

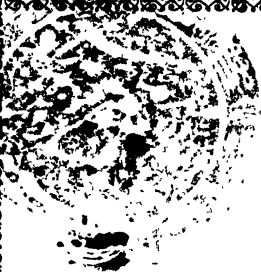
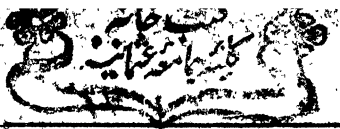
**THE BOOK WAS
DRENCHED**

**TEXT PROBLEM
WITHIN THE
BOOK ONLY**

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191057

UNIVERSAL
LIBRARY



كتاب

في الاصول الهندسية

وهو مشتمل على

كتب اقليدس الستة

ومضافات في ترييع الدائرة

وهندسة الاجسام

واصول قياس المثلثات المستوية والكروية

ترجمة

كرنيليوس فان ديك

بالرخصة الرسمية من مجلس معارف ولاية سورية الجليلة

طبع ثانية في مطبعة الامبركان في بيروت سنة ١٨٨٩

تفتيح
١٣٥٤

مقدمة

٥١٣
ف - م

الحمد لله الذي لا تحيط بدائرة علمه الاوهام . وهو المنزه عن مفادير
الاشكال ومساحة الاجسام . أما بعد فيقول العبد الفقير الى ربه
القدير كرنيليوس فان ديك الاميركاني انني لما رأيت افتقار المدارس
في هذه البلاد الى الكتب الهندسية التي بها تتم الفائدة المقصودة منها
اعنيت بترجمة هذا الكتاب المفيد وهو مشتمل على كتب اقليدس
الستة ومضافات اخرى في تريع الدائرة وهندسة الاجسام واصول
قياس المثلثات المستوية والكروية . والله المسؤول ان

ينفع به الطالبين ويفيد الراغبين ويجعله

مخلصاً لوجهه الكريم وهو ارحم

الراحمين

نبذة تاريخية

ان الفيلسوف اقليدس صاحب كتاب الاصول الهندسية عاش في بلاد مصر نحو ٢٨٠ سنة ق. م في عصر الملك بطليموس لاغوس. قيل وُلد في الاسكندرية وقيل مولده مجهول وصار معلّم العلوم التعليمية في مدرسة الاسكندرية وكثر تلاميذه ومنهم الملك بطليموس نفسه. قيل سألهُ الملك يوماً أَلَا يُوجَدُ سبيلٌ اَسْهَلُ لمعرفة العالم فقال لا توجد سَكَّةٌ سلطانية لذلك. وله مؤلفاتٌ في علم الهيئة والبصريات واشهر مؤلفاته الاصول الهندسية ولم تنزل الى ايامنا هذه افضل ما صُنِفَ في هذا الفن. غير انه قد دخل عليها بعض التغييرات والنقائص على تماذي الاجيال. وقد رجّعها الى اصلها المعلم نيمسوس الاسكوتسي ثم اضف اليها بعض المعلمين عدّة قضايا لكي تصير بذلك اكثر مناسبة لحال العالم في هذا العصر. واحسن نسخها واكثرها فائدة

النسخة التي اعني بها المعلم بلايفار الاسكوتسي وهي

المعول عليها في هذه الترجمة

وبالله التوفيق

اصول الهندسة

—xox—

الكتاب الاول

ايضاح الاصطلاحات والعلامات

- ١ الهندسة علمٌ موضوعه قياس المقادير. والمقدار هو كل ما له واحد من ثلاثة اشياء وهي طولٌ وعرضٌ وعمقٌ
- ٢ قد استُعملت في علم الهندسة اصطلاحاتٌ شتى كالحدِّ والفضية والاولية والنظرية والعلية والسابقة والتعليفية والفرع وغير ذلك مما سترى
- ٣ الحد هو ايضاح معنى لفظة اصطلاحية. ويجب ان يكون تاماً لا اشكال فيه وان تكون الفاظة المفردة اعياديّةً منهومةً
- ٤ الاولية قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاح كقولم الكل اعظم من جزءه
- ٥ النظرية قضية محتاجة الى برهان لاثبات صحتها كقولم ان الزوايا الثلاث من كل مثلث تعدل قائمتين
- ٦ البرهان المستقيم هو ما اثبت صحة قضية ويُسمّى ايضاً البرهان الايجابى
- ٧ البرهان غير المستقيم هو ما اثبت صحة قضية باثبات محالية فسدّها ويُسمّى ايضاً البرهان السلبي والتحويل الى المحال
- ٨ العلية هي قضية حاوية عملاً مطلوباً اتمامه كقولم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان نقسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ٩ حلٌ عمليّ هو استخراج جوابها. فان عبّر عن ذلك باعلائيّ حلّاً عدديّاً او مبادئى هندسية فهندسياً. وان تمّ بواسطة امتحانات فيكانيكياً او صناعياً
- ١٠ السابقة قضية استعدادية ذكّرت قبل اخرى لكي يختصر بها برهان اخرى
- ١١ الفرع نتيجة تستنتج بالاستقمامة من قضية سابقة لها

الكتاب الاول

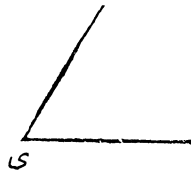
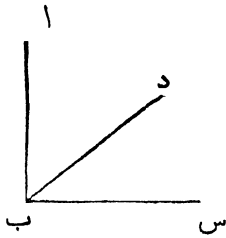
- ١٢ التعليقة قول مبني على قضية سابقة
- ١٣ الافتراض هو ان يسلم بصحة قضية لكي يبنى عليها برهان قضية اخرى
- ١٤ المتنضيات او الممكنات عمليات يسلم بامكان عملها من اول وهلة
- ١٥ النظام هو صناعة وضع جملة براهين متتابعة على ترتيب مناسب للبحث عن صحة قضية او فسادها او لبرهانها للغير
- ١٦ التحليل هو استعمال صحة قضية بالتفكير من القضية نفسها الى مبداء معلوم ويسى ايضا النظام التحليلي وهو المستعمل في علم الجبر والمقابلة
- ١٧ التركيب هو التقدم شيئاً فشيئاً من مبداء معلوم بسيط الى النتيجة ويسى ايضا النظام التركيبي وهو المستعمل في علم الهندسة
- ١٨ العلامات المستعملة في هذا الكتاب قد نلتم شرحها في كتاب علم الجبر والمقابلة فعليك بالمراجعة

—co—

حدود

- ١ النقطة شيء له وضع فقط وليس له طول ولا عرض ولا عمق
- ٢ الخط طول بدون عرض ولا عمق
- فرع. نهايتا خط نقطتان وموضع تقاطع خطين نقطة
- ٣ خطان لا يتوافقان في نقطتين منهما بدون ان يتوافقا بالكلية
- يسميان مستقيمين. وقيل ايضا الخط المستقيم هو البعد الاقرب بين نقطتين
- فرع. خطان مستقيمان لا يحيطان بمساحة ولا يتطابقان في جزء
- منهما ان لم يتطابقا بالكلية
- ٤ السطح او البسيط ما كان له طول وعرض بدون عمق
- فرع. نهايات سطح خطوط. وموضع تقاطع سطحين خط

- ٥ السطح المستوي هو سطحٌ اذا فرضت فيه نقطتان فالخط المستقيم الموصل بينهما يقع جميعه في ذلك السطح
- ٦ الزاوية المستقيمة البسيطة هي انفراج خطين مستقيمين التقيا بنقطة وليسا على استقامة واحدة



تنبيه. متى التقت زاويتان فأكثر في نقطة واحدة كما برى عند ب فكل واحدة منها تعين

بثلاثة احرفٍ اوسطها عند راس الزاوية. فالزاوية الواقعة بين خط اب وخط دب تسمى زاوية اب د او دب ا والواقعة بين دب وس ب تسمى دب س او س ب د واما الزاوية المفردة فيدل عليها بحرف واحد كالزاوية عند ي



٧ اذا قام خطٌ مستقيم على آخر مستقيم واحدث زاويتين متساويتين على جانبيه فالخط القائم يسمى عموداً وكل زاوية منها قائمة



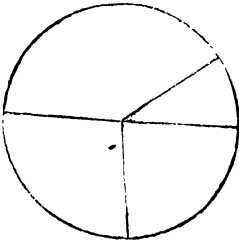
٨ الزاوية المنفرجة هي كل زاوية اكبر من قائمة

٩ الزاوية الحادة

هي كل زاوية اصغر من قائمة

١٠ الشكل هيئة محدودة. ومساحة الشكل هي الفسحة المنحصرة

في حدوده بدون نظر الى ماهية تلك الحدود



١١ الدائرة شكل مستوي يحيط به خط واحد ويسى المحيط. وفي وسطه نقطة جميع الخطوط المستقيمة الخارجة منها الى المحيط متساوية

١٢ النقطة المشار اليها تسمى مركز الدائرة

١٣ قُطر الدائرة خط مستقيم ماراً بمركزها ونهايتاه في محيطها

١٤ نصف الدائرة هو الشكل المحاط بالقطر والجزء من المحيط

المقطوع بالقطر

١٥ الاشكال المستقيمة الاضلاع هي المحدودة بخطوط مستقيمة

١٦ المثلث شكل يحيط به ثلاثة خطوط

تنبيه. المثلث المستوي هو ما احاط به ثلاثة خطوط مستقيمة

والكروي ما احاط به ثلاثة خطوط منحنية

١٧ ذو الاربعة الاضلاع شكل احاط به اربعة خطوط مستقيمة

١٨ الشكل الكثير الاضلاع ما احاط به اكثر من اربعة

خطوط مستقيمة



١٩ المثلث

المتساوي الاضلاع

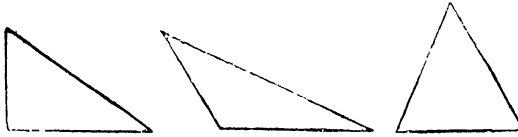
هو ما كانت اضلاعه الثلاثة متساوية

٢٠ المثلث المتساوي الساقين هو ما كان ضلعان من اضلاعه

الثلاثة متساويين

٢١ المثلث المختلف الاضلاع هو ما كانت اضلاعه الثلاثة

غير متساوية



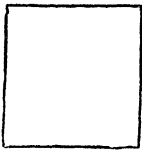
٢٢ المثلث

القائم الزاوية هو ما

كانت احدى زواياه قائمة

٢٣ المثلث المنفرج الزاوية هو ما كانت احدى زواياه منفرجة

٢٤ المثلث الحاد الزاوية هو ما كانت زواياه الثلاث حادة



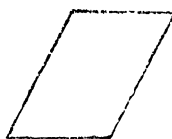
٢٥ المربع شكل يحيط به اربعة

خطوط مستقيمة متساوية وكل زواياه

قائمة

٢٦ المستطيل هو ما كانت كل زواياه قائمة ولكن ليس كل

اضلاعه متساوية



٢٧ المعين ما كانت

اضلاعه متساوية ولكن

ليست فيه قائمة

٢٨ الشبيه بالمعين ما كان ضلعه المتقابلان متساويين وليست

فيه قائمة و اضلاعه الاربعة ليست متساوية

٢٩ كل ذي اربعة اضلاع غير ما ذكر يسمى منحرفاً

٣٠ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الواقعة في سطح واحد مستوي

ولا تلتقي ولو أُخرجت في جهتيها الى غير نهاية

—•••—

مقتضيات او ممكنات

- ١ يمكن ان يوصل بين كل نقطتين بخط مستقيم او غير مستقيم
- ٢ يمكن ان يُخرج خطاً مستقيماً محدوداً على استقامته في جهتيه الى حد ما يُراد
- ٣ يمكن ان تُرسم دائرة على اي مركزٍ فرض وعلى اي بُعدٍ فرض منه

—•••—

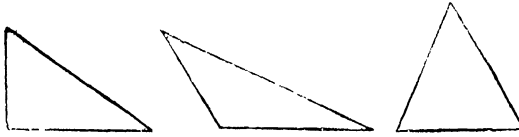
اوليات

- ١ الاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض
- ٢ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٣ اذا طُرحت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية
- ٤ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية تكون المجموعات غير متساوية
- ٥ اذا طُرحت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية تكون البقايا غير متساوية
- ٦ الاشياء التي هي مضاعف شيء واحد هي متساوية
- ٧ الاشياء التي تعدل نصف شيء واحد هي متساوية
- ٨ المقادير المتطابقة اي التي تملأ مساحة واحدة هي متساوية

الثلاثة متساويين

٢١ المثلث المختلف الاضلاع هو ما كانت اضلاعه الثلاثة

غير متساوية



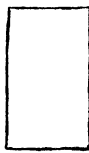
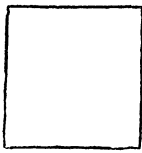
٢٢ المثلث

القائم الزاوية هو ما

كانت احدى زواياه قائمة

٢٣ المثلث المنفرج الزاوية هو ما كانت احدى زواياه منفرجة

٢٤ المثلث الحاد الزاوية هو ما كانت زواياه الثلاث حادة



٢٥ المربع شكل يحيط به اربعة

خطوط مستقيمة متساوية وكل زواياه

قائمة

٢٦ المستطيل هو ما كانت كل زواياه قائمة ولكن ليس كل

اضلاعه متساوية



٢٧ المعين ما كانت

اضلاعه متساوية ولكن

ليست فيه قائمة

٢٨ الشبيه بالمعين ما كان ضلعاؤه المتقابلان متساويين وليست

فيه قائمة و اضلاعه الاربعة ليست متساوية

٢٩ كل ذي اربعة اضلاع غير ما ذكر يسمى منفرقا

٣٠ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الواقعة في سطح واحد مستوي

ولا تلتقي ولو أُخرجت في جهتيها الى غير نهاية

—•••—

مقتضيات او ممكنات

- ١ يمكن ان يوصل بين كل نقطتين بخط مستقيم او غير مستقيم
- ٢ يمكن ان يُخرج خطاً مستقيماً محدود على استقامته في جهتيه الى حد ما يُراد
- ٣ يمكن ان تُرسم دائرة على اي مركز فرض وعلى اي بُعد فرض منه

—•••—

اوليات

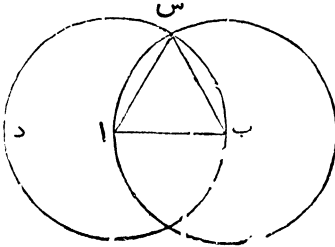
- ١ الاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض
- ٢ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٣ اذا طُرحت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية
- ٤ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية تكون المجموعات غير متساوية
- ٥ اذا طُرحت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية تكون البقايا غير متساوية
- ٦ الاشياء التي هي مضاعف شيء واحد هي متساوية
- ٧ الاشياء التي تعدل نصف شيء واحد هي متساوية
- ٨ المقادير المتطابقة اي التي تملأ مساحة واحدة هي متساوية

- ٩ الكل اعظم من جزئه
١٠ جميع الزوايا القائمة متساوية
١١ اذا تقاطع خطان مستقيمان لا يكونان موازيين لخط آخر

مستقيم

القضية الاولى . عملية

علينا ان نرسم مثلثاً متساوي الاضلاع على خط مستقيم محدود مفروض
ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلينا ان نرسم عليه مثلثاً متساوي الاضلاع.



اجعل ا مركزاً و ا ب بُعداً وارسم دائرة
ب س د ثم اجعل ب مركزاً و ا ب بُعداً
وارسم دائرة ا س ر (حسب ثلاثة
الممكنات) ثم من س اي نقطة تقاطع
الدائرتين ارسم خطاً الى ا وآخر الى ب

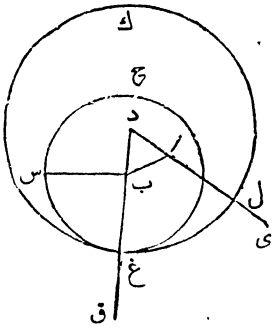
(حسب اولى الممكنات) فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع

النقطة ا هي مركز الدائرة ب س وذلك الخط ا س يعدل الخط ا ب (حسب
الحديث الحادي عشر) و ب مركز الدائرة ا س وذلك ب ا يعدل ب س وقد تبهرن
ان ا س يعدل ا ب والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها بعض
(اولية اولى) فلذلك ب س يعدل ا س فالخطوط الثلاثة ا ب ا س ب س هي
متساوية فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع وقد رُسم على ا ب وذلك ما كان
علينا ان نفعله

القضية الثانية . ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة خطاً مستقيماً يعدل خطاً آخر
مستقيماً مفروضاً

لتكن ا النقطة المفروضة و ب س الخط المستقيم المفروض فعلينا ان نرسم من



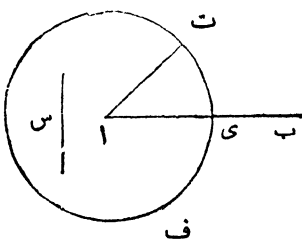
١ خطاً يعدل ب س . من النقطة المفروضة ا رسم الخط ا ب (اولى المتضويات) وارسم على ا ب مثلثاً متساوي الاضلاع ا ب د (حسب ق ا ك ا) ثم اخرج د ب الى ق ود ا الى ي (حسب ثانية المتضويات) ثم اجعل ب مركزاً و ب س بعداً وارسم دائرة س غ ح (حسب ثالثة المتضويات) واجعل د مركزاً و د غ بعداً وارسم دائرة غ ل ك فالخط ال يعدل الخط ب س

النقطة ب هي مركز الدائرة غ س ح ولذلك ب س يعدل ب غ (حد ١١) والنقطة د هي مركز الدائرة غ ل ك ولذلك الخط د ل يعدل د غ والجزء د ا يعدل الجزء د ب فالبقية ال تعدل البقية ب غ (اولية ثالثة) وقد تبرهن ان ب س يعدل ب غ والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض فالخط ال يعدل الخط ب س وقد رُسم من ا النقطة المفروضة وذلك ما كان علينا ان نعلمه

—co—

القضية الثالثة . ع

علينا ان نقطع من اطول خطين مستقيمين مفروضين جزءاً يعدل اقصرهما



ليكن ا ب اطول الخطين المفروضين وس افرضنا . فعلياً ان نقطع من ا ب جزءاً يعدل س . ارسم من النقطة ا خطاً ا ت حتى يعدل س (حسب ق ا ك ا) ثم اجعل ا مركزاً و ا ت بعداً وارسم دائرة ت ي ف (ثالثة المتضويات) فالجزء

ا ي يعدل ا ت (حد ١١) و ا ت يعدل س فلذلك ا ي يعدل س (اولية اولى) وقد قُطع من ا ب اطول الخطين المفروضين وذلك ما كان علينا ان نعلمه

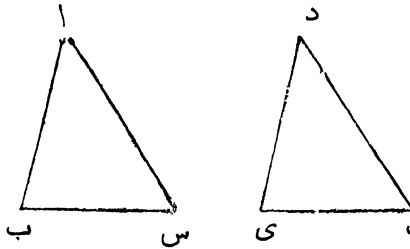
—

القضية الرابعة . نظرية

اذا عدل ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر والزاوية الواقعة بين ضلعي

احدهما عدلت الواقعة بين ضلعي الآخر فالضلع الثالث من الواحد يعدل الثالث من الآخر ويكون المثلثان متساويين والزاويتان الاخريان من الواحد تعدلان الاخريين من الآخر

ليكن ا ب س دى ف مثلثين. والضلعان ا ب اس من الواحد يعدلان دى د ف من الآخر كل واحد يعدل نظيره



والزاوية ب اس تعدل الزاوية د ف فحينئذ القاعدة ب س تعدل القاعدة دى ف. والمثلث ا ب س يعدل المثلث دى ف. وبقيت الزاويتان

ايضاً متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية كل واحدة تعدل نظيرها. اي ا ب س تعدل دى ف. و ا س ب تعدل دى ف

لانه اذا وضع المثلث ا ب س على المثلث دى ف حتى تقع النقطة ا على النقطة د والخط ا ب على الخط دى فالنقطة ب تقع على النقطة دى لان ا ب يعدل دى. واذا وقع ا ب على دى فحينئذ ا س يقع على د ف لان الزاوية ب اس تعدل الزاوية دى ف والنقطة س تقع على النقطة ف لان ا س يعدل د ف. وقد تبهر ان النقطة ب تقع على النقطة دى فالقاعدة ب س تقع على القاعدة دى ف وتعدلهما (فرع حد ٣) وكذلك كل المثلث ا ب س يقع على كل المثلث دى ف ويكونان متساويين. والزاويتان الاخريان من الواحد تقع على الاخريين من الآخر. وكل واحدة تعدل نظيرها اي ا ب س تعدل دى ف و ا س ب تعدل دى ف. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

—xox—

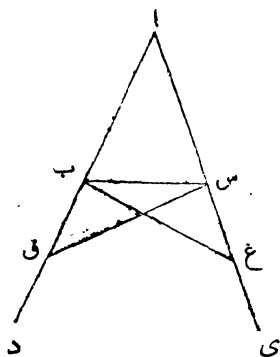
القضية الخامسة. ن

في كل مثلث متساوي الساقين الزاويتان عند القاعدة متساويتان. واذا أُخرج الضلعان المتساويان فالزاويتان الحادثتان على الجانب الآخر من القاعدة متساويتان ايضاً

ليكن ا ب س مثلثاً متساوي الساقين اي الساق ا ب يعدل الساق اس. ولخرج

الضلع اب الى د والضلع اس الى ي . فالزاوية اب س تعدل الزاوية اس ب
والزاوية س ب د تعدل الزاوية ب س ي

عين اي نقطة شئت في ب د كالنقطة ق مثلاً . ومن اي اطول خطين اقطع اغ



حتى يعدل اق اقصرها (حسب ق ك ا) وارسم

الخط ق س والخط غ ب . فالخط اق يعدل اغ

وكذلك اب يعدل اس . فالخطان ق ا اس

يعدلان غ ا ب وبينهما الزاوية ق اغ المشتركة

بين المثلثين اق س اغ ب فلقاعدة ق س

تعدل القاعدة غ ب (حسب ق ك ا) والمثلث

اق س يعدل المثلث اغ ب ببقية الزوايا من

الواحد تعدل بقية الزوايا من الآخر (ق ك ا)

كل واحدة تعدل نظيرها اي التي تحاذيها الاضلاع المتساوية اي الزاوية اس ق

تعدل اب غ والزاوية اق س تعدل اغ ب . وقد تقدم ان اق يعدل اغ وان

اب يعدل اس فالبقية ب ق تعدل البقية س غ (اولية ثالثة) وقد تبرهن ان

ق س يعدل غ ب فالضلعان ب ق ق س يعدلان الضلعين س غ غ ب وتبرهن ان

الزاوية ب ق س تعدل الزاوية س غ ب فالمثلث ب ق س يعدل المثلث س غ ب

(ق ك ا) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الآخري التي تقابلها

الاضلاع المتساوية اي الزاوية ق ب س تعدل الزاوية غ س ب والزاوية ب س ق

تعدل الزاوية س ب غ وقد تبرهن ان كل زاوية اس ق تعدل الكل اب غ وان

الجزء ب س ق يعدل الجزء س ب غ فالبقية اس ب تعدل البقية اب س وهما

الزاويتان عند قاعدة المثلث اب س وقد تبرهن ان الزاوية ق ب س تعدل غ س

ب وهما الزاويتان على الجانب الآخر من القاعدة . وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

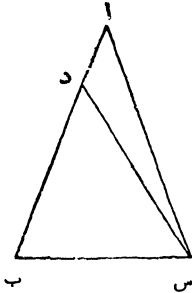
فرفع . اذ ذاك يكون كل مثلث متساوي الاضلاع متساوي الزوايا ايضاً

القضية السادسة . ن

اذا كانت زاويتان من مثلث متساويتين فالضلعان اللذان يقابلانها

هما متساويان ايضاً

ليكن $اب$ $س$ مثلثاً له زاويتان $اب$ $س$ $اس$ $ب$ متساويان فضلعاه $اب$ $اس$ هما متساويان ايضاً



والأ فاحدها اطول من الآخر. فلنفرض $اب$ اطولها ولنقطع منه جزءاً $دب$ يعدل $اس$ اقصرهما (ق ٢ ك ١)

فلنا في المثلثين $دب$ $س$ $اب$ $س$ ضلع من الواحد $دب$ يعدل ضلعاً من الآخر $اس$ والقاعدة $ب$ $س$ مشتركة بينهما

فالضلعان $دب$ $ب$ $س$ يعدلان $اس$ $س$ $ب$ كل واحد $س$ نظيره. والزاوية $دب$ $س$ تعدل $اس$ $ب$ فالقاعدة $د$ $س$ تعدل القاعدة $اب$

والمثلث $دب$ $س$ يعدل المثلث $اب$ $س$ (ق ٤ ك ١) اي الاصغر يعدل الاكبر وذلك محال فلا يمكن ان يكون $اب$ $اس$ غير متساويين بل هما متساويان. وذلك ما كان

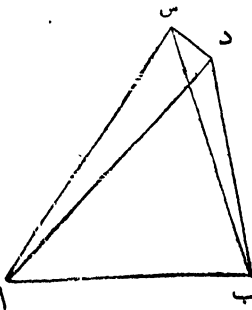
علينا ان نبرهنه

فرغ. كل مثلث متساوي الزوايا هو متساوي الاضلاع ايضاً

القضية السابعة . ن

لا يكون على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة متساويان والمنتهيان في طرفها الآخر متساويان ايضاً

ليكن $اس$ $ب$ $اد$ $ب$ مثلثين على قاعدة واحدة $اب$ وعلى جانب واحد منها الضلعان $اس$ $اد$ المنتهيان في $ا$ متساويان فالمنتهيان في $ب$ الطرف الآخر من القاعدة لا يكونان متساويين



ارسم الخط $س$ $د$ (حسب اولى الممكنات) فاذا

كان $ب$ $س$ $ب$ $د$ متساويين وكان راس احد المثلثين خارج الآخر فلنا $اس$ $اد$ متساويان فالزاوية $اس$

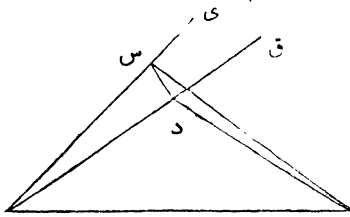
$د$ تعدل الزاوية $اد$ $س$ (حسب ق ٥ ك ١) والزاوية

$اس$ $د$ انما هي اكبر من الزاوية $ب$ $س$ $د$ فالزاوية $ب$

$اد$ $س$ ايضاً اكبر من $ب$ $س$ $د$ وبالاخرى الزاوية $ب$ $د$ $س$ اكبر من $ب$ $س$ $د$ وعلى

ما فُرض ان س ب يعدل د ب فالزاوية ب د س تعدل ب س د (ق ه ك ا) وقد
تبرهن انها اكبر من ب س د

ثم اذا وقع راس احد المثلثين مثل د داخل الآخر اس ب. فاخرج اس الى
واخرج ا د الى ق فبا ان اس ا د متساويتان فالزاويتان س د ق د س
على الجانب الآخر من القاعدة س د هما متساويتان (ق ه ك ا) والزاوية س د
انما هي اكبر من الزاوية ب س د فالزاوية ق د س ايضاً اكبر من ب س د وبالاخرى
ب د س اكبر من ب س د واذا كان ب د ب س متساويين فالزاوية ب د س



تعدل الزاوية ب س د (ق ه ك ا)
وقد تبرهن ان ب د س اكبر من
ب س د وذلك محال . وهكذا اذا
وقع راس احد المثلثين بجانب الآخر
فلا يمكن ان يكون على قاعدة واحدة ب

وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان الى طرف واحد من القاعدة
متساويان والمنتهيان الى طرفها الآخر متساويان ايضاً

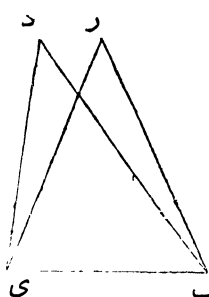
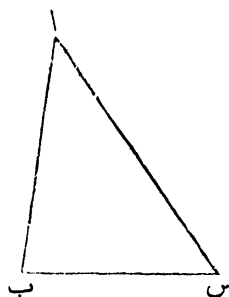


القضية الثامنة . ن

اذا عُدل ضلعاً مثلثٍ ضلعيّ مثلثٍ آخر وكانت القاعدتان متساويتين
ايضاً فالزاوية الحادثة بين ضلعيّ الواحد تعدل الحادثة بين ضلعي
الآخر

ليكن ا ب س د ي ف مثلثين والضلعان ا ب اس يعدلان د ي د ف كل
واحد يعدل نظيره . والقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف فالزاوية ب اس تعدل
الزاوية ي د ف

لانه اذا وضع المثلث ا ب س على المثلث د ي ف حتى تقع النقطة ب على النقطة ي
والخط ب س على الخط ي ف فالنقطة س تقع على النقطة ف لان الخط ب س يعدل



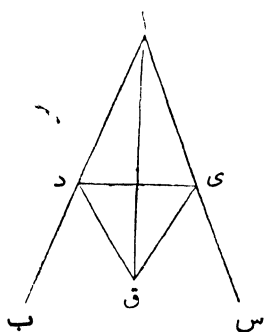
ي ف واذا ذاك فالخط ب ا
يقع على الخط ي د والخط
اس يقع على د ف والا
فلنفرض وقوعها على ي ر
رف فعند ذلك يكون
على قاعدة واحدة وعلى

جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة
متساويان والمنتهيان في طرفي الآخر متساويان ايضاً وذلك لا يمكن (ق ٧ ك ١)
فاذا طبق ب س على ي ف فالخطان ب ا س يطبقان على ي د ف والزاوية
ب ا س تطبق على الزاوية ي د ف ونعدها (اولية ٨) وذلك ما كان علينا ان نبرهنه



القضية التاسعة . ع

علينا ان نصف زاوية بسيطة مستقيمة مفروضة اي ان نقسمها الى
قسمين متساويين



ليكن ب ا س الزاوية المفروضة ان نصفها
عن آية نقطة شئت في الخط اب كالنقطة د
ومن اس اطول خطين اقطع جزءا اى حتى
يعدل ا د اقصرها (ق ٢ ك ١) ارسم الخط د ي
وابن عليه مثلثاً متساوي الاضلاع د ق ي
(ق ١ ك ١) وارسم الخط ا ق فهو ينصف الزاوية
ب ا س

لان الخط ا د يعدل الخط ا ي والخط ا ق مشترك بين المثلثين د ا ق ي ا ق
فالضلعان د ا ا ق يعدلان الضلعين ي ا ا ق كل واحد يعدل نظيره . والقاعدة د ق
تعدل القاعدة ق ي فالزاوية د ا ق تعدل الزاوية ي ا ق (ق ١ ك ١) فقد تنصفت
الزاوية ب ا س بالخط ا ق المستقيم وذلك ما كان علينا ان نعلمه

تعليقة . على هذه الكيفية نصف كلا النصفين د ا ق و على هذا النسق
نقسم زاوية مفروضة الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءا متساوية وهم جزا

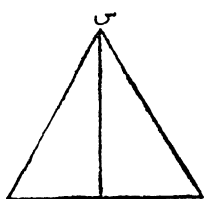
القضية العاشرة . ع

علينا ان نصف خطا مستقيما محدودا مفروضا اي ان نقسمه الى قسمين

متساويين

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض علينا ان

ننصفه



ارسم على الخط ا ب مثلثا متساوي الاضلاع ا س ب

(ق ا ك ١) ونصف الزاوية ا س ب بالخط المستقيم س د

(ق ١ ك ١) فالخط ا ب قد اتصف في النقطة د

لأن الخط ا س يعدل س ب والخط س د مشترك بين المثلثين ا س د

ب س د فالضلعان ا س س د يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا س د

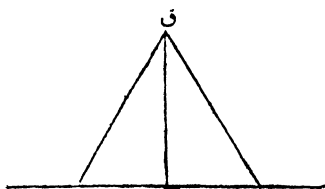
تعدل الزاوية ب س د فلذلك القاعدة ا د تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) فقد

اتصف الخط ا ب في النقطة د وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم محدود مفروض خطا

مستقيما يحدّث مع الاول زاويتين قائمتين



ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض

وس النقطة المفروضة فيه . فعلينا ان

نرسم من النقطة س خطا مستقيما يحدّث

مع ا ب قائمتين

ب ي س د ا

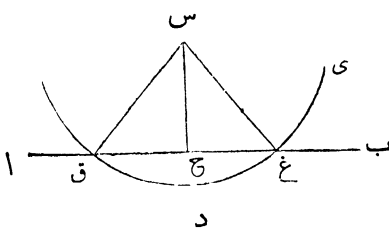
عن آية نقطة شئت في ا س كالنقطة د مثلاً ومن س ب اقطع جزءا س ي حتى

يعدل س د (ق ٢ ك ١) وعلى د ي ابن مثلثا متساوي الاضلاع (ق ا ك ١) د ق ي

ثم ارسم المخطط س فهو يُحدث مع ا ب قائمتين
لأن د س يعدل ي س والمخطط ق س هو مشترك بين المثلثين د س ق
ي س ق فالضلعان د س س ق يعدلان الضلعين ي س س ق كل واحد يعدل
نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ي ق فالزاوية د س ق تعدل الزاوية ي س ق
(ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. وإذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم وجعل الزاويتين
المتواليتين متساويتين فكل واحدة منهما قائمة (حد ٧) فكل واحدة من د س ق
ي س ق هي قائمة. فقد رُسم من النقطة المفروضة س خط ق س وهو يحدث مع
ا ب قائمتين وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثانية عشرة. ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خط مستقيم مفروض غير محدود
وذلك من نقطة مفروضة خارج ذلك الخط



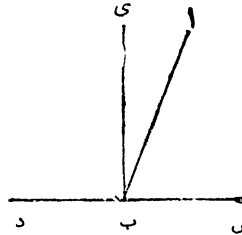
ليكن ا ب خطاً مستقيماً
يمكن اخراجه الى جهتيه الى غير
نهاية. ولكن س نقطة خارجه
فعلينا ان نرسم من س خطاً
عمودياً على ا ب

عين آية نقطة شئت على الجانب الاخر من ا ب مثل د ثم اجعل س مركزاً
وس د بعداً وارسم الدائرة ي غ ق (ثلاثة المكنات) التي تقطع ا ب في النقطتين غ
وق. نصف ق غ في ج (ق ١٠ ك ١) ثم ارسم س ج فهو عمودي على ا ب. ارسم
س ق س غ ولان ق ج يعدل ج غ والمخطط س ج مشترك بين المثلثين ق ج س
غ ج س فالضلعان ق ج ج س يعدلان الضلعين غ ج ج س كل واحد يعدل
نظيره. والقاعدة س ق تعدل القاعدة س غ (حد ١١) فالزاوية ق ج س تعدل
الزاوية غ ج س (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. فالخط س ج عمودي على ا ب (حد ٧)
وقد رُسم من النقطة المفروضة س وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثالثة عشرة . ن

الزاويتان الحادثتان من وقوع خط مستقيم على آخر مستقيم على جانب واحد منه هما قائمتان او تعدلان قائمتين

ليقع الخط المستقيم ا ب على الخط المستقيم د س حتى تحدث الزاويتان ا ب د ا ب س فهما قائمتان او تعدلان قائمتين



فاذا كان ا ب د
ا ب س متساويتين
فهما قائمتان (حد)
والا فمن النقطة ب
ارسم الخط ب ي س

عمودياً على د س (ق ١١ ك ١) فالزاويتان ي ب د د ي ب س قائمتان والزاوية
س ب ي تعدل س ب ا مع ا ب ي اضع الى كل واحدة منها الزاوية ي ب د
فالزاويتان س ب ي ي ب د تعدلان الثلاث الزوايا س ب ا ا ب ي ي ب د
(اولية ٢) والزاوية د ب ا تعدل د ب ي مع ي ب ا اضع الى كل واحدة منها ا ب س
فالزاويتان د ب ا ا ب س تعدلان الثلاث د ب ي ي ب ا ا ب س وقد تبهرن
ان د ب ي س ب ي تعدل هذه الثلاث الزوايا ايضاً، والاشياء المتساوية لشيء واحد
هي متساوية بعضها لبعض (اولية ١) اي الزاويتان س ب ي د ب ي تعدلان
الزاويتين د ب ا ا ب س ولكن س ب ي ي ب د هما قائمتان فالزاويتان د ب ا
ا ب س تعدلان قائمتين

فرغ . مجتمع جميع الزوايا الحادثة على جانب واحد من د س يعدل قائمتين
لانه يعدل مجتمع المتوالتين د ب ا ا ب س

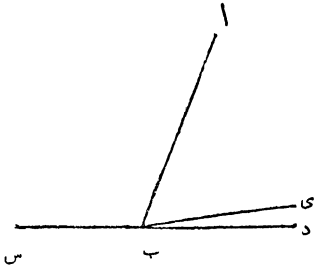


القضية الرابعة عشرة . ن

اذا وقع خطان مستقيمان على نقطة واحدة من خط آخر مستقيم عن

جانبه واحداً زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة واحدة كأنهما خط واحد

ليقع خطان س ب د ب على النقطة ب من الخط ا ب من جانبه وليحدثا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين ا ب س ا ب د فالخطان س ب ب د على استقامة واحدة كأنهما خط واحد

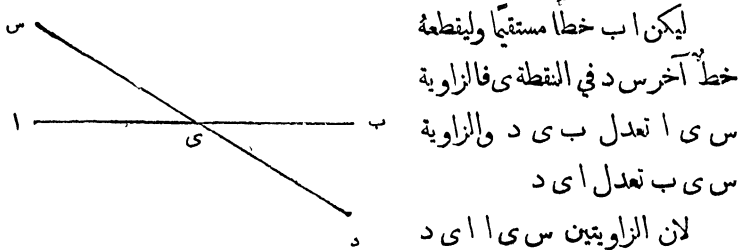


والأفارس ب ي حتى يكون س ب ب ي على استقامة واحدة فالخط المستقيم ا ب الواقع على خط آخر مستقيم س ي على جانب واحد منه يحدث زاويتين ا ب س ا ب ي تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١)

ولكن قد فرض ان ا ب س ا ب د تعدلان قائمتين فالزاويتان ا ب س ا ب ي تعدلان ا ب س ا ب د اطرح الزاوية المشتركة ا ب س فالباقية ا ب ي تعدل الباقية ا ب د (اولية ٢) اي الجزء يعدل الكل وذاك محال فلا يمكن ان يكون س ب ب ي على استقامة واحدة. وهكذا في كل خط غير ب د فالخطان س ب ب د الحدثان مع ا ب زاويتين تعدلان قائمتين هما على استقامة واحدة وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

القضية الخامسة عشرة . ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان فالزوايا المتقابلة متساوية



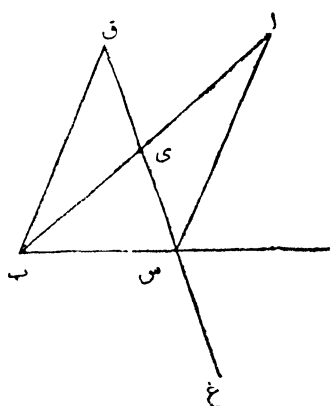
ليكن ا ب خطاً مستقيماً وليقطعه خط آخر س د في النقطة ي فالزاوية س ي ا تعدل ب ي د والزاوية س ي ب تعدل ا ي د لان الزاويتين س ي ا ا ي د الحادتين من وقوع ا ي على س د تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) واي د د ي ب الحادتين من وقوع د ي على ا ب ايضاً تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان

س ي ا اى د عدلان اى د دى ب اطرح المشتركة اى د فالباقية س ي ا
تعديل الباقية دى ب (اولية ٢) وهكذا ايضا يبرهن ان س ي ب تعديل اى د
فرع أول يتضح من هذه القضية ان مجموع جميع الزوايا الحادثة من تقاطع
خطين مستقيمين يعدل اربع زوايا قائمة
فرع ثانٍ مجموع الزوايا الحادثة من تقاطع خطوط مستقيمة في نقطة واحدة
يعدل اربع زوايا قائمة



القضية السادسة عشرة . ن

اذا اُخْرِجَ ضَلْعٌ مِثْلُ فَاَلزَاوِيَةِ الْخَارِجَةِ الْحَادِثَةِ مِنْ ذَلِكَ هِيَ
اَكْبَرُ مِنْ اَحَدَى الدَّاخِلَتَيْنِ الْمُتَقَابِلَتَيْنِ

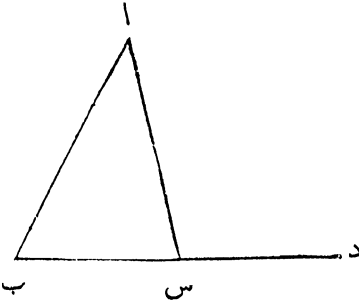


ليكن ق ب س مثلثا وليخرج الضلع
ب س الى د فالزاوية الخارجة ق س د هي
أكبر من احدى الدائنتين المتقابلتين
س ب ق ب ق س
نصف ق س في ي (ق ا ك ا)
ارسم ب ي واخرجه الى ا واجعل ي ا د
يعدل ب ي (ق ا ك ا) وارسم ا س
واخرج ق س الى غ

لأن ق ي يعدل ي س وب ي يعدل ي ا فالخطان ق ي ي ب يعدلان
اى ي س كل واحد يعدل نظيره . والزاوية ق ي ب تعديل اى س (ق ه ا ك ا)
فالقاعدة ق ب تعديل القاعدة ا س (ق ه ا ك ا) والمثلث ق ي ب يعدل المثلث
اى س وبقيّة الزوايا من الواحد تعديل بقية الزوايا من الآخر . يعني التي تقابلها
الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ق ي تعديل الزاوية ي س ا والزاوية ي س د اى
ق س د هي أكبر من ي س ا فهي ايضا أكبر من ب ق ي اوب ق س وعلى هذا
النسق اذا نُصِفَ ب س يبرهن ان الزاوية ب س غ اوق س د (ق ه ا ك ا)
هي أكبر من ق ب س

القضية السابعة عشرة . ن

زاويتان من مثلث هما معاً اصغر من قائمتين



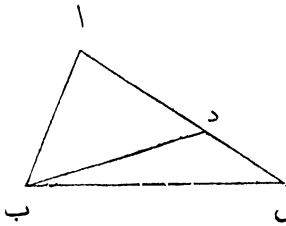
ليكن اب س مثلثا فزاويتان منه
معاً اصغر من قائمتين

اخرج ب س الى د فالزاوية
الخارجة اس د هي اكبر من الداخلة
اب س (ق ١٦ ك ١) اضع الى كل
واحدة منهما اس ب فالزاويتان اس د

اس ب معاً اكبر من اب س اس ب معاً ولكن اس د اس ب معاً تعذلان
قائمتين (ق ١٣ ك ١) واذا كانا فالزاويتان اب س اس ب معاً اصغر من قائمتين .
وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان اب س اس ب معاً و س اب اب س معاً اصغر
من قائمتين

القضية الثامنة عشرة . ن

الضلع الاطول من كل مثلث نقابله الزاوية الكبرى

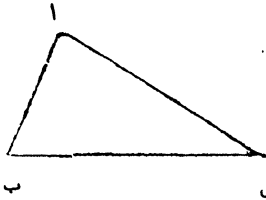


ليكن اب س مثلثا وليكن الضلع اس اطول
من الضلع اب فتكون الزاوية اب س اكبر
من الزاوية ب س ا

من اس اقطع ا د حتى يعدل اب (ق ٢) س
ك ١) وارسم ب د ففي المثلث ب د س الزاوية الخارجة ا د ب هي اكبر من الداخلة
د س ب ولكن ا د ب تعدل اب د (ق ٥ ك ١) فالزاوية ا د ب ايضاً اكبر من
د ب س وبالاخرى اب س اكبر من د س ب ا ي اس ب

القضية التاسعة عشرة . ن

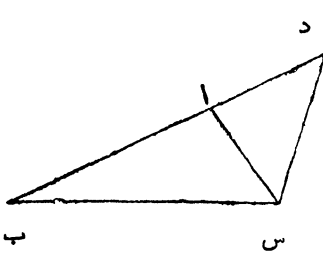
الزاوية الكبرى من كل مثلث يقابلها الضلع الاطول



ليكن ا ب س مثلثا ولتكن الزاوية ا ب س
أكبر من ا س ب فيكون الضلع ا س اطول من
ا ب والّا فالضلع ا س يعدل ا ب او هو اقصر
منه ولا يمكن ان يعدل ا ب لانه عند ذلك
كانت الزاويتان ا س ب ا ب س متساويتين (ق ٥ ك ا) وقد فرض ان ا ب س
أكبر من ا س ب ولو كان اقصر لكانت ا ب س اصغر من ا س ب (ق ٨ ك ا)
فبالضرورة يكون ا س اطول من ا ب

القضية العشرون . ن

ضلعان من مثلث هما معاً اطول من ضلعه الثالث



ليكن ا ب س مثلثا فضلعان منه معاً د
اطول من ضلعه الثالث . اي الضلعان
ب ا ا س معاً اطول من ب س و ا ب
ب س معاً اطول من ا س و ب س ا
معاً اطول من ا ب

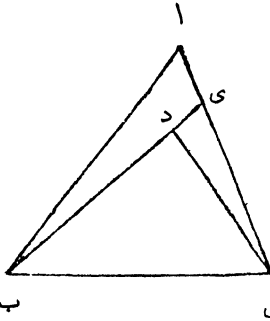
اخرج ب ا الى د واجعل ا د يعدل ا س (ق ٢ ك ا) وارسم د س فبا
ن ا د يعدل ا س فالزاوية ا د س تعدل ا س د (ق ٥ ك ا) و ب س د هي
أكبر من ا س د فهي ايضاً أكبر من ا د س فيكون الضلع ب د اطول من ب س
(ق ٩ ك ا) ولكن ب د يعدل ب ا مع ا س فالضلعان ب ا ا س معاً اطول من
ب س وهكذا في كل ضلعين من اضلاع المثلث

تعليقة . يبرهن ذلك بدون اخراج ضلع من المثلث لان ب س هو البعد
الاقرب بين النقطة ب والنقطة س فيكون ب س اقصر من ب ا ا س اي ب ا
ا س معاً اطول من ب س

القضية الحادية والعشرون . ن

اذا رُسِمَ من طرفي ضلع مثلث خطان مستقيمان الى نقطة داخل المثلث

فها اقصر من ضلعي المثلث الآخرين ولكن يحيطان بزاوية اكبر من
التي بين الآخرين

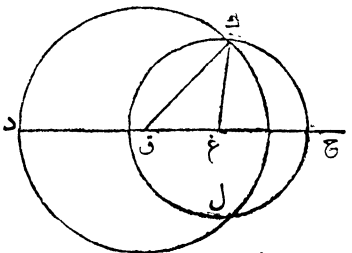


ليكن ا ب س مثلثاً. وليُرسَم من طرفي ب س
خطان الى النقطة د داخل المثلث مثل ب د
س د فها اقصر من ب ا ا س ولكن الزاوية
ب د س هي اكبر من ب ا س. اخرج ب د
الى ي. فالضلعان ب ا ا ي معاً المثلث ب ا ي
ها اطول من ب ي (ق ٢٠ ك ١) اضع

لها ي س فالضلعان ب ا ا س اطول من ب ي ي س وفي المثلث س ي د
الضلعان س ي ي د هما معاً اطول من س د. اضع لهما د ب فالضلعان س ي
ي ب معاً اطول من س د ب وقد تبرهن ان ب ا ا س هما معاً اطول من ب ي
ي س فبالاخرى ب ا ا س اطول من ب د د س ثم الزاوية الخارجة ب د س من
المثلث س د ي هي اكبر من الداخلة س د ي (ق ١٦ ك ١) ولذات هذا السبب
س ي د هي اكبر من ي ا ب ا و س ا ب وقد تبرهن ان س د ب هي اكبر من
س ي ب فبالاخرى هي اكبر من س ا ب

القضية الثانية والعشرون. ع

علينا ان نرسم مثلثاً اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة
وكل اثنين منها معاً اطول من الثالث



ليكون ا ب وس الخطوط المستقيمة
المفروضة كل اثنين منها معاً اطول من
الثالث. فعلياً ان نرسم مثلثاً اضلاعه
تعدل هذه الخطوط الثلاثة

خذ خطاً مستقيماً ينتهي في نقطة د
وغير محدود من جهة ي واقطع منه
د ق حتى يعدل ا (ق ٢٠ ك ١) وق غ حتى

ا —————
ب —————
س —————

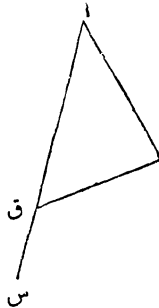
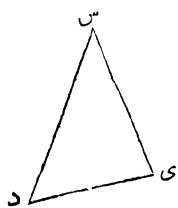
• يعدل ب و غ ح حتى يعدل س ثم اجعل ق مركزاً وق د بُعْداً (ثلاثة الممكنات)
وارسم دائرة د كل واجعل غ مركزاً و غ ح بُعْداً وارسم دائرة ك ح ل (ثلاثة الممكنات)
ومن ك اي نقطة تقاطع الدائرتين ارسم ك ق ك غ فالمثلث ق ك غ هو المطلوب
واضلاعهُ تعدل الخطوط الثلاثة المفروضة ا و ب و س . فقد جعلنا ق غ حتى يعدل
ب ومن حيث ان النقطة ق هي مركز الدائرة د كل فالخط ق ك يعدل ق د
(حدا ١) ولكن ق د يعدل ا فالخط ق ك يعدل ا ايضاً . ومن حيث ان النقطة
غ هي مركز الدائرة ك ح ل فالخط غ ح يعدل غ ك (حدا ١) ولكن غ ح يعدل
س ولذلك غ ك يعدل س ايضاً فقد رُسم مثلث اضلاعهُ تعدل ثلاثة خطوط
مستقيمة مفروضة

تعليقة لو كان احد الاضلاع اطول من مجنec الآخرين لما تقاطعت الدائرتان
والنضية صحيحة كل ما كان مجنec ضلعين اطول من الثالث

—xox—

القضية الثالثة والعشرون . ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم مفروض زاوية
مستقيمة بسيطة حتى تعدل زاوية اخرى مستقيمة بسيطة مفروضة

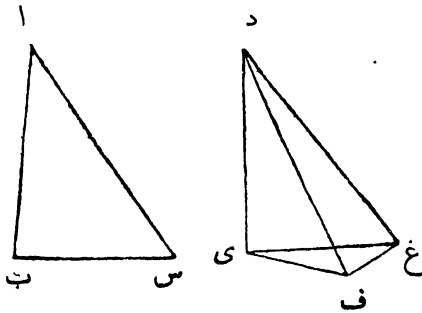


ليكن ا س الخط المستقيم المفروض
وا النقطة المفروضة منه ود سى الزاوية
البسيطة المفروضة فعلينا ان نرسم من
النقطة ا زاوية بسيطة تعدل د سى
في س د عيّن اية نقطة شئت مثل د . غ
كذلك عيّن سى في سى . ا رسم دى
وارسم المثلث ا ق غ حتى يعدل المثلث

س دى (ق ٢٢ ك ١) اي الضلع ا ق يعدل س د والضلع ا غ يعدل سى والضلع
ق غ يعدل دى فبما ان الضلعين ق ا غ يعدلان د س سى والفاعة ق غ
تعدل الفاعة دى فالزاوية ق ا غ تعدل الزاوية د سى (ق ٨ ك ١) وقد رُسمت
من النقطة ا في الخط المفروض ا س

القضية الرابعة والعشرون . ن

في مثلثين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين من الآخر وكانت الزاوية المحاذية بين ضلعي الاول اكبر من المحاذية بين ضلعي الآخر فالذي له الزاوية الكبرى له ايضا القاعدة الطولى

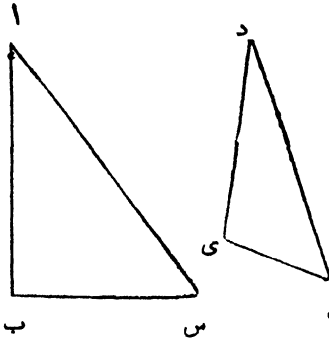


ليكن ا ب س د ي ف
مثلثين ولنفرض ان الضلع
ا ب يعدل د ي والضلع ا س
يعدل د ف ولكن الزاوية
ب ا س اكبر من ي د ف
فتكون القاعدة ب س اطول
من القاعدة ي ف

ليكن د ف اطول من د ي ومن النقطة د ارم الزاوية ي د غ حتى تعدل
ب ا س (ق ٢٣ ك ١) واجعل د غ يعدل ا س او د ف ارم ي غ ف غ
فن حيث ان ا ب يعدل د ي و ا س يعدل د غ والزاوية ب ا س تعدل
ي د غ فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي غ (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان د ف يعدل
د غ فالزاوية د ف غ تعدل د غ ف (ق ٥ ك ١) ولكن الزاوية د غ ف هي اكبر من
ي غ ف فتكون د ف غ ايضا اكبر من ي غ ف فكم بالاحرى تكون ي غ ف اكبر
من ي غ ف وفي المثلث ي غ ف فن حيث ان الزاوية ي غ ف هي اكبر من ي غ ف
فيكون الضلع ي غ اطول من ي ف (ق ١٩ ك ١) ولكن ي غ يعدل ب س
فالقاعدة ب س اطول من القاعدة ي ف

القضية الخامسة والعشرون . ن

اذا عدل ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر ولكن كانت قاعدة احدها
اطول من قاعدة الآخر فالزاوية الكبرى هي لذي القاعدة الطولى

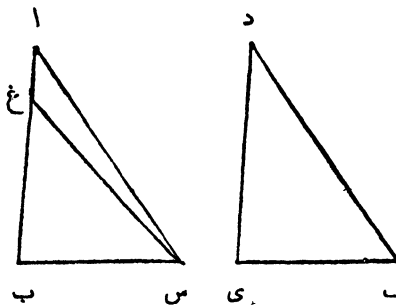


ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
ولنفرض ان ضلعين من الواحد ا ب
ا س عدلا ضلعين من الآخر د ي
د ف ولكن القاعدة ب س اطول من
القاعدة ي ف فتكون الزاوية ب ا س
اكبر من الزاوية ي د ف والا فاما ان

تعدلا او تكون اصغر منها فالزاوية ب ا س لا تعدل ي د ف لانه عند ذلك كانت
القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف (ق ٤ ك ١) وقد فرض ب س الاكبر ولا يمكن
ان تكون اصغر منها لانه عند ذلك كانت القاعدة ب س اصغر من ي ف (ق ٤ ٢
ك ١) وقد فرض ب س اكبر وقد تبين انها لا تعدلا فبالضرورة تكون الزاوية
ب ا س اكبر من الزاوية ي د ف

القضية السادسة والعشرون . ن

اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر ابي كل
واحدة عدلت نظيرها . وضع من الواحد عدل ضلعا من الآخر
ان كانا المتواليين للزاويا المتساوية او المتقابلين لها فالضلعان الآخران
من الواحد يعدلان الآخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد
تعدل الثالثة من الآخر



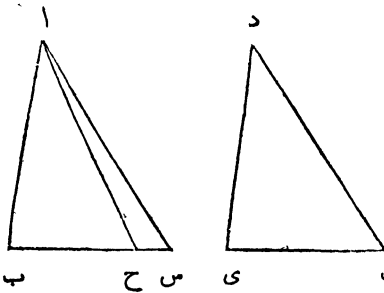
ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
والزاوية ا ب س فلتعدل د ي ف
والزاوية ب س ا فلتعدل ي ف د
والضلع ب س فليعدل ي ف وها
المتواليان للزاويا المتساوية
فالضلعان الآخران من الواحد

ا ب س يعدلان الآخرين من الآخر د ي د ف والزاوية الثالثة من الواحد

ب ا س تعدل الثالثة من الاخرى د ف

وان لم يكن ا ب و دى متساويين فبالضرورة يكون احدها اطول من الآخر
فلنفرض ا ب الاطول ولنصل منه ب غ حتى يعدل دى (ق ٢٢ ا) ولنرسم غ س
فمن حيث ان غ ب يعدل دى وب س يعدل دى ف فالضلعان غ ب ب س
يعدلان الضلعين دى دى ف كل واحد يعدل نظيره والزوايا غ ب س تعدل
دى ف فالقاعدة غ س تعدل القاعدة د ف (ق ٢٢ ك ا) والمثلث غ ب س يعدل
المثلث دى ف وبقيّة الزوايا من الواحد تعدل بقيّة الزوايا من الآخر كل واحدة
تعدل نظيرها اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزوايا غ ب س تعدل دى
وقد فرض ان دى ف تعدل ا س ب فالزوايا غ ب س ايضا تعدل ا س ب اي
الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ا ب و دى غير متساويين
ايها متساويان وب س يعدل دى ف فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين
دى دى ف والزوايا ا ب س تعدل دى ف فالقاعدة ا س تعدل القاعدة د ف
(ق ٢٢ ك ا) والزوايا ب ا س تعدل الزوايا دى د ف

ثم لنفرض مساواة الضلعين اللذين يقابلان الزوايا المتساوية في كلا المثلثين
يعني ان ا ب يعدل دى فعلى هذا المفروض ايضا لنا مساواة بقيّة الاضلاع يعني
ا س يعدل د ف وب س يعدل دى ف والزوايا الثالثة من الواحد ب ا س تعدل
الثالثة من الاخرى د ف



فان لم يكن ب س و دى ف
متساويين فليكن ب س اطولهما .
افصل منه ب ح حتى يعدل دى
ف (ق ٢٢ ا) وارسم ا ح فمن
حيث ان ب ح يعدل دى ف وا
ب يعدل دى ف فالضلعان ا ب

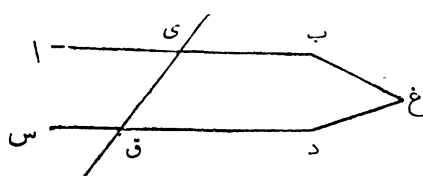
ب ح يعدلان المضلعين دى دى ف والزوايا ا ب ح تعدل دى ف فالقاعدة ا ح
تعدل القاعدة د ف (ق ٢٢ ك ا) والمثلث ا ب ح يعدل المثلث دى ف وبقيّة
الزوايا ايضا متساوية ايضا اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية فالزوايا ب ح ا تعدل
دى ف ولكن دى ف د تعدل ب س ا فالزوايا ب س ا تعدل ب ح ا اي الزوايا

المخارجة اح ب تعدل الداخلة المتقابلة اس ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١) فلا
يمكن ان يكون ب س وى ف غير متساويين ايها متساويان و ا ب يعدل دى
فالضلعان ا ب ب س يعدلان دى ف والزاوية ا ب س تعدل دى ف
فالقاعدة اس تعدل القاعدة د ف والزاوية الثالثة ب اس تعدل الثالثة دى د ف



القضية السابعة والعشرون . ن

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين آخرين مستقيمين وجعل الزاويتين
المبادلتين متساويتين فالخطان متوازيان



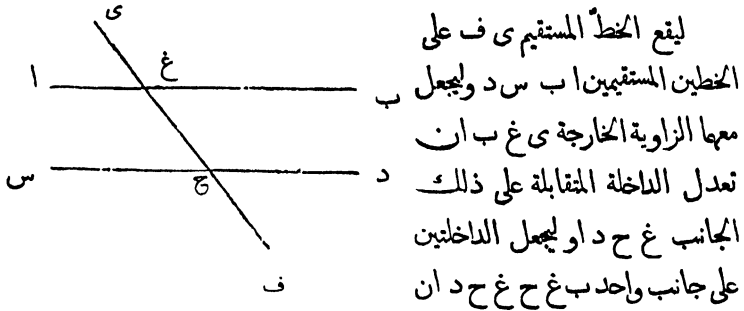
ليقع الخط المستقيم ق على
الخطين المستقيمين ا ب س د
وليجعل معها الزاويتين المبادلتين
اى قى د متساويتين فالخطان
ا ب س د متوازيان

والأفيلتيان اذا اخرجنا . فلنفرض التقاءها في النقطة غ فيكون غى ق مثلثا
وزاويته الخارجة اى ق تكون اكبر من الداخلة المتقابلة دى ق غ (ق ١٦ ك ١) وقد
فُرض مساويتها فلا تكون احداها اكبر من الاخرى فلا يلتقي ا ب وس د اذا اخرجنا
الى جهة ب ود وهكذا يبرهن انها لا يلتقيان اذا اخرجنا الى جهة ا وس فهما اذا
متوازيان (حد ٣٠)



القضية الثامنة والعشرون . ن

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين مستقيمين واحداث زاوية خارجة
تعدل الداخلة المتقابلة على جانب واحد منه او داخليتين على جانب
واحد منه تعدلان معا قائمتين فالخطان متوازيان

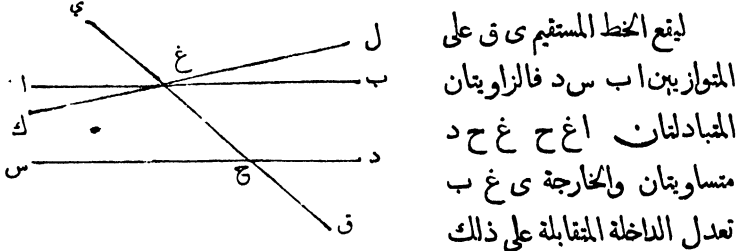


تعدلا قائمتين فالخطان AB و CD متوازيان. فمن حيث ان $\angle B$ تعدل $\angle G$ ح D
وتعدل ايضاً $\angle G$ ح $(ق ١٥ ك ١)$ فالزاوية $\angle G$ ح تعدل $\angle G$ ح D وهما متبادلتان
ولذلك $(ق ٢٧ ك ١)$ AB يوازي CD وايضاً من حيث ان $\angle B$ غ G ح D تعدلان
قائمتين حسب المفروض و $\angle G$ ح B غ G ح تعدلان قائمتين $(ق ١٢ ك ١)$ فالزاويتان
 $\angle G$ ح A غ G ح تعدلان $\angle G$ ح D اطرح المشتركة $\angle G$ ح فالباقية $\angle A$ غ
تعدل الباقية $\angle G$ ح D وهما متبادلتان. ولذلك AB و CD متوازيان
فرغ. اذا ان كان خطان مستقيمان عموديين على خط مستقيم ثالث فهما متوازيان



القضية التاسعة والعشرون

اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين متوازيين فالزاويتان
المتبادلتان المحادثتان متساويتان والزاوية الخارجة تعدل الداخلة
المتقابلة على جانب واحد والداخلتان على جانب واحد تعدلان قائمتين



الجانب $\angle G$ ح D والداخلتان على جانب واحد $\angle G$ ح D تعدلان قائمتين
فان لم تكن $\angle G$ ح D متساويتين فليبرسم الخط K غ حتى ان $\angle K$ غ ح تعدل
 $\angle G$ ح D واخرج K غ الى L فالخط KL يوازي CD $(ق ٢٧ ك ١)$ و AB ايضاً

بوزاي س د فقد رُسم خطان مستقيمان مارَّان بنقطة واحدة غ بوزايان س د من غير ان يتطابقا وذلك محال (اولية ١١) فلا تكون الزاويتان اغ ح غ ح د غير متساويتين اي هما متساويتان . والزاوية ي غ ب تعدل اغ ح (ق ١٥ ك ١) ولذلك ي غ ب ايضا تعدل غ ح د (اولية اولى) اصف اليها ب غ ح فالزاويتان ي غ ب ب غ ح تعدلان ب غ ح غ ح د ولكن ي غ ب ب غ ح تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) ولذلك ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين ايضا

فرع اول اذا جعل الخطان ك ل س د مع ي ق الزاويتين ك غ ح غ ح س معا صغر من قائمتين فالخطان ك غ ح س يلتقيان على ذلك الجانب من ي ق الذي فيه كانت الزاويتان اصغر من قائمتين

والا فهما متوازيان . او يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق ولكنها غير متوازيين . والا لكانت ك غ ح غ ح س معا تعدلان قائمتين ولا يلتقيان على الجانب الآخر من الخط ي ق والا لكانت ل غ ح غ ح د زاويتين من زوايا مثلث واصغر من قائمتين وذلك لا يمكن لان الاربع زوايا ك غ ح غ ح ل س ح غ ح د تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٢ ك ١) واثنان منها اي ك غ ح غ ح س ها بالمفروض اصغر من قائمتين فبالضرورة الاخرى ان ل غ ح غ ح د اكبر من قائمتين فمن حيث ان ك ل س د غير متوازيين ولا يلتقيان من جهة ل ود فبالضرورة يلتقيان اذا أُخرجا الى جهة ك وس

فرع ثانٍ اذا كانت ب غ ح قائمة تكون غ ح د ايضا قائمة فالخط العمودي على احد خطين متوازيين هو عمودي على الاخر ايضا

فرع ثالث من حيث ان اغ ي = ب غ ح ود ح ق = س ح غ تكون الاربع الزوايا الحادة اغ ي ب غ ح س ح غ د ح ق متساوية . وهكذا الاربع الزوايا المنفرجة ي غ ب اغ ح غ ح د س ح ق هي ايضا متساوية . واذا اُضيفت احدى الحادَّات الى احدى المنفرجات فالجميع يعدل قائمتين

تعليقة الزوايا المذكورة لها اسماء مختلفة باعتبار نسبة بعضها الى بعض فالزاويتان ب غ ح غ ح د ها الداخلتان على جانب واحد وكذلك اغ ح غ ح س . والزاويتان اغ ح غ ح د ها الداخلتان المتبادلتان او المتبادلتان فقط . وكذلك ب غ ح غ ح س . والزاويتان ي غ ب غ ح د ها الخارجة والداخلية وكذلك ي غ ا غ ح س

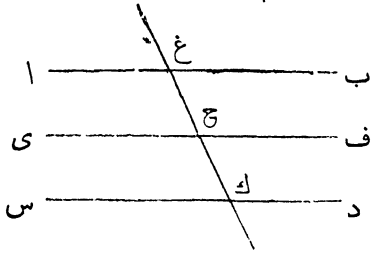
والزاويتان ي غ ب س ح ق هـا الخارجتان المتبادلتان وكذلك ا غ ي د ح ق

—xox—

القضية الثلاثون . ن

الخطوط المستقيمة المتوازية لخط واحد مستقيم هي متوازية بعضها لبعض

ليكن الخطان ا ب س د متوازيين
للخط ي ف فيها متوازيان ايضاً
ليقع على ا ب ي ف س د الخط
المستقيم غ ح ك فمن حيث ا ب ي ف
متوازيان فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية

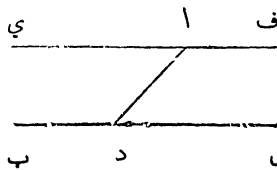


غ ح ف (ق ٢٦ ك ١) ومن حيث ن ي ف س د متوازيان فالزاوية غ ح ف
تعدل غ ك د (ق ٢٩ ك ١) وقد تبين ان ا غ ح تعدل غ ح ف فلذلك ا غ ح
تعدل غ ك د ايضاً وهما متبادلتان فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٧ ك ١)

—xox—

القضية الحادية والثلاثون . ع

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً يمر في نقطة مفروضة ويوازي خطاً مستقيماً
مفروضاً



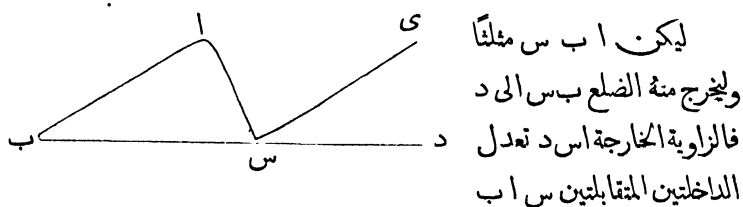
ليكن ا النقطة المفروضة وب س الخط
المستقيم المفروض . علينا ان نرسم خطاً مستقيماً
يوازي ب س ويمر بالنقطة ا

عين اية نقطة شئت في ب س كالنقطة د مثلاً . ارسم ا د وفي النقطة ا من
الخط ا د ارسم الزاوية د ا ي واجعلها ان تعدل الزاوية ا د س (ق ٢٢ ك ١)
واخرج ي ا الى ف

فمن حيث ان الخط المستقيم ا د يوازي الخطين المستقيمين ي ف ب س ويجعل
معها الزاويتين المتبادلتين ي ا د ا د س متساويتين فالخط ي ف يوازي ب س
(ق ٢٧ ك ١) وقد رُسم حتى يمر في النقطة ا المفروضة .

القضية الثانية والثلاثون . ن

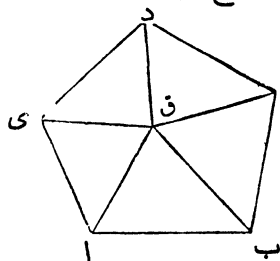
إذا أخرج ضلع من اضلاع مثلث فالزاوية الخارجة تعدل الداخلتين المتقابلتين . والزوايا الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين



ا ب س والزوايا الثلاث الداخلة ا ب س ا س ا ب معاً تعدل قائمتين من النقطة س ارسم الخط المستقيم س ي حتى يوازي ا ب (ق ٢١ ك ١) فمن حيث ان الخط ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س ي فالزاويتان المتبادلتان ا س ي ب ا س متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ب د يلاقي المتوازيين ا ب س ي فالزاوية الخارجة ي س د تعدل الداخلة المتقابلة ا ب س وقد تبرهن ان ا س ي تعدل ب ا س فكل الخارجة ا س د تعدل الداخلتين المتقابلتين ب ا س ا ب س . اضع الى هذه الزوايا الزاوية ا س ب فالزاويتان ا س د ا س ب تعدلان الثلاث الزوايا ا ب س ب ا س ا س ب ولكن ا س د ا س ب معاً تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزوايا الثلاث ا ب س ب ا س ا س ب ايضاً تعدل قائمتين

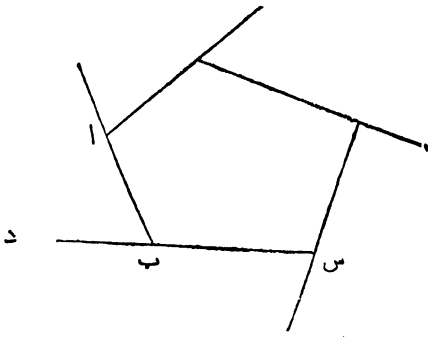
فرع اول جميع الزوايا الداخلة في كل شكل ذي اضلاع مستقيمة تعدل من

الزوايا القائمة ما يماثل مضاعف عدد اضلاع الشكل الا اربع زوايا قائمة لان كل شكل ذي اضلاع مستقيمة مثل



ا ب س د ي ينقسم الى مثلثات تماثل عدد اضلاعه برسم خط مستقيم من كل زاوية الى نقطة داخله مثل ق فحسب هذه القضية زوايا كل مثلث تعدل قائمتين فجميع زوايا جميع المثلثات تعدل

قائمتين في عدد اضلاع الشكل ولكن الزوايا عند ق تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٥ ك ١ فرع ٢) فزوايا الشكل تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل الا اربع زوايا قائمة



فرع ثانٍ مجموع الزوايا
الخارجية من كل شكل ذي
اضلاع مستقيمة يعدل اربع زوايا
قائمة . لان كل زاوية داخلية
ا ب س مع الخارجية المتوالية
ا ب د تعدل قائمتين (ق ٢ ك ١)
فجميع الداخلة مع جميع الخارجة

تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل والداخلة تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل
الاربعة قائمات حسب الفرع الاول فالخارجة تعدل اربع قائمات

فرع ثالث اذا فرضت زاويتان من زوايا مثلث او مجموعها فتستعمل الثالثة
بطرح المجموع من قائمتين

فرع رابع اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر فالثالثة من
الواحد تعدل الثالثة من الآخر والمثلثان متساويا الزوايا

فرع خامس لا يكون في مثلث اكثر من زاوية واحدة قائمة . لانه لو كانت
له قائمتان لكانت الثالثة لا شيء . وبالاخرى لا يكون لمثلث اكثر من زاوية واحدة
منفرجة

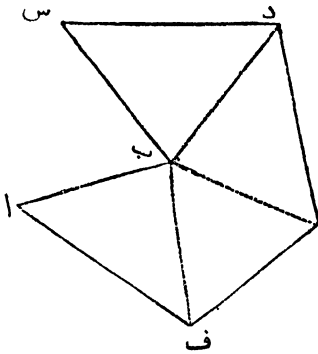
فرع سادس في كل مثلث قائم الزاوية مجموع الحادتين يعدل قائمة

فرع سابع من حيث ان كل مثلث متساوي الاضلاع هو متساوي الزوايا
ايضا (فرع ٥ ك ١) فكل زاوية من زواياه تعدل ثلث قائمتين او ثلثي قائمة

فرع ثامن مجموع زوايا ذي اربعة اضلاع يعدل قائمتين في ٤ - ٢ اي اربع
قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة قائمة وذلك يؤيد الحد الخامس
والعشرين والسادس والعشرين

فرع تاسع مجموع زوايا ذي خمسة اضلاع يعدل قائمتين في ٥ - ٢ اي ست
قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة خمس ست قائمات اي ٦ قائمة

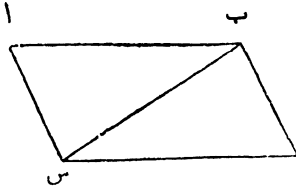
فرع عاشر مجموع زوايا ذي ستة اضلاع يعدل ٢ × (٦ - ٢) اي ثمان قائمات
فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة سدس ثمان قائمات اي ٨ قائمة



تعليقة متى استعمل الفرع الاول في اشكال كثيرة الاضلاع لها زوايا متداخلة مثل ا ب س فيجب ان تحسب كل متداخلة اكبر من قائمتين واذا رُسِمَ ب د ب ي ب ف ينقسم الشكل الى اربع مثلثات لها ثنائي ي قائمتان اي قائمتان في عدد الاضلاع الا اثنين

القضية الثالثة والثلاثون . ن

الخطان المستقيمان الموصولان بين اطراف خطين مستقيمين متوازيين متساويين هما متوازيان ومتساويان



ليكن ا ب وس د خطين مستقيمين متساويين متوازيين وليوصل بين اطرافهما بالخطين المستقيمين اس ب د فهذان الخطان ايضاً متوازيان ومتساويان

ارسم ب س فن حيث ان ب س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان ا ب س ب س د هما متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ا ب يعدل س د والخط ب س مشترك بين المثلثين ا ب س ب س د فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالقاعدة اس تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) وبقيت الزوايا من الواحد تعدل بقيت الزوايا من الاخر اي اس ب تعدل س ب د . ومن حيث ان الخط ب س يلاقي الخطين اس ب د ويجعل الزاويتين المتبادلتين اس ب س ب د متساويتين فالخطان اس ب د متوازيان (ق ٢٧ ك ١) وقد تبهرن انها متساويان فرع اول في كل شكل ذي اربعة اضلاع اذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين يكون الضلعان الاخران كذلك ويكون الشكل ذا اضلاع متوازية فرع ثان كل ذي اربعة اضلاع ضلعاه المتقابلان متساويان هو ذو اضلاع متوازية

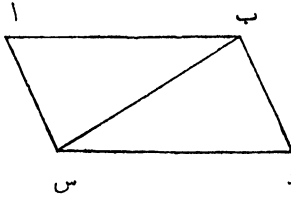
فرع ثالث في كل ذي اربعة اضلاع اذا كانت الزوايا المتقابلة متساوية .
تكون الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية

—x—

القضية الرابعة والثلاثون . ن

في شكل ذي اضلاع متوازية الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة هي متساوية . والقطر ينصفه اي يقسمه الى جزءين متساويين

ليكن ا ب د س متوازي الاضلاع وب س قطره فالاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة متساوية والقطر ب س ينصفه
فن حيث ان الخط ب س يلاقي الخطين
الموازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان
ا ب س ب س د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) د



وايضاً لان ب س يلاقي الموازيين ا ب س د فالمتبادلتان ا ب س ب س د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ففي المثلثين ا ب س ب س د زاويتان من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلع ب س مشترك بين المثلثين فالضلعان الاخران من الواحد يعدلان الضلعين الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل الثالثة من الآخر (ق ٢٦ ك ١) اي ا ب يعدل س د و ا س يعدل ب د والزاوية ا ب ا س تعدل س د ب ولان الزاوية ا ب س تعدل ب س د و ا س ب تعدل س ب د فكل الزاوية ا ب د تعدل كل الزاوية ا س د وقد تبهرن ان ا ب ا س تعدل ب د س فالزوايا المتقابلة والاضلاع المتقابلة من ذي اضلاع متوازية هي متساوية وايضاً القطر ينصفه لان ا ب يعدل س د وب س مشترك بين المثلثين والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالمتثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) وقد اتصف الشكل بالقطر

فرع اول خطان متوازيان بين خطين متوازيين متساويان

فرع ثان خطان متوازيان هما على بعد واحد بعضهما من بعض ابداً

فرع ثالث مجموع زاويتين متواليتين من ذي اضلاع متوازية يعدل قائمتين

—x—

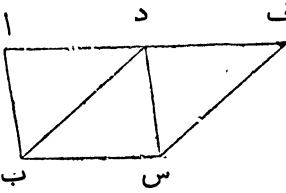
القضية الخامسة والثلاثون . ن

اشكال ذات اضلاع متوازية على قاعدة واحدة وبين خطين

متوازيين هي متساوية

انظر الشكل الثاني والثالث

ليكن ا ب س د وى ب س ف شكليين متوازيي الاضلاع على قاعدة واحدة



ب س و بين خطين متوازيين ا ب س ف

فالشكل ا ب س د يعدل الشكل

ى ب س ف . اذا انتهى الضلعان ا د ف

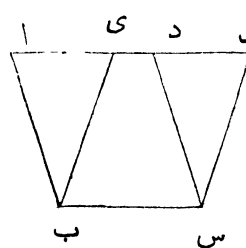
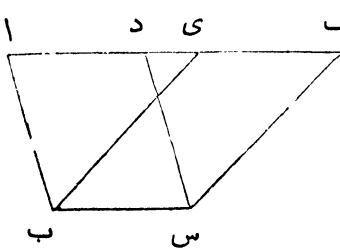
من الشكليين ا ب س د د ب س ف

المتقابلان للقاعدة ب س في نقطة واحدة د فالامر واضح ان كل واحد من الشكليين

انما هو مضاعف المثلث ب د س (ق ٢٤ ك ١) واذا ذاك فهما متعاويان وان لم يتو في

نقطة واحدة الضلعان ا د ى ف من الشكليين ا ب س د ى ب س ف المتقابلان

للقاعدة ب س



فثم من ف

حيث ان

ا ب س د

متوازي

الاضلاع

فالضلع ا د يعدل ب س (ق ٢٤ ك ١) ولهذا السبب ايضا ى ف يعدل ب س

ولذلك ا د يعدل ى ف (اولية اولى) و دى مشترك فالكل او البقية ا ى يعدل

الكل او البقية د ف (اولية ثانية وثالثة) و ا ب يعدل د س فالضلعان ى ا ا ب

يعدلان الضلعين ف د د س كل واحد يعدل نظيره والزوايا الخارجة ف د س

تعدل الداخلة المتقابلة ى ا ب (ق ٢٩ ك ١) فالقاعدة ى ب تعدل القاعدة ف س

والمثلث ى ا ب يعدل المثلث ف د س (ق ٤ ك ١) اطرح المثلث ف د س من

الشكل ا ب س ف واطرح منه ايضا ى ا ب فتكون البقايا متساوية (اولية ٢) ا ى

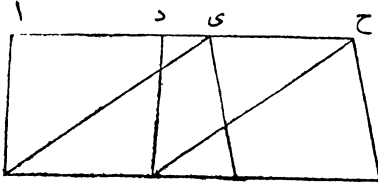
الشكل ا ب س د يعدل الشكل ى ب س ف

القضية السادسة والثلاثون .

اشكال ذات اضلاع متوازية على قواعد متساوية وبين خطين

متوازيين هي متساوية

ليكن ا ب س د وى ف غ ح شكليين متوازيي الاضلاع على قاعدتين



متساويتين ب س و ف غ و بين

خطين متوازيين ا ح و ب غ فهما

متساويان

ارسم بى و س ح ف ن غ

حيث ان ب س يعدل ف غ و ف غ يعدل ح (ق ٢٤ ك ١) فلذلك ح

يعدل ب س ايضاً وهما متوازيان وقد اُوصل بينهما الى جهة واحدة بالخطين بى

س ح والخطوط الموصلة بين خطين متوازيين متساويين الى جهة واحدة هي متوازية

ومتساوية (ق ٢٢ ك ١) فالخطان بى س ح متساويان متوازيان والشكل

بى ح س متوازي الاضلاع وهو يعدل الشكل ا ب س د (ق ٢٥ ك ١) لانها

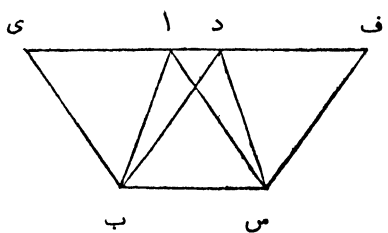
على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س ا ح ولهذا السبب ايضاً

الشكل حى ف غ ح يعدل بى س ح فالشكلان ا ب س دى ف غ ح متساويان

القضية السابعة والثلاثون .

مثلثات على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين هي متساوية

ليكن ا ب س د ب س مثلثين على قاعدة واحدة ب س وبين خطين



متوازيين ا د و ب س فهما متساويان

اخرج ا د الى الجهتين الى ف

وى ومن ب ا رسم بى حتى يوازي

ا س (ق ٢١ ك ١) ومن س ا رسم س ف

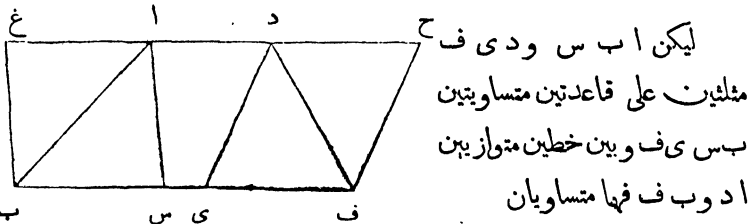
حتى يوازي ب د فكل واحد من الشكلين اى ب س د ب س ف متوازيين

الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٥ ك ١) لانها على قاعدة واحدة ب س وبين خطين

متوازيين ي ف و ب س والمثلث ا ب س هو نصف الشكل ا ي ب س لان
القطر ا ب ينصفه (ق ٢٤ ك ١) والمثلث د ب س هو نصف الشكل د ب س ف
لان القطر د س ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي متساوية بعضها لبعض (اولية ٧)
فالمثلث ا ب س يعدل المثلث د ب س

القضية الثامنة والثلاثون . ن

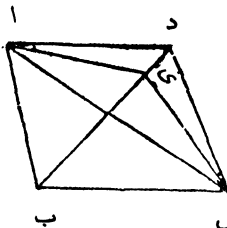
مثلثات على قواعد متساوية وبين خطين متساويين هي متساوية



اخرج ا د الى الجهتين الى ح و غ وارسم ب غ حتى يوازي ا س (ق ٢١ ك ١)
ومن ف ارسم ف ح حتى يوازي د ي فكل واحد من الشكلين ا غ ب س
د ي ف ح متوازي الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٦ ك ١) لانها على قاعدتين
متساويتين ب س ي ف وبين خطين متوازيين غ ح ب ف والمثلث ا ب س هو
نصف الشكل ا غ ب س (ق ٢٤ ك ١) لان القطر ا ب ينصفه ود ي ف هو نصف
الشكل د ي ف ح (ق ٢١ ك ١) لان القطر د ف ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي
متساوية (اولية ٧) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث د ي ف

القضية التاسعة والثلاثون . ن

مثلثات متساوية على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها هي بين
خطين متوازيين

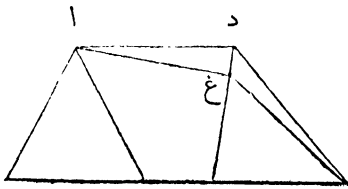


النقطة ا رسم اى حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) وارسم ى س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ى ب س (ق ٢٧ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س اى والمثلث ا ب س يعدل د ب س فالمثلث ى ب س يعدل د ب س اى الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ب س واى متوازيين وهكذا يبرهن في كل خط الا الخط ا د فهو يوازي ب س

—xox—

القضية الاربعون . ن

مثلثات متساوية على قواعد متساوية وعلى جانب واحد منها هي بين خطين متوازيين اذا كانت القواعد على استقامة واحدة
ليكن ا ب س دى ف مثلثين متساويين على قاعدتين متساويتين وعلى



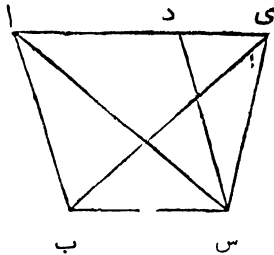
استقامة واحدة ب س ى ف وعلى جانب واحد منهما فهما بين خطين متوازيين

ارسم ا د فهو يوازي ب س ولا ف فارسم ا غ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) وارسم غ ف فالمثلث ا ب س يعدل المثلث غ ى ف (ق ٢٨ ك ١) لانهما على قاعدتين متساويتين ب س ى ف وبين خطين متوازيين ب س ا غ ولكن المثلث ا ب س يعدل المثلث دى ف فلذلك المثلث دى ف يعدل المثلث غ ى ف اى الاكبر يعدل الاصغر وذاك محال فالخط ا غ لا يوازي ب س وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ا د فهو يوازي ب س

—xox—

القضية الحادية والاربعون . ن

اذا كان شكل ذو اضلاع متوازية ومثلث على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل مضاعف المثلث
ليكن الشكل ذو الاضلاع المتوازية ا ب س د والمثلث ى ب س على قاعدة



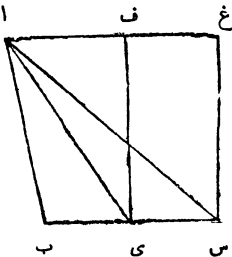
مواحدة ب س وبين خطين متوازيين اى ب س
فالشكل ا ب س د مضاعف المثلث اى ب س
ارسم اس فالمثلث ا ب س يعدل المثلث
اى ب س (ق ٢٧ ك ١) لانها على قاعدة واحدة
ب س وبين خطين متوازيين اى ب س ولكن
الشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث ا ب س (ق ٢٤ ك ١) لان القطر ا س
ينصفه فالشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث اى ب س ايضاً

—xox—

القضية الثانية والاربعون . ع

علينا ان نرسم شكلاً اذا اضلاع متوازية حتى يعدل مثلثاً مفروضاً
وزاوية من زواياه تعدل زاوية مستقيمة بسيطة مفروضة

ليكن ا ب س المثلث المفروض ود الزاوية البسيطة المفروضة علينا ان نرسم
شكلاً اذا اضلاع متوازية حتى يعدل المثلث
ا ب س وزاوية من زواياه تعدل



نصف ب س في اى (ق ١٠ ك ١)
ارسم اى ومن النقطة اى في الخط المستقيم
اى س اجعل الزاوية س اى ف تعدل

د (ق ٢٢ ك ١) ومن ا رسم اغ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن س ارسم
س غ حتى يوازي اى ف فالشكل س اى ف غ متوازي الاضلاع . فمن حيث ان
ب اى يعدل اى س فالمثلث ا ب اى يعدل المثلث اى س (ق ٢٨ ك ١) لانها على
قاعدتين متساويتين ب اى اى س وبين خطين متوازيين اغ ب س ولذلك
المثلث ا ب س هو مضاعف المثلث اى س والشكل ف اى س غ ايضاً مضاعف
المثلث اى س (ق ٤١ ك ١) لانها على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل
ف اى س غ يعدل المثلث ا ب س وله الزاوية س اى ف التي تعدل الزاوية المفروضة د
فرع . اذا كانت الزاوية د قائمة يكون الشكل ف اى س غ قائم الزوايا ويعدل
المثلث ا ب س فبذلك هذا العمل يصنع مثلث حتى يعدل شكلاً مفروضاً وزاياه قائمة

القضية الثالثة والاربعون . ن

الاجزاء الممتة لاشكال متوازية الاضلاع واقعة على جانبي قطر شكل

متوازي الاضلاع هي متساوية

ليكن ا ب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطره وى ح وغ ف شكلين متوازي الاضلاع على جانبي القطر اس وليكن

ب ك وك د الشكلين الآخرين المتبين لكل ف الشكل ا ب س د فالتم ب ك يعدل الممت ك د

فن حيث ان ا ب س د متوازي الاضلاع واس قطره فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ا د س (ق ٢٤ ك ١) ومن حيث ان اى ك ح متوازي الاضلاع فالمثلث اى ك

يعدل المثلث ا ح ك ولهذا السبب ايضاً المثلث ك غ س يعدل المثلث ك ف س فالمثلث اى ك مع ك غ س يعدل المثلث ا ح ك مع ك ف س والكل ا ب س

يعدل الكل ا د س فالبقية ب ك تعدل البقية ك د (اولية ٣)

—xox—

القضية الرابعة والاربعون . ع

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً متوازي الاضلاع حتى

يعدل مثلثاً مفروضاً وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس المثلث المفروض ود الزاوية المفروضة.

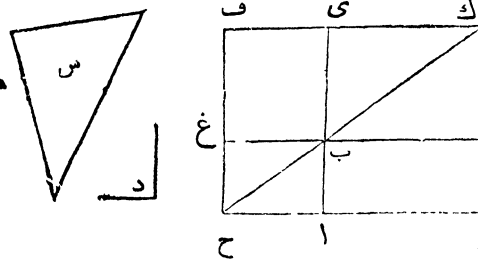
علينا ان نرسم على الخط ا ب شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل سى

وزاوية من زواياه تعدل د

ارسم الشكل المتوازي ل

الاضلاع بى ف غ حتى يعدل المثلث س (ق ٤٢ ك ١) واجعل الزاوية

بى غ منه تعدل الزاوية د واجعل ضلعه بى به والخط ا ب على استقامة

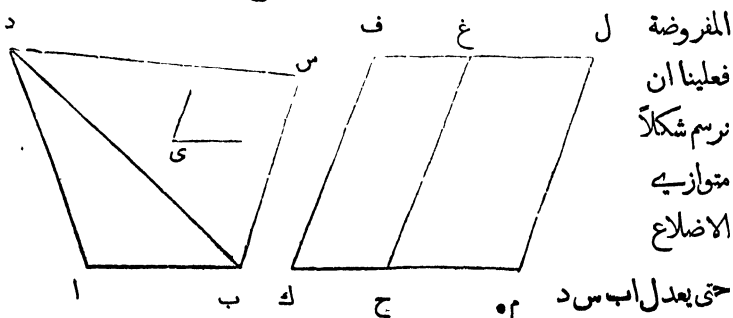


واحدة واخرج ف غ الى ح ومن ا ارم ح حتى يوازي ب غ اوى ف (ق ١ ك ١)
 وارسم ح ب. فن حيث ان الخط المستقيم ح ف يلاقي المتوازيين ح ا ف ي فالزاويتان
 ا ح ف ح ف ي معاً تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) فالزاويتان ب ح ف ح ف ي
 معاً اقل من قائمتين ولا بد من التواء ح ب وف ي اذا اخرجنا (ق ٢٩ ك ١)
 فرع ا) اخرجها حتى يلتقيا في ك ومن ك ارم ك ل حتى يوازي ي اوف ح واخرج
 ح ا الى ل واخرج غ ب الى م فالشكل ح ل ك ف متوازي الاضلاع وقطره ح ك
 والشكلان ا غ وم ي هما متوازي الاضلاع على جانبي الطرح ك . ول ب وب ف
 هما المثلثان فالتم ل ب يعدل المثلث ب ف (ق ٤٣ ك ١) ولكن ب ف يعدل المثلث
 س فالشكل ل ب يعدل المثلث س ايضاً والزاوية غ ب ي تعدل الزاوية ا ب م
 (ق ١٥ ك ١) ولكن ي ب غ تعدل الزاوية د فالزاوية ا ب م تعدل د ايضاً فالشكل
 ل ب قد رُسم على الخط المفروض ا ب حتى يعدل المثلث المفروض س والزاوية
 ا ب م منه تعدل الزاوية المفروضة د

فرع ٢. على هذا الاسلوب يقول مثلث الى شكل ذي زوايا قائمة مفروض طول
 ضلع من اضلاعه . لانه اذا كانت د قائمة و ا ب الضلع المفروض فالشكل ا ب م ل
 يكون ذا زوايا قائمة ويعدل المثلث المفروض س

القضية الخامسة والاربعون . ع

علينا ان نرسم شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل شكلاً مفروضاً ذا
 اضلاع مستقيمة وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة
 ليكن ا ب س د الشكل المفروض ذا اضلاع مستقيمة وى الزاوية البسيطة



وزاوية من زوايا تعدل الزاوية

ارسم د ب ثم ارسم الشكل المتوازي الاضلاع ف ح (ق ٤٢ ك ١) حتى يعدل
المثلث ا د ب واجعل الزاوية ح ك ف منه تعدل الزاوية ي وعلى الخط المستقيم غ ح
ارسم الشكل المتوازي الاضلاع غ م (ق ٤٤ ك ١) واجعله يعدل المثلث د ب س
والزاوية غ ح م تعدل الزاوية ي

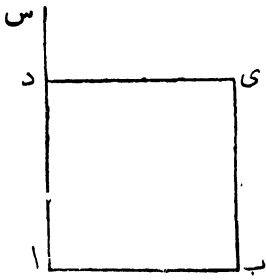
فمن حيث ان الزاوية ي تعدل الزاويتين ف ك ح غ ح م فالزاوية ف ك ح
تعدل غ ح م. اضع الى كل واحدة منها الزاوية غ ح ك فالزاويتان غ ح م غ ح ك
تعدلان الزاويتين ف ك ح غ ح ك ولكن ف ك ح ك ح غ معاً تعدلان قائمتين
(ق ٢٩ ك ١) فلذلك ك ح غ غ ح م تعدلان قائمتين فمن حيث ان الخط غ ح
يجعل مع ك ح م الزاويتين المتواليتين تعدلان قائمتين فالخطان ك ح ح م
هما على استقامة واحدة (١٤ ك ١) ومن حيث ان الخط المستقيم غ ح يلاقى
المتوازيين ك م ف غ فالزاويتان المتبادلتان م ح غ ح غ ف متساويتان (ق ٢٩ ك ١)
اضف الى كل واحدة منها الزاوية ح غ ل فالزاويتان م ح غ ح غ ل تعدلان
الزاويتين ح غ ف ح غ ل ولكن م ح غ ح غ ل تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١)
والذلك ح غ ف ح غ ل تعدلان قائمتين. فالخطان ف غ غ ل هما على استقامة
واحدة. ومن حيث ان ك ف بوازي ح غ و ح غ بوازي ل م فالخط ك ف بوازي
الخط ل م (ق ٣٠ ك ١) والخط ك م بوازي ل م فالشكل ك م ل ف متوازي
الاضلاع. والمثلث ا ب د يعدل الشكل ح ف والمثلث د ب س يعدل الشكل
غ م فالشكل ا ب س د يعدل الكل ك ف ل م. فقد رُسم شكل متوازي الاضلاع
ك م ل ف حتى يعدل الشكل المفروض ا ب س د والزاوية ف ك م منه تعدل الزاوية
المفروضة ي

فرع. على هذا الاسلوب يُبنى على خط مستقيم مفروض شكل متوازي الاضلاع
له زاوية تعدل زاوية مفروضة وهو يعدل شكلاً مفروضاً ذا اضلاع مستقيمة اي يبنى
اولاً على الخط المفروض شكلاً متوازي الاضلاع يعدل المثلث الاول ا ب د (ق ٤٤
ك ١) وزاوية من زوايا تعدل الزاوية المفروضة

القضية السادسة والاربعون . ع

علينا ان نرسم مربعاً على خط مستقيم مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض . علينا ان نرسم عليه مربعاً



من النقطة ا ارسم الخط اس عموداً على ا ب

(ق ١ ك ١) واقطع ا د حتى يعدل ا ب (ق ٢ ك ١)

ومن د ارسم د ي حتى يوازي ا ب (ق ٣ ك ١)

ومن ب ارسم ب ي حتى يوازي ا د فالشكل

ا د ي ب متوازي الاضلاع والخط ا ب يعدل

د ي والخط ا د يعدل ب ي (ق ٢ ك ١) ولكن

ا ب يعدل ا د فالخطوط الاربعة ا ب ا د د ي ب ي هي متساوية والشكل المتوازي

الاضلاع ا ب ي د هو متساوي الاضلاع ايضاً وزواياه قائمة لان ا د الذي يلاقي

المتوازيين د ي ا ب يجعل الزاويتين ب ا د ا د ي تعدلان قائمتين (ق ٢ ك ١)

وقد جعلت ب ا د قائمة فتكون ا د ي ايضاً قائمة وفي كل شكل ذي اضلاع متوازية

تكون الزوايا المتقابلة متساوية (ق ٤ ك ١) فالزاويتان ا ب ي ب ي د هما ايضاً

قائمتان فالشكل ذو زوايا قائمة وقد تبرهنتم مساواة الاضلاع وقد رُسم على الخط

المفروض ا ب

فرع . كل ذي متوازي الاضلاع له قائمة واحدة تكون جميع زواياه قائمات

القضية السابعة والاربعون . ن

في كل مثلث ذي قائمة مربع الوتر يعدل مربعي الساقين

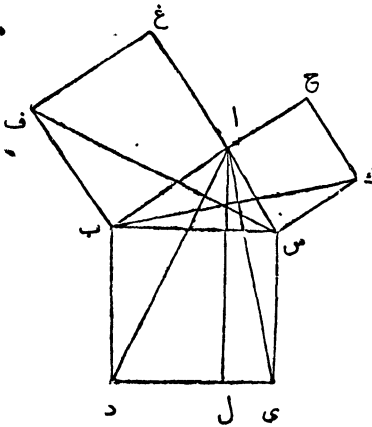
ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س فمربع الوتر ب س يعدل مربع ا ب مع

مربع ا س

ارسم على ب س المربع ب د ي س (ق ٦ ك ١) وعلى ب ا المربع ب غ وعلى

ا س المربع س ح ومن ا رسم ا ل حتى يوازي ب د ا و س ي (ق ٣ ك ١) ارسم ا د

و ف س . الزاوية ب ا س قائمة وب ا غ كذلك (حد ٢) فالخط المستقيم ب ا



يجعل من الخطين المستقيمين اس ا غ
الزاويتين المتوالتين ب ا س ب ا غ
تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة
واحدة (ق ١٤ ك ١) ولهما السبب
الخطان ب ا ا ح ايضاً على استقامة
واحدة. والزاوية د ب س تعدل الزاوية
ف ب ا لانهما قائمتان. اضع الى كل
واحدة ا ب س فكل الزاوية د ب ا تعدل

الكل ف ب س (اولية ٢) والضلعان ا ب ب د يعدلان الضلعين ف ب ب س كل
واحد يعدل نظيره. والزاوية ا ب د تعدل الزاوية ف ب س فالقاعدة ا د تعدل
القاعدة ف س (ق ١٤ ك ١) والمثلث ا ب د يعدل المثلث ف ب س. والشكل المتوازي
الاضلاع ب ل هو مضاعف المثلث ا ب د (ق ١٤ ك ١) لانها على قاعدة واحدة
ب د وبين خطين متوازيين ب د ا ل. والمربع ب غ هو مضاعف المثلث ف ب س
لانها على قاعدة واحدة ب ف وبين خطين متوازيين ب ف غ س والاشياء المضاعفة
اشياء متساوية هي متساوية (اولية ٦) فالشكل ب ل يعدل المربع ب غ. وهكذا اذا
رُسم ب ك و ا ي يبرهن ان الشكل س ل يعدل المربع ح س فكل المربع ب د س
يعدل المربعين ب غ و ح س

فرع اول. مربع ساق مثلث ذي قائمة يعدل مربع الوتر الا مربع الساق الآخر
اي $ا ب^2 = ب س^2 - ا س^2$

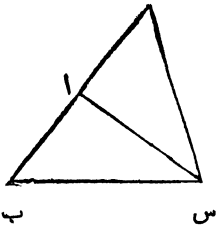
فرع ثان. اذا فرض $ا ب = ا س$ اي اذا كان ا ب س متساوي الساقين فلنا
 $ب س^2 = ا ب^2 + ب س^2 = ا ب^2 + ا ب^2 = ٢ ا ب^2$

فرع ثالث. في مثلثين قائمي الزاويتين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين
من الآخر فالضلع الثالث من الواحد يعدل الثالث من الآخر

القضية الثامنة والاربعون . ن

اذا عدل مربع ضلع مثلث مربعي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم الزاوية

ليكن ا ب س مثلثا ولنفرض ان مربع ب س يعدل مربعي ب ا س فتكون ب ا س قائمة



من ا ا رسم ا د عمودا على ا س (ق ١١ ك ١)

واجعل ا د يعدل ا ب وارسم د س

فن حيث ان د ا يعدل ا ب فمربع د ا يعدل

مربع ا ب اضعف الى كل واحد منها مربع ا س فمربع د ا

مع مربع ا س يعدل مربع ب ا مع مربع ا س ولكن مربع د س يعدل مربع د ا مع

مربع ا س (ق ١٧ ك ١) لان د ا س قائمة وحسب المفروض مربع ب س يعدل مربع

ب ا مع مربع ا س فمربع د س يعدل مربع ب س والضلع د س يعدل الضلع ب س

ولان د ا يعدل ا ب و ا س مشترك بين المثلثين د ا س ب ا س والقاعدة ب س

تعدل القاعدة د س فالزاوية د ا س تعدل الزاوية ب ا س (ق ١٨ ك ١) ود ا س

قائمة فتكون ب ا س قائمة ايضاً

—x—

مضافات الى الكتاب الاول

قضية ١٠ ن

الخط العمودي هو اقصر الخطوط التي يمكن رسمها من نقطة خارجة

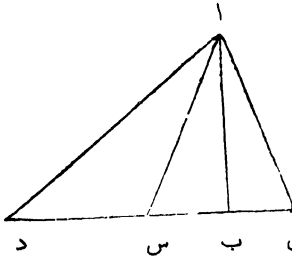
عن خط مفروض الى ذلك الخط وكل خطين مائلين واقعين على

جانبي العمود خارجين من نقطة واحدة وفاصلين جزئين متساويين

من الخط الذي يقعان عليه متساويان ومن كل خطين آخرين

مائلين فاصلين جزئين غير متساويين فابعدهما عن العمود اطولها

ليكن ا ب ا س ا د الى اخره الخطوط المرسومة من النقطة المفروضة ا الى



المخط المستقيم غير المحدود د ي وليكن ا ب
عموداً فهو اقصر من ا س و ا س اقصر من ا د
وهلم جراً . لأن الزاوية ا ب س قائمة فالزاوية
ا س ب حادة (ق ١٧ ك ١) واصغر من
ا ب س والزاوية الصغرى من كل مثلث

يقابلها الضلع الاقصر (ق ١٩ ك ١) فالضلع ا ب اقصر من الضلع ا س . ثم اذا كان
ب س و ب ي متساويين يكون المخطان المائلان ا س ا ي متساويين ايضاً . لأن
الزاوية ا ب س = ا ب ي والضلع ا ب مشترك بين المثلثين ا ب س ا ب ي
فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) والضلع ا س = ا ي . ولأن الزاوية ا س ب حادة
فالزاوية ا س د منفرجة لانها معاً تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) والزاوية ا د س حادة
لان ا ب د قائمة فالزاوية ا س د هي اكبر من ا د س فالضلع ا د اطول من الضلع
ا س (ق ١٩ ك ١)

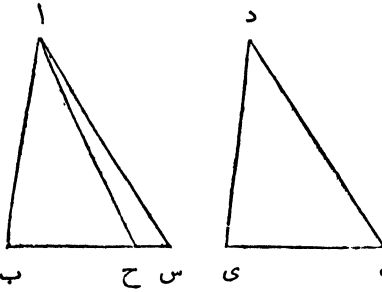
فرع اول . العمود هو قياس حقيقي للبعد بين نقطة وخط لانه البعد الاقرب
بينهما

فرع ثان . كل نقطة في عمود على نقطة اتصاف خط في على بعد واحد من
طرفي الخط

فرع ثالث . من نقط واحد لا يمكن رسم ثلاثة خطوط متساوية الى خط واحد
والا لكان خطان مائلان متساويان على جانب واحد من العمود وذاك لا يمكن

قضيه ب . ن

اذا عدل وتر مثلث قائم الزاوية وساق من ساقيه وتر مثلث آخر
قائم الزاوية وساقاً من ساقيه فالمثلثان متساويان
لنفرض الوتر ا س = د ف والضلع ا ب = د ي فالمثلث القائم الزاوية ا ب س



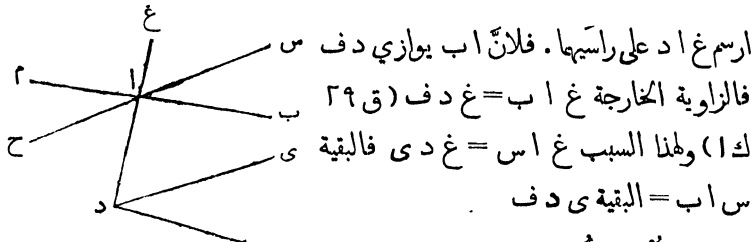
"= القائم الزاوية دى ف. فلو فرضت
مساواة الضلع الثالث منها لكانت
مساواة المثلثين ظاهرة. وان لم يكن
الضلعان الآخران متساويين فنخذ
جزءاً من ب س مثل ب ح
يعدل دى ف (ق ٢ ك ١) ارسم ا ح ف

فالمثلث ا ب ح = دى ف (ق ٢ ك ١) لأن ا ب = دى و ب ح = دى ف والزاوية
ا ب ح = دى ف لانها قائمتان فلذلك ا ح = د ف ولكن قد فرض ان ا س =
د ف فالنتيجة ان ا ح = ا س ولكن حسب القضية الماضية الأبعد عن العمود هو
أطول من الأقرب اليه فلا يمكن ان ا ح = ا س ولا يمكن ان ب س لا يعدل دى ف
فالمثلثان ا ب س دى ف متساويان

قضية ج. ن

اذا كان ضلعاً زاويةً موازيين ضلعي زاوية اخرى وكان انفراجهما الى
جهة واحدة فالزاويتان متساويتان

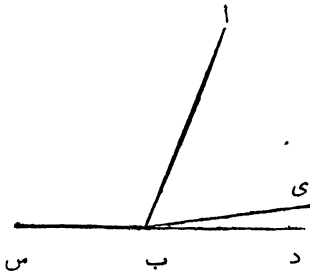
لنفرض ان ا ب يوازي د ف و ا س يوازي دى فالزاوية س ا ب = دى ف.



ارسم غ ا د على راسيها. فلان ا ب يوازي د ف
فالزاوية الخارجة غ ا ب = غ د ف (ق ٢ ك ١)
ولهذا السبب غ ا س = غ دى ف البقية
س ا ب = البقية دى ف
فرع. اذا اخرج ب ا الى م و س الى ح ف
فلنا ب ا س = ح ا م و ا ذاك فالزاوية ح ا م = دى ف ايضاً
تعليقة. يلزم حصر القضية بشرط انفراج الخطين الى جهة واحدة لان في
الزاوية س ا م س ا يوازي دى و ا م يوازي د ف ولكن الزاويتان غير متساويتين
وس ا م و دى ف تعدلان قائمتين

قضيه د. ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وعلينا ان نجد الثالثة



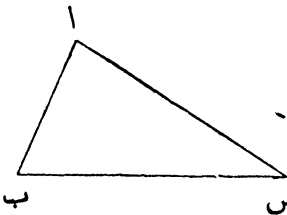
ارسم خطاً مستقيماً مثل س د وفي نقطة
منه مثل ب اجعل الزاوية س ب ا
تعدل واحدة من الزاويتين المفروضتين
والزاوية ا ب ي تعدل الاخرى فالباقية
س ب د تعدل الثالثة لان هذه الثلاث
الزوايا تعدل قائمتين (فرع ق ١٢ ك ا)

قضيه ه. ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وضع من اضلاعه فعلينا ان نرسم
المثلث

الزاويتان المفروضتان تكونان المتواليتين لضع المفروض او تكون احدهما
متوالية له والاخرى متقابلة له . ففي الحالة الثانية استعمل الثالثة حسب الفضية الماضية
فتكون هي الاخرى المتوالية

ثم ارسم الخط المستقيم س ب حتى يعدل الضلع المفروض وعند ب اجعل
الزاوية س ب ا تعدل احدى المتواليتين
وعند س اجعل الزاوية ب س ا تعدل
الاخرى المتوالية فالخطان ب ا ب س
يتقاطعان ويحدث من ذلك المثلث المفروض

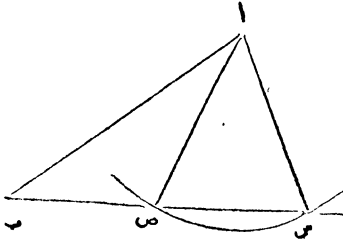


لانه لو كانا متوازيين لكانت الزاويتان عند ب وس تعدلان معاً قائمتين ولم تكونا
زوايا مثلث فبالضرورة يكون ا ب س المثلث المطلوب

قضية و.ع

مفروض ضلعان من اضلاع مثلث وزاويةً مقابلة لاجدهما فعلينا ان
نرسم المثلث

لهذه العمدة حالتان احدهما متى كانت الزاوية المفروضة منفرجة . اجعل الزاوية



ب ص ا تعدل المفروضة ثم اجعل
ص ا يعدل الضلع الذي يوالي الزاوية
المفروضة فلو جعلت النقطة ا مركزاً
والضلع الاخر اي اب بعداً ورسم قوس
لنقطعت ب س على جانبي ص فلا يمكن

ان يرسم اكثر من مثلث واحد ذي زاوية منفرجة على هذه الكيفية وهو المثلث
ب ص ا

ولو كانت المفروضة قائمة لرسم مثلثان لكن كان الوتران يقطعان ب س على
بعد واحد على جانبي العمود فكان المثلثان متساويين

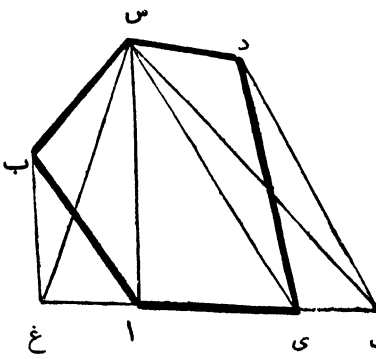
الحالة الثانية متى كانت الزاوية المفروضة حادة والضلع المتقابل اطول من
المتوالي فالعمل فيها كما تقدم . اجعل ب س ا تعدل المفروضة واس يعدل الضلع
المتوالي ثم اجعل ا مركزاً والضلع الآخر طولاً فاذا كان طول ا ب فالقوس تقطع
ب س في ب . ارسم ا ب فيكون ب ا س المثلث المطلوب واذا كانت المفروضة
حادة والضلع المتقابل اقصر من الآخر فاجعل ب س ا تعدل المفروضة واجعل
ب ا يعدل الضلع المفروض المتوالي ثم اجعل ا مركزاً واس بعداً فالقوس تقطع
ب س في س و ص على جانب واحد من ب فيحدث مثلثان ب ا ص ب ا س
وكل واحد منهما مستوفٍ شروط العمل

تعليقة . في هذه الحالة الاخيرة لو كان طول الضلع الاقصر طول العمود من ا
الى ب س لحدث مثلث قائم الزاوية . ولو كان ذلك الضلع اقصر من العمود من ا
على ب س لكانت المسئلة غير ممكنة في كل الاحوال

قضية ز. ع

علينا ان نجد مثلثا يعدل شكلاً مفروضاً ذا اضلاعٍ مستقيمة

ليكن ا ب س دى الشكل المفروض . ارسم النطر س ي الذي يفصل



الشكل المثلث س دى . ارسم د ف

حتى يوازي س ي واخرج اى الى ف

ثم ارسم س ف فالشكل ا ب س دى

يعدل الشكل ا ب س ف لأن المثلثين

س دى س دى س ف ي هما على قاعدة

واحدة س ي وبين خطين متوازيين

س ي د ف فهما متساويان (ق ٢٧ ك ١) ف

ثم ارسم النطر س ا وارسم ب غ حتى يوازي س ا واخرج اى الى غ وارسم س غ

فالشكل ا ب س دى قد تحوّل الى مثلث يعدله غ س ف

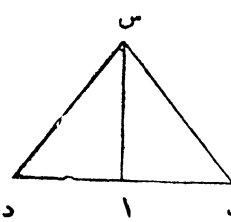
فرع . من حيث ان المثلث يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

فبالضرورة كل ذي اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله



قضية ح. ع

علينا ان نستعلم ضلع مربع يعدل مجموع مربعين



ارسم خطين غير محدودين مثل ا ب ا س احدها

عمودي على الاخر . ثم اقطع ا ب حتى يعدل ضلعاً من

احد المربعين المفروضين واس الاخر . ارسم ب س

فلان ب ا س قائمة فمربع ب س = مربع ب ا مع مربع

ا س (ق ٤٧ ك ١)

تعليقة . هكذا برسم مربع يعدل مجموع اى مربعات فرضت وذلك بتحويل

ثلاثة منها الى اثنين واثنين الى واحد وهلم جرا

قضيه ط . ع

علينا ان نجد ضلع مربع يعدل فضلة مربعين مفروضين
ارسم كما في القضية السابقة اس ا د احدها عموداً على الاخر واجعل اس
يعدل ضلع اصغر المربعين ثم اجعل س مركزاً وضلع المربع الاخر بعداً وارسم قوساً
تقطع ا د في د فالربع المرسوم على ا د يعدل فضلة مربعي س د واس لان د اس
قائمة واد = س د - اس (ق ٤٧ ك ا فرع اول)

قضيه ي . ع

مفروض شكل ذو زوايا قائمة وعلينا ان نرسم آخر مثله لث ضلع
مفروض

ليكن اى ق ح الشكل المفروض . اخرج ضلعاً من اضلاعه مثل ا ح حتى
يصير ح ب على الطول المفروض . اخرج اى
وارسم ب ق واخرجه حتى يلاقي اى في د ثم
اخرج اى ق واجعل ق غ يعدل ح ب وارسم
ب غ س وج ق ك حتى يوازي ا د ومن د ك
ارسم د ك س حتى يوازي ا ب او اى غ
فالشكل غ ق ك س يعدل ا ح ق اى (ق ٤٣ س
ك ا) وله ق غ الضلع المفروض

فرع ٢ . شكل ذو اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله
وله ضلع مفروض

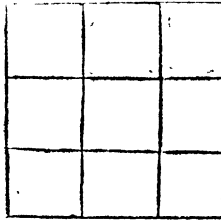
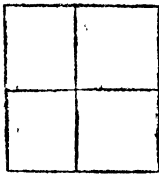
اصول الهندسة

الكتاب الثاني

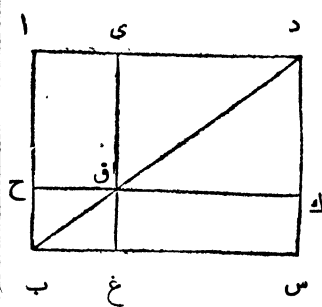
محدود

١ كل شكل متوازي الاضلاع قائم الزوايا يُعبر عنه بالضلعتين المحيطين
باحدى قائمائه فالشكل اس المتوازي الاضلاع القائم الزوايا يسمى القائم الزوايا
الذي يحيط به اود دس او ا د و ب وهكذا الى اخره ولجل الاختصار يقال
القائم الزوايا ا د في دس او ا د $\times$ دس او ا د . دس

حاصل خطين او مسطحهما في اصطلاح الهندسة هو القائم الزوايا المصطنع منها
مع ما يوازيهما . وقد تستعمل هذه
العبارة ايضا في علم الحساب وعلم
الجبر والمقابلة حيث يدل على
حاصل كيتين غير متماثلتين . واذا
كانتا متماثلتين فمسطحهما مربع اي



كبيرة في ذاتها . فمربعات الاعداد ٢ ٢ الى آخره هي ١ ٤ الى اخره والمربع
المرسوم على مضاعف خط هو اربعة امثال المربع المرسوم على الخط ذاته . والمرسوم
على ثلاثة امثال خط هو تسعة امثال المرسوم على الخط ذاته



٢ شكل من الاشكال الواقعة على
جانبى القطر في كل شكل متوازي الاضلاع
مع المتبين يسمى علم فالشكل ح غ مع المتبين
ا ق س هو علم الشكل اس وكذلك
ى ك مع ا ق و س . ولجل الاختصار
يسمى الاول العلم ا غ ك او ى ح س

القضية الاولى . ن

اذا فرض خطان مستقيمان وانقسم احدهما الى اقسام متعددة فالقائم
الزوايا مسطحها يعدل مجموع القوائم الزوايا مسطحات الخط غير

المقسوم في اقسام المقسوم

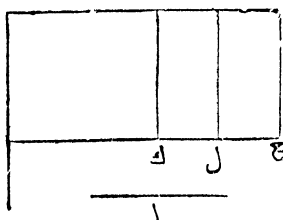
ليكن ب س خطاً مستقيماً وا خطاً آخر مستقيماً وليقسم ب س الى اقسام في د

ب

د

س

س



وي فالقائم الزوايا $\times$ ب س يعدل القوائم س س س

الزوايا $\times$ ب د مع $\times$ د س مع $\times$ س س

من النقطة ب ارسم الخط ب ف عموداً

على ب س (ق ١١ ك ١) واقطع منه ب غ

حتى يعدل ا (ق ٢ ك ١) ومن غ ارسم غ ح

حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن النقطة

الثلاث د س س ارسم المخطوط د ك س ح حتى يوازي ب غ فالاشكال

ب ح ب ك د ل س ح هي قوائم الزوايا وب ح = ب ك + د ل + س ح

لكن ب ح = ب غ $\times$ ب س = $\times$ ب س لان ب غ = ا وب ك = ب غ $\times$ ب س

ب د = $\times$ ب د لان ب غ = ا ود ل = د ك $\times$ د س = $\times$ د س لان د ك =

ب غ = ا (ق ٢٤ ك ١) وهكذا ايضاً س ح = $\times$ س س فاذا $\times$ ب س = $\times$ ب د

+ $\times$ د س + $\times$ س س اي القائم الزوايا او المسطح $\times$ ب س يعدل مجموع

القوائم الزوايا $\times$ ب د + $\times$ د س + $\times$ س س

تعليقة . خصائص اقسام المخطوط المبرهنة في هذا الكتاب تستعمل ايضاً بسهولة

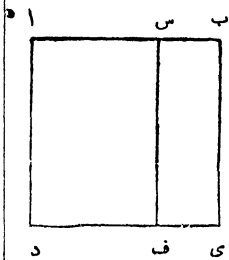
من علم الجبر والمقابلة . ففي هذه القضية اذا فرضنا اقسام الخط ب س ب وس ود

فلنا $\times$ (ب + س + د) = ا ب + ا س + ا د

القضية الثانية . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فالقائم الزوايا مسطحها كل الخط في

كل واحد من قسميه يعدلان معاً مربع كل الخط



ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم
الزوايا اب $\times$ ب س مع القائم الزوايا اب $\times$ اس
يعدلان مربع اب اي اب $\times$ ب س + اب $\times$ اس = اب^٢
ارسم على اب المربع ا د ي ب (ق ٤٦ ك ١) ومن
س ارسم س ف حتى يوازي ا د او ب ي (ق ٢١ ك ١)

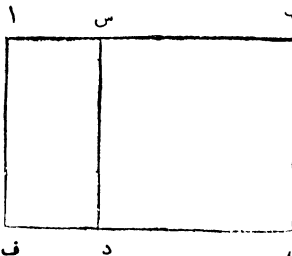
فلنا ف + س ي = ا ي ولكن ا ف = ا د $\times$ اس = اب $\times$ اس لان ا د = اب
والشكل س ي = ب ي $\times$ ب س = اب $\times$ ب س واي = اب^٢ فاذا اب $\times$
اس + اب $\times$ ب س = اب^٢

تعليقة . وهكذا بالجبر . فلنفرض اب = ا واس = ب وس ب = د فلنا ا =
ب + د اضرب جانبي المعادلة في ا فلنا ا^٢ = اب + ا د



القضية الثالثة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فالقائم الزوايا مسطح كل الخط في
احد قسميه يعدل القائم الزوايا مسطح القسمين مع مربع القسم المذكور
ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم الزوايا اب $\times$ ب س يعدل



القائم الزوايا اس $\times$ ب س مع مربع ب س

ارسم على ب س المربع س د ي ب
(ق ٤٦ ك ١) واخرج ي د الى ف ومن ا

ارسم ا ف حتى يوازي س د او ب ي (ق ٢١ ك ١)

ك ١) فالشكل ا ي = ا د + س ي ولكن س ي

ا ي = اب $\times$ ب ي = اب $\times$ ب س لان ب ي = ب س واد = اس $\times$ س د =

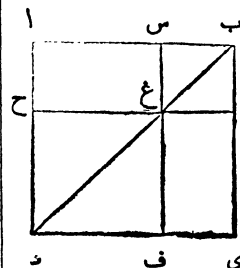
اس $\times$ س ب وس ي = ب س^٢ فاذا اب $\times$ ب س = اس $\times$ س ب + ب س^٢

تعليقة . وهكذا بالجبر . فلنفرض اب = ا واس = ب وس ب = س فلنا

ا = ب + س اضرب الجانبيين في س فلنا اس = س ب + س^٢

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين فربع الخط كله يعدل مربعي القسمين
مع مضاعف القائم الزوايا مسطح القسمين

ارسم على ا ب المربع ا د ي ب (ق ٤٦ ك ١) وارسم ب د ومن س ارسم س غ
 ف حتى يوازي ا د ا و ب ي (ق ٢١ ك ١) ومن غ ارسم
 ح ك حتى يوازي ا ب ا و د ي



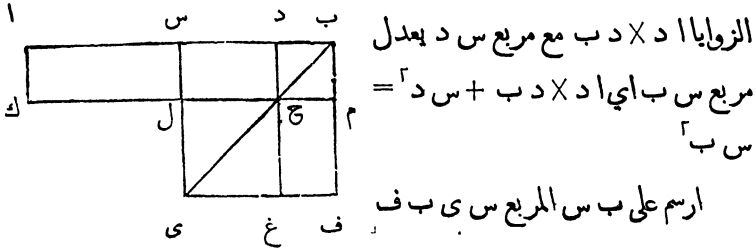
فرع. يتضح من هذه القضية ان الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر
مربع هي ايضاً مربعات .

تعليقة. هذه القضية تبرهن ايضاً من مربع كمية ثنائية في الجبر فاذا فرض القسمان
 اوب (١ + ب) $=^2 = 1^2 + 2 + ب^2$

—•••—

القضية الخامسة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير
 متماثلين فالقائم الزوايا مسطح القسمين غير المتماثلين مع مربع القسم
 الواقع بين نقطتي الانقسام يعدل مربع نصف الخط
 ليُقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فالقائم



(ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر ب س ومن د ارسم د ح غ (ق ٢١ ك ١) حتى يوازي س ي
 اوب ف ومن ح ارسم كل م حتى يوازي س ب اوى ف ومن ا ارسم ا ك حتى يوازي
 س ل اوب م

فن حيث ان س ح = ح ف فاذا اضيف الى كل واحد منها د م لنا س م =
 د ف ولكن ا ل = س م (ق ٢٦ ك ١) فاذا ا ل = د ف. اضف الى كل واحد منها
 س ح فلنا ا ح = العلم س م غ. واح = ا د × د ح = ا د × د ب لان د ح = د ب
 (فرع ق ٤ ك ٢) فالعلم س م غ = ا د × د ب. اضف الى كل واحد منها ل غ =
 س د فالعلم س م غ + ل غ = ا د × د ب + س د ولكن س م غ + ل غ = ب س ^{2}
 فاذا ا د × د ب + س د = ب س ^{2}

فرع يتضح من هذه القضية ان فضلة مربعي خطين غير متماثلين ا س د
 يعدل القائم الزوايا مسطح مجتمعا في فضلتها اي ان ا س - س د = (ا س + س د)
 × (ا س - س د)

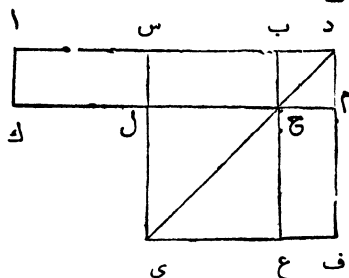
تعليقة. في هذه القضية لنفرض ا س = ا وس د = ب فلنا ا د = ا + ب و د ب

$= ١ - ب$ وبالجبر $(١ + ب) \times (ب - ١) = ١ - ب$ اي مسطح مجنec كبتين في فضلتهما يعدل فضلة مربعهما

القضية السادسة . ن

اذا تنصّف خطّ مستقيم ثم اخرج على استقامته الى نقطة ما فالقائم الزوايا مسطح الخط كله بعد اخراجه في الجزء الذي قد زيد عليه مع مربع نصف الخط الذي قد تنصف يعدل مربع الخط المركب من النصف والجزء المزيّد

ليُقسّم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س ثم يُخرج الى د فالقائم الزوايا ا د $\times$ د ب مع مربع س ب يعدل مربع س د



ارسم على س د المربع س ي ف د

(ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر د ي ومن

ب ارسم ب ح غ (ق ٢١ ك ١) حتى

يوازي د ف او س ي ومن ح ارسم

ك ل م حتى يوازي ا د او ي ف ومن

ا ارسم ا ك حتى يوازي س ل او د م . فمن حيث ان اس = س ب فالقائم الزوايا

ا ل = القائم الزوايا س ح (ق ٢٦ ك ١) ولكن س ح = ح ف (ق ٤٢ ك ١) فاذا

ا ل = ح ف أضف الى كل واحد منها س م فالكل ا م = العلم س م غ و ام =

ا د $\times$ د م = ا د $\times$ د ب لان د م = د ب فالعلم س م غ = القائم الزوايا ا د $\times$ د ب

وس م غ + ل غ = ا د $\times$ د ب + س ب + وس م غ + ل غ = س ف = س د

فاذا ا د $\times$ د ب + س ب = س د

تعليقة وهكذا بالجبر . لنفرض ا ب = ١٢ و ب د = ب فلنا ا د = ١٢ + ب

وس د = ١ + ب وبالصرب ب $\times$ (١٢ + ب) = ١٢ + ب + ب . أضف الى

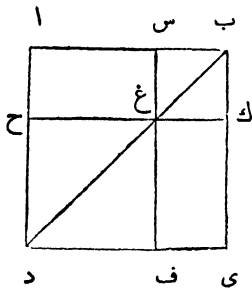
الجانبيين ا فلنا ب $\times$ (١٢ + ب) + ١ = ١ + ١٢ + ب + ب اي ب $\times$ (١٢ + ب)

+ ١ = (١ + ب)

القضية السابعة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فمربع كل الخط مع مربع احدا القسمين
يعادل مضاعف القائم الزوايا مسطح الخط كله في ذلك القسم مع مربع
القسم الآخر

لْيُقسَم الخط المستقيم ا ب الى قسمين في س فمربع ا ب مع مربع ب س يعادل
مضاعف القائم الزوايا ا ب $\times$ ب س مع مربع ا س اي ا ب^٢ + ب س^٢ = ا ب^٢ $\times$ ب س + ا س^٢



ارسم على ا ب المربع ا د ي ب (ق ٤٦ ك ١)
ونمّ الشكل كما في القضايا السابقة . فمن حيث ان
ا غ = غ ي فالكل ا غ + س ك = غ ي + س ك
اي ا ك = س ي وا ك + س ي = س ي + ا ك
+ س ي = العلم ا ك ف + س ك فانّا ا ك ف
+ س ك = ا ك^٢ = ا ب^٢ $\times$ ب ك = ا ب^٢ $\times$ ي

ب س لان ب ك = ب س (فرع ق ٤٦ ك ٢) فمن حيث ان ا ك ف + س ك = ا ب^٢ = ا ب^٢ $\times$ ب س فالكل ا ك ف + س ك + ح ف = ا ب^٢ $\times$ ب س + ح ف وا ك ف +
ح ف = ا ي = ا ب^٢ فانّا ا ب^٢ + س ك = ا ب^٢ $\times$ ب س + ح ف اي (حيث
ان س ك = ب س و ح ف = ا س) ا ب^٢ + س ب^٢ = ا ب^٢ $\times$ ب س + ا س^٢
فرعٌ فانّا مجموع مربعي خطين يعادل مضاعف القائم الزوايا مسطح الخطين
مربع فضلة الخطين

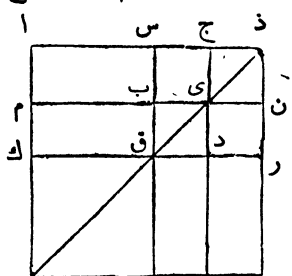
تعليقة في هذه القضية لنفرض ا ب = ا و ا س = ب و ب س = س فلنا
ا^٢ = ب^٢ + ا ب^٢ س + س^٢ اُضف س^٢ الى كل جانب فلنا
ا^٢ + س^٢ = ب^٢ + ا ب^٢ س + س^٢ + س^٢ اي ا^٢ + س^٢ = ب^٢ + ا ب^٢ س + س^٢ (ب + س)
اي ا^٢ + س^٢ = ا س^٢ + ب^٢

فرعٌ . يتضح من هذه القضية ان المربع المرسوم على فضلة خطين يعادل مجموع
المربعين المرسومين على الخطين الا مضاعف القائم الزوايا مسطح الخطين . لان ا -
س = ب وبالترقية ا^٢ - ا س^٢ = ب^٢

الفضية الثامنة . ن

إذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح كل
الخط في احد القسمين مع مربع القسم الآخر يعدل مربع الخط المركب
من الكل مع القسم الاول

لنقسم الخط المستقيم اج الى قسمين في س فاربعة امثال القائم الزوايا اج X
ج س مع مربع اس يعدل مربع الخط المركب
من اج مع ج س



اخرج اج الى ذ واجعل ج ذ يعدل
ج س وعلى ا ذ ارسم المربع ات ف ذ وارسم
شكلين مثل ما في الفضية السالفة . فمن حيث

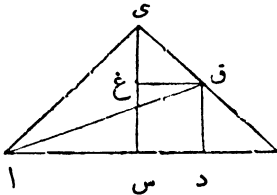
ان ب ي = س ج (ق ٤٢ ك ١) وس ج = ج ذ
وج ذ = ن ي فلذلك ب ي = ن ي ولهذا السبب ايضا ق د = د ر ولان س ج =
ج ذ وب ي = ن ي فالقائم الزوايا س ي وج ن متساويان وكذلك ايضا ب د =
ي ر ولكن س ي = ي ر (ق ٤٢ ك ١) لانها متماثل الشكل س ر فاذا ج ن = ب د
والقائمات الزوايا الاربعة س ي ج ن ي ر ب د متساوية وهي معا = س ي
وابضا لان س ج = ج ذ وج ذ = ج ي (فرع ق ٤٢ ك ٢) اوس ب ولان س ج =
ب ي اوب ق فلذلك س ب = ب ق ولان س ب = ب ق وق د = د ر فالقائم
الزوايا اب = م ق وق ل = د ف ولكن م ق = ق ل (ق ٤٢ ك ١) لانها متماثل
فاذا اب = د ف فالاربعة اب م ق ق ل د ف متساوية وهي معا تعدل ا ب
وقد تبرهن ان س ي ب د ج ن ي ر معا = س ي فباضافة اشياء متساوية
الى اشياء متساوية يكون كل العلم ارح = ا ي و ا ي = اج X ج ي = اج X ج س
و ا ي = اج X ج س فالعلم ارح = اج X ج س . اضف الى الجانين ك ح
اواس (فرع ق ٤٢ ك ١) فالعلم ارح + ك ح = اج X ج س + اس ولكن
ارح + ك ح = اف = ا ذ فاذا ا ذ = اج X ج س + اس
فرع اول من حيث ان ا ذ هو مجموع الخطين اج ج س واس فضلها

فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح خطين مع مربع فضلتهما يعدل مربع مجموع الخطين
 فرع ثانٍ . بما انه قد تبرهن من هذه القضية ان مربع س ذ هو اربعة امثال
 مربع س ج يتضح ان مربع خط هو اربعة امثال مربع نصفه
 تعلية . لنفرض ا ج = ا و س = س و س ج = ب و ا ذ = س + ٢ ب و ا =
 ب + س . اضرب الجانين في ٤ ب فلما ٤ ا ب = ٤ ب + ٤ ب س أضف س
 الى الجانين فلما ٤ ا ب + س = ٤ ب س + ٤ ب اي ٤ ا ب + س =
 (س + ٢ ب)

—xox—

القضية التاسعة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير
 متماثلين فمربعاً القسمين غير المتماثلين معاً يعدلان مضاعف مربع
 نصف الخط مع مضاعف مربع الجزء الواقع بين نقطتي الانقسام
 يُقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فربعا
 ا د ب معاً يعدلان مضاعف مربع



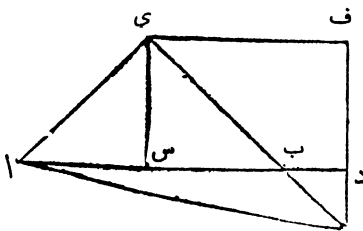
من س ارسم س ي (ق ا ك ا)

عموداً على ا ب واجعل س ي يعدل ا س
 او س ب . ارسم ا ي و ب و من د ارسم د ق (ق ا ك ا) حتى يوازي س ي
 ومن ق ارسم ق غ حتى يوازي ا ب وارسم ا ق . فمن حيث ان ا س يعدل س ي
 فالزاوية ي ا س تعدل الزاوية ا ي س (ق ه ك ا) وهما معاً قائمة لان ا س ي
 قائمة (فرع ٤ ق ٢٢ ك ا) ولها السبب ايضاً كل واحد من الزاويتين س ي ب
 س ب ي نصف قائمة . فلكل ا ي ب قائمة . ومن حيث ان غ ي ق نصف قائمة
 وي غ ق قائمة لانها تعدل اللاحظة المتقابلة ي س ب ق ٢٩ ك ا فالباقية ي ق غ
 تعدل نصف قائمة . فالزاوية غ ي ق تعدل ي ق غ والضلع ي غ يعدل الضلع
 غ ق ٦ ك ا وايضاً لان الزاوية عند ب هي نصف قائمة وق د ب قائمة لانها تعدل

بالاخلة المتتابة ي س ب (ق ٢٩ ك ١) فالباقية د ق ب هي نصف قائمة . فالزاوية
عند ب تعدل الزاوية د ق ب والضلع ق د يعدل الضلع د ب (ق ٦ ك ١) ولأن
ا س = س ي ا س = س ي ا س + س ي = ا س ٢ ولكن (ق ٤٧ ك ١)
اي = ا س + س ي فاذا ا ي = ا س ٢ وايضاً لان ي غ = غ ق ي غ = غ ق
وي غ + غ ق = غ ق ٢ ولكن ي ق = ي غ + غ ق فاذا ي ق = غ ق ٢
٢ س د لان س د = غ ق (ق ٢٤ ك ١) وقد نبرهن ان ا ي = ا س ٢ فاذا ا ي
+ ي ق = ا س ٢ + س د ٢ ولكن (ق ٤٧ ك ١) ا ق = ا ي + ي ق وا د +
د ق = ا ق اي ا د + د ب = ا ق فاذا ا د + د ب = ا س ٢ + س د ٢
تعليقة . هذه القضية واضحة من الجبر اذا فرضنا ا س = اوس د = ب وا
ب = ا د وا - ب = د ب فلنا (ا + ب) + (١ - ب) = ٢ ا س ٢ + س د ٢

القضية العاشرة . ن

اذا تنصّف خطٌ مستقيمٌ ثم أُخْرِجَ الى نقطةٍ ما فربع كل الخط بعد
اخرجه ومربع الجزء الذي قد زيد اليه هما معاً مضاعف مربع نصف
الخط الذي قد تنصّف مع مربع الخط المركب من النصف والجزء المزيّد
ليتنصف الخط المستقيم اب في س ولخرج الى النقطة د فربعا ا د د ب هما معاً



مضاعف مربعي ا س د

من س ارم س ي عموداً على

اب (ق ١١ ك ١) واجعل س ي

يعدل ا س اوس ب ارم ا ي و ي ب

ومن ي ارم ي ف (ق ٢١ ك ١) غ

حتى يوازي اب ومن د ارم د ف حتى يوازي ي س . فلأن ي ف يلاقي المتوازيين
ي س ف د فالزاويتان س ي ف ي ف د هما معاً قائمتان (ق ٢٩ ك ١) فتكون
ب ي ف ي ف د معاً اقل من قائمتين ولا بد من التقاء ي ب و ف د اذا اخرجنا
(ق ٢٦ ك ١) لنفرض التقاءهما في غ وارسم اغ فلأن ا س = س ي فالزاوية س ي ا

= س ا س (ق ١٥ ك ١) واس ي قائمة فكل واحدة من س ا ي س ي ا هي نصف قائمة (ق ١٢ ك ١ فرع ٤) ولهذا السبب كل واحدة من س ي ب س ب ي ايضاً نصف قائمة فتكون ا ي ب قائمة . ومن حيث ان ي ب س نصف قائمة فالزاوية د ب غ ايضاً نصف قائمة (ق ١٥ ك ١) لانها متقابلتان وب د غ قائمة لانها تعدل المتبادلة د س ي (ق ١٢ ك ١) فالباقية د غ ب نصف قائمة وتعدل د ب غ فالضلع ب د يعدل الضلع د غ (ق ١٦ ك ١) ومن حيث ان ي غ ف نصف قائمة والزاوية عند ف قائمة لانها تعدل المتقابلة ي س د (ق ١٤ ك ١) فالباقية ف ي غ نصف قائمة وتعدل ي غ ف فالضلع ف ي يعدل الضلع غ ف (ق ١٦ ك ١) ولان ي س يعدل س ا ي س = س ا و ي س = س ا = ٢ س ا و ا ي = ٢ س ا + س ي (ق ١٤ ك ١) فاذا ا ي = ١٢ س ا ولان ي ف = غ ف ي ف = ف غ و ي ف = ف غ ف غ = ٢ ف غ = ٢ ف = ٢ ف ي غ (ق ١٤ ك ١) و ي ف = س د فاذا ا ي غ = ٢ س د وقد تبهرن ان ا ي = ١٢ س ا فاذا ا ي + ي غ = ١٢ س ا + ٢ س د واغ = ا ي + ي غ (ق ١٤ ك ١) فاذا اغ = ١٢ س ا + ٢ س د واغ = ا د + د غ (ق ١٤ ك ١) = ا د + د ب فاذا ا د + د ب = ١٢ س ا + ٢ س د

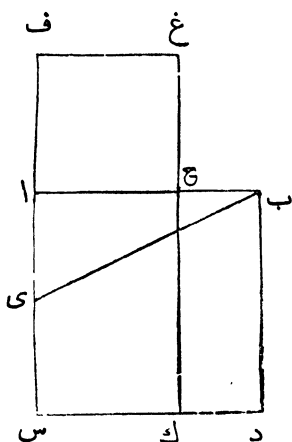
تعليقة. اذا فرضنا ان اس = اوب د = ب واد = ١٢ ب و س د = ا + ب فلنا (١٢ ب) + ب = ١٤ + ا + ب = ١٤ ب ولكن ١٤ + ا ب + ٢ ب = ١٢ + (١ ب) ٢ فاذا (١٢ ب) = ١٢ + (١ ب) ٢



القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً مفروضاً الى قسمين حتى يعدل القائم الزوايا مسطح الكل في احد القسمين مربع القسم الآخر

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلينا ان نقسمه الى قسمين حتى يعدل القائم الزوايا مسطح ا ب في احد قسميه مربع القسم الآخر . ارسم على ا ب المربع ا ب د س (ق ١٦ ك ١) ونصف اس في ي (ق ١٠ ك ١) ارسم ب ي واخرج س ا الى ف واجعل ي ف حتى يعدل ي ب (ق ١٢ ك ١) وعلى ا ف ارسم المربع ف غ ح ا



(ق ٤٦ ك ١) ففند انقسم ا ب في ح حتى يعدل
 القائم الزوايا ا ب $\times$ ح مربع ا ح
 أخرج غ ح الى ك. فمن حيث ان ا س
 قد تنصف في ي ثم أخرج الى ف فالقائم الزوايا
 س ف $\times$ ف ا مع مربع ا ي يعدل مربع ي ف
 (ق ٦ ك ٢) ولكن ي ف يعدل ي ب فالقائم
 الزوايا س ف $\times$ ف ا مع مربع ا ي يعدل
 مربع ي ب ولكن مربع ي ب يعدل مربع
 ب ا مع مربع ا ي (ق ٤٧ ك ١) لأن ب ا ي

قائمة فالقائم الزوايا س ف $\times$ ف ا مع مربع ا ي يعدل مربع ب ا مع مربع ا ي. اطرح
 المشترك مربع ا ي فالباقي القائم الزوايا س ف $\times$ ف ا يعدل مربع ا ب وس ف $\times$ ف ا
 يعدل الشكل ف ك لأن ف ا = ف غ و ا د يعدل مربع ا ب فالشكل ف ك يعدل
 ا د اطرح الجزء المشترك ا ك فالباقي ف ح يعدل الباقي ح د ولكن ح د = ا ب $\times$
 ب ح لأن ا ب = ب د و ف ح هو مربع ا ح فالقائم الزوايا ا ب $\times$ ب ح يعدل مربع
 ا ح ففند انقسم ا ب الى قسمين في ح والناائم الزوايا ا ب $\times$ ب ح يعدل مربع ا ح

القضية الثانية عشرة . ن

في كل مثلث ذي زاوية منفرجة اذا رُسم عمود من احدى الحادتين
 على الضلع المقابل بعد اخراجه فمربع الضلع الذي يقابل المنفرجة
 هو اكبر من مربعي المحيطين بالمنفرجة بمضاعف القائم الزوايا مسطح
 الضلع الذي وقع عليه العمود في الجزء المزيدي الواقع بين المنفرجة
 والعمود

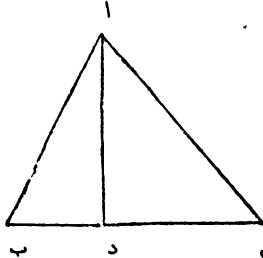
ليكن ا ب س مثلثا ذا زاوية منفرجة ا س ب وليقع عمود من ا اي ا د على

ب س بعد اخراجه الى د (ق ١٢ ك ١) فربع
 اب هو اكبر من مربعي اس وس ب بمضاعف
 القائم الزوايا ب س X س د
 فن حيث ان ب د قد انقسم الى قسمين
 في س فلنا (ق ٢ ك ٢) ب د = ب س + س د + د س
 ٢ ب س X س د اضعف الى الجانبيين فلنا ب د + د = ب س + س د + د س +
 ١ د + ٢ ب س X س د ولكن اب = ب د + د ا (ق ٤٧ ك ١) و اس = س د +
 ١ د فاذا اب = ب س + اس + ٢ ب س X س د اي اب هو اكبر من ب س
 + اس بمسطح ٢ ب س X س د

القضية الثالثة عشرة. ن

في كل مثلث مربع الضلع المقابل احدى الزوايا الحادة هو اصغر من
 مربعي الضلعين المحيطين بها بمضاعف القائم الزوايا مسطح احد
 هذين الضلعين في الجزء منه الواقع بين الزاوية الحادة وعمود عليه
 من الزاوية المقابلة

ليكن اب س مثلثا وتكن الزاوية عند ب احدى زواياه الحادة وليقع على
 الضلع ب س منه عمود ا د من الزاوية المقابلة
 (ق ١٢ ك ١) فربع الضلع اس الذي يقابل
 الزاوية عند ب هو اصغر من مربعي س ب
 ب ا بمضاعف القائم الزوايا ب س X ب د



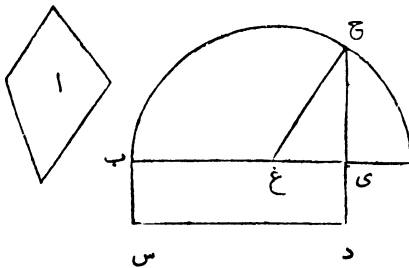
اولا يقع العمود ا د داخل المثلث اب س
 فلان الخط المستقيم س ب قد انقسم في د فلنا (ق ٧ ك ٢) ب س + ب د = د س
 ٢ ب س X ب د + س د اضعف الى الجانبيين ا د فلنا ب س + ب د + د = د س +
 ٢ ب س X ب د + س د + د ولكن ب د + د = اب و س د + د = اس
 اس (ق ٤٧ ك ١) فاذا ب س + اس = اب = ٢ ب س X ب د + د + د + د + د هو

اصغر من ب س + ا ب بمسطح ٢ ب س X ب د
 ثانياً ليقع العمود ا د خارج المثلث ا ب س (انظر شكل القضية السابقة) فمن
 حيث ان الزاوية عند د هي قائمة فالزاوية ا س ب هي اكبر من قائمة (ق ١٦ ك ١)
 و ا ب = (ق ٢ ك ٢) ا س + ب س + ٢ ب س X س د اضعف الى المجانبين ب س
 فلنا ا ب + ب س = ا س + ٢ ب س + ٢ ب س X س د ومن حيث ان الخط
 ب د قد انقسم في س فلنا (ق ٢ ك ٢) ب س + ب س X س د = ب س X ب د
 و ٢ ب س + ٢ ب س X س د = ٢ ب س X ب د فان ا ب + ب س = ا س
 + ٢ ب س X ب د و ا س هو اصغر من ا ب + ب س بمسطح ٢ ب د X ب س
 ثالثاً ليكن الضلع ا س عموداً على ب س فيكون ب س
 الجزء بين العمود والزاوية الحادة عند ب والامر واضح (ق ٤٧
 ك ١) ان ا ب + ب س = ا س + ٢ ب س X ب د
 ٢ ب س X ب س



القضية الرابعة عشرة . ع

علينا ان نرسم مربعاً يعدل شكلاً مفروضاً اذا اضلاع مستقيمة
 ليكن الشكل المفروض . علينا ان نرسم مربعاً يعدل الشكل ا . ارسم شكلاً ذا



زوايا قائمة ب ي د س واجعله
 يعدل ا (ق ٤٥ ك ١) فان كان
 ضلعه ب ي د متساويين
 فهو المربع المطلوب والا فخرج
 ب ي الى ف واجعل ي ف
 يعدل ي د ونصف ب ف في

غ ومن المركز غ وعلى البعد غ ف او غ ب ارسم دائرة ب ح ف واخرج د ي الى
 ح وارسم ح غ فلان الخط المستقيم ب ف قد انقسم الى قسمين متساويين في غ وغير
 متساويين في ي ف فالتائم الزوايا ب ي خ ي ف مع مربع ي غ يعدل مربع غ ف

(ق ٢ ك ٢) و غ ف يعدل غ ح فالقائم الزوايا ب ي خ ي ف مع مربع ي غ يعدل
مربع غ ح ومربع غ ح يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا
ب ي خ ي ف مع مربع غ ي يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ اطرح المشترك مربع
ي غ فالباقي القائم الزوايا ب ي خ ي ف يعدل مربع ح ي وب د يعدل ب ي خ
ي ف لان ي د = ي ف فالشكل ب د يعدل مربع ح ي وب د يعدل الشكل ا
فمربع ح ي يعدل الشكل ا فاذا رُسم على ح ي مربع فهو يعدل الشكل ا المثلث

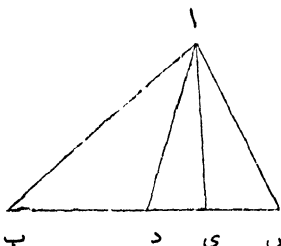
—oo—

مضافات

قضية ا. ن

اذا تنصّف ضلع من اضلاع مثلث فمجموع مربعي الضلعين الآخرين
يعدل مضاعف مربع نصف الضلع المنتصف مع مضاعف مربع الخط
المرسوم من نقطة الانتصاف الى الزاوية المقابلة

ليكن ا ب س مثلثاً ولينصف الضلع ب س منه في د وارسم دا الى الزاوية
المقابلة فمجموع مربعي ب ا ا س يعدل مضاعف
مربعي ب د دا



من ا ارسم اى عموداً على ب س فن حيث

ان ب ي افائمة اب (ق ٤٧ ك ١) = ب ي +

ي ا واس = س ي + ي ا وب + اس = س ي د ب

ب ي + س ي + ا ي ومن حيث ان الخط المستقيم ب س قد انقسم الى قسمين

متساويين في د وغير متساويين في ي فلنا (ق ٩ ك ٢) ب ي + س ي = ٢ ب د +

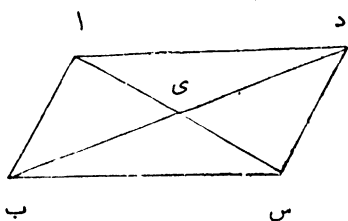
+ ٢ د ي فاذا اب + اس = ٢ ب د + ٢ د ي + ا ي . ولكن د ي + ا ي =

ا د (ق ٤٧ ك ١) و ا د ي + ا ي = ا ي ١٢ فاذا اب + اس = ٢ ب د + ا ي ١٢ د

قضيه ب . ن

في كل شكل ذي اضلاع متوازية مجتمع مربعي القطرين يعدل مجموع
مربعات الاضلاع

ليكن ا ب س د شكلاً متوازي الاضلاع فمجموع مربعي القطرين ا س ب د
يعدل مجموع مربعات الاضلاع ا ب
ب س س د د ا



لكن النقطة ي موضع تقاطع
القطرين. فمن حيث ان الزاويتين

المتقابلتين ا ي د س ي ب هما متساويتان ايضاً (ق ٥ ك ١) والمتبادلتان ي ا د
ي س ب متساويتان ايضاً (ق ٢٩ ك ١) فلنا في المثلثين ا د ي س ي ب زاويتان
من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلعان اللذان يقابلان الزاويتين المتساويتين
متساويان اي ا د و ب س (ق ٢٤ ك ١) فالضلعان الآخران متساويان (ق ٢٦ ك ١)
اي ا ي = ي س و ي د = ي ب

فمن حيث ان ب د قد تنصف في ي لنا (ق ١ ك ٢) ا ب + ا د = ب ي
٢ + ا ي وهكذا ايضاً د س + س ب = ب ي + ي س = ب ي + ا ي
١٢ ا ي لان ي س = ا ي فاذا ا ب + ا د + د س + س ب = ب ي + ا ي
و ب ي = ب د و ا ي = ا س (فرع ٢٢ ك ٢) لان ب د و ا س قد تنصفا في
ي فاذا ا ب + ا د + د س + س ب = ب د + ا س

فرع ٣. في كل شكل متوازي الاضلاع احد القطرين ينصف الآخر

تعليقه. لو كان الشكل معيناً لكان ا ب ب س متساويين والمثلثان ب ي س
د ي س متساويين ايضاً لان اضلاع الواحد تعدل اضلاع الآخر اي كل ضلع في
الواحد يعدل نظيره في الآخر وكانت الزاويتان ب ي س د ي س متساويتين.
ففي شكل معين كل واحد من القطرين هو عمود على الآخر

اصول الهندسة

—xox—

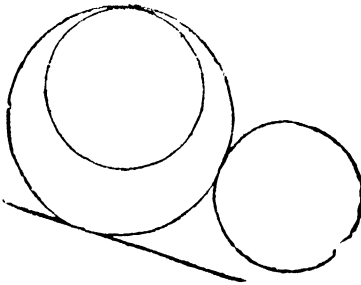
الكتاب الثالث

—

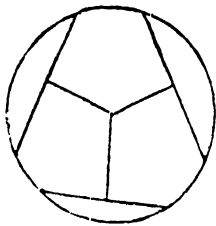
حدود

١. نصف قطر دائرة هو خطٌ مستقيمٌ مرسوم من المركز الى المحيط

١. مماسٌ دائرة هو خط مستقيم
يلتقي المحيط في نقطة واحدة وإذا أُخرج
فلا يقطعها. وتلك النقطة تسمى نقطة
المماس



٢. اذا التقى محيطا دائرتين
بدون ان يتقاطعا يقال ان الدائرة
الواحدة تمس الاخرى



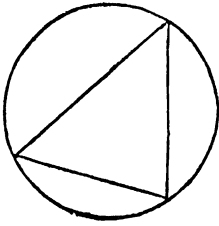
٣. خطوط مستقيمة على بعد واحد من مركز
دائرة هي التي كانت العموديات منها الى المركز
متساوية

٤. والخط المستقيم الذي يقع عليه العمود
الاطول هو الابدع عن المركز



ب. القوس هو جزء من محيط دائرة. والخط
المستقيم الموصل بين طرفي قوس يسمى وترًا

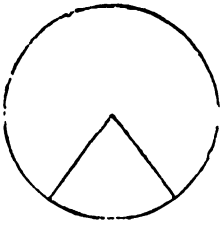
ج. متى كان طرفا خطٍ مستقيم في محيط دائرة قبل ان يمس في الدائرة



وكل خط مستقيم يلاقي المحيط في نقطتين يسمى قاطعاً
٥. كل جزء من دائرة يحيط به قوس ووتره
يسمى قِطْعَةً

٦. زاوية في قِطْعَةٍ هي الحادثة بين خطين
مستقيمين مرسومين من اية نقطة كانت من القوس

الى طرفي الوتر. ومثلث في دائرة هو ما كانت زواياه الثلاث في المحيط. وعلى الاطلاق
كل شكل في دائرة هو ما كانت زواياه في المحيط. ويقال ان الدائرة تحيط به



٧. الزاوية عند المركز هي التي يحيط بها خطان
مستقيمان من المركز الى المحيط

٨. قِطَاع دائرة هو الشكل الذي يحيط به خطان مستقيمان من المركز الى
المحيط والقوس الواقع بين طرفيهما



٩. القطع المشابهة هي ما
كانت الزوايا الحادثة فيها متساوية

الفضية الاولى . ع

علينا ان نجد مركز دائرة مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة . علينا ان نجد مركزها

ارسم فيها خطاً مستقيماً مثل ا ب ونصّفه في د

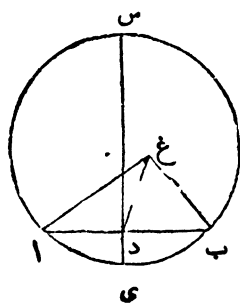
(ق ١٠ ك ١) ارسم د س عموداً على ا ب (ق ١١

ك ١) واخرجه الى ي ونصّف س ي في ق فتكون

النقطة ق مركز الدائرة ا ب س

والا فلتكن النقطة غ مركزها وارسم ا غ د

غ ب . فمن حيث ان د ا = د ب و غ د مشترك بين



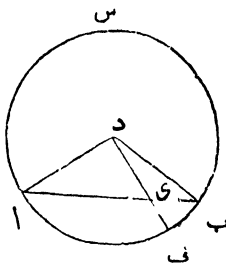
المثلثين غ د ا غ د ب فالضلعان ا د د غ يعدلان الضلعين ب د د غ اي كل

واحد يعدل نظيره والقاعدة غ ا تعدل القاعدة غ ب لان كل واحدة منها نصف قطر من دائرة واحدة فالزاوية ا د غ = غ د ب (ق ٨ ك ١) فتكون كل واحدة منها قائمة (حد ٧ ك ١) فاذا غ د ب قائمة ولكن ق د ب قائمة فاذا غ د ب = ق د ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا تكون النقطة غ مركز الدائرة وهكذا يبرهن في كل نقطة ما عدا النقطة ق فهي اذاً مركز الدائرة ا ب س
 فرع. يتضح من هذه القضية انه اذا كان خط عمودياً على آخر في دائرة ونصفه فالمرکز في الخط المنصف

القضية الثانية . ن

اذا فرضت نقطتان في محيط دائرة فالخط المستقيم الموصل بينهما واقع داخل الدائرة

لتكن ا ب س دائرة وتُفرض في محيطها نقطتان مثل ا و ب وليوصل بينهما بالخط المستقيم ا ب فهو داخل الدائرة



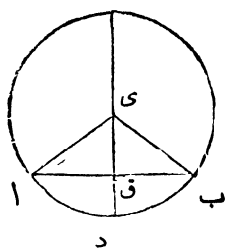
في الخط ا ب افرض ا ب نقطة كانت مثل س واستعلم د مركز الدائرة ا ب س (ق ١ ك ٢) وارسم الخطوط المستقيمة ا د ب د س و اخرج د س حتى يلاقي المحيط في ف فمن حيث ان د ا = د ب فالزاوية د ا ب = الزاوية د ب ا (ق ٥ ك ١) ومن حيث

ان ا س ضلع من المثلث د س ا وقد أُخرج الى ب فالزاوية الخارجة د س ب هي اكبر من د ا س (ق ٦ ك ١) فهي اكبر من د ب ا ايضاً او د ب س والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩ ك ١) فاذا د ب هو اطول من د س ولكن د ب = د ف فاذا د ف هو اطول من د س اي النقطة س هي داخل الدائرة وهكذا يبرهن في كل نقطة في الخط ا ب فهو اذاً داخل الدائرة
 فرع. كل نقطة في ما يزداد على ا ب خارج الدائرة

القضية الثالثة . ن

كل خط مستقيم ماراً بمركز دائرة اذا نصّف خطاً آخر مستقيماً داخل
الدائرة غير ماراً بالمركز فانه يُحدث معه قائمتين . واذا احدث معه
قائمتين ينصفه

لكن اب س دائرة وس د خطاً مستقيماً ماراً بمركزها وينصف الخط المستقيم
اب الذي لا يمر بالمركز في النقطة ق فانه يُحدث معه
قائمتين



استعلم مركز الدائرة ي (ق ا ك ٢) وارسم اى
ب ي فمن حيث ا ق = ق ب وى ق مشترك بين
المثلثين ا ق ي ب قى فضلعان من الواحد يعدلان
ضلعين من الآخر والقاعدة اى تعدل القاعدة ي ب

والزاوية ا ق ي تعدل الزاوية ب ق ي (ق ا ك ١) فكل واحدة منهما قائمة (حدّ ٧
ك ١) فالخط المستقيم د س الذي يمر بمركز الدائرة والذي ينصف الغير المار بالمركز
اب يحدث معه قائمتين

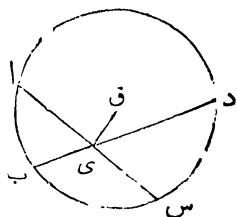
ثم لنفرض ان الخط المستقيم س د يحدث مع اب قائمتين فهو ينصفه ايضاً اي
ا ق يعدل ق ب . ثم الشكل حسبما تقدم فمن حيث ان اى يعدل ي ب فالزاوية
اى ا ق تعدل ي ب ق (ق ٥ ك ١) والقائمة ا ق ي تعدل القائمة ب ق ي والضلع
اى ق مشترك بين المثلثين ا ق ي ب قى وهو يقابل الزاويتين المتساويتين
(ق ٢٦ ك ١) فالمثلثان متساويان والضلع الباقي من الواحد يعدل الباقي من الآخر
اي ا ق = ق ب

فرعٌ أوّل . العمود على نصف الوتر يمرّ بالمركز
فرعٌ ثانٍ . العمود على نصف الوتر اذا أُخرج حتى يلاقي المحيط من طرفيه فهو
قطر . ونقطة اتصافه هي مركز الدائرة

القضية الرابعة . ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة ولا يمران بالمركز فلا يتصفان معاً

لكن ا ب س د دائرة واس ب د خطين مستقيمين فيها يتقاطعان في النقطة
ي ولكن لا يمران بالمركز فلا ينصف بعضهما بعضاً والّا



فاذا كان يمكن ليكن ا ي س متساويين وب ي
ي د كذلك . فان مرآحدها بالمركز فالامر واضح انه
لا ينصف بالآخر الذي لا يمر بالمركز . وان لم يمر
احدها بالمركز فاستعلم المركز ق (ق ا ك ٣) وارسم ق .

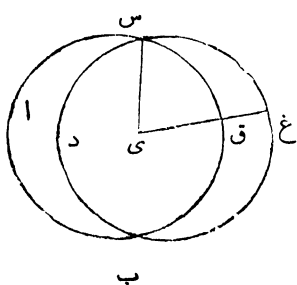
ي فن حيث ان الخط المار بالمركز ق ي ينصف آخر الذي لا يمر بالمركز ا س فيحدث
معهُ قائمتين (ق ٢ ك ٢) فتكون ق ي ا قائمة . ومن حيث ان ق ي ينصف ب د
الذي لا يمر بالمركز فيحدث معهُ قائمتين (ق ٢ ك ٢) فتكون ق ي ب قائمة وق ي ا
تعدل ق ي ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فاذا ا س ب د لا ينصف
بعضهما بعضاً



القضية الخامسة . ن

اذا تقاطعت دائرتان لا يكون لهما مركز واحد

لكن ا ب س س د غ دائرتين ولتقاطعا في س وب فليس لهما مركز واحد



والّا فليكن النقطة ي مركزها . ارسم س ي
وارسم خطاً آخر مثل ي ق غ يلاقي المحيطين
في ق و غ

فمن حيث ان ي مركز الدائرة ا ب س
فنصف القطرى س يعدل نصف القطرى ق
وايضاً من حيث ان ي مركز الدائرة س د غ
فنصف القطرى س يعدل نصف القطرى غ . وقد تبين ان س ي يعدل ي ق

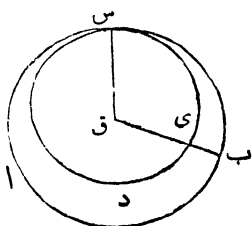
فإذا قى ق يعدل ى غ اي الجزء يعدل الكلّ وذاك محال فلا يمكن ان تكون
النقطة ى مركز الدائرتين



القضية السادسة . ن

إذا مسّت دائرة دائرة أخرى من داخلها فلا يكون لها مركز واحد

لتكن ا ب س د ى س دائرتين ولتمسّ احدهما الاخرى في س فلا يكون لهما
مركز واحد



والأ فلتكن النقطة ق مركزها . ارسم ق س
وارسم خطاً آخر مثل ق ى ب يلاقي المحيطين في
ى وب . فمن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س
فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ب

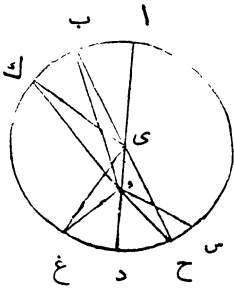
وايضاً لان ق مركز الدائرة د ى س فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ى
وقد تبين ان ق س يعدل ق ب فإذا ق ى يعدل ق ب اي الجزء يعدل الكل
وذاك محال فلا تكون النقطة ق مركز الدائرتين



القضية السابعة . ن

إذا فُرِضَتْ نقطة في قطر دائرة غير المركز فاطول الخطوط المستقيمة
التي يمكن رسمها من تلك النقطة الى المحيط هو الذي يقع فيه المركز اي
قسم من القطر . واقصرها هو القسم الآخر من القطر واما بقية الخطوط
التي تُرسم من تلك النقطة الى المحيط فالاقرب الى القسم من القطر
الماز بالمركز هو الاطول ولا يُرسم من تلك القطة الى المحيط أكثر من
خطين متساويين اي واحد على الجانب الواحد من القطر والآخر
على الجانب الآخر منه .

لتكن ا ب س ك دائرة واد قطرها ولنفرض فيه نقطة ف غير المركز وتلك ي .
المركز فيبين كل المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى
الحيط فالخط ف ا هو الاطول وف د هو الاقصر ومن
البقية فالخط ف ب اطول من ف س وف س اطول
من ف غ وهلم جراً . ارسم ب ي س ي غ ي فمن
حيث ان ضلعين من اضلاع مثلث هما معاً اطول من
الثالث (ق ٢٠ ك ١) فالضلعان ب ي ي ف هما اطول



من ب ف و ا ي يعدل ب ي فاذا ا ي ي ف يعني ا ف اطول من ب ف وايضاً
من حيث ان ب ي يعدل س ي و ي ف مشترك بين المثلثين ب ي ف س ي ف
فالضلعان ب ي ي ف يعدلان س ي ي ف ولكن الزاوية ب ي ف هي اكبر من
س ي ف فالقاعدة ب ف هي اطول من القاعدة س ف (ق ٢٤ ك ١) ولهذا السبب
س ف اطول من غ ف . وايضاً من حيث ان غ ف ف ي هما معاً اطول من غ ي
(ق ٢٠ ك ١) و ي غ يعدل ي د فاذا غ ف ف ي هما معاً اطول من د ي ا طرح
الجزء المشترك ف ي فالبقية غ ف اطول من البقية د ف فاذا ف ا هو اطول
المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى المحيط وف د اقصرها وف ب اطول من ف س
وف س اطول من ف غ وهلم جراً

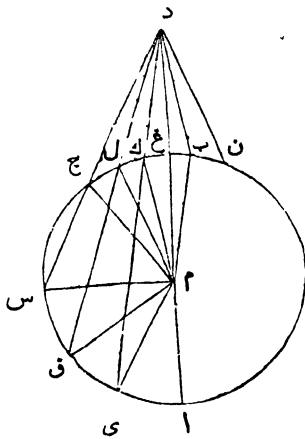
كذلك لا يمكن ان يرسم من ف الى المحيط على جانبي ف د اكثر من خطين
متساويين . عند ي اجعل الزاوية ف ي ح حتى تعدل غ ي ف وارسم ف ح . فمن
حيث ان غ ي يعدل ي ح و ي ف مشترك بين المثلثين غ ي ف ح ي ف
فالضلعان غ ي ي ف معاً يعدلان ح ي ي ف والزاوية غ ي ف تعدل ح ي ف
فالقاعدة ف غ تعدل القاعدة ف ح (ق ٤ ك ١) ولا يمكن ان يرسم خط آخر غير
ف ح يعدل ف غ من ف الى المحيط والا فلين ذلك الخط الآخر ف ك فمن
حيث ان ف ك يعدل ف غ وف غ يعدل ف ح فاذا ف ك يعدل ف ح اي
الخط الاقرب الى الذي يمر بالمركز يعدل الاعدد وذلك لا يمكن كما تقدم برهانه

القضية الثامنة . ن

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها خطوط مستقيمة الى المحيط

وَمَرَّ أَحَدُهُمَا بِالْمَرْكَزِ فَاطْوَلِ الْخُطُوطِ الْوَاقِعَةُ عَلَى مَقْعَرِ الدَّائِرَةِ هُوَ الْمَارُّ
بِالْمَرْكَزِ وَمِنَ الْبَقِيَّةِ فَالْأَقْرَبُ إِلَى الْمَارِّ بِالْمَرْكَزِ هُوَ اطْوَلُ مِنَ الْأَبْعَدِ عَنْهُ
وَمِنَ الْخُطُوطِ الْوَاقِعَةُ عَلَى مَحْدَبِ الدَّائِرَةِ فَالْأَقْصَرُ هُوَ الْمَرْسُومُ مِنَ
النَّقْطَةِ الْمَفْرُوضَةِ إِلَى الْقَطْرِ وَإِنَّمَا الْبَقِيَّةُ فَالْأَقْرَبُ إِلَى الْأَقْصَرِ هُوَ
أَقْصَرُ مِنَ الْأَبْعَدِ عَنْهُ. وَلَا يُرْسَمُ أَكْثَرُ مِنْ خَطَّيْنِ مُتَسَاوِيَيْنِ مِنَ النَّقْطَةِ
الْمَفْرُوضَةِ إِلَى الْحَيْطِ وَذَلِكَ عَلَى جَانِبِي الْخَطِّ الْأَقْصَرِ

لَتَكُنْ اس ن دَائِرَةً وَدَنْقَطَةً مَفْرُوضَةً خَارِجَهَا وَلَتَرْسَمْ الْخُطُوطِ الْمُسْتَقِيمَةَ د ا



د ي د ق د س إِلَى الْحَيْطِ وَلِيَمَرَّ الْخَطُّ د ا
بِالْمَرْكَزِ. فَمِنَ الْخُطُوطِ الْوَاقِعَةُ عَلَى مَقْعَرِ الْحَيْطِ
أَعْنِي ي ق س فَالْأَطْوَلُ هُوَ ا د وَالْأَقْرَبُ إِلَى
ا د يَعْنِي ي د هُوَ اطْوَلُ مِنْ ق د وَق د اطْوَلُ
مِنْ س د. وَمِنَ الْخُطُوطِ الْوَاقِعَةُ عَلَى مَحْدَبِ
الْحَيْطِ ح ل ك غ فَالْأَقْصَرُ هُوَ د غ بَيْنَ النَّقْطَةِ
الْمَفْرُوضَةِ د وَالنَّظَرِ ا غ وَالْأَقْرَبُ إِلَى هَذَا يَعْنِي
د ك هُوَ أَقْصَرُ مِنْ د ل وَد ل أَقْصَرُ مِنْ د ح
وَهَلَمْ جَرًّا

اسْتَعْلَمَ مَرْكَزَ الدَّائِرَةِ (ق ا ك ٢) وَارْسَمَ ي م ق م س ح م ل م ك. فَمِنْ
حَيْثُ ان م ا يَعْدِلُ ي م فَإِذَا أُضِيفَ م د إِلَى كُلِّ وَاحِدٍ مِنْهَا لَنَا د ا يَعْدِلُ د م مَعَ
ي م وَد م و ي م هَا مَعَ اطْوَلُ مِنْ د ي (ق ٢٠ ك ا) فَإِذَا د ا هُوَ أَيْضًا اطْوَلُ مِنْ
د ي. وَمِنْ حَيْثُ ان م ي يَعْدِلُ م ق و م د مُشْتَرِكٌ بَيْنَ الْمَثَلَّثَيْنِ د م ي د م ق
فَالضَّلْعَانِ د م ي يَعْدِلَانِ الضَّلْعَيْنِ د م ق وَلَكِنْ الزَّوَايَا د م ي إِنَّمَا هِيَ أَكْبَرُ مِنَ
الزَّوَايَا د م ق فَالْقَاعِدَةُ د ي اطْوَلُ مِنَ الْقَاعِدَةِ د ق (ق ٢٤ ك ا) وَهَكَذَا أَيْضًا
يَبْرَهُنَّ أَنَّ د ق اطْوَلُ مِنْ د س. فَإِذَا د ا هُوَ اطْوَلُ هَذِهِ الْخُطُوطِ وَد ي هُوَ اطْوَلُ
مِنْ د ق وَد ق اطْوَلُ مِنْ د س. ثُمَّ مِنْ حَيْثُ ان م ك ك د هَا مَعَ اطْوَلُ مِنْ م د
(ق ٢٠ ك ا) وَم غ يَعْدِلُ م ك فَالْبَقِيَّةُ ك د هِيَ اطْوَلُ مِنَ الْبَقِيَّةِ غ د (أَوَّلِيَّةٌ هـ)

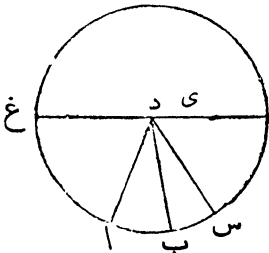
اعني دغ هو اقصر من دك ومن حيث ان م ك د ك قدرُسا الى النقطة ك داخل
 المثلث م ل د وذلك من م ود طرفي قاعدتيه د فالحيطان م ك ك د معا هما اقصر
 من م ل ل د معا (ق ٢١ ك ١) وم ك يعدل م ل فالبقية ك د هي اقصر من البقية
 ل د وهكذا يبرهن ان دل هو اقصر من دح فاذنا دغ هو اقصر هذه الخطوط
 ود ك اقصر من دل ودل اقصر من دح وهلم جرا
 كذلك لا يرسم الاخطان متساويان من د الى المحيط وذلك على جانبي الاقصر
 فعند النقطة م من المحيط م د اجعل الزاوية د م ب تعدل د م ك وارسم د ب فلنا
 في المثلثين ك د م ب د م الضلعان المتساويان ب م م ك والضلع المشترك د م
 والزاوية ب م د تعدل الزاوية ك م د فالضلع الاخر د ك يعدل الاخر د ب
 (ق ٤ ك ١) ولا يرسم خط آخر غير د ب حتى يعدل د ك اعني من د الى المحيط
 وان كان ممكنا فليكن د ن ذلك المحيط فن حيث ان د ن يعدل د ك ود ك
 يعدل د ب فاذنا د ن يعدل د ب يعني الاقرب الى دغ يعدل الابدع و قد
 نبرهن ان ذاك غير ممكن



الفضية التاسعة . ن

اذا فرضت داخل دائرة نقطة يُرسم منها الى المحيط اكثر من خطين
 مستقيمين متساويين فتلك النقطة هي مركز الدائرة

لنفرض النقطة د في الدائرة ا ب س التي منها يقع على المحيط اكثر من خطين



مستقيمين متساويين د ا د ب د س فالنقطة د

هي مركز الدائرة . والأفتكن النقطة ي المركز . ارسم

د ي واخرجه الى المحيط في ف و غ فيكون المحيط ف

ف غ قطراً ومن حيث انه قد تعين في القطر

نقطة اعني د التي ليست هي مركز الدائرة فالخط

د ف هو اطول الخطوط التي يمكن رسمها من تلك

النقطة الى المحيط (ق ٧ ك ٢) ود س هو اطول من د ب ود ب اطول من د ا

طُرِح الجزء المشترك ق غ فالباقي غ ا يعدل الباقي غ ح ولكن اغ يعدل غ د فاذا غ د يعدل غ ح اعني الجزء يعدل الكل وذاك محال. فالخط الموصل بين المراكز لا يمكن وقوعه مثل الخط ق غ د ح وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا الذي يقع على النقطة ا

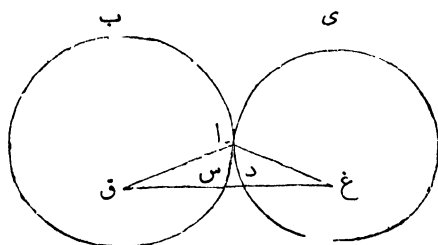
فرع أول. اذا مسّت دائرةٌ دائرةً اخرى من داخلها فالبعد بين مركزيهما يعدل فضلة نصفَي قطريهما لان المحيطين يمرّان بنقطة واحدة في الخط الموصل بين المراكز

فرع ثانٍ. بالقلب اذا عدل البعد بين المراكز فضلة نصفَي القطرين فالدائرة الواحدة تمسّ الاخرى من داخلها

القضية الثانية عشرة . ن

اذا مسّت دائرةٌ دائرةً اخرى من خارجها فالخط المستقيم الموصل بين مركزيهما يمرّ بنقطة المماسّة

لتكن ا ب س ا د ي دائرتين ولتمسّ احدهما الاخرى في ا وليكن ق مركز الدائرة ا ب س وليكن غ مركز الدائرة ا د ي فالخط المستقيم الموصل بين ق و غ يمرّ بنقطة المماسّة



والأ فليقع على غير نقطة

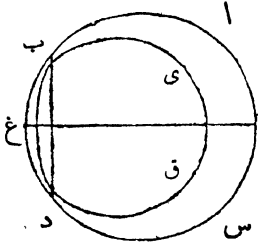
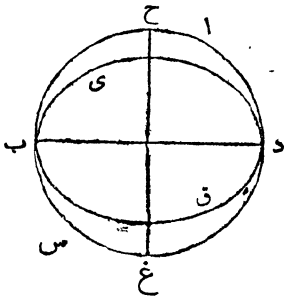
المماسّة مثل الخط ق س د غ ا رسم ق ا غ ا. فن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س فالخط ق س يعدل ق ا و غ مركز ا د ي فالخط غ د يعدل غ ا فاذا غ ا اق معاً يعدلان ق س غ د معاً فالكل ق غ ا طول من ق ا غ معاً وذلك لا يمكن (ق ٢٠ ك ا) وهكذا يبرهن في كل خط غير الذي يمرّ بنقطة المماسّة

فرعٌ اذا مسّت دائرةٌ دائرةً اخرى من خارجها فالبعد بين مركزيهما يعدل مجموع نصفَي قطريهما وبالقلب اذا عدل بعد مركزيهما مجموع قطريهما فالواحدة تمسّ الاخرى من خارجها

القضية الثالثة عشر . ن

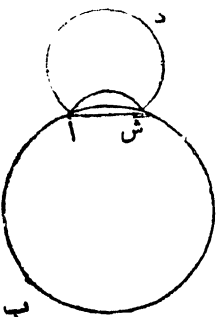
دائرة لا تمس أخرى في أكثر من نقطة واحدة ان كان من داخل او من خارج

ان كان يمكن لتمس الدائرة ب ق الدائرة ا ب س في أكثر من نقطة واحدة وأولاً



من داخل في
ب و د ا رسم
الخط ب د
وارسم ح غ
عموداً عليه
(ق ٧ وق ١١)
ك (١) ولينصفه

ايضاً . فمن حيث ان ب و د هما في محيط كل واحدة من الدائرتين فالخط المستقيم ب د واقع داخل كل واحدة منها (ق ٢ ك ٣) ومركزهما في الخط العمودي عليه المنصفه (فرع ق ١ ك ٣) فاذا غ ح يمر بنقطة الماسة (ق ١١ ك ٣) وهو لا يمر بها لان ب و د خارجتان عن الخط المستقيم غ ح فلا يمكن ان تمس الدائرة الاخرى في أكثر من نقطة واحدة من داخل ولا يمكن ذلك من خارج . فان كان يمكن فلتمس الدائرة

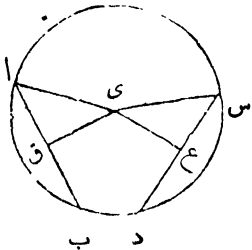


ا ش د الدائرة ا ش ب في ا و ش ا رسم ا ش فالتقطتان ا و ش هما في محيط الدائرة ا ش د فيكون الخط ا ش كله داخل ا ش د و ا ش د خارج ا ش ب فيكون ا ش خارج ا ش ب ايضاً ومن حيث ا و ش هما في محيط ا ش ب فالخط ا ش هو داخل ا ش ب (ق ٢ ك ٣) وقد تبهرن انه خارجها وذلك محال فلا تمس دائرة دائرة اخرى من خارج في أكثر من نقطة واحدة

القضية الرابعة عشرة. ن

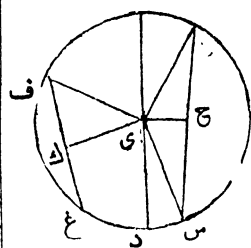
خطوط مستقيمة متساوية في دائرة هي على بعد واحد من المركز.
وخطوط مستقيمة على بعد واحد من المركز هي متساوية

ليكن اب وس د خطين مستقيمين متساويين في الدائرة اب د س فها على
 بعد واحد من المركز. استعلم المركز (ق ا ك ٢)
 وارسم ق ي ق ي غ عمودين على اب وس د وارسم
 ايضا ا ي وس ي . فن حيث ان الخط المستقيم المار
 بالمركز اعني ق ي ق يجعل مع اب الذي لا يمر بالمركز
 زاوية قائمة فهو بنصفه ايضا (ق ٢ ك ٢) فاذا ا ق



یعدل ق ب اعنی اب هو مضاعف اق . وهکذا ایضاً بیرهن ان س د مضاعف
س غ . و اب یعدل س د فاذا اق یعدل س غ . ومن حیث ان ای یعدل ی س
فمربع ای یعدل مربع ی س و مجموع مربعی اق ق ی یعدل مربع ای (ق ۷ ک ۱)
لان اق ی قائمه وهکذا ایضاً مجموع مربعی س غ غ ی یعدل مربع س ی . فربما اق
ق ی یعدل ان مربعی س غ غ ی و مربع س غ یعدل مربع اق لان س غ یعدل
اق فاذا مربع الباقی غ ی یعدل مربع الباقی ق اعنی غ ی یعدل ی ق فاذا
اب و س د هما علی بعد واحد من المکرر (حد ۲ ک ۲)

لتكن ا ب س د دائرة و ا د قطرها وى مركزها وليكن ب س خطا فيها
 وليكن اقرب الى المركز من الخط ف غ ف القطر ا د
 اطول من اى خط آخر رُسم في الدائرة و ب س
 اطول من ف غ
 ارسم ح عمودا على ب س وى ك عمودا على
 ف غ وارسم ي ف ي ب س . فمن حيث ان اى
 يعدل بى وى د يعدل ي س فالكمل ا د يعدل
 بى مع ي س و بى مع ي س اطول من ب س (ق ٢٠ ك ١) فاذا ا د اطول
 من ب س



ومن حيث ان ب س اقرب الى المركز من ف غ فالعمودى ح اقصر من
 العمودى ك (حد ٢ ك ٢) و ب س هو مضاعف ب ح (ق ١٤ ك ٢) و ف غ مضاعف
 ف ك ومجمع مربعى ب ح حى يعدل بمجمع مربعى ف ك كى ومربع حى اصغر
 من مربع ي ك فيكون مربع ح ب اكبر من مربع ك ف فاذا ب ح اطول من ك ف
 و ب س ايضا اطول من ف غ
 ثم لنفرض ان ب س اطول من ف غ فهو ايضا اقرب الى المركز منه فمن حيث
 ان ب س اطول من ف غ فاذا ب ح اطول من ف ك ومجمع مربعى ف ك كى
 يعدل بمجمع مربعى ب ح حى ومربع ب ح اكبر من ف ك فيكون مربع حى ح
 اصغر من مربع ي ك اعني ح اقصر من ي ك فاذا (حد ٢ ك ٢) ب س اقرب
 الى المركز من ف غ
 فريغ . الوتر الاقصر هو الابدع عن المركز وبالقلب الوتر الابدع عن المركز هو
 الاقصر

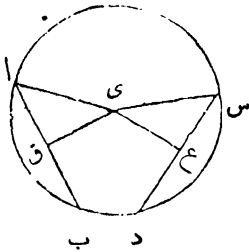
الفضية السادسة عشرة . ن

الخط المستقيم العمودي على طرف قطر دائرة هو واقع خارج الدائرة
 ولا يرسم خط مستقيم من طرف القطرين ذاك العمود ومحيط الدائرة
 بدون ان يقطع المحيط .

الفضية الرابعة عشرة . ن

خطوط مستقيمة متساوية في دائرة هي على بعد واحد من المركز .
وخطوط مستقيمة على بعد واحد من المركز هي متساوية

ليكن ا ب وس د خطين مستقيمين متساويين في الدائرة ا ب د س فيها على
بعد واحد من المركز . استعلم المركز ي (ق ا ك ٢)
وارسم ي ق ي غ عموديت على ا ب وس د وارسم
ايضاً ا ي وس ي . فمن حيث ان الخط المستقيم المار
بالمركز اعني ي ق يجعل مع ا ب الذي لا يمر بالمركز
زاوية قائمة فهو ينصفه ايضاً (ق ا ك ٢) فاذا ا ق



يعدل ق ب اعني ا ب هو مضاعف ا ق . وهكذا ايضاً يبرهن ان س د مضاعف
س غ . و ا ب يعدل س د فاذا ا ق يعدل س غ . ومن حيث ان ا ي يعدل ي س
فمربع ا ي يعدل مربع ي س ومجمع مربعي ا ق ق ي يعدل مربع ا ي (ق ا ك ١)
لان ا ق ي قائمة وهكذا ايضاً مجموع مربعي س غ غ ي يعدل مربع س ي . فمربع ا ق
ق ي يعدل ان مربعي س غ غ ي ومربع س غ يعدل مربع ا ق لان س غ يعدل
ا ق فاذا مربع الباقي غ ي يعدل مربع الباقي ق ي اعني غ ي يعدل ي ق فاذا
ا ب وس د هـ على بعد واحد من المركز (ح د ا ك ٢)

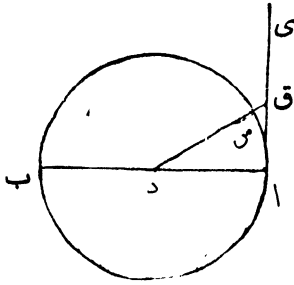
ثم اذا فرض انهما على بعد واحد من المركز اعني ان ق ي يعدل غ ي فيها
متساويان لانه يبرهن على ذات الاسلوب السابق ان ا ب مضاعف ا ق وس د
مضاعف س غ وان مجموع مربعي ا ق ق ي يعدل مجموع مربعي س غ غ ي ومربع
ق ي يعدل مربع غ ي فمربع الباقي ا ق يعدل مربع الباقي س غ و ا ق يعدل س غ
و ا ب مضاعف ا ق وس د مضاعف س غ فاذا ا ب يعدل س د

—x—

الفضية الخامسة عشرة . ن

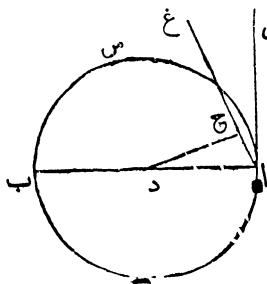
القطر هو اطول الخطوط التي ترسم في دائرة اما البقية فالاقرب الى
المركز اطول من الابدع عنه والاطول هو اقرب الى المركز من الاقصر

لكن اب س دائرة ود مركزها واب قطرها وليُرسَم اى عموداً على اب من
النقطة ا فهو واقع خارج الدائرة



عين في اى اية نقطة شئت مثل ق وارسم
ق د الذي يقطع المحيط في س . فمن حيث ان
دا ق قائمة فهي اكبر من اق د (ق ٢٢ ك ١)
والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩
ك ١) فاذا د ق اطول من دا ود ا يعدل د س

فاذا د ق اطول من د س فالنقطة واقعة خارج الدائرة وهي اية نقطة كانت من
المخطاى فهو اذاً خارج الدائرة



كذلك لا يُرسَم بين ي ا والمحيط خطٌ مستقيم ي
من النقطة ا الذي لا يقطع المحيط . ارسم غ ا في
الزاوية داى . وارسم د ح عموداً على اغ فمن حيث
ان د ح قائمة ود اح اصغر من قائمة فالضلع
د ح اقصر من الضلع د ا (ق ١٩ ك ١) فالنقطة
ح هي داخل الدائرة فالخط اغ قاطع الدائرة

فرع اول . المخط العمودي على طرف النظر دائرة هو ممسٌ الدائرة ويمسها في
نقطة واحدة فقط لانه لو لاقاها في نقطتين لوقع داخل الدائرة (ق ٢٢ ك ١) ولا يكون
اكثر من ماسٍ واحد في نقطة واحدة من الدائرة

فرع ثانٍ . العمود على طرف النظر هو ماسٍ للدائرة وبالقلب الماس هو عمودي
على طرف النظر

فرع ثالث . ماسان من طرفي قطرها متوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١) وبالقلب
ماسان متوازيان هما عموديان على طرفي القطر

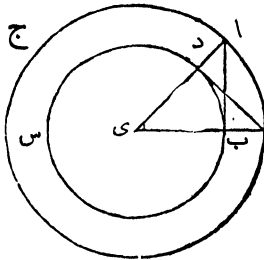
— ١٠٠١ —

الفضية السابعة عشرة . ع

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً من نقطة مفروضة في محيط دائرة او خارج
المحيط حتى يماس دائرة مفروضة

اولاً لكن النقطة المفروضة خارج الدائرة ب س د فعلينا ان نرسم منها خطاً مستقيماً يماس الدائرة

استعلم المراكزى (ق ا ك) وارسم اى واجعل اى مركزا وى انصف قطر
وارسم الدائرة اف ج ومن دارسم د ف عمودا على ا (ق ا ك) وارسم اى ب ف
وايضا اب فالحظ اب يماس الدائرة



لان ی مرکز الدائرتین ب س د ا ف ج
فنصف القطری ای عدل ی ف وی د يعدل
ی ب فالضلعان ای ی ب يعدلان الضلعین
س ی د ولما الزاویة عندی المشتركة بین
المثلثین ای ب ف ی د فالقاعدة اب تعدل

الفائدة د ف والمثلث اى ب يعدل المثلث ف ي د وثيقة زوايا الواحد تعدل بقية
 زوايا الآخر (٤ ك ١) فالزاوية ب ا تعدل ي د ف ولكن ي د ف قائمة فأذا
 ي ب ا قائمة ايضاً والمخط ي ب قد رُسم من المركز و ا ب عمود عليه فهو اذا ماس
 (فرع ٢ ق ١٦ ك ٢) وقد رُسم من ا النقطة المفروضة

ثم اذا كانت النقطة المفروضة في محيط الدائرة مثل د فارسم د الى المركز
وارسم د ف عموداً على طرفه فهو مماس (فرع اول ق ١٦ ك ٢)

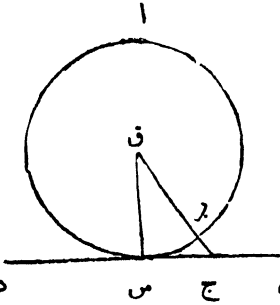
تعليقة متى كانت النقطة ا خارج المحيط يرسم مماسان متساويان منها لانه اذا
اُخرج المماس ف د حتى يلاقي المحيط ا ج ثم اذا رُسم خط من المركز الى نقطة المماس
وآخر من ا الى موضع تقاطع الخط الاول والمحيط ب د س يحدث مثلث ذو قائمة
يعدل ا ب ي



القضية الثامنة عشرة . ن

إذا مسَّ خطُّ مستقيم دائرةً فالخط المستقيم المرسوم من المركز إلى نقطة المماس هو عمودٌ على الخط المماس

لكن اس ب دائرة وليستها الخط المستقيم دى في س . استعلم المركز ق وارسم

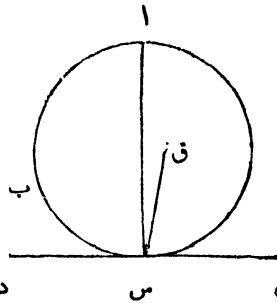


ق س فالخط المستقيم ق س انما هو عمود على
د ي والآن ق ا رسم ق ب ج عموداً على د ي
فتكون ق ج س قائمة فتكون ج س ق حادة
(ق ١٧ ك ١) والضلع الاطول يقابل الزاوية
الكبرى (ق ١٩ ك ١) فالضلع ق س اطول من
الضلع ق ج ولكن ق س يعدل ق ب فانما
ق ب اطول من ق ج اعني الجزء اعظم من كله وذلك محال فلا يمكن ان يكون
ق ج عموداً على د ي وهكذا يبرهن في كل خط ما علا ق س فهو عمود على د ي

القضية التاسعة عشرة . ن

اذا مس خط مستقيم دائرة ورسم من نقطة الماسة خط مستقيم عموداً
على الماس فمركز الدائرة واقع في ذلك الخط العمودي

ليكن الخط المستقيم د ي ماساً للدائرة ا ب س ومن نقطة الماسة س يرسم س ا
عموداً على د ي فمركز الدائرة واقع في الخط س ا

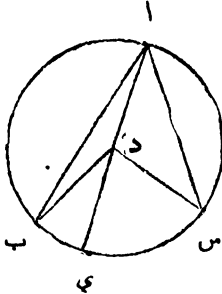


ولا فتكون ق المركز ا رسم ق س فحسب
القضية السابقة ق س هو عمود على د ي وق س ي
قائمة ولكن ا س ي ايضاً قائمة فانما ا س ي
تعديل ق س ي اعني الكل يعدل جزؤه وذلك
محال فلا يمكن ان تكون ق المركز وهكذا يبرهن
في كل نقطة لا تقع في الخط س ا فالمركز واقع في الخط س ا

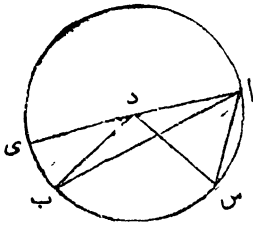
القضية العشرون . ن

الزاوية عند مركز دائرة هي مضاعف الزاوية عند المحيط اذا كانتا على
قاعدة واحدة اعني على جزء واحد من المحيط

لتكن ا ب س دائرة وب د س الزاوية عند المركز وب ا س الزاوية عند المحيط وكلتاها على جزء واحد من المحيط ب س فالزاوية ب د س انما هي مضاعف ب ا س



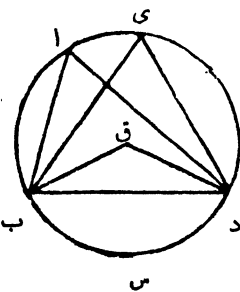
اولاً ليكن د مركز الدائرة داخل الزاوية ب ا س ا رسم ا د واخرجه الى س . فمن حيث ان د ا يعدل د ب فالزاوية د ا ب تعدل الزاوية د ب ا (ق ٥ ك ١) فالزاويتان د ب ا د ا ب هما معاً مضاعف د ا ب والزاوية ب د س تعدل د ا ب د ب ا معاً (ق ٢٢ ك ١) فانما ب د س هي مضاعف د ا ب وهكذا يبرهن ان س د س مضاعف د ا س فلكل ب د س مضاعف الكل ب ا س



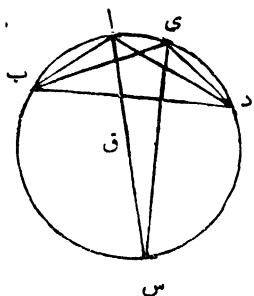
ثم ليكن المركز د خارج الزاوية ب ا س . ا رسم ا د واخرجه الى س . فيبرهن كما تقدم ان الزاوية س د س هي مضاعف د ا س وان س د ب جزءا من الاولى مضاعف د ا ب جزء من الثانية فالباقية ب د س مضاعف الباقية ب ا س

القضية الحادية والعشرون . ن

الزوايا في قطعة واحدة من دائرة هي متساوية



لتكن ا ب س د دائرة وب ا د ب س زاويتين في قطعة واحدة منها ب ا س د فهما متساويتان استعمل ق مركز الدائرة واولاً لتكن القطعة ب ا س د اكبر من نصف دائرة . ا رسم ب ق د ق فالزاوية ب ق د عند المركز هي مضاعف الزاوية ب ا د عند المحيط لانها على قاعدة واحدة ب س د (ق ٢٠ ك ٢) وب ق د ايضاً مضاعف ب س د فانما ب ا د تعدل ب س د



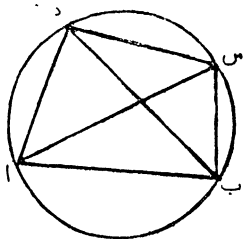
ثم اذا كانت القطعة ب اى د اصغر من نصف دائرة . ارم اق الى المركز واخرجه الى س وارسم سى فالقطعة ب ا د س هي اكبر من نصف دائرة والزوايتان فيها ب ا س ب ي س متساويتان حسباً تقدم وس ب ي د ايضاً اكبر من نصف دائرة والزوايتان فيها س ا د س ي د متساويتان ايضاً فالكل ب ا د يعدل الكل ب ي د



القضية الثانية والعشرون . ن

إذا رُسم في دائرة شكلٌ ذو أربعة أضلاع فالزاويتان المتقابلتان منه
بعدلان معاً قائمتين

ليكن ا د س ب ذا اربعة اضلاع في دائرة فكل اثنتين متقابلتين من زواياه
تعدلان معاً فاثبتين . ا رسم اس ود ب فالزاوية
س ا ب تعدل س د ب (ق ٢١ ك٢) والزاوية
اس ب تعدل ا د ب فالكل ا د س يعدل
الزاويتين س ا ب اس ب . اضعف الى كل
واحدة منهما ا ب س فلنا ا ب س مع ا د س تعدل



اب س مع س اب مع ب س ا و هذه الثلاث نعدل فائتين (ق ۴۲ ك ۱) فأذا اب س
ا د س معاً نعدلان فائتين . وهكذا يبرهن ان د ا ب د س ب نعدلان فائتين

فرع أول إذا أخرج ضلع من شكل ذي أربعة أضلاع مرسوم في دائرة
فالزاوية الخارجة تعدل الداخلة المتقابلة

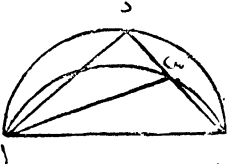
فرع ثانی شکل ذو اربعه اضلاع کل زاویتین متقابلتین منه لا تعدلان قائمتین لا یُرسَم فی دائره



القضية الثالثة والعشرون . ن

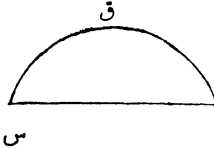
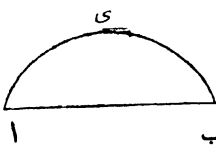
لا تكون قطعتان متشابهتان على جانب واحد من خطٍ مستقيم بدون ان تتطابقا

ان كان ممكناً لتكن ا س ب ا د ب قطعتين متشابهتين على جانب واحد من الخط المستقيم ا ب وغير متطابقتين . فمن حيث ان الدائرتين ا د ب ا س ب يتقاطعان في ا ب فلا يمكن ان يتقاطعا في نقطة اخرى (ق ١٠ ك ٢) وبالضرورة تقع احدى القطعتين داخل الاخرى ب فلتقع ا س ب داخل ا د ب وارسم الخط ب س د وايضاً س ا و د ا . فمن حيث ان القطعتين متشابهتان اعني تحويان زوايا متساوية (حد ٩ ك ٢) فالزاوية الخارجة ا س ب تعدل الداخلة المقابلة ا د ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١)



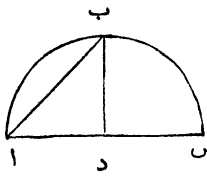
القضية الرابعة والعشرون . ن

قِطْعَةٌ متشابهة على خطوطٍ مستقيمة متساوية هي متساوية
لتكن ا ي ب س ق د قطعتين متشابهتين على خطين مستقيمين متساويين
ا ب وس د فهما متساويتان
لانه اذا وضعت القطعة
ا ي ب على القطعة س ق د د
بحيث تقع النقطة ا على النقطة س والخط ا ب على الخط س د فالنقطة ب تقع على
النقطة د لأن ا ب يعدل س د فبالضرورة تطبق القطعة ا ي ب على القطعة س ق د
(ق ٢٢ ك ٢) فتعدلها



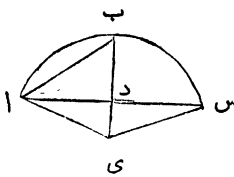
القضية الخامسة والعشرون . ع

اذا فُرِضَتْ قطعة من دائرة فعليها ان تنمها
لتكن ا ب س قطعة دائرة فعليها ان تنم الدائرة



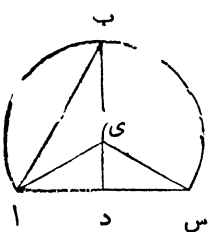
نصف اس في د (ق ١٠ ك ١) ومن د ا رسم د ب
عموداً على اس (ق ١١ ك ١) وارسم اب

ثم أولاً لتكن الزاويتان اب د ب ا د متساويتين
فالخط ا د يعدل ب د (ق ٦ ك ١) ويعدل د س ايضاً
فالخطوط الثلاثة ا د ب د س هي متساوية فتكون د مركز الدائرة (ق ٩ ك ٢)
واذا جعلت د مركزاً واحداً من هذه الخطوط الثلاثة نصف قطر ثم الدائرة التي
كانت اب س قطعة منها . ومن حيث ان المركز واقع في اس فاقطعة اب س
اما هي نصف دائرة



ثم لتكن الزاويتان اب د ب ا د غير متساويتين
ارسم الزاوية ب ا ي حتى تعدل اب د (ق ٢٢ ك ١)
وان لزم فاخرج ب د الى ي وارسم ي س . فمن حيث
ان ب ا ي تعدل اب ي فالخط ا ي يعدل ب ي

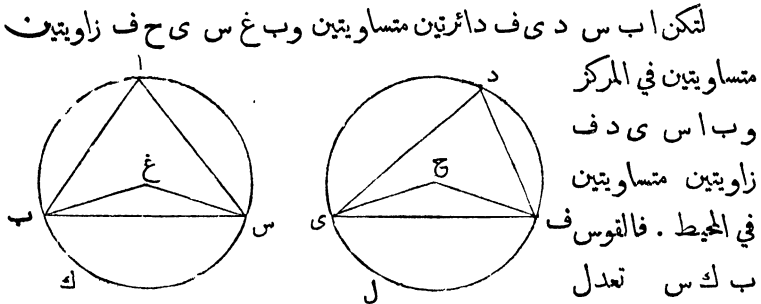
(ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ا د يعدل د س ود ي مشترك بين المثلثين ا د ي
س د ي فالضلعان ا د د ي يعدلان الضلعين س د د ي اعني كل واحد يعدل
نظيره والزاوية ا د ي تعدل س د ي لانها قائمتان فالقاعدة ا ي تعدل القاعدة
ي س (ق ٤ ك ١) و ا ي يعدل ب ي حسباً تقدم فالخطوط الثلاثة ا ي ب ي س ي
متساوية وي مركز الدائرة (ق ٩ ك ٢) التي كانت اب س قطعة منها واذا كانت
الزاوية اب د اكبر من ب ا د فالامر واضح ان المركز واقع خارج القطعة اب س
اعني انها اصغر من نصف دائرة



واذا كانت اب د اصغر من ب ا د فالمركز واقع
داخل القطعة اعني هي اكبر من نصف دائرة وهكذا
الدائرة اذا فرضت قطعة منها

القضية السادسة والعشرون . ن

زوايا متساوية في دوائر متساوية هي على أقواس متساوية إن كانت تلك الزوايا في المركز أو في المحيط



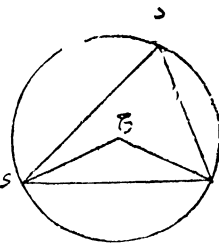
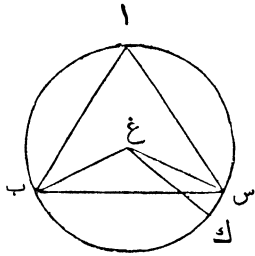
القسوس ل ف ا ر سم القوترين ب س ي ف . فمن حيث ان الدائرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيها متساوية . فالخطان ب غ غ س يعدلان ي ح ح ف والزوايا ب غ س تعدل ي ح ف فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالنقطه ب ا س تشابه النقطه ي د ف (حد ٢ ك ٢) وهما على الخططين المتساويين ب س ي ف والقطع المتشابهة على خطوط متساوية هي متساوية (ق ٢٤ ك ٢) فالنقطه ب ا س تعدل النقطه ي د ف . ولكن كل الدائرة ب ا س تعدل الكل ي د ف فالبقية ب ك س تعدل البقية ل ف



القضية السابعة والعشرون . ن

زوايا واقعة على أقواس متساوية في دوائر متساوية هي متساوية إن كانت في المركز أو في المحيط

في الدائرتين المتساويتين ا ب س دى ق لتكن الزاويتان في المركز ب غ س



ي ح ق والزوايتان
في المحيط ب ا س
ي د ق على القوسين
المتساويين ب س
ي ق فالزاوية ب غ س

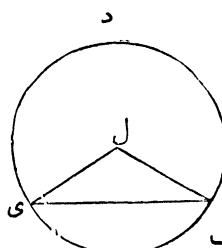
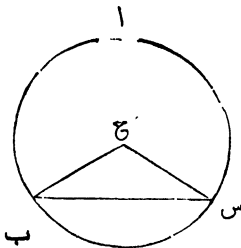
تعدل ي ح ق وب ا س تعدل ي د ق

الزاوية ب غ س اذا عدلت ي ح ق فالامر واضح (ق ٢٠ ك ٢) ان ب ا س
تعدل ي د ق والا فتكون احدها اكبر من الاخرى . لكن ب غ س اكبرها وعلى
النقطة غ من الخط المستقيم ب غ ا رسم الزاوية ب غ ك حتى تعدل ي ح ق (ق ٢٢
ك ١) . فمن حيث ان الزوايا المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق ٢٦
ك ٢) فالقوس ب ك تعدل القوس ي ق وقد فرض ان ي ق يعدل ب س
فالقوس ب ك تعدل ب س ايضا اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال . فلا يمكن
ان تكون ب غ س ي ح ق غير متساويتين اي هما متساويتان . والزاوية عند ا
هي نصف الزاوية ب غ س والزاوية عند د هي نصف ي ح ق فالزاوية عند ا
تعدل الزاوية عند د

—xox—

القضية الثامنة والعشرون . ن

خطوط مستقيمة متساوية في دوائر متساوية تقطع اجزاء متساوية
الاكبر يعدل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر



ليكن ب س
ي ف خطين مستقيمين
متساويين في دائرتين
متساويتين ا ب س
د ي ف وليقطعا في
القوسين الاكبرين

ب ا س ي د ف والاصغرين ب ر س ي ت ف فالقوس ب ا س تعدل ي د ف

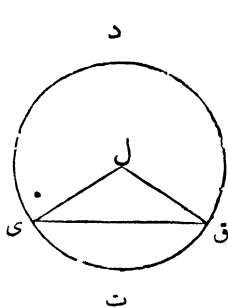
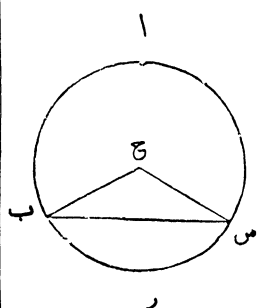
وب رس تعدل ي ت ف

استعلم المركزين ح ول (ق ١ ك ٢) وارسم ح ب ح س ل ي ل ف . فمن حيث ان الدائرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيها هي متساوية فالخطان ب ج ح س يعدلان ي ل ل ف . وقد فرض ان القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف فالزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ف (ق ٨ ك ١) والزاويا المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٢) فالقوس ب رس تعدل القوس ي ت ف والدائرة ا ب س تعدل الدائرة د ي ف فالباقى با س يعدل الباقي ي د ف



القضية التاسعة والعشرون . ن

اقواس متساوية في دوائر متساوية ثقابها خطوط مستقيمة متساوية لكن ا ب س د ي ق دائرتين متساويتين والاقواس ب رس ي ت ق



متساويتين فالخطان
المستقيمان المقابلان لهما
ب س ي ق ايضاً
متساويان
استعلم المركزين
ح ول (ق ١ ك ٢)

وارسم ح ب ح س ل ي ل ق . فمن حيث ان القوس ب رس تعدل القوس ي ت ق والزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ق (ق ٢٧ ك ٢) وح ب ح س يعدلان ل ي ل ق لانها أنصاف اقطار دائرتين متساويتين فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ق (ق ٤ ك ١)

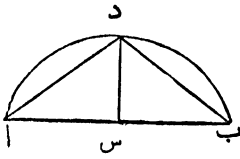


القضية الثلاثون . ع

علينا ان ننصف قوساً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين متماثلين

ليكن ا د ب القوس المفروض . فعلينا ان ننصفه

ارسم ا ب ونصفه في س (ق ١٠ ك ١) وارسم
س د عموداً على ا ب وارسم ا د ب فقد تنصف
القوس ا د ب في النقطة د



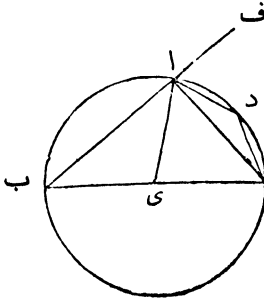
لان ا س يعدل س ب وس د مشترك بين المثلثين ا س د ب س د والزواوية
ا س د تعدل الزاوية ب س د لان كل واحدة منهما قائمة فالقاعدة ا د تعدل القاعدة
ب د (ق ٤ ك ١) والخطوط المستقيمة المتساوية تقطع اقواساً متساوية (ق ٢٨ ك ٢)
والاكبر يعدل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر وكل واحد من ا د ب د اصغر من
نصف دائرة لان د س يمر بالمركز (فرع ق ١ ك ٢) فالقوس ا د تعدل القوس ب د
فقد تنصف ا د ب في د

تعليقة . وعلى هذه الكيفية كل واحد من النصفين ا د ب ينصف ايضاً فيقسم
قوس مفروض الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءاً متساوية ودلم جراً

الفضية المحادية والثلاثون . ن

الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي قائمة والمرسومة في قطعة اكبر من
نصف دائرة هي اصغر من قائمة والمرسومة في قطعة اصغر من نصف
دائرة هي اكبر من قائمة

لتكن ا ب س دائرة وب س قطرها وى مركزها . ارسم س ا الذي يقسم
الدائرة الى قطعتين ا ب س ا د س وارسم ب ا
ا د س . فالزاوية في نصف الدائرة ب ا س هي
قائمة والزاوية في القطعة ا ب س التي هي اكبر من
نصف الدائرة فاصغر من قائمة والزاوية في القطعة
ا د س التي هي اصغر من نصف الدائرة فاكبر من قائمة
ارسم اى واخرج ب ا الى ف . فن حيث



ا ب ب س يعدل اى فالزاوية ب س ا تعدل ب ا (ق ٥ ك ١) ولان س س

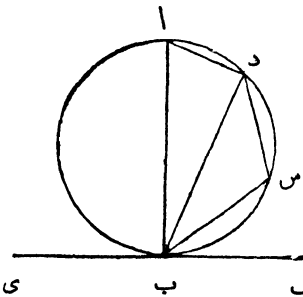
يعدل اى فالزاوية γ س ا تعدل γ ا س فاكلل ب ا س يعدل الزاويتين
 ا ب س ا س ب ولكن الزاوية ف ا س الخارجة من المثلث ا ب س تعدل
 الزاويتين ا ب س ا س ب (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ب ا س تعدل ف ا س وكل
 واحدة منهما قائمة (حد ٧ ك ١) فالزاوية ب ا س في نصف الدائرة انما هي قائمة
 ومن حيث ان الزاويتين ا ب س ب ا س من المثلث ا ب س هما معاً اقل
 من قائمتين (ق ١٧ ك ١) وب ا س قائمة فتكون ا ب س اصغر من قائمة فالزاوية في
 القطعة ا ب س التي هي اكبر من نصف دائرة هي اصغر من قائمة
 ومن حيث ان ا ب س د هو ذواربعة اضلاع في دائرة فكل اثنتيت من
 زواياه المتقابلة تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) فالزاويتان ا ب س ا د س تعدلان معاً
 قائمتين وقد تبرهن ان ا ب س اصغر من قائمة فتكون ا د س اكبر من قائمة
 فرع: يتضح من هذه القضية ان زاوية واحدة من مثلث ان عدلت بمجمع الاخرين
 فهي قائمة لان الزاوية التي تليها تعدل الاخرين ايضاً ومتى كانت الزاويتان المتواليتان
 متساويتين فكل واحدة منهما قائمة



القضية الثانية والثلاثون . ن

اذا مس خط مستقيم دائرة ورسم من نقطة الماسة خط مستقيم قاطع
 الدائرة فالزوايا المحاذية بين الماس والقاطع تعدل الزوايا في القطع
 المتبادلة من الدائرة

ليكن الخط المستقيم γ ف ماساً للدائرة ا ب س د ومن ب نقطة الماسة لرسم



الخط المستقيم ب د قاطعها فالزاوية ف ب د
 تعدل الزاوية في القطعة د ا ب المتبادلة
 والزاوية د ب γ تعدل الزاوية في القطعة
 ب س د المتبادلة

من النقطة ب ارسم ب ا عموداً على γ
 ف (ق ١١ ك ١) وفي القوس ب د عين اية

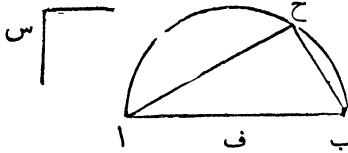
ننظرة شئت كالنقطة س وارسم المخطوط المستقيمة ا د دس س ب . فمن حيث ان
الخط المستقيم س ب يمس الدائرة ا ب س د في النقطة ب وقد رُسم ب ا عموداً على
المماس من نقطة المماس فمركز الدائرة في الخط ب ا (ق ١٩ ك ٢) والزاوية ا د ب هي
في نصف دائرة وهي قائمة (ق ٢١ ك ٢) والزاويتان الاخريان د ا ب ا ب د تعدلان
قائمة (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ا ب ف قائمة فتعدل الزاويتين ب ا د ا ب د . اطرح
الزاوية المشتركة ا ب د فالباقية د ب ف تعدل الباقية ب ا د في القطعة المتبادلة
من الدائرة . ومن حيث ان الشكل ا ب س د ذو اربعة اضلاع في دائرة فالزاويتان
المتقابلتان ب ا د ب س د معاً تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) ولذلك تعدلان ايضاً
د ب ف د ب س (ق ١٢ ك ١) وقد تبرهن ان د ب ف تعدل ب ا د فالباقية
د ب س تعدل الباقية ب س د في القطعة المتبادلة من الدائرة

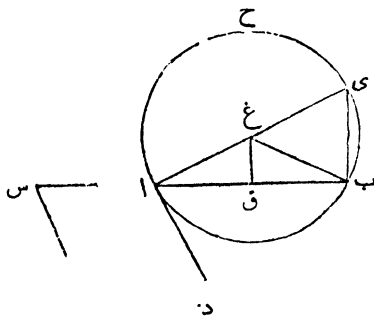


القضية الثالثة والثلاثون . ع

علينا ان نرسم على خطٍ مستقيم مفروض قطعةً دائريةً فيها زاوية
تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس الزاوية المفروضة . علينا ان نرسم على ا ب
قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية عند س
اولاً لتكن الزاوية عند س قائمة .
نصف ا ب في ف (ق ١٠ ك ١) ثم اجعل ب ا
ف مركزاً و ف ب بعداً وارسم الدائرة ا ح ب فالزاوية ا ح ب انما هي قائمة لانها في
نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وهي تعدل الزاوية القائمة عند س
ثانياً ان لم تكن الزاوية س قائمة فعند النقطة ا من الخط ا ب اجعل الزاوية
ب ا د تعدل س (ق ٢٢ ك ١) ومن النقطة ا رسم ا د عموداً على ا ب (ق ١١ ك ١)





نصف آ ب في ق (ق ١٠ ك ١) ومن
ق ا رسم ق غ عموداً على ا ب (ق ١١
ك ١) وارسم غ ب . فمن حيث ان
ا ق يعدل ق ب وق غ مشترك بين
المثلثين ا ق غ ب ق غ فالضلعان
ا ق ق غ يعدلان الضلعين ب ق
ق غ والزوايا ا ق غ تعدل ب ق غ

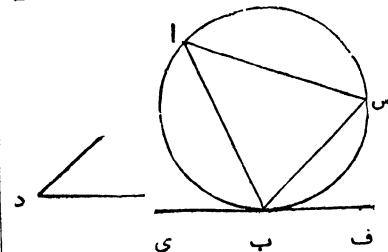
فالقاعدة ا غ تعدل القاعدة غ ب (ق ٤ ك ١) والزاوية المرسومة على المركز غ وعلى
البدع ا تمر في النقطة ب . فلتكن ا ح ب
هذه الدائرة فمن حيث انه قد رُسم ا د عموداً
من طرف النظر ا ي فهو ماس الدائرة
(فرع اول ق ١٦ ك ٢) ومن حيث انه قد
رُسم القاطع ا ب من نقطة الماسة فالزاوية

د ا ب تعدل الزاوية في النقطه ا ح ب المتبادلة (ق ٢٣ ك ٢) والزاوية د ا ب تعدل
الزاوية عند س فالزاوية عند س تعدل الزاوية في النقطه ا ح ب . فقد رُسم على
الخط المستقيم المفروض ا ب قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند س

القضية الرابعة والثلاثون . ع

علينا ان نقطع من دائرة مفروضة قطعةً فيها زاوية تعدل زاوية بسيطة
مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الزاوية البسيطة المفروضة . علينا ان ننقطع



من الدائرة ا ب س قطعةً فيها زاوية
تعدّل الزاوية عند د . ارسم الماس
ي ف (ق ١٧ ك ٣) حتى يمس الدائرة
في النقطة ب ومن النقطة ب في الخط
ي ف اجعل الزاوية ف ب س تعدل د

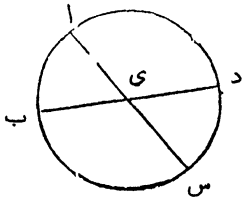
(ق ٢٢ ك ١) فمن حيث ان الخط المستقيم $ي ف$ يمس الدائرة $ا ب$ نس وقد رُسم من نقطة الماسة الخط $ب س$ قاطعاً فالزاوية $ف ب س$ تعدل الزاوية في القطعة $ب ا س$ المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢) والزاوية $ف ب س$ تعدل الزاوية عند $د$ فالزاوية في القطعة $ب ا س$ تعدل الزاوية عند $د$ فقد قُطعت من الدائرة $ا ب س$ القطعة $ب ا س$ فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند $د$



القضية الخامسة والثلاثون . ن

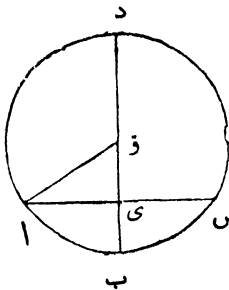
اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة فالقائم الزوايا مسطح قسي احدهما يعدل القائم الزوايا مسطح قسي الآخر

ليتناطح الخطان المستقيمان $ا س ب د$ في الدائرة $ا ب س د$ في النقطة $ي$ فالقائم الزوايا $ا ي في س$ يعدل القائم الزوايا $ب ي في د$



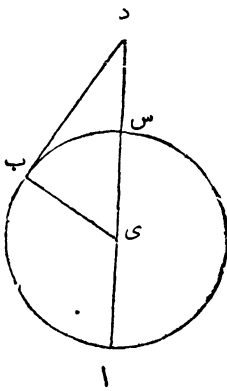
اذا مر كل واحد منهما في المركز وكان ذلك المركز $ي$ فالامر واضح ان الخطوط $ا ي ي س ب ي ي د$ متساوية والقائم الزوايا $ا ي في ي س$ يعدل القائم الزوايا $ب ي في ي د$

ثم لنفرض مرور احدهما $ب د$ في المركز وليكن عموداً على الآخر $ا س$ الذي لا يمر بالمركز وليقطعه في النقطة $ي$. فاذا تنصف $ب د$



في $ق$ فالتقطعة $ق$ هي مركز الدائرة (فرع ق ١ ك ٢) ارم $ا ق$. فمن حيث ان الخط $ب د$ المار بالمركز هو عمود على $ا س$ الذي لا يمر بالمركز ويقطعه في $ي$ فالتساوي $ا ي ي س$ متساويان (ق ٢ ك ٢) ومن حيث ان الخط المستقيم $ب د$ قد انقسم الى قسمين متساويين في $ق$

وغير متساويين في $ي$ (ق ٥ ك ٢) فالقائم الزوايا $ب ي ي د + ي ق = ق ب = ا ق$ ولكن $ا ق = ا ي + ي ق$ (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا $ب ي ي د + ي ق = ا ق$

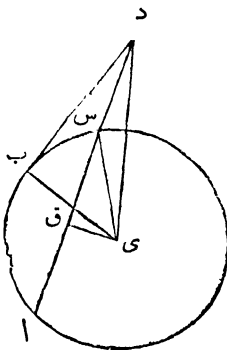


لتكن د نقطة خارج الدائرة ا ب س وليُرسَم منها
الخط المستقيم د س ا حتى ينقطع الدائرة والخط المستقيم
د ب حتى يسمها فالقائم الزوايا ا د س $\times$ د س يعدل
مربع د ب

اولاً لنفرض ان د س ا يمر بالمركز. ارسم ي ب
فالزاوية ي ب د انما هي قائمة (ق ٨ ك ٢) ومن حيث
ان الخط المستقيم ا س قد تنصف في ي واُخرج الى د
فالقائم الزوايا ا د س $\times$ د س + ي س = ي د (ق ٦ ك ٢)

وي س = ي ب فالقائم الزوايا ا د س $\times$ د س + ي ب = ي د ولكن ي د = ي ب
+ ب د (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ا د س $\times$ د س + ي ب = ي ب + ب د ا طرح
من الجانبين ي ب فالباقى ا د س $\times$ د س = ب د

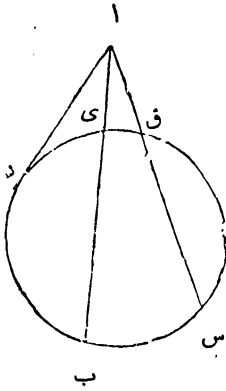
ثانياً لم يمر د س ا في مركز الدائرة ا ب س فاستعلم المركزى (ق ١ ك ٢)



وارسم ي ق عموداً على ا س (ق ١٢ ك ١) وارسم ي ب
ي س ي د. فمن حيث ان الخط المستقيم المار بالمركز
ي ق هو عمود على الخط المستقيم ا س الذي لا يمر
بالمركز فهو ينصفه ايضاً (ق ٢ ك ٢) فالقسم ا ق يعدل
القسم ق س. فمن حيث ان الخط المستقيم ا س قد
تنصف في ق واُخرج الى د (ق ٦ ك ٢) فالقائم الزوايا
ا د س $\times$ د س + ق س = ق د. أضف اليها ق ي فالقائم

الزوايا ا د س $\times$ د س + ق س + ق ي = ق د + ق ي وي س = ق س + ق ي
وي د = ق د + ق ي (ق ٤٧ ك ١) لان د ق ي قائمة. فالقائم الزوايا ا د س
+ ي س = ي د. ومن حيث ان ي ب د قائمة ي د = ي ب + ب د = ي س
+ ب د فالقائم الزوايا ا د س $\times$ د س + ي س = ي س + ب د + ب د $\times$ د س =
ب د

فرع اول اذا رُسِم من نقطة خارج دائرة خطان قاطعان مثل ا ب ا س



فالشكلان القائما الزوايا مسطحا كل خط في القسم منه
الواقع خارج الدائرة هما متساويان فالقائم الزوايا ب ا
 $\angle ا ي س = \angle ا ق د$ لان كل واحد منها يعدل مربع
الخط المستقيم ا د الذي يمس الدائرة
فرع ثانٍ . ماسان مرسومان من نقطة واحدة
هما متساويان

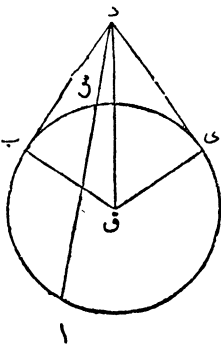
فرع ثالث. بما ان نصف القطر الواقع على نقطة
الماسة هو عمود على الماس فبالضرورة الزاوية الواقعة
بين ماسين مرسومين من نقطة واحدة تنصف بخط مستقيم مرسوم من مركز الدائرة
الى تلك النقطة لانه وتر مشترك بين مثلثين متساويين قائمي الزاوية

—x—

القضية السابعة والثلاثون . ن

اذا رُسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة
والآخر يلاقيها فالقائم الزوايا مسطح كل الخط القاطع في الجزء منه
الواقع خارج الدائرة ان عدل مربع الخط الذي يلاقيها فذلك الخط
ماس الدائرة

لتكن د نقطة خارج الدائرة ا ب ي وليرسم منها الخط المستقيم د س ا حتى
يقطع الدائرة والخط المستقيم د ب حتى يلاقيها فالقائم
الزوايا ا د س ان عدل مربع د ب فالخط د ب
يمس الدائرة



ارسم الخط المستقيم د ي حتى يمس الدائرة (ق ١٧)
ك (٢) واستعمل المركز ق وارسم ق ب ق د ق ي فالزاوية
ق ي د قائمة (ق ١٨ ك ٢) ومن حيث ان د ي يمس
الدائرة ا ب س و د س ا يقطعها فالقائم الزوايا ا د س

د س يعدل مربع د ي (ق ٢٦ ك ٢) وقد فرض ان القائم الزوايا ا د س يعدل

مربع د ب فربع دى يعدل مربع د ب والخط المستقيم دى يعدل الخط المستقيم
د ب . وقى = ق ب فالخطان دى قى يعدلان د ب ب ق والقاعدة د ق
مشتركة بين المثلثين د ب ق دى ق فالزاوية دى ق تعدل الزاوية د ب ق
(ق ٨ ك ١) ولكن دى ق انما هي قائمة فالزاوية د ب ق ايضاً قائمة وب ق اذا
أخرج يكون قطراً للدائرة والخط الذي يُحدث مع النظر من طرفي زاوية قائمة فهو
يمس الدائرة (ق ٦ ك ٣) فالخط د ب هو ماس الدائرة ا ب س

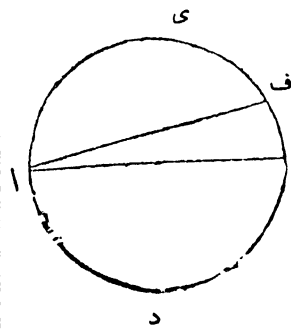
—xox—

مضافات الى الكتاب الثالث

قضية ١٠ ن

قطر الدائرة يقسمها ومحيطها الى قسمين متماثلين . وبالقلب الخط الذي
يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطر

ليكن ا ب قطر الدائرة اى ب د فالقسمان اى ب ا د ب متماثلان محيطاً
ومساحة . فان وضع الشكل اى ب على الشكل
ا د ب وبقيت قاعدتها المشتركة ا ب على
وضعها فالخط المخفي اى ب يقع على الخط
المخفي ا د ب والا لكانت في احدها نقط ب
مختلفة البعد عن المركز وذلك خلاف حد الدائرة
وبالقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى
قسمين متماثلين هو قطر



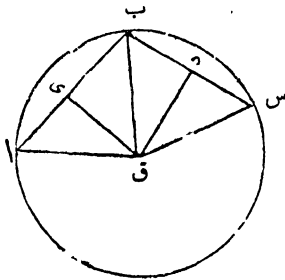
لنفرض ان ا ب يقسم الدائرة اى ب د الى قسمين متماثلين فان لم يكن المركز
في ا ب فليرسم ا ف ماراً في المركز . فهو اذا قطر ويقسم الدائرة الى قسمين متماثلين .
فالقسم اى ف يعدل القسم اى ف ب وذلك محال
فرغ . قوس وترها قطر في نصف محيط . والشكل المحاط بهذه القوس مع وتره
هو نصف دائرة

—xox—

قضية ب . ن

يمكن ان تُرسم دائرة واحدة محيطها مارٌّ بثلاث نُقْطٍ مفروضة ان لم تكن في خطٍّ واحد مستقيم . ولا تُرسم الا دائرة واحدة محيطها مارٌّ بهذه النُقْط الثلاث

لكن ا ب س النقط الثلاث المفروضة ولا تكون في خطٍّ واحدٍ مستقيم فهي في محيط دائرة واحدة



ارسم ا ب و ب س ونصفهما في د وى بالعمودين د ق وى اللذين لابد من التقائهما في نقطة ما كالنقطة ق . لانه لو كانا متوازيين لكان د ب ب وى متوازيين ايضاً (فرع ٢ ق ٢٩ ك ١) او كانا في خطٍّ واحدٍ مستقيم ولكنهما

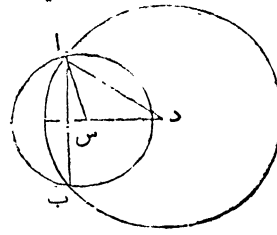
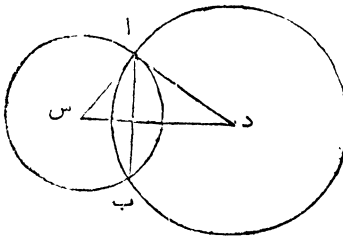
التقيا في ب و ا ب س ليس خطاً مستقيماً حسب المفروض اولاً . ارسم ق ا ق س ق ب . فن حيث ان ق ا ق ب يلاقيان ا ب على بعدٍ واحدٍ من العمود هما متساويان . ولهذا السبب ق ب ق س متساويان ايضاً فالنقط الثلاث ا ب س هي على بعدٍ واحدٍ من النقطة ق وواقعة في محيط دائرة مركزها ق ونصف قطرها ق الامر واضح انه لا يمر بهذه النقط محيطٌ آخر . لان المركز واقع في العمود د ق الذي ينصف الوتر ا ب . وهو ايضاً في العمود ق وى الذي ينصف الوتر ب س (فرع ا ق ٢ ك ٢) فلا بد من وقوعه عند نقطة تقاطع هذين العمودين وحيث لا يكون الا مركز واحد لا يكون الا محيط واحد

قضية ج . ن

اذا تقاطعت دائرتان فالخطُّ المستقيم المارٌّ بمركزيهما هو عمودٌ على الوتر الموصل بين نقطتي التقاطع وينصفه

ليكن س د الخط المستقيم الموصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين . فهو

عمودٌ على الوتراب الموصل بين نقطتي التقاطع



لأن
المخطَّاب
الموصل
بين
نقطتي

التقاطع هو وترٌ مشترك بين الدائرتين وإذا رُسم عمودٌ من وسط هذا الوتر يبرُّ بكل واحدٍ من المراكزين س ود (فرع ١ ق ٢ ك ٢) ولا يمكن أن يرسم أكثر من خطٍّ واحدٍ مستقيم مارٌّ بنقطتين مفروضتين . فالخط المارٌّ بمركزيهما ينصف الوتر ويحدِّث معه قائمتين أي يكون عمودًا عليه

فرعٌ . الخط المستقيم الموصل بين نقطتي تقاطع دائرتين هو عمودٌ على الخط المستقيم الموصل بين مركزيهما

تعليلٌ . أولاً . إذا تقاطعت دائرتان فالبعد بين مركزيهما هو أقصر من مجموع نصفي قطريهما . ونصف القطر الأطول هو أقصر من مجموع نصف القطر الأقصر مع البعد بين المراكزين . لأن س د هو أقصر من س ا + ا د (ق ٢٠ ك ١) وإد > اس + س د

ثانياً . بالقلب . إذا كان البعد بين مركزي دائرتين أقل من مجموع نصفي قطريهما وكان نصف القطر الأطول أقصر من نصف القطر الأقصر مع البعد بين المراكزين فالدائرتان تتقاطعان

لأنه لكي يكون التقاطع ممكناً يلزم أن يكون المثلث س ا د ممكناً ولذلك يلزم أن يكون س د > اس + ا د وأن يكون نصف القطر الأطول ا د > اس + س د . وإذا كان المثلث اس د ممكناً فالامر واضح أن الدائرتين المرسومتين على المراكزين س ود تتقاطعان في ا ب

فرعٌ أول . إذا كان البعد بين مركزي دائرتين أكثر من مجموع نصفي قطريهما فالدائرتان لا تتقاطعان

فرعٌ ثان . إذا كان البعد بين المراكزين أقل من فضلة نصفي القطرين فالدائرتان لا تتقاطعان . لأن اس + س د < ا د فإذا س د < ا د - اس أي ضلعٌ من مثلث

هو أطول من فضلة الضلعين الآخرين . فالمثلث غير ممكن متى كان البعد بين المركزين أقل من فضلة نصفي القطرين فلا يمكن عند ذلك ان تقاطع الدائرتان

—o—

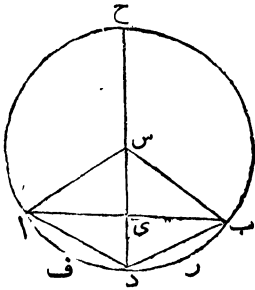
قضية د . ن

في دائرة واحدة الزوايا المتماثلة في المركز تقابلها اقواس متماثلة وبالقلب

الاقواس المتماثلة تقابل الزوايا المتماثلة في المركز

لتكن س مركز الدائرة . والزاوية اس د فلنعدل ب س د . فالقوس ا ف د

التي تقابل الزاوية الواحدة تعدل القوس ب ر د
التي تقابل الزاوية الأخرى



ارسم ا د و د ب . فالمثلثان اس د ب س د

هما متساويان لأن ضلعين وزاوية من الواحد تعدل

ضلعين وزاوية من الآخر فاذا وضع احدها على

الآخر يتطابقان والنقطة ا تقع على النقطة ب .

والنقطة د انما هي مشتركة بين القوسين . فطرفا

القوس ا ف د يقعان على طرفي القوس ب ر د فلا بد من مطابقة بقية اجزائها لأنها

على بعد واحد من المركز

وبالقلب لنفرض مساواة القوسين ا ف د ب ر د . فالزاوية اس د = ب س د

لأنه اذا وضعت احدي القوسين على الأخرى تتطابقان . وطرفا الوتر ا د يقعان

على طرفي الوتر ب د فالوتران متساويان (ق ٨ ك ١) والزاوية اس د = ب س د

فرع أول الزوايا المتساوية في المركز يقابلها اوتار متساوية . وبالقلب

الاورار المتساوية تقابل زوايا متساوية في المركز

فرع ثانٍ الاوتار المتساوية تقابل اقواساً متساوية . وبالقلب الاقواس

المتساوية تقابل اوتاراً متساوية

فرع ثالث اذا تنصفت الزاوية في المركز فالقوس والوتر اللذان يقابلانها

يتنصفان ايضاً

فرع رابع العمود على وسط الوتر ينصف الزاوية في المركز ويمر ايضاً بوسط

الفوس التي يقابلها الوثر

تعليقة المركز س والنقطة ى التي هي وسط الوتر اب والنقطة د التي هي وسط القوس التي يقابلها الوتر المذكور هي ثلث نُقط في خطٍ عموديٍّ على الوتر . ولكن الخط المستقيم يتعيّن وضعه بنقطتين . فكل خطٍ يمرُّ باثنتين من هذه النقط الثلاث يمرُّ بثالثها ايضاً ويكون عموداً على الوتر

قضيه . ن

قوسان بين خطين متوازيين هما متساويان . وبالقلم اذا وقع بين خطين مستقيمين غير متقاطعين في الدائرة قوسان متساويان فالخطان متوازيان

لهذه القضية ثلاثة احوال

الاول متى كان الخططان المتوازيان ماسيين مثل ا ب وس د . فكل واحد من القوسين بينهما نصف دائرة لآن نقطتي الماسة هما طرفا القطر (فرع ٢ ق ١٦ ك ٢)

الثاني متى كان احد الخططين ماساً مثل ا ب والاخر وترًا مثل غ ح . وهو عمود على ف ي الذي ينصف القوس غ ي ح (فرع ٤ ق د ك ٢) فالقوسان بينهما غ ي ح ي متساويتان

ب ي ا

ثالثاً متى كان الخطان المتوازيان

وَتَرَيْنِ مِثْلَ غُحٍّ وَلَمْ

فلمنقرض ان القطر في عمود

على غ ح . فيكون عمومًا على ل م ايضاً
لأنها متوازبان . والنظر بنصف كل

هذه الـوترين اي غـى = ح ي ول ي = م ي فبالضرورة لـ ي - غ ي = م ي
 - ح ي اي غ ل = ح م .

ثم بالقلب. اذا كان الخطان اب س د ماسين وكان القوسان ي ل ف ي م ف
متساويين يكون ي ف قطراً (ق اك ٢) واب س د متوازيين (فرع ٢ ق ١٦ ك ٢)

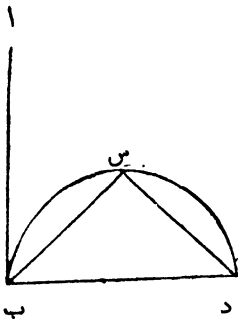
وإذا كان احدهما ا ب ماساً والآخر غ ح قاطعاً وكان القوسان ي غ ي ح
متساويين يكون القطرف ي الذي ينصف القوس غ ي ح عموداً على وتر غ ح
(تعليقة ق د ك ٢) وعلى ماساً ا ب فيها متوازيان

وإذا كان كلا الخطين قاطعاً مثل غ ح ول م وكان القوسان غ ل ح م بينهما
متساويين فلنفرض ان القطرف ي ينصف احدهما مثل غ ح في ك فهو ينصف
القوس غ ي ح ايضاً اي ي غ = ي ح وقد فُرض ان غ ل = ح م فالكل ي ل =
الكل ي م فالوتر ل م قد تنصف بالنظر ف ي . فقد تنصف كلا الوترين بالقطر
ف ي وها اذ ذاك عمودان عليه ومتوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١)

تعليقة . لا بد ان يشترط في هذه القضية ان الخطين لا يتقاطعان في الدائرة لأن
خطين مستقيمين مارّين في غ م وح ل يقطعان اقواساً متساوية غ ل ح م ولا يكونان
متوازيين

قضية و. ع

علينا ان نرسم ماساً في نقطة مفروضة من قوس دائرة بدون استعمال
المركز



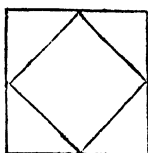
لتكن ب النقطة المفروضة . قس جزئين متماثلين
من القوس مثل ب س س د . ارم ب د وايضاً
الوترين ب س س د واجعل الزاوية س ب ا
تعديل س ب د (ق ٢٢ ك ١) فيكون الخط المستقيم
ب ا الماس المطلوب

لأن الزاوية س ب د = س د ب فالزاوية
س ب ا = س د ب (ق ٢٢ ك ٢) التي هي القطعة المتبادلة فإذا ب ا هو ماس في
النقطة ب

اصول الهندسة

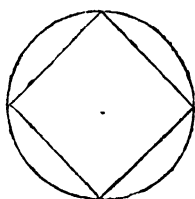
الكتاب الرابع

حدود

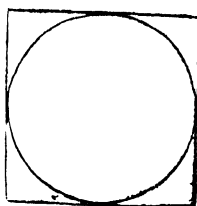


١ في شكلين اضلاعها مستقيمة متى كانت زوايا احدهما في اضلاع الآخر يقال ان الواحد مرسوم في الآخر

٢ اذا مرّت اضلاع شكل في زوايا شكل آخر يقال ان الواحد يحيط بالآخر

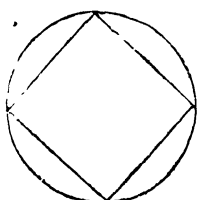


٣ متى كانت زوايا شكل ذي اضلاع مستقيمة في محيط دائرة يقال ان الشكل مرسوم في الدائرة



٤ شكل ذو اضلاع مستقيمة يحيط بدائرة متى كانت اضلاعه مماسات لمحيط الدائرة

٥ اذا مرّ محيط دائرة كل ضلع من اضلاع شكل ذي اضلاع مستقيمة يقال انها مرسومة في الشكل



٦ الدائرة تحيط بشكل ذي اضلاع مستقيمة متى مرّ محيطها بزوايا الشكل

٧ اذا انتهى طرفا خط مستقيم في محيط دائرة يقال انه موضوع او مرسوم في الدائرة

٨ شكل ذو زوايا كثيرة متى كان له خمسة اضلاع يسمى ذا خمس زوايا ويسمى ذا ست زوايا متى كانت اضلاعه ستة وذا سبع زوايا متى كانت اضلاعه سبعة ولم يجز

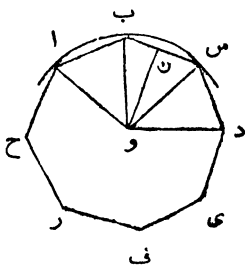
٩ شكل ذو زوايا كثيرة اذا كانت اضلاعه وزواياه متساوية يسمى قياسياً

سابقة

يمكن ان يُرسم في دائرة او محيطاً بها اي شكل ذي اضلاع كثيرة

قياسي فرض

ليكن ا ب س ي ح شكلاً قياسياً ذا اضلاع كثيرة. ارسم دائرة محيطها ماراً بالنقط
الثلاث ا ب س (ق ب مضافات ك ٢) ومركزها النقطة
و وليكن ون عموداً من المركز على وسط ب س. ارسم
او دو



فاذا وُضع ذو الاضلاع الاربعة ون س د على
ذوي الاضلاع الاربعة ون ب ا يتطابقان. لانّ الضلع
ون مشترك بين الشكلين والزاوية ون س = ون ب

لانها قائمتان . والضلع ن س يقع على الضلع ن ب والنقطة س تقع على النقطة ب
لانّ ن س = ن ب. وبما ان الشكل قياسي فالزاوية ن س د = ن ب ا فالحظ س د
يقع على ب ا والنقطة د تقع على النقطة ا لانّ س د = ب ا. فالشكلان يتطابقان
والخط و د = و ا فالحيط الذي يمر ايضاً في النقطة ا ب س يمر ايضاً في النقطة د.
وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان المحيط المار في ب س يمر في ي ايضاً وفي كل زوايا
الشكل المفروض فهو اذاً مرسوم في الدائرة

ثم اذا تمّ الشكل والدائرة كما تقدم نرى الاضلاع ا ب ب س س د الى آخره
انها اوتار متساوية وهي على بعد واحد من المركز (ق ١٤ ك ٢) فاذا جعلت النقطة و
مركزاً والعمود ون بعداً ورُسِّمت دائرة فمحيطها يمسّ الضلع ب س في وسطه وهكذا في
جميع اضلاع الشكل فترسم الدائرة في الشكل او الشكل حول الدائرة
فرع اول . اذا فرض شكل قياسي فيمكن ان تُرسم دائرة فيه واخرى محيطة به
ويكون لهما مركز واحد

فرع ثان . اذا امكن ان تُرسم دائرة في شكل مفروض واخرى محيطة به
فالشكل قياسي

تعليقة اولى . النقطة وهي مركز الدائرتين اي المحيطة بالشكل والمرسومة فيه هي
ايضاً مركز الشكل . ونسب الزاوية ا و ب الزاوية في المركز وهي مصطنعة من نصفي

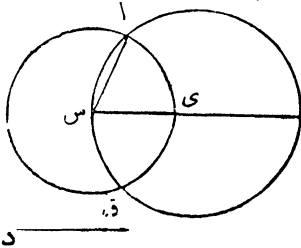
قطرين مرسومين من طرفي الضلع اب
بما ان كل الاوتار متساوية فكل الزوايا في المركز متساوية . فتستعمل كمية كل
واحدة منها بقسمة اربع زوايا قائمة على عدد اضلاع الشكل
تعليقة ثمانية . اذا اردنا ان نرسم شكلاً قياسياً مفروضاً عدد اضلاعه في دائرة
مفروضة فلنقسم محيط الدائرة الى اقسام متساوية تماثل عدد اضلاع الشكل (انظر
الشكل في ق ١٥ ك)



القضية الاولى . ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة خطاً مستقيماً يماثل خطاً مستقيماً
مفروضاً ليس اطول من قطر الدائرة

لكن اب س الدائرة المفروضة ود الخط المستقيم المفروض



ارسم ب س قطر الدائرة اب س ثم اذا
ماثل ب س الخط د فقد تم العمل لانه قد
وضع في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل د . والآن
فالخط ب س اطول من د . افطع الجزء
س ي حتى يماثل د (ق ١٥ ك) واجعل س

مركزاً و س ي بعداً وارسم الدائرة ا ي ق وارسم الخط س ا . فبما ان س مركز الدائرة
ا ي ق فالخط اس يعدل س ي . ولكن س ي يعدل د فالخط س ا يعدل د ايضاً
فقد رُسم في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل الخط المستقيم المفروض د الذي ليس اطول
من قطر الدائرة



القضية الثانية . ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة مثلثاً زواياه تماثل زوايا مثلث مفروض
لكن اب س الدائرة المفروضة ود ي ق المثلث المفروض . علينا ان نرسم في

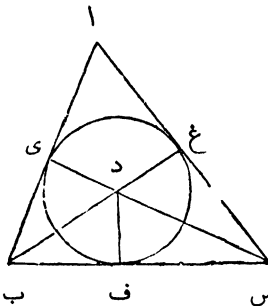
الزاوية ب ك س تعدل انزوية د ق ح . وفي النقط الثلاث ا ب س ارسم المماسات
ل ا م م ب ن ن س ل (ق ١٧ ك ٢)
لان م ل م ن ن ل مماسات في النقط ا ب س التي قد رُسم اليها من المركز
ك ا ك ب ك س فالزوايا عند هذه النقط الثلاث انما هي قائمات (ق ١٨ ك ٢)
والشكل ا ك ب م ذو اربعة اضلاع وهو قابل الانقسام الى مثلثين فزواياه الاربعة
تعدل اربع زوايا قائمة . وك ا م ك ب م قائمتان فالآخران ا ك ب ب م تعدلان
قائمتين والزاويتان د ي غ د ي ق تعدلان قائمتين (ق ٢٠ ك ١) فالزاويتان ا م ب
ا ك ب تعدلان د ي غ د ي ق . ولكن ا ك ب تعدل د ي غ فالاخري ا م ب
تعدل الاخري د ي ق وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان الزاوية ل ن م تعدل د ق ي
فالباقية من الواحد تعدل الباقية من الآخر اي م ل ن تعدل ي د ق (ق ٢٢ ك ١)
فالمثلث ل م ن قد رُسم محيطاً بالدائرة ا ب س وزواياه تعدل زوايا المثلث د ي ق

—*—

الفضية الرابعة . ع

علينا ان نرسم دائرة في مثلث مفروض

ليكن ا ب س المثلث المفروض . فعلينا ان نرسم فيه دائرة



نصف الزاويتين ا ب س ا س ب (ق ٩

ك ١) بالخطين المستقيمين ب د س والمتقاطعين

في النقطة د . ومن دارسم المخطوط د ي د ف

د غ عمودية على الاضلاع ا ب ب س س ا

ثم لان الزاوية ي ب د تعدل ف ب د من

حيث ان ا ب س تنصفت بالخط ب د ولان

القائمة ب ي د تعدل القائمة ب ف د فالمثلث ي ب د له زاويتان تعدلان زاويتين

من المثلث ف ب د والضلع ب د الذي يقابل زاويتين متساويتين مشترك بين

المثلثين . فالضلعان الآخران من الواحد يعدلان الآخرين من الآخر (ق ٢٦ ك ١)

اي د ي يعدل د ف وهكذا يبرهن ايضا ان د غ يعدل د ف والمخطوط الثلاثة د غ

د ف د ي متساوية واذا رُسمت دائرة من المركز د وتُحيط بعد د ي يمر المحيط في طرفي

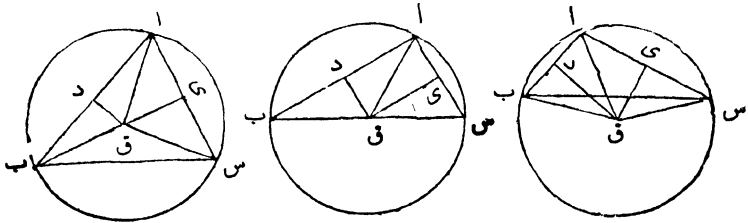
د ف ودغ ايضاً ويمس الاضلاع اب ب س س الا ان الزوايا عند هذه النقطى
ف غ هي قائمات . والخط المستقيم العمودي على طرف القطر هو ماس (فرع اول ق
١٦ ك ٣) فالخطوط الثلاثة اب ب س س اتمس الدائرة فقد رسمت الدائرة في
المثلث اب س

—x—

القضية الخامسة . ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمثلث مفروض

ليكن اب س المثلث المفروض . فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



نصف اب واس في دوى (ق ١٠ ك ١) ومن هاتين النقطتين ارسم د ق
ى ق عودين على اب واس (ق ١١ ك ١) فاذا اخرج د ق ى ق بليتيان والى
فهما متوازيان واب واس العموديان عليهما متوازيان ايضاً وذاك محال . فلنفرض
التقاءهما في ق وارسم ق ا وان لم تكن النقطة ق في الخط ب س فارسم ب ق س ق
لان ا د يعدل د ب ود ق مشترك بين المثلثين وعمود على اب فالفائدة ا ق
تعدل القاعدة ب ق (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان س ق يعدل ا ق ولذلك ب ق
يعدل س ق والخطوط الثلاثة ق ا ق ب ق س متساوية واذا جعلت النقطة ق
مركزاً واحداً من هذه الخطوط بعداً فمحيط الدائرة تر بطرفي الآخرين وترسم حول
المثلث

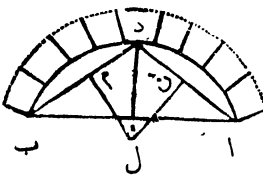
فرع . متى وقع مركز الدائرة داخل المثلث كانت كل واحدة من زواياه اصغر
من قائمة لان كل واحدة منها في نقطة اكبر من نصف دائرة . ومتى كان المركز في احد
الاضلاع فالزاوية المقابلة له قائمة لانها في نصف دائرة . ومتى وقع المركز خارج المثلث
فالزاوية المقابلة للضلع الذي كان المركز خارجه اكبر من قائمة لانها في قطعة اصغر

من نصف دائرة . فاذا كان المثلث المفروض حادّ الزوايا يقع المركز داخله وإذا كان ذا قائمة يقع المركز في الضلع الذي يقابل القائمة وإذا كان منفرج الزاوية يقع المركز خارج الضلع الذي يقابل المنفرجة .

تعليقة

(١) يتضح من هذه القضية ان المخطوط الثلاثة العمودية على اواسط اضلاع مثلث تلقي في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

(٢) بموجب هذه القضية تُرسم قطعة من قنطرة وترها وعلوها مفروضان



ليكن ا ب وترها وعمود على وسطها علوها .

ارسم ا د ب ونصفها في م ون م ون ا رسم

عمودين ل م ل ن المتقيين في ل مركز الدائرة .

فالخطوط ل ب ل د ل ا متساوية والحلول بين

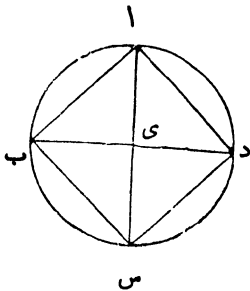
حجارة القنطرة هي كانتها منتظمة من انصاف اقطار الدائرة

—o—

القضية السادسة . ع

علينا ان نرسم مربعاً في دائرة مفروضة

لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلياً ان نرسم فيها مربعاً



ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد

منها عموداً على الآخر وارسم ا ب ب س س د د ا

النقطة ي هي مركز الدائرة ولذلك ب ي

يعدل ي د وقد جعل ا ي عموداً على ب د والمثلثان

ا ب ي ا د ي لهما الضلع المشترك ا ي فالقاعدة ا ب

تعدل القاعدة ا د (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان

ب س وس د يعدلان ا ب او ا د فالشكل ا ب س د متساوي الاضلاع . وهو

ايضاً قائم الزوايا . لانّ ب د قطرب ا د نصف دائرة فالزاوية ب ا د قائمة (ق ٣١

ك ٢) هكذا يبرهن ايضاً ان ا ب س د س د ا قائمات فالشكل ا ب س د

قائم الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو مربع وقد رُسم في الدائرة ا ب س د

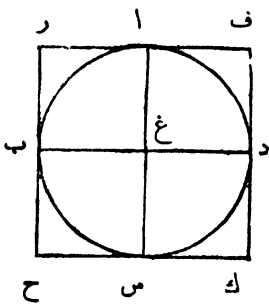
تعليقة. المثلث اى د قائم الزاوية ومتساوي الساقين فلنا (فرع ٣ ق ٤٧ ك ١)
د اى ١:٣:٦:١٠ اى ضلع مربع في دائرة الى نصف القطر كجذر اثنين المائل الى واحد



القضية السابعة. ع

علينا ان نرسم مربعاً محيطاً بدائرة مفروضة

ليكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلينا ان نرسم مربعاً محيطاً بها



ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد منها عموداً على الآخر. وفيه النقط ا ب س د ارسم المماسات ر ف ر ح ك ك ف (ق ١٧ ك ٢) لأن ر ف ممس الدائرة وقد رُسم غ ا من المركز الى نقطة الماسة فالزاويتان عند ا قائمتان (ق ١٨

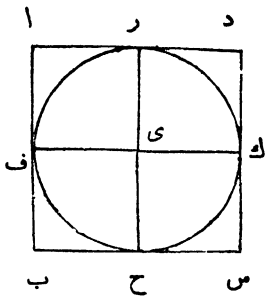
ك ٢) وهكذا يبرهن ان الزوايا عند ب وس ود قائمات. فبما ان ا غ ب قائمة و غ ب كذلك فالخط ر ح يوازي ا س وهكذا يبرهن ان ا س يوازي ف ك وان ر ف و ح ك يوازيان ب د فالاشكال ر ك س ا ك ف ب ب ك هي متوازية الاضلاع و ر ف يعدل ح ك (ق ٢٤ ك ١) و ر ح يعدل ف ك . ومن حيث ان ا س يعدل ب د و يعدل ر ح و ف ك ايضاً و ب د يعدل ر ف و ح ك فالخطان ر ح ف ك يعدلان ر ف ا و ح ك فالشكل ف ر ح ك متساوي الاضلاع . وهو ايضاً قائم الزوايا لأن ر ب غ ا متوازي الاضلاع و ا غ ب قائمة تكون ا ر ب ايضاً قائمة (ق ٢٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان كل واحدة من الزوايا عند ح وك و ف قائمة فالشكل ف ر ح ك قائم الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو مربع وقد رُسم محيطاً بالدائرة ا ب س د



القضية الثامنة. ع

علينا ان نرسم دائرة في مربع مفروض

ليكن ا ب س د المربع المفروض . فعلينا ان نرسم فيه دائرة

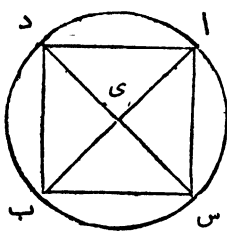


نصف الضلع ا ب في ف والضلع ا د في ر
(ق ١٠ ك ١) ومن ر ا رسم ح حتى يوازي ا ب او
د س ومن ف ا رسم ف ك حتى يوازي ا د او ب س
فكل واحد من الاشكال ا ك ب ا ح د ا ي
ي س ب ي ي د متوازي الاضلاع واضلاعاها
المتقابلة متساوية (ق ٢٤ ك ١) فمن حيث ان ا د
يعدل ا ب و ا ر نصف ا د و ا ف نصف ا ب فبالضرورة ا ر يعدل ا ف فالضلعان
المقابلان لهذين متساويان ايضا اي ف ي يعدل ي ر وهكذا يبرهن ان ي ح و ي ك
يعدلان ف ي او ي ر فالخطوط الاربعة ي ر ي ف ي ح ي ك متساوية والدائرة
المرسومة على المركز ي وعلى بعد هذه الخطوط تمر باطراف الأخر. وهي تمس
الاضلاع الاربعة ايضا لأن الزوايا عند ر ف ح ك قائمات (ق ٢٩ ك ١) والخط
العمودي على طرف القطر انما هو ماس (ق ١٦ ك ٢) فكل واحد من الخطوط
الاربعة ا ب ب س س د د ا ماس الدائرة فندرسبت الدائرة في المربع المفروض

القضية التاسعة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمربع مفروض

ايكن ا ب س د المربع المفروض فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



ارسم ا س ب د المتقاطعين في ي. فلان د ا
يعدل ا ب والخط ا س مشترك بين المثلثين د ا س
ب س ا فالضلعان د ا س يعدلان ب ا س
والقاعدة د س تعدل القاعدة ب س فالزاوية د ا س
تعدل ب ا س (ق ٨ ك ١) فقد تنصفت الزاوية د ا ب
بالخط ا س وهكذا يبرهن ان الزوايا ا ب س ب س د ا قد تنصفت
بالخطين المستقيمين ا س ب د. فلكون الزاوية د ا ب تعدل ا ب س
و ي ا ب نصف د ا ب و ي ب ا نصف ا ب س فالزاوية ي ا ب تعدل ي ب ا
والضلع ا ي يعدل الضلع ب ي (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ي س ي د يعدلان

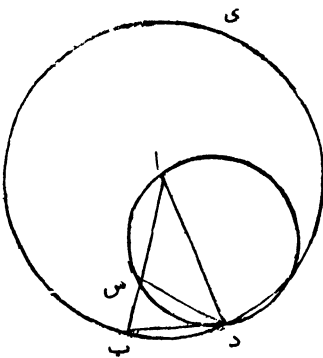
اى اوبى فالخطوط الاربعة اى اى بى سى د متساوية والدائرة المرسومة على المركزى وعلى بعد احد هذه المخطوط تمر باطراف الاخر وتحيط بالمربع اب س د

القضية العاشرة . ع

علينا ان نرسم مثلثا متساوي الساقين وكل واحدة من الزاويتين عند

القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

افرض خطا مستقيما مثل اب واقسمه (ق ١١ ك ٢) في س الى قسمين حتى ان القائم الزوايا اب خ بس يعدل مربع اس واجعل ا مركزا واب بعدا وارسم الدائرة ب دى . واجعل فيها (ق ١ ك ٤) الخط المستقيم ب د حتى يعدل اس الذي



ليس اطول من قطر الدائرة ب دى . ارسم دا د س . وارسم الدائرة اس د تحيط بالمثلث ا د س (ق ٥ ك ٤) فالمثلث اب د هو المطلوب اى كل واحدة من الزاويتين اب د ا د ب مضاعف الزاوية ب ا د

لان القائم الزوايا اب خ بس يعدل مربع اس واس يعدل ب د فالقائم الزوايا

اب خ بس يعدل مربع ب د . ولانه قد رُسم الخط المستقيم ب س ا والخط المستقيم ب د من النقطة ب خارج الدائرة اس د الواحد قاطع الدائرة والاخر يلاقيها والقائم الزوايا اب خ بس مسطح كل القاطع في الجزء منه الواقع خارج الدائرة يعدل مربع ب د الذي يلاقي الدائرة اس د فالخط ب د ماس للدائرة اس د (ق ٢٧ ك ٢) ولان ب د ماس ود س قاطع من نقطة الماسة فالزاوية ب د س (ق ٢٢ ك ٢) تعدل الزاوية د اس في القطعة المتبادلة من الدائرة . أضف الى كل واحدة منها الزاوية س د ا فكل الزاوية ب د ا تعدل الزاويتين س د ا د اس . ولكن الزاوية الخارجة ب س د (ق ٢٢ ك ١) تعدل الزاويتين س د ا د اس فالزاوية ب د ا تعدل ب س د . ولكن ب د ا تعدل س ب د لان الساق ا د يعدل الساق اب (ق ٥ ك ١) فالزاوية س ب د او د ب ا تعدل ب س د فالزوايا الثلاث

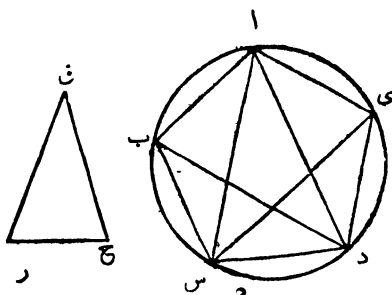
ب د ا د ب ا ب س د متساوية . ولأن الزاوية د ب س تعدل ب س د فالضلع
ب د يعدل الضلع س د (ق ٦ ك ١) وب د يعدل اس ولذلك س د يعدل اس
ايضاً والزاوية س د ا تعدل س ا د (ق ٥ ك ١) وس د ا س ا د معاً مضاعف
س ا د . ولكن ب س د تعدل س د ا س ا د (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ب س د
مضاعف س ا د . وب س د تعدل كل واحدة من الزاويتين ب د ا د ب ا فكل
واحدة من هاتين مضاعف الزاوية ب ا د ففد رُسم مثلث متساوي الساقين وكل
واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

فرع أول . الزاوية ب ا د هي خمس قائمتين . لأن كل واحدة من ا ب د
ا د ب مضاعف ب ا د فهما معاً تعدلان اربعة امثال ب ا د والثلاث زوايا معاً
تعدل خمسة امثال ب ا د والثلاث معاً تعدل قائمتين اي خمسة امثال ب ا د تعدل
قائمتين او ب ا د تعدل خمس قائمتين

فرع ثان . لان ب ا د خمس قائمتين او عشر اربع قائمات فكل الزوايا في
المركز ا تعدل معاً عشرة امثال ب ا د وتقبل الانقسام الى عشرة اقسام كل واحد
يعدل ب ا د وهذه الزوايا العشر في المركز تقابلها عشرة اقواس متساوية فالقوس
ب د هي عشر المحيط والخط المستقيم ب د او اس يعدل ضلعاً من ذي عشرة
اضلاع مرسوم في الدائرة ب د ي

القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع في دائرة مفروضة
لتكن ا ب س د ي الدائرة المفروضة . فعلينا ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا



خمس اضلاع . ارم مثلثاً متساوي
الساقين ق ر ح له كل واحدة من
الزاويتين عند القاعدة ا ي عند ر
وح مضاعف الزاوية عند ق (ق ١٠
ك ٤) وفي الدائرة ا ب س د ي ارم
المثلث المتساوي الساقين ا س د

زوایاءُ تماثل زوایا المثلث ق ر ح (ق ٢ ك ٤) ای الزاوية س ا د تماثل الزاوية عند ق والزاوية ا س د تماثل الزاوية عند ر و ا د س تماثل الزاوية عند ح . فكل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س هي مضاعف س ا د نصفها بالمخططين المستقيمين س ی د ب (ق ٩ ك ١) وارسم ا ب ب س ای ی د فالشكل ا ب س د ی هو الشكل المطلوب ذو خمسة اضلاع قیاسی*

بما ان كل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س مضاعف س ا د وقد تنصفتا بالمخططين المستقيمين د ب س ی فالزوایا الخمس د ا س ی س د س د ب ب د ا متساوية . والزوایا المتساوية تقابلها اقواسٌ متساوية (ق ٢٦ ك ٣) فالاقواس الخمسة ا ب ب س س د د ی ی ا متساوية . والاقواس المتساوية تقابلها خطوط متساوية (ق ٢٩ ك ٣) فالخطوط ا ب ب س س د د ی ی ا متساوية والشكل ا ب س د ی ذو خمسة اضلاع متساوية . وهو ايضا متساوي الزوایا لان القوس ا ب تعدل القوس د ی . فاذا اُضيف اليها ب س د فلكل ا ب س د يعدل الكل ی د س ب . والزاوية ای د واقفة على القوس ا ب س د والزاوية ب ای د على القوس ی د س ب . فالزاوية ب ای د تعدل الزاوية ای د (ق ٢٧ ك ٣) وهكذا يبرهن ان الزوایا ا ب س ب س د س د ی تعدل ب ای او ای د فالشكل ا ب س د ی متساوي الزوایا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع قیاسی وقد رُسم في الدائرة المفروضة

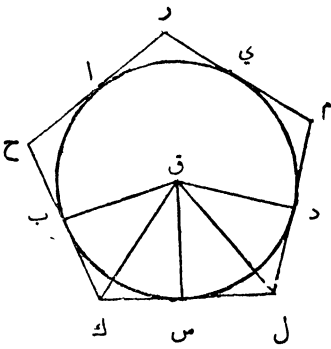
طريقة اخرى . اقسم نصف قطر الدائرة المفروضة حتى ان القائم الزوایا مسطح كل الخط في احد القسمين يعدل مربع القسم الاخر (ق ١١ ك ٢) وارسم خطاً يعدل اكبر القسمين على جانبي نقطة مفروضة في الدائرة المفروضة فكل واحد منها يقطع قوساً عُشر المحيط (فرع ٢ ق ١٠ ك ٤) فالقوسان معاً خمس المحيط ووترهُ ضلع شكل ذي خمسة اضلاع قیاسی في الدائرة

—*—

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قیاسياً ذا خمسة اضلاع محيطاً بدائرة مفروضة
لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . علينا ان نرسم شكلاً قیاسياً ذا خمسة اضلاع

يحيط بها



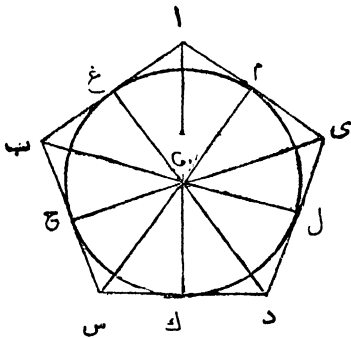
لكن زوايا شكل قياسي ذي خمسة
اضلاع في الدائرة في النقط ا ب س د ي
فلا قواس ا ب ب س س د د ي متساوية
(ق ١١ ك ٤) وفي النقط ا ب س د ي
ارسم الخطوط ر ح ح ك ل م م ر
حتى تمس الدائرة (ق ١٧ ك ٣) استعلم المركز
ق وارسم ق ب ق ك ق س ق ل ق د

فبا ان الخط المستقيم كل يمس الدائرة ا ب س د ي في النقطة س التي
رُسم اليها ق س من المركز فالخط ق س عمود على كل (ق ١٨ ك ٢) والزوايتان
عند س قائمتان . وهكذا يبرهن ايضا ان الزوايا عند ب و د قائمتان . ولكون
ق س ك قائمة فمربع ق ك يعدل مجموع مربعي ق س س ك (ق ٤٧ ك ١)
ولكون ق ب ك قائمة فمربع ق ك يعدل مربعي ق ب ب ك فمربع ق س س ك
يعدلان مربعي ق ب ب ك . ومربع ق س يعدل مربع ق ب فالباقى مربع س ك
يعدل الباقي مربع ب ك والخط س ك يعدل الخط ب ك . وبما ان ق س
يعدل ق ب وق ك مشترك بين المثلثين ق س ك ق ب ك فالضلعان ب ق
ق ك يعدلان الضلعين س ق ق ك والقاعدة س ك تعدل القاعدة ب ك . فالزاوية
ب ق ك تعدل الزاوية س ق ك (ق ٨ ك ١) وب ك ق تعدل س ك ق . فكل
الزاوية ب ق س هي مضاعف ك ق س وب ك س مضاعف ق ك س . وهكذا
يبرهن ان الزاوية س ق د مضاعف س ق ل وس ل د مضاعف س ل ق .
ولكون القوس ب س يعدل القوس س د فالزاوية ب ق س تعدل س ق د
(ق ٢٧ ك ٣) وب ق س مضاعف ك ق س وس ق د مضاعف س ق ل فالزاوية
ك ق س تعدل س ق ل . والقائمة ق س ك تعدل القائمة ق س ل فالمثلثان
ق ك س ق ل س لهما زاويتان من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلع
ق س مشترك بينهما فالمثلثان متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك س يعدل الضلع
س ل والزاوية ق ك س تعدل ق ل س . ولكون ك س يعدل س ل فالخط
ك ل مضاعف ك س . وهكذا يبرهن ان ح ك مضاعف ب ك . ولكن ب ك

يعدل ك س كما قد تبرهن سابقاً فالخط ك ل يعدل ح ك (اولية ٦) وهكذا يبرهن ان رح رم ل يعدل ح ك او ك ل . فالشكل رح ك ل م ذو خمسة اضلاع متساوية وزواياه متساوية ايضاً لان الزاوية ق ك س تعدل ق ل س وح ك س مضاعف ق ك س وك ل م مضاعف ق ل س كما تقدم برهانه فالزاوية ح ك ل تعدل ك ل م . وهكذا يبرهن ان ل م ر م رح ك ل يعدل ح ك ل او ك ل م . فالزوايا الخمس متساوية وقد تبرهن ان الشكل متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع قياسي محيطة بالدائرة المفروضة

القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع
ليكن ا ب س د ي الشكل المفروض . علينا ان نرسم فيه دائرة
نصف الزاويتين ب س د س د ي بالخطين المستقيمين س ق د ق . ومن
ق نقطة التقائهما ارسم الخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ي . فلكون ب س يعدل
س د وق س مشترك بين المثلثين
ب س ق د س ق فالضلعان ب س
س ق يعدلان الضلعين د س س ق
والزاوية ب س ق تعدل الزاوية د س ق .
فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة ق د (ق ٤)
ك ا) وبقي الزوايا من الواحد تعدل بقية
الزوايا من الآخر فالزاوية س ب ق تعدل



س د ق . ولان س د ي مضاعف س د ق وس د ي تعدل س ب اوس د ق =
س ب ق فالزاوية س ب ا مضاعف س ب ق فالزاوية ا ب ق تعدل س ب ق .
فالزاوية ا ب س قد تنصفت بالخط المستقيم ب ق . وهكذا يبرهن ان ب ا ي ا د
تنصفتا بالخطين المستقيمين ا ق ي ق

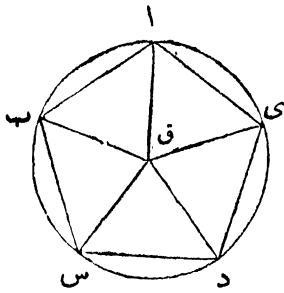
ثم من النقطة ق (ق ١٢ ك ا) ارسم ق غ ق ح ق ك ق ل ق م عمودية
على الخطوط المستقيمة ا ب س س د د ي ي ا . فن حيث ان الزاوية
ح س ق تعدل ك س ق والقائمة ق ح س تعدل القائمة ق ك س والضلع ق س

مشترك بين المثلثين فالضلع الثالث ق ح يعدل الثالث ق ك (ق ٢٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ل ق م ق غ تعدل ق ح اوق ك فالخطوط الخمسة المذكورة متساوية. فالدائرة المرسومة على المركز ق وعلى بعد احد هذه الخطوط تمرُّ باطراف الأخر وتقس الخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ي ا. ومن حيث ان الزوايا عند النقط غ ح ك ل م قائمات فالخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ي ا هي عمودية على اطراف انصاف الاقطار فهي ماسآت (فرع ١ ق ١٦ ك ٢) فقد رُسِّمت الدائرة في الشكل المفروض



الفضية الرابعة عشرة . ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بشكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع
ليكن ا ب س د ي شكلاً مفروضاً قياسياً ذا خمسة اضلاع. فعلينا ان نرسم دائرة
تحيط به



نصف الزاوية ب س د بالخط المستقيم
س ق والزاوية س د ي بالخط المستقيم د ق
(ق ٩ ك ١) ومن ق نقطة النفاثهما ارسم الخطوط
المستقيمة ق ب ق ا ق ي الى النقط ب و ا و ي .
فيبرهن كما في القضية السابقة ان الزوايا س ب ا
ب ا ي ا ي د قد تنصفت بالخطوط المستقيمة

ق ب ق ا ق ي . ومن حيث ان الزاوية ب س د تعدل س د ي والزاوية
ق س د انما هي نصف ب س د وس د ق نصف س د ي فالزاوية ق س د تعدل
س د ق فالضلع ق س يعدل الضلع ق د (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ب
ق ا ق ي تعدل ق س اوق د فهذه الخطوط الخمسة المستقيمة متساوية واذا جعلت
النقطة ق مركزاً وأحد هذه الخطوط بعداً ورُسِّمت دائرة فمحيطها يمرُّ باطراف الأخر
وهي تحيط بالشكل القياسي ذي الخمسة الاضلاع ا ب س د ي



القضية الخامسة عشرة . ع

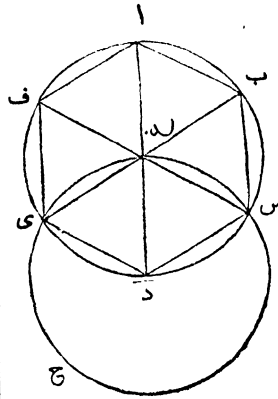
علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا ستة اضلاع في دائرة مفروضة
لتكن ا ب س د ي ف الدائرة المفروضة . فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا
ستة اضلاع

استعلم المركز غ وارسم القطر ا غ د واجعل د مركزاً ود غ بعداً وارسم الدائرة
ي غ س ح . ارسم الخط ي غ والخط غ س واخرجهما الى ب وف . ثم ارسم المخطوط
المستقيمة ا ب ب س د د ي ي ف ف ا

فالشكل ذو الستة الاضلاع ا ب س د ي ف هو
قياسي اي اضلاعه وزواياه متساوية

من حيث ان النقطة غ هي مركز الدائرة
ا ب س د ف فالخط غ ي يعدل الخط غ د ولأن
د مركز الدائرة غ س ج ي فالخط د ي يعدل د غ
فالخط غ ي يعدل د ي والثلث ي غ د هو
متساوي الاضلاع وزواياه الثلاث متساوية (فرع

ق ٥ ك ١) وزوايا كل مثلث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ي غ د هي ثلث
قائمتين . وهكذا يبرهن ان الزاوية د غ س ثلث قائمتين . ومن حيث ان الخط المستقيم
ي غ س احدث مع ي ب الزاويتين المتواليتين ي غ س س غ ب حتى تعدلا قائمتين
(ق ١٢ ك ١) فالزاوية س غ ب تعدل ثلث قائمتين . فالزوايا الثلاث ي غ د
د غ س س غ ب متساوية . والزوايا المتقابلة ب غ ا ا غ ف ف غ ي (ق ١٥
ك ١) متساوية ايضاً . فالزوايا الست ي غ د د غ س س غ ب ب غ ا ا غ ف
ف غ ي متساوية . والزوايا المتساوية في المركز تقابلها اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٣)
والاقواس المتساوية تقابلها خطوط مستقيمة متساوية (ق ٢٩ ك ٣) فالخطوط الستة
ا ب ب س د د ي ي ف ف ا متساوية . والشكل ذو الاضلاع الستة
ا ب س د ي ف متساوي الاضلاع . وهو متساوي الزوايا ايضاً . لأن القوس ا ف
تعدل القوس ي د فاذا اضيف الى كل واحد منها القوس ا ب س د فالكمل ف ا
ب س د تعدل الكل ي د س ب ا . والزاوية في د هي على القوس ف ا ب س د

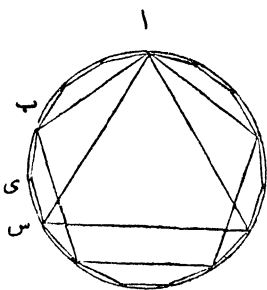


والزاوية ا ف ي هي على القوس ي د س ب ا فالزاوية ا ف ي تعدل الزاوية
ف ي د وهكذا يبرهن في بقية زوايا الشكل انها تعدل ا ف ي او ف ي د فالشكل
ا ب س د ي ف متساوي الزوايا . وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو قياسي
وقد رُسم في الدائرة المفروضة ا ب س د ي ف
فرع . ضلع شكل ذي ستة اضلاع قياسي في دائرة يعدل نصف قطر الدائرة
واذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في النقط ا ب س د ي ف يحدث شكل
قياسي ذو ستة اضلاع محيط بالدائرة وعلى هذا الاسلوب تُرسم دائرة في شكل قياسي
مفروض ذي ستة اضلاع او محيطه بـ حسب ما تقدم في ذي خمسة اضلاع

—ooo—

القضية السادسة عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة عشر ضلعاً في دائرة مفروضة
لكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا خمسة
عشر ضلعاً



ليكن ا س ضلع مثلث متساوي الاضلاع
في الدائرة (ق ٢ ك ٤) و ا ب ضلع شكل قياسي
ذي خمسة اضلاع في الدائرة (ق ١١ ك ٤) .
فالقوس ا ب س هي ثلث المحيط او $\frac{1}{10}$ من
المحيط والقوس ا ب هي خمس المحيط اي $\frac{2}{10}$
من المحيط فالقوس ب س فضلتهما وهو $\frac{1}{10}$ من

المحيط . نصف ب س في ي (ق ٢٠ ك ٢) فكل واحد من ب ي ي س هو $\frac{1}{10}$
من المحيط فاذا رُسم الخطان المستقيمان ب ي ي س ووضع امثالهما في دائرة المحيط
(ق ١ ك ٤) يحدث شكل قياسي ذو خمسة عشر ضلعاً في الدائرة

اذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في زوايا الشكل المذكور يحدث شكل قياسي
ذو خمسة عشر ضلعاً محيط بالدائرة . وعلى هذا الاسلوب ايضاً حسب ما تقدم في شكل ذي
خمس اضلاع تُرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة عشر ضلعاً او محيطه بـ

تعليقة

اذا رُسم في دائرة شكل قياسي ذو اضلاع كثيرة وتنصفت الافواس التي تقابل
اضلاعه فيحدث شكل قياسي عدد اضلاعه مضاعف عدد اضلاع الاول . وهكذا
من المربع في دائرة تحدث اشكال ذات ثمانية اضلاع او ستة عشر ضلعاً او ٢٢
ضلعاً او ٦٤ ضلعاً الى آخره . ومن ذي ستة اضلاع في دائرة يحدث شكل ذو ١٢
او ٢٤ او ٤٨ او ٩٦ ضلعاً الى آخره . ومن ذي عشرة اضلاع يحدث
شكل ذو ٢٠ او ٤٠ او ٨٠ ضلعاً الى آخره . ومن
ذي خمسة عشر ضلعاً يحدث شكل ذو ٣٠
او ٦٠ ضلعاً الى آخره . ولكن الى
الآن لم توجد طريقة لرسم
شكل قياسي ذي
سبعة اضلاع
في دائرة



اصول الهندسة

الكتاب الخامس

حدود

١ المقدار هو ما كان له واحدًا أو أكثر من ثلاثة أشياء وهي طول وعرض وعمق فاذا فُرض مقداران أكبر واصغر وكان الاصغر قياسًا تامًا للأكبر اي وُجد فيه مرارًا معلومة بدون باقٍ فالاصغر جزء الأكبر

٢ اذا كان اصغر مقدارين قياسًا تامًا لأكبرها فالأكبر مضروب الاصغر

٣ التناسب هو التفاوت بين مقدارين من جنسٍ واحدٍ باعتبار الكمية

٤ المقادير هي من جنس واحد متى امكن زيادة الاصغر حتى يزيد عن

الأكبر والتناسب لا يقع إلا بين المقادير المتجانسة

٥ اذا فُرض اربعة مقادير وضرب الاول والثالث مرارًا ما وضرب الثاني والرابع مرارًا ما فاذا عدل الثالث الرابع عند ما عدل الاول الثاني او كان أكبر منه عند ما كان الاول أكبر من الثاني او اصغر منه عند ما كان الاول اصغر من

الثاني فيقال ان نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع

٦ المقادير المتناسبة هي التي كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع وتناسب الثالث الى الرابع مثل تناسب الخامس الى السادس ولم جراً
مها تعددت المقادير . فاذا كانت المقادير الاربعة ا ب س د متناسبة يقال ان
نسبة ا الى ب كنسبة س الى د وتكتب هكذا ا : ب :: س : د او ا : ب =

س : د

٧ اذا فُرض اربعة مقادير كما في الحد الخامس وقاس الاول الثاني مرارًا
أكثر مما يقاس الثالث الرابع يقال ان تناسب الاول الى الثاني هو اعظم من تناسب

الثالث الى الرابع وان تناسب الثالث الى الرابع هو اصغر من تناسب الاول الى الثاني
٨ متى تعددت المقادير وكان تناسب الاول الى الثاني يماثل تناسب الثاني
الى الثالث وتناسب الثاني الى الثالث يماثل تناسب الثالث الى الرابع وهلمّ جرّاً
يقال انها على نسبة متصلة

٩ متى كانت ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان الثاني متناسب متوسط
بين الآخرين

١٠ اذا تعددت المقادير المتجانسة كما في الحدّ الثامن يقال ان تناسب الاول
الى الاخير هو مركّب من تناسب الاول الى الثاني مع تناسب الثاني الى الثالث مع
تناسب الثالث الى الرابع وهلمّ جرّاً الى الاخير

فلو فرض اربعة مقادير ا ب س د يقال ان تناسب ا الى د هو
مركّب من تناسب ا الى ب مع تناسب ب الى س مع تناسب س الى د واذا فرض
ا:ب::ب:س::س:د::د:هـ فتناسب ا الى د هو مركّب
من تناسب ا الى ب مع ب الى س مع س الى د ومن تناسبات تعدل المذكورة
كتناسب س الى ف و غ الى ح وك الى ل

وهكذا اذا فرض بين م ون التناسب الواقع بين ا و د . فلاجل الاختصار
يقال ان التناسب بين م ون مركّب من التناسبات التي تركّب منها التناسب بين
ا و د اي من تناسب س الى ف و غ الى ح وك الى ل

١١ متى كانت ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى
الثالث هو مضاعف تناسب الاول الى الثاني . فاذا فرض ا:ب::ب:س
فتناسب ا الى س هو مضاعف تناسب ا الى ب، وحسب الحدّ السابق تناسب ا الى
س هو مركّب من تناسب ا الى ب وب الى س فالتناسب المركّب من تناسبتين
متماثلتين هو مضاعف كلّ منهما

١٢ متى كان اربعة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى
الرابع هو ثلاثة امثال تناسب الاول الى الثاني او الثالث الى الرابع واذا كان
خمس مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى الخامس هو اربعة امثال
تناسب الاول الى الثاني او الثاني الى الثالث وهلمّ جرّاً الى النهاية . فالتناسب
المركّب من ثلاث تناسبات متماثلة هو ثلاثة امثال كلّ منها والمركّب من اربع تناسبات

هو اربعة امثال كلٍّ منها وهلمَّ جرًّا

١٢ في اربع متناسبات تسمى الاولى والثالثة السابقين والثانية والرابعة التاليين والسابق مع تالييهما المتناسبان والسابقان معًا او التاليان معًا المتشابهان
١٤ التبادل في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الاول الى الثالث كالثاني الى الرابع (ق ١٦ كه)

١٥ القلب في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الثاني الى الاول كالرابع الى الثالث (قضية الف كه)

١٦ التركيب هو متى كان اربعة مقادير متساوية وكان الاول مع الثاني الى الثاني كالثالث مع الرابع الى الرابع (ق ١٨ كه)

١٧ القسمة هي متى كان اربعة مقادير متناسبة وكانت زيادة الاول عن الثاني الى الثاني كزيادة الثالث عن الرابع الى الرابع (ق ١٧ كه)

١٨ الطرح هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول الى زيادته عن الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (ق د كه)

—•••—

اوليات

- ١ اذا ضرب مقادير متساوية في كميات متساوية تبقى متساوية
- ٢ المقادير التي تقسم مقادير متساوية مراراً متساوية هي متساوية
- ٣ مضروب لمقدار اعظم هو اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار اصغر
- ٤ اذا كان مضروب لمقدار اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار آخر فالمقدار الاول اعظم من الثاني

—•••—

القضية الاولى . ن

اذا فرضت عدة مقادير قابلة الانقسام على عدة اخرى من المقادير مراراً معلومة كل واحد على نظيره فحسبما يتعدد كل من المقسومات

عليها في مقسومه هكذا يتعدد مجتمع المقسومات عليها في مجتمع المقاسم
(انظر كتاب علم الجبر ع ١٧٦)

لنفرض المقادير ا و ب و س قابلة الانقسام مراراً معلومة على المقادير
د و ي و ف كل واحد على نظيره فالججمع د + ي + ف يتعدد في الججمع ا + ب + س
كما يتعدد د في ا

لنفرض ان د يتعدد في ا ثلاث مرات وهكذا ي في ب و ف في س

فلكون ا بعدد ثلاث مرات لنا $ا = د + د + د + ا$

وايضاً $ب = ي + ي + ي + ب$

وايضاً $س = ف + ف + ف + س$

وبإضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية (اولية ٢ ك ا) $ا + ب + س$ يعدل $د + ي + ف$ ثلاث مرات وهكذا لو تعددت د و ي و ف في ا و ب و س أكثر او اقل
من ثلاث مرات

فرع. اذا فرضنا م عدداً ما كان م د + م ي + م ف = م (د + ي + ف) لأن
م د م ي م ف هي تعداد د ي ف مراراً تماثل م فجمعها يتعدد ايضاً مراراً تماثل م



القضية الثانية . ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما و اضيف الى الحاصل المقدار ذاته مضروباً
في عدد آخر فالججمع بعد ذلك المقدار مراراً تماثل الاحاد في مجتمع
المضروبين فيها . (انظر كتاب الجبر ع ١٨٧)

لنفرض $ا = م س$ و $ب = ن س$ فحينئذ $ا + ب = (م + ن) س$

لأن $ا = م س$ لنا $ا = س + س + س + س$ الخ م مرة وايضاً $ب = س + س + س + س$

س الخ ن مرة . فبإضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية $ا + ب = س$ متعددة

$م + ن$ مرة اي $ا + ب = (م + ن) س$ اي $ا + ب$ بعدد س مراراً تماثل الاحاد في م + ن

فرع أول . هكلما تعددت المضارب فلو فرض $ا = م ي$ و $ب = ن ي$

وس $ف = ي$ لنا $ا + ب + س = (م + ن + ي) ي$

فرع ثانٍ. وهكذا من حيث ان $ا + ب + س = م + ن + ف$ ي وقد فُرض
 $ا = م$ ي وب $= ن$ ي وس $= ف$ ي لنا م ي + ن ي + ف ي $= م + ن + ف$ ي

—x—

القضية الثالثة . ن

اذا فُرض ثلاثة مقادير وتعدّد الثاني في الاول مراراً تماثل الآحاد في
 عددٍ ما وتعدّد الثالث في الثاني مراراً تماثل الآحاد في عددٍ ما
 فالثالث يتعدّد في الاول مراراً تماثل الآحاد في حاصل هذين
 العددين . (انظر كتاب الجبر ع ١٨٢)

لنفرض $ا = م$ ب وب $= ن$ س فحينئذٍ $ا = م$ ن س
 لانه حسب المفروض ب $= ن$ س فلذلك م ب $= ن$ س + ن س + الخ م مرّة
 ون س + ن س + الخ م مرّة يعدل س في ن + ن + الخ م مرّة (فرع ثانٍ ع ٢ كه)
 ون مضافة الى ذاتها م مرّة يعدل ن في م اي م ن فاذن س + ن س + الخ م مرّة
 يعدل م ن س فاذن م ب $= م$ ن س وقد فُرض $ا = م$ ب فاذن $ا = م$ ن س

—x—

القضية الرابعة . ن

اذا فرضت اربعة مقادير متناسبة اي نسبة الاول الى الثاني كنسبة
 الثالث الى الرابع وضرب الاول والثالث في عددٍ ما وضرب الثاني
 والرابع في عددٍ ما فتكون نسبة مضروب الاول الى مضروب الثاني
 كنسبة مضروب الثالث الى مضروب الرابع (انظر كتاب الجبر ع ١٨٢)

لنفرض $ا : ب :: س : د$. وليكن م ون عددين فحينئذٍ $ا : ب :: م : ن$ و $ا : ب :: م : ن$ د
 ليتعدّد م اوم س مراراً تعدل الآحاد في ف وليتعدّد ن ب ون د مراراً
 تعدل الآحاد في ق فلنا $ق : ا :: م : س$ وايضاً $ق : ب :: ن : د$. فلكون
 $ا : ب :: س : د$ حسب المفروض وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث

اي ف م ا ف م س ومن الثاني والرابع اي ق ن ب ق ن د . فاذا كان ف م ا اكبر
من ق ن ب يكون ف م س اكبر من ق ن د (حذّه كه) فاذا كان ف م ا ق ن ب
متساويين يكون ف م س ق ن د متساويين واذا كان ف م ا اصغر من ق ن ب
يكون ف م س اصغر من ق ن د . ولكن ف م ا ف م س تعدّان م ا م س مراراً
متساوية وكذلك ق ن ب ق ن د تعدّان ن ب ن د مراراً متساوية ولذلك (حذّه
كه) م ا : ن ب :: م س : ن د

فرع . اذا فرض ا : ب :: م : د وضرب اوس ب في عدد ما مثل م تكون
نسبة م ا : ب :: م م : م د

—x—

القضية الخامسة . ن

اذا فرض مقداران احدهما بعد الآخر مراراً ما واخذ من كل واحد
منهما مقدار احدهما بعد الآخر كما يعدّ احد الاولين الآخر فالبقية من
الواحد تعدّ البقية من الآخر كما يعدّ كل الواحد كل الآخر
(انظر كتاب الجبر ع ١٦٦)

ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من مقدارين اوب وليكن ا اكبرها فالبقية
+ ا ب تعدّ في م ا - م ب مراراً تماثل تعداد في م ا اي م ا - م ب = م (ا - ب)
ليكن د فضلة اوب اي ا - ب = د . اضف ب الى الجانبين فلنا ا = د + ب .
فاذا (ق ا كه) م ا = م د + م ب . اطرح م ب من الجانبين فلنا م ا - م ب = م د
وقد فرض د = ا - ب فاذا م ا - م ب = م (ا - ب)

—x—

القضية السادسة . ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما وطرح من الحاصل المقدار ذاته مضروباً
في عدد اصغر من الاول فالباقي يعدّ ذلك المقدار مراراً تعدل الاحاد
في فضلة العددين (انظر كتاب الجبر ع ١٦٦)

لنفرض a مقداراً وليتعدد m مرة ون مرة اي m ا n وليكن m اكبر من n فحينئذ
 a يتعدد في m - a مراراً تعدل الاحاد في m - n اي m - a - n = a (m - n)
لنفرض ان m - n = q فحينئذ m = n + q . ثم m - a = n + q - a (q ٢ كه)
اطرح n من الجانبيين . m - a = n + q - a اي m - a - n = q اي a يتعدد q مراراً تعدل الاحاد
في q اي m - n مرة اي m - a - n = a (m - n)
فرع . اذا كانت فضلة العددين واحداً اي m - n = 1 فحينئذ m - a - n = a

قضية ا . ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة . فهي متناسبة ايضاً بالقلب

مفروض : $a :: b :: c :: d$: s
ليتعدد a وس m مرة اي m ا s . وليتعدد b ود n مرة اي n ب d .
فاذا كان m اصغر من n ب يكون m ا s اصغر من n د (حده كه) واذا كان
 n ب اكبر من m ا يكون n د اكبر من m س واذا كان n ب = m ا n د = m س
واذا كان n ب > m ا n د > m س ولكن n ب n د يعدان b ود مراراً
متساوية وم a س يعدان اوس مراراً متساوية فاذا (حده كه) $b :: c :: d :: s$

قضية ب . ن

في اربعة مقادير اذا تعدد الثاني في الاول او الاول في الثاني كما يتعدد
الرابع في الثالث او الثالث في الرابع تكون نسبة الاول الى الثاني
كنسبة الثالث الى الرابع

اولاً ليتعدد a وب m مرة ثم m ا : $a :: m$ ب : b
ليتعدد m ا b مراراً تعدل الاحاد في n اي n مرة . وليتعدد a وب مراراً
تعدل الاحاد في f اي f مرة فلنا (q ٢ كه) n ا f ا n م ب f ب . فاذا
كان n م ا اكبر من f ا يكون n م اكبر من f . واذا كان n م اكبر من f يكون
 n م ب اكبر من f ب فاذا كان n م ا اكبر من f ا يكون n م ب اكبر من
 f ب واذا كان n م ا = f ا n م ب = f ب . واذا كان n م ا > f ا

ن م ب > ف ب وقد تعدد م ا م في ن م ا ن م ب مراراً متساوية. وقد تعدد
ا و ب في ف ا ف ب مراراً متساوية فإذا م ا : ا : م ب : ب (حدّه كه)
ثانياً ليكن س جزءاً من ا (حدّا كه) وليكن د ذات ذلك الجزء من ب
فيتعدد س في ا كما يتعدد د في ب وحسباً قد تبرهن ا : س :: ب : د وبالقلب
(ق ا كه) س : ا :: د : ب

قضية ج . ن

إذا فرض أربعة مقادير متناسبة أي نسبة الأول الى الثاني كنسبة
الثالث الى الرابع وكان الأول مضروب الثاني او جزءاً منه فالثالث
ذات هذا المضروب او هذا الجزء من الرابع

مفروض ا : ب :: س : د. ولولا ليكن ا مضروب ب أي ليتعدد ب في ا مراراً
معلومة فيكون س ذات هذا المضروب من د أي د يتعدد في س كما يتعدد ب في ا
أي اذا كان ا = م ب فحينئذ س = م د

ليتعدد ا وس مرتين مثلاً أي ا ٢ س ٢ وليتعدد ب ود ٢ مرة أي ا ٢ م ٢ ب
٢ د (ق ٢ كه). فمن حيث ان ا = م ب ١٢ = ٢ م ب. ومن حيث ان ا : ب ::
س : د و ١٢ = ٢ م ب فإذا ا ٢ س ٢ = ٢ م د (حدّه كه) وس = م د أي د يتعدد
في س مراراً تعدل الأحاد في م أي م مرة أي كما يتعدد ب في ا

ثانياً ليكن ا جزءاً من ب فيكون س ذات هذا الجزء من د. لأن ا : ب :: س : د
وبالقلب (ق ا كه) ب : ا :: د : س. ولكن ا هو جزء من ب أي ب هو مضروب ا
وكما تقدم د هو ذات هذا المضروب من س أي س ذات الجزء من د الذي كان
من ب

القضية السابعة . ن

مقادير متساوية بينها وبين مقدار مفروض تناسب واحد. والمقدار
الواحد بينه وبين مقادير متساوية تناسب واحد. (جبر ع ١٥٨)

ليكن اوب مقدارين متساويين وس مقداراً آخر فنسبة ا: س :: ب: س
 ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من اوب ون وس مضروباً من س .
 فلكون ا = ب م ا = م ب ا (اولية اكه) فاذا كان م اكبر من ن س يكون م ب
 اكبر من ن س واذا كان م ا = ن م ب = ن س واذا كان م ا > ن س م ب
 > ن س . ولكن م ا م ب مضروبان متساويان من اوب ون س هو مضروب
 من س فاذا (حده اكه) ا: س :: ب: س
 ثانياً اذا كان ا = ب فنسبة س: ا :: س: ب لانه قد تبهرن ان ا: س :: ب: س
 وبالقلب (ق اكه) س: ا :: س: ب

القضية الثامنة . ن

اذا فرض مقادير غير متساوية فتناسب الاكبر الى مقدار مفروض هو
 اعظم من تناسب الاصغر الى ذلك المقدار . وتناسب ذلك المقدار
 الى الاصغر هو اعظم من تناسبه الى الاكبر (جبر ع^{١٦٣} وع^{١٦٤})
 ليكن ا + ب مقداراً اكبر من مقدار آخر هو ا وليكن س مقداراً ثالثاً فتناسب
 ا + ب الى س هو اعظم من تناسب ا الى س وتناسب س الى ا هو اعظم من تناسبه
 الى ا + ب
 ليكن م عدداً وليكن كل م ا م ب اكبر من س . وليكن ن س المضروب
 الاصغر من س الذي يريد على م ا + م ب ثم ن س - س اي (ن - ا) س (ق ا
 كه) يكون اصغر من م ا + م ب اي م ا + م ب او م (ا + ب) هو اكبر من
 (ن - ا) س . لان ن س هو اكبر من م ا + م ب وس اصغر من م ب يكون ن س -
 س اكبر من م ا اي م ا هو اصغر من ن س - س اي من (ن - ا) س . فاذا
 المضروب ا + ب في م هو اكبر من المضروب س في ن - ا ولكن المضروب ا في م
 ليس باكبر من المضروب س في ن - ا فاذا تناسب ا + ب الى س هو اعظم من
 تناسب ا الى س (حذ اكه)
 ثم من حيث ان المضروب س في ن - ا هو اكبر من المضروب ا في م وليس

أكبر من المضروب $a + b$ في m فتناسب s الى a هو اعظم من تناسبه الى $a + b$
(حد ٢ ك هـ)

—x—

القضية التاسعة . ن

المقادير التي لها تناسب واحد الى مقدار مفروض هي متساوية وإذا
كان لمقادير واحد تناسب واحد الى مقادير فهي متساوية (جبر ع^{١٥٨})

مفروض $a : s :: b : s$ فحينئذ $a = b$

والأفليكن a أكبر من b . فيمكن وجود عدد n من m كما في القضية السابقة
حتى يكون a أكبر من n s ولا يكون m b أكبر من n s . ومن حيث ان
 $a : s :: b : s$ فاذا كان m a أكبر من n s يكون m b ايضاً أكبر من n s
(حد هـ ك هـ) وقد تبين ان m ليس أكبر من n s وذلك محال فلا يكون a أكبر
من b اي $a = b$

ثم لنفرض $s : a :: s : b$ فحينئذ $a = b$ لانه بالقلب (ق ك هـ) $a : s :: b : s$
س ولذلك حسباً تقدم $a = b$

القضية العاشرة . ن

إذا فرض مقداران وكان بين احدهما ومقدار ثالث تناسب اعظم من
تناسب ثانيهما الى ذلك المقدار فالاول أكبرها . وإذا كان تناسب
الثالث الى احدهما اعظم من تناسبه الى الآخر فهو اصغرهما
(جبر ع^{١٦٣} وع^{١٦٤})

إذا كان تناسب a الى s اعظم من تناسب b الى s يكون a أكبر من b
لانه حسب المفروض $a : s < b : s$ فيمكن وجود عدد n من m حتى يكون
 $a < n$ s و m $b > n$ s (حد ٧ ك هـ) فيكون m $a < m$ b و $a < b$
(اولية ك هـ)

ثم ليكن $s : b < s : a$ فيكون $b > a$. لانه قد يمكن ان يوجد عددان

م ون حتى يكون م س < ن ب و م س > ن ا (حد ٧ كه) فن حيث ان ن ب
اصغر من م س ون ا اكبر من م س يكون ن ب > ن ا فيكون ب > ا

القضية الحادية عشرة . ن

التناسبات التي تعدل تناسبا واحدا هي متساوية (جبر ع ١٨٢)

مفروض ا: ب :: س: د و س: د :: ي: ف فحيث ا: ب :: ي: ف
نفرض ا م س م ي مضارب متساوية من ا و س و ي وايضا ن ب ن د
ن ف مضارب متساوية من ب و د و ف . فلكون ا: ب :: س: د فاذا كان
م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ٨ كه) . ولكن اذا كان م س < ن د
يكون م ي < ن ف (حد ٩ كه) لان س: د :: ي: ف فاذا كان م ا < ن ب
يكون م ي < ن ف . وهكذا اذا كان م ا = ن ب فيكون م ي = ن ف واذا كان
م ا > ن ب يكون م ي > ن ف ولكن م ا م ي ها مضروبان متساويان من
ا و ي . ون ب ن ف ها مضروبان متساويان من ب و ف فاذا ا: ب :: ي: ف
(حد ١٠ كه)

القضية الثانية عشرة . ن

اذا كانت عدة مقادير متناسبة فنسبة مجموع السوابق الى مجموع التوالي
كنسبة احد السوابق الى تاليه (جبر ع ١٦٦)

مفروض ا: ب :: س: د و س: د :: ي: ف فنسبة ا: ب :: ا + س + ي: ب + د + ف

افرض ا م س م ي مضارب متساوية من ا و س و ي . وايضا ن ب ن د
ن ف مضارب متساوية من ب و د و ف . فن حيث ان ا: ب :: س: د فاذا كان
م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ١١ كه) . واذا كان م س < ن د يكون
م ي < ن ف لان س: د :: ي: ف . فاذا كان م ا < ن ب يكون م ا + م س
+ م ي < ن ب + ن د + ن ف وكذلك اذا كان م ا = ن ب يكون م ا + م س
+ م ي = ن ب + ن د + ن ف واذا كان م ا > ن ب يكون م ا + م س +

م ي > ن ب + ن د + ن ف . ولكن م + م + م + م = م (ا + س + ي)
 (فرع ق اكه) وم ا و م + م + م + م ي هاضروبان متساويان من ا و م +
 س + ي . ولهذا السبب ايضا يكون ن ب و ن ب + ن د + ن ف مضروبين
 متساويين من ب و م ن ب + د + ف فيكون (حد ه كه) ا : ب :: ا + س + ي :
 ب + د + ف



القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع
 ولكن تناسب الثالث الى الرابع اعظم من تناسب الخامس الى
 السادس فيكون تناسب الاول الى الثاني اعظم من تناسب الخامس
 الى السادس (جبر ع^{١٨٣})

مفروض ا : ب :: س : د ولكن س : د < ي : ف فحينئذ ا : ب < ي :
 ف . لان س : د < ي : ف فيمكن وجود عدد ن م و ن حتى يكون م س < ن د
 ويكون م ي > ن ف (حد ٧ كه) . فاذا كان م س < ن د يكون ا م < ن ب
 لان ا : ب :: س : د فيكون م ا < ن ب و م ي > ن ف فاذا ا : ب < ي :
 ف (حد ٧ كه)



القضية الرابعة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع فاذا
 كان الاول اكبر من الثالث يكون الثاني اكبر من الرابع واذا عدل
 الاول الثالث يعدل الثاني الرابع واذا كان الاول اصغر من الثالث
 يكون الثاني اصغر من الرابع (جبر ع^{١٨٣})

مفروض ا : ب :: س : د فاذا كان ا < س يكون ب < د واذا كان ا =
 س يكون ب = د واذا كان ا > س يكون ب > د

اولاً ليكن $a < s$ ثم $a : b < s : d$ (ق ٨ كه) ولكن $a : b :: s : d$
 فإذا $s : d < s : b$ (ق ١٢ كه) ولذلك $b < d$ (ق ١٠ كه)
 وهكذا يبرهن انه اذا كان $a = s$ فحينئذ $b = d$ واذا كان $a > s$ يكون
 $b > d$

— ١٥٥ —

القضية الخامسة عشرة . ن

المقادير بينها ذات التناسب الواقع بين مضاريها المتساوية
 (جبر ع ١٦٤)

ليكن a و b مقدارين وم عدداً ما فتناسب $a : b :: m : n$
 لأن $a : b :: 1 : 1$ (ق ٧ كه) فيكون $a : b :: 1 + 1 : 1 + 1$ (ق ١٢ كه)
 اي $a : b :: 2 : 2$ وهكذا ايضاً من حيث ان $a : b :: 12 : 12$ b يكون $a : b ::$
 $1 + 12 : 12 + 2$ (ق ١٢ كه) اي $a : b :: 13 : 13$ b وهملاً جراً في كل المضارب
 المتساوية من a و b

— ١٥٦ —

القضية السادسة عشرة . ن

اذا كان اربعة مقادير من جنس واحد متناسبة تكون متناسبة ايضاً
 بالمبادلة (جبر ع ١٨١)

اذا كان $a : b :: s : d$ فبالمبادلة $a : s :: b : d$
 خذ m b مضروبين متساويين من a و b . ون s d مضروبين
 متساويين من s و d . ثم (ق ١٥ كه) $a : b :: m : n$ وقد فرض $a : b :: s : d$
 فإذا (ق ١١ كه) $s : d :: m : n$ ولكن $s : d :: n : s$ (ق ١٥ كه)
 فإذا $m : n :: s : d$ (ق ١١ كه) فإذا كان $m < n$ s يكون $m <$
 n (ق ١٤ كه) واذا كان $m = n$ s يكون $m = n$ واذا كان $m >$
 n s يكون $m > n$ فإذا (حدّه كه) $a : s :: b : d$

القضية السابعة عشرة . ن

المقادير المتناسبة بالاجال هي متناسبة ايضاً بالافراد . اي اذا كان
تناسب الاول مع الثاني الى الثاني مثل تناسب الثالث مع الرابع الى
الرابع يكون تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع
(جبر ع ١٨)

مفروض $a+b : b :: s+d : d$ فحينئذ $a : b :: s : s+d$
خذ m ان b مضروبين من a و b في العددين m و n . واولاً ليكن $m < n$
ن b . أضف الى كل واحد منهما m ب فلنا $m+a < m+b$ و $m+n < m+b$ ولكن $m+a$
 $m+b = m(1+b)$ (فرع ق ا ك ه) و $m+b+n = m(1+n)$ (فرع ٢
ق ا ك ه) فاذا $m(1+b) < m(1+n)$ ب
ومن حيث ان $a+b : b :: s+d : d$ فاذا كان $m(1+b) < m(1+n)$
ب يكون $m(1+s) < m(1+n)$ (د ا ي م س + م د < م د + ن د) وبطرح
م د من الجانبين م س < م ن . فاذا كان $m < n$ ب يكون م س < م ن .
وهكذا يبرهن انه اذا كان $m = n$ ب يكون م س = م ن . واذا كان $m > n$ ب
يكون م د > م ن فاذا $a : b :: s : s+d$ (ح د ه ك ه)

القضية الثامنة عشرة . ن

المقادير المتناسبة بالافراد هي متناسبة ايضاً بالاجال . اي اذا كان
الاول الى الثاني كالثالث الى الرابع يكون الاول مع الثاني الى الثاني
كالثالث مع الرابع الى الرابع (جبر ع ١٨)

ليكن $a : b :: s : s+d$ فحينئذ $a+b : b :: s+d : d$
لتفرض $m(1+b) < n(1+b)$ و $n(1+b) < m(1+b)$ واولاً ليكن m اعظم من
ن . فليكون $a+b$ اعظم من b يكون $m(1+b) < n(1+b)$ و $m(1+s) < n(1+s)$
ن د فاذا كان $m < n$ يكون $m(1+b) < n(1+b)$ و $m(1+s) < n(1+s)$ ن د .

وهكذا يبرهن انه اذا كان $m = n$ فيكون $m (a+b)$ اعظم من n ب $m (s+b)$ اعظم من n د

ثم ليكن $m > n$ او $n < m$ فقد يمكن ان يكون $m (a+b)$ اعظم من n ب او مساوياً له او اصغر منه . اولاً ليكن $m (a+b)$ اعظم من n ب فيكون $m + a$ ب m ب n ب اطرح من الجانين m ب الذي هو اصغر من n ب فلنأمل $a < n$ ب - m ب اي $a < (n-m)$ ب (ق ٦ كه) . ولكن اذا كان $a < (n-m)$ ب يكون m س $(n-m)$ د لان $a : b :: s : d$ و $(n-m) : d = n - d - m$ د (ق ٦ كه) فاذا m س n د - m د . اضف اليهما d فلنأمل $m + d < n + d$ اي (ق ١ كه) $m (s+d) < n (s+d)$ فاذا كان $m (a+b) < n (s+d)$ ب يكون $m (s+d) < n$ د

وهكذا يبرهن انه اذا كان $m (a+b) = n$ ب يكون $m (s+d) = n$ د واذا كان $m (a+b) > n$ ب يكون $m (s+d) > n$ د فاذا (حده كه) $a : b :: s : d + d$

القضية التاسعة عشرة . ن

اذا كانت نسبة مقدار كـ الى مقدار آخر كـ كمقدار مأخوذ من الاول الى مقدار مأخوذ من الثاني تكون نسبة البقية الى البقية كالكل الى الكل (جبر ع^{١٨})

اذا كان $a : b :: s : d$ وكان s اصغر من a يكون $a - s : b - d :: a : b$ بما ان $a : b :: s : d$ فبالقلب (ق ١٦ كه) $a : s :: b : d$ وبالقسم (ق ١٧ كه) $a - s : s :: b - d : d$ وبالقسم ايضاً $a - s : b - d :: s : d$ ولكن $a : b :: s : d$ فاذا (ق ١١ كه) $a - s : b - d :: a : b$ فرع . $a - s : b - d :: s : d$

قضية د . ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فهي متناسبة ايضاً بالطرح اي الاول

الى زيادته عن الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (حد ١٨ ك ٥)
 مفروض ا: ب :: س: د فبالطرح ا: ب :: س: س - د
 لان ا: ب :: س: د فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥) ا: ب :: ب: س - د
 وبالفلب (ق ١٥ ك ٥) ب: ا - ب :: د: س - د ثم بالتركيب (ق ١٨ ك ٥)
 ا: ا - ب :: س: س - د
 فرع . وهكذا يبرهن ان ا: ا + ب :: س: س + د

القضية العشرون . ن

اذا فرض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة مقادير أخرى كل اثنين من
 الأول مناسبان لكل اثنين من الآخر فاذا كان الأول اعظم من الثالث
 يكون الرابع اعظم من السادس واذا كان مساوياً له يكون الرابع
 مساوياً للسادس واذا كان اصغر منه يكون الرابع اصغر من السادس
 (جبر ع ١٦٣)

اذا فرض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة آخر د ي ف وكانت نسبة
 ا: ب :: د: ي وايضاً ب: س :: ي: ف فاذا كان ا < س
 يكون د < ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان
 ا > س يكون د > ف

اولاً ليكن ا < س ثم ا: ب < س: ب (ق ٨ ك ٥) ولكن ا: ب :: د: ي
 فاذا د: ي < س: ي (ق ١٢ ك ٥) وقد فرض ب: س :: ي: ف وبالفلب
 (ق ١٥ ك ٥) س: ب :: ي: ف . وقد تبرهن ان د: ي < س: ب فاذا د: ي <
 ف: ي (ق ١٢ ك ٥) وبالضرورة د: ب < ف: ف (ق ١٠ ك ٥)

ثم لنفرض ا = س ثم ا: ب = س: ب (ق ٧ ك ٥) ولكن ا: ب :: د: ي
 فاذا س: ب :: د: ي ولكن س: ب :: ي: ف فاذا د: ي :: ي: ف (ق ١١
 ك ٥) ود = ف (ق ٩ ك ٥) . اخيراً ليكن ا > س اي س < ا وقد تبرهن ان

س : ب :: ف : ي وب : ا :: ي : د فاذا كان س < ا يكون ف < د اي اذا كان ا > س يكون د > ف

القضية الحادية والعشرون . ن

اذا فرض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة أخر بحيث يكون الاول الى الثاني كالخامس الى السادس والثاني الى الثالث كالرابع الى الخامس فان كان الاول اعظم من الثالث يكون الرابع اعظم من السادس وان كان مساوياً له فيكون الرابع مساوياً للسادس وان كان اصغر منه يكون الرابع اصغر من السادس (جبر ع ١٩٣)

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة أخر د ي ف وتناسب ا : ب :: ي : ف

وب : س :: د : ي فاذا كان ا < س يكون د < ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان ا > س يكون د > ف

اولاً ليكن ا < س ثم ا : ب < س : ب (ق ٨ ك ه) وقد فرض ا : ب :: ي : ف فاذا ي : ف < س : ب (ق ١٢ ك ه) وب : س :: د : ي بالمفروض وبالقلب س : ب :: ي : د فاذا ي : ف < س : ب (ق ١٢ ك ه) ود < ف (ق ١٠ ك ه) ثم ليكن ا = س فلنا (ق ٧ ك ه) ا : ب :: س : ب وبالمفروض ا : ب :: ي : ف فاذا س : ب :: ي : ف (ق ١١ ك ه) وبالمفروض ب : س :: د : ي وبالقلب س : ب :: ي : د فاذا (ق ١١ ك ه) ي : ف :: د : د = ف (ق ٩ ك ه) اخيراً ليكن ا > س اي س < ا فقد تبهرن ان س : ب :: ي : د وب : ب : ا :: ي : ف فحسباً تقدم اذا كان س < ا فيكون ف < د اي د > ف

القضية الثانية والعشرون . ن

اذا فرضت عدة مقادير مناسبة لعدة أخرى من المقادير على ترتيبها فيكون تناسب الاول الى الاخير من الأول كتناسب الاول من الآخر الى الاخير (جبر ع ١٩٤)

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س مناسبة لثلاثة اخرى د ي ف على ترتيبها اي

ا : ب :: د : ي	وب : س :: ي : ف	فيكون	ا	ب	س
ا : س :: د : ف			د	ي	ف
م ا م د	وكذلك ن ب ن ي من ب و ي		م	ن	ب
			د	ي	ق

وق س ق ف من س وف . فليكون ا : ب :: د : ي فيكون م ا : ن ب :: م د : ن ي
(ق ٤ كه) وايضا ن ب : ق س :: ن ي : ق ف فاذا (ق ٢٠ كه) حسبما كان
م ا اعظم من ق س او مساويا له او اصغر منه يكون م د اعظم من ق ف او مساويا
له او اصغر منه . ولكن م ا م د هـا مضروبان متساويان من ا و د وق س ق ف
مضروبان متساويان من س وف فاذا (حدّه كه) ا : س :: د : ف

ثم لنفرض اربعة مقادير ا ب س د واربعة اخرى ف غ ح متناسبة على

ا	ب	س	د
ي	ف	غ	ح

ترتيبها اي ا : ب :: ي : ف
وب : س :: ف : غ وس :
د : غ : ح فيكون ا : د :: ي : ح

لانه حسبما تقدم في المقادير الثلاثة المتقدم ذكرها مع الثلاثة الاخر المتقدم ذكرها
ا : س :: ي : غ وبالمفروض س : د :: غ : ح فيكون ا : د :: ي : ح وهكذا
تعددت المقادير



القضية الثالثة والعشرون . ن

اذا كانت عدة مقادير مناسبة لعدة اخرى على ترتيب كالذكر في
القضية الحادية والعشرين يكون تناسب الاول الى الاخير من الاولى
كتناسب الاول من الاخرى الى اخيرها (جبر ع ١٨٦)

اولا لنفرض ثلاثة مقادير ا ب س متناسبة لثلاثة اخرى د ي ف بان

يكون ا:ب::ى:ف وب:س::د:ى فيكون ا:س::د:ف . خذ مضارب

س	ب	ا	متساوية من ا ب د اى م ب م د
ف	ى	د	وكذلك من س ي ف اى ن س
ن	م	ا	ن ي ن ف
م	ن	د	فلكون ا:ب::ى:ف وا:ب::

ا:م:ب (ق ١٥ ك ه) وى:ف::ن:ى:ن ف فيكون ا:م:ب::ن:ى:ن ف
(ق ١١ ك ه) ولكون ب:س::د:ى يكون م:ب:ن:س::م:د:ن:ى (ق ٤ ك ه)
وقد تبين ان م:ا:م:ب::ن:ى:ن ف فاذا كان م:ا<ن:س يكون م:د<
ن ف (ق ٢١ ك ه) واذا كان م:ا=ن:س يكون م:د=ن ف واذا كان م:ا>
ن:س يكون م:د>ن ف . ولكن م:ا:م:د هما مضروبان متساويان من ا و د
ون:س ن ف مضروبان متساويان من س وف فاذا (حده ك ه) ا:س::د:ف
ثم يُفرض اربعة مفادير مناسبة لاربعة اخرى على الترتيب السابق اى ا:ب::

د	س	ب	ا	غ:ح وب:س::ف:غ
ح	غ	ف	ى	وس:د::ى:ف فيكون

ا:د::ى:ح . لانه حسبما تقدم ا:س::ف:ح وبالمفروض س:د::ى:ف
فحسبما تقدم ايضا ا:د::ى:ح وهكذا تعددت المقادير

القضية الرابعة والعشرون . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع وتناسب
الخامس الى الثاني كتناسب السادس الى الرابع يكون تناسب الاول
مع الخامس الى الثاني كتناسب الثالث مع السادس الى الرابع
(جبر ع ١٨٧)

مفروض ا:ب::س:د وى:ب:ف:د فيكون ا+ى:ب:س+ف:د
ف:د

لأنّ ي : ب :: ف : د فبالقلب ب : ي :: د : ف وبالمفروض ا : ب :: س : د
فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا : ي :: س : ف وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) ا + ي ::
س + ف : ف وبالمفروض ايضاً ي : ب :: ف : د فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا + ي :
ب :: س + ف : د

قضية ه . ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فجميع الاولين الى فضلتهما كجميع
الآخرين الى فضلتهما

منفروض ا : ب :: س : د واذا كان ا < ب فيكون ا + ب : ا - ب :: س +
د : س - د واذا كان ا > ب فيكون ا + ب : ب - ا :: س + د : د - س
لانه اذا كان ا < ب فن حيث ان ا : ب :: س : د فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥)
ا - ب : ب :: س - د : د وبالقلب (ق ١ ك ٥)
ب : ا - ب :: د : س - د وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥)
ا + ب : ب :: س + د : د فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
ا + ب : ا - ب :: س + د : س - د
وهكذا اذا كان ا > ب اوب < ا يبرهن ان
ا + ب : ب - ا :: س + د : د - س

قضية و . ن

التناسبات المركبة من تناسبات متساوية هي متساوية بعضها لبعض
لنفرض ان تناسب ا الى س قد تركب من تناسبين اي تناسب ا : ب وتناسب
ب : س وان تناسب د الى ف قد تركب من تناسب د : ي وتناسب ي : ف
المساويين للاولين اي ا : ب وب : س فيكون ا : س :: د : ف

ا	ب	س
د	ي	ف

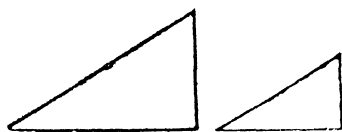
اولاً اذا كان تناسب ا : ب = د : ي
وتناسب ب : س = ي : ف فبالمساواة
(ق ٢٢ ك ٥) ا : س :: د : ف

اصول الهندسة

الكتاب السادس

حدود

١ اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة هي ما كانت زواياها متساوية كل واحدة تعدل نظيرها . والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة

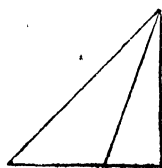


في شكلين متناسبين الاضلاع التي

تلي الزوايا المتساوية تسمى متشابهة . والزوايا تسمى الزوايا المتشابهة . وفي الدوائر الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطعان المتشابهة هي التي تقابل زوايا متساوية عند المركز

٢ اذا كانت نسبة ضلع شكل الى ضلع شكل آخر كنسبة ضلع آخر من الثاني الى آخر من الاول يقال انها متناسبة بالتكافؤ

٣ اذا انقسم خط مستقيم بحيث تكون نسبة الكل الى النصف الاطول كالنصف الاطول الى الاقصر يقال انه قد انقسم على نسبة متوسطة

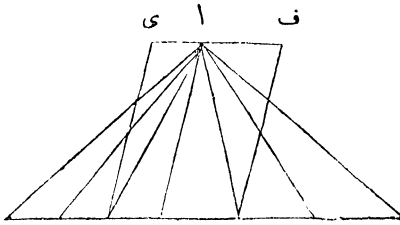


٤ علو مثلث هو البعد العمودي من رأسه الى قاعدته
علو شكل متوازي الاضلاع هو البعد العمودي بين ضلعيه المتقابلين محسوبين قاعدتين وعلو شبه المعين هو البعد العمودي بين ضلعيه المتوازيين

القضية الاولى . ن

نسبة مثلثات واشكال متوازية الاضلاع على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن المثلثان ا ب س ا س د والشكلان المتوازي الاضلاع ي س س ف



على علو واحد اي عمود من ا الى ب د فنسبة المثلث ا ب س الى المثلث ا س د ونسبة الشكل ي س الى شكل س ف كنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د

اخرج ب د الى الجهتين الى ح ول حتى ينقسم ح ب الى اقسام تعدل ب س مثل ح غ غ ب واقسم دل الى اقسام تعدل س د مثل ل ك ك د وارسم اغ اح اك ال

فلكون س ب ب غ غ ح متساوية تكون المثلثات اح غ ب اب س متساوية (ق ٢٨ ك ١) وكما تعددت القاعدة ب س في القاعدة ح س هكذا يتعدّد المثلث اب س في المثلث اح س وكذلك كما تعدد القاعدة د س في القاعدة س ل هكذا يتعدّد المثلث اس د في المثلث اس ل . واذا كانت القاعدة ح س تعدل القاعدة س ل يكون المثلثان اح س ال س متساويين (ق ٢٨ ك ١) واذا كانت القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث اح س اكبر من المثلث ال س وان كانت اصغر فاصغر . فلنا اربعة مقادير وهي القاعدتان ب س س د والمثلثان اب س اس د وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث اي القاعدة ب س والمثلث اب س وهما القاعدة ح س والمثلث اح س وهكذا من القاعدة س د والمثلث اس د وهما القاعدة س ل والمثلث ال س وقد تبهرن انه اذا كانت القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث اح س اكبر من ال س وان كانت متساوية لها فالمثلث اح س يعدل المثلث ال س وان كانت اصغر فاصغر منه فنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د كنسبة المثلث اب س الى المثلث اس د (حده ك ٥)

ثم لكون الشكل المتوازي الاضلاع س ي هو مضاعف المثلث ا ب س
(ق ٤١ ك ١) والشكل س ف مضاعف المثلث ا س د وبين المقادير ذات النسبة
الكائنة بين مضاربيها المتساوية (ق ١٥ ك ٥) يكون الشكل س ي الى الشكل
س ف كالمثلث ا ب س الى المثلث ا س د . وقد تبرهن ان ب س : س د ::
ا ب س : ا س د فبالمساواة الشكل س ي الى الشكل س ف كالفقاعة ب س الى
الفقاعة س د (ق ١١ ك ٥)

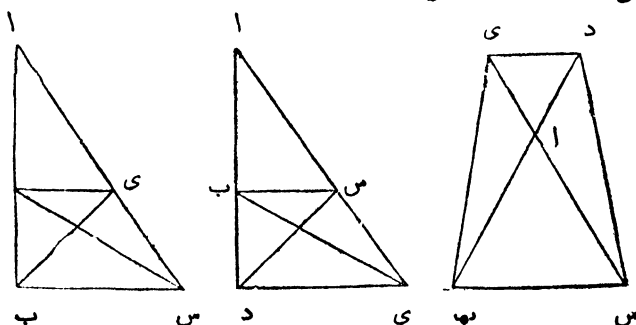
فرع . نسبة المثلثات الى الاشكال المتوازية الاضلاع في كنسبة قواعدها
بعضها الى بعض اذا كانت المثلثات والاشكال على علو واحد

الفضية الثانية . ن

اذا رُسم خطٌ مستقيم حتى يوازي ضلع مثلث فانه يقطع الضلعين
الآخرين او الخططين الحاصلين من اخراجها حتى تكون اقسامها
متناسبة . واذا قطع الضلعان او الخططان الحاصلان من اخراجها حتى
تكون اقسامها متناسبة فالخط المستقيم الذي يقطعها يوازي الضلع
الآخر من المثلث

ليكن ا ب س مثلثاً وليرسم د ي حتى يوازي ب س فتكون نسبة ب د : د ا ::
س ي : ي ا

ارسم ب ي س د . فالمثلث ب د ي يعدل المثلث س د ي (ق ٢٧ ك ١)
لانها على قاعدة واحدة د ي وبين خطين متوازيين ب س د ي . واد ي مثلث



آخر والمقادير المتساوية لها نسبة واحدة الى مقدار آخر (ق ٧ ك ٥) اي المثلث
ب د ي الى المثلث ا د ي كالمثلث س د ي الى المثلث ا د ي ولكن ب د ي :
ا د ي :: ب د : د ا (ق ١ ك ٦) لانّ لها علوّاً واحداً اي عموداً من ي الى ب ا ولها
السبب ايضاً س د ي : ا د ي :: س ي : ي ا فاذاً ب د : د ا :: س ي : ي ا ثم
لنفرض ان الضلعين ا ب ا س او الخطين الحاصلين من اخراجها قد قُطعا في
د وى حتى تكون نسبة ب د : د ا :: س ي : ي ا فالخطُ المستقيم د ي الموصل بين
نقطتي القطع يوازي ب س . ثم الشكل كما تقدم . فكون ب د : د ا :: س ي : ي ا
ولكون ب د : د ا :: ب د ي : ا د ي (ق ١ ك ٦) وس ي : ي ا :: س د ي : ا د ي
يكون المثلث ب د ي : ا د ي :: س د ي : ا د ي اي المثلثان ب د ي وس د ي
لها نسبة واحدة الى مثلث آخر ا د ي فالمثلث ب د ي = س د ي (ق ٩ ك ٥)
وهما على قاعة واحدة د ي والمثلثات المتساوية اذا كانت على قاعة واحدة هي بين
خطين متوازيين (ق ١٢٩ ك ١) فالخطُ د ي يوازي الخط ب س

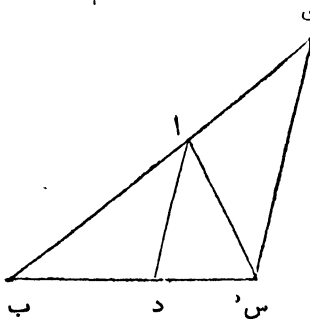
القضية الثالثة . ن

اذا تنصّفت زاوية مثلثٍ بخطٍ مستقيمٍ يقطع القاعدة ايضاً فقسمها
القاعدة بينهما النسبة الكائنة بين الضلعين الآخرين من المثلث . واذا
كانت نسبة قسيمي القاعدة بعضها الى بعض كسبة الضلعين الآخرين
من المثلث بعضها الى بعض فالخطُ المستقيم المرسوم من نقطة القطع

الى الزاوية المقابلة ينصف تلك الزاوية

ليكن ا ب س مثلثاً ولتنصف الزاوية ب ا س منه بالخط المستقيم ا د الذي
يقطع القاعدة في د فنسبة ب د : د س ::

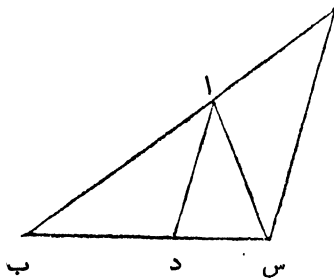
ب ا : ا س



من النقطة س ا رسم س ي حتى يوازي
د ا وليلاقِ ب ا بعد اخراجه في ي فلانّ
الخط المستقيم ا س يلاقي الخطين المتوازيين
ا د ي س فالزاوية ا س ي تعدل المتبادلة

س ا د (ق ٢٩ ك ١) وس ا د حسب المفروض تعدل ب ا د فالزاوية ب ا د تعدل
 ا س ي . ولأن الخط المستقيم ب ا ي يلاقي المتوازيين ا د ي س فالزاوية الخارجة
 ب ا د تعدل الداخلة المقابلة ا ي س . ولكن ب ا د تعدل ا س ي فالزاوية ا س ي
 تعدل ا ي س فالضلع ا ي يعدل الضلع س ا (ق ٦ ك ١) ولكون ا د قد رُسم حتى
 يوازي ي س احد اضلاع المثلث ب ي س فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا ي (ق ٢
 ك ٦) و ا ي = ا س فاذا ب د : د س :: ب ا : ا س (ق ٧ ك ٥)

ثم لنفرض ب د : د س :: ب ا : ا س . ا رسم ا د فالزاوية ب ا س قد تنصفت
 بالخط المستقيم ا د



تم الشكل كما تقدم . فلكون
 ب د : د س :: ب ا : ا س وب د :
 د س :: ب ا : ا ي (ق ٢ ك ٦) لأن
 ا د يوازي ي س فنسبة ا ب : ا س ::
 ا ب : ا ي (ق ١١ ك ٥) فاذا س =
 ا ي (ق ٩ ك ٥) والزاوية ا ي س =

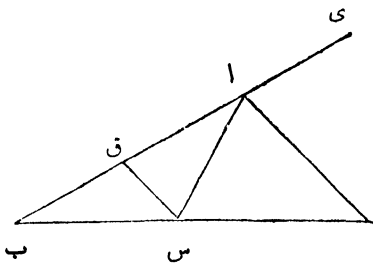
ا س ي (ق ٥ ك ١) و ا ي س تعدل الخارجة المقابلة ب ا د و ا س ي تعدل المتبادلة
 س ا د (ق ٢٩ ك ١) فالزاوية ب ا د = س ا د فقد تنصفت الزاوية ب ا س بالخط
 المستقيم ا د

قضية ألف . ن

اذا تنصفت الزاوية الخارجة من مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة
 بعد اخراجها فنسبة القسمين بين الخط القاطع وطرفي القاعدة
 بعضها الى بعض كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضها الى
 بعض . واذا كانت نسبة قسَمَي القاعدة بعد اخراجها بعضها الى بعض
 كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضها الى بعض فالخط

الموصل بين نقطة القطع والزواوية المقابلة ينصف الزاوية الخارجة من
المثلث

ليكن AB مثلثاً ولتتوسط زاوية الخارجة بالخط المستقيم AD الذي يلاقي
القاعدة بعد إخراجها في د فنسبة $B : D$:
 $D : S :: B : A$: S



من النقطة S ارسم SQ حتى
يوازي AD (ق ٢١ ك ١) فليكون الخط
المستقيم AS يلاقي المتوازيين AD و SQ

فالزاوية ASQ تعدل المتبادلة SAD (ق ٢٩ ك ١) و SAD تعدل DAI حسب
المفروض فالزاوية DAI تعدل ASQ . وليكون الخط المستقيم QAI يلاقي المتوازيين
 SQ و AD فالزاوية الخارجة DAI تعدل الداخلة المتقابلة SQA وقد تبين ان
 ASQ تعدل DAI فالزاوية ASQ تعدل الزاوية SQA والضلع SA يعدل
الضلع AQ (ق ٦ ك ١) ولكن AD يوازي SQ ضلعاً من المثلث BDS فنسبة
 $B : D$ الى $D : S$ كسبة $B : A$ الى AQ (ق ٢ ك ٦) و AQ يعدل AS فنسبة $B : D : D : S ::$
 $B : A : S$

ثم لنفرض $B : D : D : S :: B : A : S$. ارسم AD . فالزاوية SAD تعدل الزاوية
 DAI . ثم الشكل كما تقدم. فليكون $B : D : D : S :: B : A : S$ و $B : D : D : S :: B : A :$
 AQ (ق ٢ ك ٦) فنسبة $B : A : S :: B : A : AQ$ (ق ١ ك ٥) و AS يعدل AQ (ق ٩
ك ٥) والزاوية AQS تعدل الزاوية ASQ (ق ٥ ك ١) والزاوية AQS تعدل
الخارجة DAI و ASQ تعدل المتبادلة SAD فالزاوية $DAI = SAD$

القضية الرابعة . ن

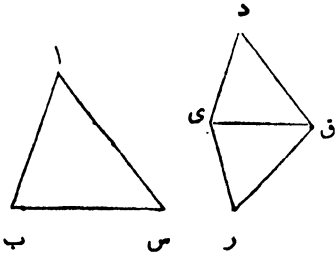
في مثلثات متساوية الزوايا الاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية هي
متناسبة والاضلاع المقابلة الزوايا المتساوية هي متشابهة اي هي
سواء نسب وتواليها

~~SECRET~~

إذا كانت الاضلاع المحيطة بزوايا مثلثين متناسبة فالمثلثان متشابهان
وزواياهما المتساوية تقابل اضلاعها المتناسبة

7.

وبس : س : ا :: ي : ق : د وبالمساواة ب : ا : س :: ي : د : ق فالمثلث
ا ب س يشبه المثلث د ي ق اي زواياها متساوية والزوايا المتساوية تقابل الاضلاع
المتناسبة اي الزاوية ا ب س تعدل د ي ق وبس ا تعدل ي ق د وبس
تعدل ي د ق



في النقطتين ي وق من الخط المستقيم
ي ق اجعل الزاوية ق ي ر تعدل
ا ب س (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ي ق ر
تعدل ا س ب فالباقية ب ا س تعدل
الباقية ي ر ق (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) وزوايا

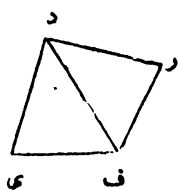
المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث ي ر ق والاضلاع التي تقابل الزوايا المتساوية
هي متناسبة (ق ٤ ك ٦) اي

ا ب : ب س :: ر ي : ي ق ولكن بالمفروض
ا ب : ب س :: د ي : ي ق فاذًا

د ي : ي ق :: ر ي : ي ق اي (ق ١١ ك ٥) د ي وري
بينها وبين ي ق تناسب واحد فها متساويان (ق ٩ ك ٥) ولهذا السبب ايضًا د ي
يعدل ق ر . ثم في المثلثين د ي ق ر ي ق الضلع د ي = ي ر و ي ق مشترك
بينها والقاعدة د ي يعدل القاعدة ق ر فالزاوية د ي ق تعدل ر ي ق (ق ٨ ك ١)
وبقية زوايا الواحد تعدل بقية زوايا الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية
(ق ٤ ك ١) فالزاوية د ي ق = ر ي ق و ي د ي ق = ي ر و لكن ر ي ق = ا ب س
فاذا ا ب س = د ي ق ولهذا السبب ايضًا ا س ب = د ي ق والزاوية عند ا
تعدل الزاوية عند د فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ي ق

القضية السادسة . ن

في مثلثين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت
الاضلاع المحيطة بهما متناسبة فالمثلثان متشابهان والزوايا التي تقابل
الاضلاع المتناسبة متساوية



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
ولكن الزاويتان ب ا س ي د ف
متساويتين والاضلاع المحيطة بهما
متناسبة اي ب ا : س ي :: ا س : د ف
فالمثلثان متشابهان والزاوية ا ب س
تعديل د ي ف واس ب تعديل د ي

في النقطتين د وف من الخط المستقيم د ف اجعل الزاوية ف د ر تعديل
احدى الزاويتين ب ا س ا وى د ف (ق ٢٢ ك ١) واجعل الزاوية د ف ر تعديل
اس ب فالباقية ا ب س تعديل الباقية د ر ف (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) والمثلث ا ب س
يشبه المثلث د ر ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

ب ا : س ي :: رد : د ف وبالمفروض

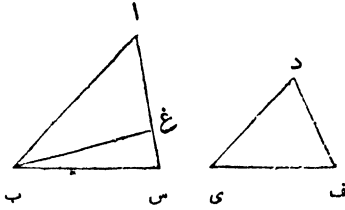
ب ا : س ي :: د ف : فاذا (ق ١١ ك ٥)

ي د : د ف :: رد : د ف اي ي د = د ر (ق ٩ ك ٥)

ود ف مشترك بين المثلثين ي د ف د ر ف فالضلعان ي د د ف يعدلان الضلعين
رد د ف . ولكن الزاوية ي د ف = رد ف فالناعدة ي ف تعديل القاعدة د ر ف
(ق ٤ ك ١) والمثلث ي د ف يعدل المثلث د ر ف وبقي الزوايا من الواحد تعديل
بقية الزوايا من الآخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية . فالزاوية د ف ر تعديل
د ف ي ود ر ف تعديل د ي ف . ولكن الزاوية د ف ر تعديل اس ب فالزاوية
اس ب تعديل د ف ي وبالمفروض ب ا س = ي د ف فالآخرى ا ب س تعديل
الآخرى د ي ف فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف

القضية السابعة . ن

في مثلثين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر والاضلاع
المحيطة بزاويتيهم آخريين متناسبة فاذا كانت كل واحدة من بقية
الزوايا اصغر من قائمة اولم تكن اصغر من قائمة فالمثلثان متشابهان
والزوايا التي تليها الاضلاع متناسبة متساوية



ليكن اب س دى ف مثلثين
والزاوية باس فلتعدل بى د ف
وليكن الاضلاع المحيطة بزاويتي
اخرين اب س دى ف متناسبة

اي اب : ب س :: دى : بى ف ولولا لتكن كل واحدة من الزاويتين الباقيتين عند
س وف اصغر من قائمة فالمثلث اب س يشبه المثلث دى ف اي الزاوية
اب س = دى ف والزاوية الباقية عند س تعدل الباقية عند ف

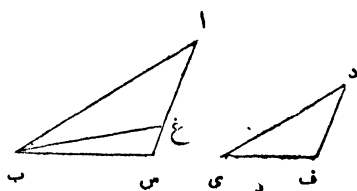
لانه ان لم تكن الزاويتان اب س دى ف متساويتين فاحداها اكبر من
الآخرى لتكن اب س اكبرها وعند النقطة ب في الخط المستقيم اب اجعل الزاوية
اب غ تعدل دى ف (ق ٢٢ ك) فحسب المفروض الزاوية با غ تعدل بى د ف
وقد جعلت اب غ = دى ف فالباقية اب غ تعدل الباقية دى ف (فرع ٤
ق ٢٢ ك) وزوايا المثلث اب غ تعدل زوايا المثلث دى ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

اب : ب غ :: دى : بى ف وبالمفروض

دى : بى ف :: اب : ب س فاذا (ق ١١ ك ٥)

اب : ب س :: اب : ب غ اي بين اب والخطين ب س ب غ
تناسب واحد فاذا ب س = ب غ (ق ٩ ك ٥) فالزاوية ب غ س = ب س غ
(ق ٥ ك ١) ولكن بالمفروض ب س غ اصغر من قائمة فتكون ب غ س اصغر من
قائمة فتكون الزاوية المتوالية اب غ اعظم من قائمة (ق ١٢ ك ١) وقد تبين ان
اب غ = دى ف فتكون دى ف اعظم من قائمة وقد فرض انما اصغر من قائمة
وذاك محال. فلا تكون الزاويتان اب س دى ف غير متساويتين اي ها
متساويتان. والزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالباقية عند س تعدل الباقية
عند ف فالمثلث اب س يشبه المثلث دى ف

ثم ان لم تكن كل واحدة من الزاويتين عند س وف اصغر من قائمة فالمثلث



اب س يشبه المثلث دى ف. لانه اذا
رُسم الشكل كما تقدم يُبرهن ان ب س
= ب غ وب س غ = ب غ س.
وب س غ ليست اصغر من قائمة فلا

تكون ب غ س اصغر من قائمة وزاويتان من المثلث ب غ س معاً لا تكونان اصغر من قائمتين وذلك غير ممكن (ق ١٧ ك ١) فيبرهن ان المثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف حسباً تقدم

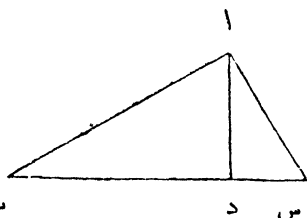


القضية الثامنة . ن

في مثلث ذي قائمة اذا رُسِمَ خطٌ عموديٌّ من القائمة الى القاعدة فالمثلثان الحادّان على جانبي العمود متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث

الاول

ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س ومن النقطة ا لرُسَمِ ا د عموداً على القاعدة ب س فالمثلثان ا ب د ا س د متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث ا ب س . لانّ الزاوية ب ا س تعدل الزاوية ا ب د لكون كل واحدة منهما قائمة والزاوية عند ب مشتركة



بين المثلثين ا ب س ا ب د فالزاوية الاخرى ا س ب تعدل الاخرى ب ا د (فرع ٤ ك ٢٢) فالمثلثان ا ب س ا ب د متساويان الزوايا والاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فالمثلثان متشابهان (حد ١ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلث ا د س يشبه المثلث ا ب س فالمثلثان ا د س ا ب د يشبهان المثلث ا ب س فهما متشابهان

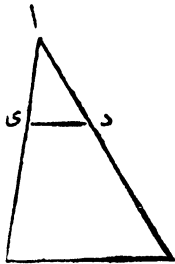
فرع ٦. يتضح من هذه القضية ان العمود على القاعدة من قائمة مثلث ذي قائمة هو متناسب متوسط بين قسبي القاعدة وان كل ضلع هو متناسب متوسط بين القاعدة والقطعة من القاعدة التي تلي ذلك الضلع . لان في المثلثين ب د ا ا د س لنا (ق ٤ ك ٦)

ب د د ا د ا د س	وفي المثلثين ا ب س ب د لنا (ق ٤ ك ٦)
ب س ب ا ب ا ب د	وفي المثلثين ا ب س ا د س (ق ٤ ك ٦)
ب س س ا س ا س د	

القضية التاسعة . ع

علينا ان نقطع من خطٍ مستقيم جزءاً معيناً اي جزءاً بعده الخط مراراً
مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض . فعلياً ان نقطع منه جزءاً بعده ا ب مراراً
مفروضة



من النقطة ا ارم الخط المستقيم اس حتى يجعل مع
ا ب زاوية وفي اس افرض نقطة مثل د حتى ان اس
بعدها د مراراً تعدل المراس المفروضة للخط ا ب ان بعد
الجزء المطلوب قطعة . ارم ب س ثم ارم د ي حتى
بوازي ب س

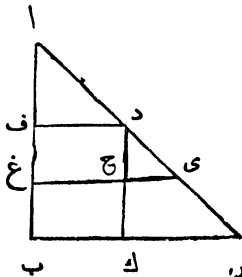
فلان د ي د يوازي ب س احد اضلاع المثلث فنسبة س د : دا :: ب ي : ي ا
(ق ٢ ك ٦) وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) س ا : ا د :: ب ا : ا ي . ولكن س ا هو مضروب
من ا د فيكون ب ا ذات هذا المضروب من ا ي (ق ج ك ٥) اي بعداى كما ان
اس بعدا د فاي جزء كان ا د من اس يكون اى ذات ذلك الجزء من ا ب فقد
قطع من ا ب الجزء المفروض

القضية العاشرة . ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً مفروضاً الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين

اقسام خط مستقيم مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض واس الخط المنقسم . علياً ان نقسم ا ب
الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين اقسام الخط اس

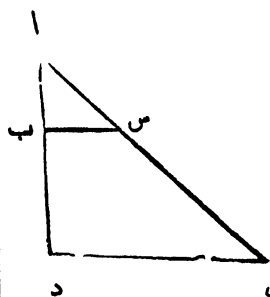


لينقسم اس في د وى وليوضع ا ب اس حتى
نحدث بينهما زاوية وارسم ب س . ثم من النقطتين د
وى ارم د ف ي غ حتى بوازي ب س (ق ٢١ ك ١)
ومن د ارم د ح ك حتى بوازي ا ب . فكل واحد من
الشكلين د غ ح ب متوازي الاضلاع ود ح = ف غ

(ق ٢٤ ك ١) وح ك = غ ب . ولكون ح ي يوازي ك ج احد اضلاع المثلث د ك س
فنسبة س ي : ي د :: ح ك : ح د (ق ٢ ك ٦) ولكن ك ح = ب غ وح د = غ ف
فكون س ي : ي د :: ب غ : غ ف . ولكون ف د يوازي غ ي احد اضلاع المثلث
اغ ي فنسبة ي د : د ا :: غ ف : ف ا وقد تبرهن ان س ي : ي د :: ب غ : غ ف
فقد انقسم الخط المستقيم ا ب مثل انقسام الخط ا س

القضية الحادية عشرة . ع

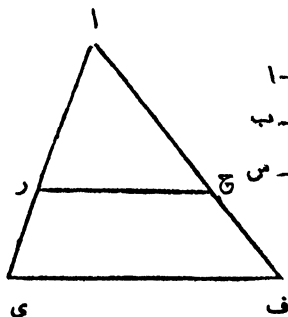
علينا ان نجد خطاً ثالثاً مناسباً لخطين مستقيمين مفروضين
ليكن ا ب ا س الخطين المستقيمين المفروضين فليوضعا حتى تحدث بينهما زاوية
علينا ان نجد خطاً ثالثاً يناسبها



اخرج ا ب ا س الى د وى واجعل ب د
يعدل ا س . ا رسم ب س ثم من النقطة د ا رسم د ي
حتى يوازي ب س . فلان ب س يوازي د ي
ضلعاً من المثلث ا د ي فنسبة ا ب : ب د :: ا س :
س ي (ق ٢ ك ٦) ولكن ب د = ا س فنسبة ا ب : ي :
ا س :: ا س : س ي فالخط س ي انما هو مناسب ثالث للخطين المفروضين

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نجد مناسباً رابعاً لثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة
ليكن ا ب و س الخطوط الثلاثة المستقيمة المفروضة . علينا ان نجد خطاً رابعاً
يناسبها



ا —————
ب —————
س —————

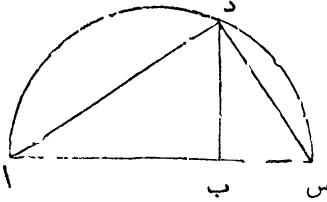
لفرض خطين
مستقيمين د ي د ف
بينها زاوية د ي د ف .
ومنها افصل د ر حتى
يعدل ا و رى حتى .

يعدل ب ود ح حتى يعدل س . ارم رح ثم ارم ي ف حتى يوازي رح (ق ٢١ ك ١). فلان رح يوازي ي ف احد اضلاع المثلث د ي ف فنسبة در : ر ي :: د ح : ح ف (ق ٢ ك ٦) ولكن در = اوري = ب ود ح = س فنسبة ا : ب :: س : ح ف . فالخط ح ف انما هو مناسب رابع للخطوط الثلاثة المفروضة



الفضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نجد متناسباً متوسطاً بين خطين مستقيمين مفروضين
ليكن ا ب ب س الخطين المستقيمين المفروضين . علينا ان نجد متناسباً



متوسطاً بينهما . اجعل ا ب ب س على استقامة واحدة وعلى اس ارم نصف دائرة ا د س . ومن النقطة ب ارم ب د عموداً على اس (ق ١ ك ١) ثم ارم ا د ود س

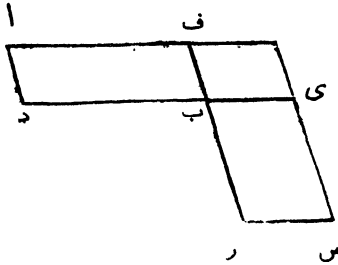
لان ا د س قائمة لكونها في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وقد رُسم د ب عموداً من القائمة على القاعدة فالخط د ب انما هو متناسب متوسط بين قسبي القاعدة (فرع ق ٨ ك ٦) فقد وجدنا د ب متناسباً متوسطاً بين الخطين المفروضين ا ب ب س



الفضية الرابعة عشرة . ن

في شكلين متوازيي الاضلاع متساويين اذا عدلت زاويةً من الواحد زاويةً من الآخر تكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ . واذا عدلت زاويةً من شكل متوازي الاضلاع زاويةً من آخر متوازي الاضلاع وكانت الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ فالشكلان متساويان

ليكن ا ب ب س شكلين متوازيي الاضلاع متساويين لما الزاويتان عند ب



متساويان وليكن الضلعان د ب ب ي
على استقامة واحدة فيكون الضلعان رب
ب ف ايضاً على استقامة واحدة (ق ١٤ ك)
فاضلاع الشكليين ا ب ب س
المحيطه بالزاويتين المتساويتين هي متناسبة
بالتكافؤ اي نعبه د ب : ب ي :: رب : ب ف

ثم الشكل ف ي . فلان الشكليين ا ب ب س متساويان وفي شكل
اخر متوازي الاضلاع فلنا ا ب : ف ي :: ب س : ف ي (ق ٧ ك ه)
والشكلاين ا ب ف ي لهما علو واحد فلنا

ا ب : ف ي :: د ب : ب ي (ق ١ ك ه) وايضاً

ب س : ف ي :: رب : ب ف (ق ١ ك ه) فاذاً

د ب : ب ي :: رب : ب ف (ق ١١ ك ه) فاضلاع

الشكليين ا ب ب س المحيطه بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع متناسبة بالتكافؤ اي د ب : ب ي :: رب : ب ف

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س . لان د ب : ب ي :: رب : ب ف وايضاً

د ب : ب ي :: ا ب : ف ي وايضاً رب : ب ف :: ب س : ف ي فاذاً

ا ب : ف ي :: ب س : ف ي (ق ١١ ك ه)

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س (ق ٩ ك ه)

القضية الخامسة عشرة . ن

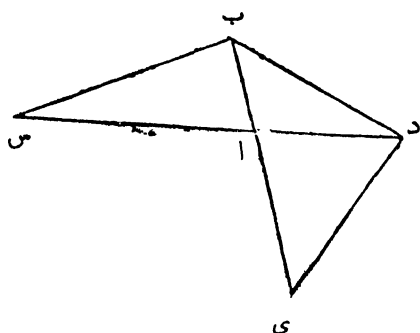
في مثلثين متساويين لهما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الآخر تكون

الاضلاع المحيطه بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ وإذا عدلت

زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت الاضلاع المحيطه بهاتين

الزاويتين متناسبة بالتكافؤ فالمثلثان متساويان

ليكن ا ب س ا د ي مثلثين متساويين والزاوية ب س ا س فلتعدل الزاوية



د اى فالاضلاع المحيطة بهاتين
الزاويتين المتساويتين متناسبة
بالتكافؤ اى س ا : د :: اى ا
اب :

ليوضع المثلثان حتى يكون
الضلعان س ا ا د على استقامة

واحدة فيكون اى ا ب ايضاً على استقامة واحدة (ق ٤ ك ا) ا رسم ب د . فلكون
المثلث ا ب س يعدل المثلث ا د اى فنسبة المثلث س ا ب الى المثلث ب ا د
كالمثلث اى ا د الى ب ا د ولكن س ا ب : ب ا د :: س ا : ا د ونسبة اى ا د :
ب ا د :: اى ا : ب ا د فاذا س ا : ا د :: اى ا : ب ا د (ق ١١ ك ه) فالاضلاع المحيطة
بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ
فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ا د اى . ا رسم ب د كما تقدم . فلان س ا : ا د :: اى ا
: ب ا وايضاً لان س ا : ا د :: المثلث ا ب س : المثلث ب ا د (ق ١١ ك ه) وايضاً
اى ا : ب ا :: المثلث اى ا د : المثلث ب ا د . فالمثلث ا ب س : المثلث ب ا د ::
المثلث اى ا د : المثلث ب ا د (ق ١١ ك ه) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث اى ا د
(ق ٩ ك ه)

القضية السادسة عشرة . ن

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا الذي هو
مسطح الطرفين يعدل القائم الزوايا الذي هو مسطح الوسطين .
والقائم الزوايا الذي هو مسطح الطرفين اذا عدل القائم الزوايا الذي
هو مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة

ليكن ا ب س د اى ف خطوطاً مستقيمة متناسبة اى ا ب : س د :: اى ا : ب
فالقائم الزوايا ا ب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ئ

من النقطة ا ارم اغ عموداً على اب
ومن س ارم س ح عموداً على س د واجعل
اغ يعدل ف وس ح يعدل ي وتم
الشكلين المتوازي الاضلاع غ ب ح د .
فلكون اب : س د :: ي : ف و ي = س ح د س

وف = اغ فنسبة اب : س د :: س ح : اغ (ق ٧ لكه) فاضلاع الشكلين
المحطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ فالشكل ح د يعدل الشكل غ ب
(ق ٤ لكه) وب غ هو مسطح اب في فلان اغ = ف وح د مسطح س د في لان
س ح = ي فالقائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي. ثم اذا فرض
ان القائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي فالخطوط الاربعة
متناسبة اي اب : س د :: ي : ف. ثم الشكلين كما تقدم. فلان القائم الزوايا اب
X ف = القائم الزوايا س د X ي والقائم الزوايا ب غ هو مسطح اب X ف لان اغ
= ف والقائم الزوايا ح د هو مسطح س د X ي لان س ح = ي فالقائم الزوايا
ب غ يعدل القائم الزوايا د ح وزواياها متساوية ايضاً فلاضلاع المحطة بالزوايا
المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ (ق ٤ لكه) فنسبة اب : س د :: س ح : اغ وس ح
= ي واغ = ف فنسبة اب : س د :: ي : ف

القضية السابعة عشرة. ن

اذا كانت ثلاثة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا الذي هو
مسطح الطرفين يعدل مربع الوسط. والقائم الزوايا الذي هو مسطح
الطرفين اذا عدل مربع الوسط فالخطوط الثلاثة متناسبة

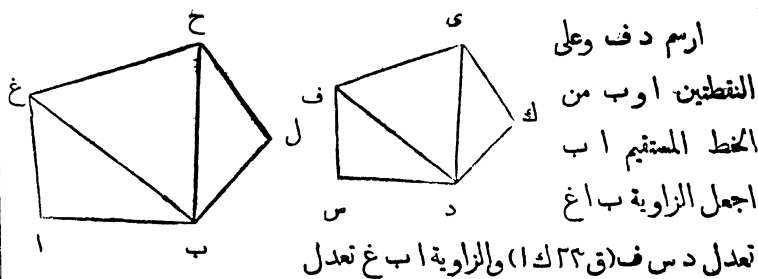
ليكن ا وب وس ثلاثة خطوط متناسبة اي ا : ب : س فالقائم الزوايا
ا X س يعدل مربع ب. افرض خطاً آخر يعدل ب
مثل د فلكون ا : ب : س وقد فرض ان ب
يعدل د فنسبة ا : ب : د :: د : س (ق ٧ لكه) واذا

كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم

الزوايا مسطح الوسطين (ق ١٦ ك ٦) فالقائم الزوايا $\times$ س يعدل القائم الزوايا ب
 $\times$ د والقائم الزوايا ب $\times$ د يعدل مربع ب لأن د يعدل ب فالقائم الزوايا $\times$ س
 $=$ ب. ثم اذا فرض ان $\times$ س $=$ ب تكون نسبة ا : ب :: ب : س
 لفرض كما تقدم ان د يعدل ب فلأن القائم الزوايا $\times$ س $=$ ب ود $=$ ب
 فالقائم الزوايا $\times$ س $=$ ب $\times$ د واذا كان القائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم
 الزوايا مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة (ق ١٦ ك ٦) اي ا : ب :: د : س
 ولكن ب $=$ د فتكون ا : ب :: ب : س

القضية الثامنة عشرة . ع

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً ذا اضلاع مستقيمة
 شبيهاً بشكل مفروض ذي اضلاع مستقيمة ومثله في الوضع
 ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض و س د ي ف الشكل المفروض ذا اضلاع
 مستقيمة . علينا ان نرسم على ا ب مثل س د ي ف شكلاً ووضعاً



س د ف فالزاوية الاخرى س ف د تعدل ا غ ب (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فالمثلث
 ف س د يشبه المثلث غ ا ب . ثم عند النقطتين ب و غ من الخط المستقيم ب غ
 اجعل الزاوية ب غ ح تعدل د ف ي (ق ٢٢ ك ١) والزاوية غ ب ح تعدل
 ف د ي فالزاوية الاخرى ف ي د تعدل الاخرى غ ح ب والمثلث ف د ي يشبه
 المثلث غ ب ح . فلأن الزاوية ا غ ب تعدل س ف د والزاوية ب غ ح تعدل
 ف ي فكل الزاوية ا غ ح يعدل الكل س ف ي . وهكذا يبرهن ايضاً ان ا ب ح تعدل
 س د ي . ولكن الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند س والزاوية غ ح ب تعدل ف ي
 د فالشكل ا ب ح غ يشبه الشكل س د ي ف . واضلاع الشكلين المحيطة بالزوايا

المتساوية متناسبة. لأن المثلثين غ ا ب ف س د متساويي الزوايا فنسبة ب ا : غ :: د س : س ف (ق ٤ ك ٦) وهكذا أيضاً

اغ : غ ب :: س ف : ف د وفي المثلثين المتشابهين ب غ ح د ف ي
غ ب : غ ح :: ف د : ف ي فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
اغ : غ ح :: س ف : ف ي وهكذا يبرهن ان
ا ب : ب ح :: س د : د ي وايضاً (ق ٤ ك ٦)

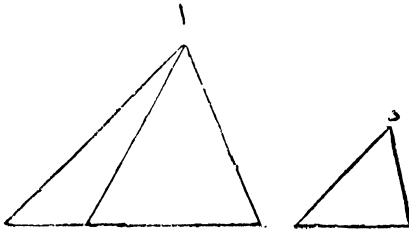
غ ح : ح ب :: ف ي : ي د فالشكلان متساويي الزوايا والاضلاع المحيطة
بالزوايا المتساوية منها متناسبة فالشكلان متشابهان (ج ١ ك ٦)

ثم اذا فرض ان يرسم على ا ب شكلاً يشبه س د ك ي ف . ارسم د ي وعلى
الخط المفروض ا ب ارسم الشكل ا ب ح غ حسباً تقدم حتى يشبه س د ي ف وعند
المنقطتين ب و ح من الخط المستقيم ب ح اجعل الزاوية ح ب ل تعدل د ي ك
والزاوية ب ح ل تعدل د ي ك فالزاوية الاخرى عند ل تعدل الاخرى عند ك .
ولان الشكلين ا ب ح غ س د ي ف متشابهان فالزاوية غ ح ب تعدل ف ي د
وب ح ل تعدل د ي ك فالكل غ ح ل يعدل الكل ف ي ك . وهكذا يبرهن ان
ا ب ل تعدل س د ك والشكل ذو الخمسة اضلاع ا غ ح ل ب يعدل الشكل ذا
الخمسة اضلاع س ف ي ك د . ولأن الشكلين ا غ ح ب س ف ي د متساويي
الزوايا فنسبة غ ح : ح ب :: ف ي : ي د وايضاً ح ب : ح ل :: ي د : د ي ك
(ق ٤ ك ٦) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) غ ح : ح ل :: ف ي : ي ك . ولهذا السبب
ايضاً ا ب : ب ل :: س د : د ك وب ل : ل ح :: د ك : ك ي (ق ٤ ك ٦) لأن
المثلثين ب ل ح د ك ي متساويي الزوايا . فالشكلان ا ب ل ح غ س د ك ي ف
متساويي الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة فهما متشابهان . وعلى
هذه الكيفية يرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً ذو ستة اضلاع فاكثر شبيه بشكل
مفروض

الفضية التاسعة عشرة . ن

نسبة المثلثات المتشابهة بعضها الى بعض كبرعات اضلاعها المتشابهة

ليكن $اب س د$ في مثلثين متشابهين وليكن الزاويتان عند $ب$ و $د$



متساويتين وليكن نسبة $اب :$

$ب س :: د ي :: ي ف$ حتى

يكون $ب س ي ف$ ضلعين

متشابهين (حد ١٢ ك هـ)

فنسبة المثلث $اب س$ الى

$ب غ ي س ف$

المثلث $د ي ف$ كنسبة مربع $ب س$ الى مربع $ي ف$. استعلم متناسبا ثالثا بين $ب س$

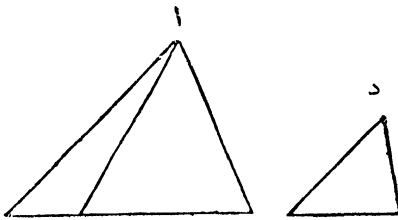
و $ي ف$ اي $ب غ$ (ق ١١ ك هـ) حتى يكون $ب س : ي ف :: ي ف : ب غ$. ارس

ا غ فلان $اب : ب س :: د ي :: ي ف$ فبالمبادلة (ق ١٦ ك هـ)

$اب : د ي :: ب س : ي ف$ وليكن

$ب س : ي ف :: ي ف : ب غ$ فاذا (ق ١١ ك هـ)

$اب : د ي :: ي ف : ب غ$



فاضلاع المثلثين $اب غ$ و $د ي ف$

المحيطة بالزاويا المتساوية منهما

هي متناسبة بالتكافؤ فالمثلثان

متساويان (ق ٥ ك هـ) فالمثلث

$اب غ$ يعدل المثلث $د ي ف$. ف

ولان $ب س : ي ف :: ي ف : ب غ$ فتناسب $ب س$ الى $ب غ$ هو مربع تناسب الى

$ي ف$. وب $ب س : ب غ ::$ المثلث $اب س$: المثلث $اب غ$ (ق ١٦ ك هـ) فالمثلث

$اب س$: المثلث $اب غ ::$ مربع $ب س$: مربع $ي ف$. والمثلث $اب غ$ يعدل

المثلث $د ي ف$ فنسبة $اب س$ الى $د ي ف$ كربع $ب س$ الى مربع $ي ف$

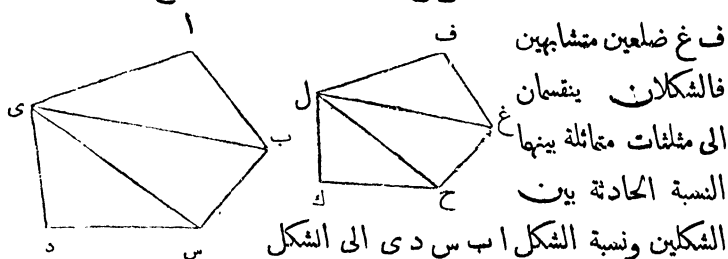
فرع. يتضح من هذه القضية انه اذا كان ثلاثة خطوط متناسبة فنسبة الاول الى

الثالث كنسبة مثلث مبني على الاول الى مثلث مبني على الثاني

القضية العشرون . ن

اشكال متشابهة ذات اضلاع كثيرة تنقسم الى مثلثات متماثلة عددا

ومتشابهة بينها نفس النسبة الحادثة بين الاشكال الاصلية . ونسبة
الاشكال الاصلية بعضها الى بعض هي كمربعات اضلاعها المتشابهة
ليكن ا ب س دى ف غ ح كل شكلين لهما اضلاع كثيرة وليكن ا ب



ف غ ح كل كعبة مربع ا ب الى مربع ف غ . ا رسم بى سى غ ل ح ل .
فلكون الشكل ا ب س دى يشبه الشكل ف غ ح كل فالزاوية ب اى تعدل
الزاوية غ ف ل (حد ا ك ٦) وب ا : اى :: غ : ف ل فالمثلثان ا بى
ف غ ل لهما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الاخر والاضلاع المحيطة بالزاويتين
المساويتين متناسبة فزوايا المثلث ا بى تعدل زوايا المثلث ف غ ل (ق ٦ ك ٦)
فالمثلثان متشابهان (ق ٤ ك ٦) . ولكون الشكلين متشابهين فالزاوية ا ب س تعدل
الزاوية ف غ ح (حد ا ك ٦) فالزاوية الباقية بى ب س تعدل الباقية ل غ ح
ولكون المثلثين ا بى ف غ ل متشابهين فنسبة بى ب : ب ا :: ل غ : غ ف
ولأن الشكلين متشابهان فنسبة ا ب : ب س :: ف غ : غ ح (حد ا ك ٦) فبالمساواة
(ق ٢٢ ك ٥) بى ب : ب س :: ل غ : غ ح فالضلعان المحيطان بالزاويتين المتساويتين
متناسبان وزوايا المثلث بى ب س تعدل زوايا المثلث ل غ ح (ق ٦ ك ٦) فها
متشابهان (ق ٤ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلثين بى س دى ل ح ك متشابهان فقد
انقسم الشكلان الى مثلثات متماثلة متشابهة

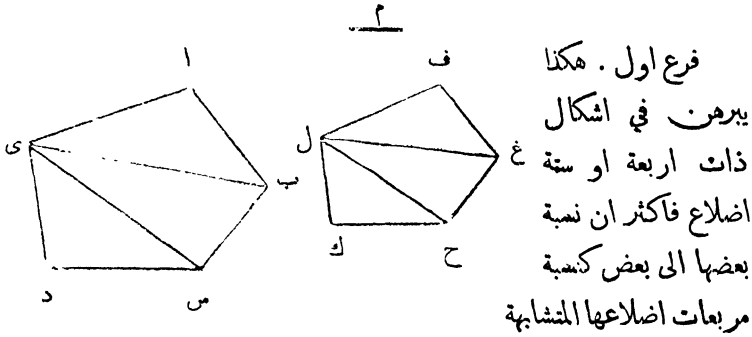
ونسبة هذه المثلثات بعضها الى بعض كنسبة الاشكال بعضها الى بعض فالسوابق
هي المثلثات ا بى بى سى س دى والتوالي هي المثلثات ف غ ل ل غ ح
ل ح ك . ونسبة الشكل ا ب س دى الى الشكل ف غ ح ق ل كنسبة مربع ا ب
الى مربع الضلع المشابه ف غ

لأن المثلث ا بى يشبه المثلث ف غ ل فنسبة ا بى الى ف غ ل كنسبة

مربع الضلع ب ي الى مربع الضلع غ ل (ق ١٩ ك ٦) وهكذا المثلث ب ي س :
المثلث غ ل ح :: مربع ب ي : مربع غ ل فنسبة ا ب ي : ف غ ل :: ب ي س :
غ ل ح (ق ١١ ك ٥) وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان

ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ح ك

وقد تبرهن ان ي ب س : ل غ ح :: ا ب ي : ف غ ل . فنسبة ا ب ي :
ف غ ل :: ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ح ك اي نسبة احد السوابق الى احد
التوالي ككل السوابق الى كل التوالي (ق ١٢ ك ٥) فالمثلث ا ب ي : المثلث ف غ ل
:: الشكل ا ب س د ي : الشكل ف غ ح ك ل ونسبة ا ب ي : ف غ ل :: ا ب :
ف غ فنسبة الشكل ا ب س د ي : ف غ غ ك ل :: مربع ا ب : مربع ف غ



فرع ثان . اذا استعمل متناسب ثالث بين الضلعين المتشابهين ا ب ف غ مثل
خط م اي ا ب : ف غ :: ف غ : م فلان الشكل على ا ب : الشكل على ف غ ::
مربع ا ب : مربع ف غ فنسبة ا ب : م :: الشكل على ا ب : الشكل على ف غ حسبها
نقدم في المثلثات (فرع ق ١٩ ك ٦) فاذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة تكون نسبة
الاول الى الثالث كنسبة شكل على الاول الى شكل مثله على الثاني

فرع ثالث . المربعات متشابهة . فنسبة مربع الى مربع كنسبة مربع ضلع من
الواحد الى مربع ضلع من الاخر . وهكذا في كل الاشكال المتشابهة ذات اضلاع
مستقيمة اي احدها الى الاخر كمربعات اضلاعها المتشابهة

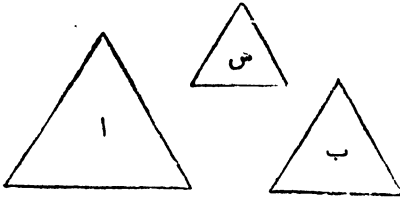
تعليقة . شكلان مركبان من مثلثات متماثلة متشابهة هما متشابهان . فبمشابهة
المثلثين لنا ي ا ب = ل ف غ ا ب ي = ف غ ل ي ب س = ل غ ح فاذنا
ا ب س = ف غ ح وب س د = غ ح ك وهلم جرا وايضا ي ا ل ف :: ا ب :

ف غ :: ي ب : ل غ :: ب س : غ ح وهلم جرا فالزوايا والاضلاع متناسبة
فالشكلان متشابهان

القضية الحادية والعشرون . ن

اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة بشكل واحد ذي اضلاع
مستقيمة هي متشابهة بعضها لبعض

ليكن ا وب شكلين مستقيمي الاضلاع شبيهين بشكل آخر ذي اضلاع مستقيمة
مثل س فهما متشابهان



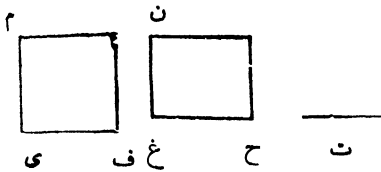
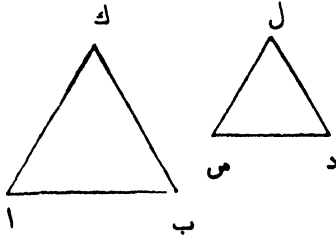
لأن ا يشبه س فهما متساويا
الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا
المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦)

ولأن ب يشبه س فهما متساويا الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة
(حد ا ك ٦) فزوايا كل واحد من الشكلين ا وب تعدل زوايا الشكل س والاضلاع
المحيطة بالزوايا المتساوية منها متناسبة فالشكلان متساويا الزوايا (حد ا ك ١)
واضلاعها المولية لهذه الزوايا متناسبة (ق ١١ ك ٥) فالشكل ا يقبى الشكل ب
(حد ا ك ٦)

القضية الثانية والعشرون . ن

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالاشكال المتشابهة ذات
الاضلاع المستقيمة المبنية على هذه الخطوط تكون متناسبة ايضاً . واذا
كانت هذه الاشكال متناسبة فالخطوط التي بُنيت عليها تكون
متناسبة ايضاً

ليكن ا ب س د ي ف غ ح اربعة خطوط مستقيمة متناسبة اي ا ب : س د



١١: ف: غ ح وليرسم

على اب وس د شكلان

متشابهان لهما اضلاع ط

مستقيمة ك اب ل س د

وليرسم على ي ف غ ح

شكلان متشابهان لهما

اضلاع مستقيمة م ف

ن ح فتكون نسبة

ك اب : ل س د ::

م ف : ن ح

ليكن ط خطأ مستقيماً ومتناسباً ثالثاً للخطين اب س د والخط المستقيم ت

متناسباً ثالثاً للخطين ي ف غ ح (ق ١١ ك ٦) فليكون

اب : س د :: ي ف : غ ح وايضاً

س د : ط :: غ ح : ت (ق ١١ ك ٥) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)

اب : ط :: ي ف : ت ولكن

اب : ط :: ك اب : ل س د (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) فإذا

ي ف : ت :: م ف : ن ح فيكون

ك اب : ل س د :: م ف : ن ح (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦)

ثم اذا فرض ان نسبة ك اب : ل س د :: م ف : ن ح تكون نسبة اب : س د ::

ي ف : غ ح

اجعل نسبة اب : س د :: ي ف : ق ر (ق ١٢ ك ٦) وعلى ق ر ارسم

الشكل المستقيم الاضلاع ص ر حتى يشبه م ف ا ون ح شكلاً ووضعاً (ق ١٨ ك ٦)

فلاذن اب : س د :: ي ف : ق ر وقد رُسم على اب وس د شكلان متشابهان

شكلاً ووضعاً ك اب ول س د وهكلا على ي ف ق ر قد رُسم شكلان متشابهان

شكلاً ووضعاً م ف و ص ر فتكون نسبة ك اب : ل س د :: م ف : ص ر .

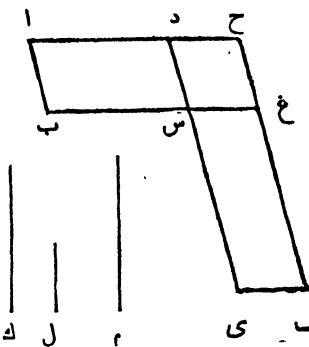
وبالمفروض ك اب : ل س د :: م ف : ن ح فالشكل المستقيم الاضلاع م ف ل

تناسب واحد للشكلين ن ح ص ر فهما متساويان (ق ٩ ك ٥) وهما متشابهان ايضاً

شكلاً ووضعاً فالخط غ ح يعدل الخط ق ر ولان اب : س د :: ي ف : ق ر و ق ر
= غ ح فتكون نسبة اب : س د :: ي ف : غ ح

القضية الثالثة والعشرون . ن

تناسب اشكال متوازية الاضلاع متساوية الزوايا بعضها الى بعض
هو التناسب المركب من تناسبات اضلاعها



ليكن اس س ف شكليين متوازيين
الاضلاع. والزوايا ب س د فلتعدل الزاوية
ي س غ فتناسب اس الى س ف هو
التناسب المركب من تناسبات اضلاعها
ليوضع ب س وس غ على استقامة واحدة
فيكون ي س س د ايضاً على استقامة واحدة
(ق ١٤ ك ١) ثم الشكل د غ . ثم عين خطا

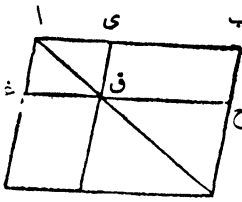
مستقيماً مثل ك واجعل تناسب ب س : س غ :: ك : ل (ق ١٢ ك ٦) وتناسب
د س : س ي :: ل : م فتناسبات ك الى ل ول الى م هي مثل تناسبات الاضلاع
اي تناسب ب س الى س غ وتناسب د س الى س ي . ولكن تناسب ك الى م هو
المركب من تناسب ك الى ل مع تناسب ل الى م (حد ١٠ ك ٥) فتناسب ك الى م
هو المركب من تناسبات اضلاع الشكليين . ولان ب س : س غ :: اس : س ح
(ق ١٦ ك ٦) وب س : س غ :: ك : ل فيكون ك : ل :: اس : س ح (ق ١١ ك ٥)
ولان د س : س ي :: س ي : س ح : س ف ود س : س ي :: ل : م فيكون ل : م ::
س ح : س ف (ق ١١ ك ٥)

وقد تبهرن ان ك : ل :: اس : س ح وان ل : م :: س ح : س ف فبالمساواة
(ق ٢٢ ك ٥) ك : م :: اس : س ف ولكن تناسب ك الى م هو المركب من تناسبات
اضلاع الشكليين كما تقدم . فتناسب اس الى س ف هو المركب من اضلاعها
فرع اول . شكلان قائما الزوايا احدهما الى الاخر كحاصل قاعدتهما في علوها
فرع ثان . مساحة شكل متوازي الاضلاع تعدل مسطح القاعة في العلو

فرع ثالث . مساحة مثلث تعدل مسطح قاعدته في نصف علوه .

القضية الرابعة والعشرون . ن

الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض وللشكل كله



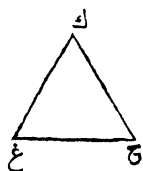
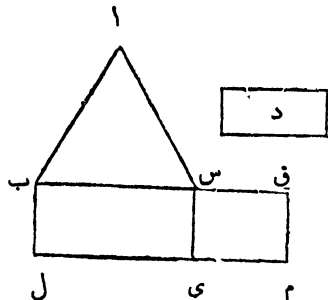
ليكن ا ب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطره وى غ ح ك شكليّن متوازي الاضلاع على جانبي القطر فهما متشابهان ويشبهان كل الشكل ا ب س د

لانّ د س يوازي غ ق والزاوية ا د س تعدل الزاوية ا غ ق (ق ٢٩ ك ١) ولانّ ب س يوازي ق و الزاوية ا ب س تعدل الزاوية ا ق و وكل واحدة من الزاويتين ب س د دى ق غ تعدل المقابلة د ا ب (ق ٢٤ ك ١) فهما متساويتان والاشكلان ا ب س د اى ق غ متساويا الزوايا ولانّ الزاوية ا ب س تعدل الزاوية اى ق والزاوية س ا ب مشتركة بين المثلثين ب ا س اى ق فهما متساويا الزوايا و ا ب : ب س :: اى : سى : ق (ق ٤ ك ٦) ولكون الاضلاع المتقابلة من شكل متوازي الاضلاع هي متساوية (ق ٢٤ ك ١) يكون ا ب : ا د :: اى : ا غ (ق ٧ ك ٥) و د س : ب س :: غ ق : ق و س د : د ا :: ق غ : غ ا فاضلاع الشكليّن ا ب س د اى ق غ المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة فهما متشابهان (حد ١ ك ٦) ولهذا السبب ايضاً الشكل ا ب س د يشابه الشكل ق ح س ك فكل واحد من الشكليّن غ ي ك ح يشبه د ب والاشكال المستقيمة الاضلاع التي تشبه شكلاً واحداً مستقيم الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض (ق ٢١ ك ٦) فالشكل غ ي يشبه الشكل ك ح

القضية الخامسة والعشرون . ع

علينا ان نرسم شكلاً مستقيم الاضلاع حتى يشبه شكلاً مفروضاً مستقيم الاضلاع ويعدل شكلاً آخر مفروضاً مستقيم الاضلاع

ليكن ا ب س شكلاً مفروضاً مستقيماً الاضلاع ود شكلاً آخر مفروضاً مستقيماً



الاضلاع . علينا ان نرسم
شكلاً مستقيماً الاضلاع
يعدل د ويشبه ا ب س
ارسم الشكل
المتوازي الاضلاع ب ي
على الخط المستقيم ب س

حتى يعدل ا ب س (فرع ق ٤٥ ك ١) وعلى س ي ارسم شكلاً متوازي الاضلاع
س م حتى يعدل د (فرع ق ٤٥ ك ١) واجعل الزاوية ق س ي منه تعدل الزاوية
س ب ل فيكون ب س وق س على استقامة واحدة ول ي و ي م كذلك (ق ٣٩
ك ١ اوق ١٤ ك ١) استعلم متناسباً متوسطاً بين ب س وس ق مثل غ ح (ق ١٢ ك ٦)
وارسم على غ ح شكلاً مستقيماً الاضلاع ك غ ح حتى يشبه ا ب س شكلاً ووضعاً
(ق ١٨ ك ٦)

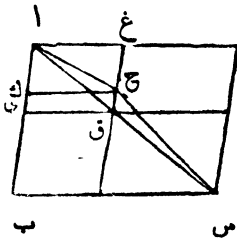
فلكون نسبة ب س : غ ح :: غ ح : س ق فالشكل ا ب س : ك غ ح :: ب س :
س ق (فرع ثان ق ٢٠ ك ٦) وب س : س ق :: ب ي : س م (ق ١١ ك ٦)
فنكون نسبة ا ب س : ك غ ح :: ب ي : س م (ق ١١ ك ٦) والشكل ا ب س
يعدل ب ي فالشكل ك غ ح يعدل س م (ق ١٤ ك ٦) والشكل س م يعدل د
فالشكل ك غ ح يعدل د ايضاً وهو يشبه الشكل ا ب س وذلك ما كان علينا
ان نعلمه



الفضية السادسة والعشرون . ن

شكلان متوازي الاضلاع متشابهان اذا كان لهما زاوية مشتركة وتشابهان
وضعاً فهما على جانبي قطر واحد

ليكن ا ب س د ا ب ي ق غ شكلين متوازي الاضلاع متشابهين شكلاً ووضعاً



ولتكن الزاوية د ا ب مشتركة بينهما فالشكلان على جانبي قطر واحد

والا فليكن ا ح س قطر الشكل ب د واق
قطر الشكل د غ ق والخط غ ق فليقطع ا ح س في
النقطة ح ومن ح ارسم ح ك حتى يوازي ا د او ب س . س

فالشكلان ا ب س د ا ك ح غ متشابهان لانهما على جانبي قطر واحد (ق ٢٤ ك ٦)
ودا ا ب : غ ا : ا ك (ح د ا ك ٦) وقد فُرض ان ا ب س د ا ي ق غ متشابهان
فتكون نسبة د ا : ا ب : غ ا : ا ي فتكون نسبة غ ا : ا ي : غ ا : ا ك (ق ١١ ك ٥)
فاذا ا ك = ا ي (ق ٩ ك ٥) اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يكون
ا ك ح غ ا ب س د على جانبي قطر واحد فبالضرورة يكون ا ب س د ا ي ق غ
على جانبي قطر واحد



القضية السابعة والعشرون . ن

من جميع الاشكال القائمة الزوايا التي تحيط بها اقسام خط مستقيم

فاعظمها مربع نصف الخط

ليكن ا ب خطا مستقيما ولينصف في س ولتكن د ا بة نقطة كانت فيه فالمربع

على ا س هو اعظم من القائمة الزوايا ا د ب د ب د س ا

فلكون الخط المستقيم ا ب قد انقسم الى قسمين متساويين في س وغير متساويين

في د فالقائم الزوايا ا د ب د ب مع مربع س د يعدل مربع ا س (ق ٥ ك ٢) فاذا

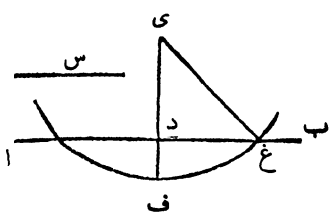
مربع ا س هو اكبر من القائمة الزوايا ا د ب د ب

القضية الثامنة والعشرون . ع

علينا ان نقسم خطا مستقيما مفروضا حتى يعدل القائم الزوايا مسطح

فسميه مساحة مفروضة ولا تكون تلك المساحة اعظم من مربع نصف

الخط



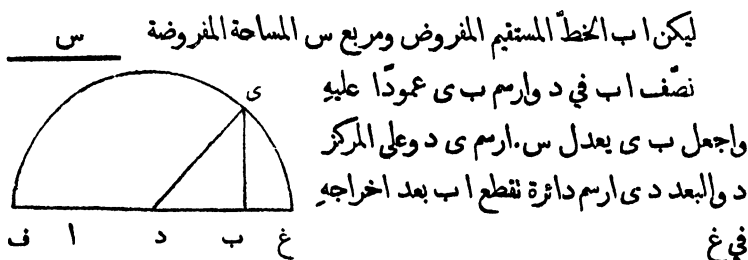
ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض
ومربع س المساحة المفروضة. علينا ان
نقسم ا ب الى قسمين مسطهما يعدل مربع
س ولا يكون اعظم من مربع نصف ا ب

نصف ا ب في د مربع ا د اذا عدل مربع س فهو المطلوب والا فيكون ا د
اعظم من س حسب المفروض. ارم د ي عموداً على ا ب حتى يعدل س. اخرج
ي د الى ف واجعل ي ف يعدل ا د ا و د ب. ومن المركز ي والبعدي ف ارم
دائرة تقطع ا ب في غ وارسم ي غ. فلكون ا ب قد انقسم الى قسمين متساويين في
د وغير متساويين في غ فالتائم الزوايا ا غ خ ب + د غ = د ب (ق ٥ ك ٢) =
ي غ ولكن ي د + د غ = ي غ (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا غ خ ب + د غ = ي د
+ د غ ا طرح د غ فالباقى ا غ خ ب = ي د و ي د = س فالتائم الزوايا ا غ
خ ب = س وذلك ما كان علينا ان نعلمه



القضية التاسعة والعشرون. ع

علينا ان نخرج خطاً مستقيماً مفروضاً حتى ان القائم الزوايا مسطح الخط
مع ما زيد اليه في الجزء المزيد يعدل مساحة مفروضة

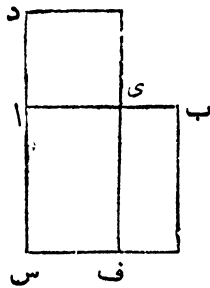


ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض ومربع س المساحة المفروضة
نصف ا ب في د وارسم ب ي عموداً عليه
واجعل ب ي يعدل س. ارم ي د وعلى المركز
د والبعدي د ي ارم دائرة تقطع ا ب بعد اخرج
في غ
فلكون ا ب قد تنصّف في د واخرج الى غ (ق ٦ ك ٢) فالتائم الزوايا ا غ خ
ب + د ب = د غ = د ي. ولكن د ي (ق ٤٧ ك ١) = د ب + ب ي فالتائم
الزوايا ا غ خ ب + د ب = د ي + ب ي وا غ خ ب = ب ي وب ي =
س فاذا ا غ خ ب = س وذلك ما كان علينا ان نعلمه

الفضية الثلاثون . ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً حتى يكون احد القسمين متناسباً متوسطاً
بين المخط كله والقسم الآخر

ليكن اب المخط المستقيم المفروض . ارسم على اب مربعاً (ق ٤٦ ك ١) ب س



واخرج س الى د حتى ان القائم الزوايا س د خ د ا

يعدل المربع س ب (ق ٢٩ ك ٦) اجعل اى يعدل

ا د ونم القائم الزوايا د ف اى د س خ اى او د س

خ د ا فلكون س د خ د ا = س ب فالشكل د ف =

س ب اطرح الجزء المشترك س ي فالباقي د ي =

الباقي ب ف وب ف هو القائم الزوايا ف ي خ ي ب

او اب خ بى . ود ي هو المربع على اى فالخط اى هو متناسب متوسط بين

اب وبى (ق ١٧ ك ٦) اي اب : اى : بى وب هو اعظم من اى

فيكون اى اعظم من بى (ق ١٤ ك ٥) فقد انقسم الخط اب على نسبة متوسطة

(حد ٢ ك ٦)

طريقة اخرى

ليكن اب المخط المفروض . اقسم اب في س حتى

ان القائم الزوايا اب خ ب س يعدل اس (ق ١١ ك ٢) فلكون اب خ ب س =

اس تكون نسبة اب : اس : اس : س ب (ق ١٧ ك ٦) اي اس متناسب

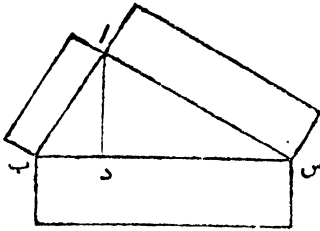
متوسط بين اب وس ب (حد ٢ ك ٦)

الفضية الحادية والثلاثون . ن

في كل مثلث ذي قائمة ذوا اضلاع المستقيمة المرسوم على الضلع الذي

يقابل القائمة يعدل الشكليين المتشابهين به هيئة ووضعاً المرسومين

على الضلعين المحيطين بالقائمة

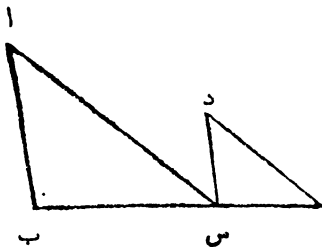


ليكن اب س مثلثا ذا قائمة ب اس
فذو الاضلاع المستقيمة المرسوم على ب س
يعدل الشكلين المتشابهين بوهيئة ووضعاً
المرسومين على ب ا و س
ارسم العمود ا د . فلأن ا د قد رُسم

عموداً من القائمة على القاعدة فالمثلثان ا د ب ا د س متشابهان ويشبهان كل المثلث
ا ب س ايضاً (ق ٨ ك ٦) ونسبة س ب : ب ا :: ب د : ا ب (ق ٤ ك ٦) ولكون
هذه المخطوط الثلاثة المستقيمة متناسبة تكون نسبة الاول الى الثالث كنسبة شكل على
الاول الى الشكل . مثله هيئة ووضعاً على الثاني (فرع ثان ق ٢٠ ك ٦) فنسبة س ب :
ب د :: شكل على س ب : مثله هيئة ووضعاً على ب ا . وبالفعل (ق ب ك ٥)
د ب : ب س :: الشكل على ب ا : مثله على ب س . وهكذا ايضاً د س : س ب ::
الشكل على س ا : مثله على س ب . فاذا ب د + د س : ب س :: الشكل على
ب ا + الشكل على ا س : الشكل على ب س (ق ٢٤ ك ٥) فالشكلان على ب ا
و ا س معاً يعدلان الشكل على ب س وهي اشكال متشابهة

القضية الثانية والثلاثون . ن

مثلثان ضلعان من الواحد مناسبان لضلعين من الآخر اذا وُضعت
زاوية من الواحد بملامسة زاوية من الآخر حتى تكون اضلاعها المتشابهة
متوازية يكون الضلعان الآخران على استقامة واحدة



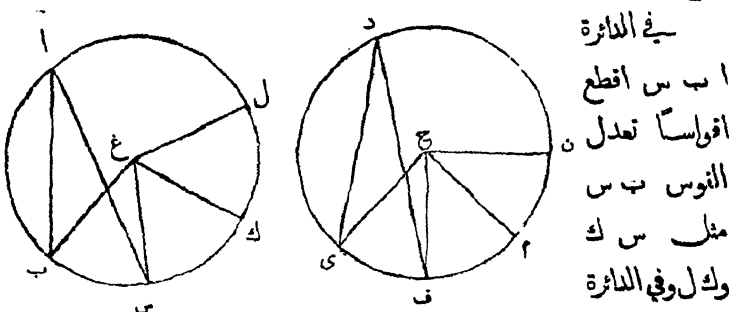
ليكن اب س د س ي مثلثين
والضلعان ب ا ا س فليناسبيا د د ي
اي ب ا : ا س :: د د : د ي وليكن اب
ود س متوازيين و ا س و د ي متوازيين
فيكون ب س و س ي على استقامة واحدة

لأن الخط المستقيم اس يلافي المتوازيين اب د س فالزاويتان المتبادلتان
ب ا س ا س د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ولهذا السبب ايضاً الزاوية س د ي تعدل

الزاوية ا س د فالزاوية ب ا س تعدل س د ي والمثلثان لها الزاوية عند د تعدل
الزاوية عند ا والاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة اي ب ا : س ::
س د : د ي فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د س ي (ق ٦ ك ٦)
فالزاوية ا ب س تعدل د س ي . وقد تبين ان ب ا س تعدل ا س د فالكمل
ا س ي يعدل الزاويتين ا ب س ب ا س . اصف الزاوية المشتركة ا س ب الى
الجانبيين فالزاويتان ا س ي ا س ب تعدلان ا ب س ب ا س ا س ب وهذه
الثلاث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فاذا ا س ي ا س ب تعدلان قائمتين
فالخطان ب س س ي على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١)

الفضية الثالثة والثلاثون . ن

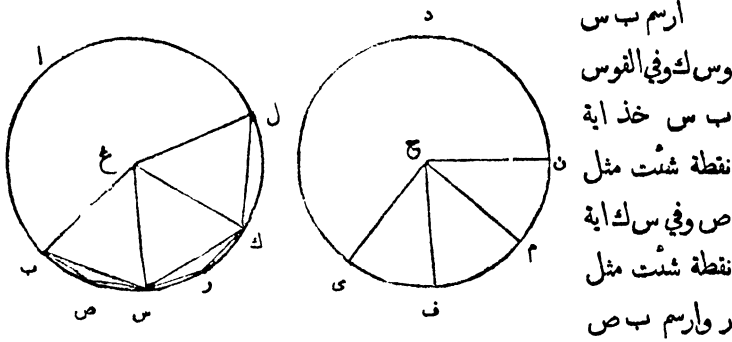
في دوائر متساوية نسبة الزوايا في المركز او في المحيط بعضها الى بعض
كنسبة الاقواس التي تقابلها بعضها الى بعض . وهكذا القطعان ايضاً
لكن ا ب س د ي ف دائرتين متساويتين فنسبة الزاوية في المركز ب غ س
الى الزاوية في المركز ح ف والزاوية في المحيط ب ا س الى الزاوية في المحيط
ي د ف كنسبة القوس ب س الى القوس ي ف والقطاع ب غ س : القطاع
ي ح ف :: القوس ب س : القوس ي ف



د ي ف اقطع اقواساً تعدل القوس ي ف مثل ف م ن . ا رسم غ ك غ ل ح م
ح ن فالزوايا ب غ س س غ ك ل غ ل متساوية لان الاقواس ب س س ك
ك ل متساوية (ق ٢٧ ك ٢) فاي مضروب كانت القوس ب ل من القوس ب س
كانت ب غ ل ذات هلا المضروب من ب غ س : وعلى هذا الاسلوب يتضح ان

ي ح ن ذات المضروب من ي ح ف الذي كانت القوس ي ن من القوس ي ف
والقوس ب ل اذا عدلت القوس ي ن فالزاوية ب غ ل تعدل الزاوية ي ح ن
(ق ٢٧ ك ٢) وان كان اعظم فاعظم وان كان اصغر فاصغر فنسبة ب س : ي ف
:: ب غ س : ي ح ف (حد ٥ ك ٥) ولكن ب غ س : ي ح ف :: ب ا س : ي د ف
(ق ١٥ ك ٥) لان كل واحدة مضاعف نظيرها (ق ٢٠ ك ٢) فنسبة القوس
ب س : القوس ي ف :: الزاوية ب غ س : الزاوية ي ح ف وكسبة الزاوية ب ا س
: الزاوية ي د ف

كذلك القطاع ب غ س : القطاع ي ح ف :: القوس ب س : القوس ي ف



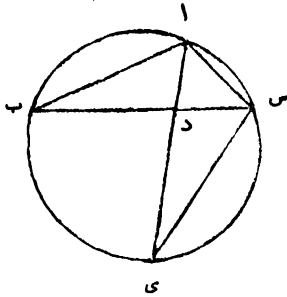
ص س س ر ر ك . فضلان من المثلث غ ب س اي ب غ غ س يعدلان
ضلعين من المثلث غ س ك اي س غ غ ك والزاوية ب غ س = س غ ك فالقاعدة
ب س = القاعدة س ك (ق ٤ ك ١) والمثلث ب غ س = المثلث س غ ك . ولكون
القوس ب س = القوس س ك فالباقي من كل المحيط ب ا س يعدل الباقي س ا ك
فالزاوية ب ص س تعدل الزاوية س ر ك (ق ٢٧ ك ٢) والقطعة ب ص س تشبه
القطعة س ر ك (حد ٩ ك ٢) وهما على خطين مستقيمين متساويين ب س وس ك فهما
متساويان (ق ٢٤ ك ٢) فالقطعة ب ص س تعدل القطعة س ر ك وهكذا ايضاً
يبرهن ان القطاع ك غ ل يعدل ب غ س اوس غ ك . وهكذا يبرهن ايضاً ان
القطاع ي ح ف ف ح م ح ن متساوية . فاي مضروب كانت القوس ب ل
من القوس ب س فالقطاع ب غ ل هو ذات ذلك المضروب من القطاع
ب غ س وهكذا ايضاً اي مضروب كانت القوس ي ن من القوس ي ف فالقطاع
ي ح ن هو ذات ذلك المضروب من القطاع ي ح ف . فالقوس ب ل اذا

عدلت القوسى ن فالقطاع ب غ ل يعدل القطاعى ح ن وإذا كان أكبر
فأكبر وإذا كان أصغر فاصغر فأذا (حده كه) القوس ب مى : القوسى ف ::
القطاع ب غ س : القوسى ح ف

فضية ب . ن

إذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة أيضاً فالقائم الزوايا
مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح قسبي القاعدة مع مربع
الخط المستقيم الذي ينصف الزاوية

ليكن اب س مثلثاً ولتنصف الزاوية با س منه بالخط المستقيم اد الذي
يقطع القاعدة في النقطة د . فالقائم الزوايا با
$$ا س \times ا س = ب د \times د س + ا د^2$$



ارسم دائرة نمجط بالمثلث اب س (ق ٥
ك ٤) واخرج اد حتى يلاقي المحيط في س وارسم
س س . فلكون الزاوية با د تعدل الزاوية
س اى والزاوية اب د تعدل الزاوية اى س

(ق ٢١ ك ٢) لانهما في قطعة واحدة فالمثلثان اب د اى س متساويا الزوايا ونسبة
ب ا : ا د :: س ا : ا س (ق ٤ ك ٦) فإذا ب ا $\times$ ا س = ا د $\times$ اى س (ق ٦ ك ٦)
= دى د ا + د ا^2 (ق ٢ ك ٢) وى د $\times$ د ا = ب د $\times$ د س (ق ٢٥ ك ٢) فإذا
ب ا $\times$ ا س = ب د $\times$ د س + ا د^2

فضية ج . ن

إذا رُسم من زاوية مثلث خط مستقيم يعمود على القاعدة فالقائم الزوايا
مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح العمود وقطر الدائرة
المحيطة بالمثلث

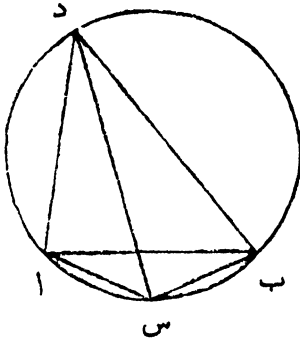
ليكن اب س مثلثاً وليُرسم العمود اد على القاعدة ب س من الزاوية عند ا .

$$\begin{aligned} \text{س ي} + \text{ب د} \times \text{ا ي} &= \text{ب د} \times \text{ا س} \quad (\text{ق الك ٢}) \text{ فالقائم الزوايا ب د} \times \text{ا س} = \\ \text{ا ب} \times \text{س د} + \text{ا د} \times \text{ب س} \end{aligned}$$

قضية ٥٠٠ ن

اذا تنصفت قوس دائرة ورسم من طرفها ومن نقطة الانتصاف خطوط مستقيمة الى نقطة ما من المحيط تكون نسبة مجتمع الخطيين المرسومين من طرفي القوس الى الخط المرسوم من نقطة انتصافه كنسبة وتر القوس الى وتر نصفها

لكن ا ب د دائرة ولتنصف القوس ا ب منها ب في س ولترسم الخطوط المستقيمة ا د س د ب د من طرفي القوس ومن نصفها الى النقطة د من المحيط فنسبة مجتمع الخطيين ا د د ب الى س د كنسبة ب ا الى ا س



لكن ا د ب س ذا اربعة اضلاع في دائرة وقطره ا ب ود س فالقائم الزوايا ا د س ب + د ب $\times$ ا س = ا ب $\times$ س د

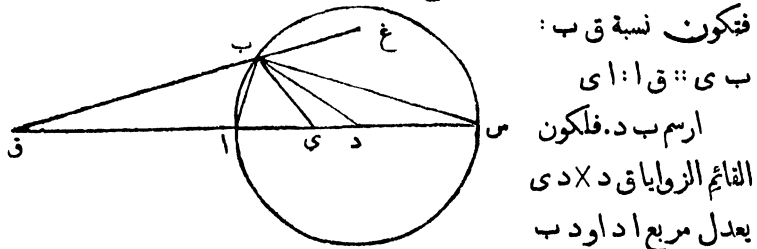
(ق دك ٦) ولكن ا د س ب + د ب $\times$ ا س = ا د $\times$ ا س + د ب $\times$ ا س لان ا س = س ب فاذا ا د س ب + د ب $\times$ ا س = ا ي (ق الك ٢) (ا د + د ب) $\times$ ا س = ا ب $\times$ س د . واضلاع اشكال متساوية قائمة الزوايا هي متناسبة بالتكافؤ (ق الك ٦) فتكون نسبة ا د + د ب : د س :: ا ب : ا س

قضية ٥٠١ ن

اذا تعينت نقطتان في قطر دائرة بعد اخراجه حتى ان القائم الزوايا مسطح القسمين بين النقطتين ومركز الدائرة يعدل مربع نصف القطر

ورُسم من هاتين النقطتين خطان مستقيمان الى نقطة ما من المحيط
تكون نسبة احدهما الى الآخر كنسبة احد قسبي القطر بين احدى
النقطتين المذكورتين والمحيط الى الآخر بين النقطة الاخرى والمحيط

لتكن ا ب س دائرة مركزها د . اخرج د اوعين فيه نقطتين ي و ق حتى ان
القائم الزوايا ي د خ د ق يعدل مربع ا د وليرسم ي ب ق الى ب نقطة من المحيط
فتكون نسبة ق ب :



ب ي :: ق ا : ا ي

ارسم ب د . فلكون

القائم الزوايا ق د خ د ي

يعدل مربع ا د ا و د ب

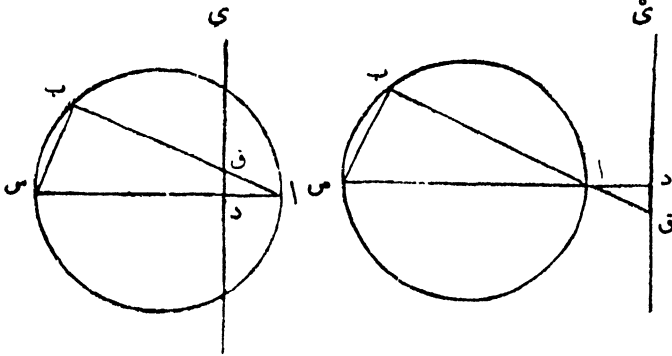
فنسبة ق د : د ب :: د ب : د ي (ق ١٧ لك ٦) . فالمثلثان ق د ب ب د ي
اضلاعها المحيطة بالزاوية المشتركة د هي متناسبة وها ايضا متساويا الزوايا (ق ٦ لك ٦)
والزاوية د ي ب تعدل د ب ق و د ب ي تعدل د ق ب . ولكون الاضلاع
المحيطة بهذه الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ لك ٦) فنسبة ق ب : ب د :: ب ي : د ي
وبالمبادلة (ق ١٦ لك ٥) ق ب : ب ي :: ب د : د ي داوق ق ب : ب ي :: ا د : د ي
ولأن ق د : د ا :: د ا : د ي فبالقسمة (ق ١٧ لك ٥) ق ا : د ا :: ا ي : د ي وبالمبادلة
(ق ١١ لك ٥) ق ا : ا ي :: د ا : د ي . وقد تبين ان ق ب : ب ي :: ا د : د ي
فتكون نسبة ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي

فرع . اذا رُسم ا ب فلكون ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي تكون الزاوية ق ب ي
قد تنصفت بالخط ا ب (ق ٢ لك ٦) . ولأن ق د : د س :: د س : د ي وبالتركيب
(ق ١٨ لك ٥) ق س : د س :: د س : د ي وقد تبين ان ق ا : ا د ا و د س :: ا ي :
د فبالمساواة ق ا : ا ي :: ق س : د س . ولكن ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي فاذا
ق ب : ب ي :: ق س : د س (ق ١١ لك ٥) فاذا اخرج ق ب الى غ ورُسم ب س
فالزاوية ي ب غ تنصّف بالخط ب س (ق ١ لك ٦)

قضيه ز . ن

اذا رُسِم من طرف قطر دائرة خطٌ مستقيمٌ في الدائرة واذا لاقى خطاً
عموداً على القطر داخل الدائرة او خارجها بعد اخراجه فالقائم الزوايا
مسطح الخط المستقيم في الدائرة والنقسم منه الواقع بين طرف القطر
والخط العمودي على القطر بعدل القائم الزوايا مسطح القطر والنقسم
منه المقطوع بالعمود عليه

لتكن ا ب س دائرة قطرها ا س وليكن د ي عموداً على القطر ا س وليلاقوا



ا ب في ق فالقائم الزوايا ب ا ق $\times$ ا ق = س ا $\times$ ا د

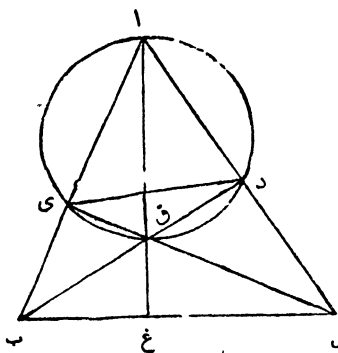
ارسم ب س فالزاوية ا ب س قائمة لانها في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢)
و ا د ق ايضاً قائمة حسب المفروض والزاوية ب ا س هي ذات الزاوية د ا ق او
مقابلة لها فالثلثان ا ب س ا د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ا : ا س :: ا د : ا ق
(ق ٤ ك ٦) فالقائم الزوايا ب ا ق $\times$ ا ق = س ا $\times$ ا د (ق ١٦ ك ٦)

—xox—

قضيه ح . ن

العموديات من زوايا مثلث الى الاضلاع المقابلة لتقاطع في نقطة
واحدة

ليكن ا ب س مثلثاً و ب د و س ي عمودين يتقاطعان في ق



ارسم ا ق وليخرج حتى يلاقي ب س في
غ . فالخط ا غ عمود على ب س . ارسم د ي
وارسم الدائرة ا ي ق فمحيط بالمثلث ا ي ق
فلكون ا ي ق قائمة فالخط ا ق قطر الدائرة
المحيطة بالمثلث ا ي ق (ق ٢١ ك ٣) و ا ق
ايضا قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ا د ق

فالنقط ا ي ق د في محيط دائرة واحدة . س
ولكون الزاوية ا ي ق ب تعدل الزاوية د ق س (ق ٥ ك ١) والزاوية ب ي ق تعدل
س د ق لانها قائمتان فالثلثان ب ي ق س د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ق :
ي ق :: س ق : د ق (ق ٤ ك ٦) وبالمبادلة ب ق : س ق :: ي ق : د ق (ق ٦ ك ٥)
فلكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين ب ق س ي ق د متناسبة فالثلثان
ب ق س ي ق د متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) فالزاوية ق س ب تعدل ي د ق
ولكن ي د ق تعدل ا ي ق لانها في قطعة واحدة (ق ٢١ ك ٣) فالزاوية ا ي ق
تعدل الزاوية ق س غ والزاويتان ا ق ي س ق غ متساويتان ايضا لانها متقابلتان
(ق ١٥ ك ١) فالباقيتان ا ي ق ق غ س متساويتان ايضا (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١)
ولكن ا ي ق قائمة فتكون ق غ س ايضا قائمة وا غ عمود على ب س

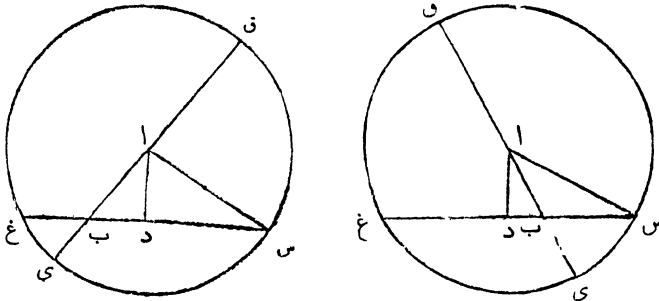
فرع . المثلث ا د ي يشبه المثلث ا ب س . لان المثلثين ب ا د س ا ي هما
الزاويتان عند د و ي قائمتان والزاوية عند ا مشتركة بينهما فنسبة ب ا : د ا :: س ا :
ا ي وبالمبادلة ب ا : س ا :: د ا : ا ي . فالثلثان ب ا س د ا ي هما الزاوية عند ا
مشتركة بينهما والاضلاع المحيطة بها متناسبة فهما متساويا الزوايا ومتشابهان (ق ٦ ك ٦)
القائم الزوايا ب ا ي = س ا د

فضية ط . ن

اذا رسم من زاوية مثلث عمود على القاعدة فالقائم الزوايا مسطح مجتمع

الضلعين الآخرين في فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطح مجتمع قسي
القاعدة في فضلتهما

ليكن اب س مثلثاً ومن الزاوية ب اس لرسم اد عموداً على القاعدة ب س



فالقائم الزوايا (ا س + اب) × (اس - اب) = (س د + دب) × (س د - دب)
اجعل ا مركزاً واس اطول الضلعين نصف قطر وارسم الدائرة س ق غ
واخرج ب ا حتى يلاقي المحيط في ق وي . واخرج س ب حتى يلاقي المحيط في غ .
فالآن اق = اس فالخط ب ق = اب + اس مجتمع الضلعين ولان اى = اس
فالخط ب ي = اس - اب فضلة الضلعين . ولكون اد عموداً من المركز على غ س
فهو ينصفه ايضاً فاذا وقع العمود داخل المثلث فالخط ب غ = د غ - دب =
د س - دب = فضلة قسي القاعدة وب س = دب + د س = مجتمع قسي القاعدة
واذا وقع اد خارج المثلث فالخط ب غ = د غ + دب = س د + دب = مجتمع
القسمين وب س = س د - دب = فضلتهما . وعلى الحالتين لان الخطين ق ي
غ س يتقاطعان في ب فالقائم الزوايا ق ب × ب ي = س ب × ب غ او حسبما
تقدم (اس + اب) × (اس - اب) = (س د + دب) × (س د - دب)

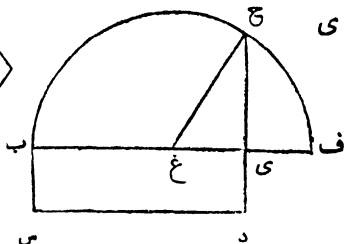
—x—

عمليات ملحقات بالكتاب السادس

—x—

فضية ي . ع

علينا ان نرسم مربعاً يعدل شكلاً مفروضاً اذا اضلاع مستقيمة



حتى يعدل (ق ٤٥ ك ١)

واخرج احد اضلاعه بي

واجعل ی ف یعدل ی د

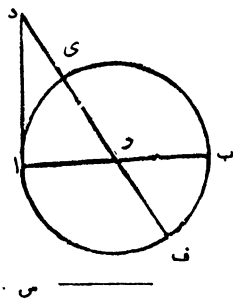
نَصَّفَ ب ف فِ غِ وَاجْعَلْ

غ مرکزاً و غ فا و غ ب نصف قطر وارسم نصف الدائرة ف ح ب واخرج د الى ح
فيكون ح ي^ا - ب ي^ب خ ي^ج ف (ق ١٢ ك ٦) = ب د = ا فالمربع علي ح ي يعدل ا

قضية ك.ع

علينا ان نرسم شكلاً قائم الزوايا يعدل مربعاً مفروضاً وفضلة ضلعيه المتواليين تعدل خطاً مفروضاً

ليكن s ضلعاً من المربع المفروض و a بفضلة ضلعي الشكل المطلوب



ارسم على ا ب دائرة ومن طرف القطر ارسم المماس

١٠ حتى يعدل ضلعاً من مربع س وفي النقطة د والمركز

ارسم القاطع د ف فيكون ف د $\times$ دى الشكل المطلوب

اولاً فضلة ضلعيه يعدل ی ف ا و ا ب

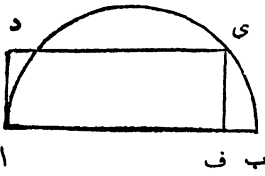
وثنائياً دى × د ف = د ا^۱ (ق ۲۶ ك ۲) و د ا = س

قضیة ل.ع

علینا ان نرسم شکلاً قائم الزوایا حتی یعدل مربعاً مفروضاً ومجمع

ضلعیه المتوالیین يعدل خطأ مفروضاً

ليكن S المربع المفروض و AB مجنوع ضلعي الشكل المطلوب



اجعل اب قطراً وارسم
عليه نصف دائرة وارسم د ي
حتى يوازي اب واجعل اد
(اي ضلعاً من المربع المفروض)

البعد بينها والخط د ي فليقطع نصف الدائرة في ي ومن ي ارسم ي ف عموداً على
اب فيكون اف $\times$ ف ب الشكل المطلوب
لان مجنعهما يعدل اب ومسطهما اف $\times$ ف ب يعدل مربع ف ي او اد
و $د^2 = س$

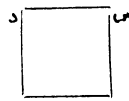
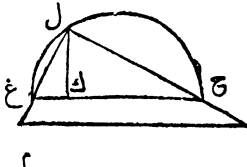
تعليقة . حتى تكون هذه القضية ممكنة لا يكون اد اطول من نصف القطر .
اي ضلع من س لا يكون اطول من نصف الخط اب



قضية م . ع

علينا ان نرسم مربعاً تكون نسبته الى مربع مفروض كنسبة خط
مفروض الى خط آخر مفروض

ليكن اس المربع المفروض وي وف الخطين المفروضين
ليكن غ ح خطاً مستقيماً غير معين طوله وافصل منه غ ك حتى يعدل ي
وك ح حتى يعدل ف وعلى غ ح
ارسم نصف دائرة وارسم كل
عموداً على غ ح . وارسم ل غ م
حتى يعدل اب ارسم م ن حتى
يوازي غ ح واخرج ل ح الى ن

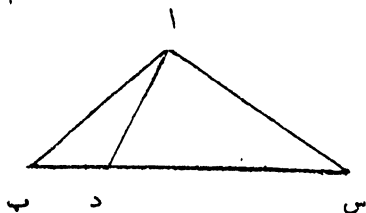


فلتكون م ن يوازي غ ح فنسبة ل م : ل ن :: ل غ : ل ح ول م : ل ن :: ل غ : ل ح
ل ح : ل م : ل ن :: ل غ : ل ح فائز الزاوية فنسبة ل غ : ل ح :: ل غ : ل ح
ل ح فاذا ل م : ل ن :: ل غ : ل ح وقد فرض اب غ ك = ي وك ح = ق
ول م = اب فالمرجع على اب : المرجع على ل ن :: ي : ف

قضية ن. ع

علينا ان نقسم مثلثا الى قسمين بخط من احدى زواياه حتى تكون
نسبة قسم الى آخر كنسبة خط مثل م الى خط مثل ن

اقسم ب س الى قسمين ب د و س ب مناسبين للخطين م ون وارسم ا د فينقسم
المثلث حسب المفروض لان المثلثات التي
لها علو واحد بعضها الى بعض كفواعدها
بعضها الى بعض فلنا ا ب د : ا د س ::
ب د : س د :: م : ن



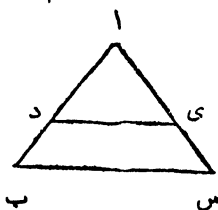
تعليقة . يمكن انقسام مثلث الى اجزاء كثيرة مناسبة لخطوط مفروضة وذلك
بانقسام القاعدة على التناسب المفروض



قضية س. ع

علينا ان نقسم مثلثا الى قسمين بخط يوازي احد اضلاعه حتى تكون
نسبة قسم الى آخر كنسبة خط مستقيم م الى خط مستقيم ن

اجعل ا ب : ا د :: م : ن + ن . ارسم د ي حتى يوازي ب س فقد انقسم المثلث
حسب المفروض

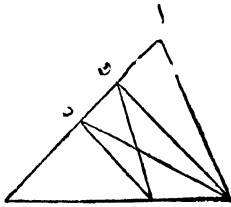


لان المثلثين ا ب س ا د ي متشابهان و ا ب س
ا د ي :: ا ب : ا د ولكن م : ن + ن :: ا ب : ا د
فيكون ا ب س : ا د ي :: م : ن + ن فاذا ب د ي
ا د ي :: م : ن

قضية ع. ع

علينا ان نقسم مثلثا مفروضا الى قسمين بخط مستقيم من نقطة مفروضة
في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى آخر كنسبة خط مستقيم م
الى خط مستقيم ن .

ليكن $اب$ س المثلث المفروض ون النقطة المفروضة . ارسم $ن$ س واقسم $اب$ في $د$ حتى يكون $اد : ب د :: ن : ن$. وارسم $دي$ حتى يوازي $ن$ س وارسم $ني$ فالحظ $ني$ يقسم المثلث حسب المفروض



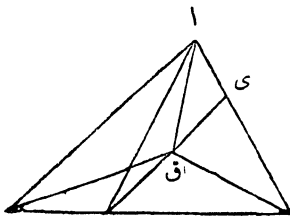
ارسم $س د$. فلأن $دي$ ن س متوازيان فالمثلثان

$ن د ي$ س $دي$ متساويان . اضع الى كل واحد $س ي$ $ب$ منها المثلث $دي ب$ فالمثلث $ن ي ب = د س ب$. فاذا طرح كل واحد من المثلث $اب س$ يبقى الشكل ذو الاضلاع الاربعة $اس ي ن$ وهو يعدل المثلث $اس د$ واس $د : د س : ب :: اد : د ب :: ن : ن$ فيكون $اس ي ن : ن ي ب :: ن : ن$ تعلية . على هذا الاسلوب ينقسم مثلث الى اجزاء كثيرة متساوية بخطوط من نقطة مفروضة في احد اضلاعه . لانه اذا انقسم $اب$ الى اجزاء متساوية ورسم من نقط الانقسام خطوط توازي $ن س$ فانها تقطع $ب س$ و $اس$ ومن هذه نقط التقاطع اذا رسمت خطوط الى $ن$ تقسم المثلث الى الاقسام المطلوبة

قضية ف . ع

علينا ان نقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط مستقيمة من زواياه الى نقطة واحدة داخله

اجعل $ب د$ ثلث $ب س$ وارسم $دي$ حتى يوازي الضلع الذي يلي $ب د$.



نصف $دي$ في $ق$ ومن $ق$ ارسم الخطوط المستقيمة $ق ا$ $ق ب$ $ق س$ فقد انقسم المثلث حسب المفروض

ارسم $دا$. فليكون $ب د$ ثلث $ب س$ فالمثلث $اب د$ هو ثلث المثلث $اب س$.

واب $د = اب ق$ (ق ٢٧ ك) فاذا $اب ق$ هو ثلث $اب س$. ولأن $د ق = ق ي$ فالمثلث $ب د ق = اق ي$ وكذلك $س د ق = س ق ي$ فالكل $ب ق س$ يعدل الكل $اق س$ وقد تبهر ان $اب ق$ يعدل ثلث $اب س$ فكل واحد من المثلثات

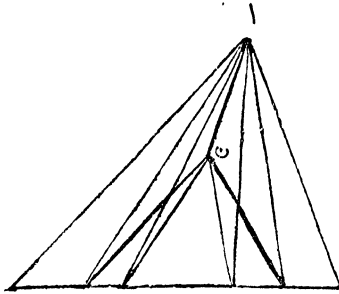
ا ب ق ب ق س س ق ا يعدل ثلث ا ب س

—x—

قضية ص . ع

علينا ان نقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط من نقطة
بفروضة داخله

اقسم ب س الى ثلاثة اقسام متساوية في د وى وارسم د ن ي ن . ارسم ايضا
ا ف حتى يوازي د ن وارسم ا غ حتى
يوازي ي ن . فاذا رُسمت ن ف ن غ
ن ا ينقسم المثلث حسب المفروض



ارسم ا د اى . فلكون ا ف و ن د
متوازيين فالمثلث ا ف ن = ا د فاذا
أضيف اليهما المثلث ا ب ف يحدث

الشكل ا ب ف ن ذو الاربعة اضلاع الذي يعدل المثلث ا ب د ولكن ب د
انما هو ثلث ب س فالمثلث ا ب د هو ثلث ا ب س فالشكل ا ب ف ن هو ثلث
المثلث ا ب س . ولأن ا غ يوازي ن ي فالمثلث ا غ ن = ا غ ي . اضيف اليها
ا س غ فالشكل ا س غ ن يعدل المثلث ا س ي الذي هو ثلث ا ب س فالشكل
ا س غ ن ثلث ا ب س فكل واحد من الاشكال الثلاثة ا ب ف ن ا س غ ن
ن ف غ يعدل ثلث ا ب س

—x—

قضية ق . ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من احدى
زواياه حتى تكون نسبة قسم الى آخر كنسبة خط م الى خط ن
ارسم س ي عموداً على ا ب وارسم شكلاً ذا زوايا قائمة حتى يعدل الشكل

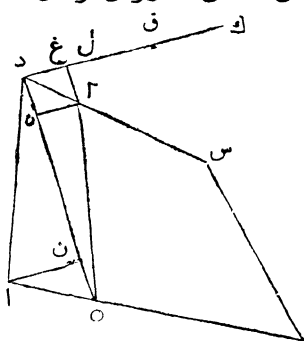
واك : ك ح :: م : ن فاذا ا ل : ن س :: م : ن

—x—

قضية ش . ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من نقطة في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى آخر كنسبة خط م الى خط ن

ارسم د وان عليه شكلاً قائم الزوايا يعدل الشكل المفروض وليكن د ك ضلعه الاخر . اقس د ك في ل حتى تكون نسبة د ل : ل ك :: م : ن . واجعل د ق يعدل ٢ د ل . واجعل ق غ يعدل العمود ان وارسم غ ٢ حتى يوازي د ه وارسم ٢ ه فينقسم الشكل حسب المفروض



ارسم العمود ٢ ه فالشكل د ه د ك

= ا س و د ه د ق = د ه د ان + د ه د ك

٢ ه ا ي د ه د ق يعدل مضاعف مجمع ب

المثلثين ا ه د د ه د ٢ . فلان د ل نصف د ق فلقائم الزوايا د ه د ل = ا ه

٢ د فاذا د ه د ل ك = ه ب س ٢ . ولكن د ه د ل : د ه د ل ك :: د ل :

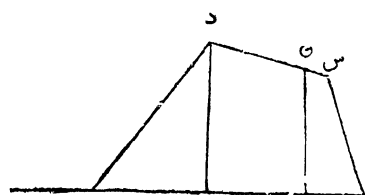
ل ك :: م : ن فاذا ا ل : ن س :: م : ن

—x—

قضية ت . ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع بخط عمودي على احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى آخر كنسبة خط م الى خط ن

ليكن ا ب س د الشكل المفروض المطلوب انقسامه على نسبة م : ن بخط



عمودي على الضلع اب

ارسم المخطط دى عموداً على اب

وان عليه شكلاً قائم الزوايا دى ×

ى ف حتى يعدل الشكل اب س د

واقسم فى فى غ حتى تكون نسبة ب ق ى ح ا غ ف

ف غ : غ ى :: م : ن . نصف اى فى ح واقسم الشكل ذا الاربعة الاضلاع ى س

الى قسمين بالمخطط ن ق الذي يوازي دى حتى تكون نسبة احدها الى الاخر كنسبة

ف غ : غ ح . فالمخطط ن ق ينقسم الشكل اس حسب المفروض

لان دى × ى ف = اس و دى × ى ح = داى فاذا دى × ح ف =

ى س فالشكل ى س قد انقسم على نسبة انقسام ف ح قاعدة القائم الزوايا الذي

يعدله فاذا ق س = دى × ف غ و ى ن = دى × غ ح وان = دى × غ ى

فنسبة ق س : ان :: ف غ : غ ى :: م : ن



اصول الهندسة

مضافات

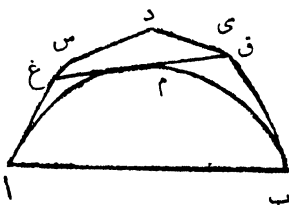
الكتاب الاول

في ترييع الدائرة

سابقة

كل خطٍ منحنياً كان او مركباً من خطوطٍ مستقيمة محيطٍ بخطٍ محدبٍ
هو اطول من الخطِّ المحاط به

ليكن ا م ب الخطُّ المحاط به فهو اقصر من الخطِّ ا غ د ب المحيط به
فان لم يكن ا م ب اقصر من كل خطٍّ محيط به فبالضرورة يوجد بين الخطوط
المحيطة خطُّ اقصر من البقية واقصر من ا م ب
او يماثلة . ليكن ا س د ي ب هذا الخط .
ارسم بين الخطَّ المحيط والمحاط به خطاً آخر
مستقيماً لا يلاقي الخط ا م ب اويستفقط مثل ب



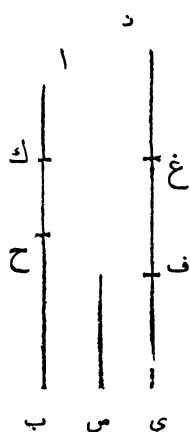
الخطِّ غ ق . فالخط غ ق انما هو اقصر من الخط غ س د ي ق . فاذا وضع غ ق
عوض س د ي ق يكون ا غ ق ب اقصر من ا غ د ق ب وقد فرض ان هذا
الاخير هو اقصر جميع الخطوط المحيطة فذاك محال فكل خط محيط بالخط ا م ب هو
اطول منه

فرع اول . محيط شكل كثير الاضلاع في دائرة هو اقصر من محيط الدائرة

فرع ثانٍ . اذا رُسم من نقطة مفروضة خطان مستقيمان يمسان دائرة فمجموعهما هو اطول من القوس المقطوع بهما فمحيط شكل كثير الاضلاع يحيط بدائرة هو اطول من محيط الدائرة

القضية الاولى . ن

اذا فرض مقداران غير متساويين وطُرح من اكبرها نصفه ومن الباقي نصفه الى آخره يبقى اخيراً مقدار اصغر من اصغر المقدارين المفروضين لكن اب اكبر مقدارين وس اصغرها . فاذا طرح من اب نصفه ومن الباقي نصفه الى آخره يبقى اخيراً مقدار اصغر من س



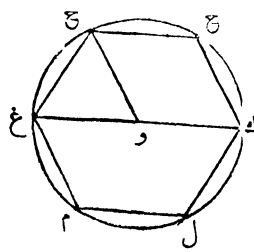
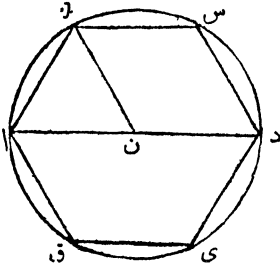
لانه قد يمكن ان يتكرر س حتى يصير اكبر من اب . فليكن دى مضروباً للمقدار س اكبر من اب وليكن فيه الاقسام د ف ف غ غ ي وكل قسم فليعدل س . اطرح من اب نصفه ب ح ومن اح اطرح نصفه ك وكّرر العمل حتى ان اقسام اب تماثل اقسام دى عددًا اي اك ح ك ح ب . فلكون دى اعظم من اب والقسم ي غ المطروح من دى ليس هو نصف دى ولكن ح ب القسم المطروح من اب هو نصفه الباقي غ د هو اكبر من الباقي اح . ولكون

غ د اكبر من ح ا والقسم غ ف ليس اكثر من نصف د غ والقسم ح ك هو نصف اك فالباقي ف د اعظم من الباقي اك ولكن ف د يعدل س فاذا س اكبر من اك او اك انما هو اصغر من س

القضية الثانية . ن

اشكال كثيرة الاضلاع المتساوية ومماثلة في عدد اضلاعها ومرسومة في دوائر هي متشابهة ونسبة بعضها الى بعض كنسبة مربعات اقطار الدوائر التي رُسمت فيها .

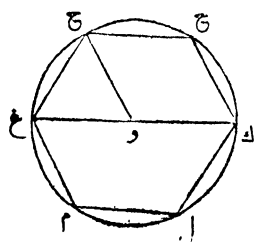
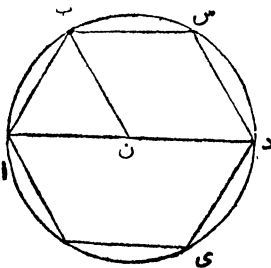
ليكن ا ب س د ي ق و غ ح ج ك ل م شكلين اضلاعها كثيرة متساوية



وليكونا متماثلين
في عدد اضلاعها
ومرسومتين في
دائرتين ا د ب
غ ح ك فهما
متشابهان ونسبة

ا ب س د ي ق الى غ ح ج ك ل م كنسبة مربع قطر الدائرة ا ب د الى مربع قطر
الدائرة غ ح ك

استعملن وو مركزي الدائرتين وارسم ا ن و غ و وأخرجهما حتى يلاقيا المحيطين
في د وك . ارسم ب ن و ح و . فليكون الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ي
ي ق ق ا متساوية فالاقواس التي تقابلها ايضاً متساوية (ق ٢٨ ك ٢) ولذلك
الاقواس غ ح ج ج ك ك ل ل م م غ هي متساوية ايضاً وهي تماثل اقواس
الدائرة الاخرى عدداً فاي جزء كان القوس ا ب من المحيط ا ب د كان القوس
غ ح ذات ذلك الجزء من المحيط غ ح ك . والزوايا ا ن ب ذات الجزء من اربع
زوايا قائمة الذي كان القوس ا ب من المحيط ا ب د (ق ٢٢ ك ٦) والزوايا غ و ح
هي من اربع زوايا قائمة ما كان القوس غ ح من المحيط غ ح ك (ق ٢٢ ك ٦)
فالزوايتان ا ن ب غ و ح هما جزءان متساويان كل واحد من اربع زوايا قائمة فهما
متساويان . والمثلثان المتساويان ا ب ن و غ و ح هما متساويان الزوايا ايضاً
والزوايا ا ب ن تعدل الزاوية غ ح و . وعلى هذا الاسلوب اذا رُسم ن س و ج



يبرهن ان الزاوية
ن ب س تعدل
و ح ج . فالكل
ا ب س يعدل
الكل غ ح ج .
وهكذا يبرهن في

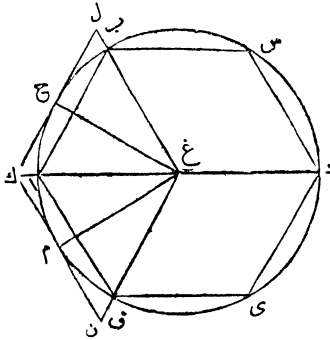
بقية زوايا الشكلين فهما متساويان الزوايا . وقد فرض انهما متساويان الاضلاع . فالاضلاع

التي نلي الزوايا المتساوية هي متناسبة . فالشكلان متشابهان (حد ١ ك٦) والاشكال
الكثيرة الاضلاع المتشابهة هي كمربعات اضلاعها المتشابهة (ق ٢٠ ك٦) فالشكل
ا ب س د ي ف : غ ح ج ك ل م :: مربع ا ب : مربع غ ح . ولكون المثلثين ا ب ن
غ و ح متساويي الزوايا فمربع ا ب : مربع غ ح :: مربع ا ن : مربع غ و (ق ٤ ك٦)
او :: ا ن : ا غ و (ق ١٥ ك٥) اي :: ا د : ا غ ك (فرع ٢ ق ٨ ك٢) فالشكل
ا ب س د ي ف : غ ح ج ك ل م :: ا د : ا غ ك . وقد تبرهن انهما متشابهان
فرع . كل شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة هو متساوي الزوايا . لان
المثلثات المتساوية الساقين التي نلتقي زواياها في المركز هي متساوية ومتشابهة والزوايا
عند قواعدها متساوية فزوايا الشكل متساوية

القضية الثالثة . ع

مفروض ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة . علينا ان نجد
ضلع شكل مثله محيط بالدائرة

ليكن ا ب س د ي ق شكلاً كثير الاضلاع المتساوية في دائرة . علينا ان
نجد ضلع شكل مثله محيط بالدائرة



استعلم مركز الدائرة غ وارسم غ ا غ ب
ونصف القوس ا ب في ح ومن ح ارسم
المماس ل ح ك الذي يمس الدائرة في ح
ويلاقي غ ا و غ ب بعد اخراجهما في ك ول
فاخط ك ل هو ضلع الشكل المطلوب .
اجعل الزاوية ك غ ن تعدل ك غ ل .

ارسم غ ن حتى يعدل غ ل وارسم ك ن وارسم غ م عموداً على ك ن وارسم ح غ
لكون القوس ا ب قد تنصف في ح فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية ب غ ح
(ق ٢٧ ك٢) ولكون ك ل يمس الدائرة في ح فالزاويتان ك ح غ ل ح غ قائمتان
(ق ١٨ ك٢) فزاويتان من المثلث ك ح غ تعدلان اثنتين من المثلث ل ح غ
والضلع غ ح مشترك بينهما فهما متساويان (ق ٢٦ ك١) والضلع غ ل يعدل الضلع

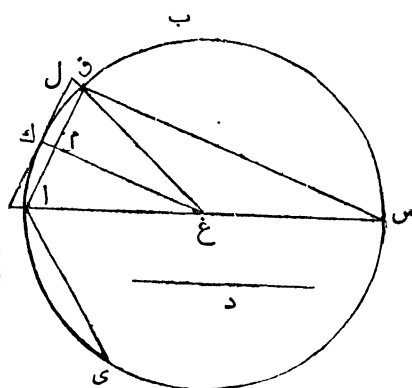
غ ك . ثم في المثلثين ك غ ل ك غ ن الضلع غ ل = غ ن و غ ك مشترك بينهما
والزاوية ل غ ك تعدل ك غ ن فالقاعدة ك ل = ك ن (ق ٤ ك ١) والمثلث ك غ ن
متساوي الساقين فالزاوية غ ك ن = غ ن ك والزاويتان غ م ك غ م ن قائمتان
فالمثلثان غ م ك غ م ن متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك م = م ن فند نصف
ك ن في م و ك ن = ك ل فاذًا ك م = ك ح والضلع غ ك مشترك بين المثلثين غ ك م
غ ك ح والزاوية غ ك ح = غ ك م فالضلع غ م = غ ح (ق ٤ ك ١) فالنقطة م هي
في محيط الدائرة ولكون ك م غ قائمة فالخط ك م مماس الدائرة . وهكذا اذا رُسمت
خطوط مستقيمة من المركز الى بقية زوايا الشكل في الدائرة برسم شكل محيط بالدائرة
اضلاعهُ تعدل ك ل وعدد الاضلاع ياتل اضلاع الشكل في الدائرة

فرع اول . اذا جعل غ مركزاً و غ ل او غ ك او غ ن نصف قطر ورُسمت
دائرة فالشكل يقع في تلك الدائرة ويشبه ا ب س دى ق

فرع ثان . نسبة ا ب : ك ل :: العمود من غ على ا ب : العمود من غ على ك ل
اي : نصف قطر الدائرة فمحيط الشكل في الدائرة : محيط الشكل المحيط بالدائرة ::
العمود من المركز على ضلع من اضلاع الشكل في الدائرة : نصف قطر الدائرة

القضية الرابعة . ن

اذا فُرِضَتْ دائرة فقد يمكن ان يوجد شكلان متشابهان اضلاعهما كثيرة
احدهما في الدائرة والاخر محيطٌ بها وفضلتهما اقل من مساحة مفروضة



ليكن ا ب س الدائرة
المفروضة ومربع د مساحة مفروضة
فقد يمكن ان يرسم شكل كثير
الاضلاع في ا ب س وآخر يشبهه
محيطاً بها وتكون فضلة الشكلين اقل
من مربع د

ارسم في الدائرة ا ب س
الخط المستقيم اى حتى يعزل د .

وليكن ا ب ريع محيط الدائرة . من ا ب اطرح نصفه ومن الباقي نصفه وهكذا حتى يبقى ا ق اقل من القوس ا ب (ق ا ك مضافات) استعمل المركز غ وارسم القطر ا س والخطين المستقيمين ا ق ق غ . نصف القوس ا ق في ك وارسم ك غ وارسم ح ل حتى يمس الدائرة في ك وبلاقي غ ا غ ق بعد اخراجها في ح ول وارسم س ق

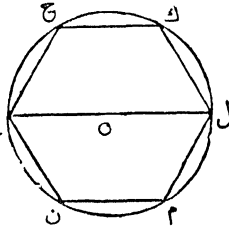
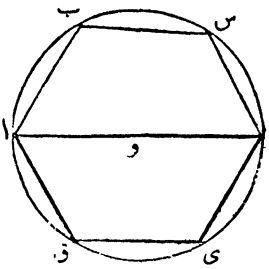
المثلثان ح غ ل ا غ ق متساويا الساقين والزاوية ا غ ق مشتركة بينهما فهما متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) والزوايتان ح ل غ ا ق متساويتان . ولكن الزاوية غ ك ح = س ق لانها قائمتان . فالمثلثان ح غ ك ا س ق متساويا الزوايا (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) وقد استعملت القوس ا ق بتصفيف القوس ا ب ثم بتصفيف النصف الى اخره فالقوس ا ق تعدد مراراً معلومة في القوس ا ب فتتعدد ايضاً في محيط الدائرة ا ب س مراراً معلومة فيكون الخط المستقيم ا ق ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب س ويكون ح ل ضلع شكل مثله محيط بالدائرة ا ب س (ق ٢ ك ١ مضافات) . ليكن عن الشكل في الدائرة بحرف مثل ن وعن الشكل المحيط بها بحرف مثل م . فلكون هذين الشكلين متشابهين تكون نسبة احدهما الى الآخر كربي الضلعين المتشابهين ح ل و ا ق (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) اي (لكون المثلثين ح ل غ ا ق غ متشابهين) كنسبة مربع ح غ الى مربع ا غ الذي يعدل مربع غ ك . وقد تبهرن ان المثلثين ح غ ك ا س ق متشابهان . فيكون نسبة ا س : س ق :: الشكل م : الشكل ن . وبالطرح مربع ا س : زيادته على مربع س ق اي مربع ا ق (ق ٤٧ ك ١) :: الشكل م : زيادته على الشكل ن . ولكن مربع ا س اي المربع المحيط بالدائرة ا ب س هو اعظم من شكل ذي ثمانية اضلاع متساوية محيط بالدائرة لانه محيط بذلك الشكل والشكل ذو الثمانية الاضلاع اعظم من شكل ذي ستة عشر ضلعاً وهملاً جراً . فربع ا س هو اعظم من الشكل المرسوم حول الدائرة بانقسام القوس ا ب حسباً تقدم فهو اعظم من الشكل م . وقد تبهرن ان مربع ا س : مربع ا ق :: الشكل م : فضلة الشكلين فلكون ا س اعظم من م يكون مربع ا ق اعظم من فضلة الشكلين (ق ٤ ك ٥) فضلة الشكلين اذا هي اقل من مربع ا ق و ا ق اقصر من د . فضلة الشكلين اقل من مربع د اي من المساحة المفروضة

فرع اول . فضلة الشكلين اعظم من فضلة احدهما الى الدائرة . فيمكن ان يرسم شكل في دائرة او محيط بها تكون فضلة احدها والدائرة اقل من مساحة مفروضة

القوس ا ب في غ ومن غ ارسم المماس ي غ ف الذي يلاقي د ا و د ب بعد اخراجها في ي غ ف . فيكون ي غ ف ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية محيط بالدائرة ا ب س (ق ٢ ك ١ مضافات) . اقطع من ا س بعد اخراجه ا ك حتى يعدل نصف محيط الشكل الذي كان ا ب ضلعاً من اضلاعه واقطع ايضاً ا ل حتى يعدل نصف محيط الشكل الذي كان ي غ ف ضلعاً من اضلاعه . فيكون ا ك اقصر من ا ح و ا ل اطول من ا ح (سابقة المضافات) ثم في المثلث ي د ف فد رُسم د غ عموداً على القاعدة فالمثلث ي د ف يعدل القائم الزوايا د غ في نصف ي ق (ق ٤١ ك ١) وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند د والتي يتركب منها الشكل المحيط بالدائرة والشكل كله يعدل القائم الزوايا د غ في ا ل الذي فُرض انه نصف محيط الشكل (ق ٢ ك ٢) او يعدل د ا $\times$ ا ل ولكن ا ل اطول من ا ح فالقائم الزوايا د ا $\times$ ا ل اكبر من د ا $\times$ ا ح اي القائم الزوايا د ا $\times$ ا ح اصغر من د ا $\times$ ا ل اي اصغر من كل شكل محيط بالدائرة ا ب س

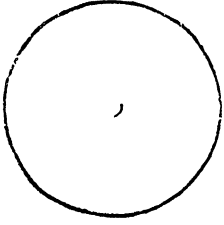
واما المثلث ا د ب فانه يعدل القائم الزوايا د م في نصف ا ب فهو اصغر من القائم الزوايا د غ او د ا في نصف ا ب . وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند د والتي يتركب منها الشكل في الدائرة ا ب س . فكل الشكل يعدل د ا $\times$ ا ك لان ا ك = نصف محيط الشكل في الدائرة . والقائم الزوايا د ا $\times$ ا ك هو اصغر من القائم الزوايا د ا $\times$ ا ح فبالاخرى يكون الشكل الذي ا ب ضلعاً منه اصغر من د ا $\times$ ا ح . اي د ا $\times$ ا ح اكبر من كل شكل يمكن رسمه في الدائرة ا ب س . وقد تبين ان د ا $\times$ ا ح اصغر من كل شكل محيط بالدائرة ا ب س فالقائم الزوايا د ا $\times$ ا ح يعدل الدائرة ا ب س (فرع ٢ ق ٤ ك ١ مضافات) ود ا هو نصف قطر الدائرة ا ب س و ا ح نصف محيطها

فرع اول . لكون د ا : ا ح :: د ا : ا ح (ق ٦ ك ٦) وقد تبين ان د ا $\times$ ا ح = مساحة الدائرة التي كان د ا نصف قطرها فنسبة نصف قطر دائرة : نصف محيطها او النطر كله الى المحيط كله :: مربع نصف النطر : مساحة الدائرة



غ ح ل ك مربع القطر
اد الى مربع القطر
غ ل
ليكن

ا ب س د ي ق
وغ ح ك ل م ن



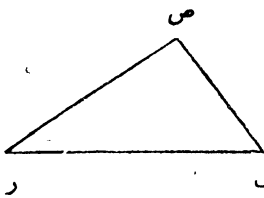
شككين متشابهين لها اضلاع كثيرة في الدائرتين وليكن ر
مساحة ما وليكن نسبة مربع ا د الى مربع غ ل كالدائرة
ا ب د الى ر . فليكون الشكلين ا ب س د ي ق
غ ح ك ل م ن متشابهين فنسبة مساحة احدها الى
مساحة الاخر ك مربع قطر دائرة الواحد الى مربع قطر

دائرة الاخر (ق ٢ ك ا مضافات) فنسبة ا د : غ ل :: الشكل ا ب س د ي ق :
الشكل غ ح ك ل م ن . ولكن ا د : غ ل :: اللثة ا ب د : ر . فالشكل
ا ب س د ي ق : الشكل غ ح ك ل م ن :: ا ب د : ر . واللثة ا ب د <
ا ب س د ي ق فتكون ر < غ ح ك ل م ن (ق ١٤ ك ه) اي ر اكبر من كل
شكل مرسوم في الدائرة غ ح ل

وهكذا يبرهن ان ر اصغر من كل شكل يرسم حول الدائرة غ ح ل فاذا ر =
الدائرة غ ح ل (فرع ٢ ق ٤ ك ا مضافات) وقد فرض ان ا ب د : ر :: ا د :
غ ل فتكون ا ب د : غ ح ل :: ا د : غ ل
فرع اول . نسبة محيطات الدوائر بعضها الى بعض كنسبة اقطارها بعضها الى
بعض

لنفرض ان الخط المستقيم ك = نصف محيط الدائرة ا ب د والخط المستقيم
ي = نصف محيط الدائرة غ ح ل . فالفائز الزوايا ا و خ ك = ا ب د و غ ه ي =
غ ح ل (ق ه ك ا مضافات) فنسبة
ا و خ ك : غ ه ي :: ا د : غ ل ::
ا و غ ه : وبالمبادلة ا و خ ك : ا و غ ه :: غ ه ي : غ ه . والاشكال القائمة الزوايا اذا

كانت على عاقي واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض
(ق ا ك ٦) فنسبة ك : ا و :: ح : غ وبالمبادلة ك : ح :: ا : غ فاذا تضاعف
كل واحد تكون نسبة المحيط ا ب د : المحيط غ ح ل :: القطر ا د : القطر غ ل
فرع ثان. الدائرة المرسومة على الضلع الذي يقابل القائمة في مثلث ذي قائمة



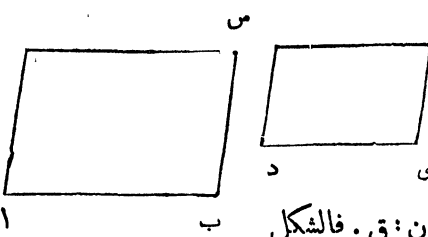
تعدل الدائرتين المرسومتين على الضلعين
الاخرين . لان نسبة الدائرة على ص ر :
الدائرة على ر ف :: مربع ص ر : مربع ر ف .
والدائرة على ف ص : الدائرة على ر ف :: مربع

ف ص : مربع ر ف . فالدائرتان على ص ر و ص ف : الدائرة على ف ر :: مربعي
ص ر و ص ف : مربع ر ف (ق ٢٤ ك ٥) ولكن مربعاً ص ر ص ف يعدلان
مربع ر ف (ق ٤٧ ك ١) فالدائرتان على ص ر و ص ف تعدلان الدائرة على ر ف

—KOF—

القضية السابعة . ن

اشكال متوازية الاضلاع ومتساوية الزوايا تكون نسبة بعضها الى
بعض كنسبة مسطح الاعداد التي تناسب اضلاعها بعضها الى بعض
ليكن اس ود ف شكلين متوازيي الاضلاع متساويي الزوايا . وليكن م ن



ف ق اربعة اعداد ولكن ف
نسبة ا ب : ب س :: م : ن
ونسبة ا ب : د ح :: م : ف
ونسبة ا ب : ح ي :: م : ق
فبالمساواة نسبة ب س : ح ي :: ن : ق . فالشكل
اس : د ف :: م : ن : ف ق

ليكن ن ف مسطح في ف . ونسبة م ن الى ف ق تتركب من نسب م ن الى
ن ف ون ف الى ف ق (محد ١٠ ك ٥) . ولكن نسبة م ن الى ن ف هي نسبة م الى
ف (ق ١٥ ك ٥) لان م ن ون ف مضروبان متساويان من م وف . ولهذا السبب
ايضاً نسبة ن ف الى ف ق هي نسبة م ن الى ف ق قد تراكبت من

نسبة م الى ف ونسبة ن الى ق . وبالمفروض نسبة م الى ف هي نسبة الضلع ب س الى الضلع د ي . ونسبة ن الى ق هي نسبة الضلع ب س الى الضلع ي ق فنسبة م الى ف ق قد تركبت من نسبة ا ب الى د ي ونسبة ب س الى ي ق . ونسبة الشكل اس الى الشكل د ف قد تركبت من هذه النسب ايضاً (ق ٢٢ ك ٦) فالشكل اس الى الشكل ا د كنسبة م من مسطح العددين م ون الى ف ق مسطح العددين ف وق فرع اول . اذا كانت نسبة غ ح الى كل كنسبة م الى ح ————— غ من فالمرجع المرسوم على غ ح الى المربع على كل كنسبة م م ل ————— ك او مربع م الى ن ن او مربع ن

فرع ثان . اذا فرضت خطوط مثل ا ب س د الى اخره واعلاد متناسبة لها مثل م ن ر ص اي ا : ب :: م : ن : و ا : س :: م : ر و ا : د :: م : ص . فاذا كان القائم الزوايا مسطح خطين من هذه الخطوط يعدل مربع الخط الثالث فمسطح العددين المناسبين للاولين يعدل مربع العدد المناسب للثالث اي اذا كان ا س = ب فحينئذ م × ر = ن × ن = ن^٢

وبالقلب اذا فرض م ور عددين مناسبين للخطين ا وس وفرض ان ا س = ب^٢ ووجد عدد مثل ن حتى ان ن^٢ = م ر فحينئذ ا : ب :: م : ن

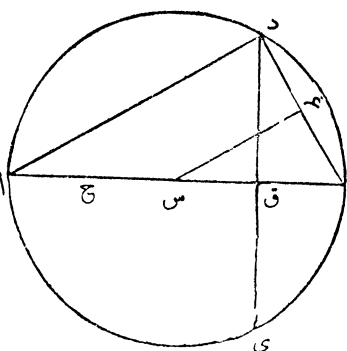
تعلية . لكي نجد اعلاداً مناسبة لعدة مفادير من جنس واحد لنفرض ان احدها قد انقسم الى اجزاء متساوية ولنفرض م عدد الاجزاء كلها وح جزءاً من الاجزاء . ولنفرض ان ح يوجد ن مرة في المقارب و ر مرة في المقدار س وص مرة في المقدار د وهلم جراً الى اخره . فالامر واضح ان الاعلاد م ن ر ص هي مناسبة للمقادير ا ب س د . فاذا قيل في القضايا الآتية ان خطاً مثل ا = عددًا مثل م يراد ان ا = م × ح اي ان ا يعدل المقدار المفروض ح مضروباً في م وهكذا في المقادير الأخرى ب س د والاعلاد المناسبة لها لان ح انما هو قياس مشترك لكل . وقد يترك ذكر هذا القياس المشترك للاختصار ولكنه متضمن في المعنى كلما قيل ان خطاً او مقداراً هندسياً يعدل عددًا ما . واذا كان في ذلك العدد كسرًا او كان مختلطاً يراد ان القياس المشترك ح قد انقسم الى اجزاء بدّل عليها بالكسر . فلو قيل ا = ٢٧٥ ٢٦٠ يراد انه يوجد مقدر ح حتى ان ٢٦٠ × ح = ٢٧٥ + ح × ح وهكذا

كل ما دلّ على نسب مقادير هندسية بواسطة اعداد

— ١٥٥ —

القضية الثامنة . ن

العمود من مركز دائرة على وتر قوس من الدائرة هو متناسب متوسط بين ربع القطر وخط مركب من نصف القطر مع عمود من المركز على وتر مضاعف القوس . ووتر القوس هو متناسب متوسط بين القطر وخط هو فضلة نصف القطر والعمود المذكور من المركز ليكن ا ب د دائرة مركزها س ود ب ي قوساً ما ود ب نصفه . ارسم الوترين



د ي د ب وايضاً س ق عموداً على د ي وس غ عموداً على د ب ويخرج س ق حتى يلاقي المحيط في ب وا . نصف اس في ح . فالعمود س غ هو متناسب متوسط بين ا ح و ا ق . و ب د متناسب متوسط بين ا ب و ب ق الذي هو فضلة نصف القطر وس ق

ارسم ا د فليكون ا د ب قائمة لانها في نصف دائرة وس غ ب ايضاً قائمة فالمثلثان ا ب د س ب غ متساويا الزوايا و ا ب : ا د :: ب س : س غ (ق ٤ ك ٦) وبالمبادلة ا ب : ب س :: ا د : س غ ولكن ا ب هو مضاعف ب س فيكون ا د مضاعف س غ ومربع ا د يعادل اربعة امثال مربع س غ

ولكون ا د ب مثلثاً ذا قائمة ود ق عموداً من القائمة على ا ب فالضلع ا د متناسب متوسط بين ا ب و ا ق (ق ٨ ك ٦) و $ا د^2 = ا ب \times ا ق$ (ق ١٧ ك ٦) او لكون ا ب = ا ح ا د = ا ح ا ق $\times$ ا ق . ولكون ا د = ا ح ا ق $\times$ ا ق = ا ح ا ق $\times$ وس غ = ا ح ا ق $\times$ ا ق فاذا س غ هو متناسب متوسط بين ا ح و ا ق اي بين ربع القطر والخط المركب من نصف القطر والعمود على مضاعف القوس ب د والامر واضح ان ب د هو متناسب متوسط بين ا ب و ب ق (ق ٨ ك ٦) اي

بين القطر وفصلة نصف القطر والعمود على وتر قوس مضاعف القوس د ب

—XOX—

القضية التاسعة . ن

محيط الدائرة هو أطول من ثلاثة أمثال قطرها بخطٍّ أقصر من $\frac{1}{7}$ من

القطر وأطول من $\frac{1}{\sqrt{11}}$ من القطر

لیکن اب د دائرہ مرکزها س وقطرها اب فال محیط اطول من اب بخط

اقصر من $\frac{1}{7}$ أو $\frac{1}{7}$ من اب واطول

من $\frac{1}{71}$ من اب

ارسم في الدائرة ا د ب الخطَّ

المستقيم ب د حتى يعدل نصف القطر ب

ب س (ق الك ٤) ارسم د ق عموداً

على ب س واخرجه حتى يلاقي المحيط

ایضاً فی وارسم س ج عموداً علی

ب د . اخرج بس الى ا ونصف اس في ح وارسم س د

فالامر واضح ان كل واحد من القوسين ب د ب ي هي سدس المحيط (فرع

ق ١٤ ك ٤) فالقوس دبى ثلث المحيط . فالخط س ج متناسب متوسط بين ا ح

ربع النظر والخط اق (ق ٨ ك ١ مضافات). ولكون الضلعين ب د دس

متساویں فالزاویتان دس ق د ب ق متساویتان و د ق س د ق ب متساویتان

أيضاً والضلع د ق مشترك بين المثلثين د ب ق د س ق فالقاعدة ب ق تعدل

القاعدة س ق فقد تنصف س ب في ق فاذا فرض ان اس او ب س = ١٠٠٠

فحينئذ اح = ٥٠٠ وس ق = ٥٠٠ واق = ١٥٠٠ وس ح متناسب متوسط بين

حواقی ای س ج^۲ = ح^۲ × ا ق (ق، ۱۷ ک ۶) = ۱۰۰۰ × ۵۰۰ = ۵۰۰۰۰۰

وس ج = + ۸۷۶۰۲۵۴ لان (۸۷۶۰۲۵۴) افا من ۷۵۰۰۰۰ ايضا اس

$$18775.504 + = 7.13 +$$

ولكن من حج عمداً من المكنة على ما في الحديث المخطوطة فإذا فوض فـ =

العمود من سائر ^١ من المحط بكن ف متبايناً متطابقاً

(ق ٨ ك ا مضافات) وف' = اح × (اس + س ج) = (٢٠٢٥٤ +) × ٥٠٠ = ١٨٦٦
 = ١٢٢٠١٢٢٧ + وي = ١٦٥٢٩٢٥٨ + واس + ف = ١٩٢٥٨ +
 ١٩٦٥

ثم اذا فرض ر = العمود من س على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط فحينئذ يكون ر متناسباً
 متوسطاً بين اح واس + ف ور' = اح × (اس + ف) = (١٩٢٥٨ +) × ٥٠٠ = ١٩٦٥
 = ١٨٢٩٦٢٢٢٩ + ور = ٩٩١٢٤٤٤٩ + واس + ر = ٤٤٤٤٩ +
 ١٩٩١

ثم اذا فرض ص = العمود من س على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط فحينئذ ص' = اح ×
 (اس + ر) = ١٩٩١٢٤٤٤٩ + ٥٠٠ = ١٩٩١٢٤٤٥٠ + وص = ٩٩٥٧٢٢
 ١٩٩٧٢٨٥٨٩ + ص + واس = ١٩٩٧٢٨٥٨٩

اخيراً اذا فرض ط = العمود من س على وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط فحينئذ ط' = اح ×
 (اس + ص) = ١٩٩٧٢٨٥٨٩ + ٥٠٠ = ١٩٩٨٩٢٩٤٥٠ + وط = ٩٩٩٢٤٦٤٥٨ +
 اي اذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ جزء فالعمود من المركز
 على وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط هو اطول من ٩٩٩٢٤٦٤٥٨ من تلك الاجزاء

ولكن حسب الفضية السابقة وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط هو متناسب متوسط بين
 المحيط وفضلة نصف القطر وص اي العمود من المركز على وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط . فربع
 وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط = اب × (اس - ص) = ٢٠٠ × (٢٠١٤١١ -) = ٢٢ -
 ٤٢٨٢ والوتر ذاته = ٦٥٢٤٢٨٦ - لان (٦٥٢٤٢٨٦) أكثر من ٤٢٨٢
 ووتر $\frac{1}{4}$ من المحيط او ضلع شكل متساوي الاضلاع ذي ٩٦ ضلعاً في الدائرة اذا
 كان ٦٥٢٤٢٨٦ - يكون محيط ذلك الشكل (٦٥٢٤٢٨٦) × ٩٦ =
 ٦٢٨٢٢١٠٥٦ -

ليكن م محيط شكل يشبه المتقدم ذكره محيطاً بالدائرة ثم (فرع ٢ ق ٢ ك ه
 مضافات) ط : اس :: ٦٢٨٢٢١٠٥٦ : م ولكن ط = ٩٩٩٢٤٦٤٥٨ +
 فلنا + ٩٩٩٢٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٢١٠٥٦ : م فاذا فرض منظار
 آخر حتى تكون نسبة ٩٩٩٢٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٢١٠٥٦ : ن
 فاذا (ق ٢٣ ك ه) + ٩٩٩٢٤٦٤٥٨ : ٩٩٩٢٤٦٤٥٨ :: ن : م ولكون الاول
 اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي ن < م فاذا استعمل متناسب رابع لهذه

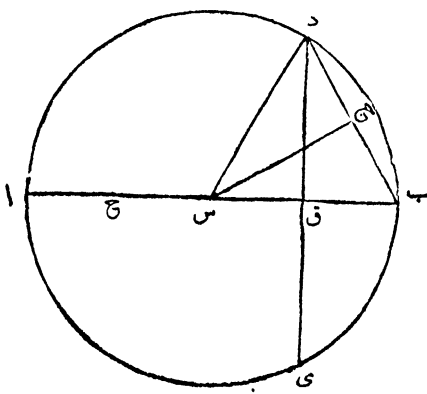
الاعداد ٩٩٩٤٦٤٥٨ و ١٠٠٠ و ٦٢٨٢٤١٠٥٦ و ٦٢٨٥٤٦١ - فلنا
 ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٥٤٦١ وجمعا ندر
 ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٥٤٦١ فلنا ايضا

٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٢٤١٠٥٦ :: ٦٢٨٥٤٦١ : ٦٢٨٥٤٦١ ن . ولان الاول
 اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي - ٦٢٨٥٤٦١ < ن . وقد نبرهن
 ان ن < م فاذا ٦٢٨٥٤٦١ اكبر من م محيط الشكل المحيط بالدائرة ذي
 الستة والتسعين ضلعاً اي محيط ذلك الشكل هو اقل من ٦٢٨٥٤٦١ ومحيط
 الدائرة اقل من محيط الشكل ذي الاضلاع الكثيرة المحيط بها فبالبحري محيط الدائرة
 اقل من ٦٢٨٥٤٦١ فاذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اقل
 من ٦٢٨٥٤٦١ من تلك الاقسام فيبين المحيط والقطر تناسب اصغر (ق ٨ كه)
 من تناسب ٦٢٨٥٤٦١ الى ٢٠٠٠ او من تناسب ٢١٤٢٤٧٣٠٥ الى ١٠٠٠
 ولكن تناسب ٢٢ الى ٧ هو اعظم من تناسب ٢١٤٢٤٧٣٠٥ الى ١٠٠٠ اي اذا
 انقسم القطر الى سبعة اقسام يكون المحيط اقل من ٢٢ قسماً منها

بقي علينا ان نبرهن ان زيادة المحيط على القطر هي اكثر من $\frac{1}{71}$ من القطر
 قد نبرهن سابقاً ان س ج = ٧٥٠٠٠٠ وس ج = - ٨٦٦٤٠٢٥٤٥ فاذا
 اس + س ج = - ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ . ليكن ف كما تقدم عموداً من المركز على وتر
 من المحيط فلنا

$$ف^2 = ا ح (اس + س ج) = (- ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥) \times ٥٠٠ = - ٩٣٣٢٠١٢٤٧٣$$

$$٩٣٣٢٠١٢٤٧٣ وف = - ٩٦٥٤٩٢٥٨٥ واس + ف = - ١٩٦٥٤٩٢٥٨٥$$



ثم ليكن ر العمود من المركز
 على وتر $\frac{1}{34}$ من المحيط فلنا ر =
 ا ح (اس + ف) = ٥٠٠ ×
 (- ١٩٦٥٤٩٢٥٨٥) = -
 ٩٨٢٩٦٢٤٩٢ ور = -
 ٩٩١٤٤٤٩٥ واس + ر = -
 ١٩٩١٤٤٤٩٥
 ليكن ص العمود من المركز

على وتر $\frac{1}{28}$ من المحيط فلنا ص^٢ = ا ح (ا س + ر) = ٥٠٠ × -)
 ٩٩٧٤٨٥٨٩٥ - = ٩٩٥٧٣٢٤٤٧٥ - وص =

ثم ان مربع وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط = اب (ا س - ص) = ٢٠٠ ×
 (٢٤١٠٥ +) = ٤٢٨٢٤١ . والوتر ذاته = ٦٥٤٤٣٧٧ + لان
 (٦٥٤٤٣٧٧) اقل من ٤٢٨٢٤١ . واذا كان وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط ٦٥٤٤٣٧٧ +
 فمحيط شكل ذي ٩٦ ضلعاً متساوياً في الدائرة = ٩٦ × (٦٥٤٤٣٧٧ +) =
 ٦٣٨٢٤٠١٩ ومحيط الدائرة اطول من محيط الشكل فيها فاذا انقسم نصف القطر
 الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من ٦٣٨٢٤٠١٩ من تلك الاقسام . واذا انقسم
 نصف القطر الى ٥٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من ٣١٤١٤٠٠٩ من تلك الاقسام
 ولكن تناسب ٣١٤١٤٠٠٩ الى ١٠٠٠ هو اعظم من تناسب $\frac{1}{71} + ٣$ الى واحد
 فنناسب محيط الدائرة الى قطرها هو اعظم من تناسب $\frac{1}{71} + ٣$ الى واحد اي فصلة
 المحيط وثلاثة امثال القطر هي اكثر من $\frac{1}{71}$ من القطر وقد تبهرن انها اقل من $\frac{1}{71}$ من
 القطر

فرع^٢ اول . اذا فرض قطر دائرة نستعلم المحيط هكذا ٢٢ : ٧ :: القطر : كمية
 رابعة اكبر من المحيط وا ٣ : $\frac{1}{71}$ او ٢٢٣ : ٧١ :: القطر : كمية رابعة اصغر من
 المحيط

فرع^٣ ثان . $\frac{1}{7} - \frac{1}{71} = \frac{1}{497}$ ففضلة الخطين المستعملين في $\frac{1}{497}$ من القطر فضلة
 المحيط واحدها اقل من $\frac{1}{497}$ من القطر

فرع^٤ ثالث . نسبة ٢٢ : ٧ :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة تقريباً . لانه قد
 تبهرن سابقاً (فرع اول) ان نسبة قطر دائرة الى محيطها كربع
 نصف القطر الى مساحتها ولكن نسبة القطر الى المحيط كنسبة ٢٢ : ٧ تقريباً فربع
 نصف القطر الى المساحة كذه النسبة المذكورة تقريباً

تعليقة

كلما تعددت اضلاع الشكل في الدائرة والشكل المحيط بها قلت الفضلة بينهما
 وبين احدهما والمحيط كما برى من هذا الجدول الذي فيه حسب نصف القطر واحداً

عدد الاضلاع	محيط الشكل في الدائرة	محيط الشكل حول الدائرة
٦	٦٠٠٠٠٠٠	٦٠٨٢٢٠٣٣-
١٢	٦٠٢١١٦٥٧+	٦٠٤٣٠٧٨١-
٢٤	٦٠٢٦٥٢٥٧+	٦٠٣١٩٣٢٠-
٤٨	٦٠٢٧٨٧٠٠+	٦٠٢٩٢١٧٣-
٩٦	٦٠٢٨٢٠٦٣+	٦٠٢٨٥٤٣٠-
١٩٢	٦٠٢٨٢٩٠٤+	٦٠٢٨٣٧٤٧-
٣٨٤	٦٠٢٨٣١١٥+	٦٠٢٨٣٢٢٧-
٧٦٨	٦٠٢٨٣١٦٧+	٦٠٢٨٣٢٢١-
١٥٣٦	٦٠٢٨٣١٨٠+	٦٠٢٨٣١٩٥-
٣٠٧٢	٦٠٢٨٣١٨٤+	٦٠٢٨٣١٨٨-
٦١٤٤	٦٠٢٨٣١٨٥+	٦٠٢٨٣١٨٦-

فندى فضلة المحيطين اقل من واحد في المتزلة السادسة من الكسور العشرية اي اقل من $\frac{1}{100000}$ من نصف القطر فالخطا في معرفة محيط الدائرة هو اقل من $\frac{1}{100000}$ من نصف قطرها فاذا فرض $n =$ نصف القطر فالمحيط هو اكثر من $n \times 6283185$ او من $n \times 6283185$ واقل من $n \times 6283185$ وفضلتهما انما هي $\frac{1}{100000}$ من نصف النظر

وهكذا $n \times 6283185$ اقل من مساحة الدائرة و $n \times 6283185$ اكثر من مساحة الدائرة وفضلتهما هي $\frac{1}{100000}$ من مربع نصف النظر. وعلى هذا الاسلوب يقرب الى الصحيح اكثر مما تقدم ولكن الى الآن لم توجد نسبة القطر الى المحيط تمامًا

اصول الهندسة

مضافات

الكتاب الثاني

في تقاطع السطوح

حدود

١ الخط المستقيم العمودي على سطح هو ما احدث زاوية قائمة مع كل خط مستقيم في ذلك السطح

٢ اذا تقاطع سطحان وكانت كل الخطوط المستقيمة في احدهما العمودية على خط التقاطع عمودية ايضاً على السطح الآخر فالسطح الاول عمودي على الثاني

٣ ميل خط مستقيم على سطح هو الزاوية الحادة بين ذلك الخط وخط آخر مستقيم مرسوم من ملتقى الخط الاول بالسطح الى ملتقى السطح وعمودي عليه من اية نقطة كانت في الخط الاول

٤ الزاوية بين سطحين يتقاطعان هي الحادة بين خطين مستقيمين كل واحد منهما في سطح من السطحين وكل واحد منهما عمودي على خط تقاطعها. ومن الزاويتين المتواليتين الحادتين من ذلك الحادة هي ميل احد السطحين على الآخر

٥ اذا عدلت الزاوية المذكورة الحادة بين سطحين الزاوية الحادة بين سطحين آخرين يقال ان ميل الاولين مثل ميل الآخرين

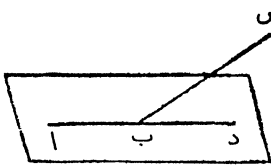
٦ الخط المستقيم الموازي سطحاً هو الذي لا يلاقى السطح ولو أُخرج على استقامته الى غير نهاية

- ٧ السطوح المتوازية هي التي لا تتلاقى ولو امتدت الى غير نهاية
٨ الزاوية المجسمة هي الحادثة من التقاء ثلاث زوايا بسيطة فأكثر ليست في سطح واحد

القضية الاولى . ن

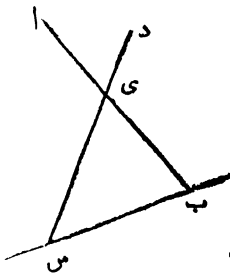
لا يكون قسم من خط مستقيم في سطح وقسم آخر منه فوق ذلك السطح

ان كان ممكنا ليكن ا ب س خطا مستقيما وليكن القسم ا ب منه في سطح والقسم ب س منه فوق السطح . فليكون ا ب في سطح فيمكن اخراجه في ذلك السطح (اولى المقنضات ك ا) فليخرج الى د فيكون ا ب س ا ب د خطين مستقيمين لما قسم مشترك ا ب وذلك غير ممكن (فرع حد ٢ ك ا) فلا يكون ا ب س خطا مستقيما



القضية الثانية . ن

اذا التقت ثلاثة خطوط مستقيمة في غير نقطة واحدة فهي في سطح واحد لتتلاق الخطوط الثلاثة المستقيمة ا ب س س د في النقطة ي ب س في سطح واحد



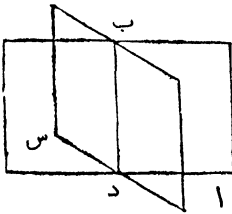
ليمر سطح بالخط المستقيم ب ي وليد السطح على ب ي حتى يمر بالنقطة س . فليكون ي وس في هذا السطح يكون الخط ي س فيه ايضا وقد فرض ان ي ب فيه فالخطوط الثلاثة ي ب ب س س ي هي في السطح الواحد وهي اقسام من ا ب س س د ولا يكون قسم من خط في

سطح وقسم آخر منه في غيره (ق ١ ك ٢ مضافات) فكل الخطوط الثلاثة في سطح واحد
 فرع . كل خطين متقاطعينها في سطح واحد . وكل ثلاث نقط كئنا فرضت
 هي في سطح واحد

القضية الثالثة . ن

إذا تقاطع سطحان فموضع التقاطع هو خط مستقيم

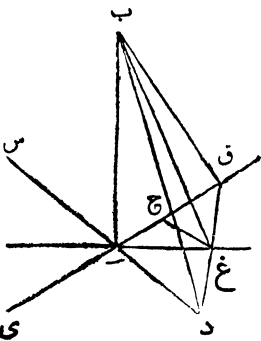
ليتقاطع السطحان اب وب س ولتكن ب ود نقطتين في خط التقاطع . ارسم
 الخط المستقيم ب د . فلأن النقطتين ب ود في السطح
 اب فالخط ب د هو في اب (حد ه ك ا) ولهذا
 السبب ايضاً هو في ب س فالخط المستقيم ب د
 مشترك بين السطحين اب وب س اب س هو موضع
 نقاطهما



القضية الرابعة . ن

إذا كان خط مستقيم عموداً على خطين مستقيمين على ملتقاهما فهو
 عمود على السطح الذي فيه الخطان

ليكن اب عموداً على الخطين المستقيمين ي ق د س على نقطة التقائهما ا فهو
 عمود على السطح المار بالخطين ي ق د س
 من ا ارسم اي خطاً شئت في السطح الذي
 فيه ي ق ود س مثل الخط اغ . ولتكن غ نقطة
 في ذلك الخط . ارسم غ ح حتى يوازي اد واجعل
 ح ق بعدل ح ا وارسم ق غ وليخرج حتى يلاقي
 س ا في د . ارسم ب د ب غ ب ق
 لأن غ ح يوازي ا د وح ق = ح ا فلذلك



ق غ = غ د فالخط ق د قد تنصف في غ . ولأن ب ا د قائمة ب د = ب ا + ا د
(ق ٤٧ ك ١) وب ق = ب ا + ا ق وب د = ب ق + ق د = ب ا + ا ق + ا د + ا ق .
ولأن د ق قد تنصف في غ (ق ١ ك ٢) ا د + ا ق = ا غ + غ ق فاذا ب د +
ب ق = ب ا + ا ب + ا غ + غ ق ولكن ب د + ب ق = ب غ + غ ق
(ق ١ ك ١) فاذا ب غ + غ ق = ب ا + ا ب + ا غ + غ ق . اطرح ا غ ق
من الجانبين فيبقى ب غ = ب ا + ا ب + ا غ ا ب غ = ا ب + ا غ فتكون
ب ا غ قائمة (ق ٤٨ ك ١) واغ هو في السطح الذي فيه ا د ا ق والخط العمودي
على خط في سطح ما هو عمودي على ذلك السطح (حد ٢ ك ٢ مضافات) فالخط
ا ب هو عمود على سطح المخطئين ا ق ا د

القضية الخامسة . ن

اذا تلافت ثلاثة خطوط مستقيمة في نقطة واحدة وكان خط آخر
مستقيم عموداً على الثلاثة في تلك النقطة فالخطوط الثلاثة في سطح
واحد

ليكن ب س ب د ب ي ثلاثة خطوط مستقيمة متلاقية في النقطة ب وليكن
ب ا عموداً عليها في تلك النقطة فهذه الخطوط الثلاثة
في سطح واحد

والا فان كان ممكناً ليكن ب د وب ي في سطح
وب س فوقه وليمر سطح في ا ب وب س وليكن
موضع تقاطع مع السطح الذي فيه ب د وب ي
خطاً مستقيماً (ق ٢ ك ٢ مضافات) وليكن ب ف
ذلك الخط فالخطوط الثلاثة المستقيمة ا ب ب س ب ي

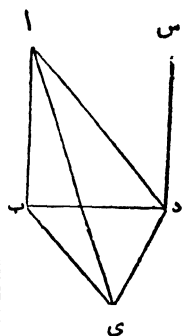
ب ف هي في سطح واحد اي الذي يمر في ا ب وب س . ولكون ا ب عموداً على كل
من المخطئين المستقيمين ب د ب ي فهو عمود على السطح المارّ فيها (ق ٤ ك ٢ مضافات)
وهو عمود على كل خط في ذلك السطح وب ف هو في السطح الذي يلاقيه فالزاوية

ا ب ف قائمة وقد فُرض ان ا ب س قائمة فالزاوية ا ب ف = ا ب س وهما في سطح واحد وذلك لا يمكن فالخط المستقيم ب س ليس فوق السطح الذي فيه ب د وب ي فالخطوط الثلاثة المستقيمة ب س ب د ب ي في سطح واحد

القضية السادسة . ن

خطان مستقیم عمودان علی سطح هما متوازیان

لیکن الخطان المستقیمان اب و س د عمودین علی السطح ب ی د فہما متوازیان
لیلقیا السطح فی النقطین ب و د . ارم دی عموداً علی
د ب فی السطح ب ی د ولتکن ی نقطۃ ما فیہ . ارم ای
ا د ی ب . فلکون اب ی قائمۃ اب + ب ی = ای
(ق ۴۷ ک) ولکون ب دی قائمۃ ب ی = ب د +
دی فاذا اب + ب د + دی = ای و اب + ب د
= ا د فاذا ا د + دی = ای فتکون ا دی قائمۃ (ق ۴۸
ک) فالخط ی د ہو عمود علی الخطوط الثلاثة ب د د ا

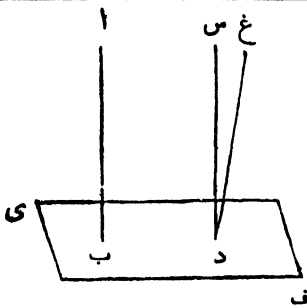


دس فہی فی سطح واحد (ق ۵ ک ۲ مضافات) اب ہو فی السطح الذي فيہ د
ود الان کل ثلاثة خطوط متلاقية في سطح واحد (ق ۲ ک ۲ مضافات) فاذًا
اب ب د دس فی سطح واحد وکل واحد من الزوايتین اب د ب دس قائمه
فالخط اب بوازي الخط س د (ق ۱۸ ک ۱)

القضية السابعة. ن

إذا كان خطان مستقيمان متوازيين وكان أحدهما عموداً على سطح :
فالأخر أيضاً عموداً على ذلك السطح

لیکن اب وس د خطین متوازیں لیکن احدهما اب عموداً علی سطحی ف



فيكون س د ايضاً عموداً عليه
وان لم يكن س د عموداً على السطح الذي
اب عمود عليه فليكن د غ عموداً عليه فاذا
د غ بوازي اب (ق ٦ ك ٢ مضافات) وكلا
د س د غ بوازي اب وقد رؤيها من نقطة
واحدة وذلك غير ممكن (اولية ١١ ك ١)

القضية الثامنة . ن

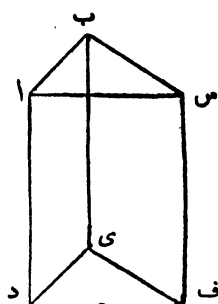
خطان مستقيمان يوازيان خطاً ثالثاً مستقيماً هما متوازيان وان لم تكن
في سطح واحد

لنفرض ان الخطين المستقيمين اب وس د يوازيان الخط المستقيم ي ف وهو
ليس في سطحها فالخط اب يوازي الخط س د
في ي ف خذ اية نقطة شئت مثل غ ومنها
ارسم الخط المستقيم غ ح في السطح المار بالخطين
اب ي ف وليكن غ ح عموداً على ي ف
وغ ك عموداً على ي ف في السطح الذي يمر
بالخطين ي ف س د . ولكون ي ف عموداً على ح غ وك غ فهو عمود على السطح
المار بهما ح غ ك (ق ٤ ك ٢ مضافات) وي ف يوازي اب فاذا اب هو عمود على
السطح ح غ ك (ق ٧ ك ٢ مضافات) ولهذا السبب س د عمود على السطح ح غ ك
فكلا اب وس د عمود على سطح واحد فهما متوازيان (ق ٦ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة . ن

اذا تلاقي خطان مستقيمان ووازي خطين آخرين مستقيمين متلاقين
وليسا في سطح الاولين فالزاوية الحادثة بين الاولين تعدل الحادثة بين
الآخرين

ليكن ا ب س ب خطين مستقيمين ولتلقيا في ب وليوازا خطين اخرين



مستقيمين دى فى المتنيين فى ي وليسا في سطح

الاولين فالزاوية ا ب س تعدل الزاوية دى ف. اقطع

الاقسام المتساوية ب ا ب س ي دى ف وارسم ا د

بى س ف اس د ف. فلكون ب ا = دى د

ويوازيه فالخط ا د = بى ويوازيه (ق ٢٢ ك ١)

ولمذا السبب س ف = بى ويوازيه فاذا ا د =

س ف ويوازيه (ق ٨ ك ٢ مضافات) واس = د ف ويوازيه (ق ٢٢ ك ١) فلكون

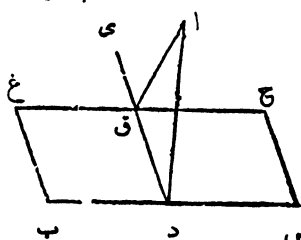
ا ب وب س يعدلان دى وى ف والناعدة اس = الناعدة د ف فالزاوية ا ب س

= الزاوية دى ف (ق ٨ ك ١)

القضية العاشرة . ع

علينا ان نرسم عموداً على سطح من نقطة مفروضة فوقه

لتكن ا النقطة المفروضة وب ح السطح المفروض . علينا ان نرسم عموداً على



ب ح من النقطة ا

ارسم في السطح اى خط مستقيم شئت

مثل ب س ومن ا ارسم ا د عموداً على

ب س (ق ١٢ ك ١) فاذا كان ا د عموداً

على السطح ب ح ايضا فقد تم العمل . والا

فن النقطة د ارسم الخط المستقيم دى في السطح ب ح واجعله عموداً على ب س .

ومن ا ارسم ا ق عموداً على دى . وفي ق ارسم ق ح حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١)

فلكون ب س عموداً على د ا وعلى دى فهو عمود على السطح المار بها (ق ٤

ك ٢ مضافات) وق ح يوازي ب س فهو ايضا عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢

مضافات) وهو عمود على كل خط مستقيم في ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات)

ويلاحظوا ق الذي هو في السطح المذكور اى المار بالخطين ا د و دى فاذا ا ق عمود

على ق ح و دى على موضع اتفاهما فهو عمود على سطحها (ق ٤ ك ٢ مضافات) وذلك

السطح هو ب ح فقد رُسم ا ق عموداً على السطح ب ح من النقطة المفروضة

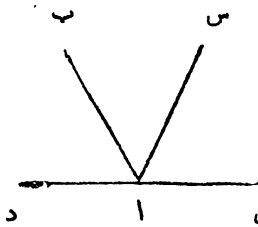
فرع. لو فرض ان يرسم عمود على سطح من نقطة فيه مثل س فعين نقطة فوقه مثل ا وارسم ا ق عموداً على السطح ومن س ارم خطاً حتى يوازي ا ق فيكون عموداً على السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات)

—xox—

القضية الحادية عشرة . ن

من نقطة واحدة في سطح لا يكون خطان مستقيمان عمودين على ذلك السطح على جانب واحد منه . ومن نقطة فوقه لا يكون اكثر من خط واحد عموداً عليه

ان كان ممكناً ليكن اس اب عمودين على سطح مفروض على نقطة واحدة منه هي ا وعلى جانب واحد منه وليرسم سطح بهذين الخطين ب ا س افعل تقاطع هذا السطح بالسطح المفروض هو خط مستقيم ماراً بالنقطة ا (ق ٢ ك ٢ مضافات) ليكن د اى محل التقاطع فالخطوط المستقيمة ب ا س ا د اى هي في سطح واحد .

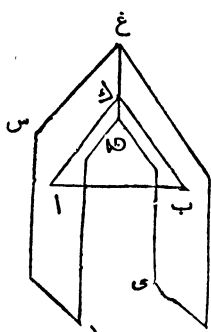


ولكون س ا عموداً على السطح المفروض فهو عمود على كل خط مستقيم يلاقيه في ذلك السطح فالزاوية س اى قائمة ولهذا السبب ايضاً ب اى قائمة وهما في سطح واحد وهذا غير ممكن . ومن نقطة مفروضة فوق السطح لا يكون الا خط واحد عموداً على السطح والا لكانا متوازيين (ق ٦ ك ٦ مضافات) وذاك محال

—xox—

القضية الثانية عشرة . ن

اذا كان خط مستقيم عموداً على سطوح فتلك السطوح متوازية
ليكن الخط المستقيم اب عموداً على السطحين س د ي ف هما متوازيان



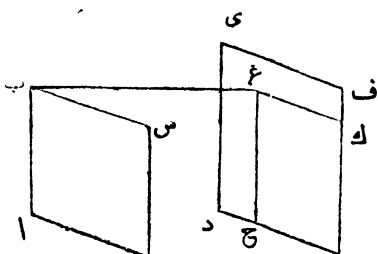
والأ فلابد من التفاتها اذا أُخرجاً ويكون محل
نقاطها خطاً مستقيماً غ ح . خذ في غ ح اية نقطة شئت
مثل ك وارسم اك ب ك . فلكون اب عموداً على
السطح ي ف فهو عمود على كل خطٍ مستقيم يلاقيه في ف
ذلك السطح (حد اك ٢ مضافات) فهو عمود على
ب ك وك ب قائمة . ولهذا السبب ايضاً ب اك قائمة
ففي المثلث ك اب قائمتان وذاك غير ممكن (ق ١٧ ك ١)
فالسطحان لا يتلاقيان ولو أُخرجاً فيها متوازيان (حد ٧ ك ٢ مضافات)

—xox—

القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان خطان مستقيمان ملتقيان متوازيين لخطين مستقيمين آخرين
اللذين يلتقيان ايضاً وليسا في سطح الاولين فالسطح المارّ بالاولين
يوازي المارّ بالآخرين

ليكن اب ب س خطين مستقيمين ولتلقيا في ب وليوازي خطين آخرين
مستقيمين ليسا في سطحهما د ي ف ي
اللذين يتلاقيان في ي . فالسطح المارّ
بالاولين يوازي المارّ بالآخرين



من ب ارسم ب غ عموداً على
السطح المارّ بالخطين د ي ف ي

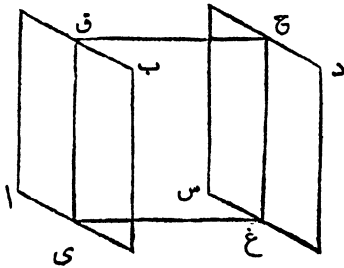
(ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليلاق في غ ومن غ ارسم غ ح حتى يوازي د ي (ق ٢١
ك ١) وغ ك حتى يوازي ف ي . فلكون ب غ عموداً على سطح د ي ف ف فهو عمود
على كل خطٍ يلاقيه في ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات) فتكون كل واحدة من
الزاويتين ك غ ب ح غ ب قائمة . ولكون ب ا يوازي غ ح (ق ٨ ك ٢ مضافات)
فالزاويتان ح غ ب اب غ معاً تعدلان قائمتين وح غ ب قائمة فتكون اب غ
ايضاً قائمة وغ ب عمود على ب ا ولهذا السبب ايضاً هو عمود على ب س . فهو عمود

على السطح المار بها وقد رُمِّس عموداً على سطح د ي ف فهو عمود على السطحين هما متوازيان (ق ١٢ ك ٢ مضافات)
 فرع . اذا لاقى خط مستقيم سطحين متوازيين وكان عموداً على احدهما فهو عمود على الثاني ايضاً



الفضية الرابعة عشرة . ن

اذا قطع سطحين متوازيين فخطا التقاطع متوازيان
 ليكن ا ب وس د سطحين متوازيين وليقطعهما السطح ي ق غ ح فخطا التقاطع ي ق غ ح متوازيان

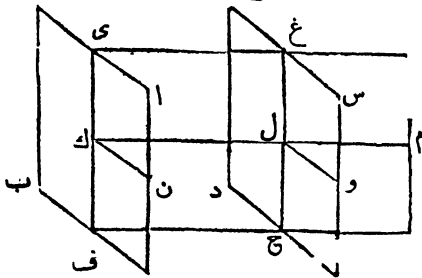


لأن الخط ي ق في السطح ا ب والخط غ ح في السطح س د وكل واحد يبق في سطحيهما اُخرج والسطحان لا يلتقيان لانها متوازيان فالخطان لا يتلاقيان ولو اُخرجا فهما متوازيان
 (حد ٢٠ ك ١)



الفضية الخامسة عشرة . ن

اذا قطع سطحين متوازيين فلها ميل واحد على ذلك السطح
 ليكن ا ب وس د سطحين متوازيين وليقطعهما السطح ي ق غ ح ف ي ا ب على ي ح



هو مثل ميل س د على ي ح
 ليكن الخطان المستقيمان ي ق و غ ح موضعَي التقاطع من آية نقطة شئت في ي ف مثل ك ا رسم الخط ك م في السطح ي ح عموداً على ي ف وليلاقى غ ح في

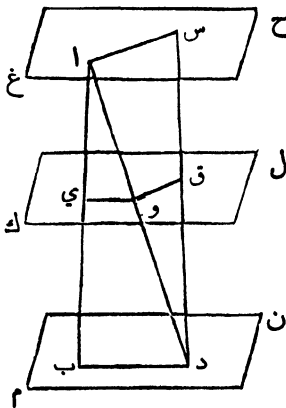
ل وارسم كن عموداً على ي ف في السطح ا ب وليرس سطح بالخطين المستقيمين ك ن

ك م حتى يقطع السطح س د في الخط ل و . فليكون السطح ح ي في السطحين المتوازيين ا ب س د في الخطين ي ف غ ح فهذان الخطان متوازيان (ق ١٤ ك ٢ مضافات) وى ق انما هو عمود على السطح المار بالخطين ك ن ك م (ق ٤ ك ٢ مضافات) لانه عمود على ك ن وك م فالخط غ ح ايضا عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على الخطين ل م ل و اللذين بلاقيانه في ذلك السطح . ولان ل م ل و عمودان على ل غ محل تقاطع السطحين س د وى ح فالزاوية ول م هي ميل السطح س د على السطح ح (حد ٤ ك ٢ مضافات) وهكذا ايضا ك ن هي ميل السطح ا ب على السطح ح . ون ك يوازي ول فالزاوية الداخلة ن ك م تعدل الخارجة م ل و (ق ٢٩ ك ١) فميل السطح ا ب على ح يعدل ميل السطح س د على س د على ح

— ١٠٠٤ —

القضية السادسة عشرة . ن

سطوح متوازية اذا قطعت خطين مستقيمين نقطعهما على نسبة واحدة
ليكن غ ح ك ل م ن سطوحاً متوازية ولتقطع الخطين المستقيمين ا ب س د



في النقط اى ب س ق د فنسبة اى : ح
ى ب :: س ق : ق د

ارسم ا س ب د ا د . واما ا د فليلاق
السطح ك ل في و . ارسم ي و و ق . فلان السطحين
المتوازيين ك ل م ن قد قطعهما السطح ح ي ب د و
فخطا التقاطع ح ي و ب د متوازيان (ق ١٤ ك ٢
مضافات) وهكذا ايضا يبرهن ان ا س و ق
متوازيان . وليكون ح ي و يوازي ب د ضلعاً من

المثلث ا ب د فنسبة اى : ح ي ب :: ا و : د و (ق ٢ ك ٦) ولان ق و يوازي ا س
ضلعاً من المثلث ا د س فنسبة ا و : د س :: ق د : س ق و ق د فبالمساواة (ق ١١ ك ٥)
اى : ح ي ب :: س ق : ق د

— ١٠٠٤ —

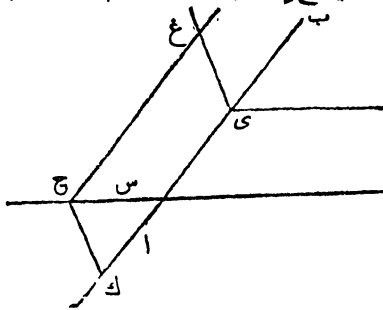
السطح (حد ١ ك ٢ مضافات) وهكذا أيضاً يبرهن ان د ف عمود على د ب فالخط
د ب عمود على د ي ود ف فهو عمود على سطحها اي على ا د س (ق ٤ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة عشرة . ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خطين مستقيمين مفروضين وضعاً

وليسا في سطح واحد

ليكن ا ب وس د الخطين ولا يكونان في سطح واحد . علينا ان نرسم عموداً عليهما



في ا ب خذ نقطة ي ومن

ي ارم ي ف حتى يوازي س د ف

وليكن ي غ عموداً على السطح

الماز بالخطين ي ب ي ف د

(ق ١٠ ك ٢ مضافات) ولبر

السطح غ ك بالخطين ا ب و غ ي

وليتاق س د في ح ومن ح ارم ح ك عموداً على ا ب فالخط ح ك هو المطلوب .

من ح ارم ح غ حتى يوازي ا ب

فلكون ح ك و غ ي عمودين على ا ب وهما في سطح واحد فهما متوازيان . ولان

ح غ ح د يوازيان ي ب و ي ف فالسطح غ ح د يوازي السطح ي ب ف (ق ١٢

ك ٢ مضافات) فالخط غ ي العمودي على ي ب ي ف فهو عمود على السطح غ ح د

ايضاً (فرع ق ١٢ ك ٢ مضافات) وح ك يوازي غ ي فهو عمود على السطح غ ح د

(ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على ح د الواقع في ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات)

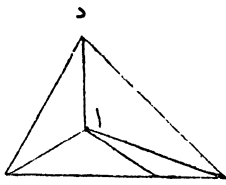
وقد رُسم ح ك عموداً على ا ب فهو عمود على الخطين المفروضين

القضية العشرون . ن

اذا احاطت ثلاث زوايا بسيطة بزواية مجسمة فكل اثنتين منها معاً

أكبر من الثالثة

لتنع الزاوية المجسمة اي بين الزوايا الثلاث البسيطة با س با د س ا د



فكل اثنين منها معاً اكبر من الثالثة

فان كانت هذه الزوايا الثلاث متساوية فالامر
وانسخ ان اثنين منها معاً اكبر من الثالثة . وان لم تكن
متساوية فلتكن ب ا س الزاوية التي ليست اصغر

من احدى الاخرين والتي هي اكبر من احدهما اي س
من د ا ب . وعند النقطة ا في الخط المستقيم ا ب وفي السطح المار بالخطين ب ا
ا س اجعل الزاوية ب ا ي تعدل الزاوية د ا ب (ق ٢٣ ك ا) واجعل اي = ا د
وفي النقطة ي ا رسم الخط ب ي س حتى ينقطع ا ب و ا س في ب و س وارسم ب د
و د س

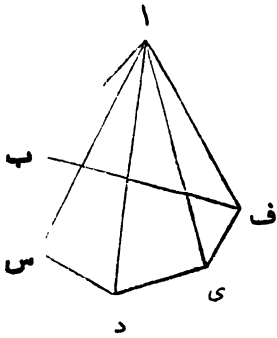
فلكون د ا = ا ي و ا ب مشتركاً بين المثلثين ب ا د ب ا ي والزاوية ب ا د =
ب ا ي فالقاعدة ب د تعدل القاعدة ب ي (ق ٤ ك ا) ولان ب د و د س معاً
اطول من ب س (ق ٢٠ ك ا) وقد تبين ان احدهما ب د = ب ي الذي هو
جزء من ب س فالآخر د س هو اطول من الباقي ي س . ولان د ا = ا ي و ا س
مشترك بين المثلثين والقاعدة د س اطول من القاعدة ي س فالزاوية د ا س هي
اكبر من الزاوية ي ا س (ق ٢٥ ك ا) وقد جعلت الزاوية د ا ب = ب ا ي
فالزاويتان د ا ب د ا س معاً اكبر من ب ا ي ي ا س او من ب ا س . وقد فرض
ان ب ا س ليست اصغر من احدى الزاويتين ب ا د د ا س فتكون ب ا س مع
احدى الاخرين اكبر من الثالثة

—•••—

القضية الحادية والعشرون . ن

الزوايا البسيطة المحيطة بزاوية مجسمة هي معاً اصغر من اربع زوايا
قائمة

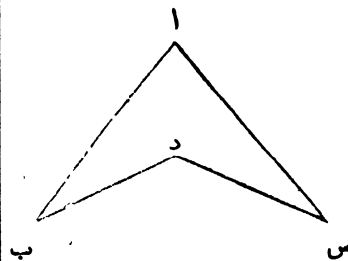
لكن ازاوية مجسمة ونحيط بها زوايا بسيطة ب ا س ا د ا ي ا ف



ف ا ب فهي معاً اصغر من اربع زوايا قائمة
لنقطع السطوح المحيطة بالزاوية المجسمة ا
بسطح آخر وليكن محل التقاطع الشكل ذا الاضلاع
المستقيمة ب س د ي ف. فالزاوية المجسمة عند ب
تحيط بها ثلاث زوايا بسيطة س ب ا ا ب ف
ف ب س وكل اثنين منها اكبر من الثالثة
(ق ٢٠ ك ٢ مضافات) فالزاويتان س ب ا

ا ب ف معاً اكبر من ف ب س . ولهذا السبب ايضاً الزاويتان البسيطتان عند كل
واحدة من النقط س د ي ف وهي التي عند قواعد المثلثات المتلاقية في ا هـ اكبر من
الثالثة عند تلك النقط . فجميع الزوايا عند قواعد المثلثات هي معاً اكبر من جميع
زوايا الشكل . وجميع زوايا المثلثات معاً تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدة
المثلثات (ق ٢٢ ك ١) او مضاعف اضلاع الشكل ب س د ي ف وجميع زوايا
الشكل مع اربع زوايا قائمة تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدة اضلاع الشكل
(فرع اول ق ٢٢ ك ١) فجميع زوايا المثلثات تعدل جميع زوايا الشكل مع اربع
زوايا قائمة . ولكن جميع الزوايا عند قواعد المثلثات اكبر من جميع زوايا الشكل كما
قد تبرهن فالزوايا الباقية من المثلثات اي التي عند مجتمع المثلثات المحيطة بالزاوية
المجسمة ا هي اصغر من اربع زوايا قائمة

تعليقة . اذا كانت احدى زوايا الشكل ب س د ي ف خارجة كالزاوية عند
د لا نصح هذه القضية لأن الزوايا المجسمة عند القاعدة غير محاطة كلها بالزوايا



البسيطة التي اثبتنا منها في السطوح
المثلثة المجسمة عند ا والثالثة زاوية داخلية
من الشكل المذكور . فلا يقال ان مجتمع
الزوايا عند قواعد المثلثات هو ضرورة
اكبر من مجتمع زوايا الشكل
ب س د ي ف

اصول الهندسة

مضافات

الكتاب الثالث

في مقايسة الاجسام

حدود

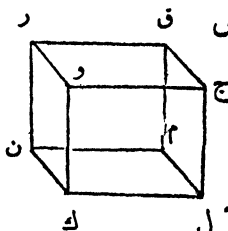
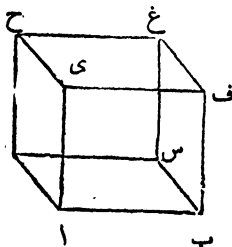
- ١ الجسم هو ما كان له طول وعرض وعمق
- ٢ والاجسام المتشابهة هي التي تحيط بها عدة واحدة من سطوح متشابهة شكلاً ووضعاً لها ميل واحد بعضها على بعض
- ٣ المَرَم جسم يحيط به سطوح متلاقية في نقطة واحدة وتلك السطوح هي بين هذه النقط وسطح آخر
- ٤ المنشور ويقال له المنشور جسم يحيط به سطوح منها سطحان متقابلان متساويان متشابهان ومتوازيان والبقية ذات اضلاع متوازية
- ٥ المتوازي السطوح هو جسم يحيط به ستة سطوح كل واحد منها ذو اربعة اضلاع وكل اثنين منها متقابلان
- ٦ المكعب جسم يحيط به ستة مربعات متساوية
- ٧ الكرة جسم يرسم بدوران نصف دائرة على قطر ثابت
- ٨ محور الكرة ويقال له الجَزَعُ او الجَزَعُ هو الخط الثابت الذي دار عليه نصف الدائرة
- ٩ مركز الكرة هو مركز نصف الدائرة الذي رُسمت الكرة بدورانه
- ١٠ قطر الكرة هو خط مستقيم يمر بمركزها وينتهي طرفاه في سطحها

- ١١ المخروط هو جسم يُرسم بدوران مثلث ذي قائمة على احد ضلعيه المحيطين بالقائمة
- ١٢ محور المخروط او جزعهُ هو الضلع الثابت من المثلث الذي يرسم المخروط بدورانه
- ١٣ قاعدة المخروط هي الدائرة المرسومة بالضلع الدائر الذي يلي القائمة من المثلث الذي بدورله رُسم المخروط
- ١٤ الاسطوانة جسم مرسوم (بدوران) شكل ذي اضلاع متوازية وزوايا قائمة على احد اضلاعه
- ١٥ سم الاسطوانة او محورها هو الضلع الثابت من الشكل الذي رُسمت الاسطوانة بدورانه
- ١٦ قاعدة الاسطوانة هما الدائرتان الحادئتان من دوران الضلعين المتقابلين من الشكل الذي بدورانه رُسمت الاسطوانة
- ١٧ المخاريط المشابهة والاساطين المشابهة هي التي تكون سهامها واقطار قواعدها متناسبة

الفضية الاولى . ن

اذا أُحيط جسمان بعدة متائلة من السطوح المتساوية المتشابهة شكلاً ووضعاً وكان ميل السطحين المتواليين في الجسم الواحد مثل ميل نظيرها في الآخر فالجسمان متساويان ومتشابهان

ليكن اغ وك ق جسمين محاطين بعدة متائلة من السطوح المتساوية المتشابهة شكلاً ووضعاً اي السطح اس ق يشبه السطح ك م ويعدله واف يشبه ك ج ويعدله وهكذا في البقية وليكن ميل اف على اس مثل ميل ك ل



ك ج على ك م وهكذا في البقية فالجسم ك ق يعدل الجسم اغ ويشبه
لبوضع الجسم ك ق حتى تطبق قاعدته ك م على اس قاعدة الجسم اغ اي حتى
تقع ن على د وك على ا وم على س ول على ب اذ القاعدتان متساويتان ومتشابهتان
(اولية ثامنة ك ا) . فلكون السطح ك م يطابق السطح اس وبالمفروض ميل ك ر على
ك م مثل ميل اح على اس فالسطح ك ر يطابق السطح اح لانها متساويتان
ومتشابهتان (اولية ثامنة ك ا) وضلعاهما المتساويتان ك ن و ا د متطابقتان . وهكذا
يبرهن في بقية سطوح الجسمين ان كل واحد يطابق نظيره فالجسمان متطابقان كلياً
فهما متساويان ومتشابهان .

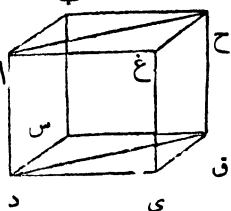
—o—

القضية الثانية . ن

اذا أُحيط جسمٌ بستّة سطوح كل اثنين منها متوازيان فالسطوح

المتقابلة هي اشكال متوازية الاضلاع متشابهة ومتساوية

ليكن س د غ ح جسماً احاط به السطوح المتوازية اس غ ق وب غ س ي



وق ب ي ا فالسطوح المتقابلة هي متوازية الاضلاع متشابهة ومتساوية

لان السطح اس يقطع السطحين المتوازيين ب غ

وس ي فخطا التقاطع اب ود س متوازيان (ق ١٤) ق

ك ٢ مضافات) ولان السطح اس يقطع السطحين

المتوازيين ب ق و ا ي فخطا التقاطع ب س و ا د متوازيان و اب يوازي س د كما

نقدم فالشكل اب س د متوازي الاضلاع وهكذا يبرهن في بقية السطوح انها متوازية

الاضلاع . ارم اح ود ق . فلكون اب يوازي د س وب ح يوازي س ق فالخطان

المائلان اب ب ح يوازيان المتلاقيين د س س ق . فالزاوية اب ح = د س ق

(ق ٩ ك ٢ مضافات) ولكون اب ب ح يعدلان د س س ق والزاوية اب ح

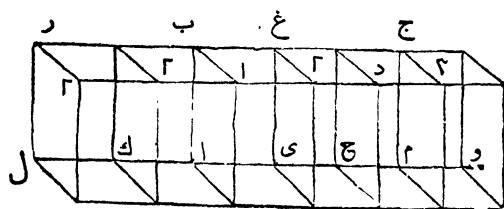
= د س ق فالقاعدة اح = د ق (ق ٤ ك ١) والمثلث اب ح = المثلث د س ق .

ولهذا السبب اغ ح = د ي ق فالشكل ب غ = س ي وهكذا يبرهن ان اس =

غ ق و ا ي = ب ق

جسم متوازي السطوح اذا قُطع بسطحٍ يوازي سطحين متوازيين من
سطوحه ينقسم الى جسمين نسبة بعضها الى بعض كنسبة قاعدتيهما
بعضها الى بعض

المتقابلين ب ح د
 فينقسم الجسم الى
 جسمين ن ب غ ف
 و غ ف ح د حتى
 تكون نسبة ن ب غ
 الى غ ف ح د كنسبة القاعدة اى ف ن الى القاعدة حى ح ف س



أخرج أح إلى الجهتين وخذ موم وحتى بعدلای ح وخذ اك كل حتى
بعدلای وتم الاشكال المتوازية الاضلاع ل ز ك ن ح ق م ص والاجسام ل ۲
ك ا ح ۲ م ت . الخطوط ل ك ا اى متساوية والخطوط ك ز ا ن ی ف
متساوية وهي تحدث زوايا متساوية مع ل ك ا وای فالاشكال المتوازية الاضلاع
ل ز ك ن ا ف متساوية ومتشابهة (ق ۲۶ ك ا و ك ا ۶) وهكذا الاشكال
ك ر ك ب ا غ وإيضاً الاشكال ل ۲ ك ا ۱ ۱ ۲ (ق ۲ ك ۲ مضافات) لانها
سطوح متقابلة . وهكذا يبرهن ان الاشكال ی س ح ق م ص متساوية
(ق ۲۶ ك ا و ك ا ۶) وإيضاً الاشكال ح غ ح ج ج و أيضاً ح د م ت و
(ق ۲ ك ۲ مضافات) فثلاثة سطوح من الجسم ل ۲ نعدل ونشبه ثلاثة سطوح
من الجسم ك ا وثلاثة سطوح من الجسم ا ۲ والثلاثة التي تقابلها في الاجسام
الثلاثة هي متساوية ومتشابهة (ق ۲ ك ۲ مضافات) فالاجسام ل ۲ ك ا ۱ ۱
تخطيطها سطوح متساوية ومتشابهة . ولكون السطوح ل ۲ ك ا ۱ ۱ متوازية
وينقطعها السطح ۲ يكون ميل ل ۲ على ۲ مثل ميل ك ۲ على ۲ او ميل ا ۱
على ب ۲ (ق ۱۵ ك ۲ مضافات) وهكذا يقال في بقية السطوح المتوالي . فالاجسام

ل ٢ ك ١ ١ ٢ هي متساوية (ق ١ ك ٢ مضافات) . وهكذا يبرهن ان الاجسام
 ي د ح ٢ م متساوية فكما تكرر ا ف في ل ف هكذا يتكرر الجسم ٢ ا في الجسم
 ل ٢ وكذلك كما تكرر ا ف في ف وهكذا يتكرر الجسم ي د في الجسم ي ت واذا
 كانت القاعدة ل ف تعدل القاعدة ف و فالجسم ل ٢ يعدل الجسم ي ق (ق ١
 ك ٢ مضافات) وان كانت اكبر فاكبر وان كانت اصغر فاصغر فالقاعدة ا ف :
 القاعدة ح ف :: الجسم ٢ ا : الجسم ي د (حده كه)

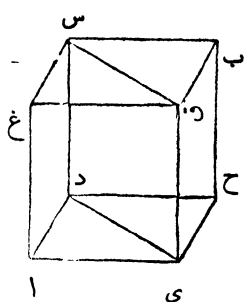
فرع . لان الشكل المتوازي الاضلاع ا ف : ح :: ف : س (ق ١ ك ٦)
 فالجسم ٢ ا : الجسم ي د :: ف : س



الفضية الرابعة . ن

جسم متوازي السطوح اذا قطعه سطحاً ماراً بقطري السطحين المتقابلين
 ينقسم الى مشورين متساويين

ليكن ا ب جسماً متوازي السطوح وليقطع بالسطح س ق ي د المار بقطري
 السطحين المتقابلين غ ب واح فانه ينقسم الى
 مشورين متساويين . لان س د يوازي غ ا وق ي
 يوازي غ ا وهو ليس من سطحه فالخطان س د ق ي
 متوازيان (ق ١ ك ٢ مضافات) فالنظران س ق
 د ي هما في سطح س د وق ي فهما متوازيان (ق ١ ك ٤
 ك ٢ مضافات) والثلث س ب ق = س غ ق



(ق ١ ك ٤) ود ح ي = د ا ي والشكل س ا يعدل الشكل المقابل ل ب ي
 (ق ٢ ك ٢ مضافات) و غ ي = س ح فالسطوح المحيطة بالمشورين س ا ي
 س ب ي متساوية ومتشابهة كل واحد بنظيره وهي على ميل واحد بعضها على بعض
 لان السطح ا س يوازي السطح ي ب و ا ق يوازي س ح ويقطعا السطح س ي (ق ٥ ا
 ك ٢ مضافات) فالمشور س ا ي = س ب ي (ق ١ ك ٢ مضافات)

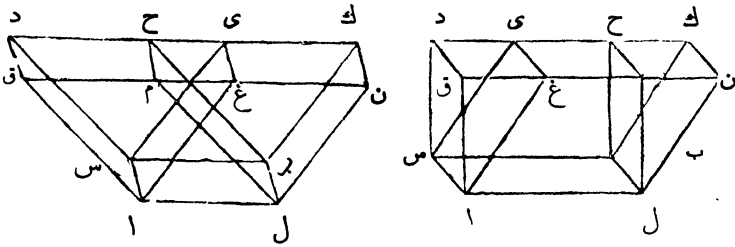
تنبيه . في النضايا الآتية يراد بالخطوط الواقعة الاشكال الواقعة بين

قاعدة الجسم والسطح الذي يقابلها

القضية الخامسة . ن

اجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية
اذا انتهت خطوطها الواقعة الى خط مستقيم واحد في السطح الذي
يقابل القاعدة

ليكن اح ا ك جسمين على قاعدة واحدة اب وعلى علو واحد وخطوطها الواقعة

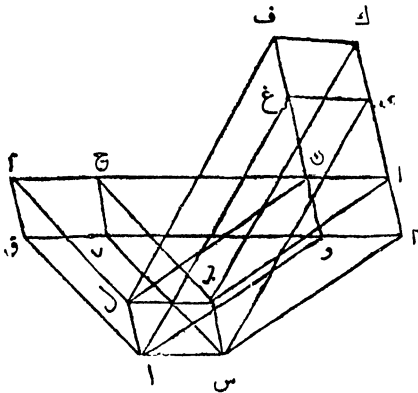


اق اغ ل م ل ن منتبهة الى خط واحد ق ن والمخطوط س د س ي ب ح
ب ك منتبهة الى خط واحد د ك فالجسمان متساويان

لان س ح س ك متوازي الاضلاع فالضلع س ب يعدل كل واحد من
الضلعين المتقابلين د ح وى ك (ق ٢٤ ك ١) د ح = ي ك فان اُضيف اليها الجزء
المشترك ح ي او طرح منها فالجميع او الباقي د ي = المجمع او الباقي ك ح والمثلث
س د ي = ب ح ك (ق ٢٨ ك ١) والشكل د غ = الشكل ح ن (ق ٢٦ ك ١) ولهذا
السبب اق غ = ل م ن وس ق = ب م (ق ٢٢ ك ٢ م) وس غ = ب ن لانمـا
سطوح متعابلة فالسطوح المحيطة بالמושور داغ انما تعدل ونسبه السطوح المحيطة
بالموشور ل ن كل واحد يعدل ونسبه نظيره والسطوح المتوالية هي على ميل واحد
بعضها على بعض (ق ١٥ ك ٢ م) فالموشوران داغ ح ل ن متساويان (ق ٢٢ ك ٢ م)
فان طرح الموشور ل ن ح من الجسم الذي قاعدته الشكل اب وق د ك السطح
المقابل لها وطرح منه ايضا الموشور اغ د فالجسم الباقي اي المتوازي السطوح اح
يعدل الباقي اك

القضية السادسة . ن

اجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية
وان لم تنته خطوطها النوافذة في خط واحد في السطح المقابل القاعدة
ليكن الجسمان المتوازيان السطوح س م وس ف على قاعدة واحدة اب وعلى علو



واحد وخطوطها النوافذة اق

اغ ل م ل ف س د

س ي ب ح ب ك غير

منتبهة الى خط واحد كما في

القضية السابقة فالجسمان

س م س ف متساويان

لانها على علو واحد

فالسطح ح ق والسطح ك غ في

سطح واحد واذا اخرج السطح ح ق والسطح ك غ تقاطع اضلاعها . فلينجزا وليتقاطعا

في ان ٢ و . فالجسم س ف = س ن (ق هـ ك ٢ مضافات) والجسم س ق = س ن

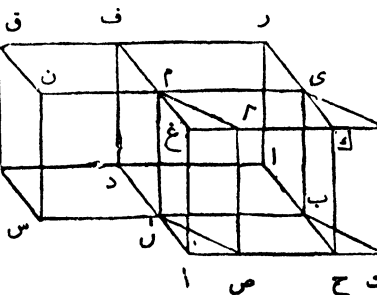
(ق هـ ك ٢ مضافات) فالجسم س ف = س م (اولية ا ك ا)

القضية السابعة . ن

اجسام متوازية السطوح على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي

متساوية

ليكن الجسمان المتوازيان السطوح س ف و اى على علو واحد وعلى قاعدتين



متساويتين ح ل وس د فيها

متساويان

ليوضع الجسمان حتى تكون ج

القاعدتان في سطح واحد .

فلكونها على علو واحد يكون

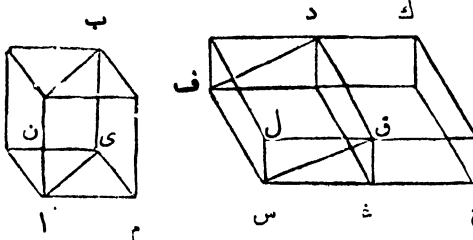
السطحان المقابلان القاعدتين

ن ف غ ي ايضاً في سطح واحد وتخرج السطوح حتى يصطنع السطحان م ر وب د
وتم الجسم ل ر فهو يعدل الجسم س ف (ق ١ ك ٢ م) وهو ايضاً يعدل اى ف الجسم
اى يعدل الجسم س ف (اولية ا ك ١)

الفضية الثامنة . ن

اجسام متوازية السطوح اذا كانت على علو واحد تكون نسبة بعضها
الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن ا ب وس د جسمين متوازيي السطوح وعلى علو واحد فنسبة ا ب :
س د :: القاعدة اى :



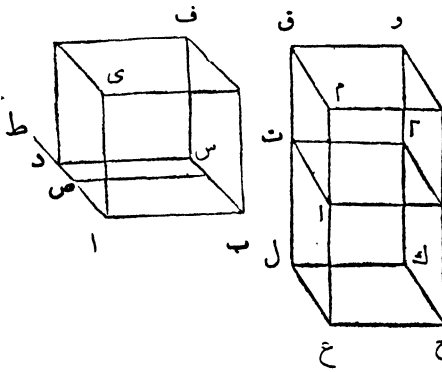
القاعدة س ق
ارسم الشكل
المتوازي الاضلاع ق ح
على الخط المستقيم ق غ

حتى يعدل القاعدة اى (فرع ق ٥ ك ١) والزاوية ق غ ح فلتعدل ل س غ وتم
الجسم المتوازي السطوح غ ك على القاعدة ق ح فيكون ق د واحداً من خطوطه
الواقفة فيكون الجسمان س د و غ ك على علو واحد والجسم ا ب يعدل الجسم غ ك
(ق ٧ ك ٢ م) ونسبة ح ق : ق س :: الجسم ح د : الجسم د س (ق ٢ ك ٢ م) والقاعدة
ح ق = اى والجسم غ ك = ا ب فنسبة ا ب : س د :: اى : س ق

فرع اول . ينضح من هذه القضية ان المواشير على قواعد مثلثة الاضلاع وعلى
علو واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض
فرع ثان . اذا كانت جسم متوازي السطوح وموشر على علو واحد فنسبة
احدها الى الاخر كنسبة قاعدة الواحد الى قاعدة الاخر

الفضية التاسعة. ن

اجسام متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة مسطح
 علو الواحد في مساحة قاعدته الى مسطح علو الآخر في مساحة قاعدته
 ليكن ا ف و غ و جسمين متوازي السطوح . فنسبة ا ف : غ و :: ا س : خ
 س ف : غ ك : خ و



من غ م احد المخطوط
 الموافقة للجسم غ واقطع غ ا
 حتى يعدل س ف او اى
 من الجسم ا ف وليرت بالنقطة
 ا سطح بوازي غ ك مثل
 السطح ا ت ا ر فالجسم غ ا

متوازي السطوح (حده ك م) وعلوه هو علو ا ف . ونسبة الجسم ا ف : الجسم غ و
 هي مركبة من نسبة ا ف : غ ٢ ونسبة غ ٢ : غ و (حده ا ك ٤) ونسبة ا ف : غ ٢
 هي كنسبة القاعدة ا س : القاعدة غ ك (ق ا ك ٨ م) لانها على علو واحد ونسبة الجسم
 غ ٢ : الجسم غ و هي كنسبة غ ا : غ م (ق ا ك ٢) فالنسبة المركبة من نسبة ا ف :
 غ ٢ ومن نسبة غ ٢ : غ و هي مثل المركبة من نسبة القاعدة ا س : القاعدة غ ك
 والعلو اى : العلو غ م (ق وك ٤) ولكن نسبة ا ف : غ و هي المركبة من ا ف : غ ٢
 وغ ٢ : غ و فنسبة ا ف : غ و هي المركبة من نسبة القاعدة ا س : القاعدة غ ك والعلو
 اى : العلو غ م فنسبة ا ف : غ و :: ا س : خ س ف : غ ك : خ و

فرع اول . يمكن استعمال خطين مستقيمين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة الجسم
 ا ف الى الجسم غ و . ليوضع الشكل المتوازي الاضلاع ب ص على ا ب وليفرض
 ا ن ب ص = غ ك وزاوية من زواياه تعدل ب ا د (ق ا ك ٤) واص : ا ط ::
 اى : غ م (ق ا ك ٦) فتكون نسبة ا د : ا ط :: الجسم ا ف : غ و . لان نسبة ا د :
 ا ط مركبة (حده ا ك ٥) من نسبة ا د : ا ص ونسبة ا ص : ا ط ولكن نسبة ا د :
 ا ص هي مثل نسبة الشكل ا س : الشكل ب ص او غ ك (ق ا ك ٦) ونسبة
 ا ص : ا ط هي مثل نسبة اى : غ م فنسبة ا د : ا ط مركبة من نسبة ا س : غ ك

ونسبة اى : غ م (ق ه كه) ونسبة الجسم ا ف الى الجسم غ و هي مركبة من ذات
هذه النسب فنسبة ا ف : غ و :: ا د : ا ط
فرع ثانٍ . نسبة المواشير بعضها الى بعض كالنسب المركبة من قواعدها في
علوها (فرع ٢ ق ٨ ك ٢ م)

الفضية العاشرة . ن

اجسام متوازية السطوح هي متساوية اذا كانت قواعدها وعلوها
متناسبة بالتكافؤ والاجسام المتوازية السطوح المتساوية تكون
قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ

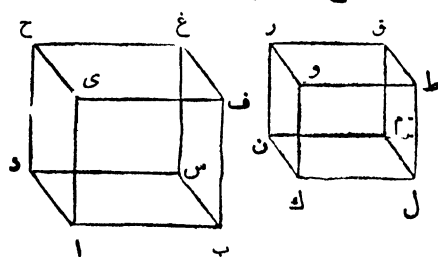
لتكن نسبة ا س : ك م :: ك و : اى ف الجسم ا غ = الجسم ك ق لانه بقبول هذه
النسبة لنا ا س $\times$ اى = ك م
 $\times$ ك و و ا س $\times$ اى = ا غ ص
(ق ٩ ك ٢ م) وك م $\times$ ك و
= ك ق
ثم اذا فرض ان ا س
 $\times$ اى = ك م $\times$ ك و لنا
ا س : ك م :: ك و : اى

فرع . في المواشير المتساوية تكون قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ وبالعكس
اذا كان العلو والقواعد متناسبة بالتكافؤ تكون المواشير متساوية

الفضية الحادية عشرة . ن

اجسام متشابهة متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كسبة
كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

ليكن اغ وك ق جسمين متوازي السطوح واب وكل الضلعين المتشابهين



فنسبة اغ : ك ق :: ا ب : ك ل
لكون الجسمين متشابهين يكون
اح وك ر سطحين متشابهين واف
وك ط كذلك (حد ٢ ك ٢ م)
ونسبة ا ب : ك ل و ا ي : ك و

واد : ك ن متساوية (حد ١ ك ٦) ونسبة اغ : ك ق هي مركبة من نسبة اس : كم
وا ي : ك و ونسبة اس : كم هي مركبة من ا ب : ك ل و ا د : ك ن فنسبة اغ :
ك ق مركبة من النسب الثلاث اي نسبة ا ب : ك ل و ا د : ك ن و ا ي : ك و وقد
تبرهن ان هذه النسب الثلاث متساوية اذا ا ب : ك ل :: اغ : ك ق (حد ٢ ك ٥)
فرع اول . اذا فرض ا ب : ك ل :: م : ن وك ل : م :: م : ن فتكون نسبة
ا ب : ن :: اغ : ك ق . لان ا ب : ن = ا ب : ك ل (حد ١ ك ٥) اي اغ : ك ق
فرع ثان . لكون الاجسام المكعبة متشابهة يكون المكعب على ا ب : المكعب على
ك ل :: اغ : ا ق فنسبة اجسام متوازية السطوح بعضها الى بعض كنسبة كهوب
اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

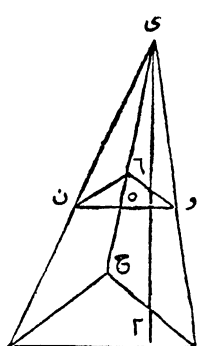
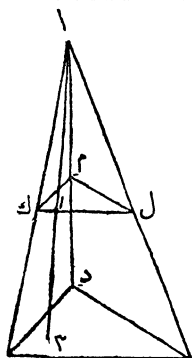
فرع ثالث . وهكذا يبرهن ايضا ان الموشورات المتشابهة هي ككهوب اضلاعها
المتشابهة

—oX—

الفضية الثانية عشرة . ن

هرمان مثلثا الاضلاع على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد اذا
قُطع كل واحد منها بسطح يوازي قاعدته وعلى بعد واحد من
القاعدتين يكون موضعا التقاطع متساويين

ليكن ا ب م د ي ف غ ح هرمين مثلثي الاضلاع على قاعدتين متساويتين
د ب س ح ف غ وعلى علو واحد اي العمود ٢ ا والعمود ٢ م ا وى على
القاعدتين ولينقطع احدهما بالسطح ك ل م والآخر بالسطح ن و على بعد واحد من



الفاعدتين اي طول العمودين
٢١ و ٢٢. فوضعا التقاطع
اي المثلثان ك ل م ن و
متساويان

السطحان ب د س
ك م متوازيان وبلاقيهما
السطح ا ب د فالخطان

ب د ك م متوازيان (ق ١٤ غ

ك ٢٣) وهكذا يبرهن ان د س وم ل متوازيان وب د س بوازيان ك م ل
وليست في سطح واحد فالزاوية ب د س تعدل الزاوية ك م ل (ق ٩ ك ٢٣) وعلى
هذا الاسلوب يبرهن ان بقية زوايا المثلثين متساوية كل واحدة نظيرها فالمثلثان
متشابهان وهكذا ايضا في المثلثين ف غ ح ن و ٦ فها متشابهان لان الخطين المستقيمين
٢ ١ ١ اك ب بلاقيان السطحين المتوازيين ك م ل ب د س فيقطعهما على نسبة
واحدة (ق ١٦ ك ٢٣) ونسبة ١ ٢ : ١ ١ :: ب ك : ك ا و ١ ٢ : ١ ١ :: ا ب : ا ك
(ق ١٨ ك ٥) وهكذا ايضا ي ٢ : ٥ ي :: ٥ ي : ف ي :: ٥ ي : ن فتكون نسبة ا ب : ا ك ::
ي ف : ي ن لان ٢ ١ = ٥ ي و ١ ٥ = ٥ ي ولان المثلثين ا ب س ا ك ل متشابهان

ا ب : ا ك :: ب س : ك ل وايضا

ي ف : ي ن :: ف غ : ن و فلنا

ب س : ك ل :: ف غ : ن و

واذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة تكون الاشكال المرسومة عليها متناسبة ايضا
(ق ٢٢ ك ٦) فالمثلث ب س د : المثلث ك ل م :: المثلث ف غ ح : المثلث ن و ٦.
ولكن قد فرض ان ب س د ف غ ح متساويان فاذا ك ل م ن و ٦ متساويان
ايضا (ق ١ ك ٥)

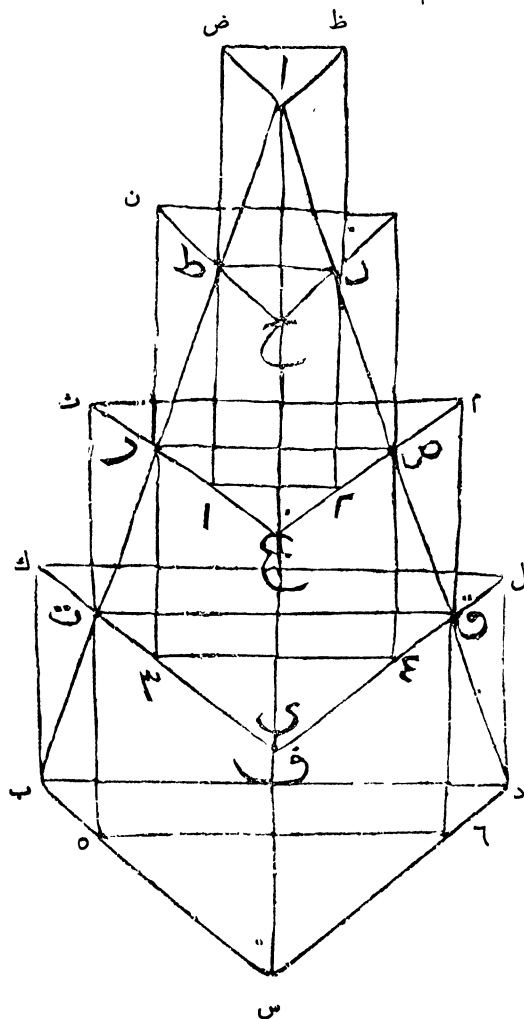
فرع اول. كل موضع يقطع فيه هرم مثلث الاضلاع على موازاة قاعدته هو
مثلث يشبه قاعدة الهرم وهكذا يبرهن ان الشكل الحادث من قطع كل هرم على
موازاة قاعدته هو شكل شبيه بقاعدة الهرم

فرع ثان. اهرام كثيرة الاضلاع وهي على علو واحد وعلى قواعد متساوية تكون

الاشكال الحادثة من قطعها على بعد واحد من القواعد متساوية

القضية الثالثة عشرة . ن

يمكن ان تُرسم عدة مواشير على علو واحدٍ محيطة بهرم حتى يكون مجنوع المواشير اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من جسم مفروض
ليكن ا ب س د هـ و ا الجسم المفروض فقد يمكن ان يُرسم عدة مواشير محيطة

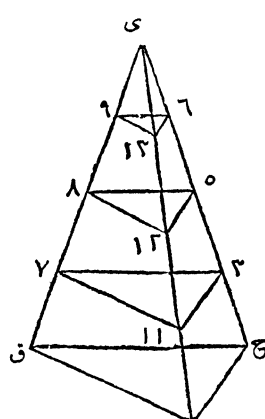
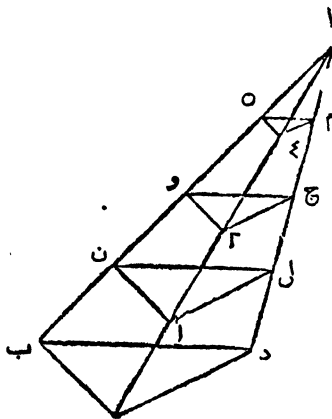


ف ت ق و غ ر ص و ح ط ذ فهي متشابهة بعضها لبعض وللقاعد ب س د (ق ١٢ ك ٢ فرع ١ م) ثم ارسم من ب الخط ب ك حتى يوازي س ف ويلاقي ف ت بعد اخراجه في ك وهكذا د ل حتى يلاقي ف ق في ل وارسم ك ل فيكون ك ب س د ل ف موشوراً (حد ٤ ك ٢ م) وعلى هذا القياس اصنع المواشير ت م ورو و ط ظ . اخرج ث ت الى ه و م ق الى ٦ وارسم الخط ه ٦ فيكون ه س ٦ ق ف ت موشوراً يعدل الموشور ت م (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م) وعلى هذا القياس اصنع المواشير ٢ ص = رو وا ذ = ط ظ فجميع المواشير الداخلية ه ق و ٢ ص وا ذ = جميع ت م ورو و ط ظ اي جميع الخارجية الآ ب ل فيكون ب ل فضلة المواشير الداخلية والخارجية وب ل انما هو اصغر من الموشور على القاعدة ب س د وعلى علو س ي الذي يعدل الجسم المفروض ز . فضلة المواشير الخارجية والداخلية هي اصغر من الجسم المفروض ز وهذه الفضلة انما هي اعظم من فضلة المواشير الخارجية والهرم اب س د لأن الهرم اعظم من جميع المواشير الداخلية فبالاخرى تكون فضلة المواشير الخارجية والهرم اصغر من الجسم المفروض ز

القضية الرابعة عشر . ن

اهرام على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي متساوية

ليكن اب س د ي ق غ ح هـ م ب ت على قاعدتين متساويتين ب س د



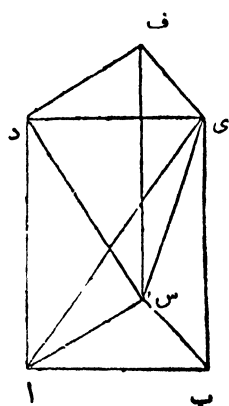
ق غ ح وعلى
علو واحد
اي العمود
من الرأسين
اوى على
القاعدتين
فالهرمان
متساويان
والأ

فليكن ي ق غ ح اعظم من آ ب س د بمقدار جسم ز . فيمكن ان تُرسم عدة مواشير

على علو واحدٍ محيطه بالهرم اب س د حتى يكون مجتمعا اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من ز (ق ١٢ ك ٢ م) ولتكن قواعد هذه المواشير المثلثات ب س د ا ب ل ا وج ٥٤ م. اقسام ي ح الى اقسام متساوية تماثل اقسام اد وهي ٦ ٦ ٥ ٦ ٢ ٢ ح ولتبر هذه النقط سطوح نوازي القاعدة ق غ ح وهي ٢ ١١ ٧ ١٢ ٥ ٨ ٦ ١٢ ٩ فالقطع ن ا ل يعدل القطع ٢ ١١ ٧ (ق ١٢ ك ٢ م) وو ج = ٨ ١٢ ٥ ٨ م ٤ = ٦ ١٢ ٩ والمواشير المبنية على هذه الاقطاع المتساوية هي متساوية (فرع اول ق ٨ ك ٢ م) اي الموشور على القاعدة ب س د وبين السطحين ب س د ن ا ل يعدل الموشور على القاعدة ق غ ح وبين السطحين ق غ ح ٢ ١١ ٧ وهكذا في البنية لهما على علو واحد. فجميع المواشير المحيطة بالهرم اب س د يعدل مجتمع المواشير المحيطة بالهرم ي ق غ ح وفضلة اب س د والمواشير المحيطة به هي اقل من ز. فتكون فضلة هذه المواشير والهرم ي ق غ ح اقل من ز. وقد فرض ان فضلة الهرمين تعدل ز. فالهرم ي ق غ ح هو اعظم من الهرم اب س د بمقدار اعظم من فضلة المواشير المحيطة بالهرم ي ق غ ح والهرم اب س د. فالهرم ي ق غ ح اعظم من مجتمع المواشير المحيطة به وذاك غير ممكن. فلا يكون الهرمان غير متساويين اي هما متساويان

القضية الخامسة عشرة . ن

كل منشور مثلث القاعدة ينقسم الى ثلاثة اهرام متساوية مثلثة القاعدة
لفرض منشوراً قاعدته المثلث ا ب س وليكن د ي ف المثلث المقابل القاعدة



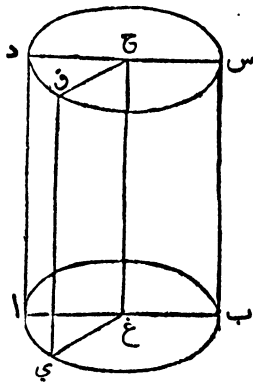
فالמושور اب س د ي ف قابل الانقسام الى ثلاثة
اهرام متساوية مثلثة القواعد. ارم ا ي وس د وس ي
فيكون اب ي متوازي الاضلاع وقطره ا ي فالمثلث
ا د ي = اب ي (ق ٤٤ ك ١) فالهرم الذي قاعدته
ا د ي يعدل الذي قاعدته ي ب ا ورأسها ب في س
(ق ١٤ ك ٢ م) والهرم اب س ي = د ي ف س
(ق ١٤ ك ٢ م) فالاهرام الثلاثة ا د ي س اب ي س
د ف ي س هي متساوية ومجتمعا هو الموشور المنقوش

فرع أول. كل هرم هوئلك موشور على قاعدة تعدل قاعدته وعلى علو يعدل علوه لانه وإن كانت قاعدته غير مثلثة يمكنها ان تُقسم الى مواشير لها قواعد مثلثة فرع ثان. نسبة اهرام على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض (ق ٨ ك ٢ فرع ا م)

الفضية السادسة عشرة. ن

اذا فرضت نقطة في محيط قاعدة اسطوانة ورسم منها خط مستقيم عموداً على سطح القاعدة يكون الخط كله في سطح الاسطوانة

لكن ا ب س د اسطوانة محيط قاعدتها ا ب و لكن د ق س الدائرة التي



تقابل القاعدة وليكن غ ح محورها. وتُفرض في محيط القاعدة النقطة س ويرسم منها الخط المستقيم ق عموداً على سطح الدائرة ا ب. فالخط ق كله في سطح الاسطوانة، ليلاقى الخط ق السطح المقابل بقاعدة د ق س في النقطة ق. ا رسم س غ وق ح. وليكن اغ ح د الشكل القائم الزوايا الذي بدورانه رُسِمَت الاسطوانة (حد ١٤ ك ٢ م)

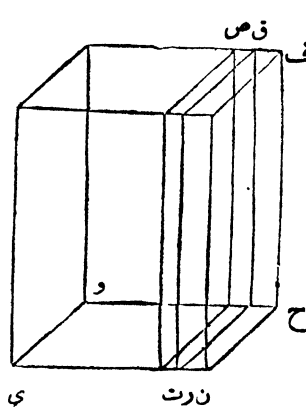
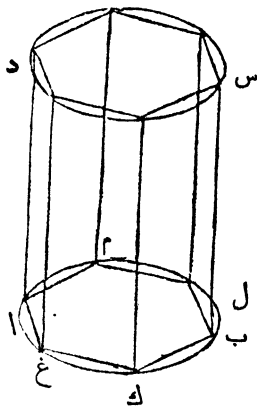
لكون الخط غ ح عموداً على ا غ الذي

بدورانه رُسِمَت الدائرة ا ب فهو عمود على جميع الخطوط المستقيمة في سطح تلك الدائرة التي تلاقيه في غ. فهو عمود على سطح الدائرة ا ب. والخط ق هو عمود على ذلك السطح فالخط ق ق يوازي غ ح (ق ٦ ك ٢ م) وهما في سطح واحد والسطح المار بالخطين ق غ ح يقطع السطحين المتوازيين د ق س ا ب في الخطين المستقيمين ق غ ح فهما متوازيان (ق ١٤ ك ٢ م) فالشكل ق ح غ متوازي الاضلاع والزاوية ق غ ح منه قائمة فالشكل قائم الزوايا ويعدل القائم الزوايا ا ح لان ق غ = اغ. فاذا دار الشكل ا ح حتى يوافق الخط اغ الخط ق غ فالشكلان ح ي ح يتوافقان والخط ا د يوافق الخط ق ولكن ا د هو في سطح الاسطوانة فيكون ق ي ايضا في سطح الاسطوانة

القضية السابعة عشرة. ن

اسطوانة وجسم متوازي السطوح على قاعدتين متساويتين وعلى علوٍ واحدٍهما متساويان

لكن اب س د اسطوانة وليكن ي ف جسمًا متوازي السطوح والقاعدة اغ ب



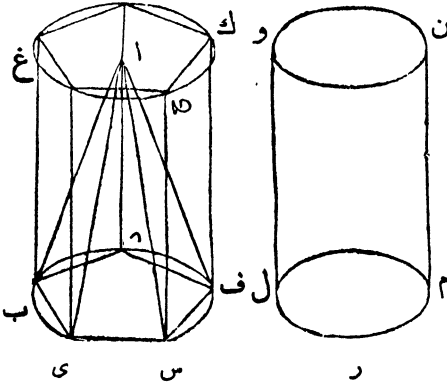
فلتعديل القاعدة
ي ح وليكن علو
الجسمين واحدًا
فلا اسطوانة
ا ب س د
تعديل الجسم
ي ف
والا فلنكن

الاسطوانة اصغر من الجسم ي ف . وليفصل من ي ف جزء ي ق يعدل الاسطوانة
ا ب س د . وذلك بواسطة سطح ت ق الذي يوازي ن ف ثم ارسم في دائرة اغ ب
شكلًا كثير الاضلاع اغ ك ب ل م ويكون الفرق بينه وبين الدائرة اقل من الشكل
ت ح (ق ك ا فرع ا م) وافصل من ي ح جزءًا و ر = اغ ك ب ل م . فتقع
النقطة ر بين ت و ن ثم ارسم على اغ ك ب ل موشورًا اغ ب س د على علو
الاسطوانة فيكون اصغر منها (ق ١٦ ك ٢ م) ثم ليبر السطح ر ص في النقطة ر وليوازي
ن ف فيقطع من ي ف الجسم ي ص = الموشور اغ ب س د (ق ١٦ ك ٢ م فرع ٢ م)
لانها متساويان في القاعدة والعلو والموشور هو اصغر من الاسطوانة وفرض ان
الاسطوانة = ي ق اذا ي ص هو اصغر من ي ق وذاك محال فلا يمكن ان تكون
الاسطوانة اصغر من ي ف . وعلى هذا الاسلوب يبرهن انها ليست اكبر من ي ف

الفضية الثامنة عشرة . ن

إذا كانت اسطوانة ومخروط على قاعدة واحدة وعلى علو واحد
فالمخروط ثلث الاسطوانة

ليكن المخروط ا ب س د والاسطوانة ب ف ك غ على قاعدة واحدة هي الدائرة



ب س د وعلى علو واحد
هو العمود من ا على سطح
القاعدة ب س د فالمخروط
ا ب س د انما هو ثلث
الاسطوانة ب ف ك غ

والا فليكن المخروط
ا ب س د ثلث اسطوانة
اخرى ل م ن و علوها مثل

علو الاسطوانة ب ف ك غ ولكن القاعدة ل م ليست مثل القاعدة ب س ف
ولا لئلا تكون ب س د اكبر من ل م

ثم لان الدائرة ب س د اكبر من الدائرة ل م فيمكن ان يرسم في ب س د
شكل كثير الاضلاع فضلتهما اصغر من فضلة ب س د ول رم (ق ك م)
ليكن ب ي س ف د ذلك الشكل وليبين عليه الهرم ا ب ي س ف د والموشور
ب س ف ك ح غ

فلكون الشكل الكثير الاضلاع ب ي س ف د اعظم من الدائرة ل م يكون
الموشور ب س ف ك ح غ اعظم من الاسطوانة ل م ن و لان لها علوا واحدا ولكن
قاعدة الموشور اكبر من قاعدة الاسطوانة. ولكن الهرم ا ب ي س ف د هو ثلث الموشور
ب س ف ك ح غ (ق ك م) فهو اعظم من ثلث الاسطوانة ل م ن و . وقد
فرض ان المخروط ا ب س د هو ثلث الاسطوانة ل م ن و . فالهرم ا ب س ف د
اعظم من المخروط ا ب س د وهو ايضا اصغر منه وذاك محال فالمخروط ا ب س د
ليس اقل من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ . وعلى هذا الاسلوب اذا رُسِم شكل كثير

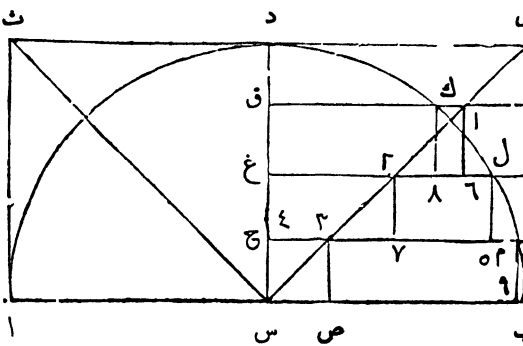
الاضلاع محيط بالدائرة ب س د يبرهن ان المخروط ا ب س د ليس اعظم من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ فالمخروط ثلث الاسطوانة

— ١٠٠٤ —

القضية التاسعة عشرة . ن

اذا كان نصف كرة ومخروط على قاعدتين متساويتين وعلى علي واحد فيمكن ان ترسم في نصف الكرة عدة اساطين وعدة اخرى محيطة بالمخروط كلها على علو واحد وفضلة مجتمعا ومجتمع نصف الكرة والمخروط يعدل جسما اصغر من جسم مفروض

لكن ا د ب نصف دائرة مركزها س . ويرسم س د عمودا على ا ب وليكن



د ب و د ا مربعين ي

على د س . ا رسم

س ي . وليدس

الشكل كله على و

د س . فالقطاع ت

ب س د الذي

هو نصف نصف ب

الدائرة ا د ب يرسم نصف كرة مركزها س (حد ٧ ك ٢ م) والمثلث س د ي يرسم مخروطاً راسه س وقاعدته الدائرة المرسومة بالخط د ي (حد ١١ ك ٢ م) التي تعدل المرسومة بالخط ب س الذي هو قاعدة نصف الكرة وليكن ع جسماً ما . فيمكن ان ترسم عدة اساطين في نصف الكرة ا د ب وعدة اخرى تحيط بالمخروط ي س ت وتكون فضلة مجتمعا ومجتمع المخروط ونصف الكرة اصغر من ع الجسم المفروض ارم على قاعدة نصف الكرة اسطوانة = ع وليكن علوها س ٤ واقسم س د الى اقسام متساوية كل واحد اصغر من س ٤ وليكن س ح و ح غ و غ ق وق د . ثم ارم ق ن و غ و ح ت حتى توازي س ب وتلاقي محيط الدائرة في ك ول وم وتلاقي الخط س ي في النقط ١ ٢ ٣ وارسم ك ٨ ول ٥ وم ٩ عمودية على

غ و ح ت و س ب وايضاً ص ٢ و ٧ و ٦ عمودية على الخطوط المذكورة
 فبعد اتمام هذا الرسم ان دار الجميع حول س د فالاشكلال المتوازية الاضلاع والقائمة
 الزوايا ق ٨ و غ ٥ و ح ٩ تحدث بدورانها اساطين (حد ١٤ ك ٢ م) في نصف
 الكرة ب د ا و الاشكال د ن ق ٦ غ ٧ ح ص تحدث اساطين محيطة بالمخروط
 ث س ي. فيمكن ان يبرهن كما في المواشير المرسومة في هرم (ق ١٢ ك ٢ م) ان مجموع
 كل الاساطين في نصف الكرة هو اقل من نصف الكرة بمقدار جسم اصغر من
 الاسطوانة الحادثة من دوران ح ب اي اصغر من ع لان ح ب قد قُرض اصغر من
 ع. وهكذا يبرهن ايضاً ان مجموع الاساطين المحيطة بالمخروط ث س ي هو اكبر من
 المخروط بمقدار جسم اصغر من الاسطوانة الحادثة من دوران د ن اي مجسم اصغر
 من ع. فلكون مجموع الاساطين المرسومة في نصف الكرة مع جسم اصغر من ع يعدل
 نصف الكرة ولكون مجموع الاساطين المحيطة بالمخروط يعدل المخروط مع جسم اصغر
 من ع فباضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية مجموع هذه الاساطين مع جسم اصغر
 من ع يعدل مجموع نصف الكرة والمخروط مع جسم اصغر من ع. فضلة مجموع كل
 الاساطين ومجموع نصف الكرة والمخروط يعدل فضلة جسمين كل واحد منها اصغر
 من ع فلا بد ان تكون هذه الفضلة ايضاً اصغر من ع



القضية العشرون . ن

اذا قُرض ما قُرض في القضية السابقة فمجموع الاساطين في نصف
 الكرة والمحيط بالمخروط يعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو
 نصف الكرة وقاعدته

ليتم الرسم كما في القضية السابقة فمجموع الاساطين الحادثة من دوران اشكال
 ح ٩ غ ٥ ق ٨ اي الواقعة في نصف الكرة مع الحادثة من دوران الاشكال
 ح ص غ ٧ ق ٦ و د ن اي المحيطة بالمخروط يعدل الاسطوانة الحادثة من دوران
 الشكل ب د. لتكن ل نقطة التقاء غ و محيط الدائرة فلان س غ ل قائمة فان
 أوصل بين س ول فالدائرتان المرسومتان علي نصف القطر س غ و غ ل تعدلان
 الدائرة المرسومة على نصف القطر س ل او غ و (ق ٦ ك ١ فرع ٢ م) وس غ =

غ ٢ لان س د = دى فالدايرتان المرسومتان على نصف القطر غ ٢ وغ ل معاً
تعدلان الدائرة المرسومة على نصف القطر غ و اى الدائرتان المرسومتان بدوران
غ ٢ غ ل على نقطة غ ها معاً تعدلان الدائرة المرسومة بدوران غ و على تلك
النقطة . فالاسطوانتان الواقعتان على الدائرتين المذكورتين اذ كان لهما علو واحد
غ ح تعدلان القائمة على الدائرة الاخرى التي لها ايضاً علو غ ح . فالاساطين المحاذية
من دوران غ ٥ وغ ٧ تعدل المحاذية من دوران غ ت وهكذا يبرهن في الجميع
فالاساطين المحاذية من دوران ح ٩ غ ٥ ق ٨ وح ص غ ٧ ق ٦ ود ن تعدل
المحاذية من دوران ب د اى تعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو نصف الكرة
وقاعدته



القضية الحادية والعشرون . ن

الكرة هي ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

ليرسم كما في القضية السابقة . فان لم يكن نصف الكرة الحادث من دوران
ب د س ثلثي الاسطوانة المحاذية من دوران ب د فلنفرضه اكبر من ذلك بمقدار
جسم ع . ثم لان المخروط الحادث من دوران س دى هو ثلث الاسطوانة المشار اليها
(ق ١٨ ك ٢) فيكون نصف الكرة والمخروط معاً اكبر من الاسطوانة بمقدار جسم
ع . ولكن هذه الاسطوانة تعدل مجموع الاساطين المحاذية من دوران الاشكال ح ص
غ ٥ الخ (ق ٢٠ ك ٢) فمجموع نصف الكرة والمخروط هو اكبر من مجموع هذه
الاساطين بمقدار جسم ع وذلك محال لانه قد تبرهن (ق ١٩ ك ٢م) ان فضلة مجموع
نصف الكرة والمخروط ومجموع الاساطين يعدل جسماً اصغر من ع فنصف الكرة
يعدل ثلثي الاسطوانة المحاذية من دوران ب د فكل الكرة ثلثا الاسطوانة المحاذية
من مضاعف ب د اى ثلثا الاسطوانة المحيطة بها



اصول قياس المثلثات البسيطة

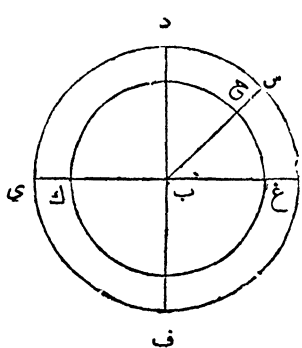
اصول قياس المثلثات البسيطة تنقسم الى ثلاثة اقسام . القسم الاول ابضاج المبادئ . الثاني قواعد العمل . والثالث كيفية اصطناع الجداول مع بعض النظريات المسهلة لبعض العمليات العسرة

القسم الاول

سابقة اولى

نسبة زاوية في مركز دائرة الى اربع زوايا قائمة كنسبة القوس الذي يقابلها الى محيط الدائرة

لتكن ا ب س زاوية عند مركز الدائرة ا س ي ف واس القوس المقابل لها .



فنسبة ا ب س : اربع زوايا قائمة :: ا س : محيط

الدائرة ا س ي ف . اخرج ا ب حتى يلاقي

المحيط في ي وارسم د ب ف عموداً على ا .

فالزاويتان ا ب س ا ب د هـا عند مركز

دائرة واحدة ونسبة ا ب س : ا ب د :: القوس

ا س : القوس ا د (ق ٢٢ ك ٦) ونسبة الزاوية

ا ب س : اربعة امثال ا ب د :: ا س : اربعة

امثال ا د (ق ٤ ك هـ) و ا ب د قائمة . فاربعة امثال ا د يعدل كل المحيط ا س ي ف

فنسبة ا ب س : اربع زوايا قائمة :: القوس ا س : المحيط ا د ي ف
 فرع . الزوايا المتساوية عند مراكز دوائر مختلفة بين اقواسها ذات النسبة التي
 بين محيطات الدوائر . الزاوية ا ب س عند مركز الدائرتين ا د ف غ ح ك ويقابلها
 القوس ا س من الواحدة والقوس غ ح من الاخرى ونسبة ا س الى محيط الدائرة
 ا د ف كسبة ا ب س الى اربع زوايا قائمة ونسبة غ ح الى محيط الدائرة غ ح ك
 كسبة ا ب س الى اربع زوايا قائمة

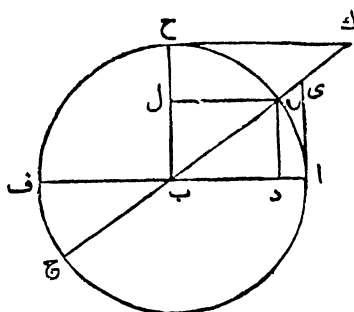


حدود

١ اذا تقاطع خطان مستقيمان في مركز دائرة فالقوس الواقع بينهما هو قياس
 الزاوية الحادثة بينهما . فالقوس ا س هو قياس الزاوية ا ب س
 ٢ اذا انقسم محيط دائرة الى ٣٦٠ قسمًا متساويًا فكل قسم يُسمى درجة اذا
 انقسمت الدرجة الى ستين قسمًا متساويًا فكل قسم يُسمى دقيقة والدقيقة تقسم الى
 ستين قسمًا متساويًا تسمى ثواني والثانية الى ستين قسمًا متساويًا تسمى ثوانك وهكذا الى
 ما لا نهاية له . والدرجات والدقائق والثواني الى آخره في قوس هي نفس الدرجات
 والدقائق والثواني في الزاوية التي يقيسها ذلك القوس
 فرع أول . نسبة قوس الى المحيط الذي هو قسم منه كسبة درجانه واجزاء
 درجانه الى ٣٦٠ ونسبة زاوية الى اربع زوايا قائمة كسبة درجات قوسها واجزاء
 درجانه الى ٣٦٠
 فرع ثان . الاقواس التي تقيس زاوية واحدة هي متماثلة في عدة درجاتها واجزاء
 درجاتها

الدرجات والدقائق والثواني الخ في قوس او زاوية تكتب هكذا ٤٩ ٣٦
 ٤٢ ٤٣ الخ ونقرأ ٤٩ درجة ٣٦ دقيقة و٤٢ ثانية و٤٣ ثالثة الخ
 ٣ اذا عدلت زاويتان معًا فائتين فكل واحدة تسمى مئة الاخرى وهكذا في
 قوسين عدلا معًا نصف دائرة فكل واحد منهما مئة الآخر

٤ الخط المستقيم المرسوم من طرف قوس مثل المحيط ن د عمودًا على القطر
 المار بالطرف الآخر من القوس هو جيب القوس ان او جيب الزاوية ا ب ن التي



كان القوس ان قياسها

فرع أول . جيب ربع دائرة او قائمة
يعدل نصف القطر

فرع ثان . جيب قوس هو نصف
وتر مضاعف القوس كما يتضح من اخراج
الجيب حتى يلاقي المحيط

٥ القسم من القطر الواقع بين الجيب والمحيط مثل د ا يسمى سهم الجيب
للقوس ان او للزاوية ا ب ن

٦ الخط المستقيم الذي يمس طرف قوس مثل الخط ي ا الذي يمس طرف
القوس ن ا ويلاقي القطر المار بطرفه الاخر مثل ب ي يسمى ماس القوس ان او
الزاوية ا ب ن

فرع ث . ماس نصف قائمة يعدل نصف القطر

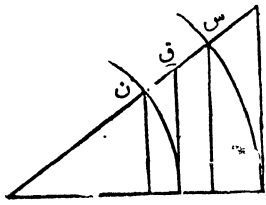
٧ الخط المستقيم ب ي بين المركز وطرف الماس يسمى قاطع القوس ن ا او
الزاوية ا ب ن

فرع ثلث للحد الرابع والسادس والسابع . جيب زاوية ما مثل ا ب ن وماسها
وقاطعها هو ايضا جيب وماس وقاطع لمتماثل ب ف

الامر واضح من الحد الرابع ان د هو جيب الزاوية ن ب ف . اخراج ن ب
حتى يلاقي المحيط في ج . فيتضح ان ي ا هو ماس وب ي قاطع للزاوية ا ب ج او
ن ب ف (حد ٦ و ٧)

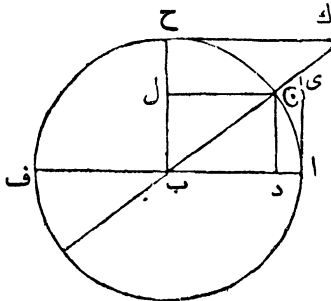
فرع ثلث للحد الرابع والخامس والسادس والسابع . نسبة جيب قوس ما وسهم جيبه
وماسه وقاطعه التي تنبئ زاوية ما الى جيب قوس آخر وسهم جيبه وماسه وقاطعه
التي تنبئ تلك الزاوية ذاتها كنسبة نصف قطر القوس الاول الى نصف قطر
القوس الثاني .

ليكن ث من قياسين للزاوية ا ب س حسب الحد الاول وليكن س د
الجيب ود ا سهم الجيب وي الماس وب ي القاطع للقوس ا س (حد ٤ و ٦ و ٧)
وليكن ر الجيب و ر م سهم الجيب و م ق الماس وب ق القاطع للقوس م ن فليكون
ن ر ق م س د ي متوازية تكون نسبة س د : ن ر : نصف القطر س ب :



نصف القطر ن ب ونسبة ا ي : م ق :: نصف
 القطر ا ب : نصف القطر م ب وب ي : ب ق
 :: ا ب : م ب ولأن ب س : ب د :: ب ن : ب ر
 ا و ب ا : ب د :: ب م : ب ر فبالقلب والمبادلة
 ا د : م ر :: ا ب : ب م . فالفرع واضح . وإذا
 اصطبعت جداول دالة على نسبة الجيب وسهم الجيب والمماس والقاطع لزاوية ما الى
 نصف قطر مفروض فهي تدل ايضا على نسبة هذا الجيب وسهمه الى آخره من تلك
 الزاوية الى اي نصف قطر فرض . وقد جرت العادة في تلك الجداول ان يحسب
 نصف القطر واحداً او حلقة من السلسلة ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ الى آخره وسياتي
 ايضا ذلك في موضعه

٨ فضلة زاوية ما وزاوية قائمة نسي كما لها فضلة قوس ما ورعي دائرة يسي
 كماله . فاذا كان ب ح عموداً على ا ب تكون ك
 الزاوية ح ب ن كمال الزاوية ا ب ن
 والقوس ح ن كمال القوس ن ا والزاوية
 ح ب ن كمال الزاوية المنفرجة ف ب ن
 والقوس ح ن كمال القوس ف ح ن



٩ نظير الجيب ونظير المماس ونظير
 القاطع لزاوية هي الجيب والمماس والقاطع لكال تلك الزاوية . فاذا كان ن د جيب
 الزاوية ا ب ن وى ا ماسها وب ي قاطعها يكون ن ل نظير الجيب وك ح نظير
 المماس وب ك نظير القاطع لها

فرع أول . نصف القطر هو متناسب متوسط بين المماس ونظير المماس لزاوية
 ما فماس ا ب ن $\times$ نظير ماس ا ب ن = مربع نصف القطر
 لأن ح ك وب ا متوازيان فالزاويتان ح ك ب ا ب ن متساويتان وك ح ب
 وب ا ي قائمتان فالمثلثان ب ا ي ب ح ك متشابهان وا ي : ا ب :: ب ح او
 ا ب : ح ك

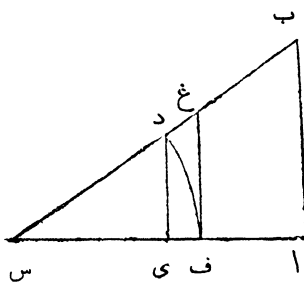
فرع ثان . نصف القطر متناسب متوسط بين نظير الجيب والقاطع لزاوية
 ما اي نظير جيب ا ب ن $\times$ قاطع ا ب ن = مربع نصف القطر

لان د يوازي افسية ب د : ب ن او ب ا : ب ا : ب ي
تنبيه . لاجل الاختصار يدل على نصف القطر هكذا $\frac{ق}{٢}$ وعلى
الجيب هكذا ج وعلى المماس هكذا م وعلى القاطع هكذا ق ا وعلى سهم
الجيب هكذا س ج وعلى نظير الجيب والمماس والقاطع هكذا ن ج ن م نقا

القضية الاولى . ن .

في مثلث بسيط قائم الزاوية تكون نسبة الوتر الى احد الضلعين
كـ نصف القطر الى جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع . ونسبة ضلع
الى الضلع الآخر كنسبة نصف القطر الى مماس الزاوية المقابلة ذلك
الضلع

ليكن ا ب س مثلثاً بسيطاً قائم الزاوية وب س وتره . اجعل س مركزاً و س د
مثلاً نصف قطري وارسم القوس د ي . ارسم
د ف عموداً على س ي ومن ي ارسم المماس
ي غ الذي يلاقي س ب في غ فيكون د ف
جيباً و غ ي مماساً للقوس د ي والزاوية
عند س



المثلثان د ف س ب ا س متساويا
الزوايا لان د ف س وب ا س قائمتان والزاوية عند س مشتركة بين المثلثين .
فنسبة س ب : ب ا : س د : د ف و س د هو نصف القطر و د ف جيب الزاوية
عند س (حد ٤) فنسبة س ب : ب ا : $\frac{ق}{٢}$: ج س

ولأن ي غ يمس الدائرة في ي فالزاوية غ ي س قائمة وتعديل ب ا س والزاوية
عند س مشتركة بين المثلثين غ ي س ب ا س فهما متساويا الزوايا ونسبة س ا :
ا ب : س ي : ي غ و س ي نصف قطري و غ مماس الزاوية عند س فنسبة

س ا : اب :: ق : مم س

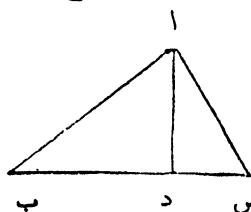
فرع أول . نسبة نصف القطر الى قاطع الزاوية عند س كنسبة الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى الوتر

لان س غ قاطع الزاوية عند س (حد ٧) والمثلثان س غ ي س ب متساويا الزوايا فنسبة س ا : س ب :: س ي : س ع او س ا : س ب :: ق : قاس

فرع ثان . حسب القضية السابقة وفرعها لو فرض نصف القطر واحداً لكان ج س = $\frac{اب}{ب س}$ ومم س = $\frac{ا ب}{ا س}$ وقاس = $\frac{ب س}{ا س}$ ولان ج س = نج ب

(لان الزاوية عند ب كمال الزاوية عند س) فلما نج ب = $\frac{ا ب}{ب س}$ ونج س = $\frac{ا س}{ب س}$

فرع ثالث . في كل مثلث اذا رسم عموداً من احدى زواياه الى الضلع المقابل تكون نسبة احد قسبي ذلك الضلع الى القسم الآخر منه كنسبة مماس احدى الزوايا على جانب العمود الى



مماس الاخرى

في المثلث اب س ليرسم ا د عموداً من ا على س ب فكل من المثلثين ا د ب ا د س ذو قائمة ونسبة ا د : د س :: ق : مم س

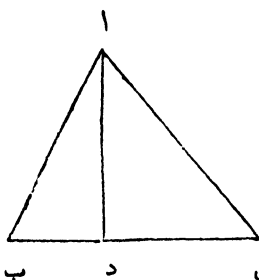
س ا د و ا د : ب د :: ق : مم د ا ب وبالمساواة د س : د ب :: مم س ا د : مم ب ا د تعلية . يسهل علينا حفظ هذه القضية بملاحظة امرين اولهما انه في مثلث ذي

قائمة اذا جعل الوتر نصف قطر يصير كل من الضلعين جيب الزاوية التي تقابله . والثاني انه اذا جعل احد الضلعين نصف قطر يصير الضلع الآخر مماساً للزاوية التي تقابله والوتر قاطعاً لها

القضية الثانية . ن

نسبة اضلاع مثلث بسيط بعضها الى بعض كنسبة جيوب الزوايا التي تقابل تلك الاضلاع بعضها الى بعض

ليكن اب س مثلثاً ومن الزاوية ا رسم اد عموداً على ب س . فالمثلث اب د

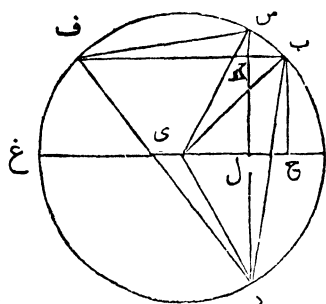


له قائمة عند د ونسبة اب : اد :: ق : ج ب
ولهذا السبب ايضاً اس : اد :: ق : ج س
وبالقلب اد : اس :: ج س : ق وبالقلب
والمساواة اب : اس :: ج س : ج ب . وهكذا
يبرهن ان اب : ب س :: ج س : ج ا

—xox—

القضية الثالثة . ن

اذا فرض قوسان من دائرة تكون نسبة مجنعهما الى فضلة
جيبيهما كنسبة ماس نصف مجنعهما الى ماس نصف فضلتها
ليكن اب واس قوسين من الدائرة اب س د والنقطة ي مركزها و اى غ



قطرها فنسبة جاس + جاب : جاس -
جواب :: مم - 1/2 (اس + اب) : مم - 1/2
(اس - اب) ارم ب ف حتى يوازي اغ ا
وبلاقي المحيط في ف وارسم ب ح و س ل
عمودين على اى . فهما جيبا القوسين اب
واس . اخرج س ل حتى يلاقي المحيط في د
وارسم د ف دى د ب ف س ي ب ي س

لكون ي ل قد رُسم من المركز عموداً على س د فهو ينصف س د في النقطة ل
والقوس س ا د في ا و د ل = ل س الذي هو جيب القوس اس . وب ح اول ك
جيب القوس اب فالخط د ك مجنعهما جيبَي القوسين المفروضين وس ك فضلتها
و د اب مجنعهما القوسين وب س فضلتها . وفي المثلث د ف س لكون ف ك عموداً
على د س تكون نسبة د ك : ك س :: مم د ف ك : مم س ف ك (فرع ثالث ق ا)
ولكن ماس د ف ك = مم 1/2 قوس ب د لان د ف ك نصف دى ب (قى ٢٠ ك ٣)

فقياسها نصف ب د . ولهذا السبب ايضا م س ف ك = م ب س . فنسبة د ك :
ك س :: م ب د : م ب س . ولكن د ك مجموع جيبى القوسين ا ب و اس
وك س فضلتهما . وب د مجموع القوسين ا ب و اس وب س فضلتهما . فنسبة ج ا س
+ ج ا ب : ج ا س - ج ا ب :: م ب (ا س + ا ب) : م ب (ا س - ا ب)

فرع ^١اول . لكون ي ل نظير جيب اس وى ح نظير جيب ا ب يكون
ف ك مجموعهما وك ب فضلتهما . لان ف ك = ب ف + ل = ل ح + ل = ل ح + ل
وك ب = ل ح = ل ح - ل = ل ح - ل ونسبة ف ك : ك ب :: م ف د ك : م ب د ك
وماس د ف ك = م ف د ك لان د ف ك كمال ف د ك فتكون نسبة ف ك :
ك ب :: م ف د ك : م ب د ك اوف ك : ك ب :: م ف القوس د ب : م ب القوس
ب س . اى نسبة مجموع نظير الجيبين للقوسين الى فضلة نظير الجيبين كنسبة نظير
المماس لنصف مجموع القوسين الى مماس نصف فضلتهما

فرع ^٢ثاني . في المثلث القائم الزاوية ف ك د نسبة ف ك : ك د :: ف : م د ف ك
ولكن ف ك = نج ا ب + نج ا س وك د = ج ا ب + ج ا س وم د ف ك =
م ب (ا ب + ا س) فنسبة نج ا ب + نج ا س : ج ا ب + ج ا س :: ف : م ب (ا ب + ا س)

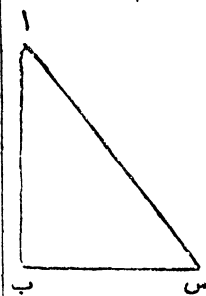
وهكذا بواسطة المثلث ف ك س يبرهن ان نج ا ب + نج ا س : ج ا س -
ج ا ب :: ف : م ب (ا ب - ا س)

فرع ^٣ثالث . اذا كان مجموع القوسين ا ب و ب ٩٠ فماس نصف فضلتهما اى
ماس ٤٥ يماثل نصف القطر . والقوس ب س لكونه فضلة د س ود ب او فضلة
د ب و ٩٠ فنصف القوس ب س يماثل فضلة نصف د س ونصف د ب او فضلة
ا س و ٤٥ . فاذا كان مجموع قوسين ٩٠ تكون نسبة مجموع جيبى القوسين الى
فضلتهما كنسبة نصف القطر الى ماس فضلة احدهما و ٤٥

القضية الرابعة . ن

نسبة مجموع ضلعي مثلث الى فضلتهما كماس نصف مجموع الزاويتين
المقابلتين للضلعين الى ماس نصف فضلتهما

ليكن $اب$ س مثلثا بسيطا فنسبة $س + ا + اب : س - ا - اب :: م : \frac{1}{2}(ب + س)$
 $م : \frac{1}{2}(ب - س)$



لان (ق ٢) $س : ا : اب :: جب : جس$ ولذلك
 (قه كه) $س + ا + اب : س - ا - اب :: جب + جس$
 : $جب - جس$. وحسب القضية السابقة $جب + جس$
 : $جب - جس :: م : \frac{1}{2}(ب + س) : م : \frac{1}{2}(ب - س)$
 فاذا (ق ١ كه) $س + ا + اب : س - ا - اب :: م : \frac{1}{2}(ب + س)$
 $+ س : م : \frac{1}{2}(ب - س)$

القضية الخامسة . ن

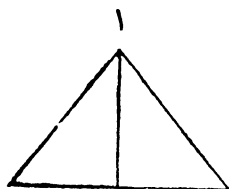
اذا رُسم عمود من زاوية مثلث على القاعدة فنسبة مجموع قسي القاعدة
الى مجموع الضلعين الآخرين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة قسي
القاعدة

لانه حسب (ق ١ كه) القائم الزوايا مسطح مجموع القسمين في فضلتهما يعدل
 القائم الزوايا مسطح مجموع الضلعين في فضلتهما فحسب (ق ١ كه) نسبة مجموع
 القسمين الى مجموع الضلعين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة القسمين

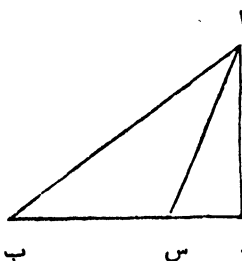
القضية السادسة . ن

في كل مثلث نسبة مضاعف القائم الزوايا مسطح ضلعين من اضلاعه
الى فضلة مجتمع مربعيهما ومربع القاعدة كنسبة نصف القطر الى نظير
جيب الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن $اب س$ مثلثاً فنسبة القائم الزوايا $١٢ اب س \times$ $س : (ا ب^٢ + ب س^٢) -$
 $اس : ق : نج ب$



من الرسم اد عموداً على $ب س$. فضلة المربعين
 على $اب وب س$ والمربع على $اس$ يعدل $٢ ب س \times$
 $ب د (ق ١٢ و ١٢ ك ٢)$ ولكن $ب س \times ب ا : س$
 $ب س \times ب د : ب ا : ب د : ق : نج ب$. فاذاً $٢ ب س \times ب ا : س$
 $٢ ب س \times ب د : ب د : ق : نج ب$ و $٢ ب س \times ب د$ هو فضلة $اب^٢ + ب س^٢$
 و $اس$ فاذاً $١٢ اب س \times ب س : (اب^٢ + ب س^٢) - اس : ق : نج ب$



فرع . اذا فرض $\frac{ق}{٢} = ا فلنا ب د =$
 $ب ا \times نج ب (ق ١) و ٢ ب س \times ب ا \times نج ب$
 $ب = ٢ ب س \times ب د$ فاذا كانت $ب$ حادة لنا
 $٢ ب س \times ب ا \times نج ب = ب س^٢ + ب ا^٢ -$
 $اس$ واذا اضيف $اس$ الى الجانبين نصير $اس + د س$
 $٢ نج ب \times ب س \times ب ا = ب س^٢ + ب ا^٢$ وبطرح $٢ نج ب \times ب س \times ب ا$ من
 الجانبين نصير $اس = ب س^٢ - ٢ نج ب \times ب س \times ب ا + ب ا^٢$ فاذا $اس =$
 $٦ (ب س^٢ - ٢ نج ب \times ب س \times ب ا + ب ا^٢)$
 واذا كانت $ب$ منفرجة يبرهن على هذا الاسلوب ان $اس = ٦ (ب س^٢ + ٢ نج ب$
 $ب \times ب س \times ب ا + ب ا^٢)$

القضية السابعة . ن

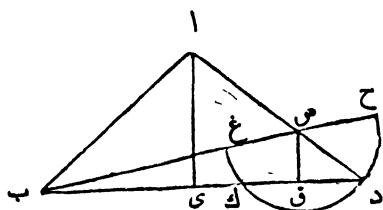
نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا
 مسطح الضلع الآخر مع فضلة الضلعين في ذلك الضلع الأفضلة
 الضلعين كنسبة مربع نصف القطر الى مربع جيب نصف الزاوية
 الواقعة بين الضلعين

لیکن اب س مثلثاً فاعدتہ ب س و اب اطول ضلعیہ فنسبہ ۴ اب ۱۰ س :

$$X((\text{ب س} + \text{ا ب} - \text{ا س}))$$

(بپس - (اب - اس) ::

ق ۲: (جواب اس) ۲



أخرج أس إلى د حتى أن $اد = اب$. أرسم $د$ وأرسم $ا$ و $س$ في عمودين على $ب د$. واجعل $س$ مركزاً و $د$ نصف قطر وأرسم نصف الدائرة $غ د ح$ الذي يقطع $ب د$ في $ك$ و $ب س$ في $غ$ و $بلا$ في $ب س$ بعد إخراج $ه$ في $ح$

الامر واضح ان س د هو فضلة الضلعين وب ح هو القاعدة مع فضلة الضلعين
وب غ القاعدة الا فضلة الضلعين . ولكون المثلث ب ا د متساوي الساقين يكون
د ي نصف ب د و د ق نصف د ك و د ي - د ق = نصف ب د - د ك (ق ٦ ك ه)
او ي ق = $\frac{1}{2}$ ب ك . ولكون ا ي موازي س ق تكون نسبة ا س : ا د :: ي ق : ي د
(ق ٢ ك ه) والاشكال القائمة الزوايا اذا كانت على علو واحد هي كنسبة قواعدھا
بعضھا الى بعض فنسبة ا س X ا د : ا د :: ي ق X ي د : ي د (ق ١ ك ه)
و ا س X ا د : ا د :: ي ق X ي د : ي د وبالمبادلة ا س X ا د : ي ق X ي د :: ي د : ي د

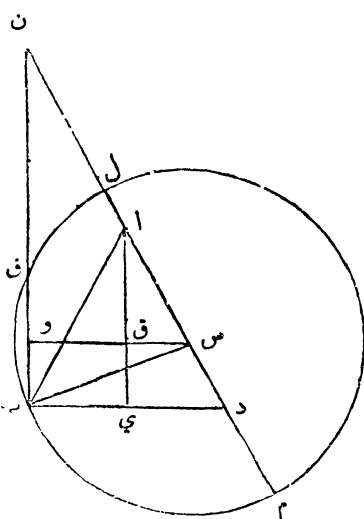
ولكون ٤ ق = ٢ ب ك و ٤ ق = ٢ ب ك و ٤ ق = ٢ ب ك
ب ك = د ب × ب ك = ح ب × ب غ فنسبة ٤ اس × اد : دب × بك ::
اد : د . ولكن اد : دي :: ٣ : ٢ : جى اس = جا ب اس (ق ا)
واد : دى د :: ٣ : ١ : (جا ب اس) فاذا (ق ا ١ ٥) ٤ اس × اد :
ح ب × ب غ :: ٣ : ١ : (جا ب اس) او (لان اب = اد) ٤ اس ×
اب : ح ب × ب غ :: ٣ : ١ : (جا ب اس) و ٤ اس × اب هو اربعة
امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي المثلث وح ب × ب غ هو القائم الزوايا ب س +
(اب - اس) × ب س - (اب - اس)

فرع. اذا ۱۲ اس ۱۰ د ۱۰ ح ب X غ : ق ج ا ب اس

الفضية الثامنة . ن

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا مسطح مجتمع الضلعين مع القاعدة في مجتمع الضلعين الا القاعدة كنسبة مربع نصف القطر الى مربع نظير جيب نصف الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن ا ب س مثلثاً قاعدته ب س و ا ب اطول الضلعين الآخرين فنسبة



$$٤ ا ب \times ا س : (ا ب + ا س) +$$

$$ب س (ب س) \times (ا ب + ا س - ب س ::$$

$$ق ا : (ب \times ا ب ا س)$$

اجعل س مركزاً و س ب نصف

قطر وارسم الدائرة ب ل م محيطها

بلاقي س ا بعد اخراجه في ل وم .

اخرج ال الى ن حتى ان ا ن = ا ب

واجعل ا د = ا ب ثم ارسم ا ي عموداً

على ب د . ارسم ب ن وليلاق

المحيط ايضاً في ف وليكن س وعموداً

على ب ن وليلاق ا ي في ق

الامر واضع ان م ن = ا ب + ا س + ب س و ل ن = ا ب + ا س -

ب س . ولان ب د قد تنصّف في ي و د ن قد تنصّف في ا فالخط ب ن يوازي

ا ي فهو عمود على ب د والمثلثان د ا ي د ن ب متساويا الزوايا و د ن = ا د

$$و ب ن = ا ي و ب ف = ا ب و = ا ق ي و ف ن = ا ق$$

راكون ا ق س ا ي د متساويي الزوايا تكون نسبة ا س : ا د :: ا ق : ا ي

والاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علو واحد هي كتواعدها

بعضها الى بعض (ق ا ك ٦) فنسبة ا س : ا د :: ا د : ا ق :: ا ق : ا ي :: ا ي :

وبالمبادلة اس $\times$ اد : اق $\times$ اى :: اد : اى^٢ و $\times$ اس $\times$ اد : اق = اى^٢ ::
 اد : اى^٢. ولكن اق $\times$ اى = اق $\times$ اى^٢ = ن ف $\times$ ن ب = م $\times$ ن ل
 فاذا $\times$ اس $\times$ اد : م $\times$ ن ل :: اد : اى^٢ ولكن اد الى اى^٢ :: $\frac{ق}{ف}$:: نج د اى =
 نج $\frac{ا}{ب}$ اس (ق ا). فاذا $\times$ اس $\times$ اد : م $\times$ ن ل :: $\frac{ق}{ف}$:: $\frac{ا}{ب}$ اس^٢
 و $\times$ اس $\times$ اد هو اربعة امثال القائم الزوايا مسطح اس $\times$ اب (لان اد = اب)
 وم $\times$ ن ل هو القائم الزوايا مسطح الضلعين مع القاعدة في الضلعين الا القاعدة
 فرع^١ أول. اذا $\times$ اس^٢ $\times$ اب^٢ : م^٢ $\times$ ن ل^٢ :: $\frac{ق}{ف}$:: ج $\frac{ا}{ب}$ اس
 فرع^٢ ثان. حسب القضية السابقة $\times$ اس $\times$ اب : (ب س + (اب - اس)) $\times$
 (ب س - (اب - اس)) :: $\frac{ق}{ف}$:: (ج $\frac{ا}{ب}$ اس^٢) وقد تبرهن في هذه القضية
 ان $\times$ اس $\times$ اب : (اب + اس + ب س) $\times$ (اب + اس - ب س) ::
 $\frac{ق}{ف}$:: (نج $\frac{ا}{ب}$ اس^٢) فبالمساواة (اب + اس + ب س) $\times$ (اب + اس - ب س) :
 (ب س + (اب - اس)) $\times$ (ب س - (اب - اس)) :: (نج $\frac{ا}{ب}$ اس^٢)
 (ج $\frac{ا}{ب}$ اس^٢) ولكن نسبة نظير جيب قوس الى جيب القوس كمناسبة نصف
 القطر الى مماس ذلك القوس فاذا (اب + اس + ب س) $\times$ (اب +
 اس - ب س) : (ب س + (اب - اس)) $\times$ (ب س - (اب - اس)) ::
 $\frac{ق}{ف}$:: (م $\frac{ا}{ب}$ اس^٢) و $\times$ (اب + اس + ب س) $\times$ (اب + اس - ب س) :
 $\times$ (ب س + (اب - اس)) $\times$ (ب س - (اب - اس)) :: $\frac{ق}{ف}$:: م $\frac{ا}{ب}$ اس^٢

سابقة ثانية

اذا فرض مقداران غير متساويين فنصف مجتمعهما مع نصف فضلتهما
 يعدل اكبرها ونصف مجتمعهما الا نصف فضلتهما يعدل اصغرهما

ليكن اب وب س مقدارين وليكن س ب د ي
 اب اكبرها. نصف اس في د واجعل اى يعدل ب س. فالامر واضح ان اس

هو مجموع المقنارين وى ب فضلتهما . ولكون ا س قد تنصّف في د ا د = د س
واى = ب س فاذا دى = د ب ودى اود ب نصف فضلة المقنارين . ولكن
ا ب = ب د ودا اي نصف المجموع مع نصف الفضلة وب س = نصف المجموع د س
الا نصف الفضلة ب د

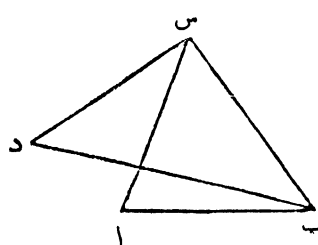
فرع . اذا فرض مجموع مقنارين وفضلتهما يمكن استعمال المقنارين لان نصف
المجموع مع نصف الفضلة هو الاكبر ونصف المجموع الا نصف الفضلة هو الاصغر
(انظر الجبر والمقابلة وجه ١٢٤ طبعة اولى و ١٤٦ طبعة ثانية)

—xox—

القضية التاسعة . ن

اذا كانت نسبة اطول ضلعي مثلث الى اقصرها كنصف القطر الى
ماس زاوية ما تكون نسبة نصف القطر الى ماس فضلة تلك الزاوية
ونصف قائمة كماس نصف مجموع الزاويتين عند قاعدة المثلث الى
ماس نصف فضلتهما

ليكن ا ب س مثلثا وب س وس ا ضلعين من اضلاعه واب قاعدته وليكن



ب س اطول من س ا . ارسم س د عمودا على

ب س وليعدل س ا . ارسم د ب . فالمثلث

ب س د قائم الزاوية ونسبة ب س : س د ::

ق : م س ب د (ق ا) فالزاوية س ب د

هي الزاوية التي تكون نسبة ماسها الى نصف

القطر كالضلع س د اوس الى ب س او كنسبة اقصر الضلعين الى اطولها

ولكن ب س + س د : ب س - س د :: م ق : م ا (س د ب + س ب د) :

م ق (س د ب - س ب د) (ق ه) وايضا ب س + س ا : ب س - س ا :: م ق :

(س ا ب + س ب ا) : م ق (س ا ب - س ب ا) فبالمساواة (لان س د = س ا)

م ق (س د ب + س ب د) : م ق (س د ب - س ب د) :: م ق (س ا ب + س ب ا) :

م ق (س ا ب - س ب ا) ولكن الزاويتان س د ب + س ب د = ٩٠ فنسبة م ق

(س د ب + س ب د) : مم $\frac{1}{3}$ (س د ب - س ب د) :: $\frac{1}{3}$:

مم (٤٥ - س ب د) (ق ٢ فرع ٢)

فنسبة $\frac{1}{3}$: مم (٤٥ - س ب د) :: مم $\frac{1}{3}$ (س ا ب + س ب ا) : مم $\frac{1}{3}$

(س ا ب - س ب ا) وقد تبرهن ان ب س : س ا :: $\frac{1}{3}$: مم س ب د

فرع. اذا فرض ب س وس ا والزاوية عند س فلكي تجد الزاويتين عند ا

وب استعلم زاوية وسيهاى مثلاً حتى تكون نسبة ب س : س ا :: $\frac{1}{3}$ ق : مماسى

فتكون نسبة $\frac{1}{3}$: مم (٤٥ - سى) :: مم $\frac{1}{3}$ (ا + ب) : مم $\frac{1}{3}$ (ا - ب) فتجد

اوب حسب السابقة الثانية

القسم الثاني

قواعد حلّ العميات

قواعد قياس المثلثات منحوبة في عملة واحدة وهي هذه . في مثلث بسيط ذي

سنة اشياء اي ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا مفروض منها ثلاثة اشياء واحد منها ضلع

مطلوب واحد من الثلاثة الآخر او كلها

العملة الاولى

في مثلث بسيط قائم الزاوية مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع

مطلوب الثلاثة الآخر

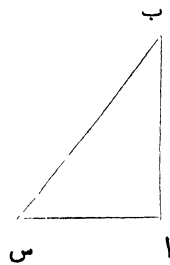
في مثلث قائم الزاوية اذا فرضت احدى الحادتين تعرف الاخرى لانها كال

الاولى وجيب احدى الحادتين هو نظير جيب الاخرى وقد جمعت قواعد الحل

حسب اختلاف الاشياء المفروضة في هذا الجدول . فالعمود الاول منه يدل على

المفروض والثاني على المطلوب والثالث على النسبة التي بها تحلّ العملة

المفروض	المطلوب	الحل
س ب و ب	اس	١: $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{اس}$
اي الوتر والزاوية	اب	٢: $\frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{ن} :: \frac{ق}{اب}$
اس وس	ب س	٣: $\frac{ق}{ن} :: \frac{ق}{اس} :: \frac{ق}{ب س}$
اي ضلع واحد والحادتين	اب	٤: $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{م} :: \frac{ق}{اب}$
س ب و ب ا	س	٥: $\frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{ا} :: \frac{ق}{س}$
اي الوتر وضلع	اس	٦: $\frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{ن} :: \frac{ق}{اس}$
اس و اب	س	٧: $\frac{ق}{اس} :: \frac{ق}{اب} :: \frac{ق}{م}$
اي الضلعان	س ب	٨: $\frac{ق}{ن} :: \frac{ق}{اس} :: \frac{ق}{ب س}$



تسميات . اذا فرض اس وس نجد الوتر ب س بواسطة القاطع ايضاً لان
 س ا : س ب :: ق : ق . قاطع س فلنأ : ق : قاطع س :: اس : س ب
 واذا فرض ب س و اب نجد اس كما في الجدول او بواسطة (ق ٤٧ ك ا) لان
 $اس^2 = ب س^2 - ب ا^2$ واس $= ب س - ب ا$ وايضاً حسب (ق ٥
 ك ٢ فرع) $ب س - ب ا = (ب س + ب ا) \times (ب س - ب ا)$ فاذا اس =
 $(ب س + ب ا) \times (ب س - ب ا)$ وهذه الاخيرة اسهل اذا قصد حل
 العملية بالانساب

إذا فُرض $اس$ و $اب$ يوجد $ب$ $س$ حسب (ق ٤٧ ك ١) لأن
 $ب س = ب^2 ا + ا^2 س$ وإذا قُصد حل العملية بالانساب فالاسهل
 ان يُطلب أولاً $ماس$ $س$ هكذا $اس : اب :: ق : م$ $س$ ثم نجد $س : ق$
 $اس : س ب$

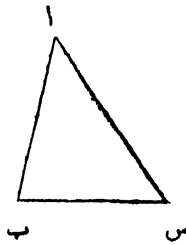
العملية الثانية

في مثلث حاد الزوايا مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع مطلوب
 الثلاثة الأخر

لهذه العملية اربع حالات

الحالة الاولى

مفروض زاويتان $ا$ و $ب$ والضلع $اب$. مطلوب الضلعان الآخران
 من $ا$ و $ب$ نستعلم $س$ لانها متم $ا + ب$ ولنا (ق ٢) $ج س : ج ا :: اب :$
 $ب س و ج س : ج ب :: اب : اس$

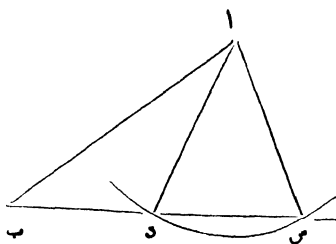


الحالة الثانية

مفروض الضلعان $اب$ و $اس$ والزاوية $ب$ التي تقابل احدهما . مطلوب $ا$ و $س$
 والضلع الاخر $ب س$
 لكي نستعلم $س$ لنا $اس : اب :: ج ب : ج س$ وايضاً $ا - ب = ١٨٠ - ب - س$
 ثم $ج ب : ج ا :: اس : س ب$ حسب الحالة الاولى

في هذه الحالة حيث يستعلم جيب $س$ فالجيب المذكور في الجداول قد يكون
 لحادة او لمنفرجة متم الحادة فتكون $س$ حادة او منفرجة لانه اذا كان $اس$ اقصر

من ا ب يوجد مثلثان لها الضلعان ا ب ا س والزواية عند ب متساوية ويكونان غير متساويين لان الزواية التي تقابل ا ب في الواحد هي متمم التي تقابلة في الاخر كما ينفع من هذا الشكل



اجعل ا مركزاً واس نصف قطر وارسم قوساً يقطع ب س في د وارسم ا د . فالامر واضح ان المثلثين ا ب س ا ب د لها الزواية عند ب والضلع ا ب مشتركان بينها والضلعان ا س ا د متساويان

ولكن ب د لا يعدل ب س والزواية ب س ا لا تعدل ب د ا و ب ا د لا تعدل ب ا س لان ا س ب ا س لان ا س ب ا د ب كل واحدة منها متمم الاخرى لان ا د س متساوي الساقين واس د = ا د س وبالقاعدة المذكورة سابقاً توجد ا س ب ا و ا د ب

ومن هاتين توجد ب ا س و ب ا د لان ب ا س متمم ا ب س + ا س ب (ق ٢٢ ك ١) فحيثما هو جيب ا ب س + ا س ب . ولكن ب ا د هي فضلة ا س ب و ا ب س لانها فضلة ا د س و ا ب س لان ا د س او ا س د = ا ب س + ب ا د (ق ٢٢ ك ١) فلكي يستعمل ب س بعد استعمال س لنا ج د س : ج (س + ب) :: ا ب : ب س وايضاً ج د س : ج (س - ب) :: ا ب : ب د

فاذا كان ا ب اطول من ا س تكون القضية ملتبسة والآخر ملتبسة

الحالة الثالثة

مفروض ضلعان ا ب واس والزواية بينهما المطلوب الاخران ب وس والضلع الاخر ب س

اولاً ا ب + ا س : ا ب - ا س :: م ١ (س + ب) : م ١ (س - ب)
وب = ١ (س + ب) + ١ (س - ب) = ١ (س + ب) و س = ١ (س + ب) - ١ (س - ب)
حسب السابقة الثانية

ولكي نجد ب س بعد استعمال ب لنا ج د ب : ج ا :: ا س : ب س ويستعمل ب س ايضاً بدون استعمال ب وس هكذا حسب (ق ٦) ب س =

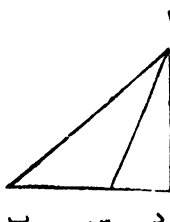
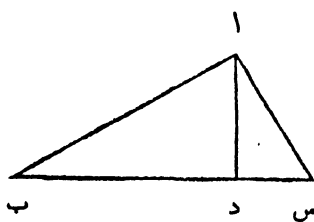
$$٦ \text{ ا ب } - ٢ \text{ نج ا } \times \text{ ا ب } \times \text{ ا س } + \text{ ا س }^٢$$

الحالة الرابعة

مفروض الاضلاع الثلاثة ا ب ب س ا س مطلوب الزوايا الثلاث

حل اول

استعمل كمية ما وسمها ف حتى تكون نسبة ب س : ب ا + ا س :: ب ا - ا س :



ف فتكون ف مجموع
قسي القاعدة ب د
د س او فضلتهما (ق ه)
فان كانت ف اكبر من
ب س فهي مجموع ب د

و د س و ب س فضلتهما وان كانت ف اصغر من ب س فيكون ب س مجموع
القسمين و ف فضلتهما وعلى كلتا الحالتين يُعلم مجموع ب د و د س و فضلتهما فيُعلم
ب د و د س (سابقة ثانية)

ثم (ق ا) س ا : س د :: ق : نجس و ب ا : ب د :: ق : ج ب فتعلم
س و ب ومنها نستعلم ا

حل ثان

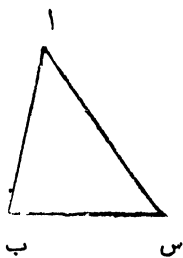
ليكن د فضلة ا ب و ا س ثم (ق ٧ فرع ١) $ا ب^2 \times ا س :$
 $ا ب^2 (ب س + د) \times (ب س - د) :: ق : ج ا ب ا س$

حل ثالث

ليكن ص مجموع الضلعين ب ا و ا س ثم (ق ٨ فرع ١) $ا ب^2 \times ا س :$
 $ا ب^2 (ص + ب س) \times (ص - ب س) :: ق : نج ب ا س$

حل رابع

ليكن د و ص كما تقدم ثم (ق ٨ فرع ٢) $ا ب^2 (ص + ب س) \times (ص - ب س) :$
 $ا ب^2 (ب س + د) \times (ب س - د) :: ق : م ا ب ا س$

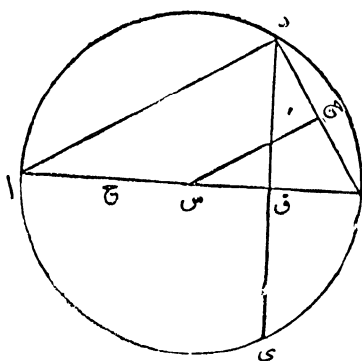


حاشية . من هذه الطرق الاربعة الاول اسهل للحفظ
والآخر اسرع للعمل والثاني اسهل من الثالث متى كانت
الزاوية المطلوبة اصغر من قائمة وإلا فالثالث اسهل
ونظير الفائدة متى كانت الزاوية المطلوبة صغيرة جدًا او
كبيرة جدًا اي قريبة الى صفر او الى ٩٠ وذلك لقلة
الفرق بين جيب الاولى ونظير جيب الثانية

القسم الثالث

في اصطناع الجداول

في حلّ العميات بواسطة القواعد السابقة لأبد من استعمال جداول متضمنة
المجيب والمماسات الخ لكل زاوية من ١ الى ٩٠ فيقتضي أولاً استعمال المجيب لدقيقة
واحدة اي لاصغر قوس في الجداول



١ ليكن ا د دائرة مركزها س
و د ب قوساً منها و د ب ي مضاعف
تلك القوس . فاذا رُسم الوتران د ي
د ب والعمودان عليها من س اي س غ
س ق فتد تبرهن (ق ٨) امضافات
ان س غ متناسب متوسط بين ربع
القطر ا ح واقوس ق هو نظير جيب

القوس ب د وس غ نظير جيب نصف ب د فنظير جيب نصف قوس ما من
دائرة نصف قطرها واحد هو متناسب متوسط بين $\frac{1}{2}$ و $1 + \text{نحج ب د}$. فاذا فرض 1
= قوساً ما فنظير جيب $\frac{1}{2}$ هو متناسب متوسط بين $\frac{1}{2}$ و $1 + \text{نحج ا و}$ (نحج $\frac{1}{2}$)
 $\frac{1}{2} (1 + \text{نحج ا و}) = \frac{1}{2} (1 + \text{نحج ا و})$

٢ الامر واضح ما تقدم اذا فُرض نظير جيب قوس يمكن استعمال نظير
جيب نصف تلك القوس . لنفرض القوس ب د = ٦٠ فالوتر ب د = $\frac{2}{3}$ فالعمود

ل د في م. ولكن ب ف = ح ل و ب ف + د ح = د ح + ح ل = ل د + ل ح =
 ل م + ل ح = م ح او ا ك راي رك = $\frac{1}{2}$ (ب ف + ح د). ولكون
 المثلثين س غ ي رك ي متساويي الزوايا تكون نسبة س ي : ر ي :: س غ : رك
 وقد نبرهن ان ر ي = نج ب س و رك = $\frac{1}{2}$ (ب ف + د ح) فنسبة $\frac{1}{2}$:
 نج ب س :: ج ا س : $\frac{1}{2}$ (ج ا ب + ج ا د)

فرع اذا وقعت النقطة ب على النقطة ا لنا $\frac{1}{2}$ نج ب س :: ج ا
 ب س : $\frac{1}{2}$ ج ب د اي نسبة نصف النظر الى نظير جيب قوس كسبة جيب القوس
 الى نصف جيب مضاعف القوس فاذا فرضت قوس = ا لنا $\frac{1}{2}$ ج ا = ١٢ ج ا ×
 نج ا او جيب ١٢ = ٢ ج ا × نج ا و ج ا = ٢ ج ا × نج ا فن جيب ا
 ونظير جيبها يوجد جيب ا

ثم $\frac{1}{2}$: نج ا :: ج ا : $\frac{1}{2}$ (ج ا + ج ا) او ج ا + ج ا = ٢ ج ا = نج ا
 ا + ج ا و يطرح ج ا من الجانبين نصير ج ا = ٢ ج ا = نج ا ج ا - ج ا
 و هكذا ج ا = ٢ ج ا = نج ا ج ا - ج ا
 و ج ا = ٢ ج ا = نج ا ج ا - ج ا
 و هكذا لاستعلام جيوب الاقواس التي فضلنها اكثر من ا. ليكن ا + ب + ا
 ب ثلثة اقواس فضلنها اكثر من ا فحسب النظرية السابقة $\frac{1}{2}$: نج ب ::
 ج ا + ا : $\frac{1}{2}$ (ج ا + ج ا + ب) فاذا كان نصف النظر واحدا لنا ج ا +
 ج ا + ا = ٢ نج ب × ج ا + ا (ب + ا) او ج ا + ا = ٢ نج ب ×
 ج ا + ا - ج ا

وعلى هذا الاسلوب يصطع جدول جيوب ونظير جيوب لاي قوس فرضت من صفر
 الى ٩٠. و جدول المماسات يصطع بانقسام جيب قوس على نظير جيبها لان م ا =
 $\frac{1}{2}$. وبعد استعلام المماسات الى حد ٤٥ تستعلم البقية الى حد ٩٠.
 بفائدة اخرى اسهل. لان ماس قوس اكبر من ٤٥ يعدل نظير الماس لقوس
 تحت ٤٥ بمثل ما كان الاول فوق ٤٥ اي ماس ٥٠ = نظير ماس ٤٠ ونصف

النظر متناسب متوسط بين الماس ونظير الماس . فاذا قُرِضت فضلة قوس ما
 $٥٠^\circ = د$ لنا م $(٥٠^\circ - د) : ١ : ١ : م$ و $(٥٠^\circ + د)$ وم $(٥٠^\circ + د) =$

$$\frac{١}{م (٥٠^\circ - د)}$$

القطّاع نستعلم حسب (حد ٩ فرع ٢) حيث يبرهن ان نصف النظر متناسب

$$\frac{١}{م} = \frac{١}{نظير جيب قوس وقاطع اى قاطع ا} = \frac{١}{نظير جيب قوس وقاطع اى قاطع ا}$$

سهم الجيب يوجد بطرح نظير الجيب من نصف النظر

يستنتج من النظرية العابقة بعض العبارات المهمة الاستعمال في حل
 العمليّات

اولاً . اذا قُرِضت القوس $ا = ب$ و $ب = ب$ ونصف النظر $س = ر$

فحينئذ $ا = ب + ا = ب + ب = ١ - ب$ ولنا ما تقدم برهانه

$$١ : نجوب :: ج ا : ج ا + ج (١ + ب) + ج (١ - ب) اى$$

$$ج ا \times نجوب = ج ا + ج (١ + ب) + ج (١ - ب)$$

ثانياً . لان $ب$ ف $ر$ ك $د$ متوازية والخطا $ب$ د $س$ ح قُطعا متناسباً

فالخط $ف$ ح الذي هو فضلة $ف$ $ح$ $ي$ قد تنصف في $ك$ وكما تهرن في النظرية

$ك$ $ي$ هو نصف مجموع $س$ $ي$ و $ح$ $ي$ اى نظير الجيبين للقوسين $ا$ $ب$ و $ا$ و $ب$ مشابهة

المثلثين $ي$ $غ$ $س$ $ي$ $ك$ نسبة $س$ $ي$: $ر$: $غ$ $ي$: $س$ $ي$ $ك$. و $غ$ $ي$ هو نظير جيب

$$ا$$

$$١ : نجوب :: نج ا : نج ا + نج (١ + ب) + نج (١ - ب) فاذا$$

$$نجا \times نجوب = نج ا + نج (١ + ب) + نج (١ - ب)$$

ثالثاً . المثلثان $ر$ $د$ $م$ $س$ $د$ $غ$ متشابهان . لان $ك$ $ر$ $م$ قائمة و $ي$ $ر$ $د$ قائمة فاذا

طُرحت الزاوية $ي$ $ر$ $م$ فالزاوية $د$ $ر$ $م$ = $ي$ $ر$ $ك$ او $ي$ $س$ $غ$ والزاويتان $د$ $ر$ $م$

$س$ $غ$ $ي$ متساويتان لانهما قائمتان ففي المثلثين $ر$ $د$ $م$ $س$ $غ$ $ي$ الاضلاع التي تلي

الزوايا المتساوية هي متناسبة و $ي$ $س$: $س$: $غ$: $د$: $ر$: $م$ و $ر$ $م$ هو نصف فضلة

نظير الجيبين $ف$ $ي$ $ح$ فلنا

$$\frac{ف}{س} = \frac{ج ب}{س} : \frac{ا}{س} : نج ا + د$$

١: ج ا :: ج ب : $\frac{1}{f}$ نج (ا - ب) - $\frac{1}{f}$ نج (ا + ب) وايضاً

ج ا × ج ب = $\frac{1}{f}$ نج (ا - ب) - $\frac{1}{f}$ نج (ا + ب)

رابعاً . في المثلثين ي س غ درم نسبة ي س : ي غ :: رد : دم ودم هو نصف فضلة المجهين د ح وب ي فاذا

ق : $\frac{1}{f}$ نج ا س :: ج ب س : $\frac{1}{f}$ ج ا د - $\frac{1}{f}$ ج ا ب او

١ : $\frac{1}{f}$ نج ا :: ج ب : $\frac{1}{f}$ ج (ا + ب) - $\frac{1}{f}$ ج (ا - ب) فاذا

نج ا × ج ب = $\frac{1}{f}$ ج (ا + ب) - $\frac{1}{f}$ ج (ا - ب)

خامساً . اذا كان اوب قوسين وكان نصف النظر واحداً فلنا

(١) ج ا × نج ب = $\frac{1}{f}$ ج (ا + ب) + $\frac{1}{f}$ ج (ا - ب)

(٢) نج ا × نج ب = $\frac{1}{f}$ نج (ا - ب) + $\frac{1}{f}$ نج (ا + ب)

(٣) ج ا × ج ب = $\frac{1}{f}$ نج (ا - ب) - $\frac{1}{f}$ نج (ا + ب)

(٤) نج ا × ج ب = $\frac{1}{f}$ ج (ا + ب) - $\frac{1}{f}$ ج (ا - ب)

ومن هذه الاربعة يُستنتج اربع آخر

جميع الاولى والرابعة ج ا × نج ب + نج ا × ج ب = ج (ا + ب)

بطرح الرابعة من الاولى ج ا × نج ب - نج ا × ج ب = ج (ا - ب)

جميع الثانية والثالثة نج ا × نج ب + ج ا × ج ب = نج (ا - ب)

بطرح الثالثة من الثانية نج ا × نج ب - ج ا × ج ب = نج (ا + ب)

سادساً . اذا فرض ا + ب = ص و ا - ب = د فحسب الاولى من العبارات

السابقة وحسب السابقة الثانية $\frac{ص+د}{2} = 1$ وب $\frac{ص-د}{2}$

فجيب $\frac{ص+د}{2} \times \frac{ص-د}{2} = \frac{1}{f}$ ج . ص + $\frac{1}{f}$ ج . د . ولكن ص ود

دالآن على اي قوسين كانا فيمكن ان يسميا اوب كما في العبارات السابقة . فلنا

ج $\frac{ا+ب}{2} \times \frac{ا-ب}{2} = \frac{1}{f}$ ج ا + $\frac{1}{f}$ ج ب

او ٢ ج $\frac{ا+ب}{2} \times \frac{ا-ب}{2} = ج ا + ج ب$. ومن العبارة الثانية

السابقة لنا ٢ نج $\frac{ا+ب}{2} \times \frac{ا-ب}{2} = نج ا + نج ب$ ومن الثالثة لنا

$$٢ \text{ ج } \frac{ب+١}{٢} \times \text{ج } \frac{ب-١}{٢} = \text{نجب} - \text{نجا ومن الرابعة لنا}$$

$$٢ \text{ نج } \frac{ب+١}{٢} \times \text{ج } \frac{ب-١}{٢} = \text{جا} - \text{جب}$$

وفي هذه العبارات حسب القوس ب اقصر من القوس ا
سابعاً. وعلى هذا الاسلوب نستخرج عبارات دالة على ماسات افواس لأن ماس
قوس يعدل الجيب مقسوماً على نظير الجيب

$$\text{م (ا+ب)} = \frac{\text{ج (ب+١)}}{\text{نج (ب+١)}} \text{ وقد تبرهن ان}$$

$$\text{ج (ا+ب)} = \text{جا} \times \text{نجب} + \text{نجا} \times \text{جب} \text{ وايضاً ان}$$

$$\text{نج (ا+ب)} = \text{نجا} \times \text{نجب} - \text{جا} \times \text{جب} \text{ فاذا}$$

$$\text{م (ا+ب)} = \frac{\text{جا} \times \text{نجب} + \text{نجا} \times \text{جب}}{\text{نجا} \times \text{نجب} - \text{جا} \times \text{جب}} \text{ ثم بقسمة الصورة}$$

والمخرج على نجا $\times$ نجب لنا

$$\text{م (ا+ب)} = \frac{ب^٢ + ا^٢ - ب \times ا + ا \times ب}{ب^٢ - ا^٢}$$

$$\text{وهكذا (م ا-ب)} = \frac{ب^٢ - ا^٢}{ب^٢ + ا^٢ - ب \times ا + ا \times ب}$$

ثامناً اذا تحولت الثالثة من العبارات السابقة (٦) على هذا المنوال فلنا

$$\text{ج ا+ج ب} = \frac{ب^٢}{ب^٢ + ا^٢} \text{ وحسب (ق ٢ فرع ا)}$$

$$\text{ج ا-ج ب} = \frac{ب^٢}{ب^٢ - ا^٢} \text{ وبالفرع الثاني}$$

$$\text{نجا+نجب} = \frac{ب^٢}{ب^٢ + ا^٢} \text{ اولاً } \frac{ب^٢}{ب^٢ + ا^٢} = ١$$

$$\text{نجا-نجب} = \frac{ب^٢}{ب^٢ - ا^٢} \text{ م (ا+ب)} = \frac{ب^٢}{ب^٢ + ا^٢}$$

تنبيه. اذا تحولت هذه المعادلات الى نسب فلا بد من اعادة
الواحد اي $\frac{ب^٢}{ب^٢}$ الذي قد ترك للاختصار لكونه واحداً فلا يعتد به عند
الضرب ولكن يعتبر في النسب

اصول قياس المثلثات الكروية

القضية الاولى

اذا قُطِعَتْ كُرَّةٌ بِسَطْحٍ مَارٍّ بِمَرْكَزِهَا فَالْقَطْعُ دَائِرَةٌ مَرْكَزُهَا مَرْكَزُ الْكُرَّةِ
وهي تعدل الدائرة التي بدورانها رُسِمَتِ الْكُرَّةُ

لأن كل الخطوط المستقيمة المرسومة من مركز الكرة الى سطحها تعدل نصف
قطر نصف الدائرة المحيطة بالكرة (حد ٧ ك ٣ مضافات) فموضع تقاطع سطح بسيط
وسطح الكرة خط في سطح واحد وكل نقطة منه على بعد واحد من مركز الكرة فهو
محيط دائرة (حد ١١ ك ١) مركزها مركز الكرة ونصف قطرها نصف قطر الكرة او
نصف قطر نصف الدائرة التي بدورانها اُحْدِثَتِ الْكُرَّةُ فتعدل الدائرة التي كان
نصف الدائرة المهددة نصفها

حدود

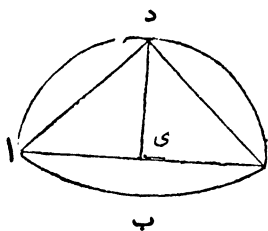
- ١ كل دائرة حادثة من قطع كرة بسيط مَارٍّ بِمَرْكَزِهَا تَسَمَّى دَائِرَةً عَظِيمَةً
فرع. كل الدوائر العظيمة لكرة واحدة متساوية وتنصف بعضها بعضاً لأن
انصاف اقطارها متساوية كما تقدم برهانه وخط تقاطعها قطر لكل واحدة منها
- ٢ قطب دائرة عظيمة هو نقطة في سطح الكرة وجميع الخطوط المستقيمة المرسومة
منها الى محيط الدائرة متساوية
- ٣ الزاوية الكروية هي زاوية على سطح كرة واقعة بين قوسين من دائرتين
عظيمتين تتقاطعان وهي تعدل ميل سطحي هَاتَيْنِ الدائِرَتَيْنِ احدهما على الاخر
- ٤ المثلث الكروي هو شكل على سطح كرة واقع بين ثلاثة اقواس من ثلاث
دوائر عظيمة كل واحد منها اقل من نصف دائرة

القضية الثانية

قوس دائرة عظيمة واقع بين قطب دائرة اخرى عظيمة ومحيطها هو

رُبع دائرة

لكن اب س دائرة عظيمة ود قطبها فاذا مرَّ س د قوس دائرة عظيمة في د ولاقي اب س في س فالقوس د س ربع دائرة
الدائرة التي س د قوس منها للاق اب س
ايضاً في ا وليكن اس موضع تقاطع هاتين
الدائرتين العظيمتين فهو يُمَرُّ في ي مركز الكرة اُس
ارسم دا د س . الخط ا د = د س (حد ٢)



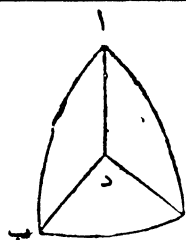
فالقوس ا د = القوس د س (ق ٢٨ ك ٢) وا د س نصف دائرة فكل واحدة من
القوسين ا د ود س ربع دائرة

فرع اول . اذا رُمِد د ي فالزاوية د ي ا قائمة ود ي عمودي على كل خطٍ
يلاقيه في سطح الدائرة اب س فهو عمود على ذلك السطح (ق ٤ ك ٢ مضافات)
فالخط المستقيم المرسوم من قطب دائرة عظيمة الى مركز الكرة هو عمود على سطح
تلك الدائرة . وبالفعل كل خط من مركز كرة عموداً على سطح دائرة عظيمة يلاقي
سطح الكرة في قطب تلك الدائرة

فرع ثانٍ . الدائرة اب س لها قطبان واحد على الجانب الواحد والاخر على
الجانب الاخر من سطحها وما نهايتا قطر الكرة العمودي على سطح اب س . ولا يمكن
ان تكون نقطتان اخريان قطبي الدائرة اب س

القضية الثالثة

اذا كان قطب دائرة عظيمة في نقطة تقاطع دائرتين اخريين عظيمتين
فالقوس من الدائرة الاولى الواقعة بين الاخرين هي قياس الزاوية
الكروية المحاذية بينها راسها عند القطب الذي هو نقطة التقاطع
لكن د مركز كرة وب ا س دائرتين عظيمتين تقاطعان في ا وليكن ب س



قوس دائرة اخرى عظيمة قطبها ا . فالتوس ب س هو
قياس الزاوية الكروية ب ا س

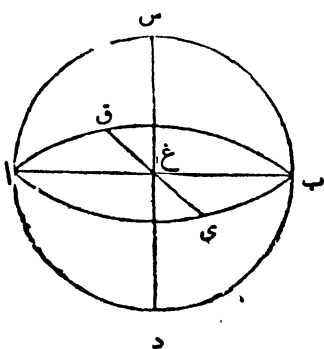
ارسم ا د ب د س . لان اقطب ب س فالتوس
ا ب ربع دائرة واس كذلك (ق ٢) و ا د ب ا د س
قائمتان . فالزاوية س د ب هي ميل سطح دائرة القوس

ا ب على دائرة القوس اس (حد ٢) و (حد ٤ ك ٢ م) وتعدل الزاوية الكروية ب ا س
والتوس ب س تقيس الزاوية ب د س فهو يقيس الزاوية الكروية ب ا س ايضاً
فرع . اذا كان كل واحد من القوسين ا ب اس المتقاطعتين في اربع دائرة
تكون اقطب الدائرة العظيمة المارة في ب وس نهايتي القوسين . لان ا ب واس
ربعا دائرة فالزاويتان ا د ب ا د س قائمتان فالخط ا د عمود على السطح ب د س
اي على سطح الدائرة العظيمة المارة في ب وس فالنقطة ا في قطب الدائرة العظيمة
المارة في ب وس (ق ١ فرع ٢)

القضية الرابعة

اذا كان سطح دائرة عظيمة عمودياً على سطح دائرة اخرى عظيمة فمحيط
كل واحدة منها يمر بقطبي الاخرى . وبالقلب اذا مر محيط دائرة
عظيمة في قطبي دائرة اخرى عظيمة فسطح الواحدة عمودي على سطح
الاخرى

لتكن اس ب د اى ب ق دائرتين عظيمتين سطح الواحدة عمودي على سطح
الاخرى فقطبا اس ب د هما في محيط
اى ب ق وقطبا اى ب ق في محيط
اس ب د



من غ مركز الكرة ارسم الخط غ س في
سطح اس ب د عموداً على ا ب . فلان غ س
في سطح اس ب د العمودي على اى ب ق
ولانه عمود على موضع تقاطع السطحين فهو عمود

على سطح اى ب ق (حد ٢ ك ٢م) فالنقطة س هي قطب الدائرة اى ب ق (ق ٢
 فرع اول) واذا اُخرج س غ الى د تكون د قطب اى ب ق الآخر
 وهكذا اذا رُسم غ ي في سطح اى ب ق عموداً على ا ب واُخرج الى ق يبرهن
 ان ي وق قطبا للدائرة ا س ب وبالفعل اذا كانت س قطباً للدائرة اى ب ق
 فالدائرة العظيمة المارة ب س هي عمودية على اى ب ق . لانه اذا رُسم س غ من
 القطب الى مركز الدائرة اى ب ق يكون عموداً على سطحها (ق ٢ فرع اول) فكل
 سطح مارّ في س غ (ق ١٧ ك ٢م) هو عمودي على سطح اى ب ق و سطح ا س ب د
 هو مارّ في س غ فهو عمود على اى ب ق

فرع ٢ اول . في دائرتين عظيمتين اذا مرّت اولاهما في قطبي الثانية فالثانية تمرّ
 بنقطتي الاولى

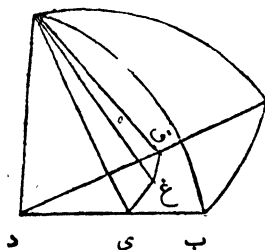
فرع ثانٍ . كل الدوائر العظيمة التي لها قطرٌ مشترك تكون اقطابها في دائرة
 عظيمة سطحها عمودي على ذلك القطر

الفضية الخامسة

في مثلث كروي متساوي الساقين تكون الزاويتان عند القاعدة

متساويتين

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً . والضلع ا ب منه فليعدل الضلع ا س منه فالزاوية
 الكروية ا ب س تعدل الكروية ا س ب



ليكن د مركز الكرة . ا ر س د ب د س دا .

ومن ا ر س ا ق عموداً على د س واى عموداً على س
 د ب وفي السطح د ب س ا ر س ق غ عموداً على
 د س وى غ عموداً على د ب وليتقيا في غ . ا ر س ا غ
 لان دى عمود على اى وى غ فهو عمود

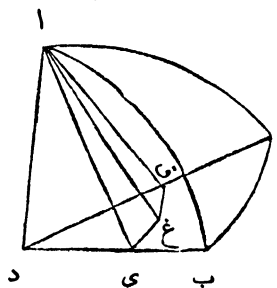
على السطح المارّ بها (ق ٤ ك ٢م) فكل سطح مارّ في دى هو عمودي على سطح اى غ
 (ق ١٧ ك ٢م) فالسطح د ب س عمودي على سطح اى غ . ولهذا السبب هو عمودي
 على سطح ا ق غ ايضاً فالخط ا غ الذي هو موضع تقاطع السطحين ا ق غ اى غ هو

عموداً على سطح د ب س (ق ١٨ ك ٢ م) والزوايتان ا غ ي ا غ ق قائمتان
ولكن القوس ا ب تعدل القوس ا س فالزاوية ا د ب = ا د س . فالمثلثان
ا د ي ا د ق لهما الزاويتان ا د ق ا د ي متساويتان وايضاً ا ي د ا ق د لانهما
قائمتان والضلع ا د مشترك بينهما فالضلع ا ي يعدل الضلع ا ق (ق ٢٦ ك ١)
و د ي = د ق ولان ا غ ي ا غ ق قائمتان فالمرعيان على ا غ و غ ي يعدلان المربع
على ا ي وكذلك ا غ + غ ق = ا ق واي = ا ق فاذا ا غ + غ ي = ا غ + غ ق
و غ ي = غ ق و غ ي = غ ق فالزاوية ا ق غ = ا ي غ (ق ٨ ك ١) و ا ق غ ي
الحادثة بين سطح ا د س و سطح د ب س (حد ٤ ك ٢ م) لان ا ق و ق غ عمودان
على د س موضع تقاطع السطحين فالزاوية ا ق غ = الزاوية الكروية ا س ب (حد ٢)
ولهذا السبب ايضاً ا ي غ = الزاوية الكروية ا ب س واي غ = ا ق غ فاذا ا ا ب س
= ا س ب

القضية السادسة

في مثلث كروي اذا كانت الزاويتان عند القاعدة متساويتين فالمثلث
متساوي الساقين

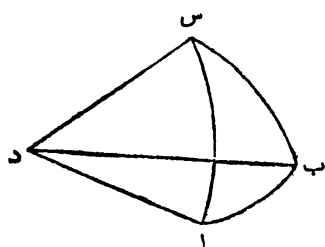
يبرهن كما في القضية السابقة ان ا غ ق ا غ ي قائمتان وان ا ق غ ا ي غ
تعدلان المحادئين بين السطحين د ا س د ا ب
والسطح د ب س وان ا ق غ = ا ي غ وان
ا ق = ا ي ثم د ق + ا ق = د ا + و د ي + ا ي = د س
د ا + ا ق = ا ي فاذا د ق = د ي و د ق =
د ي فالزاوية د ا ق = د ا ي فالقوس ا ب =
القوس ا س



القضية السابعة

كل ضلعين من مثلث كروي هما معاً اطول من ضلعه الثالث

ليكن ab س مثلثاً كروياً فكل ضلعين منه ab و b س هما معاً أطول من الضلع الثالث a س



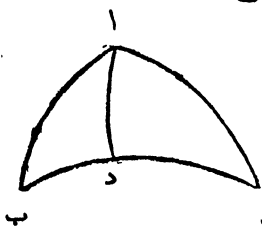
ليكن d مركز الكرة . ارسم d س d ب
 ١. فالزاوية المجسمة عند d يحيط بها الثلاث
 زوايا البسيطة ad ب a د س ب d س وكل
 اثنتين منها معاً ad ب b د س أكبر من
 الثالثة a د س (ق ٢٠ ك ٢ م) فكل اثنتين
 من الاقواس ab a س b س التي تقسم هذه الزوايا هما معاً أطول من الثالث

القضية الثامنة

اضلاع مثلث كروي الثلاثة هي معاً أقل من محيط دائرة عظيمة
 في رسم القضية السابقة ليكن ab س مثلثاً كروياً فاضلاعه الثلاثة a ب a س
 b س هي معاً أقل من محيط دائرة عظيمة
 ليكن d مركز الكرة فالزوايا البسيطة التي تحيط بالزاوية المجسمة عند d هي معاً
 أقل من اربع زوايا قائمة (ق ٢١ ك ٢ م) فالاقواس التي تقسمها هي معاً أقل من
 اربعة ارباع دائرة أو أقل من محيط الدائرة التي مركزها d ونصف قطرها a

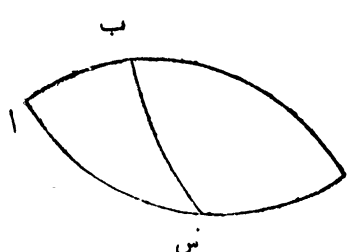
القضية التاسعة

في مثلث كروي الزاوية الكبرى تقابل الضلع الأطول وبالعكس
 ليكن ab س مثلثاً كروياً فالزاوية الكبرى
 ١ تقابل الضلع الأطول b س . اجعل الزاوية
 b a د تعدل الزاوية عند b فالضلع b د a د
 (ق ٦) a د $+ d$ س $= b$ س ولكن a د $+ d$
 d س $< a$ س (ق ٧) فإذا b س $< a$ س
 وب b س يقسم الزاوية عند a . وإما قلب هذه القضية فندسبني برهانه في (ق ٩ ك ١)



القضية العاشرة

إذا كان مجموع ضلعي مثلث كروي أكثر من نصف دائرة تكون كل واحدة من الزاويتين الداخليتين عند القاعدة أكبر من الخارجة المقابلة عند القاعدة. وإذا عدل مجموعها نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين تعدل الخارجة. وإذا كان مجموعها أقل من نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين أصغر من الخارجة. وإيضاً مجموع الداخليتين عند القاعدة أكبر من قائمتين أو يعدل قائمتين أو أصغر من قائمتين حسبما كان مجموع الضلعيين أكثر من نصف دائرة أو يعدله أو أصغر منه. ليكن ab s مثلثاً كروياً ضلعا a b و s وقاعدته as . اخرج احد



الضلعيين ab والقاعدة as حتى يلتقيا أيضاً في d . فالقوس ab نصف دائرة والزاوية الكروية عند a تعدل الكروية عند d لان كل واحدة منها هي ميل d الدائرة ab د على الدائرة as د

(١) إذا كان $ab + b = s$ = نصف دائرة أو d فحينئذ $b = s$ = b د والزاوية عند d (ق ٥) أو عند $a = b = s$ د أي الداخلة عند القاعدة تعدل الخارجة المقابلة

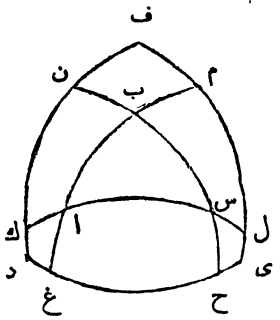
(٢) إذا كان $ab + b > s$ أكبر من نصف دائرة أو من ab د فحينئذ $b > s$ أكبر من b د والزاوية عند d أو أكبر من b د (ق ٩)

(٣) وهكذا إذا كان $ab + b < s$ أقل من نصف دائرة أو من ab د تكون d أو أصغر من b د. ثم $b = s$ د $b = s$ د $b = s$ د فإذا كانت أكبر من b د يكون $a + s$ أكبر من قائمتين. وإذا كان $a = b = s$ د يكون $a + s = b$ = قائمتين وإذا كان a أصغر من b د يكون $a + s$ ب أقل من قائمتين

الفضية المحادية عشرة

اذا جعلت زوايا مثلث كروي اقطاب ثلاث دوائر عظيمة فهذه الدوائر الثلاث بتقاطعاتها تُحدث مثلثًا يسمى متم الاول . واضلاع احدهما متمات للاقواس التي تقيس زوايا الآخر

ليكن ا ب س مثلثًا كرويًا وليكن ا و ب وس اقطابًا للدوائر العظام ف ي
 د د ف التي تقاطع في ف وى ود . فاضلاع
 المثلث ف ي د هي متمات لاقيسة الزوايا ا و ب
 وس اي ف ي ف ي متم ب ا س و دى متم ا ب س
 ود ف متم ا س ب . وايضًا ا س متم الزاوية
 د ف ي و ا ب متم الزاوية ف ي د و ب س متم
 الزاوية ي د ف . اخرج ب س الى ن و ج و ا ب
 الى م و غ و ا س الى ك و ل



لأن اقطب ف ي والدائرة ا س تمر في ا ف والدائرة ف ي تمر بقطب ا س
 (ق ٤ فرع ١) ولأن س قطب ف د فالدائرة ف د تمر بقطب ا س فقطب ا س
 هو ف عند تقاطع القوسين ي ف د ف . وهكذا يبرهن ان د قطب ب س وى
 قطب ا ب

ولان ف قطب ا ل وى قطب ا م فالقوس ف ل ربع دائرة وى م كذلك
 (ق ٢) وف ل م ي معًا ا و ف ي م ل معًا بعدلان نصف دائرة وم ل قياس
 ب ا س (ق ٣) فاذا ف ي متم قياس ب ا س وهكذا في البقية
 ولأن س ن ربع دائرة و ب ح ربع دائرة فالقوسان س ب ب ح معًا و ن ح
 ب س معًا بعدلان نصف دائرة ون ح قياس ف د ي فقياس ف د ي متم ب س
 وهكذا في البقية

القضية الثانية عشرة

الزوايا الثلاث من مثلث كروي هي معاً أكبر من قائمتين واصغر من ست زوايا قائمة

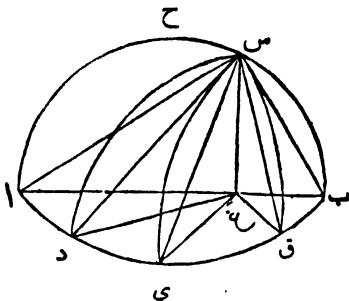
في رسم القضية السابقة اقيس الزوايا الثلاث اب س في المثلث اب س مع اضلاع المثلث المتمدة دى ف تعدل ثلاثة انصاف دائرة (ق ١١) ولكن اضلاع ف دى الثلاثة معاً اقل من نصف دائرة (ق ٨) فاقيسة اوب وس أكبر من نصف دائرة فالزوايا الثلاث اوب وس أكبر من قائمتين ولأن الزوايا الداخلة من كل مثلث مع المخارجة تعدل ست زوايا قائمة فالداخلة وحدها اقل من ست زوايا قائمة

—•••—

القضية الثالثة عشرة

إذا رُسِمَت اقواس دوائر عظيمة على محيط دائرة عظيمة من نقطة في محيط الكرة ليست هي قطب تلك الدائرة فاطول هذه الاقواس هو المارُّ بقطب تلك الدائرة ومنته هو الاقصر ومن البقية فالاقرب الى الاطول اطول من الابد منه

ليكن ا د ب محيط دائرة عظيمة قطبها ح ولكن س نقطة اخرى ومن س ليرسم اقواس على ا د ب فالاطول هو س ح المارُّ بالقطب والاقصر هو س ب من س ح ا ومن البقية فالاقرب الى س ح ا اي س د هو اطول من س ب الابد منه. من س ا رسم س غ عموداً على اب فهو عمود على سطح ا د ب. ا رسم غ د غ ي غ ق س ا س د س ب س ق س ب لان اب قطر الدائرة ا د ب وغ نقطة



فيه غير المركز فالقسم اغ الذي فيه المركز هو اطول المخطوط (ق ٧ ك ٢) التي
تُرسم من غ الى المحيط وب اقصرها وب د الاقرب الى اغ اطول من غ ي الذي
هو ابعد . ولكن المثلثان س غ ا س غ د لما فائمه عند غ واس $=$ اغ $+ غ س$
ود س $=$ د غ $+ غ س$ ولكن اغ $+ غ س <$ د غ $+ غ س$ لان اغ $<$ د غ
فاذا اس $<$ د س واس $<$ د س . ويكون الوتر اس اطول من الوتر
د س فالقوس اس اطول من القوس د س . وهكذا في البنية

—x—

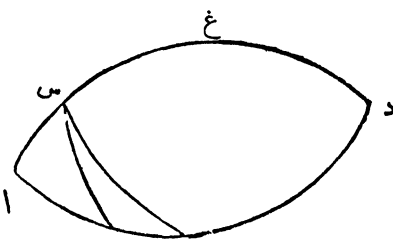
القضية الرابعة عشر

في مثلث كروي قائم الزاوية الضلعان المحيطان بالقائمة والزاويتان
المقابلتان لهما من جنس واحد . اي اذا كان الضلع اكبر من ربع دائرة
تكون الزاوية المقابلة اكبر من قائمة واذا كان اقل من ربع تكون

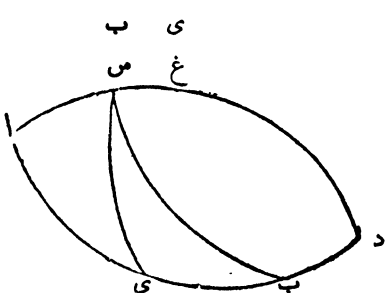
الزاوية المقابلة اصغر من قائمة

ليكن اب س مثلثا كرويا له قائمة عند ا فالضلع اب جنسة كجنس الزاوية

المقابلة اس ب



اخرج القوسين حتي تلتفيا ايضا
في د ونصف ا د في ي . فيكون اس د
نصف دائرة واب د نصف دائرة
واي قوس ٩٠ . وقد فرضت س اب
قائمة فسطح الدائرة اب د عمودي على
سطح الدائرة اس د فنقطب اس د انما
هو في اب د (ق ٤ فرع اول) وهي
في ي . ليكن ي س قوس دائرة عظيمة
مارة في ي وس



فلكون ي قطب الدائرة اس د يكون ي س ربع دائرة (ق ٢) و سطح ي س
عمودي على سطح الدائرة اس د (ق ٤) فالزاوية الكروية اس ي قائمة فاذا كان

اب اقصر من اى تكون اس ب اصغر من قائمة واذا كان اب اطول من اى
تكون اس ب اكبر من اس ي واكبر من قائمة وهكذا يبرهن قلب هذه القضية

القضية الخامسة عشرة

في مثلث كروي ذي قائمة اذا كان الضلعان المحيطان بالقائمة من
جنس واحد يكون الوتر اقل من ربع دائرة واذا كانا مختلفي الجنس
يكون الوتر اكثر من ربع دائرة

في رسم القضية السابقة نصف ا د في غ فيكون اغ قوس ٩٠ وغ قطب
اب د

(١) ليكن اب اس اقل من ٩٠. فليكون س نقطة في سطح الكرة غير قطب
اب د تكون القوس س غ د المارة بالقطب غ اطول من س ي وس ي اطول من
س ب (ق ١٢) وس ي ربع دائرة فيكون س ب اقل من ربع دائرة. وهكذا
يبرهن في المثلث س د ب ذي القائمة عند د الذي ضلعا س د و د ب اكبر من
ربع دائرة فالوتر س ب اقل من ربع دائرة

(٢) ليكن اس اقل من ٩٠ و اب اكثر من ٩٠. فلان س ب واقع بين
س غ د وس ي فهو اطول من س ي (ق ١٢) اي اطول من ربع دائرة
فرع اول. وبالقلب في مثلث كروي قائم الزاوية اذا كان الوتر اكثر من
ربع دائرة يكون الضلعان مختلفي الجنس والا فمن جنس واحد
فرع ثان. في مثلث كروي قائم الزاوية الزاويتان الاخريان من جنس
الضلعين المتقابلين لهما فاذا كان الوتر اكبر من نصف دائرة فالزاويتان الاخريان
مختلفتا الجنس والا فمن جنس واحد

فرع ثالث. الضلعان من جنس الزاويتين المتقابلتين فاذا كانت زاوية والضلع
الذي يليها من جنس واحد فالوتر اقل من نصف دائرة وبالقلب

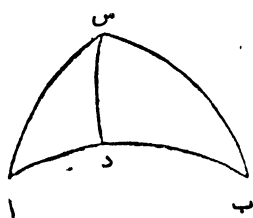
القضية السادسة عشرة

في مثلث كروي اذا رُسم عمود على القاعدة من الزاوية المقابلة ووقع العمود داخل المثلث فالزاويتان عند القاعدة من جنس واحد واذا وقع خارج المثلث فهما مختلفتا الجنس

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً ولترسم القوس س د من س عموداً على القاعدة ا ب

(١) لينع س د داخل المثلث . فالزاويتان

ا د س ب د س قائمتان فالزاويتان عند ا و ب هما من جنس س د (ق ١٤)



(٢) لينع س د خارج المثلث فالزاوية عند

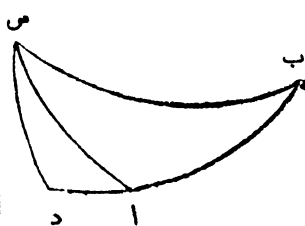
ب هي من جنس س د (ق ١٤) وس ا د من

جنس س د فالزاويتان ب و س ا د من

جنس واحد وب وس ا ب مختلفتا الجنس

فرعاً. اذا كان ا و ب من جنس واحد

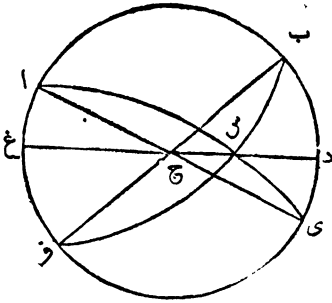
يقع العمود داخل المثلث والا فخارجه



القضية السابعة عشرة

اذا رُسم عمودين على قاعدة مثلث كروي من الزاوية المقابلة ووقع داخل المثلث او كان اقرب الاثنين الواقعين خارجه فاصغر قسبي القاعدة يلي اقصر ضلعي المثلث اذا كان مجموع الضلعين اقل من نصف دائرة ويلي اطول الضلعين اذا كان مجموعها اكثر من نصف دائرة

ليكن ا ب ي ف دائرة عظيمة من كره وج قطبها و غ ح د دائرة مارة في ح



وعودية على ا ب ي ف . ولكن ي وب
نقطتين في الدائرة ا ب ي ف على جانبي
د ولكن د اقرب الى ي . ولكن س
نقطة في الدائرة غ ح د ي ن ح ود . ارم
القوسين ي س ا ب س ف فكل
واحدة منها نصف دائرة وي س ب

ي س ف ف س ا س ب اربع مثلثات كروية بين اقواس دائرتين ولها العمودان
س د و س غ

(١) لان س ا اقرب من س ب الى القوس س ح غ فالقوس س ا اطول
من القوس س ب و س ا + س ي < س ب + س ي فيكون س ب + س ي
اقل من نصف دائرة وي د بالمفروض اقصر من د ب فيكون ي س اقصر من
س ب (ق ١٢) فاذا وقع العمود داخل المثلث وكان مجموع الضلعين اقل من
نصف دائرة فالقسم الاقصر من القاعدة يلي الضلع الاقصر

(٢) في المثلث ف س ي الضلعان ف س س ي اقل من نصف دائرة
وي س اقصر من س ف لانه ابعد عن س ح غ . فاذا وقع العمود خارج المثلث
وكان مجموع الضلعين اقل من نصف دائرة فالقسم الاقصر يلي الضلع الاقصر

(٣) ولكن في المثلث ف س ا الضلعان ف س س ا اطول من نصف دائرة
واس اطول من س ف لان ي س اقصر من س ب فيكون ا س اقرب الى
س ح غ فيكون ا غ اقصر قسمي القاعدة وهو يلي الضلع الاطول

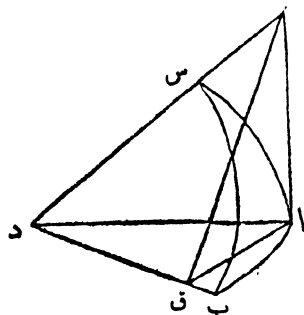
(٤) وفي المثلث ا س ب ا س و س ب معاً اطول من نصف دائرة واس
اطول من ب س فاقصر قسمي القاعدة ا غ يلي الضلع الاطول

القضية الثامنة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب احد الضلعين المحيطين
بالقائمة الى نصف قطر الكرة كنسبة ماس الضلع الآخر الى ماس
الزاوية التي تقابله

لیکن اب س مثلثاً کرو یا ڈا فائمه عند انصبة جاب : $\frac{ق}{س} :: مم$ اس : مم

اب س. لتكن د مركز الكرة. ارم دا دب
د س. وارم ا ق عموداً على ب د فهو جيب
اب ومن ق ارم الخط المستقيم ق ي عموداً
على ب د في سطح ب د س ويلتلاق د س في
ي. ارم ا ي



اكون الخط المستقيم دق عموداً على
ق اوقى يكون عموداً ايضا على سطح قى ا

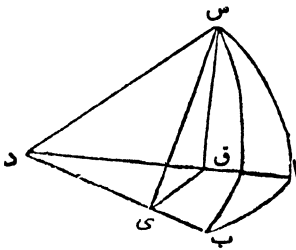
(ق ٤ ك ٢) فالسطح اب د المار في د ق هو عمودي على السطح اى ق (ق ١٧ ك ٢) والسطح اى ق عمودي على اب د. ولكن السطح اس د او اى د ايضا عمودي على اب د لان الزاوية الكروية ب اس قائمة. فيكون الخط اى موضع نقاط السطحين اى د اى ق عموديا على السطح اب د (ق ١٨ ك ٢) وى ا ق اى د قائمتين. فيكون اى ماس القوس اس. وفي المثلث البسيط اى ق ذى القائمة عند ا تكون نسبة ا ق : ق :: اى : ماس الزاوية ا ق (مثلثات مستوية ق ١) ولكن ا ق هو جيب القوس اب و اى ماس القوس اس والزاوية ا ق هى ميل السطح س ب د على السطح اب د (حد ٤ ك ٢) وتعديل الزاوية الكروية اب س فنسبة جيب القوس اب الى نصف القطر كنسبة ماس القوس اس الى ماس الزاوية المقابلة اب س

فرع^٢ لأنه بموجب هذه القضية جاب^٣: مم^٤ اس^٥: مم^٦ اب^٧ س^٨
ولأن^٩ $\frac{٢}{٣}$: نم^{١٠} اب^{١١} س^{١٢}: مم^{١٣} اب^{١٤} س^{١٥}: $\frac{٢}{٣}$ (فرع اول حد^{١٦} مثلثات مستوية)
فبالمساواة جاب^{١٧}: نم^{١٨} اب^{١٩} س^{٢٠}: مم^{٢١} اس^{٢٢}: $\frac{٢}{٣}$

القضية التاسعة عشرة

ففي مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب الوتر الى نصف القطر
كجيب احد الضلعين الى جيب الزاوية التي تقابل ذلك الضلع

ليكن $اب$ س مثلثاً كروياً ذا قائمة عند $ا$ فنسبة جيب الوتر $ب$ س الى نصف القطر كنسبة جيب القوس $اس$ الى جيب الزاوية $اب$ س

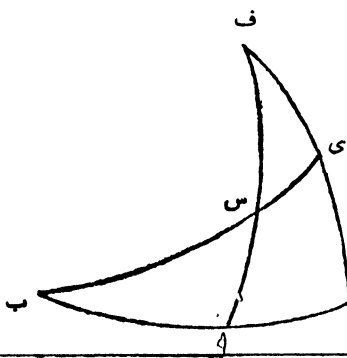


ليكن $د$ مركز الكرة وليرسم $س$ ي عموداً على $د$ ب فهو جيب القوس $س$ ب . ومن $س$ ي ليرسم الخط المستقيم $س$ ق في السطح $اب$ د

عموداً على $ب$ د وارسم $س$ ق فيكون $س$ ق عموداً على السطح $اب$ د كما تقدم في القضية السابقة فتكون $س$ ق د $س$ ق ي قائمتين ومن جيب القوس $اس$. وفي المثلث البسيط $س$ ق ي ذي القائمة $س$ ق ي تكون نسبة $س$ ي : $س$ ق :: $س$ ق : $ج$ س ي ق ($ا$ مثلثات مستوية) ولأن $س$ ي وق ي عمودان على $د$ ي ب الذي هو موضع تقاطع السطحين $س$ ب د $اب$ د فالزاوية $س$ ي ق هي ميل هذين السطحين احدهما على الآخر (حد ٤ ك ٢) وهي تعدل الزاوية الكروية $اب$ س فنسبة جيب الوتر $ب$ س : $س$ ق :: $ج$ القوس $اس$: $ج$ الزاوية المتقابلة $اب$ س

القضية العشرون

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة نظير جيب الوتر الى نصف القطر كنظير ماس احدى الزاويتين الى ماس الزاوية الاخرى
ليكن $اب$ س مثلثاً كروياً ذا قائمة عند $ا$ فنسبة نظير جيب الوتر $ب$ س الى



نصف القطر كنسبة نظير ماس الزاوية $اب$ س الى ماس الزاوية $اس$ ب
ارسم القوس $د$ ي وليكن $ب$ قطبها وليلاق $اس$ في $ف$ وب $س$ في $ي$. فلأن القوس $ب$ د تمر في النقطة $ب$ وهي قطب القوس $د$ ف القوس $د$ ف تمر في قطب $ب$ د (ق ٤) ولأن

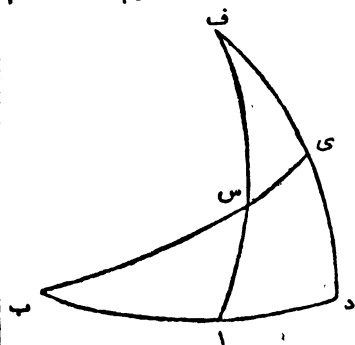
اس عمودية على ب د فسطح الدائرة اس عمودي على سطح الدائرة ب ا د واس
ايضاً تمر بقطب ب ا د فتكون ف ذلك القطب وف ا ربع دائرة وف د ربع دائرة
وهكذا ايضاً القوسان ب ي ب د . ففي المثلث س ي ف ذي القائمة عند ي يكون
س ي كمال ب س وتر المثلث ا ب س وي ف كمال القوس د ي قياس الزاوية
ا ب س وف س وتر المثلث س ي ف هو كمال القوس اس والقوس ا د قياس
الزاوية س ي ف ي هو كمال القوس ا ب وحسب (ق ١٨) في المثلث س ي ف لنا
ج س ي : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{م} :: \frac{ق}{م}$ ي ف : م ي س ف او في المثلث اس ب نجيب س
: $\frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م} :: \frac{ق}{م}$ ب س : م م اس ب

فرع ٩. لأن نجيب س : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ ب س : م م اس ب و (فرع ا ح د ٩
مثلثات مستوية) م م اس ب : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ م م اس ب ف بالمساواة م م اس ب
: نجيب س : $\frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م} :: \frac{ق}{م}$ م م اس ب

الفضية الحادية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب زاوية الى نصف
القطر كماس الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى ماس الوتر

لبرسم كما في الفضية السابقة . ثم في المثلث س ي ف نسبة جف ي : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{م}$
س ي : م س ف ي (ق ١٨) ولكن ج ي ف = نجيب اس وم س ي = م
ب س وم س ف ي = م م اس ب فاذا نجيب
ا ب س : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ ب س : م م اس ب
و (فرع اول حد ٩ مثلثات مستوية) م
ب س : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ م م اس ب ونم ا ب
: $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ م م اس ب ف بالمساواة بالقلب
م م اس ب : م م اس ب : م م اس ب



و(ق ١١ ك ٥) نجاب س : ق :: م اب : مم ب س
 فرع اول . يتضح من هذه القضية ان مائي قوسين مثل اب وب س ها
 بالتكافؤ كظير ماسيها
 فرع ثان . لان نجاب س : ق :: م اب : مم ب س وايضا ق : نج
 ب س :: مم ب س : ق فبالمساواة نجاب س : مم ب س :: م اب : ق
 اي نسبة نظير جيب احدى الزاويتين غير القائمة الى نظير ماسي الوتر كنسبة ماس
 الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى نصف القطر

القضية الثانية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الوتر الى نظير جيب الضلع الاخر
 لبرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف جس ف : ق :: جس ي :
 جس ف ي (ق ١٩) ولكن جس ف = نجس ا وجس ي = نجب س وج
 س ف ي = نجاب فنسبة نجس ا : ق :: نجب س : نجاب

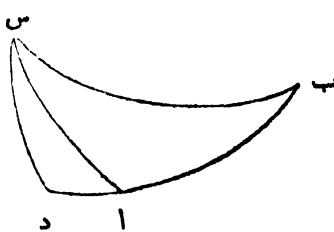
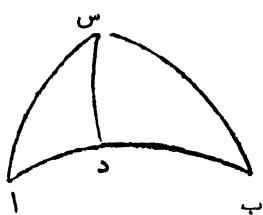
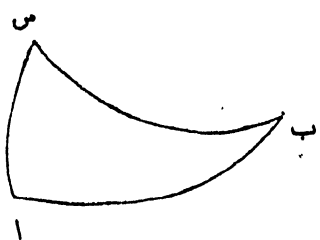
القضية الثالثة والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع الى
 جيب الزاوية الاخرى
 لبرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف جس ف : ق :: جس ي : ج
 ي س ف (ق ١٩) ولكن جس ف = نجس ا وجس ي = نجاب س وج
 ي س ف = جب س ا فاذا نجس ا : ق :: نجاب س : جب س ا

الفضية الرابعة والعشرون

في مثلثات كروية ذات قوائم وغيرها تكون جيوب الاضلاع مناسبة لجيوب الزوايا التي تقابلها

اولاً . ليكن ا ب س ذا قائمة عند ا فحسب (ق ١٩) نسبة جيب الوتر ب س الى نصف القطر او الى جيب القائمة عند ا كجيب الضلع ا س الى جيب الزاوية عند ب وايضاً نسبة جيب ب س الى جيب الزاوية عند ا كجيب ا ب الى جيب الزاوية عند س و(ق ١١ ك ٥) جيب الضلع ا س الى جيب الزاوية عند ب كجيب ا ب الى جيب الزاوية عند س



ثانياً . ليكن ا ب س مثلثاً كروياً غير ذي قائمة فتكون نسبة جيب احد اضلاعه مثل ب س الى جيب الآخر ب س كنسبة جيب الزاوية عند ا الى جيب الزاوية عند ب . من س ا رسم قوس دائرة عظيمة س د عمودية على ا ب . ففي المثلث ذي القائمة ب س د تكون نسبة جوب س : $\frac{1}{3}$ ق :: ج س د : ج ب (ق ١٩) وفي المثلث ا د س جيب ا س : $\frac{1}{3}$ ق :: جيب س د : جيب ا فبالمساواة بالقلب ج ب س : ج ا س :: ج ا : ج ب . وهكذا يبرهن ايضاً ان ج ب س : ج ا ب :: ج ا : ج س

الفضية الخامسة والعشرون

في مثلث كروي غير ذي قائمة اذا رسمت قوس عمودية من احدى الزوايا الى الضلع المقابل لها تكون نسبة نظير جيب احدى الزاويتين عند

القاعدة الى نظير جيب الاخرى كنسبة جيب احد قسي الزاوية التي

انقسمت بالعمودية الى جيب قسمها الآخر

ليرسم كما في القضية السابقة ولكن س د عمودية على القاعدة اب فنسبة نظير

جيب ب : نجح : ج د : ج ا س د : ج ا س د

لان (ق ٢٢) نجح س د : ق : نجح : ج د س ب وفي المثلث ذي القائمة

اس د نجح س د : ق : نجح : ج ا س د و (ق ١١ كه) نجح : ج د س ب :

نجح : ج ا س د وبالمبادلة نجح : نجح : ج د س د : ج ا س د

القضية السادسة والعشرون

ليُفرض كما تقدم فنسبة نظير جيب ب س الى نظير جيب س ا كنسبة

نظير جيب ب د الى نظير جيب د ا

لانه في المثلث ب س د (ق ٢٢) نجح ب س : نجح ب د : د س : ق وفي

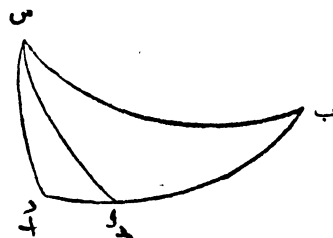
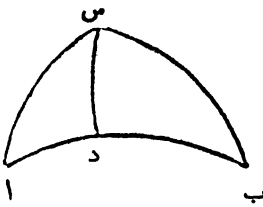
المثلث اس د نجح اس : نجح ا س : نجح ا د : ق و (ق ١١ كه) نجح ب س : نجح ب د

: نجح اس : نجح ا د وبالمبادلة نجح ب س : نجح اس : نجح ب د : نجح ا د

القضية السابعة والعشرون

ليُرسَم كما تقدم فنسبة جيب ب د الى جيب د ا كنسبة ماس ب الى

ماس ا بالتكافؤ



في المثلث ب س د (ق ١٨) ج د : ق : ج د س : م د س : م ب وفي المثلث

اس د ج ا د : ق : م د س : م ا وبالمبادلة بالقلب ج د : ج ا د : م

ا : ب

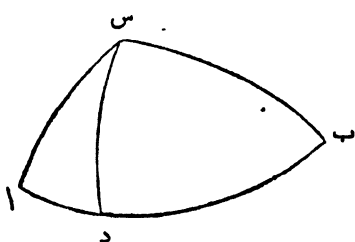
القضية الثامنة والعشرون

ليُرسَم كما تقدم فنسبة نظير جيب احدى الزاويتين الحادتين بالعمودية الى نظير جيب الاخرى كماس احد الضلعين الى ماس الآخر بالتكافؤ
 لان (ق ٢١) نجب س د : ق : م س د : م ب س وايضا نجاس د :
 ق : م س د : م اس فبالمبادلة بالقلب نجب س د : نجاس د : م اس :
 م ب س

القضية التاسعة والعشرون

في مثلث كروي اذا رُسمت قوس عمودية من احدى زواياه الى الضلع المقابل او القاعدة فالقائم الزوايا مسطح ماس نصف مجتمع قسي القاعدة في ماس نصف فضلها يعدل القائم الزوايا مسطح ماس نصف مجتمع ضلعي المثلث في ماس فضلها

ليكن اب س مثلثا كرويا ولترسم القوس س د من الزاوية عند س عمودية



على القاعدة اب ثم لنفرض ب س = ا
 واس = ب وب د = م واد = ن فالقائم
 الزوايا م $\frac{1}{2}$ (ن + م) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (م - ن) =
 م $\frac{1}{2}$ (ب + ا) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (ب - ا)

لانه (ق ٢٦) نجاس : نجب : نج : م :

نجن و (ق ٥ كه) نجاس + نجب : نجاس -

نجن : نجب : نج م + نجن : نج م - نجن

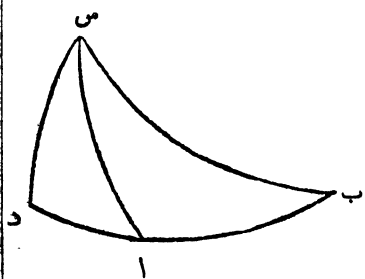
و (ق ا فرع ٢ مثلثات مستوية) نجاس +

نجن : نجاس - نجاس : نج م $\frac{1}{2}$ (ب + ا) :

نم $\frac{1}{2}$ (ب - ا) وايضا نج م + نجن :

نجن - نجن : نم $\frac{1}{2}$ (م + ن) : نم $\frac{1}{2}$ (م -

ن) فتكون (ق ١١ كه) نم $\frac{1}{2}$ (ب + ا) : م $\frac{1}{2}$ (ب - ا) : نم $\frac{1}{2}$ (م + ن) :



م $\frac{1}{2}$ (م - ن) ونسبة الاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علق
واحدة هي كسبة قواعدها بعضها الى بعض فتكون نسبة م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (ا +
ب) : م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (ا - ب) :: م $\frac{1}{2}$ (م + ن) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (م + ن) : م $\frac{1}{2}$ (م +
ن) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (م - ن). فالجزء الاول من هذه النسبة والثالث متساويان لأن كل
واحد منها يعدل مربع نصف القطر (فرع اول مثلثات بسيطة) فالثاني والرابع
متساويان (ق ٩ كه) او م $\frac{1}{2}$ (م + ن) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (م - ن) = م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (ا - ب)
م $\frac{1}{2}$ (ا - ب) او يترجع الحروف الاصلية م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا)
= م $\frac{1}{2}$ (ب + س + اس) $\times$ م $\frac{1}{2}$ (ب - س - اس)
فرع اول. لأن اضلاع اشكال متساوية ذات زوايا قائمة هي متناسبة بالتكافؤ
فنسبة م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا) : م $\frac{1}{2}$ (ب + س + اس) :: م $\frac{1}{2}$ (ب - س - اس) : م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا)

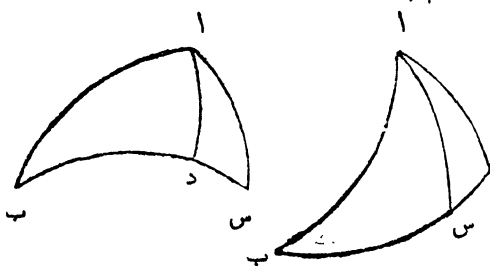
فرع ثان. اذا وقعت العمودية س د داخل المثلث فلنا ب د + ا = ا ب
القاعدة واذا وقعت س د خارج المثلث ب د - ا = ا ب فعلى الحالة الاولى نصبر
النسبة السابقة في الفرع الاول هكذا
م $\frac{1}{2}$ ا ب : م $\frac{1}{2}$ (ب + س + اس) :: م $\frac{1}{2}$ (ب - س - اس) : م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا)
وفي الحالة الثانية نصير بالقلب والمبادلة
م $\frac{1}{2}$ ا ب : م $\frac{1}{2}$ (ب + س + اس) :: م $\frac{1}{2}$ (ب - س - اس) : م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا)
نتبيه * هذه القضية والاثنان الاثنان قد وضعن المعلم نايير الاسكونسي وهن
جزيلات الفائدة لسهولة استعمالهن في الانساب

القضية الثلاثون

في مثلث كروي اذا رسمت عمودية من احدى زواياه على الضلع المقابل
او القاعدة تكون نسبة جيب مجمع الزاويتين عند القاعدة الى جيب
فضلتهما كسبة ماس نصف القاعدة الى ماس نصف فضلة قسميها اذا
وقعت العمودية داخل المثلث. وكسبة نظير ماس نصف القاعدة الى

نظير ماس مجتمع قسميها اذا وقعت العمودية خارج المثلث . ونسبة
جيب مجتمع الضلعين الى جيب فضلتهما كنسبة نظير ماس نصف
الزاوية بين الضلعين الى ماس نصف فضلة الزاويتين الحادتين بين
الضلعين والعمودية اذا وقعت داخل المثلث . والى ماس نصف
مجتمعهما اذا وقعت العمودية خارج المثلث

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً واد عمودية على القاعدة ب س فنسبة ج (س + ب)
: ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ (ب د - د س) اذا وقعت ا د داخل المثلث
وج (س + ب) :
ج (س - ب) ::
م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ (ب د + د س) اذا
وقعت ا د خارج المثلث
وايضاً ج (ا ب + ا س)



ج (ا ب - ا س) :: م $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د - س ا د) اذا وقعت ا د داخل
المثلث وج (ا ب + ا س) : ج (ا ب - ا س) :: م $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د +
س ا د) اذا وقعت ا د خارج المثلث

لانه في المثلث ب ا س (ق ٢٧) م ب : م س :: ج س د : ج ب د و (ق ١٤)
م س + م ب : م س - م ب :: ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د
وحسب السابقة التي تلو هذه القضية م س + م ب : م س - م ب :: ج (س
+ ب) : ج (س - ب) وايضاً ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د :: م $\frac{1}{2}$
(ب د + س د) : م $\frac{1}{2}$ (ب د - س د) (ق ٢ مثلثات بسيطة) و (ق ١١ ك)
ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ (ب د + س د) : م $\frac{1}{2}$ (ب د - س د)
واذا وقعت ا د داخل المثلث ب د + س د = ب س فنسبة ج (س + ب) :
ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ (ب د - س د) واذا وقعت ا د خارج المثلث
ب د - س د = ب س فنسبة ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ (ب د +

س د) : م $\frac{1}{2}$ ب س او لكون عماتي قوسين كنظيري ماسيها بالتكافؤ ج (س +
ب) : ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ (ب د + س د)
بقي ان نبرهن القسم الثاني من هذه القضية . فلان (ق ٢٨) م ا ب : م ا س



نحس ا د : نجس ا د : نجس ا د - نجس ا د وحسب السابقة المذكورة اسفل
م ا ب + م ا س : م ا ب - م ا س :: ج (ا ب + ا س) : ج (ا ب - ا س)
(و فرغ اول ق ٢ مثلثات بسيطة) نجس ا د + نجس ا د : نجس ا د - نجس ا د
:: م $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د - س ا د) فاذا (ق ١١ كه) ج (ا ب
+ ا س) : ج (ا ب - ا س) :: م $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د - س ا د)
فاذا وقعت ا د داخل المثلث ب ا د + س ا د = ب ا س فنسبة ج (ا ب + ا س)
: ج (ا ب - ا س) :: م $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د - س ا د)
واذا وقعت ا د خارج المثلث ب ا د - س ا د = ب ا س فنسبة ج (ا ب +
ا س) : ج (ا ب - ا س) :: م $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : م $\frac{1}{2}$ ب ا س او لان م
 $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : م $\frac{1}{2}$ ب ا س :: م $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د)
فنكون نسبة ج (ا ب + ا س) : ج (ا ب - ا س) :: م $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د
+ س ا د)

— ١٠٠١ —

سابقة

نسبة مجتمع ماسي قوسين الى فضلة ماسيها كنسبة جيب مجتمع القوسين
الى جيب فضلتها

ليكن ا ب قوسين فنسبة م ا + م ب : م ا - م ب :: ج (ا + ب)
: ج (ا - ب) لانه (حسب ع ٢ مثلثات بسيطة) ج ا X نجس ا + نجس ب X

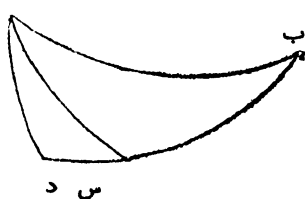
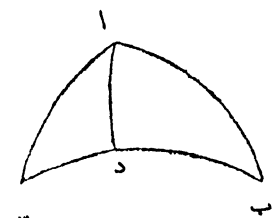
$$\begin{aligned}
 \text{ج ب} &= \text{ج د} (1 + \text{ب}) \text{ فبالقسمة على نج ا} \times \text{نج ب لنا} \\
 \frac{\text{ج ا}}{\text{نج ا} + \text{نج ب}} &= \frac{\text{ج ا} (1 + \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ ولان } \frac{\text{ج ا}}{\text{نج ا}} = \text{م ا لنا} \\
 \text{م ا} + \text{م ب} &= \frac{\text{ج ا} (1 + \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان} \\
 \text{م ا} - \text{م ب} &= \frac{\text{ج ا} (1 - \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ فاذا انسبة} \\
 \text{م ا} + \text{م ب} : \text{م ا} - \text{م ب} &:: \text{ج د} (1 + \text{ب}) : \text{ج د} (1 - \text{ب})
 \end{aligned}$$

—cot—

القضية الحادية والثلاثون

في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجموع زاويتين منه الى جيب نصف فضلتهما كنسبة ماس نصف الضلع الذي يلي الزاويتين الى ماس نصف فضلة الضلعين اللذين يقابلان الزاويتين ونسبة نظير جيب نصف مجموع هاتين الزاويتين الى نظير جيب فضلتهما كنسبة ماس نصف الضلع الذي يليهما الى ماس نصف مجموع الضلعين اللذين يقابلانها

لنفرض ان $\text{س} + \text{ب} = 2 \text{ ص}$ و $\text{س} - \text{ب} = 2 \text{ ض}$ والقاعدة $\text{ب س} = 2 \text{ ب}$ وفضلة قسي القاعدة اي $\text{ب د} = \text{ب س} = 2 \text{ ك}$



فلان (ق ٢٠) $\text{ج د} : (\text{س} + \text{ب}) :: \text{ج د} : \text{س} -$
 $\text{ب} :: \text{م ا} : \text{م ب} :: \text{م ا} : \text{ب د} - \text{س د}$ تكون
 نسبة $\text{ج د} : \text{ص} :: \text{ج د} : \text{ض} :: \text{م ب} : \text{م ك}$ ولكن
 $\text{ج د} : \text{ص} = \text{ج د} : (\text{ص} + \text{ص}) = 2 \text{ ج د} : \text{ص} \times$
 نجح ص (فصل ثالث مثلثات بسيطة) وايضاً
 $\text{ج د} : \text{ض} = 2 \text{ ج د} : \text{ض} \times \text{نجح ض}$ فلنا
 $\text{ج د} : \text{ص} \times \text{نجح ص} : \text{ج د} : \text{ض} \times \text{نجح ض} :: \text{م ب} :$
 م ك . ثم في المثلث الكروي ا ب س قد تبرهن

ان نسبة جـس + جـب : جـس - جـب :: جـاب + جـاس : جـاب - جـاس
 وحسب عا^٧ فصل ٢ مثلثات بسيطة (جـس + جـب = ٢ جـا^١ (س + ب) +
 نجـا^١ (س - ب) = ٢ جـص × نجـض وجـس - جـب = ٢ نجـا^١ (س + ب)
 × جـا^١ (س - ب) = ٢ نجـص × جـض فاذا نسبة ٢ جـص × نجـض : ٢ نجـا^١
 ص × جـض :: جـاب + جـاس : جـاب - جـاس واذا قُرض ان
 (اب + اس) = ط و^١ (اب - اس) = ظ (ق ٢ مثلثات بسيطة) جـاب
 + جـاس : جـاب - جـاس :: م^١ (اب + اس) : م^١ (اب - اس) ::
 م ط : م ظ فنسبة جـص × نجـض : نجـص × جـض :: م ط : م ظ

$$\text{ولان } \frac{م ك}{م ب} = \frac{جـص \times نجـض}{جـص \times نجـض} = \frac{م ط}{جـص \times نجـض}$$

فبضرب اشياء متساوية في اشياء متساوية نصير

$$\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} = \frac{(جـض)^2 \times نجـص \times نجـض}{(جـض)^2 \times نجـص \times نجـض} = \frac{م ط}{م ب} \text{ ولكن}$$

$$(ق ٢٩) \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \text{ فاذا}$$

$$\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \text{ وايضا } \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \text{ ولكن } \frac{م ك}{م ب} \times$$

$$\frac{م ط}{م ط} = \frac{(جـض)^2}{(جـص)^2} \text{ فاذا } \frac{(جـض)^2}{(جـص)^2} = \frac{(م ط)^2}{(م ب)^2} \text{ و } \frac{جـض}{جـص} = \frac{م ط}{م ب} \text{ او نسبة}$$

جـص : جـض :: م ب : م ط او جـب (س + ب) : جـا (س - ب) ::
 م^١ ب : م^١ س :: م^١ (اب - اس) وهذا القسم الاول من القضية

$$\text{ايضا لان } \frac{م ط}{م ط} = \frac{نجـض \times جـص}{نجـض \times جـص} \text{ او بالقلب } \frac{م ط}{م ط} = \frac{جـص \times نجـض}{جـص \times نجـض}$$

$$\text{ولان } \frac{م ك}{م ب} = \frac{جـص + نجـض}{جـص + نجـض} \text{ فبالضرب لنا } \frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} =$$

$$\frac{نجـض (جـض)^2}{نجـض (جـص)^2} \text{ وقد تبرهن ان } \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط + م ط}{م ب} \text{ فاذا } \frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} =$$

$$\frac{(م ط)^2}{(م ب)^2} \text{ وقد تبرهن ان } \frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} = \frac{نجـض (جـض)^2}{نجـض (جـص)^2} \text{ فاذا } \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب}$$

(٢ ط) $\frac{٢}{١}$ وبالنسبة نجح $\frac{٢}{٣} = \frac{ط}{٣}$ او نسبة نجح ص : نجح ض :: م ب :

م ط او نجح (س + ب) : نجح (س - ب) :: م $\frac{١}{٣}$ ب س : م $\frac{١}{٣}$ (س + ب)

وهذا القسم الثاني من القضية

فرع أول . اذا وضع برهان هذه القضية على الزاوية الممتدة اب س (ق ١١)

فما ان جيب نصف مجموع متني قوسين او نصف فضلتهما هو جيب نصف مجموع القوسين او نصف فضلتهما وهكذا في نظير الجيوب والمماسات لنصف مجموع قوسين معينين او لنصف فضلتهما وبما ان ماس نصف ممت قوس هو نظير الماس لنصف القوس فالنتيجة هي ان في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجموع ضلعين الى جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير ماس نصف الزاوية بينهما الى ماس نصف فضلة الزاويتين اللتين تقابلتهما وايضا نسبة نظير جيب نصف مجموع هذين الضلعين الى نظير جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير ماس نصف الزاوية بينهما الى ماس نصف مجموع الزاويتين المقابلتين لها

فرع ثان . اذا فرض ا ب س الزوايا الثلاث لمثلث كروي وآ ب س الاضلاع المقابلة لها فلنا هذه النسب

$$(١) \text{ ج } \frac{١}{٣} (١ + ب) : \text{ ج } \frac{١}{٣} (١ - ب) :: \text{ م } \frac{١}{٣} س : \text{ م } \frac{١}{٣} (آ - ب)$$

$$(٢) \text{ نج } \frac{١}{٣} (١ + ب) : \text{ نج } \frac{١}{٣} (١ - ب) :: \text{ م } \frac{١}{٣} س : \text{ م } \frac{١}{٣} (آ + ب)$$

$$(٣) \text{ ج } \frac{١}{٣} (آ + ب) : \text{ ج } \frac{١}{٣} (آ - ب) :: \text{ م } \frac{١}{٣} س : \text{ م } \frac{١}{٣} (١ - ب)$$

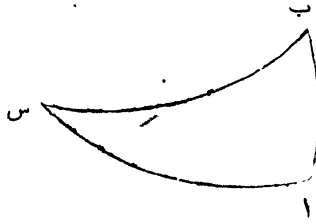
$$(٤) \text{ نج } \frac{١}{٣} (آ + ب) : \text{ نج } \frac{١}{٣} (آ - ب) :: \text{ م } \frac{١}{٣} س : \text{ م } \frac{١}{٣} (١ + ب)$$

—•—

عملية اولى

في مثلث كروي قائم الزاوية مفروض شيان من اجزائه الستة غير القائمة فعلينا ان نجد الثلاثة الاخر

هذه العملية لها ست عشرة حالة متضمنة في هذا الجدول مبنية على المثلث ا ب س
ذوي القائمة عند ا



مفروض	مطلوب	الحل	
ب س	ا س	ا ق : جب س :: جب : جاس (١٩)	١
و	ا ب	ا ق : نجب :: م ب س : م ا ب (٢١)	٢
ب	س	ا ق : نجب س :: م ب : م س (٢٠)	٣
ا س	ا ب	ا ق : جاس :: م س : م ا ب (١٨)	٤
و	ب س	نجس : ا ق :: م ا س : م ب س (٢١)	٥
س	ب	ا ق : نج ا س :: ج س : نج ب (٢٢)	٦
ا س	ا ب	م ب : م ا س :: ا ق : ج ا ب (١٨)	٧
و	ب س	ج ب : جاس :: ا ق : جب س (١٩)	٨
ب	س	نجاس : نج ب :: ا ق : ج س (٢٢)	٩
ا س	ا ب	نجاس : نج ب س :: ا ق : نجاب (٢٢)	١٠
و	ب	ج ب س : جاس :: ا ق : جب (١٩)	١١
ب س	س	م ب س : م ا س :: ا ق : نجس (٢١)	١٢
ا ب	ب س	ا ق : نجاب :: نجاس : نجب س (٢٢)	١٣
و	ب	ج ا ب : ا ق :: م ا س : م ب (١٨)	١٤
ا س	س	جاس : ا ق :: م ا ب : م س (١٨)	١٤
ب	ا ب	ج ب : نجس :: ا ق : نج ا ب (٢٢)	١٥
و	ا س	ج س : نج ب :: ا ق : نجاس (٢٢)	١٥
س	ب س	م ب : م س :: ا ق : نج ب س (٢٠)	١٦

جدول تُعرّف به اجناس الاضلاع والزوايا المستعملة في الجدول السابق

١	اس وب من جنس واحد
٢	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون اب وب من جنس واحد وإلا فيختلفان (فرع ١٥)
٣	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون س وب من جنس واحد وإلا فيختلفان (١٥)
٤	اب وس من جنس واحد (١٤)
٥	اذا كان اس وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ وإلا فيكون ب س $< ٩٠^\circ$ (فرع ١٥)
٦	ب واس من جنس واحد
٧	ملتبس
٨	ملتبس
٩	ملتبس
١٠	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون اب واس من جنس واحد وإلا فيختلفان (١٥)
١١	اس وب من جنس واحد (١٤)
١٢	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون اس وس من جنس واحد وإلا فيختلفان (فرع ١٥)
١٣	ب س $> ٩٠^\circ$ اذا كان اب واس من جنس واحد (فرع اول ١٥)
١٤	ب واس من جنس واحد (١٤)
١٤	س واب من جنس واحد (١٤)
١٥	اب وس من جنس واحد (١٤)
١٥	اس وب من جنس واحد (١٤)
١٥	اذا كانت ب وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ وإلا فيكون ب س $< ٩٠^\circ$ (١٥)

تنبيه * يراد بالملتبس ان المطلوب له قيمتان اي زاوية ما او متممها

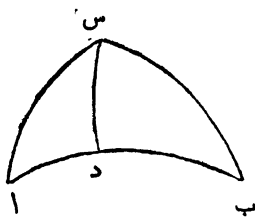
هذا الجدول مثل الاول غير انه قد فرض فيه ان $\bar{A}$ = الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة او $\bar{B}$ = الضلع الذي يقابل الزاوية $\bar{B}$ و $\bar{S}$ = الضلع الذي يقابل الزاوية $\bar{S}$

١	ج ب = ج أ × ج ب	ب	
٢	م س = م أ × نج ب	س	أ و ب
٣	ن م س = ن م أ × م ب	س	
٤	م س = ج ب × م س	س	
٥	م أ = $\frac{م ب}{ن ج س}$	أ	ب و س
٦	نج ب = نج ب × ج س	ب	
٧	ج س = $\frac{م ب}{م ب}$	س	
٨	ج أ = $\frac{ج ب}{ج ب}$	أ	ب و ب
٩	ج س = نج ب	س	
١٠	ج س = نج أ	س	
١١	ج ب = $\frac{ج ب}{ج أ}$	ب	أ و ب
١٢	نج س = $\frac{م ب}{م أ}$	س	
١٣	نج أ = نج ب × نج س	أ	
١٤	م ب = $\frac{ن م ب}{ج س}$	ب	ب و س
١٤	م س = $\frac{ن م س}{ج ب}$	س	
١٥	نج س = $\frac{نج س}{ج ب}$	س	
١٥	نج ب = $\frac{نج ب}{ج س}$	ب	ب و س
١٦	نج أ = $\frac{ن م س}{م ب}$	أ	

عملية ثانية

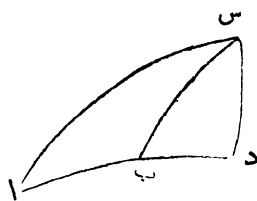
في مثلث كروي غير ذي قائمة مفروض ثلاثة اشياء من ستة فعلينا ان نجد الثلاثة الأخر

تنبيه . في هذا الجدول اذا رأيت حرف الحاء فعلام رقم هندي هكذا (ح ٤)
فلاشارة بذلك الى الحالات في الجدول السابق . والاعداد وحدها تشير الى قضايا
اصول المثلثات الكروية



مفروض	مطلوب	الحل
الضلعان ا ب ا س والزاوية بينهما ١	احدى الزاويتين الاخرتين ب	ارسم العمودية س د من الزاوية المجهولة على ا ب ١ فنسبة ا ق : نجح ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) فيعرف ب د و ج ب د : ج ا د :: م ا : م ب (٢٧) ب و ا من جنس واحد اذا كان ا ب < ب د والا فيختلفان (١٦)
الضلع الثالث ب س		ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المجهولتين ٢ على الضلع ا ب ثم نسبة ا ق : نجح ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) فيعرف ب د ونجح ا د : نجح ا س : نجح ب س (٢٦) اذا كان ا د و ب من جنس واحد يكون ا س و س ب من جنس واحد والا فيختلفان

مفروض	مطلوب	الحل
الزاويتان ا و اس ب	الضلع ب س	من س طرف ا س الذي يلي الضلع المطلوب ارسم س د عمودية على ا ب ثم ق : نج ا س :: م : ا : ثم ا س د (ح ٢) فتعرف ب س د ونسبة نج ب س د : نج ا س د :: م : ا س : م ب س (٢٨) اذا كان ا و ب س د من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ والا فاكبر من ٩٠°
والضلع بينهما اس	الزاوية الثالثة ب	ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المفروضتين على ا ب الضلع المقابل ثم ق : نج ا س :: م : ا : ثم ا س د (ح ٢) فتعرف ب س د ونسبة ج ا س د : ج ب س د :: نج ا : نج ب (٢٥) اذا وقعت س د داخل المثلث او كانت ا س ب اكبر من ب س د تكون ب و ا من جنس واحد والا فمختلفان (١٦)
الزاوية ب التي تقابل الضلع الآخر المفروض اس		ج ب س : ج ا س :: ج ا : ج ب (٢٤) جنس ب ملتبس الا اذا تعين كون ا + ب اكثرا و اقل من ١٨٠° لكون ا س + ب س اكثرا و اقل من ١٨٠° (١٠)
ضلعان اس وب س والزاوية ا التي تقابل	الزاوية اس ب بين الضلعين المفروضين	من ا س ب الزاوية المطلوبة ارسم س د عمودية على ا ب ثم ق : نج ا س :: م : ا : ثم ا س د (ح ٢) وم ب س : م : ا س :: نج ا س د : نج ب س د (٢٨) وا س د + ب س د = ا س ب وهي ملتبسة
احدهما ب س	الضلع الثالث ا ب	ارسم س د عمودية من س الزاوية بين الضلعين المفروضين على ا ب ثم ق : نج ا س :: م : ا : ثم ا د (ح ٢) ونج ا س : نج ب س :: نج ا د : نج ب د (٢٦) وا ب = ا د + ب د فيكون ا ب ملتبسا



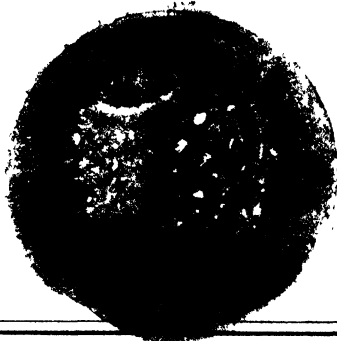
مفروض	مطلوب	الحل
الضلع ب س	ج ب : ج ا :: ج ا س : ج ب س (٢٤) وب س ٨	المقابل الزاوية ملتبس الا اذا تعين كون اس + ب س اكثر او اقل من ١٨٠° حسبما كانت ا + ب اكثر او اقل من ١٨٠° (١٠) المفروضة ا
زاويتان ا وب والضلع اس الذي يقابل احدهما ب	الضلع ا ب الذي يلي الزاويتين المفروضتين ا وب	من الزاوية المجهولة س ا رسم س د عمودية على ا ب ثم ق : نج ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) وم ب : م ا :: ج ا د : ج ب د وب د ملتبس فاذا ا ب = ا د ± ب د وله اربع قيمات غير ان البعض منها يخرج بلزوم كون ا ب اقل من ١٨٠°
الزاوية الثالثة ا س ب	الزاوية الثالثة ا س ب	من الزاوية المطلوبة ا رسم س د عمودية على ا ب ثم ق : نج ا س :: م ا : م ا س د (ح ٣) ونج ا : نج ب :: ج ا س د : ج ب س د (٢٥) ب س د ملتبس فاذا ا س = ب ا س د ± ب س د ولها اربع قيمات غير ان البعض منها يخرج بلزوم كون ا س ب اقل من ١٨٠°

الاضلاع الثلاثة	اب	اس	ب س	احدى الزوايا	١	١١
من س احدى الزاويتين الغير المطلوبتين ارسم س د عمودية على ا ب . ثم استعلم قوساً ي حتى تكون نسبة $\frac{م}{م} : \frac{ا}{ب} :: \frac{م}{م} : \frac{ا}{ب} + \frac{ب}{س}$ (ا س - ب س) : $\frac{م}{م}$ ي . فاذا كان ا ب اكبر من ي فيكون ا ب مجنوع ا د و د ب وى فضلنها واذا كان ا ب اصغر من ي يكون مجنوع ا د و د ب و ا ب فضلنها (٣٩) وعلى المحالين ا د و ب د معروفان وم ا س : م ا د : $\frac{ا}{ق} : \frac{ب}{ق}$: نجـ ا						
الزوايا الثلاث	احد	الاضلاع	ب س	افرض ممات الزوايا ا و ب و س المفروضة ا و ب و س واحصها اضلاع مثلث كروي واستعلم بالحالة السابقة الزاوية من هذا المثلث التي تقابل الضلع ا فهي ممثـلـ ضلع المثلث المفروض الذي يقابل الزاوية ا منـه اي ب س (١١)	١٢	

في هذا الجدول فُرِضت الزوايا اوب وس كما تقدم والاضلاع التي تقابلها آ وب وس وك وى بعدلان قسي القاعدة او قسي الزاوية التي تقابلها

مفروض مطلوب	الحل
ضلعان بـ وب وس والزاوية بينهما ١	ب استعلمك حتى ان م ك = م ب × نج ا ثم م ب = ١ ج ك × ١٢ (ج د - س - ك)
الزاويتان اوس والضلع بـ	آ استعلمك كما تقدم ثم نج ا = نج ب × نج ج (س - ك) ٢ نجدك
الزاويتان اوس والضلع بـ	آ استعلمك حتى ان م ك = نج ب × م ا ثم م آ = ٣ م ب × نج ك نجد (س - ك)
الضلعان اوب وآ	ب استعلمك كما تقدم ثم نج ب = نج ا × ج د (س - ك) ٤ ج ك
الزاويتان اوب وآ	ب ج ب = ج ب' × ج ا ٥ ج ا
الزاويتان اوب وآ	س استعلمك حتى ان م ك = نج ب × م ا ثم نج س = ٦ نجدك × م ب ١٣
الزاويتان اوب وآ	س استعلمك حتى ان م ك = م ب × نج ا واستعلم ي ٧ حتى ان نج ب = نج ا' × نج ك نجد س = ك ± ي
الزاويتان اوب وآ	آ ج ا = ج ب × ج ا ٨ ج ب
الزاويتان اوب وآ	س استعلمك حتى ان م ك = م ب × نج ا واستعلم ي ٩ حتى ان ج د = ج ك × ١٢ م ب س = ك ± ي
الضلع بـ وب	س استعلمك حتى ان م ك = نج ب × م ا واستعلم ي ١٠ حتى ان ج د = ج ك × نج ب نجد س = ك ± ي

الحل	مفروض مطلوب	
١١	لنفرض ان $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \bar{S}$ $\frac{(\bar{A} - \bar{B}) \times (\bar{A} - \bar{C})}{\bar{A} \times \bar{B}} = \frac{1}{3} \text{ ج } \bar{A}$ $\frac{(\bar{A} - \bar{C}) \times (\bar{B} - \bar{C})}{\bar{A} \times \bar{B}} = \frac{1}{3} \text{ او نج } \bar{A}$	ا ب س
١٢	لنفرض ان $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \bar{S}$ $\frac{(\bar{A} - \bar{B}) \times (\bar{A} - \bar{C})}{\bar{A} \times \bar{B}} = \frac{1}{3} \text{ ج } \bar{A}$ $\frac{(\bar{A} - \bar{C}) \times (\bar{B} - \bar{C})}{\bar{A} \times \bar{B}} = \frac{1}{3} \text{ او نج } \bar{A}$	ا ب س



خاتمة اصول قياس المثلثات الكروية

في قواعد الاجزاء الدائرة للمعلم نايير
قواعد الاجزاء الدائرة التي استخرجها المعلم نايير الاسكوتسي من اصول قياس
المثلثات الكروية هي كثيرة الفوائد لسهولة حفظها واستعمالها في الحسابات بواسطة
الانساب او اللوغاريثات

حدود

١ في مثلث كروي قائم الزاوية اذا غصّ النظر عن القائمة نبتى خمسة اجزاء
اي ثلاثة اضلاع وزاويتان غير قائمتين فالضلعان المحيطان بالقائمة وكالات الثلاثة
الآخر اي الزاويتين والوتر هي الاجزاء الدائرة . مثال ذلك في المثلث ا ب س
ذي القائمة عند ا فالاجزاء الدائرة هي ا س ا ب وكالات ب وب س وس وسُميت
بالاجزاء الدائرة لانها اذا عدّت على ترتيب تدور حول المثلث

٢ اذا اخذ واحد من هذه الاجزاء الخمسة وسي الوسط فمن الاربعة الباقية

اثنان يواليان الوسط فهما المواليان احدها
عن يمين الوسط والآخر عن يساره
والاخران هما المقابلان وبين كل واحد
منهما والوسط واحد من المواليين



مثال ذلك في المثلث ا ب س

فالاجزاء الدائرة حسب المبدأ الاول هي ا س ا ب ٩٠ - ب ٩٠ - س ٩٠ -
س واذا حسبنا ا س الوسط يكون ا ب ٩٠ - س الموالين ٩٠ - ب ٩٠ -
ب س المقابلين واذا حسبنا ا ب الوسط يكون ا س ٩٠ - ب الموالين ٩٠ -
ب س ٩٠ - س المقابلين واذا حسبنا ب س الوسط يكون ا ب ٩٠ -
و ٩٠ - س الموالين و ا ب المقابلين وهكذا الى آخره . واذا تقرّر ذلك
ففاعلة الاجزاء الدائرة هي في هذه

القضية

في مثلث كروي قائم الزاوية القائم الزوايا مسطح نصف القطر في
جيب الوسط يعدل القائم الزوايا مسطح ماسي الموالين او يعدل
مسطح نظيري جيب المقابلين

تبرهن هذه القضية بان يجعل كل جزء وسطاً في نوبته ثم تقابل القضية على
احد البراهين السابق ذكرها . فاذا جعل ب س وسطاً لنا ٩٠ - ب و ٩٠ - س
الموالين ا ب و ا س المقابلان و ق خ نج ب س = نم ب خ نم س (حسب
ق ٢٠ فرع ٢) و ق خ نج ب س = نج ا ب خ نج ا س (حسب ق ٢١)
فاذا قصدت ان تحل مشكلة بواسطة هذه القضية فانظر الى اي الاشياء المسماة
اعني المفروضين والمطلوب يجعل وسطاً لكي يكون الاخران على بعد واحد منه فلا بد
من وجود المطلوب في احدي النظريتين المذكورتين في القضية

فلو فرض ا ب و ا س وكان المطلوب س فالامر واضح انه اذا جعل ا ب
وسطاً يكون ب س وس المقابلين و ق خ ج ا ب = ج س خ ج ب س لان
ج س = نج (٩٠ - س) ونج (٩٠ - ب س) = ج ب س فاذا ج س =
ج ا ب
ج ب س

ولو فرض ب س وس وكان ا س المطلوب فاذا جعل س وسطاً يكون
ا س و ٩٠ - ب س الموالين و ق خ نج س = م ا س خ نم ب س او م ا س =
نم ب س = نج س + م ب س لانه قد تبرهن سابقاً ان $\frac{1}{\text{نم ب س}} =$
م ب س

وقد استخرج المعلم ناير من القضية الحادية والثلاثين عبارات لحل المسائل في
مثلث غير ذي قائمة . فيفرض كما تقدم زوايا المثلث ا و ب وس والاضلاع التي
تقابلها ا و ب وس فلنا اربعة احوال

(١)

مفروض ضلعان ب وس والزاوية بينهما
مطلوب الزاويتان ب وس

$$\text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س}) = \text{نم} \frac{1}{2} \times \frac{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س})}{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س})} \quad \text{ق ٢١ فرع اول}$$

$$\text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س}) = \text{نم} \frac{1}{2} \times \frac{\text{نج} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س})}{\text{نج} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س})} \quad \text{ق ٢١ فرع اول}$$

مطلوب الضلع الثالث آ

ج ب : ج ا :: ج ب : ج آ

(٢)

مفروض ضلعان ب و س والزاوية ب المقابلة لاجدها

مطلوب س والزاوية المقابلة للضلع الآخر

ج ب : ج س :: ج ب : ج س

لمعرفة الزاوية بينها ا

$$\text{نم} \frac{1}{2} = \text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س}) \times \frac{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س})}{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س})} \quad \text{ق ٢١ فرع اول}$$

لمعرفة الضلع الثالث آ

ج ب : ج ا :: ج ب : ج آ

(٣)

مفروض زاويتان ا و ب والضلع س بينها

مطلوب الضلعان الآخران آ و ب

$$\text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{آ}) = \text{م} \frac{1}{2} \text{س} \times \frac{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ا} - \text{ب})}{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب})} \quad (٣١)$$

$$\text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{آ}) = \text{م} \frac{1}{2} \text{س} \times \frac{\text{نج} \frac{1}{2} (\text{ا} - \text{ب})}{\text{نج} \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب})} \quad (٣١)$$

لمعرفة الزاوية الثالثة س

ج آ : ج س :: ج ا : ج س

(٤)

مفروض الزاويتان ا و ب والضلع المقابل احدهما آ

مطلوب ب الضلع الذي يقابل الاخرى

ج ا : ج ب :: ج آ : ج ب

لمعرفة مقياس الضلع بين الضلعين المفروضين

$$(٣١) \quad \frac{\frac{1}{2} \text{ جـ} + \frac{1}{2} \text{ ب}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ب}} \times (\text{آ} - \text{ب}) = \frac{1}{2} \text{ س} - \frac{1}{2} \text{ م}$$

لمعرفة الزاوية الثالثة س

جـ آ : جـ س :: جـ ا : جـ س

قد وضعنا هنا عبارات لحل المسائل اذا فرضت اضلاع مثلث ولكن القضية التي هي مبنية عليها لم تدرهن في ما سبق. المفروض كما تقدم الزوايا ا ب س والاضلاع آ ب س

لمعرفة الزاوية ا بين ب و س

لنفرض ان $\frac{1}{2} \text{ ق} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ب} \times \text{س} = \text{س} - \text{ص}$

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ص}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} + \frac{1}{2} \text{ ص}} \times \frac{\frac{1}{2} \text{ ب}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ص}} = \frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ا}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ص}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} + \frac{1}{2} \text{ ص}} \times \frac{\frac{1}{2} \text{ ب}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ص}} = \frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ا}$$

واذا فرض الزوايا الثلاث ا ب س وكان المطلوب س الضلع بين ا و ب

لنفرض ان $\text{ا} + \text{ب} + \text{س} = \text{ص}$

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ص}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} + \frac{1}{2} \text{ ص}} \times \frac{\frac{1}{2} \text{ ب}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ص}} = \frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ا}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ص}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} + \frac{1}{2} \text{ ص}} \times \frac{\frac{1}{2} \text{ ب}}{\frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ص}} = \frac{1}{2} \text{ جـ} - \frac{1}{2} \text{ ا}$$

هذه النظريات كثيرة الاستعمال لسهولة استخدامها في الحسابات بواسطة الانساب فاذا كانت ا زاوية كثيرة الانفراج يجب ان نستعمل النظرية الثانية التي تدل على قيمة نظير جيب نصفها والا فالاولى افضل التي تدل على قيمة جيب نصفها وهكذا يقال في الضلع س وسبب ذلك قد انضح في اصول المثلثات البسيطة وكان الفراغ من تبييضه في ١٤ آب سنة ١٨٥٧ في مدينة صيدا انتهى

