اس مسئلہ کو حل کرنے کی کوشش کی۔ اسنے بھی وہی ضابطہ حاصل کیا۔ سمولوشوسکی کی رائے یہ تھی کہ چونکہ ذرات کو استوار کرے سے فرض کرنے اور سطحی تناؤ کی قوتوں کو نظر انداز کرنے کے بعد یہ ضابطہ حاصل ہوا ہے اسلئے نظری ضابطہ اور مشاہدات میں مطابقت کی ہمیں کوئی توقع نہیں رکھنی چاہیئے۔ لیکن پھر بھی سنہ ۱۹۱۰ء میں سوڈبرگ

نے مختلف مائعات میں پلاٹینم کے ذرات کی مدد سے تجربی طور پر اس ضابطہ
کی تصدیق کی۔

سنہ ۱۹۰۶ء میں سمولوشوسکی نے یہ بتایا کہ مائعات کی طرح گیسوں میں
بھی براونی حرکات کا ہونا ضروری ہے اور وہی نظری ضابطہ جو مائعات
میں استعمال کیا گیا تھا گیسوں میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ سنہ ۱۹۰۷ء میں
اہرن ہافٹ نے تجربہ کی مدد سے یہ دریافت کیا کہ گیسوں میں مائعات
کی بہ نسبت حرکت زیادہ تیز ہوتی ہے[۱۸]

سگریٹ کے دھوئیں اور امونیم کلورائیڈ کے دخان میں نسبتاً بڑے
ذرات کی حرکات کو اس نے مشاہدہ کیا تھا۔ سنہ ۱۹۰۹ء میں اہرن ہافٹ
اور ڈی براگلی نے ہوا میں چاندی کے ذرات کو معلق رکھ کر نہ صرف نظری
ضابطہ کی تصدیق کی بلکہ برقیہ کی بھرن کی قیمت بھی دریافت کی۔ سنہ ۱۹۱۱ء
میں ملیکن نے برقی اور تجاذبی قوتوں کی مدد سے دو متوازی تختیوں کے
درمیان تیل کے ایک قطرہ کو ہوا میں معلق رکھ کر براونی حرکات کا مطالعہ کیا[۱۹]
اور اس طرح چالاکی کے ساتھ، لزوجیت کی تکلیف دہ رقم کو نظری ضابطہ
سے غائب کر دینے میں کامیابی حاصل کی، برقیہ پر بھرن کی جو قیمت اس نے
دریافت کی تھی وہ اب بھی برقی اکائی کی معیاری قیمت تصور کی جاتی ہے۔
سنہ ۱۹۱۵ء میں کارل[۱۹] نے فلیچر کے (برقیہ پہ بھرن اور ایوگیڈرو کے عدد کا
حاصلضرب معلوم کرنا) طریقہ کی مدد سے، اس ضابطہ کی تصدیق کی۔
ڈاکٹر واتس اور دیگر اشخاص بھی اسی طرح اسکی تصدیق کر چکے ہیں۔

براونی حرکات کا کلیہ[۲۰]:۔ براونی حرکات کے نظریہ کی تکمیل کا سہرا تین
اشخاص یعنی آئنسٹائن، سمولوشوسکی اور لینژوان کے سر رہے گا۔
لینژوان کا آسان طریقہ ہم درج ذیل کرتے ہیں۔

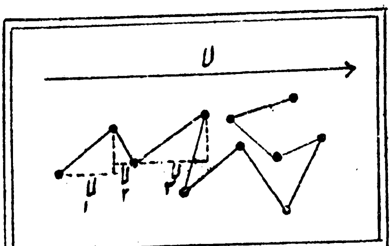
مائع میں جو ذرات معلق رہتے ہیں انکو مائع کے سالمات ہر جانب سے

ٹکراتے ہیں اور ان ضربوں کی وجہ سے ہر ذرہ پر ایک حاصل قوت پیدا ہوتی ہے جس کے تحت یہ ذرات مختلف سمتوں میں حرکت کرنے لگتے ہیں لیکن مائع کی لزوجیت اس حرکت میں کمی کرنے کا تقاضا رکھتی ہے۔ اسٹوک کے کلیہ (۲۱) سے یہ کمی پیدا کرنے والی متضاد لزج قوت 6π ص لہ س کے مساوی ہے۔

جہاں س = ذرہ کی رفتار

لہ = مائع کی لزوجیت

ص = ذرہ کا نصف قطر



شکل ۲۸

فرض کرو کہ ہم صرف لا محور پر ان حرکات کی پیمائش کرنا چاہتے ہیں جیسا کہ شکل ۲۸ میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ وقت و میں لا محور کی سمت میں ایک ذرہ کا مجموعی نقل مکان =

$$= (\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \cdots\cdots + \text{لا}_{\text{ع}})$$

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ایک چھوٹے وقفہ فر و میں نقل مکان فر لا کے مساوی ہے۔

تب تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی:-

$$\text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر و}^2} = \text{جہ} - 6\pi\,\text{ص لہ} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} = \text{جہ} - \text{گ} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$$

جہاں ک = ذرہ کی کمیت

جہ = لا سمت میں ضربوں کی وجہ سے قوت

اور گ = 6π ص لہ

اوپر کی مساوات کو لا سے ضرب دینے سے

$$\text{ک لا}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرو}^{۲}} = \text{جہ لا} - \text{گ لا}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$$

$$\text{لیکن لا}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرو}^{۲}} = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}^{۲})}{\text{فرو}^{۲}} - \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^{۲}$$

$$\text{اور لا}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{فر}\,(\text{لا}^{۲})}{\text{فرو}}$$

$$\therefore\ \frac{۱}{۲}\,\text{ک}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}^{۲})}{\text{فرو}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^{۲} = \text{جہ لا} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}^{۲})}{\text{فرو}}$$

اس مساوات کو نقل مکان کی مجموعی تعداد ع کے لئے لکھنے سے:۔

پہلے نقل مکان کیلئے:۔

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}_{۱}^{۲})}{\text{فرو}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فرلا}_{۱}}{\text{فرو}}\right)^{۲} = \text{جہ لا}_{۱} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{۱}^{۲})}{\text{فرو}}$$

دوسرے نقل مکان کے لئے:۔

$$\frac{\text{ک}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}_{۲}^{۲})}{\text{فرو}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فرلا}_{۲}}{\text{فرو}}\right)^{۲} = \text{جہ لا}_{۲} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{۲}^{۲})}{\text{فرو}}$$

تیسرے نقل مکان کے لئے:۔

$$\frac{\text{ک}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}_{۳}^{۲})}{\text{فرو}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فرلا}_{۳}}{\text{فرو}}\right)^{۲} = \text{جہ لا}_{۳} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{۳}^{۲})}{\text{فرو}}$$

اسی طرح چوتھے کے لئے:۔

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{\text{ک}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}_{\text{ع}}^{۲})}{\text{فرو}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فرلا}_{\text{ع}}}{\text{فرو}}\right)^{۲} = \text{جہ لا}_{\text{ع}} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{\text{ع}}^{۲})}{\text{فرو}}$$

ان تمام مساواتوں کو جمع کرنے اور شمار کنندہ اور نصب نما کو مجموعی تعداد ع سے ضرب دینے سے:۔

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\frac{\text{ع}\;\dfrac{\text{فر}^۲}{\text{فرو}^۲}\left\{\text{لا}_۱^۲+\text{لا}_۲^۲+\cdots\cdots+\text{لا}_\text{ع}^۲\right\}}{\text{ع}}-\frac{\text{ک}\,\text{ع}\left\{\left(\dfrac{\text{فرلا}_۱}{\text{فرو}}\right)^۲+\left(\dfrac{\text{فرلا}_۲}{\text{فرو}}\right)^۲+\cdots\cdots+\left(\dfrac{\text{فرلا}_\text{ع}}{\text{فرو}}\right)^۲\right\}}{\text{ع}}$$

$$=\sum \text{جہ لا}-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\,\frac{\left(\text{لا}_۱^۲+\text{لا}_۲^۲+\cdots\cdots+\text{لا}_\text{ع}^۲\right)}{\text{ع}}$$

فرض کرو کہ $\bar{\text{لا}}^۲=\dfrac{\text{لا}_۱^۲+\text{لا}_۲^۲+\cdots\cdots+\text{لا}_\text{ع}^۲}{\text{ع}}$

لیکن مساوات (۲۶) سے $\quad \text{فہ}=\dfrac{۳\,\text{لات}}{۲\,\text{ن}}$

$\therefore$ صرف محور لا کی سمت میں اوسط توانائی بالفعل $=\text{فہ}_\text{لا}=\dfrac{\text{لات}}{۲\,\text{ن}}$

$$=\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ک}}{\text{ع}}\left\{\left(\frac{\text{فرلا}_۱}{\text{فرو}}\right)^۲+\left(\frac{\text{فرلا}_۲}{\text{فرو}}\right)^۲+\cdots\cdots+\left(\frac{\text{فرلا}_\text{ع}}{\text{فرو}}\right)^۲\right\}$$

اسکو سابق مساوات میں درج کرنے سے :-

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}^۲\left(\bar{\text{لا}}^۲\right)}{\text{فرو}^۲}-\frac{\text{ع}\,\text{لات}}{\text{ن}}=\sum \text{جہ لا}-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}\left(\bar{\text{لا}}^۲\right)}{\text{فرو}}$$

ایک محدود وقت کیلئے $\sum$ جہ لا = صفر چونکہ یہ ممکن ہے کہ نقل مکان لا کی مثبت اور منفی سمت میں تقریباً مساوی ہو۔

فرض کرو کہ $\text{ما}=\dfrac{\text{فر}\bar{\text{لا}}^۲}{\text{فرو}}$ اس صورت میں

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}-\frac{\text{لات}}{\text{ن}}=-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ما}$$

یعنی $\quad \dfrac{\text{فرما}}{\text{ما}-\dfrac{۲\,\text{لات}}{\text{ن}\,\text{گ}}}=-\dfrac{\text{گ}}{\text{ک}}\,\text{فرو}$

اس کو تکملانے سے :-

$$\text{لوک}_\text{و}\left(\text{ما}-\frac{۲\,\text{لات}}{\text{ن}\,\text{گ}}\right)=-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\,\text{و}+\text{مہ}$$

جہاں مہ = مستقل

یعنی $\text{ما} - \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}} = \text{گہ}\ \text{و}^{-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\text{و}}$ جہاں گہ = مستقل

اگر و بہت بڑا ہو تو $\text{گہ}\ \text{و}^{-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\text{و}} = \text{صفر}$

$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{فر}\ \bar{\text{لا}}^{2}}{\text{فر و}} = \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}}$$

اسکو ایک محدود وقت و کیلئے ابتدائی حالت سے انتہائی حالت تک تکملانے سے :-

$$\int_{\text{ابتدائی حالت سے}}^{\text{انتہائی حالت تک}} \text{فر}\ \bar{\text{لا}}^{2} = \int_{\text{صفر}}^{\text{و}} \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}}\ \text{فر و}$$

$$\text{یعنی}\quad \bar{\text{لا}}^{2} = \frac{\text{لا}_1^2 + \text{لا}_2^2 + \ldots\ldots + \text{لا}_{\text{ع}}^2}{\text{ع}} = \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}} \cdot \text{و} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۷۴})$$

پیراں نے تجربہ کے ذریعہ اس مساوات کی تصدیق کی اور آبیوگیڈرو کے مستقل ن کی قیمت اس سے معلوم کی۔

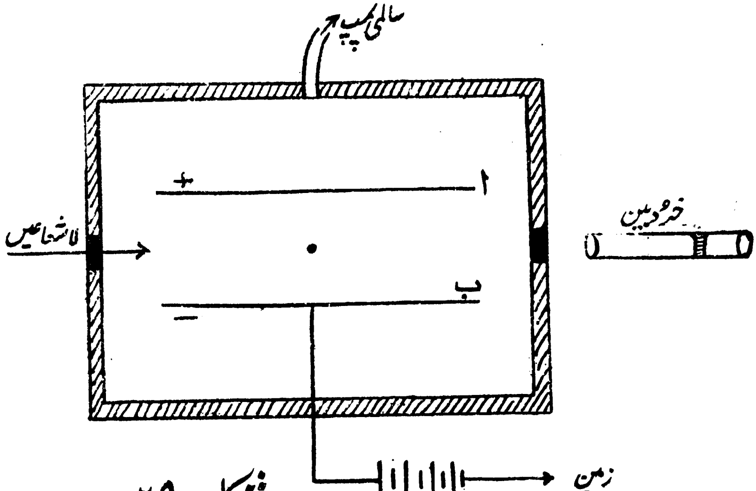
خطی براؤنی حرکات کے علاوہ گردشی براؤنی حرکات بھی واقع ہوتے ہیں آئنسٹائین نے ایک خاص محور کے اعتبار سے وقت و میں گردشی زاویہ ط کے اوسط مربع کیلئے سالمی دھکوں سے ذرات میں جو گردش پیدا ہوتی ہے اسکا لحاظ کرتے ہوئے حسب ذیل مساوات حاصل کی :-

$$\bar{\text{طہ}}^{2} = \frac{\text{طہ}_1^2 + \text{طہ}_2^2 + \ldots\ldots + \text{طہ}_{\text{ع}}^2}{\text{ع}} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{و}}{4\pi\ \text{لہ}\ \text{صو}^3} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۷۵})$$

پیراں نے ایک خوردبین کی مدد سے نسبتاً بڑے ذرات کی گردش کیلئے ایک خاص وقت میں شاہدات لیکر اس مساوات کی تصدیق کرنے میں کامیابی حاصل کی۔

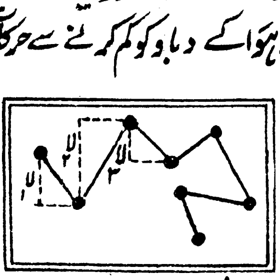
ملیکن کے تیل کے قطرہ والا تجربہ :- ملیکن نے اپنے تجربہ میں بہت ہی چھوٹے تیل کے قطرے 10^{-4} سم نصف قطر کے رتبہ کے استعمال کئے تیل کی پھوار کو ایک سادہ جوہر پاش کے ذریعہ ایک خانہ میں پھونک کر اسنے ان قطروں کو حاصل کیا، اور ایک قطرہ کو دو متوازی افقی تختیوں ا اور ب کے درمیان جہاں کہ

ہوا موجود تھی مقید کرلیا جیسا کہ شکل ۲۹ میں دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں تختیوں کے درمیان ایک برقی میدان اسطرح قائم کیا گیا کہ تیل کا قطرہ معلق دونوں کے درمیان توازن میں رہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ تجاذبی قوت تو قطرہ کو



شکل ۲۹

نیچے کی طرف کھینچتی تھی لیکن برقی قوت اسکو اوپر کیطرف ہٹانے کا تقاضا کرتی تھی۔ لاشعاعوں کے ذریعہ تختیوں کے درمیان روانی میدان قائم کیا گیا تھا اور قطرہ اس طرح ایک یا زیادہ برقیوں کی بہرنوں سے بڑھایا گیا تھا۔ جب قطرہ معلق تھا تو براونی حرکتوں کو ایک زبردست خوردبین کے ذریعہ انتصابی محور کی سمت میں مشاہدہ کیا گیا۔ چشمہ کے پیمانہ پر نقل مکان "لا" ناپا گیا اور وقت نگار کے ذریعہ وقت ق کی قیمت معلوم کر لی گئی۔ تجربہ سے یہ معلوم ہوا کہ ہوا کے دباؤ کو کم کرنے سے حرکات معمولی دباؤ کے مقابلہ میں بہت تیز ہوتے ہیں اور نیز تیل کا قطرہ، پانی کے قطرہ کی نسبت زیادہ نقل مکان کرتا ہے۔



شکل ۳۰

ملیکن نے اپنے تجربہ میں مساوات (۴۷)

سے گ کی قیمت کا ازالہ کرنے کی کوشش اسوجہ سے کی کہ اس زمانہ میں لزوجت کی قیمت کچھ زیادہ قابل اطمینان نہیں تصور کی جاتی تھی۔ اسنے قطرہ کو تجاذبی قوت کے تحت نیچے گرا کر یکساں نیچے کی طرف کی رفتار $س_۱$ کی قیمت معلوم کی۔ اسکے بعد پھر قطرہ کو برقی قوت کے تحت اوپر چڑھنے دیا اور یکساں اوپر کی طرف کی رفتار $س_۲$ دریافت کیا۔

جب قطرہ نیچے گر رہا تھا تو اسٹوک کے کلیہ سے:۔

$گ\, س_۱ = ک\, ج$ جہاں ک = قطرے کی کمیت

جب قطرہ اوپر چڑھ رہا تھا تو $ق\, بھ = ک\, ج + گ\, س_۲ = گ\, (س_۱ + س_۲)$

جہاں ق = برقی حدت اور بھ = قطرہ پر برقی بھرن

$$\therefore گ = \frac{ق\, بھ}{(س_۱ + س_۲)} \quad \ldots\ldots\ldots (۷۶)$$

مساوات (۷۴) اور (۷۶) سے:۔

$$\overline{لا}^۲ = \frac{۲ لات\, و}{ن} \cdot \frac{(س_۱ + س_۲)}{ق\, بھ}$$

یہ $\overline{لا}^۲$ نقل مکان کا اوسط مربع ہے۔ اگر ہم اسکو حسابی اوسط نقل مکان مثلاً $\Delta \overline{لا}^۲$ میں تحویل کریں تو مساوات (۲۲) سے:۔

$$\Delta \overline{لا}^۲ = \overline{لا}^۲ \times \frac{۸}{۳\pi}$$

اس قیمت کو اوپر کی مساوات میں اگر لکھا جائے تو

$$ن\, بھ = \frac{۱۶}{۳\pi} \cdot \frac{لات\, \overline{و} (س_۱ + س_۲)}{ق\, \Delta \overline{لا}^۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۷۷)$$

اس مساوات سے ملیکن نے ن بھ کی قیمت ۲۶۸۹۰×۱۰^{۱۴} برقی سکونی اکائیوں کے مساوی دریافت کی۔

اسکے بعد ہارفے فلیچر نے سنہ ۱۹۱۴ء میں اسی تیل کے قطرہ کے طریقہ کو استعمال کرکے گ کی قیمت کو اسی طرح ساقط کیا۔ اسنے $\Delta \overline{لا}^۲$ لینے کے بجائے "چشمہ

کے پیمانہ کے مختلف درجوں کے لئے، وقت کا اوسط حسابی تغیر ناپ لیا۔ (۱۹) اسطرح اسکو جو قیمت حاصل ہوئی وہ ملیکن کی ن بھ کی قیمت سے عملی طور پر ملتی تھی۔

برقیہ کی بھرن کی تخمین:- ملیکن کے تجربہ میں جبکہ تیل کا قطرہ تجاذبی قوت کے تحت گر رہا تھا:-

$$\text{ک ج} = \text{گ}\,\text{س}_1 = 6\pi\,\text{ص}\,\text{لہ}\,\text{س}_1$$

اور جب برقی قوتوں کے تحت قطرہ اوپر جا رہا تھا:-

$$\text{ق بھ} = \text{ک ج} + 6\pi\,\text{ص}\,\text{لہ}\,\text{س}_2$$

$$\therefore \frac{\text{ق بھ}}{\text{ک ج}} = 1 + \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1} = \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{\text{س}_1} \quad \ldots\ldots\ldots (78)$$

اگر ک ج کی قیمت معلوم ہو جائے تو برقیہ پر کی بھرن بھ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے لیکن بالراست ک ج کی دریافت آسان مسئلہ نہیں ہے۔

$$\text{مگر}\quad \text{ک ج} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج} = 6\pi\,\text{ص}\,\text{لہ}\,\text{س}_1$$

جہاں ثہ = تیل کی کثافت اور ث = واسطہ کی کثافت

$$\therefore \text{ص} = \sqrt{\frac{9\,\text{لہ}\,\text{س}_1}{2(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ک ج} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9\,\text{لہ}\,\text{س}_1}{2(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}\right)^{\frac{3}{2}}(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}$$

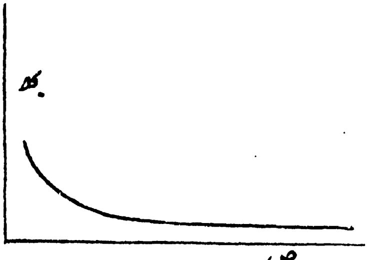
$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9\,\text{لہ}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (\text{س}_1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}} \quad \ldots\ldots\ldots (79)$$

لہذا مساوات (۷۸) اور (۷۹) سے

$$\text{بھ} = (\text{س}_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (\text{س}_1 + \text{س}_2) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{\text{ق}}\left(\frac{9\,\text{لہ}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}} \quad \ldots\ldots (80)$$

اس مساوات سے بھ کی قیمت بہ آسانی معلوم کی جا سکتی ہے۔

گمر ملیکن نے اپنے تجربہ میں یہ دریافت کیا کہ بالکل چھوٹے چھوٹے قطروں کے لئے بھ کی قیمت، نصف قطر کے گھٹنے سے کسی قدر بڑھ جاتی ہے، لیکن بڑے قطروں کے لئے بھ کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے جیسا کہ شکل ۱۳۱ میں ترسیم کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔



شکل ۱۳۱

کننگھیم نامی ملیکن کے ایک شاگرد نے اس کی توجیہ کی اور تیل کے بالکل چھوٹے قطروں کی صورت میں اس نے ایک تصحیح بھی نکالی۔ اس کا خیال تھا کہ اسٹوک کا کلیہ بالکل چھوٹے چھوٹے قطروں کے لئے بالکل صحیح نہیں ہو سکتا۔ (۴۲) کننگھیم کی رائے کے مطابق جب کوئی قطرہ کسی واسطہ میں گرتا ہے تو قطرہ کی رفتار اس کو گھیرے ہوئے واسطہ کی پرت کی رفتار کے مساوی نہیں ہوتی، کیونکہ اس صورت میں قطرہ کی اردگرد کی پرت پھسل جانے کا امکان ہے۔ اگر گرتے ہوئے قطرہ کی رفتار سا ہو تو اس کے اطراف کی پرت کی رفتار بہ سا ہو سکتی ہے، جہاں بہ کوئی کسر ہے۔ لہذا وہ قوت جو کہ قطرہ کو پیچھے کھینچ لے جانے کی کوشش کرتی ہے = ۶ π ص لہ بہ سا، مساوات (۳۵) سے مماسی قوت فی اکائی رقبہ جو قطرہ کو پیچھے کھینچنے کا تقاضا رکھتی ہے =

$$= \text{گہ سا د} \sqrt{\frac{\text{ے}}{2\pi\,\text{لات}}}$$

جہاں گہ = مستقل، سا = اضافی رفتار = (سا − بہ سا)

$$\therefore\ \text{۶}\pi\,\text{ص له به س} = \text{۴}\pi\,\text{ص}^{\text{۲}}\,\text{گ س}\,(\text{۱} - \text{به})\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲}\pi\,\text{لا ت}}}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{به}}{\text{۱} - \text{به}} = \frac{\text{گ د}\,\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{ص}\sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲}\pi\,\text{لا ت}}}}{\text{له}} = \frac{\text{د ص}}{\text{مه}}$$

$$\text{جہاں}\quad \text{مه} = \frac{\text{له}}{\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{گ}\sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲}\pi\,\text{لا ت}}}} = \text{مستقل}$$

$$\therefore\ \text{به} = \left(\text{۱} + \frac{\text{مه}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}}$$

∴ بالکل چھوٹے قطروں کے لئے صحیح اسٹوک کا کلیہ:-

$$\text{قوت} = \text{۶}\pi\,\text{ص له}\left(\text{۱} + \frac{\text{مه}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}}\text{س} \quad \ldots\ldots\ (\text{۸۱})$$

لہذا مساوات (۸۰) میں ہم کو صرف له کی جگہ $\text{له}\left(\text{۱} + \frac{\text{مه}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}}$ لکھنا چاہیئے تاکہ بھ کی صحیح قیمت تیل کے چھوٹے قطروں کی صورت میں حاصل ہو سکے۔

فرض کرو کہ تصحیح کے بعد قیمت $\overline{\text{بھ}}$ اور غیر تصحیح شدہ قیمت بھ ہے جو مساوات (۸۰) سے حاصل ہوتی ہے۔

اس صورت میں

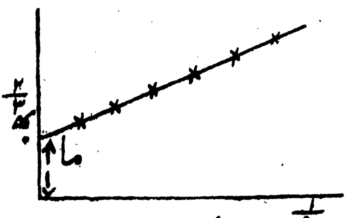
$$\overline{\text{بھ}} = (\text{س}_{\text{۱}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\cdot(\text{س}_{\text{۱}} + \text{س}_{\text{۲}})\cdot\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\,\frac{\pi}{\text{ق}}\left\{\frac{\text{۹}}{\text{۲}}\,\text{له}\left(\text{۱} + \frac{\text{مه}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}}\right\}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}\cdot\frac{\text{۱}}{(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ (\text{۸۲})$$

لہذا مساوات (۸۰) اور (۸۲) سے:-

$$\frac{بھ}{بھَ} = \frac{1}{\left(1+\frac{مہ}{دص}\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

یعنی $بھ^{\frac{2}{3}} = بھَ^{\frac{2}{3}} + بھَ^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{مہ}{دص}$ .... (۸۳)

اگر $بھ^{\frac{2}{3}}$ کو $\frac{1}{دص}$ کے مقابل مرتسم کیا جائے تو منحنی کی شکل شکل ۳۲ کی طرح حاصل ہوگی۔



شکل ۳۲

خط کے مقطوعہ "ما" سے $بھَ^{\frac{2}{3}}$ کی قیمت معلوم ہوجاتی ہے لہٰذا ترسیم سے بالکل چھوٹے قطروں کی صورت میں برقیہ پر بھرن کی صحیح قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

Chapter X.

(۱) Collected Works "Maxwell" Vol. 1, P380
(۲) Jean's Dynamical Theory of Gases or Properties of Matter "Newman & Searle" P231 (1928)
(۳) Phys. Rev. 30, P931
(۴) Phys. Rev, 5, P212, (1915)
(۵) Ann-der-Physik 31. P205 (1910)
(۶) Phys. Rev. 4, P491 (1914)
(۷) „ „ 12 P70 (1918)
(۸) Proc-Roy. Soc. A 103 P469 (1923) and
„ „ 113. P520 (1927)
(۹) Phys. Rev. 2, P327 (1913) or Text Book of Heat "M. N. Saha & B. N. Srivastava" P207 (1931)
(۱۰) Jeans' Dynamical Theory of Gases P37
(۱۱) Phil Mag; 36, P507 (2893)
(۱۲) Text Book of Heat "M. N. Saha & B. N. Srivastava" P126 (1931) or General Physics for Students "E. Edser" P 564 (1926)
(۱۳) The Physical Properties of Colloidal Solutions "E. F. Burton" P80 (1921)
(۱۴) „ „ „ „ „ „ P88 (1921)
(۱۵) Phil. Mag. 4. P161 (1828)
(۱۶) Phys. Rev. 2, P373 (1895)
(۱۷) Ann. der. Physik. 19 P 371 (1906)
22, P569 (1907)
(۱۸) Theory of Brownian Movement "Einstein" P104 (1926)
(۱۹) The Electron "R. A. Millikan" P145
(۲۰) Text Book of Heat "M. N. Saha & B. N. Srivastava" P729 (1931)
(۲۱) Hydrodynamics "H. Lamb" P567 (1924)
(۲۲) Proc. Roy. Soc A. 83 P357

اسمی اشاریہ

اردو	انگریزی	صفحہ

الف

ب

ف

ک