

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191058

UNIVERSAL
LIBRARY

هذا كتاب الفضة العزبة
في تهذيب الامور
الهندية

٥١٣
ع
ن



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله مبدع المخلوقات العالم بما كان وما هو كائن وما هو آت مخترع
الاشياء في غاية الاتقان ومبرزها من خفاء العدم الى ظهورها ايمان جعلها
في غاية الاحكام فبهت العقول بما فيها من بديع الانتظام ان في ذلك
لايات لاولى الالباب وارشاد عن ليل الخطاء الى نهار الصواب والصلاة
والسلام على قطب دوائر الوجود ومطلع شمس التقى والجلود مسقط
نقطة قلم الالهيات ومنبع الحكم والرياضيات محمد المبعوث باشكال
الفضائل المؤيد باقوى البراهين والدلائل وعلى آله اولى القوة واليقين
المتزهين عن كل عرض يشين ثم الدعاء لحضرة صاحب الخزم والرأى
السديد مولى الديار المصرية الصدر السعيد مركز دائرة الملك او حدمن
تقلب على منون الجياد والملك القاسم على منشور بسيطة العدل في تلك
الديار التي بلغت بهمة الغاية القصوى في الفضل أيد الله احكامه وثبت
على صراط الصدارة اقدمه وبعد فيقول الفقير الى رحمة المعيد المبدى

على عزت أفندي لما امرني من اجابه السعد بليك ناظر المدارس الثلاث
على مباركتك ان اخلص كتابي أصول الهندسة تكون عباراته على
السهولة مؤسسه ويكون مهذب المعاني جيد التركيب والمباني يتفق
به القاصي والداني ويكون واسطة في جعل تعليم الهندسة العادية
جاريا على ترتيبه بالمهندسخانة الخديوية قابلت أمر حضرته بالامتثال
واحتفلت به كل الاحتفال واعتيت بجمع هذا الكتاب ليكون عمدة
لذوى الالباب واتخبطه من كتب شتى منها كتاب اقليدس الشهير
وكتاب لا قوروا صاحب الفهم الغزير وكتاب الشهير فراتكور وكتاب
المهندس ونسن صاحب الفهم المأثور وكتاب الشهير ليونتي اشهر مؤلف
ومنشى وكتاب الشهير بلانسي المعروف الذي تأليفه بالسلامة
موصوف وكتاب الشهير بلانسي وغير ذلك من المؤلفات الفرنسية
المفيدة ذوات العقود الفريدة وكان عمدي في هذا التأليف كتاب جديد
في أصول الهندسة جامع لما شيد مبانيه كل مهندس من المقدمات وأسسها
وقد اهتم بتأليف هذا الكتاب الاخير المهندس لثراندر الفرنسية الشهير
فيلسوف زمانه وفريد نظرائه واقرائه وذلك لما اشتمل عليه من كثرة
المعاني وقلة الالفاظ والمباني مع ما اختص به من حسن الترتيب
وسهولة الاسلوب الغريب ولذلك طبع بمدينة باريس أربعة عشر مرة
بزيادة التحسين والتهديب في كل مرة وكانت الطبعة الرابعة عشر منه
في ١٨٤٥ سنة مسيحية الموافقة لـ ١٢٦١ سنة هجرية فاخذت منه ومن كل كتاب
ما حسن وطاب وحذفت ما لا حاجة اليه ولا معول فيما نحن بصدده عليه
ورتبته ترتيبا يسر الخاطر ويروق الناظر وغيرت في هذا الكتاب النافع
للمقيم والمسافر محبت الخطوط المتوازية ومجت تماس محيطات الدوائر
واجتهدت في تسهيل براهينه على قدر الامكان وامعنت النظر فيه كل
الامعان وااضفت للمقالة الثالثة دماوى نظرية ضرورية في العلوم النظرية
والعملية وفي تطبيق العلوم الرياضية على العلوم الطبيعية لاسيما في الخواص

الهندسية للاثثة الضوئية واضفت الى عمليات هذه المقالة لتسكيل المعنى
 دعاوى عملية أخرى عنها لا يستغنى واضفت الى ذلك ما جاد به فكبرى من
 الامثلة المفيدة ذوات المتافع العديدة وشرحتها عقب الدعاوى العملية
 المتعلقة بالمقالة الثالثة من الاصول الهندسية حتى يتوصل بها الى فهم
 ما يرام في هذا القرض البعيد المرام وجعلت للمقالة الرابعة التي هي
 اهذه المقالة الثالثة تابعة تطبيقات مفيدة مبنية على فوائدها جديدة بعضها
 مشروح في الدعاوى المشهورة وبعضها مشروح عقب المقالة الرابعة
 المذكورة وجعلت كلما ينسب الى كل مقالة من الاشكال منفردا عن
 عداه دفعا لالاتباس والاشكال واجتهدت في تحرير الفاظه ومبانيه
 وتهذيب عباراته ومعانيه وكنت اعرض كلما ترجمته أو الفقه وجمعه
 وحررته على حضرة الشيخ ابراهيم الدسوقي صاحب الفهم الثاقب والاجتهاد
 الحقيقي فجاء بحمد الله وايقا بالمراد شافيا غلة الصادق شاهد الايام ولى النعم
 صاحب الدولة والهم بانهم اعز في جباه العصور خلدا لله ملكه الى البعث
 والنشور ولما تم بالتمام وابس وشاح الختام وبسمه مصححه بالنخبة العزيرة
 في تهذيب الاصول الهندسية والله الموفق للصواب واليه المرجع
 والمآب

(في الاصول الهندسية)

المقالة الاولى في خواص الخطوط المستقيمة وتساوى المثلثات وخواص
الشكل الرباعي

(حدود)

(حد ١) الجسم ماله أبعاد ثلاثة هي الطول والعرض والعمق أي الشكل

(حد ٢) الحيز هو الفراغ الذي يشغله الجسم

(حد ٣) سطح الجسم هو الحد الفارق بينه وبين المحيط به الملاصق وبعبارة
أخرى ماله طول وعرض فقط

(حد ٤) الخط ملتحق سطحين وبعبارة أخرى هو طول فقط

(حد ٥) النقطة ملتحق بخطين

(حد ٦) كل من الحجم والسطح والخط يعتبر مجزأ عن المادة

(حد ٧) يطلق اسم الشكل على الحجم وعلى السطح وعلى الخط

(حد ٨) موضوع الهندسة الاشكال من حيث مساحة امتدادها
ومعرفة خواصها

(حد ٩) الخط المستقيم اقرب بعددين نقطتين مثاله الخط أ - ب من
(الشكل ١)

(حد ١٠) الخط المنكسر خط مركب من خطوط مستقيمة ليست على
استقامة واحدة مثاله الخط أ ب ج د هـ من (الشكل ١)

(حد ١١) الخط المنحني ما ليس مستقيماً ولا منكسراً مثاله الخط أ هـ -
من (الشكل ١)

(حد ١٢) المستوى كل سطح امكن تطبيق المستقيم عليه في سائر جهاته
وبعبارة أخرى هو سطح اذا اخذ فيه نقطتان بالاختيار ووصل بينهما بـ مستقيم
انطبق هذا المستقيم عليه انطباقاً تاماً

(حد ١٣) السطح المنحني ما ليس مستوياً ولا مركباً من سطوح مستوية

(حد ١٤) الزاوية مسافة واقعة بين مستقيمين متقاطعين وبعبارة

اخرى هي الانفراج الكائن بين مستقيمين متقاطعين ونقطة التقاطع تسمى رأس الزاوية والمستقيمان يسميان ضلعاها مثالها الزاوية $\angle$ ا ح المرسومة في (الشكل ٢) فالنقطة ا تسمى رأس الزاوية وكل من المستقيمين $\angle$ و $\angle$ - يسمى ضلعاها والزاوية تميز تارة بحرف الرأس وتارة بثلاثة حروف بشرط أن يذكّر حرف الرأس في الوسط فان كانت مفردة كفي لتمييزها حرف الرأس وان كانت مركبة من زاويتين فـ $\angle$ كثر وجب تمييزها بالحروف الثلاثة

والزاويتان المتساويتان زاويتان اذا وضعت احدهما على الاخرى انطبقت عليهما انطباقا كاملا

اذا احتوت زاوية مثل ا على زاويتين كلتاهما مساوية لزاوية اخرى كالزاوية د يقال ان الزاوية ا ضعف الزاوية د فاذا احتوت على ثلاث زوايا كذلك يقال ان الزاوية ا ثلاثة امثال الزاوية د وهكذا فالزاويا قابلة للمقارنة ببعضها كبقية المقادير

(حد ١٥) الزاوية القائمة هي احدى الزاويتين المتجاورتين المتساويتين الحادتين من تلاقي مستقيمين بانحر مثالها الزاوية $\angle$ ا ح أو $\angle$ ا د كافي (الشكل ٣)

والزاوية المنفرجة هي ما كانت اكبر من الزاوية القائمة مثالها الزاوية د ه و من (الشكل ٤)

والزاوية الحادة هي ما كانت اصغر من الزاوية القائمة مثالها الزاوية $\angle$ ا من (الشكل ٤)

(حد ١٦) المستقيم العمود على مستقيم هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين مثالها المستقيم ا - من (الشكل ٣)

(حد ١٧) المستقيم المائل على مستقيم هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين غير متساويتين مثالها المستقيم ح د من (الشكل ١٧)

(حد ١٨) الزاويتان المتمتان لبعضهما هما زاويتان مجموعهما يساوي

زوايتين قائمتين

(حد ١٩) الزاويتان التاميتان هما زاويتان مجموعهما يساوي زاوية قائمة

(حد ٢٠) الخطان المتوازيان خطان مستقيمان في مستو واحد اذا امتدّا

لا يلتقيان أصلاً مثال ذلك ١ - ٢ - ٣ من (الشكل ٥)

(حد ٢١) الشكل المستوي سطح مستو محدّد من جميع جهاته بخطوط

لكن اذا كانت تلك الخطوط مستقيمة فالمسافة المحددة بتلك الخطوط تسمى شكلاً

مستقيم الخطوط او مستقيم الاضلاع او مضلعاً مستوياً فجملة الخطوط

المدكوّرة تكون محيط الشكل أو أطرافه كما في (الشكل ٦)

(حد ٢٢) أبسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ماله ثلاثة اضلاع ويسمى

مثلثاً وماله اربعة اضلاع يسمى ذا اربعة اضلاع أو شكلاً رباعياً وماله خمسة

اضلاع يسمى مخمساً أو شكلاً خماسياً وماله ستة يسمى مستدساً أو شكلاً

سداسياً وهكذا

(حد ٢٣) المثلث المتساوي الاضلاع ما كانت اضلاعه متساوية كما في

(الشكل ٧)

والمثلث المتساوي الساقين ما كان فيه ضلعان متساويان فقط كما في

(الشكل ٨)

والمثلث المختلف الاضلاع ما كانت اضلاعه مختلفة كما في (شكل ٩)

(حد ٢٤) المثلث القائم الزاوية ما كانت إحدى زواياه قائمة والضلع

المقابل لها يسمى وترها فالمثلث ١ - ٢ - ٣ القائم الزاوية ١ يسمى مثلثاً قائم

الزاوية والضلع ٢ يسمى وتر القائمة كما في (الشكل ١٠)

(حد ٢٥) الشكل الرباعي انواع وهي المتوازي الاضلاع والمعين

والمستطيل والمربع والمنحرف وشبه المنحرف أما المتوازي الاضلاع فهو

ما كانت اضلاعه المتقابلة متوازية سواء كانت اضلاعه المتجاورة متساوية

او غير متساوية وسواء كانت زواياه قائمة او غير قائمة كما في (الشكل ١٣)

وأما المعين فهو متوازي اضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة كما في

(الشكل ١٤)

وأما المستطيل فهو متوازي اضلاع زواياه قائمة واضلاعه المتجاورة مختلفة
كما في (الشكل ١٢)

وأما المربع فهو متوازي اضلاع اضلاعه متساوية وزواياه قائمة كما في
(الشكل ١١)

وأما المخرف فهو شكل رباعي أضلاعه المتقابلة غير متوازية
وأما شبه المخرف فهو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط كما في
(الشكل ١٥)

(حد ٢٦) قطر الشكل خط مستقيم موصول بين رأسى زاويتين غير
متجاورتين من زواياه كالخط ac من (الشكل ٤٢)

(حد ٢٧) كثير الاضلاع ان كانت اضلاعه متساوية يسمى متساوى
الاضلاع وان كانت زواياه متساوية يسمى متساوى الزوايا

(حد ٢٨) الشكلان المتساويا الاضلاع شكلان اضلاعهما المتناظرة
متساوية وموضوعة على نظم واحد أى أثناء ذات بقعنا محيطيهما في جهة
واحدة شاهدنا الضلع الاول من احدهما مساويا للاول من الآخر
والثانى من الاول مساويا للثانى من الآخر والثالث للثالث وهكذا

والشكلان المتساويا الزوايا شكلان زواياهما المتناظرة متساوية وموضوعة
على ترتيب واحد أى أن الزاوية الاولى من احدهما مساوية للاولى من
الآخر والثانية من الاول مساوية للثانية من الآخر والثالثة للثالثة وهكذا
والاضلاع المتساوية تسمى بالاضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية تسمى بالزوايا
المتناظرة

(حد ٢٩) كثير الاضلاع المحذب شكل موضوع بتمامه في جهة واحدة
من اتجاه أى ضلع من اضلاعه

ومحيط أى مضلع محذب لا يمكن أن يقطعه أى مستقيم في اكثر من نقطتين

* (تنبيه) *

المقالات الاربع الاول يبحث فيها عن الاشكال المستوية وعن الخطوط
المرسومة على السطح المستوي

* (بيان الاصطلاحات والعلامات المشتملة عليها هذه الاصول) *

ضروريات العلم قضاياه البينة بنفسها أى التى لا تحتاج الى برهان
الدعوى النظرية هى القضية التى لا تتضح حقيقةها الا بواسطة البرهان
العقلى

الدعوى العملية هى المسئلة التى يراد حلها بالعمل
الفائدة هى القضية المعينة على اثبات دعوى نظرية او مسئلة
القضية اسم يطلق على الدعوى النظرية والعملية والفائدة
النتيجة هى الثمرة التى تظهر من قضية او جملة قضايا تقدمت
التبنيى ما يفهم منه فائدة الدعوى التى تقدمت وارتباطها بغايتها
الفروض هى الموضوعات التى تندرج فى تقرير قضية او فى اثبات برهان

* (العلامات) *

هذه العلامة = تسمى علامة التساوى فكتابة $a = b$ - معناها a
تساوى -

ولبيان أن مقدار a اصغر من مقدار b يكتب $a < b$ -

ولبيان أن a اكبر من b يكتب $a > b$ -

وهذه العلامة $+$ هى علامة الزيادة وتدل على الجمع وهذه العلامة -

هى علامة النقصان وتدل على الطرح فكتابة $a + b$ - تدل على حاصل

جمع كبتى a و b - وكتابة $a - b$ - تدل على فرقهما أى على الباقي

من طرح الكمية a من الكمية b - وكتابة $a \times b$ - تدل على حاصل

أو $a \div b$ - تدل على انه ينبغى جمع a و b وطرح -

من حاصل جمعهما

وهذه العلامة $\times$ تدل على الضرب فكتابة $a \times b$ - تدل على الحاصل

من ضرب ١ في - وقد نستهعمل نقطة بدل علامة الضرب هذه $\times$
فكتابة ١ $\times$ - ككتابة ١ - وقد يكتب الحاصل المذكور أيضا
بدون علامة متوسطة بين المضروب والمضروب فيه هكذا ١ -

وكتابة ١ $\times$ (- + -) تدل على حاصل ضرب ١ في كمية -
+ - + واذ اريد بيان حاصل ضرب ١ + - في ١ - -
+ - يكتب هكذا

(١ + -) (١ - - +) فكلما احصر بين قوسين يعتبر كمية
واحدة فقط

ابيان ان الخط ١ - مكرر ثلاث مرات يكتب ١ ٣ - وبيان اخذ نصف
زاوية - يكتب $\frac{1}{2}$ - ويستدل على مربع الخط ١ - بهذه العلامة

١ - وعلى مكعبه بهذه $\frac{1}{3}$ - وسيتضح مربع الخط ومكعبه في محله

هذه العلامة $\frac{1}{2}$ تدل على استخراج الجذر فكتابة $\frac{1}{2}$ ٩ تدل على ان
المطلوب جذر المربع ٩ وهو ٣ وكتابة $\frac{1}{2}$ - $\times$ تدل على ان
المطلوب جذر حاصل ضرب - $\times$ اي على الوسط المتناسب الهندسي
بين - و +

* (ضروريات العلم) *

(١) المقداران المساويان لمقدار واحد متساويان

(٢) الكل اعظم من جزئه

(٣) الكل يساوي مجموع اجزائه

(٤) لا يمكن وصل خطين مستقيمين بين نقطتين

(٥) الشئان يكونان متساويين اذا امكن انطباق احدهما على الآخر

انطباقا تاما سواء كان هذان الشئان خطين او سطحيين او جسمين

(٦) الاشياء المتساوية اذا اضيف لها اشياء متساوية كانت الحواصل

متساوية

(٧) الاشياء المتساوية اذا طرح منها اشياء متساوية كانت البواقي متساوية

(٨) الاشياء المتساوية اذا ضربت في اشياء متساوية كانت الحواصل متساوية

(٩) الاشياء المتساوية اذا قسمت على اشياء متساوية كانت النواتج متساوية

(١٠) الاشياء المختلفة اذا اضيف لها اشياء متساوية كانت الحواصل غير متساوية

(١١) الاشياء المختلفة اذا طرح منها اشياء متساوية كانت البواقي غير متساوية

(١٢) الاشياء المختلفة اذا ضربت في اشياء متساوية كانت الحواصل مختلفة

(١٣) الاشياء المختلفة اذا قسمت على اشياء متساوية كانت النواتج غير متساوية

(١٤) الاشياء المختلفة اذا اضيف لها اشياء مختلفة الاصغر للاصغر والا كبرللا كبر كانت الحواصل مختلفة اى يكون مجموع الاشياء الصغرى اى من مجموع الاشياء الكبرى

(١٥) اذا وجد خط ومستقيم غير محدود في مستو واحد وكانت نهايتا الخط في جهتين مختلفتين من هذا المستقيم قطعه بالاقبل في نقطة واحدة

* (الدعوى الاولى النظرية شكل ح) *

كل مستقيمين اشتركا في نقطتين يتحدان وبصيران مستقيما واحدا اى اذا اشتركا مستقيمان في نقطتين مثل ا و ب فانهما بصيران مستقيما واحدا

وبرهانه ان يقال حيث لا يمكن وصل مستقيمين بين النقطتين ا و ب يتحد الخطان من النقطة ا الى النقطة ب فان قيل انهما قد لا بصيران

مستقيما واحدا اذا امتد بان يصيرا حدهما في الاتجاه - سه والاخر
في الاتجاه - د يقال لودور الخط ا - د حول النقطة ا حتى وقعت
احدى نقطه كالنقطة ه على احدى نقط الخط ا - سه كالنقطة ف
لانتقلت النقطة - عن وضعها الاول وصارت في نقطة كالنقطة د
وانقل الخط ا - ه د في ا د ف ع فيلزم عليه امكان وصل مستقيمين
بين النقطتين ا و ف وهو محال

(الدعوى الثانية النظرية شكل ١٦)

كل مستقيم يمكن ان يتقام من نقطة منه عمود عليه ولا يمكن ان يتقام منها
عمودان عليه في جهة واحدة

برهان القضية الاولى ان يقال ليكن ا - مستقيما وليكن د نقطة منه
فلواخذت نقطة خارجة عنه مثل د ثم وصل المستقيم د د لحدثت
زاويتان متجاورتان د ا و د - ف ان كانتا متساويتين كان المستقيم
د هو العمود المطلوب وان كانتا غير متساويتين بان كانت الزاوية د ا
اكبر من الزاوية د - فلتصور في الزاوية د ا زاوية ه د ا
= د - وان الزاوية د ه مقسومة الى جزئين متساويين بمستقيم
د ف فهذا المستقيم يكون عمودا على ا - اعنى ان الزاوية ف د ا
= ف د - لان الزاوية ه د ا = د - عملا والزاوية ه د ف
= د د ف فيكون ه د ا + ه د ف = د د + د د ف اى
ف د ا = ف د -

وبرهان القضية الثانية ان يفرض ان المستقيم د د عمودا على المستقيم
ا - ثم يقال ان اى مستقيم مدمن النقطة د كال مستقيم ه ه في الجهة
لنى فيه العمود د د يصنع مع المستقيم ا - زاويتين متجاورتين غير
تساويتين لان الزاوية ا د د = د - بالفرض والزاوية ا د ه
< ا د ا و < د د و الزاوية د د < د ه فتكون
الزاوية ا د ه < د ه بمعنى ان المستقيم ه ه ليس عمودا

على

على المستقيم α - فاذا لا يمكن أن يقام من نقطة واحدة من مستقيم عمودان عليه في جهة واحدة منه

وينتج من هذه الدعوى أن الزوايا القائمة متساوية

فاذا كان المستقيم γ و δ عمودا على المستقيم α - والمستقيم ϵ ط عمودا على المستقيم δ و تكون القائمة α و δ مساوية للقائمة الاخرى ϵ ط

(برهانه) أن يؤخذ بعد α و δ = ϵ و γ - ϵ و ثم نوضع الزاوية δ ϵ ط على الزاوية α و δ بان يطبق الضلع δ على الضلع α فتقع النقطة δ على النقطة α والنقطة ϵ على النقطة γ ويقع العمود ϵ ط على العمود γ و δ لانه لا يمكن إقامة عمودين على مستقيم من نقطة واحدة في جهة واحدة منه حينئذ تنطبق الزاوية δ ϵ ط على الزاوية α و δ وتساويهما فقد ثبت بهذا أن الزوايا القائمة متساوية

* (تنبيه) *

ليس المقصود من هذه النتيجة اثبات أن الزاوية α و δ تساوي الزاوية المجاورة لها δ و γ - ولأن الزاوية δ ϵ ط تساوي الزاوية γ ϵ و المجاورة لها لان الزاوية α و δ = δ و γ - بمقتضى تعريف الزاوية القائمة ولان الزاوية δ ϵ ط = γ ϵ و بمقتضى التعريف المذكور بل المقصود اثبات أن أي زاوية قائمة من شكل تساوي القائمة من آخر

* (الدعوى الثالثة النظرية شكل ١٧) *

مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادتين من تلاقى مستقيم بآخر يساوي زاويتين قائمتين

فاذا تلاقى مستقيم مثل γ و δ بمستقيم آخر مثل α - فمجموع الزاويتين α و γ - و δ و γ - يساوي قائمتين اعني α و δ + γ و γ - = قائمتين (برهانه) ان يقام من النقطة γ عمود δ ϵ على α - فيصير مجموع الزاويتين δ و α و γ - و γ - من ثلاث زوايا هي

هـ ح ا و هـ ح د ز د ح - لكن الاولى هـ ح ا قاعة ومجموع
الزاويتين هـ ح د ز د ح - يساوى القاعة هـ ح - فحينئذ يكون
مجموع الزاويتين د ح ا و د ح - مساويا للقائمتين
وينتج من هذه النظرية

اولا انه اذا كانت احدى الزاويتين المتجاورتين الحادتين من تلاقى
مستقيم باخر قاعة تكون الاخرى كذلك واذا كانت احدهما حادة تكون
الاخرى منفرجة

وثانيا ان مجموع الزوايا المتوالية مثل ا ح د ز د هـ و هـ ح ف
و ف ح - الخ المرسومة في جهة واحدة من مستقيم واحد مثل ا -
يساوى قائمتين لان مجموع الزوايا المذكورة يساوى مجموع الزاويتين
المتجاورتين د ح ا و د ح -

وثالثا ان مجموع الزوايا المتوالية ا و - و - و ح و د الخ المرسومة
حول نقطة و بخطوط مستقيمة متلاقية في النقطة المذكورة يساوى اربع
قوائم كافي (شكل ٢٢)

لانه اذا امتد من النقطة و مستقيم مثل ف ع يصير مجموع الزوايا
المذكورة مركباً من مجموع الزوايا المتوالية ا و ف و ا و - و - و ع
المرسومة في جهة واحدة من المستقيم ف ع ومن مجموع الزوايا المتوالية
ح د ع و ح د ز و هـ و هـ و ف المرسومة في الجهة الاخرى
من المستقيم المذكور

* (الدعوى الرابعة النظرية شكل ٢٠) *

اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين مساويا للقائمتين كان الضلع الخارج من
احدهما على استقامة الضلع الخارج من الاخرى
اى اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ح د ز د ح - من الشكل
المرفوم مساويا للقائمتين كان الضلع ح ا على استقامة الضلع د - لانه
لو لم يكن الضلع ح ا على استقامة الضلع د - لكان على استقامة د ك

مثلا فيكون $\alpha \gamma \delta + \delta \gamma \epsilon = \alpha \gamma \epsilon$ قائمتين
 والمفروض أن $\alpha \gamma \delta + \delta \gamma \epsilon = \alpha \gamma \epsilon$ قائمتين فيلزم أن يكون $\alpha \gamma \delta$
 $\alpha \gamma \delta + \delta \gamma \epsilon = \alpha \gamma \epsilon$ وبطرح الزاوية المشتركة $\alpha \gamma \delta$ تبقى
 الزاوية $\delta \gamma \epsilon = \delta \gamma \epsilon$ وهو محال لان الزاوية $\delta \gamma \epsilon$ جزء من الزاوية
 $\delta \gamma \epsilon$ والجزء لا يساوي الكل فبين بهذا أن الضلع $\alpha \gamma$ على استقامة
 $\delta \gamma$ وينتج من هذه النظرية

أولا أن العمودين الخارجين من نقطة واحدة على مستقيم واحد يكونان على
 استقامة واحدة كما في (شكل ١٨)

اى اذا اقيم عمودان $\gamma \delta$ و $\delta \epsilon$ من نقطة δ على مستقيم $\alpha \gamma$
 يكون العمود $\delta \epsilon$ و على استقامة $\delta \epsilon$
 لان مجموع الزاويتين $\alpha \gamma \delta$ و $\delta \gamma \epsilon$ المتجاورتين مساو لقائمتين فيكون
 $\delta \epsilon$ و على استقامة $\delta \epsilon$

وثانيا أن احد المستقيمين اذا كان عمودا على الآخر كان الآخر عمودا عليه
 اى اذا كان المستقيم $\delta \epsilon$ من الشكل المرقوم عمودا على المستقيم $\alpha \gamma$
 كان المستقيم $\alpha \gamma$ عمودا ايضا على المستقيم $\delta \epsilon$
 لانه يلزم من كون المستقيم $\delta \epsilon$ عمودا على $\alpha \gamma$ أن تكون الزاوية
 $\alpha \gamma \delta$ قائمة وأن تكون مجاورتها $\delta \gamma \epsilon$ كذلك ويلزم من هذا أن يكون
 المستقيم $\alpha \gamma$ عمودا على المستقيم $\delta \epsilon$

* (الدعوى الخامسة النظرية شكل ٢١) *

اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان برأسيهما متساويتان
 متساويتين

اى اذا تقاطع مستقيمان مثل $\alpha \gamma$ و $\delta \epsilon$ من الشكل المرقوم فالزاويتان
 $\alpha \gamma \delta$ و $\delta \gamma \epsilon$ تكونان متساويتين اى يكون $\alpha \gamma \delta = \delta \gamma \epsilon$
 لانه يلزم من كون الخط $\alpha \gamma$ مستقيما أن يكون
 $\alpha \gamma \delta + \delta \gamma \epsilon = \alpha \gamma \epsilon$ قائمتين ومن كون الخط $\delta \epsilon$ مستقيما أن يكون

هـ - + - هـ د = فائتين فيكون
 ا هـ + هـ = هـ - + - هـ د وبطرح الزاوية المشتركة
 هـ - تبقى الزاوية ا هـ هـ مساوية للزاوية - هـ د وهو المطلوب اثباته
 وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ا هـ د مساوية للزاوية هـ - هـ .

* (تنبيه) *

اذا كان لزاويتين المتساويتين المتقابلتين برأسيهما ضلعان على خط مستقيم
 واحد وكانت احدهما في جهة منه مضادة لجهة الاخرى كان الضلعان
 الاخران كذلك

اى اذا كان الضلعان هـ هـ و هـ د على استقامة واحدة وكانت الزاوية
 هـ ا هـ مساوية للزاوية د هـ - ومضادة لهما في الاتجاه يكون الضلع هـ -
 على استقامة الضلع هـ ا

(برهانه) أن يقال يلزم من كون المستقيم ا هـ ملاقيا للمستقيم د أن يكون
 مجموع المتجاورتين هـ ا و ا هـ د مساويا للتائمتين وحيث ان الزاوية
 د هـ - مساوية للزاوية هـ ا هـ ا فرضا يكون مجموع المتجاورتين ا هـ د
 و د هـ - مساويا للتائمتين ويلزم من هذا أن يكون الضلع هـ - على
 استقامة الضلع هـ ا (كما تقدم في النظرية الرابعة)

* (الدعوى السادسة النظرية شكل ٢٣) *

المثلثان يكونان متساويين اذا كان في كل منهما زاوية مساوية لنظيرتها من
 الاخر ومنحصرة بين ضلعين كل منهما مساوي لنظيره من الاخر
 اى اذا كانت الزاوية ا = للزاوية د والضلع ا = للضلع د هـ
 والضلع ا هـ = للضلع د و يكون المثلث ا - هـ = للمثلث
 د هـ و

(برهانه) أنه لو وضع المثلث ا - هـ على المثلث د هـ بحيث ينطبق الضلع
 ا - هـ على مساويه د هـ لوقعت النقطة ا على النقطة د والنقطة -
 على النقطة هـ وحيث ان الزاوية ا = للزاوية د يقع الضلع ا هـ

على

على مساوية د و والنقطة ح على النقطة و فينطبق الضلع ح على الضلع هـ و فيثبتنطبق المثلث ا ح د على المثلث د هـ و فيكونان متساويين وهذا هو المطلوب

و ينتج من هذه النظرية انه اذا ساوى ضلعان وزاوية بينهما من مثلث ضلعين وزاوية بينهما من مثلث آخر كل لنظيره تساوت بقية اجزاء احدهما بقية اجزاء الاخر

اي اذا كان الضلع ا ح = للضلع د هـ والضلع ا د = للضلع د هـ والزاوية ا ح د = للزاوية د هـ و والزاوية ا د ح = للزاوية د هـ و والزاوية ح د ا = للزاوية ح د هـ و

(الدعوى السابعة النظرية شكل ٢٣)

يتساوى المثلثان اذا تساوى من كل منهما ضلع والزائيتان المجاورتان له كل لنظيره

اي اذا كان الضلع ح د مساويا للضلع هـ و والزاوية ح د ا مساوية للزاوية هـ د ا و والزاوية ح د ب مساوية للزاوية هـ د ب و يكون المثلث ا ح د مساويا للمثلث د هـ و

(برهانه) انه لو وضع المثلث ا ح د على المثلث د هـ و بحيث ينطبق الضلع ح د على مساويه هـ د و لوقعت النقطة ح على النقطة هـ والنقطة د على النقطة د و حيث ان الزاوية ح د ا = للزاوية هـ د ا يقع الضلع ا ح على الضلع د هـ وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط د هـ و حيث ان الزاوية ح د ب = للزاوية هـ د ب و يقع الضلع ا د على الضلع د هـ وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط د هـ و فيثبتنطبق المثلث ا ح د على المثلث د هـ و ويساويان وهذا هو المطلوب

نتيجة اذا ساوى ضلع وزاويتان مجاورتان له من مثلث ضلعاً وزاويتين مجاورتين له من مثلث آخر كل لنظيره تساوت بقية اجزاء احدهما بقية اجزاء

الاخر كل بنظيره اى اذا كان الضلع γ مساويا للضلع h و الزاوية α مساوية للزاوية h والزاوية γ مساوية للزاوية α وكانت الزاوية α مساوية للزاوية γ والضلع α مساويا للضلع γ والضلع α مساويا للضلع γ و

* (الدعوى الثامنة النظرية شكل ٢٣) *

اى ضلع من اى مثلث اصغر من مجموع الضلعين الاخرين واكبر من فاضلهما
اى ان الضلع α من المثلث α اصغر من مجموع الضلعين α و γ واكبر من فاضلهما

(برهان القضية الاولى) ان الخط المستقيم α اصغر من الخط المنكسر α - المار بنهايتى المستقيم α و β .

(وبرهان الثانية) ان الضلع γ $\alpha > \alpha + \gamma$ فاذا طرح α من
كل من الطرفين بقى $\gamma > \alpha - \gamma$ أى $\alpha < \gamma - \alpha$ وهو المطلوب

* (الدعوى التاسعة النظرية شكل ٢٤) *

اذا اخذت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايتى احد اضلاعه مستقيمان
فمجموع المستقيمين المذكورين يكون اصغر من مجموع الضلعين الباقيين من
المثلث اى اذا اخذت نقطة مثل h داخل مثلث مثل α وامتدتها
الى نهايتى الضلع γ مستقيمان h و h كان مجموع الخطين
 h و h اصغر من مجموع الضلعين α و α

(برهانه) ان يقال لومتد احد المستقيمين h على استقامته جهة h
حتى قطع الضلع α فى نقطة مثل γ لحدث مثلث α فيه الضلع
 $\gamma > \alpha + \alpha$ اى $h > \alpha + \gamma$ و $\gamma > \alpha + \alpha$ وحدث
ايضا مثلث h فيه الضلع $h > \gamma + \alpha$ و $\gamma > \alpha + \alpha$ فلو جمعنا هذه
الاشياء غير المتساوية الاصغر للاصغر والاكبر للاكبر نتحصل

$h + h > \alpha + \alpha + \gamma + \gamma$ فاذا

طرح

طرح الجزء المشترك هـ د من كل من الطرفين بقي

ـ هـ + هـ د > د + ا + ا - ا + د فاذا وضع ا د عوضا
عن ا د + د حدث

ـ هـ د > د + ا + ا وهو المطلوب

* (الدعوى العاشرة النظرية شكل ٢٥) *

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكانت الزاوية التي
بين ضلعي المثلث الاول اكبر من الزاوية التي بين ضلعي المثلث الثاني يكون
الضلع الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني

اي اذا كان الضلع ا - من المثلث ا - د مساويا للضلع د هـ من
المثلث د هـ و والضلع ا د مساويا للضلع د و والزاوية - ا د اكبر
من الزاوية د يكون الضلع - د اكبر من الضلع هـ د و

(برهانه) ان ترسم زاوية مثل د ا ح = الزاوية د وبؤخذ ا ح = د هـ

ويوصل د ح فيحدث مثلث ا د ح = للمثلث د هـ ولان الضلع

ا د = د و نرضا الزاوية د ا ح = الزاوية د فعلا والضلع ا ح

= د هـ كذلك (كفاي النظرية السادسة) فينتج من تساوي المثلثين ان

الضلع د ح = هـ د فاذا انصفت الزاوية - ا ح بمستقيم ا س هـ

لا يتبع هذا المستقيم الا في الزاوية - ا د لانها اكبر من الزاوية د ا ح

فحينئذ اذا وصل س هـ يكون المثلث ا - س هـ مساويا للمثلث ا ح س هـ

لان الضلع ا ح = للضلع - ا ح والزاوية ح ا س هـ = للزاوية

- ا س هـ كذلك والضلع ا س مشترك (كفاي النظرية السادسة)

وينتج من تساوي هذين المثلثين ان الضلع - س هـ = ح س هـ

ومن المعلوم ان المثلث د ح س فيه الضلع د ح > د س + ح س هـ

فاذا ابدل الضلع ح س بالضلع - س هـ كان د ح > د س + - س هـ

لكن د س + - س هـ = د - فيكون د ح > د - وحيث ان

د ح = هـ د و يكون هـ د > د - أي د - < هـ د وهو

* (تنبيه) *

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث اخر وكان الضلع الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثانى $\Rightarrow$ تكون الزاوية التى بين ضلعى المثلث الاول اكبر من الزاوية التى بين ضلعى المثلث الثانى اى اذا كان الضلع $a -$ من المثلث $a -$ مساويا للضلع $d هـ$ من المثلث $d هـ$ والضلع $a -$ مساويا للضلع $d و$ وكان الضلع $- د$ اكبر من الضلع $هـ$ وتكون الزاوية $- ا -$ اكبر من الزاوية $هـ د$ (برهانه) ان يقال لولم تكن الزاوية $- ا -$ اكبر من الزاوية $هـ د$ ولكانت اما مساوية لهما او اصغر منهما فان كانت مساوية لهما يلزم ان يكون الضلع $- د$ مساويا للضلع $هـ و$ وهذا مخالف للمفروض وان كانت اصغر منهما يلزم ان يكون الضلع $- د$ اصغر من الضلع $هـ و$ وهذا ايضا مخالف للمفروض فحينئذ تكون الزاوية $- ا -$ اكبر من الزاوية $هـ د$ وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية عشر النظرية شكل ٢٣) *

اذا ساوت اضلاع مثلث اضلاع مثلث اخر كل لتقديره كان المثلثان متساويين اى اذا كان الضلع $a -$ من المثلث $a -$ = للضلع $d هـ$ من المثلث $d هـ$ والضلع $a -$ = للضلع $d و$ والضلع $- د$ = للضلع $هـ و$ يكون المثلث $a -$ مساويا للمثلث $d هـ و$

(برهانه) ان يقال يلزم من تساوى الاضلاع المتناظرة ان تتساوى الزوايا المتناظرة اى ان $\Rightarrow$ تكون الزاوية $a -$ = للزاوية $d و$ والزاوية $- د$ = للزاوية $هـ و$ والزاوية $هـ د$ = للزاوية $ا -$ ولولم تكن الزاوية $a -$ مساوية للزاوية d لكانت اما اكبر منها او اصغر منها فان كانت الزاوية $a -$ اكبر من الزاوية d كان الضلع $- د$ اكبر من الضلع $هـ و$ وهذا مخالف للمفروض وان كانت الزاوية $a -$ اصغر من الزاوية d كان الضلع $- د$ اصغر من الضلع $هـ و$ وهذا ايضا مخالف للمفروض فتكون الزاوية $a -$

مساوية

مساوية للزاوية γ وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية $\alpha =$ للزاوية
 β وأن الزاوية $\gamma =$ للزاوية δ وحيث إن أجزاء المثلث $\alpha - \gamma$
 مساوية لنظائرها من المثلث $\gamma - \delta$ ويكون المثلث $\alpha - \gamma$ مساويا للمثلث
 $\gamma - \delta$ وهذا هو المطلوب

* (تنبيه) *

قد ظهر من برهان هذه القضية أن الزوايا المتساوية تكون مقابلة للاضلاع
 المتساوية لأن الراويتين المتساويتين α و γ مقابلة للضلعين المتساويين
 $\beta - \gamma$ و δ

* (الدعوى الثانية عشر النظرية شكل ٢٨) *

كل مثلث متساوي الساقين زاوية المقابلة لمساويه متساويتان
 أي إذا كان الساق $\alpha -$ مساويا للساق γ من المثلث $\alpha - \gamma$ تكون
 الزاوية γ مساوية للزاوية β

(برهانه) أن ينصف الضلع γ بنقطة مثل δ ويوصل المستقيم $\alpha \delta$
 فيكون المثلثان الحادثان $\alpha - \delta$ و $\gamma - \delta$ متساويين لأن الضلع $\alpha \delta$
 مشترك والضلع $\alpha -$ = للضلع γ فرضا والضلع $\delta -$ = للضلع
 δ عملا (كفاي النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوي هذين المثلثين
 أن تكون الزاوية $\gamma =$ للزاوية β وهو المطلوب

* (تنبيه) *

اعلم أن أي ضلع من اضلاع المثلث غير المتساوي الساقين يصح أن يعتبر قاعدة
 ورأس الزاوية المقابلة له تسمى رأس المثلث وأما المثلث المتساوي الساقين
 فتعده ضلعه الثالث أي مادون الساقين

* (وينتج من هذه النظرية) *

أولا أن كل مثلث متساوي الاضلاع فهو متساوي الزوايا
 وثانيا أن المستقيم الواصل من رأس مثلث متساوي الساقين الى وسط
 قاعدته يكون عمودا عليها ومنه فالزاوية الرأس لانه يلزم من تساوي المثلثين

ا - د و ا د ح أن تكون الزاوية - ا د = للزاوية د ا ح والزاوية
ا د - = للزاوية ا د ح

(الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ٢٩)

اذا تساوى زاويتان من مثلث تساوى الضلعان المقابلان لهما
أى اذا كانت الزاوية ا - د = ا ح - يكون الضلع ا د = ا ح
(برهانه) أن يقال لو تصورنا مثلثا كالمثلث آ - ح مساويا للمثلث
ا - د بحيث يكون الضلع آ - ح = د - ح والزاوية آ - ح = د - ح
والزاوية ح = د ثم طبقنا المثلث آ - ح على المثلث ا - د بحيث
تقع النقطة ح على النقطة د والنقطة آ على النقطة ا فكانت
الزاوية ح = د = ح وحينئذ يقع الضلع آ على الضلع ا - د
والضلع آ على ا ح وتقع النقطة آ على النقطة ا فيكون آ - ا - د
= ا ح ويلزم من هذا أن يكون ا - د = ا ح وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ٣٠)

أى مثلث احدى زاويتيها اكبر من الاخرى يكون ضلعه المقابل للكبيرة اكبر
من ضلعه المقابل للصغرى وبالعكس أى مثلث احدى ضلعيه اكبر من
الآخر تكون زاويته المقابلة للضلع الاكبر اكبر من زاويته المقابلة للضلع
الصغير

(برهان القضية الاولى) أن يقال لتكن الزاوية د ح < د ا ح فيكون الضلع
ا - د المقابل للزاوية د ح اكبر من الضلع ا ح المقابل للزاوية د
ولبيان تنשא زاوية مثل د ح مساوية للزاوية د ا ح فيكون المثلث
الحادث د ح د متساوى الساقين أى يكون د ح = د ا ح وحينئذ
ان الخط المستقيم ا ح اقصر من ا د + د ح و ا د + د ح =
= ا د + د ح = ا د يكون ا - د اكبر من ا ح

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن الضلع $a < b$ فتكون الزاوية c المقابلة للضلع a اكبر من الزاوية d المقابلة للضلع b

إذ لو لم تكن الزاوية c اكبر من الزاوية d لكانت اما اصغر منها او مساوية لها فان كانت اصغر منها لزم أن يكون $a > b$ وهذا مخالف للمفروض وان كانت مساوية لها لزم أن يكون $a = b$ وهذا أيضا مخالف للمفروض فاذن يلزم أن تكون الزاوية c اكبر من الزاوية d وهو المطلوب

* (الدعوى الخامسة عشر النظرية شكل به) *

النقطة الخارجة عن مستقيم لا يمكن أن ينزل منها عايبه الا عمود واحد لاعمودان

(برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن c خطا مستقيما و نقطة خارجة عنه فلواخذت نقطة منه مثل h ووصل المستقيم d ه لحدثت زاويتان متجاورتان d ه و h ه c فان كانتا متساويتين كان المستقيم d ه عمودا على المستقيم c وان كانتا غير متساويتين بأن كانت الزاوية d ه c اصغر من الزاوية h ه c تنشأ زاوية مثل h ه و d ه c ثم يؤخذ الضلع h ه و d ه و c ه ثم يوصل المستقيم d و فيكون عمودا على المستقيم c لان المثلث d ه c = للمثلث h ه و لان الضلع d ه = للضلع h ه وبالعامل والضلع h ه مشترك والزاوية d ه c = للزاوية h ه و وبالعامل (كفاي النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية d ه c = للزاوية h ه و وأن يكون المستقيم c ه عمودا على المستقيم d و فاذن يكون المستقيم d ه عمودا على المستقيم c

(وبرهان القضية الثانية) أن تفرض نقطة مثل c خارجة عن المستقيم a وأن d ه عمود عليه ثم يقال ان اى مستقيم مدم من النقطة c الى

أى نقطة من نقط المستقيم α - غير النقطة δ لا يكون عمودا عليه فان قيل يمكن تنزيل عمود آخر مثل γ و مثلاً قلنا اذا مدت γ على استقامته جهة δ ثم اخذت δ γ ثم وصل المستقيم $\delta\gamma$ و حدث مثلث $\delta\gamma\epsilon$ $\delta\gamma\epsilon$ للمثلث $\delta\gamma\epsilon$ لان الضلع $\delta\gamma$ مشترك والضلع $\delta\epsilon$ $\delta\epsilon$ للضلع $\delta\gamma$ بالعمل والزاوية $\delta\gamma\epsilon$ $\delta\gamma\epsilon$ للزاوية $\delta\gamma\epsilon$ لقيامهما ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية $\delta\gamma\epsilon$ $\delta\gamma\epsilon$ مساوية للزاوية $\delta\gamma\epsilon$ $\delta\gamma\epsilon$ وحيث ادعى أن γ و عمود على α - تكون الزاوية $\delta\gamma\epsilon$ قائمة فتكون الزاوية $\delta\gamma\epsilon$ $\delta\gamma\epsilon$ كذلك ويلزم من هذا أن يكون مجموع المتجاورتين $\delta\gamma\epsilon$ $\delta\gamma\epsilon$ و $\delta\gamma\epsilon$ مساويا للقائمتين وعليه يكون الخط $\gamma\delta$ مستقيماً واحداً ما زاً بالنقطتين γ و δ المار بهما المستقيم $\gamma\delta$ ويلزم من هذا أن يكون وصل مستقيمين بين نقطتين وهو محال فتبين بهذا أن مجموع المتجاورتين $\delta\gamma\epsilon$ $\delta\gamma\epsilon$ و $\delta\gamma\epsilon$ لا يكون مساويا للقائمتين فينبذ لا تكون الزاوية $\delta\gamma\epsilon$ قائمة بمعنى أن المستقيم γ وليس عمودا على المستقيم α - وهو المطلوب

(الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ٣١)

إذا اخذت نقطة خارج مستقيم وانزل منها عمود ومائل فاعلم

أولاً أن العمود اقصر من كل مائل

وثانياً أن المائلين ذوى البعدين المتساويين عن موقع العمود متساويان

وثالثاً أن بعدى المائلين المتساويين عن موقع العمود متساويان

ورابعاً أن المائلين ذوى البعدين غير المتساويين ابعدهما عن موقع العمود

اطولهما

ونامسا أن المائلين غير المتساويين اطولهما ابعدهما عن موقع العمود

أى إذا اخذت نقطة مثل α خارج خط مثل δ و أنزل منها عمود $\alpha\delta$

ومائل $\alpha\epsilon$ و $\alpha\gamma$ و $\alpha\delta$ الخ فاعلم

أولاً أن العمود $\alpha\delta$ - يكون اصغر من كل مائل

وثانياً أن الخططين $\alpha\epsilon$ و $\alpha\gamma$ المائلين المتباعدتين عن موقع العمود

يكونان

يكونان متساويين اذا كان البعدان ـ هـ و ـ و متساويين
 وثالثا ان المائلين ا هـ و ا و اذا كانا متساويين فالبعدان ـ هـ
 و ـ و يكونان كذلك

ووابعا ان البعد ـ هـ اذا كان اكبر من البعد ـ و كان المائل ا هـ
 اطول من المائل ا و

وخامسا ان المائل ا هـ اذا كان اطول من المائل ا و كان البعد ـ هـ
 اكبر من البعد ـ و

(برهان القضية الاولى) أن يثبت العمود اـ على استقامة جهة ـ هـ
 ثم يؤخذ البعد ـ و = اـ ويوصل ـ و فيحدث مثلث وـ هــ اـ =
 للمثلث ـ هــ اـ لان الزاوية ـ وـ هــ اـ = ـ هــ اـ و اقيامهما والضلع ـ وـ اـ
 مشترك والضلع ـ وـ هـ = للضلع ـ اـ هـ بالعمل (كفاي النظرية السادسة)
 ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن يكون الضلع ـ وـ هـ = ـ اـ و لكن
 في المثلث اـ وـ هـ والضلع اـ و + ـ وـ اـ هـ أي ان $\text{اـ هـ} > \text{اـ و}$
 فاذن يكون $\text{اـ هـ} > \text{اـ و}$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث ان البعد ـ هـ = ـ و
 بالفرض والضلع اـ هـ مشترك والزاوية ـ هــ اـ و = للزاوية اـ هـ و
 لقيامهما يكون المثلث اـ هـ و = للمثلث اـ هـ هـ ويلزم من تساوي
 هذين المثلثين أن يكون اـ هـ = اـ و وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث ان المائل ا هـ = للمائل ا و
 يكون المثلث ا هـ و متساوي الساقين فحينئذ يكون العمود اـ النازل
 من رأسه على قاعدته مارا بوسطها أي يكون ـ هـ = ـ و وهو
 المطلوب

(وبرهان القضية الرابعة) أن يقال حيث ان البعد ـ هـ < ـ و يكون
 المائل ا هـ < ا و لانه اذا اخذ ـ هـ = ـ و ووصل ا هـ
 و ـ و يحدث مثلث ا هـ و = للمثلث ا هـ و لان الزاوية ـ وـ هــ اـ

== للزاوية ح - ا اقيامهما والاضلع ح - مشترك والاضلع و -
 للضلع - ا بالعمل (كفاي النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين
 المثلثين أن يكون و ح = ا ح ا وأيضاً اذا وصل و ي يحدث مثلث
 و د - = للمثلث د - ا لان الزاوية و د - = للزاوية د - ا اقيامهما
 والاضلع د - مشترك والاضلع و - = للضلع - ا بالعمل (كفاي
 النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون و د = د ا
 لكن ا د + د و < ا ح + ح و أى ا د < ا ح أو
 ا د < ا ح و ا ح = ا ه فيكون ا د < ا ه وهو المطلوب
 (وبرهان القضية الخامسة) أن يقال - حيث ان المائل ا د اطول من
 المائل ا ه يكون البعد د - ا كبر من البعد د - ه لانه لو لم يكن
 البعد د - ا كبر من البعد د - ه لكان مساوياً له أو اصغر منه فان كان
 مساوياً له يلزم أن يكون المائل د ا مساوياً للمائل ا ه وهذا مخالف
 للمفروض وان كان اصغر منه يلزم أن يكون المائل د ا اصغر من المائل
 ا ه وهو أيضاً مخالف للمفروض فاذن يكون البعد د - ا كبر من البعد
 د - ه وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

اولاً أن البعد الحقيقي بين نقطة ومستقيم هو العمود النازل منها عليه
 لانه تبين أن العمود اصغر من كل مائل مار بها وباى نقطة من نقطه
 وثانياً أنه لا يمكن أن يوصل من نقطة الى مستقيم ثلاثة خطوط مستقيمة
 متساوية لانه تبين أن المائل الابدع عن العمود هو الاطول من المائل الاقرب
 للعمود المذكور

* (الدعوى السابعة عشر النظرية شكل ٣٢) *

اذا اقيم عمود على وسط مستقيم محدود فاعلم أولاً أن البعدين الموصولين من
 أى نقطة من نقط العمود الى نهايتى المستقيم المذكور يكونان متساويين
 وثانياً أن البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود الى نهايتى المستقيم
 المذكور

المذكور لا يكونان متساويين

أى اذا اقيم عمود $و ه$ على وسط مستقيم $ا ب$ محدودين نقطتين $ا و ب$
 فان البعدين $ا ز و ب د$ يكونان متساويين
 والبعدين $ا ز و ب د$ لا يكونان متساويين
 (برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان البعد $ا ب = ح د$ بالفرض
 يكون المائل $ا ز = ب د$ والمائل $ا د = و ر$ والمائل $ا ه = ه د$
 (كفى النظرية السادسة عشر)

فتبين بهذا أن البعدين الموصولين من أى نقطة من نقط العمود $ه د$ الى
 نهايتى المستقيم $ا ب$ يكونان متساويين
 (وبرهان القضية الثانية) أن تفرض نقطة مثل $ر$ خارج العمود $ه د$
 ثم يوصل $را و رب$ ثم يوصل $د ز$ فيكون $ا ز = ب د$ كما سبق
 وحيث ان فى المثلث $ر د$ الضلع $ر د > ر ز + ز د$ و $د ز = ا ز + ز ب$
 $ا ز$ يكون $ر د > ر ز + ا ز$ و $ر د + ا ز = ا د$ فيكون $ر د > ا د$
 $> را$ أى ان البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود $ه د$ الى
 نهايتى المستقيم $ا ب$ لا يكونان متساويين بل القاطع للعمود اطول من
 الآخر

وينتج من هذه النظرية

أولا أنه اذا كان المستقيم نقطتان كلتاهما على بعدين متساويين من نهايتى
 مستقيم آخر كان المستقيم الاقل عمودا على وسط الاخر لان المستقيم الذى
 بهذه المثابة يتحدد بالعمود المار بوسط المستقيم المفروض لا اشتراكه معه
 فى نقطتين

وثانياً أنه اذا كانت نقطة خارج مستقيم وكان البعدان الواصلان منها
 الى نهايتيه غير متساويين كانت خارج العمود المار بوسط المستقيم
 المذكور

لانهم لو كانت عليه لكان البعدان الواصلان منها الى نهايتى المستقيم المفروض

متساويين وهذا مخالف للمفروض

* (الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ٣٣) *

يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا تساوى منهما الوتر والزاوية غير القائمة
كل نظيره أى اذا كان الوتر $a =$ للوتر d و الزاوية الحادة $\alpha =$
لنظيرتها و يكون المثلث $a - r =$ للمثلث $d - h$ و
(برهانه) أن يقال لو وضع المثلث $a - r$ على المثلث $d - h$ و بحيث
تقع النقطة a على النقطة d والوتر a على الوتر d و وقعت
النقطة r على النقطة h و حيث ان الزاوية $\alpha =$ و يقع الضلع
 $r -$ على الضلع h و وكذا النقطة r على النقطة h والا لا يمكن
تنزيل عمودين من النقطة d على المستقيم h و هو محال فاذن تكون
الزاوية $a =$ للزاوية d و يكون المثلث $a - r =$ للمثلث $d - h$ و
وهو المطلوب

* (الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل ٣٤) *

يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا تساوى منهما الوتر وأحد الضلعين المحيطين
بالقائمة كل نظيره

أى اذا كان الوتر $a =$ للوتر α والضلع $a - r =$ للضلع $\alpha - r$
يكون المثلث $a - r =$ للمثلث $\alpha - r$

(برهانه) أن يقال لو وضع المثلث $a - r$ ملاصقا للمثلث $\alpha - r$ بحيث

يتحد الضلع $a - r$ بالضلع $\alpha - r$ لصار الضلع $r -$ على استقامة الضلع

$\alpha - r$ لان كلا من الزاويتين المتجاورتين $a - r$ و $\alpha - r$ قائمة ويلزم

بمن كون المائل $a =$ للمائل α أن يكون البعد $r =$

للبعد r فاذن يكون المثلث $a - r =$ للمثلث $\alpha - r$ وهو

المطلوب

المطلوب

• (الدعوى العشرون النظرية شكل ك) •

اذا انصفت زاوية بمستقيم فاعلم أولا أن العمودين النازلين على ضلعيها من أى نقطة من نقطة متساويان
وثانيا أن العمودين النازلين على ضلعيها من أى نقطة خارجة عنه ليسا متساويين

أى اذا انصفت زاوية مثل $\angle A$ بمستقيم AC فاعلم أولا أن العمودين BO و CO النازلين على ضلعيها AB و AC من أى نقطة من نقط الخط AC كالنقطة O يكونان متساويين

وثانيا أن العمودين BO و CO النازلين على ضلعيها AB و AC من نقطة مثل H خارجة عن المستقيم AC لا يكونان متساويين
(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية $\angle A = \angle A$ للزاوية $\angle A$ فرضا و الوتر BC مشترك بين المثلث ABO و ACO القائم الزاوية فى B والمثلث ACO القائم الزاوية فى C يكون المثلثان متساويين ويلزم من تساويهما أن يكون البعد $BO = CO$ للبعد BO وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن ينزل من النقطة C عمود CO على الضلع AB ثم يوصل مستقيم AO فيكون العمود CO $\perp$ AB اصغر من المائل AO وحيث ثبت فى المثلث AOB أن الضلع $AO > BO$ $\perp$ CO وأن $\angle C = \angle C$ يكون $\angle B > \angle C$ و لكن $\angle B + \angle C = \angle A = \angle A$ فيكون $\angle B > \angle A$ وحيث ان $\angle A > \angle B$ يكون $\angle A > \angle B$ وهو المطلوب

• (تبينه) •

المستقيم المنصف لزاوية هو المحل الهندسى لكل نقطة بعدها عن ضامى الزاوية متساويان

• (الدعوى الحادية والعشرون النظرية شكل كا) •

المستقيمان العمودان على ثالث متوازيان أى اذا كان مستقيمان مثل
 د ه و عودين على مستقيم ثالث مثل ا - كانا متوازيين
 (برهانه) أن يقال لو لم يكونا متوازيين لا يمكن تلاقيمهما فى نقطة مثل ط
 ويلزم من هذا امكان تنزيل عودين على مستقيم واحد من نقطة واحدة وهو
 محال كاتين (فى النظرية الخامسة عشر)

* (الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل ك ب) *

أى زاوية فهى اكبر من أى مساحة مستطيلة ونعنى بالمشاحة المستطيلة
 المشاحة غير المحدودة الحادثة من ثلاثة خطوط مستقيمة اثنان منها عمودان
 على الثالث كالشاحة الحادثة من الخطوط ا - و - ح و ح ط
 (وبرهانه) أن ترسم فى الزاوية القائمة ا ب ح زاوية صغيرة مثل ا - د
 وترسم بجانب هذه الزاوية الصغيرة زاوية د - ه = ا - د وبجانب الزاوية
 د - ه زاوية ه - و تساوى الزاوية د - ه وبجانب هذه الزاوية
 الثالثة زاوية رابعة تساوى الثالثة وبجانب الرابعة خامسة تساويها ثم سادسة
 تساوى الخامسة وهكذا وبهذه الكيفية يزد مجموع تلك الزوايا عن الزاوية
 القائمة ا - ح

واذا اخذ ع ح = ح - و ل ع = ع و سم ل = ل ع
 وهكذا واقبت أعمدة ح ط و ع ك و ل م و سم ع الخ على ح
 فالمشاحة المستطيلة ا - ح ط تساوى المشاحة المستطيلة ح ط ع ك
 لأنه لو حركت الاولى حول ح ط وطبقت على الثانية لانطبقت القائمة
 ح ط على القائمة ح ط ع وانطبق المستقيم ح ع على مساويه
 ح ع و وقعت النقطة - على النقطة ع و وقعت الزاوية ا - ح ع على
 مساويتها ح ع ك و وقع الضلع ا - على ع ك وانطبقت المشاحة
 ا - ح ط على ح ط ع ك وساوتهما وبمثل هذا يبرهن على أن المشاحة
 ح ط ع ك مساوية للمشاحة ك ع ل م وأن هذه مساوية لتالياتها وهكذا
 وحيث ان مجموع تلك المساحات لا يعلو الزاوية القائمة ا - ح يظهر أن

الزاوية

الزاوية α و β اكبر من الساحة $\alpha - \beta$ ط بمعنى أن أي زاوية كبيرة كانت او صغيرة اكبر دائما من أي ساحة مستطيلة

* (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل ك ب) *

أي مائل على مستقيم يقطع دائما العمود على المستقيم المذكور أي اذا كان مستقيم مثل α مائلا على مستقيم مثل β وكان المستقيم $\alpha - \beta$ عمودا على α فان المائل β والعمود $\alpha - \beta$ يتقاطعان اذا امتدّا امتدادا كافيا

(برهانه) أن يقال لو أقيم من النقطة β عمود γ على α لحدثت زاوية γ و β اكبر من الساحة $\gamma - \beta$ و يلزم من هذا أن تخرج هذه الزاوية عن الساحة المذكورة وحيث كان الضلع γ مشتركاً بين الزاوية γ و β والساحة $\gamma - \beta$ يلزم لتروج الزاوية عن الساحة أن يقطع امتداد الضلع الآخر β من الزاوية احدا ضلاع الساحة ويكون γ قاطعا للضلعين α و β ك من أول الأمر لا يمكن أن يقطعهما مرة أخرى فاذن يقطع الضلع $\alpha - \beta$ وهو المطلوب

* (نبيهه) *

اذا كانت الزاوية الحادثة بين المستقيم α والمستقيم المائل عليه المارة بالنقطة β منفرجة γ كالزاوية $\alpha - \beta$ مثلا يمتد المائل β على استقامته جهة γ فحدث بينه وبين امتداد العمود $\gamma - \beta$ زاوية $\gamma - \beta$ حادة اكبر من الساحة $\gamma - \beta$ و يلزم من هذا أن الضلع β الذي هو امتداد المائل β يقطع الضلع $\alpha - \beta$ الذي هو امتداد العمود $\alpha - \beta$

* (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ك ج) *

اذا اخذت نقطة خارج مستقيم امكن دائما أن يمد منها مستقيم يوازي المستقيم المذكور لا اثنين

أي اذا اخذت نقطة مثل α خارج مستقيم مثل β فاعلم أولا انه يمكن

دائماً أن يمتد منها مستقيم يوازي المستقيم a -

وثانياً أنه لا يمكن أن يمتد منها اثنان يوازيان المستقيم المعلوم a -
(برهان القضية الاولى) أن يقال لو انزل من النقطة o عمود مثل $o\delta$ وه
على المستقيم المعلوم a - واقیم من النقطة المذكورة o عمود مثل $o\epsilon$
على $o\delta$ وه لكان المستقيم $o\delta$ موازياً للمستقيم المعلوم a - لان
المستقيمين $o\delta$ و $o\epsilon$ - عمودان على مستقيم واحد $o\delta$ وه وهو
المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو تمد من النقطة o مستقيم غير $o\delta$
مثل $o\tau$ لم يكن عموداً على $o\delta$ فبقطع a -

* (الدعوى الخامسة والعشرون النظرية شكل كد) *

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان أى اذا كان مستقيمان مثل $o\delta$ و
و $o\epsilon$ موازيين لثالث مثل a - كاتا متوازيين
(برهان) أن يقال لو امكن تلاقيهما في نقطة مثل m لامكن ان يمتد
نقطة واحدة مستقيمان موازيان لثالث وهو محال

* (الدعوى السادسة والعشرون النظرية شكل كه) *

كل مستقيم قطع احد متوازيين يقطع الآخر أى ان اى مستقيم مثل $o\delta$ وه
اذا قطع احد متوازيين مثل a - فانه يقطع الموازى الآخر مثل $o\epsilon$
(برهان) أن يقال لو فرض المستقيم $o\delta$ وه موازياً للمستقيم $o\epsilon$ وه
لامكن أن يمتد من نقطة تقاطع المستقيم $o\delta$ وه بالمستقيم a - مستقيمان
موازيان للمستقيم $o\delta$ وه وقد تقدم أن هذا محال

* (الدعوى السابعة والعشرون النظرية شكل كو) *

اى عمود على احد متوازيين يكون عموداً على الآخر
أى اذا وجد مستقيمان موازيان مثل a - و $o\delta$ وه ومستقيم مثل $o\delta$ وه
عمود على المستقيم a - كان عموداً أيضاً على المستقيم $o\delta$ وه فبازم أن يكون
عموداً عليه

(برهان)

(برهانه) أن يقال لو لم يكن $\angle$ و $\angle$ مرداعلي هـ و لكان ما تلا عليه ويلزم
من هذا تلافيه بالعمود ا - وهو محال

* (نمازین شکل ۳۸) *

اذا قطع مستقيم مستقيم حدث عن تقاطعه بهما ثمان زوايا اربع منها وهي
الساكنة في المسافة التي بين المتوازيين تسمى زوايا داخلية والاربعة الاخرى تسمى
زوايا خارجية

أى اذا قطع مستقيم مثل هـ و مستقيمين مثل ا - و $\angle$ و $\angle$ فالزوايا
اخرى و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ تسمى زوايا داخلية والزوايا
اخرى و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ تسمى زوايا خارجية
فأما الزاويتان اخرى و $\angle$ و $\angle$ فتسميان زاويتين متبادلتين داخلتين
وكذلك الزاويتان $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ تسمى زاويتين متبادلتين خارجيتين
وأما الزاويتان ا - هـ و $\angle$ و $\angle$ فتسميان زاويتين متبادلتين خارجيتين
وكذلك الزاويتان هـ و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ تسمى زاويتين متبادلتين خارجيتين
وأما الزاويتان ا - هـ و $\angle$ و $\angle$ فتسميان زاويتين متبادلتين خارجيتين
والداخل

وكذلك الزاويتان هـ و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ تسمى زاويتين متبادلتين خارجيتين
والزاويتان $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ تسمى زاويتين متبادلتين خارجيتين
وأما الزاويتان ا - هـ و $\angle$ و $\angle$ فتسميان زاويتين متبادلتين خارجيتين
داخلتين وكذلك الزاويتان $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ تسمى زاويتين متبادلتين خارجيتين
وأما الزاويتان ا - هـ و $\angle$ و $\angle$ فتسميان زاويتين متبادلتين خارجيتين وكذلك
الزاويتان هـ و $\angle$ و $\angle$ و $\angle$ تسمى زاويتين متبادلتين خارجيتين

* (الدعوى الثامنة والعشرون النظرية شكل ٣٩) *

اذا قطع المستقيم مستقيمين متوازيين فاعلم
أولا أن الزاويتين المتبادلتين متساويتان
وثانيا أن الزاويتين المتناظرتين متساويتان

وثالثا أن الزاويتين المتبادلتين الخارجيتين متساويتان
ورابعا أن الزاويتين المتجاورتين الداخليتين متممتان لبعضهما أى ان مجموعهما
يساوى قائمتين

وخامسا أن الزاويتين المتجاورتين الخارجيتين متممتان لبعضهما
(برهان القضية الاولى) أن يقال لو نصف البعد ر ح بنقطة مثل ط
وانزل منها عمود ط ك على ح د و م د ك ط على استقامة جهة
ط حتى لاقى المستقيم ا ب فى ع لكان ك ع عمودا على الخط
ا ب الموازى للخط ح د لانه قد ثبت فى النظرية السابعة والعشرين أن
العمود على احد المتوازيين عمود على الاخر فبكون المثلثان الحادثان
ك ح ط و ط ر ع قائمى الزاوية ومتساويين لان الوتر ح ط مساو
للوتر ط ر بالعمل والزاوية ح ط ك مساوية للزاوية ر ط ع
لتقابلهما برأسيهما (كفى النظرية الثامنة عشر) ويلزم من تساوى هذين
المثلثين أن تكون الزاوية ك ح ط مساوية للزاوية ط ر ع وهو
المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ح ط =
ط ر ع و ط ر ع = ا ر ه لتقابلهما بالرأس تكون الزاوية ك ح ط
= ا ر ه وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ح ط =
ط ر ع و ك ح ط = و ج د و ط ر ع = ا ر ه تكون الزاوية
و ج د = ا ر ه وهو المطلوب

(وبرهان القضية الرابعة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ح ط =
ط ر ع وقد علم أن ك ح ط + ط ج د = قائمتين فيكون ط ر ع
+ ط ج د = قائمتين وهو المطلوب

(وبرهان القضية الخامسة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ح ط =
ا ر ه وقد علم أن ك ح ط + ك ج د = قائمتين فيكون ا ر ه + ك ج د =

ك ح و = قائمتين وهو المطلوب

(تنبيه)

المستقيمان المتوازيان المقطوعان بقاطع مائل يتكون من نقاطهما مائتان
وإذا ما تم اربع حادة واربع منفرجة والاربع الاول متساوية والاخر كذلك
هـ كل زاوية من الاربع الاول تتم أى زاوية من الاربع الاخر

(الدعوى التاسعة والعشرون النظرية شكل كز)

المستقيمان المقطوعان بمستقيم يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان
المتبادلتان الداخلتان متساويتين

أى ان أى مستقيمين مثل ا ب و ح و اذا قطعهما ثالث مثل هـ و يكونان
متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان ب ح و د ح و
متساويتين

(برهانه) أن يقال لو نصف البعد د ح بنقطة مثل ط وانزل منها عمود
مثل ط ك على ح و ومد العمود على استقامته جهة ط حتى
لاقي المستقيم ا ب في نقطة مثل ع لحدث مثلثان متساويان ك ح ط
و ط ر ع لان الضلع ح ط = للضلع ط ر بالعمل والزاوية ك ح ط
= للزاوية ط ر ع فرضا والزاوية ك ط ح = ع ط ر انقابلهما
بالرأس (كما في النظرية السابعة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون
الزاوية ر ع ط = للزاوية ط ك ح لكن الزاوية ط ك ح قائمة
بالعمل فيلزم أن تكون الزاوية ر ع ط كذلك ويلزم من هذا أن يكون
المستقيم ا ب عمودا على المستقيم ك ع وأن يكون موازيا للمستقيم
ح و لانه تميز في النظرية الحادية والعشرين أن المستقيمين العمودين على
ثالث متوازيان وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتبادلتان الخارجتان متساويتين

أى اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان ار هـ و د ح و متساويتين
يكون المستقيمان ا ب و د متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان الزاوية $\text{ار هـ} = \text{د ح}$ بالتقابل والزاوية
 $\text{د ح و} = \text{د ح ر}$ كذلك $\text{ار هـ} = \text{د ح و}$ بالفرض تكون الزاوية
 $\text{د ح} = \text{د ح} =$ للزاوية د ح ر ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا ب و د متوازيين وهو المطلوب

وثانيا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتناظرتان متساويتين

أى اذا كانت الزاويتان المتناظرتان ار هـ و د ح ر متساويتين يكون
المستقيمان ا ب و د متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان الزاوية $\text{ار هـ} =$ للزاوية د ح بالتقابل
والزاوية $\text{ار هـ} = \text{د ح ر}$ بالفرض تكون الزاوية $\text{د ح} =$ للزاوية
 د ح ر ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا ب و د متوازيين وهو
المطلوب

وثالثا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتجاورتان متتامتين لبعضهما

أى اذا كانت الزاويتان المتجاورتان ار ح و د ح متتامتين
لبعضهما يكون المستقيمان ا ب و د متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان مجموع الزاويتين المتجاورتين ار هـ و ا د ح
مساو لثلاثين ومجموع الزاويتين ار ح و د ح مساو لثلاثين يكون
 $\text{ار هـ} + \text{ار ح} = \text{ار ح} + \text{د ح}$ فاذا طرح الزاوية المشتركة
 ار ح تبقى الزاوية $\text{ار هـ} =$ للزاوية د ح ويلزم من هذا أن يكون
المستقيمان ا ب و د متوازيين وهو المطلوب

ورابعا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتجاورتان الخارجتان متتامتين لبعضهما

أى إذا كانت الزاويتان المتجاورتان الخارجتان $أره$ و $ح$ و قسمتين لبعضهما ما يكون المستقيمان $ا - و$ متوازيين
 (برهانه) أن يقال حيث أن مجموع الزاويتين المتجاورتين $أره$ و $هـ$ $ر$ مساو لقاآئتين
 مساو لقاآئتين وبالفرض مجموع المتجاورتين $أره$ و $ح$ و مساو لقاآئتين
 يكون $أره + هـ ر = أره + ح$ و فاذا طرحنا
 الزاوية المشتركة $أره$ تبقى الزاوية $هـ ر =$ للزاوية $ح$ و
 ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان $ا - و$ متوازيين وهو
 المطلوب

* (الدعوى الثلاثون النظرية شكل كط) *

إذا قطع مستقيم مستقيمين وكان مجموع الزاويتين المتجاورتين الداخليتين أكبر
 أو أصغر من القائتين فالمستقيمان المذكوران يلتقيان في الجهة التي يكون
 فيها مجموع الزاويتين المذكورتين أصغر من القائتين

أى إذا قطع مستقيم مثل $هـ$ و مستقيمين مثل $ا - و$ $ر$ $س$ وكان
 مجموع الزاويتين المتجاورتين الداخليتين $أ ح ط$ و $ح ط ر$ أصغر من قائتين
 فالمستقيمان $ا - و$ $ر$ $س$ يلتقيان جهة $أ و ر$

(برهانه) أن يقال يلزم من كون مجموع الزاويتين $أ ح ط$ و $ح ط ر$
 أصغر من قائتين أن يكون المستقيمان $ا - و$ $ر$ $س$ غير متوازيين لأنهما
 لو كانا متوازيين لكان مجموع الزاويتين $أ ح ط$ و $ح ط ر$ مساويا
 لقائتين وهذا مخالف للمفروض تبين بهذا أن المستقيمين المذكورين يكونان
 غير متوازيين بقى علينا أن نبين الجهة التي يلتقيان فيها فنقول لو مددنا النقطة
 $ط$ مستقيما مثل $ح$ $د$ يوازي المستقيم $ا - و$ لظهر أن المستقيم $ر$ $س$
 يمتنع مع المستقيم $ح$ $د$ زاوية $ط د و$ وانه إذا امتد يصنع مع $ا - و$ زاوية
 مبادلة ومساوية لها وحيث كانت رأس احدهما في $ط$ يلزم أن تكون
 رأس الاخرى جهة $و$ أى أن المستقيمين $ا - و$ $ر$ $س$ يلتقيان جهة
 $و$ وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية والثلاثون النظرية شكل ٤٠) *

المستقيمان المتوازيان يكونان على أبعاد متساوية أى إذا توازى مستقيمان
مثل $ا ب$ و $ج د$ كان العمودان $ح و و$ المحصوران بينهما متساويين
(برهانه) أن يقال لو وصل المستقيم $و ر$ لكان المثلثان الحادثان $ح و ر$
و $و ر ه$ متساويين لان الضلع $و ر$ مشترك والزاوية $ح و ر =$ للزاوية
 $و ر ه$ بالتبادل والزاوية $ح و ر =$ للزاوية $و ر ه$ بالتبادل كذلك
(كفاي النظرية السابعة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون
العمودان $ح و و$ متساويين وهو المطلوب

* (الدعوى الثانية والثلاثون النظرية. شكل ٤٠) *

المستقيمان اللذان على أبعاد متساوية يكونان متوازيين
 أى ان المستقيمين اللذين على أبعاد متساوية مثل a و b يكونان
 متوازيين

(برهانه) أن يقال لو وصل مستقيم مثل $و ر$ اثنان المثلثان الحادان
 $ح و ر$ و $و ر ه$ متساويين لان الضلع $و ر$ مشترك والضلع $ح و =$
 للضلع $ر ه$ فمضاو الزاوية $ح و ر =$ للزاوية $و ر ه$ بالتبادل (كفاي
 النظرية السادسة) ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية
 $ح و ر =$ للزاوية $ر و ه$ ويلزم من كونهما متبادلتين أن يكون
 المستقيمان $ح و$ و $أ ب$ متوازيين وهو المطلوب

• (الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية شكل اب) •

العمود المحصور بين المتوازيين أصغر من كل مائل محصور بينهما
 أى أن العمود هـ و المحصور بين المتوازيين ا - و ح ، أصغر من كل
 مائل مثل ع ط محصور بينهما

(برهانه) أن يقال لو أنزل من النقطة ح عود ح ك على ح د لكان
هو = ح ك كافي للتطرية الحادية والثلاثين لكن العمود ح ك >
المائل ح ط ويلزم من كون العمود ح ك > المائل ح ط أن يكون

العمود

العمود هـ و أصغر من المائل ح ط وهو المطلوب

* (تنبيه) *

إذا كان العمود هـ و والمائل ح ط متقاطعين في نقطة بين المتوازيين كالنقطة سـه يقال في البرهان من المعلوم أن العمود هـ سـه > المائل سـه ح والعمود سـه و > المائل سـه ط وان مجموع العمودين أصغر من مجموع المائلين أى هـ سـه + سـه و > سـه ح + سـه ط لكن هـ سـه + سـه و = هـ و و سـه ح + سـه ط = ح ط فاذن يكون هـ و > ح ط وهو المطلوب

* (الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية شكل ط) *

المستقيم الموازى لاحد مستقيمين متلاقين يتلاقى بالمستقيم الموازى للآخر على زاويتين احدهما تساوى زاوية المستقيم المتلاقين والاخرى تتمها

أى اذا تلاقى مستقيمان مثل ا ب و ر ح و مدمستقيم مثل ط ل يوازى المستقيم ا ب ومدايضامستقيم مثل و ك يوازى المستقيم ر ح فالمستقيمان ط ل و ك يلتقيان على زاويتين احدهما هـ و عـه ا ب ح والاخرى د هـ ك تتمها

* (برهانه) أن يقال لو لم يتلاقى المستقيم و ك بالمستقيم ط ل لكانا متوازيين

ويلزم من هذا انه يمكن أن يمد من نقطة واحدة مثل ر مستقيمان مثل ا ب و ر ح موازيان لمستقيم مثل و ك وقد تقدم انه محال فحينئذ المستقيمان و ك و ط ل لا يتوازيان بل يلتقيان

ويلزم من توازى المستقيمين ا ب و ط ل أن تكون الزاويتان المتبادلتان الداخلتان ا ب ح و ر ح متساويتين ومن توازى المستقيمين ر ح و و ك أن تكون المتبادلتان الداخلتان ر ح هـ و د هـ و متساويتين فاذن تكون الزاويتان ا ب ح و ر ح و متساويتين وهو

المطلوب

* (تنبيهات) *

الاول يحدث من تلاقي ط ل و و ك اربع زوايا منها اثنتان كلتاهما
 تساوى زاوية المستقيمين المعلومين واثنتان كلتاهما تتضم الزاوية المذكورة
 فأما الزاويتان د ه و و ك ه ل فكلتاهما تساوى الزاوية ا ب د و ا ت ل
 الزاويتان د ه ك و ل ه و فكلتاهما تتضم الزاوية ا ب د
 الثاني تكون الزاويتان متساويتين اذا كان كل ضلع منهما موازيا لنظيره
 سواء كان على اتجاهاه أو على عكس اتجاهاه
 الثالث تكون الزاويتان متممتين لبعضهما اذا كان كل ضلع منهما موازيا
 لنظيره وكان اتجاهاه أحدهما على عكس اتجاهاه نظيره واتجاهاه الضلع
 الآخر كاتجاهاه نظيره

* (الدعوى الخامسة والثلاثون النظرية شكل لد) *

العمود المقام على أحد مستقيمين متلاقين يتلاقى بالعمود المقام على المستقيم
 الآخر على زاويتين احدهما تساوى زاوية المستقيمين المعلومين والاخرى
 تتمها

أى ان المستقيم مثل د ط العمود على مستقيم مثل ا ب متلاقى بالمستقيم
 ا ب يتلاقى بالعمود و ح المقام على المستقيم ا ب على زاويتين احدهما
 د ه و تساوى الزاوية ا ب د والاخرى و ه ط تتمها
 (برهانه) أن يقال لو أقيم من رأس الزاوية ا عمود ا ك على ا ب
 وعمود ا ع على ا ب لكان و ح موازيا ا ك و د ط موازيا
 ا ع وبقتضى النظرية السابقة يتلاقى و ح بالمستقيم د ط وحيث
 ان كلامنا المستقيمين ا ب و د ه و عمود على المستقيم ا ب وكلامنا
 المستقيمين ا ك و ه و عمود على المستقيم ا ب تكون الزاوية ا ب د
 مساوية للزاوية د ه و لانه قد تقدم أن الزاويتين اللتين أضلاعهما
 المتناظرة متوازيتان وتوجه الى جهة واحدة متساويتان وحيث ان المستقيم

١٠٠ عمود على المستقيم ا - يكون $\angle ك ا ب + \angle ك ا ج =$ قائمة
 وأيضاً حيث ان المستقيم ا ك عمود على المستقيم ا د يكون $\angle ا ك د$
 $+ \angle ا د ه =$ قائمة ويلزم من هذا أن يكون $\angle ا ك د + \angle ك ا ب =$
 $\angle ا ك د + \angle ا د ه$ فإذا طرح الزاوية المشتركة $\angle ا ك د$ من الطرفين
 نجت أن الزاوية $\angle ك ا ب = \angle ا د ه$ ويلزم من كون الزاوية $\angle ك ا ب =$
 للزاوية $\angle ا د ه$ أن تكون الزاويتان $\angle ا د ه$ و $\angle ا د ه$ متساويتين وهو
 المطلوب

ومن المعلوم أن الزاوية $\angle ا د ه$ مقيمة للزاوية $\angle ا د ه$ وهي مقيمة للزاوية
 $\angle ا د ه$

* (تنبيه) *

يحدث من تلاقى المستقيمين د ح و ط العمودين على المستقيمين
 المتلاقين ا و ا د أربع زوايا منها اثنتان كلتاهما تساوي زاوية
 المستقيمين المعلومين واثنتان كلتاهما تتمم الزاوية المذكورة فأمّا الزاويتان
 $\angle د ه و$ و $\angle ح ه ط$ فكلتاهما تساوي الزاوية $\angle ا د ه$ وأمّا الزاويتان
 $\angle د ه ح$ و $\angle د ه ط$ فكلتاهما تتمم الزاوية $\angle ا د ه$

* (الدعوى السادسة والثلاثون النظرية شكل له) *

إذا مدّ ضلع من مثلث فالزاوية الحادثة بمده تساوي مجموع زواياه الداخلة
 المجاورة لها

أى إذا مدّ الضلع $\angle د ه$ على استقامته جهة $\angle د ه$ مثلاً فالزاوية الحادثة
 $\angle ا د ه$ تساوي مجموع زاويتيها الداخليتين $\angle ا د ه$ و $\angle ا د ه$
 (برهانه) أن يقال لومة من النقطة $\angle د ه$ مستقيم مثل $\angle د ه$ يوازي الضلع
 ا - لانقسمت الزاوية $\angle ا د ه$ الى زاويتي احداهما $\angle ا د ه = \angle ا د ه$
 بالتبادل والاخرى $\angle د ه = \angle ا د ه$ بالتناظر لكون المستقيمين ا -
 و $\angle د ه$ متوازيين مقطوعين بالمستقيم $\angle د ه$ فاذن يكون $\angle ا د ه +$
 $\angle د ه = \angle ا د ه + \angle ا د ه$ لكن $\angle ا د ه + \angle ا د ه = \angle ا د ه$

يكون $ا ح د = ا ب + ا ج$ وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا أن كل مثلث مجموع زواياه يساوى قائمتين

أى ان مجموع الزوايا $ا و ب و ج$ يساوى قائمتين

(برهانه) أن يقال يلزم من كون الزاوية $ا ح د = ا + ب$ أن يكون

$ا ح د + ا ج د = ا ح د + ا ب د$ ويلزم من كون مجموع

المتجاورتين $ا ح د و ا ج د$ مساويا لقائمتين أن يكون $ا + ب + ج$

$= ا ب د = ا ج د$ قائمتين فتمين بهذا أن كل مثلث مجموع زواياه يساوى قائمتين

وثانيا انه اذا علم من مثلث زاويتان كل على حدتها أو مجموعهما علمت الثالثة

بطرح المعلوم من مقدار القائمتين لانها ممتمة لمجموعهما

وثالثا انه اذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث اخر كل لنظيرة

كانت الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية لنظيرتها من الثانى وكان

المثلثان متساويي الزوايا المتناظرة

أى اذا كانت الزاوية $ا =$ للزاوية $آ$ والزاوية $ب =$ للزاوية $س$

كانت الزاوية $ج$ مساوية للزاوية $ح$

(برهانه) أن يقال يلزم من كون $ا + ب + ج = ا ب د$ قائمتين

$و ا + ب + س = ا ب د$ قائمتين أن يكون $ا + ب + ج = ا + ب + س$

$ا + ب + س = ا + ب + ح$ فاذا طرح من الطرفين الاول $ا و ب$ ومن الثانى

$ا و ب$ بقى $ج = ح$ وهو المطلوب

ورابعا انه اذا ساوى مجموع زاويتين من مثلث مجموع زاويتين من مثلث آخر

يدون أن تكون كل واحدة منهما مساوية لنظيرتها كانت الزاوية الثالثة من

المثلث الاول مساوية للثالثة من الثانى وفى هذه الحالة لا يكون المثلثان

متساويي الزوايا المتناظرة

وثامسا ان أى مثلث قائم الزاوية مجموع زاويتي المجاورتين لوتر قائمته
يساوى قائمة لان مجموعهما يتم قائمة

وسادسا انه اذا كان المثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين ساوت كل زاوية
من المجاورتين لوتر قائمته نصفها

وسابعه انه لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان كل على حدتها اذ لو
كان كذلك للزم أن يكون مجموع زواياه الثلاث اكبر من قائمتين وهو محال
وثامنا انه لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان منفرجتان ولا منفرجة
وقائمة

وثاسعا ان أى مثلث منفرج الزاوية مجموع زاويتي المجاورتين لوتر منفرجه
اقل من القائمة

وعاشرا ان أى زاوية من أى مثلث متساوى الاضلاع تساوى ثلث القائمة
او ثلثي القائمة فاذا جعل مقدار القائمة وحدة كان مقدار زاوية المثلث
للمتساوى الاضلاع $\frac{1}{3}$ وان جعل مقدار القائمة ٩٠ درجة كان مقدار
زاويته ٦٠ درجة

• (الدعوى السابعة والثلاثون النظرية) •

بماذا وازت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة
(برهانه) أن يقال لور من زوايا المثلث الاول بالحروف α و β و γ
ولزوايا المثلث الثاني بالرموز A و B و C وفرض أن ضلعي الزاوية
 α موازيان لضلعي الزاوية A كل لنظيره وضلعي الزاوية β لضلي الزاوية
 B وضلي الزاوية γ لضلي الزاوية C ولو حظ ما تقدم في النظرية
الرابعة والثلاثين لتحصل

$$1 = \alpha \text{ أو } \alpha + \beta = \gamma \text{ قائمتين}$$

$$2 = \beta \text{ أو } \beta + \gamma = \alpha \text{ قائمتين}$$

$$3 = \gamma \text{ أو } \gamma + \alpha = \beta \text{ قائمتين}$$

ويلزم من كون مجموع زوايا المثلث مساويا لثلاثين أن يكون مجموع زوايا المثلثين مساويا لاربعة قوائم ويلزم من هذا أن لا تكون الزاوية α مقمة للزاوية α والزاوية β مقمة للزاوية β والزاوية γ مقمة للزاوية γ في ان واحد اذ لو كانت كذلك لزم أن يكون مجموع زوايا المثلثين مساويا لست قوائم وهو محال بل لا يمكن أن تكون زاويتان من زوايا احد المثلثين مقمتين لنظيرتيهما من المثلث الاخر في آن واحد لانهما لو كانتا كذلك لزم أن يكون مجموع الزوايا الاربعة المذكورة مساويا لاربعة قوائم ويلزم من هذا انعدام الزاوية الثالثة من احد المثلثين وانعدام نظيرتها من المثلث الاخر وهو محال فتبين بهذا انه لا بد من أن يكون في احد المثلثين زاويتان كل منهما مساوية لنظيرتها من الاخر ويلزم من هذا أن تكون الثالثة من احدهما مساوية لنظيرتها كذلك وهو المطلوب

(الدعوى الثامنة والثلاثون النظرية) *

اذا تعامدت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة (برهانه) أن يقال لورمز زوايا احد المثلثين بالحروف α و β و γ وزوايا المثلث الاخر بالرموز α' و β' و γ' وفرض أن ضلعي الزاوية α عمودان على ضلعي الزاوية α' كل على نظيره وأن ضلعي الزاوية β على ضلعي الزاوية β' وضلعي الزاوية γ على ضلعي الزاوية γ' ولو حفظ ما تقدم في النظرية الرابعة والثلاثين لتحصل

$$\alpha = \alpha' \text{ أو } \alpha + \alpha' = 180^\circ \text{ فاثنتين}$$

$$\beta = \beta' \text{ أو } \beta + \beta' = 180^\circ \text{ فاثنتين}$$

$$\gamma = \gamma' \text{ أو } \gamma + \gamma' = 180^\circ \text{ فاثنتين}$$

لكن

لكن قد سبق استحالة وجود المتساويات الثلاث الاخر فلم يبق الا أن $ا = ا$

و $ـ = ـ$ و $ـ = ـ$ وهو المطلوب

* (الدعوى التاسعة والثلاثون النظرية شكل ٤٢) *

كل شكل. كثير الاضلاع محدب مجموع زواياه الداخلة يساوى من القوائم عدد اضلاعه الا اثنين مضروباً باقى طرحه فى اثنين أى أن أى شكل كثير الاضلاع محدب مثل المسبع $ا - د ه و ر$ مجموع زواياه الداخلة يساوى من القوائم عدد اضلاعه الا اثنين مضروباً باقى طرحه فى اثنين أى

$$(٧ - ٢) \times ٢ = ٥ \times ٢ = ١٠ \text{ قوائم}$$

(برهانه) أن يقال ان أقطار هذا الشكل المارة من رأس زاوية واحدة تقسمه الى مثلثات مجموع زواياها يساوى مجموع زواياه ولا يخفى أن عدد اضلاعه يزيد على عدد تلك المثلثات بضاعتين لان كل مثلث يشتمل على ضلع من اضلاع الشكل ما عدا المثلثين المتطرفين فان كلا منهما يشتمل على ضلعين وينج من هذه النظرية

أولاً أن مجموع الزوايا الداخلة من أى شكل رباعى محدب يساوى

$$(٤ - ٢) \times ٢ = ٢ \times ٢ = ٤ \text{ قوائم}$$

فان كانت تلك الزوايا متساوية كانت كل واحدة منها قائمة وهذه الخاصية فى المربع والمستطيل

وثانياً أن مجموع الزوايا الداخلة من أى شكل خماسى محدب يساوى

$$(٥ - ٢) \times ٢ = ٣ \times ٢ = ٦ \text{ قوائم}$$

فان كان متساوى الزوايا كان مقدار أى زاوية من زواياه خمس الست قوائم أو ستة الخماس القائمة وبهذه الكيفية يتعين مقدار زاوية أى شكل متساوى الزوايا عدد اضلاعه معين

* (تنبيهان) *

الاول إذا مر بالحرف م لعدد اضلاع شكل محدب كان مجموع زوايا م

الداخله مبيننا بهذا القانون (م - ٢) $\times ٢ = ٢ م - ٢$
اعنى أن أى شكل مستقيم الاضلاع محدب مجموع زواياه يساوى قوائم
هددها بقدر ضعف عدد اضلاعه الاربعه

الثانى أن هذه الدعوى لا تنطبق على أى شكل غير محدب
* (الدعوى الاربعون النظرية شكل ل ط) *

اذا مدت اضلاع مثلث الى اتجاه واحد بحيث لا تتكون خارجه تقابل داخله
كان مجموع الزوايا الحاده مساويا لاربع قوائم
أى اذا مدت الضلع - ح على استقامته جهة ح والضلع د جهة د
والضلع ز جهة ز ورمز للزوايا الحاده بالرموز - و - ح و - د
يكون - = ح + د + ز = ٤ قوائم

(برهانه) أن يقال يلزم من كون - + ح = قائمتين و ح + د + ز = قائمتين أن يكون
ح = قائمتين، و د + ز = قائمتين أن يكون

- + ح + د + ز + ح = ٦ قوائم ويلزم من
هذا أن يكون

- + ح + د = ٦ قوائم - (- + ح + د) لكن -
+ ح + د = قائمتين فيكون - + ح + د = ٦ قوائم
- قائمتين = اربع قوائم وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية والاربعون النظرية شكل م) *

اذا مدت أضلاع مثلث مستقيم الاضلاع محدب الى اتجاه واحد بحيث
لا تتكون خارجه تقابل داخله كان مجموع الزوايا الخارجيه الحاده مساويا
لاربع قوائم

أى اذا مدت الضلع - ح على استقامته جهة - والضلع د جهة د
والضلع هـ جهة هـ والضلع هـ د جهة د والضلع د ح جهة د

و رمز للزوايا الحادثة بالرموز $\bar{\text{و}}$ و $\bar{\text{ح}}$ و $\bar{\text{د}}$ و $\bar{\text{ه}}$ و $\bar{\text{و}}$ يكون
 $\bar{\text{س}} + \bar{\text{ح}} + \bar{\text{د}} + \bar{\text{ه}} + \bar{\text{و}} = \bar{\text{ز}}$ قوائم

(برهانه) أن يقال يلزم من كون $\bar{\text{س}} + \bar{\text{ح}} = \bar{\text{ز}}$ قائمتين $\bar{\text{و}}$ و $\bar{\text{د}}$

$\bar{\text{ح}} = \bar{\text{ز}}$ قائمتين $\bar{\text{و}}$ و $\bar{\text{د}} + \bar{\text{ه}} = \bar{\text{ز}}$ قائمتين $\bar{\text{و}}$ و $\bar{\text{ه}}$ + $\bar{\text{ه}} = \bar{\text{ز}}$ قائمتين

$\bar{\text{و}}$ و $\bar{\text{و}} = \bar{\text{ز}}$ قائمتين أن يكون مجموع الزوايا الداخلة والخارجة

مساويا لقوائم بقدر ضعف عدد اضلاع الشكل وقد تقدم في النظرية

التاسعة والثلاثين أن مجموع الزوايا الداخلة من أى شكل مستقيم الاضلاع

محدّب يساوى قوائم بقدر ضعف عدد اضلاعه الاربعة فاذا كان يكون مجموع

الزوايا الخارجة مساويا لاربعة قوائم وهو المطلوب

وهالجدولايين فيه عدد اضلاع الاشكال من المثلث الى ذى العشرين

وما يساويه مجموع زواياها الداخلة ومجموع زواياها الخارجة ومجموع زواياها

الداخلة والخارجة معا

عدد اضلاع الاشكال	مجموع زواياها الداخلية	مجموع زواياها الخارجية	مجموع زواياها الداخلية والخارجية معا
3	180	360	540
4	360	720	1080
5	540	1080	1620
6	720	1440	2160
7	900	1800	2700
8	1080	2160	3240
9	1260	2520	3780
10	1440	2880	4320
11	1620	3240	4860
12	1800	3600	5400
13	1980	3960	5940
14	2160	4320	6480
15	2340	4680	7020
16	2520	5040	7560
17	2700	5400	8100
18	2880	5760	8640
19	3060	6120	9180
20	3240	6480	9720

وبالتأمل في هذا الجدول يشاهد أنه يتركب من عدد أضلاع الاشكال متوالية عددية تصاعدية حدها الأول ٣ وأساسها واحد وأنه يتركب من مجموع زواياها الداخلية متوالية عددية تصاعدية حدها الأول ٢ وأساسها ٤.

وأنه يتركب من مجموع زواياها الداخلية والخارجية معا متوالية عددية

تصاعدية

نصاعدية حذها الاول ٦ واسامها ٢

وان مجموع زواياها الخارجة ثابت لا يتغير عن الاربع قوائم

• (الدعوى الثانية والاربعون النظرية شكل ٤٤) •

نظر المتوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين

أى أن متوازي الاضلاع مثل ا - ب - ج - د ينقسم بالقطر د - ب مثلا الى

مثلثين ا - ب - د و ب - ج - د متساويين

(برهانه) أن يقال يلزم من كون المستقيمين ا - ب و ج - د متوازيين

ومقطوعين بالقاطع د - ب أن تكون الزاويتان المتبادلتان ا - ب و

ج - د متساويتين وكذلك يلزم من كون المستقيمين ا - ب و ج - د

متوازيين ومقطوعين بالقاطع د - ب أن تكون الزاويتان المتبادلتان ا - ب و

ج - د متساويتين وحيث ان الضلع د - ب مشترك بين المثلثين ا - ب و

ج - د يكونان متساويين (كما تقدم اثباته في النظرية السابعة)

وينتج من هذه النظرية

أولا أن الاضلاع المتقابلة في أى شكل متوازي الاضلاع متساوية

وثانيا أن الزوايا المتقابلة في أى شكل متوازي الاضلاع متساوية

ومثلا أنه اذا ساوى ضلعان وزاوية بينهما من شكل متوازي الاضلاع

ضلعين آخرين وزاوية بينهما من شكل آخر متوازي الاضلاع تساوت بقية

أجزاء أحدهما بقية أجزاء الآخر كل بتطيره

ورابعا أنه اذا تساوى ضلعان متجاوران من شكل متوازي الاضلاع كانت

اضلاعه كلها متساوية

وسامسا أنه اذا كانت إحدى زوايا متوازي الاضلاع قائمة كانت زوايا

كلها كذلك

• (الدعوى الثالثة والاربعون النظرية شكل ٤٤) •

كل شكل رباعي تساوت اضلاعه المتقابلة فهو متوازي الاضلاع

أى أى شكل رباعي مثل ا - ب - ج - د اذا كان فيه الضلع ا - ب مساويا للمقابل

د و والضلع ا د مساويا لمقابلة د ه يكون متوازي الاضلاع ا د ه
يكون الضلع ا ه موازيا للضلع د ه والضلع ا د موازيا للضلع
د ه

(برهانه) أن يقال لو وصل القطر د ه لكان المثلثان الحاد ثمان ا د ه
و د ه د متساويين لان الضلع د ه مشترك بينهما والضلع ا د ه
للضلع د ه بالفرض والضلع ا د ه للضلع د ه كذلك كما في
(النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية
ا د ه = د ه د والزاوية ا د ه = د ه د ويلزم من كونه
المتبادلتين ا د ه و د ه د متساويتين أن يكون المستقيمان ا د ه و د ه
متوازيين ومن تساوي المتبادلتين ا د ه و د ه د أن يكون المستقيمان
ا د ه و د ه د متوازيين فقد ثبت بهذا أن الاضلاع المتقابلة متوازية كما هي
متساوية فاذن يكون الشكل المذكور متوازي الاضلاع وهو المطلوب

* (الدعوى الرابعة والاربعون النظرية شكل ٤٤) *

اذا كان الضلعان المتقابلان في الشكل الرباعي متساويين ومتوازيين كان
الضلعان الاخران كذلك ويكون الشكل المذكور متوازي الاضلاع
أى اذا كان الضلعان المتقابلان مثل ا د ه و د ه د من الرباعي ا د ه د
متساويين ومتوازيين كان الضلعان الاخران ا د ه و د ه د متساويين
ومتوازيين وكان الشكل ا د ه د متوازي الاضلاع

(برهانه) أن يقال لو وصل القطر د ه لكان المثلثان الحاد ثمان ا د ه
د ه د متساويين لان الضلع د ه مشترك بينهما والضلع ا د ه للضلع
د ه بالفرض والزاوية ا د ه = د ه د بالتبادل لكون ا د ه و د ه د
متوازيين وقد ثبت في النظرية السادسة أن المثلثين اللذين به هذه التسمية
متساويان ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن يكون الضلع ا د ه للضلع
د ه د وأن تكون الزاوية ا د ه = للزاوية د ه د وحيث أن الزاويتين
ا د ه و د ه د متبادلتان يكون الضلعان ا د ه و د ه د متوازيين

فقد ثبت بهذا أن الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية فاذن يكون الشكل
المذكور متوازي الاضلاع وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة والاربعون النظرية شكل ٤٥)

قطر المتوازي الاضلاع ينصفان بعضهما

أى ان متوازي الاضلاع مثل $ا ب ح د$ اذا وصل قطراه $ا د$ و $ب ح$
كانت نقطة تقاطعهما فى منتصف كل منهما أى يكون $ا ه = ه د$ و $ب ه = ه ح$

(برهانه) أن يقال يلزم من كون الشكل متوازي الاضلاع ان يكون
الضلعان المقابلان $ا ب$ و $ب ح$ متساويين ومتوازيين ويلزم من كونهما
متوازيين أن تكون الزاويتان المتبادلتان $ا د ب$ و $ب ح د$ متساويتين
وأن تكون الزاويتان المتبادلتان $ب ا د$ و $ا ح د$ متساويتين وقد ثبت
فى النظرية السابعة أن المثلثين اللذين به هذه المتباينة متساويان ويلزم من تساوى
هذين المثلثين أن يكون $ا ه = ه د$ و $ب ه = ه ح$ وهو
المطلوب

(تنبيهان)

الاول قطر المعين ينصفان بعضهما عمادا لانه يلزم من كون الضلع
 $ا ب = ا د$ والضلع $ب ح = ه د$ والضلع $ا ه$ مشترك أن يكون
المثلث $ا ب ه =$ للمثلث $ا ه د$ ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن
تكون الزاويتان $ب ه ا$ و $ا ه د$ متساويتين ويلزم من كونهما متجاورتين
ومتساويتين أن يكون المستقيم $ا د$ عمودا على المستقيم $ب ح$ وهو
المطلوب

الثانى كل شكل رباعى تساوت أضلاعه فأقطاره تنصف زواياه وتنصف
بعضها عمادا

(الدعوى السادسة والاربعون النظرية شكل ٤٦)

قطر المستطيل متساويان

أى ان المستطيل مثل $ا-ب-ج-د$ قطراه مثل $ا-د$ و $ب-ج$ متساويين
(برهانه) أن يقال يلزم من كون الضلع $ا-ب$ مشتركاً في المثلثين $ا-ب-ج$
و $ا-ب-د$ والضلع $ا-د$ = للضلع $ب-ج$ والقائمة $د-ا-ب$ = $ج-ا-ب$
أن يكون المثلثان المذكوران متساويين ويلزم من تساويهما أن يكون
القطران $ا-ج$ و $ب-د$ متساويين وهو المطلوب

(تنبيهات)

الاول قطرا المربع متساويان كما أن قطري المستطيل كذلك
الثاني قطرا المربع ينصفان زوايا د وينصفان بعضهما عماداً كما أن قطري
المعين كذلك
الثالث الشكل الرباعي يكون متوازي الاضلاع اذا كان كل من قطريه
منصفاً للآخر

(الدعوى السابقة والاربعون النظرية شكل مو)

اذا نصف أحد اضلاع مثلث بنقطة ومدة منها مستقيم يوازي أحد الضلعين
السابقين فاعلم أولاً أنه يمر بوسط الضلع الثالث وثانياً أنه يكون مساوياً للنصف
الضلع الموازى له

أى اذا نصف ضلع مثل $ا-ب$ من المثلث $ا-ب-ج$ بنقطة مثل $د$ ومدة منها
مستقيم مثل $هـ$ يوازي الضلع $ب-ج$ فاعلم أولاً أنه يمر بوسط الضلع
الثالث $ا-ب$ أعني يكون $ا-د$ = $د-ب$ وثانياً أنه يكون مساوياً للنصف
 $ب-ج$ أعني يكون $هـ-د$ = $\frac{ب-ج}{2}$

(برهان القضية الاولى) أن يقال لومتدة من النقطة $هـ$ مستقيم مثل $هـ-و$
يوازي الضلع $ا-ب$ لحدث مثلث $هـ-و-د$ يساوى المثلث $ا-د-ب$ لانه
يلزم من توازي المستقيمين $هـ-و$ و $ب-ج$ أن تكون الزاويتان المتناظرتان
 $و-ا-هـ$ و $ا-ب-ج$ متساويتين ومن توازي المستقيمين $ا-ب$ و $هـ-و$ أن
تكون الزاويتان المتناظرتان $هـ-و-ا$ و $ا-د-ب$ متساويتين ومن المعلوم
أن الضلع $ب-ج$ = للضلع $هـ-ا$ بالفرض فيكون المثلث $هـ-و-ا$ =

للمثلث

للمثلث $أ هـ د$ كما ثبت ذلك (في النظرية السابعة)
 ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون $هـ د = أ د$ وحيث أن الشكل
 الرباعي $هـ د و ز$ متوازي الاضلاع يكون $هـ د = ز د$ ويلزم
 من هذا أن يكون $أ د = ز د$ وهو المطلوب
 (وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من تساوى المثلثين $أ هـ د و هـ د و$
 أن يكون $هـ د = ز د$ ومن توازي اضلاع الرباعي $هـ د و ز$
 أن يكون $هـ د = ز د$ ويلزم من هذا أن يكون $ز د = و د$
 وأن يكون $هـ د = ز د$ وهو المطلوب

(الدعوى الثامنة والاربعون النظرية شكل من)

أى شكل شبيه المنحرف اذا مدت من وسط أحد ضلعيه المنحرفين مستقيماً يوازي
 إحدى القاعدتين المتوازيتين أى الضلعين المتوازيين فاعلم
 أولاً أن هذا المستقيم يمر بوسط الضلع الآخر
 وثانياً أن المستقيم المذكور يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين
 أى أن أى شكل شبيه المنحرف مثل $أ ب د$ اذا مدت من النقطة $و$ التي
 هي وسط ضلعه $د ب$ غير الموازي للضلع $أ ب$ مستقيماً مثل $و هـ$ يوازي
 إحدى القاعدتين المتوازيتين $أ د و ب د$ فاعلم
 أولاً أن المستقيم $و هـ$ يمر بوسط الضلع الآخر $أ ب$ أعني يكون $أ هـ$
 $= ب هـ$

وثانياً أن المستقيم $و هـ$ يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين
 $أ د و ب د$ أعني يكون $و هـ = \frac{أ د + ب د}{٢}$
 (برهان القضية الاولى) أن يقال لو وصل قطر الشكل مثل $أ ب$ لحدث
 مثلثان $أ د و ب د$ أما الاول وهو $أ د ب$ ففيه $د و = و ب$ بالفرض
 و $و د$ يوازي $أ د$ كذلك فيلزم أن يكون $أ د = ب د$ وأن يكون
 $و د = \frac{أ د}{٢}$ وأما الثانى وهو $أ ب د$ ففيه $أ د = ب د$ و $و د$ يوازي
 $ب د$ فيلزم أن يكون $أ د = ب د$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من كون $د ع = ا ك$ و $ج ه$ $= ا ب$ أن يكون $د ع + ه = ا ك + ج$ أي $د ه = ا ب + ج$ وهو المطلوب

• (الدعوى التاسعة والاربعون النظرية شكل مو) *

المستقيم المار بوسطى ضلعي مثلث يوازي ضلعه الثالث أي ان المستقيم $ه د$ المار بوسطى الضلعين $ا ب$ و $ا ج$ من المثلث $ا ب ج$ يوازي ضاعه الثالث $ج ب$

(برهانه) أن يقال لو مذهب النقطة $ه$ مستقيم $ه د$ يوازي $ا ب$ لحدث مثلث $ه د ج$ = المثلث $ا ه د$ لان $ج د ه = ه ا$ بالفرض والزاوية $د ه و =$ للزاوية $ا$ باتساظر $و ه د = ا د$ كما تقدم وقد ثبت في النظرية السادسة أن المثلثين اللذين بهذه المثابة متساويان ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية $د =$ للزاوية $ا ه د$ ويلزم من كونهما متساظرتين ومتساويتين أن يكون المستقيمان $ه د$ و $ج ب$ متوازيين وهو المطلوب

• (الدعوى الخسون النظرية شكل مز) *

أي شكل شبيه المنحرف المستقيم المار بوسطى ضلعيه المنحرفين يوازي كلا من قاعدتيه المتوازيين

أي ان أي شكل شبيه المنحرف مثل $ا ب ج د$ المستقيم $ه د$ المار بوسطى ضلعيه غير المتوازيين $ا ب$ و $ج د$ يوازي كلا من قاعدتيه المتوازيين $ا د$ و $ج ب$

(برهانه) أن يقال لو وصل احد قطري الشكل مثل $د ب$ ونصف بنقطة مثل $ح$ ومذهبها مستقيم يوازي كلا من القاعدتين المتوازيين $ا د$ و $ج ب$ لمر بوسطى الضلعين $ا ب$ و $ج د$

وينتج من هذه النظرية

أولا أن المستقيم المار بوسطى ضلعي شبيه المنحرف غير المتوازيين يمر أيضا

وسطى قطريه ويكون مساويا لنصف مجموع قاعدتيه المتوازيين
وثانياً أن المستقيم المحصور بين وسطى قطريه يكون مساويا لنصف فاضل
قاعدتيه المتوازيين انظر (شكل مح)

لانه لو وصل المستقيم $ط$ ومد على استقامته جهة $ط$ حتى لاقى $د$
في $ع$ لمثلث مثلث $د ح ع$ فيه $ط$ يوازي $ا د$ و $د و$
و $د$ فيكون $ط = \frac{د ح}{د و}$ وحيث ان $ط = \frac{ا ح}{ا د}$ فيكون $\frac{د ح}{د و} = \frac{ا ح}{ا د}$
 $= \frac{ا ح}{ا د}$ أو $د ح = ا د$ وحيث ان $د ع = د و - د ح = د و - ا د$
يكون $د ع = د و - ا د$

ويلزم من كون $ح ط$ موازيا للضلع $د و$ و $د ع = د ح = ا د$ أن
يكون $ح ط = \frac{د ح}{د و}$ فاذن يكون
 $ح ط = \frac{د ح - ا د}{د و}$ وهو المطلوب

• (الدعوى الحادية والخمسون النظرية شكل ٥) •

الشكل الرباعي يكون متوازي الاضلاع اذا كانت زواياه المتقابلة
متساوية

أى ان الشكل الرباعي مثل $ا د و ح$ يكون متوازي الاضلاع اذا كانت
زواياه المتقابلة $ا و ح$ و $د و$ متساوية
(برهانه) أن يقال حيث ان مجموع الزوايا الداخلية من أى شكل رباعي
محدد يساوى أربع قوائم يكون

$$ا + د + و + ح = ٤ قوائم وحيث ان$$

$$ا = د \text{ بالقرض و } د = و \text{ كذلك يكون}$$

$$ا + د + و + ح = ٤ قوائم ويلزم من هذا أن يكون$$

$$د + و = لقائمتين وحيث كان مجموع المتجاوئين الداخلين$$

$$و - مساويا للقائمتين يكون المستقيمان $ا د$ و $د و$ متوازيين وبمثل$$

$$\text{هذا يبرهن على أن } ا د \text{ و } د و \text{ متوازيان وهو المطلوب}$$

نتم المقالة الاولى بحمد الله وموئده

• (المقالة الثانية) •

• (في بيان الدائرة ومقادير الزوايا) •

(حدود)

(حد ١) (شكل ٤٦) محيط الدائرة خط منحني جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا

والدائرة سطح مستو ومحاط بهذا الخط المنحني

(حد ٢) نصف القطر مستقيم ممتد من المركز الى المحيط مثاله $ا - ب$ من (الشكل ٤٦)

والقطر مستقيم يمر بالمركز وينتهي بنقطتين من المحيط مثاله $ا - ب$ من (الشكل ٤٦) ونقطة تسمى تعريف محيط الدائرة تكون أنصاف الاقطار كلها متساوية وكذلك الاقطار وينتج من تعريف محيط الدائرة أن النقطة التي يكون بعدها عن المركز اكبر من نصف القطر تكون خارجة عن المحيط والتي بعدها عن المركز أصغر من نصف القطر تكون داخل الدائرة .

(حد ٣) القوس جزء من المحيط مثاله $و ح ر$ من (الشكل ٤٦) والوتر مستقيم ينتهي بطرفي القوس مثاله $و ر$ من (الشكل ٤٦)

(حد ٤) قطعة الدائرة جزء منها محاط بقوس ووتره مثاله القطعة $و ح ر$ أو القطعة $و ا ه د ر$ من (الشكل ٤٦)

• (تنبيه) •

اعلم أن الوتر مثل $و ر$ انما ينسب عند الاطلاق للقوس الاصغر وان كان موافقا لقوسين والقطعتين الكبرى والصغرى

(حد ٥) قطع الدائرة جزء من الدائرة محاط بقوس وينتهي قطرين واصلين الى نهايتي ذلك القوس مثاله $ا ه$ أو $ه د$ أو $د ز$ من (الشكل ٤٦)

(حد ٦) (شكل ٤٧) المستقيم الداخلي ما كان مرسوما داخل الدائرة ومنتهيا بنقطتين من محيطها مثاله المستقيم $ا - ب$ من (الشكل ٤٧)

الزاوية الداخلية زاوية رأسها بالمحيط وضلعاهما وتران مثالها الزاوية α من (الشكل ٤٧)

المثلث الداخلي - مثلث رؤسه بالمحيط مثالها المثلث α من (الشكل ٤٧) ويقال للدائرة حينئذ خارجية بمعنى انها مرسومة عليه كثير الاضلاع الداخلي - شكل رؤسه بالمحيط ويقال للدائرة حينئذ خارجية بانحنى المتقدم

(حد ٧) القاطع مستقيم يقطع محيط الدائرة في نقطتين مثالها المستقيم α - من (الشكل ٤٨)

(حد ٨) المستقيم المماس لمحيط الدائرة هو مستقيم لا يشترك مع المحيط الا في نقطة واحدة مثالها المستقيم α من (الشكل ٤٨) ونقطة التماس هي نقطة الاشتراك مثالها α

(حد ٩) الدائرتان المتماستان دائرتان لا يتشارك محيطاهما الا في نقطة واحدة

(حد ١٠) كثير الاضلاع الخارجي ما كانت جميع اضلاعه مماسة للمحيط مثالها α من (الشكل ١٦٠) وحينئذ يقال للدائرة داخلية بمعنى انها مرسومة داخله

(دعوى)

(الدعوى الاولى النظرية شكل ٤٩)

كل قطر ينصف الدائرة والمحيط

أي ان كل قطر مثل α - يقسم الدائرة والمحيط الى جزئين متساويين (برهانها) أن يقال لوجعل القطر α - فصلا مشتركا وطبق الشكل α هـ - على الشكل α و - لانطبق الخط المنحني α هـ - على الخط المنحني α و - انطباقا كاملا والاسكان في أحدهما نقط ابعادها عن المركز غير متساوية وهذا يخالف تعريف محيط الدائرة

(تنبيه)

كل

كل مستقيم قسم المحيط الى جزئين متساويين يكون قطرا أى ان كل مستقيم مثل a - يقسم المحيط a - b في النقطتين a و b الى جزئين متساويين يكون قطرا

(برهانها) أن يقال لو لم يكن a - قطرا لكان مركز المحيط كانه نقطة و مثلاً خارجاً عنه ويلزم منه أن يكون المستقيم a و b متلاهماً والقطر ويلزم من كونه قطراً أن يكون a - b نصف المحيط ويلزم منه أن يكون الجزء a - b مساوياً للكل a - b وهو محال فيلزم أن يكون المركز على المستقيم a - أى ان a - هو القطر وهو المطلوب انظر (شكل ٤٩ الثانى)

* (الدعوى الثانية النظرية شكل ٤٩) *

كل وتر أصغر من القطر

أى ان كل وتر مثل a - فهو أصغر من القطر

(برهانها) أن يقال لو وصل من نهايتى الوتر a - نصفاً قطرين a - b و c - حدث مثلث a - b - c أى ضلع من أضلاعه أصغر من مجموع الضلعين الآخرين

ومن المعلوم أن أحداً من أضلاعه هو الوتر وهو أصغر من مجموع نصفى القطرين وهذا المجموع يساوى قطراً كاملاً فينبذ يكون الوتر أصغر من القطر

* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية أن أكبر خط مستقيم يمكن رسمه فى الدائرة يساوى قطرها

* (الدعوى الثالثة النظرية شكل ٣ من ٢) *

أى مستقيم قاطع لا يمكن أن يقطع محيط الدائرة فى أكثر من نقطتين

(برهانها) أن يقال لو فرض أن مستقيماً مثل a - b يقطع محيطاً كان مركزه o فى ثلاث نقاط مثل a و b و c - لا يمكن توصيل أنصاف اقطار مثل ao و bo و co ولو فرض أن النقطة o هى وسط الوتر a - والنقطة o وسط الوتر b - يتم وصل o و o و o - لازم أن يكون

وم عمودا على a و b عمودا على c لان $\angle$ كلامن المثلثين
الحادين a و b متساوي الساقين ويلزم من هذا امكان تنزيل
عمودين d و e على المستقيم ac وهو محال
* (الدعوى الرابعة النظرية شكل ٥٠) *

الاقواس المتساوية أو تارها متساوية والوتر المتساوية أقواسها متساوية
سواء كان ذلك في دائرة واحدة أو دوائر متساوية والدوائر المتساوية
ما كانت أنصاف أقطارها متساوية

أي اذا كان القوس $اط$ مساويا للقوس $هـ$ $ع$ يكون الوتر $ا$
مساويا للوتر $هـ$ $ع$ وبالعكس أي اذا كان الوتر $ا$ مساويا للوتر $هـ$ $ع$
يكون القوس $اط$ مساويا للقوس $هـ$ $ع$

(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من كون القطر $ا$ مساويا للقطر
 $هـ$ و أن $\angle$ تطبيق نصف الدائرة $اط$ $د$ على نصف الدائرة
 $هـ$ $ع$ و. ويلزم من هذا أن يتحد الخط المنحني $اط$ $د$ بالخط المنحني
 $هـ$ $ع$ و اتحادا كلياً وحيث ان الجزء $اط$ $د$ مساو للجزء $هـ$ $ع$
بالفرض تقع النقطة $د$ على النقطة $ع$ فاذن يكون الوتر $ا$ مساويا
للوتر $هـ$ $ع$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو وصل نصف القطرين $د$ و $ع$
لحدث مثلثان $ا$ $د$ و $هـ$ $ع$ اضلاعهما المتناظرة متساوية أعني $ا$
 $= هـ$ $د$ و $د$ $= ع$ و $ا$ $= هـ$ و يلزم من هذا أن يكونا
متساويين ويلزم من تساويهما أن تكون الزاوية $ا$ $د$ مساوية للزاوية
 $هـ$ $ع$ فلو طبق نصف الدائرة $ا$ $د$ على مساويه $هـ$ $ع$ ولوقع نصف
القطر $د$ على نصف القطر $ع$ لان الزاوية $ا$ $د$ $= هـ$ $ع$
ووقعت النقطة $د$ على النقطة $ع$ فاذن يكون القوس $اط$ $د$ مساويا
لقوس $هـ$ $ع$ وهو المطلوب

* (الدعوى الخامسة النظرية شكل ٥٠) *

القوس الاكبر من آخر في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية وزر أ كبر من وتر
الآخر

والوتر الاكبر كذلك قوسه اكبر بشرط أن لا يزيدا كبرا القوسين عن نصف
المحيط

أي اذا كان القوس مثل ا ط ك أكبر من آخر مثل ه ع يكون
الوتر ا ك أكبر من الوتر ه ع

واذا كان الوتر ا ك أكبر من الوتر ه ع يكون القوس ا ط ك أكبر
من القوس ه ع

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو أخذنا قوس ا ط د مساو للقوس

ه ع لكان الوتر ا د مساويا للوتر ه ع فاذا وصل نصف القطرين

د و د ك و ك د حدث مثلثان ا د و ا د ك فيهما ا د مشترك

و د = د ك والزوايا ا د ك أكبر من الزاوية ا د ه فاذن

يكون الضلع ا ك أكبر من الضلع ا د

وحيث ان ا د = ه ع يكون ا ك أكبر من ه ع وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو لم يكن القوس ا ط ك أكبر من

القوس ه ع لكان اما مساويا له أو أصغر منه فان كان مساويا له كان

الوتر ا ك مساويا للوتر ه ع وان كان أصغر منه كان الوتر ا ك

أصغر من الوتر ه ع وكلاهما مخالف للافروض فاذن يكون القوس ا ط ك

أكبر من القوس ه ع وهو المطلوب

• (تنبيه) •

اعلم انه اذا كان كل من القوسين أكبر من نصف المحيط كان وتر القوس الاكبر

أصغر وما هو مرسوم في (الشكل ٥٠) يوضح ذلك فان فيه القوس

ا ب ك أكبر من القوس ا ب د والوتر ا د أصغر من الوتر ا ب د

• (الدعوى السادسة النظرية شكل ٥١) •

القطر الممدود على وتر ينصفه وقوسه

أي ان القطر مثل $ح$ و العمود على قطر مثل $ا$ = ينصفه و يوسيه $ا$ =
 أعني يكون $ا$ = $د$ = $ز$ والقوس $ا$ = للقوس $د$ =
 (برهان القضية الاولى) أن يقال لو وصل نصف القطرين $ا$ و $د$ =
 لكان المثلث $ا$ = $د$ = مساوي الساقين لان نصف القطر $ا$ = $د$ =
 وقد نقرر في النظرية السابعة عشر من المقالة الاولى أن العمود النازل من
 رأس المثلث المتساوي الساقين على قاعدته ينصفها المقابلة بهذا أن البعد
 $ا$ = $د$ = وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو وصل الوزان $ا$ و $د$ = لكانا
 متساويين لانه يلزم من كون $د$ = عمودا على $ا$ = والبعد $ا$ = $د$ =
 أن يكون المائل $ا$ = $د$ = ويلزم من كون الوزان $ا$ = $د$ = أن
 يكون القوس $ا$ = للقوس $د$ = وهو المطلوب

• (تنبيه) •

اعلم أن المستقيم $ح$ و المائل بالمركز $د$ و بوسط الوزان $ا$ = و بوسط القوس
 $ا$ = يكون عمودا على الوزان المذكور وحيث ان شرطين من هذه الشروط
 يكفيان لتحديد موضع مستقيم يعلم من ذلك أن كل مستقيم وجد فيه شرطان
 من هذه الشروط لابد وأن يوجد فيه الشرطان الآخران فثبت هذا العمود
 المقام على وسط الوزان يميز بالمركز و بوسط القوس المؤثر به والمستقيم المائل بالمركز
 و بوسط القوس يكون عمودا على وسط و مركز ذلك القوس وهكذا

• (الدعوى السابعة النظرية شكل ٥٢ الثاني) •

كل ثلاث نقط ليست على مستقيم يمكن أن يميزها محيط دائرة لا اثنان
 أي أن كل ثلاث نقط مثل $ا$ و $د$ و $ز$ ليست على مستقيم يمكن أن يميز
 بها محيط دائرة لا محيطان

(برهانها) أن يقال لو وصل المستقيمان $ا$ و $د$ = ونصف المستقيم $ا$ = بنقطة مثل $ح$ وأقيم $د$ = عمودا
 على $ا$ = وأقيم $ح$ = عمودا على $ا$ = لاتي العمودان $د$ = و $ح$ =

لأنه قد تقرر في النظرية الخامسة والثلاثين من المقالة الأولى أن العمود المقام على أحد مستقيمين متلاقين يتلاقى بالعمود المقام على المستقيم الآخر ولذا برهن على أن نقطة تقاطع العمودين هي المركز فنقول حيث كانت نقطة التقاطع نقطة من نقط العمود $د ه$ يكون بعدها عن النقطة $د$ كبعدها عن النقطة $ه$ ولكونها أيضا من نقط العمود $د ه$ يكون بعدها عن النقطة $ا$ كبعدها عن النقطة $ب$ فينبغي أن المحيط الذي مركزه نقطة التقاطع $ط$ ونصف قطره $ط د$ يمر بالنقط الثلاث $ا ب و$ وهو المطلوب فقد ثبت بهذا أن كل ثلاث نقط ليست على مستقيم $\Rightarrow$ يمكن أن يمر بها محيط دائرة

ولبيان عدم إمكان مرور محيط آخر بالنقط المذكورة يقال لو أمكن أن يمر محيط آخر بالنقط المذكورة للزم أن يكون مركزه على العمود $د ه$ لأنه لو كان خارجا عن العمود $د ه$ لكان للبعدان الواصلان منه إلى النقطتين $د ه$ غير متساويين $\Rightarrow$ كما يلزم أن يكون المركز على العمود $د ه$ فينبغي أن يكون المركز على كلا العمودين $د ه و د ه ط$ وحيث أنه لا يمكن أن يتقاطع الخطان المستقيمان إلا في نقطة واحدة يلزم أن يكون المركز واحدا وأن يتحدد المحيطان وهو المطلوب

• (نتيجة) •

ينتج من هذه النظرية أن المحيطين لا يمكن أن يتقاطعا في أكثر من نقطتين لأنه لو وجد لهما ثلاث نقط مشتركة لاتفقد المركز فيهما وحينئذ لا يتكون منهما الا محيط واحد فقط

• (الدعوى الثامنة النظرية شكل ٥٣) •

الوتران المتساويان بعدهما عن المركز متساويان والوتران غير المتساويين أصغرهما بعدهما عن المركز

أي أن الوترين المتساويين مثل $ا ب و د ه$ بعدهما عن المركز $د ه$ و الوترين غير المتساويين مثل $ا ب و ا ج$ أصغرهما

أبعدهما عن المركز

(برهان القضية الأولى) أن يقال لو نصف الوز a - بالعمود e و $و$ والوتر $د$ بالعمود $د$ و وصل نصف القطرين a و $د$ و حدث مثلثان قائما الزاوية $د$ و $و$ مساويان لان الوز $a = د$ والضلوع a و $د$ الذي هو نصف الوز a - يساوي الضلع $د$ الذي هو نصف الوز $د$ ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن يكون الضلع $د$ و مساويا للضلوع $د$ وهو المطلوب فقد ثبت بهذا أن الوزين المتساويين يبعدهما عن المركز متساويان

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن الوز a ح أكبر من الوز $د$ فيكون القوس a ح أكبر من القوس $د$ ح

فلو أخذ من القوس a ح الجزء a ح = $د$ ح و وصل الوز a - وأزل العمود $د$ و على الوز a - والعمود $د$ ط على الوز a ح لظهر أن $د$ و أكبر من $د$ م وحيث أن المائل $د$ م أكبر من العمود $د$ ط يكون $د$ و أكبر من $د$ ط وحيث أن $د$ و = $د$ ح لان الوز a - = $د$ ح يكون $د$ و أكبر من $د$ ط فقد ثبت بهذا أن الوزين غير المتساويين أصغرهما يبعدهما عن المركز وهو المطلوب

• (الدعوى التاسعة النظرية شكل ٥٤) •

العمود المقام على نهاية نصف قطر يكون مماسا لمحيط الدائرة في النهاية انذ كورة ونصف القطر المار بنقطة تماس مستقيم مماس يكون عمودا على الخط المماس

أي ان العمود $د$ - المقام على نهاية نصف قطر مثل a ح يكون مماسا لمحيط الدائرة في النقطة a وان نصف القطر $د$ ا المار بنقطة التماس a يكون عمودا على الخط المماس $د$ -

(برهان القضية الأولى) أن يقال لو أخذ على المستقيم $ب$ د نقطة مثل $هـ$

غير النقطة α ووصل α هـ لكان α هـ مائلا على α د ويلزم من
هذا أن يكون α هـ أكبر من نصف القطر α د وأن تتكون النقطة هـ
خارجة عن المحيط فينبذ لا يوجد من المستقيم α د نقطة مشتركة مع
المحيط الا النقطة α فهو مماس للمحيط في النقطة α

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن المستقيم α د مماسا للمحيط
في النقطة α فيلزم أن تكون أي نقطة من نقطه ماعدا النقطة α خارجة
عن المحيط فينبذ اذا وصل من المركز α الى إحدى نقط المستقيم α د
غير النقطة α مستقيم مثل α هـ يكون α هـ $> \alpha$ د ويلزم من هذا
أن يكون α د عمودا على α هـ وهو المطلوب
ما يتبع من هذه النظرية

ينج منها أولا انه لا يمكن من نقطة موضوعة على محيط دائرة أن يمتد المستقيم
واحد مماس لانه لو أمكن أن يمتد منها مماسان للزم أن يكون كلاهما عمودا على
نهاية نصف القطر المار بنقطة التماس ويلزم من هذا المكان إقامة عمودين على
مستقيم واحد من نقطة واحدة وقد تقدم انه محال فينبذ لا يمكن أن يمتد
من النقطة الموضوعة على المحيط الا مماس واحد وهو المطلوب

وثانيا أن العمود المقام من نقطة التماس على الخط المماس يمر بالمركز
وثالثا أن العمود المنزل من المركز على الخط المماس يمر بنقطة التماس
ورابعا أن المستقيمين المماسين الممتدين من نهايتي قطر دائرة متوازيان
لان كلاهما عمودا على القطر المذكور

وخامسا أن المستقيمين المماسين اذا كانتا متوازيين يكون الوتر الواصل بين
نقطتي تماسهما بالمحيط قطرا لان القطر العمود على أحد المماسين يـ
أيضا عمودا على الآخر فاذن يمر بنقطتي التماس
وسادسا أن المستقيمين المماسين لمحيط دائرة والمارين بنهايتي وتر غير القطر
يلتقيان

وسابعها اذا تقاطع مستقيمان مماسان لا يكون المستقيم المار بنقطتي

التماس قطرا

* (الدعوى العاشرة النظرية شكل ٥٥ و ٥٦) *

القوسان المنحصران من المحيط بين مستقيمين متوازيين متساويين
 أى ان القوسين مثل ط ك و ل المنحصرين من المحيط بين مستقيمين
 متوازيين مثل ا ب و د متساويان
 وهذه الدعوى ثلاث حالات

الاولى أن يكون المستقيمان المتوازيان قاطعين للمحيط فحينئذ يرسم نصف
 القطر ح ح عودا على الوتر ط ل فيكون أيضا عودا على موازيه
 ك ل فاذن تكون النقطة ح وسط كل من القوسين ط ع و ك ل
 ويلزم من هذا أن يكون القوس ط ع = للقوس ح ل والقوس
 ك ل = للقوس ح ل وحيث ان الاشياء المتساوية اذا طرحت منها
 أشياء متساوية كانت البواقي متساوية يكون

ط ح - ك ع = ح ل أى ان القوس ط ك = ل ع
 وهو المطلوب

الثانية أن يكون أحد المتوازيين قاطعا والاخر مماسا كما في (الشكل ٥٦)
 فيوصل بين المركز ونقطة التماس ح بنصف القطر ح ح فيكون عودا
 على المماس د ه وعلى موازيه ط ل ويلزم من هذا أن تكون النقطة
 ح وسط القوس ط ع وهو المطلوب

الثالثة أن يكون المستقيمان المتوازيان مماسين للمحيط كما في (الشكل ٥٦)
 فيرسم القاطع ا ب موازيا للمماسين على ما ذكر في المقالة الثانية يكون القوس
 ط ح = ح ل والقوس ط ع = ح ل ويلزم من هذا أن يكون
 القوس ح ط ع = للقوس ح ل ع وهو المطلوب

* (تأنيبه) *

اذا فصل المستقيمان من المحيط قوسين متساويين كانا متوازيين ويشترط في
 هذا أن يكون كل من القوسين في جهة واحدة بالتسوية لكل من المستقيمين

الفصلين

* (مقدّمتان) *

النقطتان المتماثلتان بالنسبة لمستقيم نقطتان موضوعتان على عمود واحد على هذا المستقيم بعداهما عن موقع العمود متساويتان والمستقيم المذكور يسمى محور التماثل

* (الدعوى الحادية عشر النظرية شكل ٥٦ رمز أ) *

إذا كان المحيط الدائريين نقطة مشتركة خارجة عن المستقيم المار بمركزيهما فلا بد وأن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مماثلة للاولى بالنسبة لمستقيم المركزين أي إذا كان المحيط الدائريين نقطة مشتركة مثل أ خارجة عن المستقيم σ المار بمركزيهما σ و σ فلا بد وأن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مثل أ مماثلة للاولى أ بالنسبة لمستقيم المركزين σ (برهانها) أن يقال حيث كان أ أ عمودا على σ و أ = أ = أ يكون أ = أ و أ = أ و σ = أ = أ ويلزم من هذا أن يمر المحيط الذي مركزه σ ونصف قطره أ بالنقطة أ وأن يمر المحيط الذي مركزه σ ونصف قطره أ بالنقطة أ كذلك

ما يفتج من هذه النظرية

ينتج منها أولا انه اذا تقاطع محيطا دائريين فالمتقيم المار بمركزيهما يكون عمودا على وسط الوتر المشترك
وثانيا انه اذا تماس محيطا دائريين فنقطة التماس تكون على المستقيم المار بمركزيهما اذ لو كانت خارجة عنه لازم أن يشترك المحيطان في النقطة المماثلة لهما ويلزم من هذا تقاطعهما

* (الدعوى الثانية عشر النظرية شكل ٥٦ رمز ب) *

إذا كان محيطا دائريين خارجيين عن بعضهما كان البعدين مركزيهما أ أكبر

من مجموع نصفي قطريهما

برهانها أن يقال حيث أن $\overline{د} = \overline{ا} + \overline{ب} + \overline{ا} + \overline{ا}$ يكون

$\overline{د} < \overline{ا} + \overline{ب}$ وهو المطلوب

(الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ٥٦ رمز د)

إذا كان أحد محيطي الدائرتين داخل في دائرة المحيط الآخر بدون أن يتلاقيا
كان البعدين مركزيهما أصغر من فاضل نصفي قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون $\overline{د} = \overline{ا} - \overline{ب} - \overline{ا} - \overline{ا}$

أن يكون $\overline{د} > \overline{ا} - \overline{ب}$ وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ٥٩)

إذا تماس محيطا دائرتين في الخارج كان البعدين مركزيهما مساويا لمجموع
نصفي قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون نقطة التماس ١ على المستقيم المار

بالمركزيين أن يكون $\overline{د} = \overline{ا} + \overline{ب}$ وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة عشر النظرية شكل ٦٠)

إذا تماس محيطا دائرتين في الداخل كان البعدين مركزيهما مساويا لفاضل
نصفي قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون نقطة التماس ٢ على المستقيم المار

بالمركزيين أن يكون $\overline{د} = \overline{ا} - \overline{ب}$ وهو المطلوب

(الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ٦٠ الثاني)

إذا تقاطع محيطا دائرتين كان البعدين مركزيهما أصغر من مجموع نصفي
قطريهما وأكبر من فاضلهما

(برهانها) أن يقال لو وصل بين إحدى نقطتي التقاطع مثل ١ والمركزيين $\overline{د}$

بمستقيمين لحدث ثلاث اضلاع البعدين المركزين α و β ونصف القطر
 α ونصف القطر β وقد ثبت في المقالة الاولى أن أى ضلع من أى مثلث
 أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما فإذا كان يكون البعدين
 المركزين أصغر من مجموع نصفي القطرين وأكبر من فاضلهما وهو المطلوب
 * (تنبيه) *

اعلم أن لكل من النظرية الثانية عشر والثالثة عشر والرابعة عشر
 والخامسة عشر والسادسة عشر عكسا صحيحا سهل البرهنة أى إذا كان البعد
 بين المركزين أصغر من مجموع نصفي القطرين وأكبر من فاضلهما يتقاطع
 المحيطان لأنهما لولم يتقاطعا كانا إما خارجين أو داخلين أو متماسين في الخارج
 أو متماسين في الداخل فإن كانا خارجين يلزم أن يكون البعدين المركزين أكبر
 من مجموع نصفي القطرين وإن كانا داخلين يلزم أن يكون البعدين المركزين
 أصغر من فاضل نصفي القطرين وإن كانا متماسين في الخارج يلزم أن يكون
 البعدين المركزين مساويا لمجموع نصفي القطرين وإن كانا متماسين في الداخل
 يلزم أن يكون بعد المركزين مساويا لفاضل نصفي القطرين وكل ذلك خلاف
 المفروض فيثبت يتقاطع المحيطان وهو المطلوب

* (الدعوى السابعة عشر النظرية شكل ٦١) *

الزوايا المركزية المتساوية اقواسها متساوية وبالعكس أى الأقواس المتساوية
 زواياها المركزية متساوية سواء كان ذلك في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية
 أى إذا كانت الزاوية المركزية α مساوية للزاوية المركزية β هـ
 يكون القوس α مساويا للقوس β هـ وبالعكس أى إذا كان القوس
 α مساويا للقوس β هـ تكون الزاوية المركزية α مساوية للزاوية
 المركزية β هـ

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو طبقت الزاوية α هـ على مساويتها
 β هـ لوقعت النقطة α على النقطة β والنقطة β على النقطة α هـ

ويلزم من هذا أن يقع القوس a على القوس $د ه$ فاذن يكونان متساويين وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو لم تكن الزاوية $ا ح د$ مساوية للزاوية $د ح ه$ لكانت إما أكبر منها أو أصغر منها فلو كانت الزاوية $ا ح د$ أكبر من الزاوية $د ح ه$ بأن أخذ من الزاوية الكبرى زاوية مثل $ا ح و$ مساوية للزاوية $د ح ه$ لكان القوس $ا و$ مساويا للقوس $د ه$ بمقتضى ما سبق وقد فرض أن القوس $ا د$ مساو للقوس $د ه$ فيلزم أن يكون القوس $ا و$ مساويا للقوس $ا د$ ويلزم من هذا أن يكون الجزء مساويا للكل وهو محال فقد ثبت بهذا أنه لا يمكن أن تكون الزاوية $ا ح د$ أكبر من الزاوية $د ح ه$ وبمثل هذا يبرهن على أنه لا يمكن أن تكون الزاوية $ا ح د$ أصغر من الزاوية $د ح ه$ وبه يثبت أن الزاوية $ا ح د$ مساوية للزاوية $د ح ه$ وهو المطلوب

* (الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ٦٢) *

إذا كانت النسبة بين الزاويتين المركزيتين كالنسبة بين عددين صحيحين كانت النسبة بين قوسيهما مساوية للنسبة المذكورة سواء كان ذلك في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية

أي إذا كانت النسبة بين الزاويتين المركزيتين $ا ح د$ و $د ح ه$ كالنسبة بين عددين صحيحين كانت النسبة بين قوسيهما $ا د$ و $د ه$ مساوية للنسبة المذكورة أعنى تكون

نسبة الزاوية $ا ح د$: الزاوية $د ح ه$:: القوس $ا د$: القوس $د ه$ سواء كان ذلك في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية

(برهانها) أن يقال لو جعلت زاوية مثل الزاوية $م$ مقبلا مشتركا وفرض أن الزاوية $ا ح د$ تشتمل على الزاوية $م$ سبع مرات وأن الزاوية $د ح ه$ تشتمل على الزاوية $م$ أربع مرات لكانت الاقواس $ا و$ و $د ر$ و $ر ح$ و $ح ط$ و $ط ع$ و $ع ه$ و $ك ب$ وكذلك الاقواس $د ل$ و $ل ه$

و د س ه و س ه ه متساوية لتساوى الزوايا المركزية ا د و و د و د
و د د و د د و ط د و د د و د د و د د وكذلك
الزوايا المركزية د د و د د و د د و د د و د د ويلزم من هذا
أن تكون نسبة القوس الكامل ا س الى القوس الكامل د ه كنسبة
٧ الى ٤ وأن تكون

نسبة الزاوية ا د : الزاوية د ه :: القوس ا س : القوس د ه
وهو المطلوب

* (تنبيه) *

إذا كانت النسبة بين القوسين ا س و د ه كنسبة بين عددين صحيحين
كانت النسبة بين الزاويتين ا د و د ه كنسبة بين العددين
المذكورين وحينئذ تكون

نسبة القوس ا س : القوس د ه :: الزاوية ا د : الزاوية
د ه لانه يلزم من تساوى القوسى الجزئية ا د و د و د و د الخ
و د و د و د الخ لتساوى الزوايا الجزئية ا د و د و د و د الخ
و د و د و د الخ

* (الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل ٦٣) *

النسبة بين الزاويتين المركزيتين لتساوى النسبة بين قوسيهما سواء كان ذلك
في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية

أى ان النسبة بين الزاويتين المركزيتين ا د و ا د تساوى النسبة
بين قوسيهما ا س و ا د على أى حالة كانت سواء كان ذلك في دائرة
واحدة أو في دوائر متساوية

أى ان نسبة الزاوية ا د : الزاوية ا د :: القوس ا س :
القوس ا د

(برهانها) أن يقال لو لم تكن هذه المناسبة صحيحة لكان حدها الرابع اما أكبر
من القوس ا د أو أصغر منه فإن كان أكبر من القوس ا د بان كان

مساويا للقوس او مثلالكات

نسبة الزاوية ا ح د : الزاوية ا ح د :: القوس ا ب : القوس ا ب
فلو تصور أن القوس ا ب مقسوم الى أقسام متساوية كل منها أصغر من
القوس د و لوقعت احدى نقط التقاسيم مثل النقطة هـ بين النقطة
د والنقطة و فلو وصل نصف القطر ح هـ لكات النسبة بين القوسين
ا ب و ا هـ كالنسبة بين عددين صحيحين وحينئذ تكون

نسبة الزاوية ا ح د : الزاوية ا ح هـ :: القوس ا ب : القوس
ا هـ فلو قورنت هذه المتناسبة بالتناسبة المتقدمة لحدث

نسبة الزاوية ا ح د : الزاوية ا ح هـ :: القوس ا ب : القوس
ا هـ وحيث ان الحد الاول من هذه المتناسبة أصغر من تاليه يلزم أن يكون
الحد الثالث أصغر من تاليه ويلزم من هذا أن يكون السهل أصغر من الجزء
وهو محال فقد ثبت بهذا انه لا يمكن أن تكون

نسبة الزاوية ا ح د : الزاوية ا ح د :: القوس ا ب : قوس اكبر
من ا ب وبمثل هذا يبرهن على انه لا يمكن أن تكون

نسبة الزاوية ا ح د : الزاوية ا ح د :: القوس ا ب : قوس أصغر
من القوس ا ب فحينئذ تكون

نسبة الزاوية ا ح د : الزاوية ا ح د :: القوس ا ب : القوس ا ب
وهو المطلوب

* (في قياس الزوايا) *

قياس الكمية هو البحث عن النسبة بين هذه الكمية والوحدة التي من نوعها فإذا
جعلت الزاوية القائمة وحدة كان مقدار أى زاوية عبارة عن النسبة بين هذه
الزاوية والزاوية القائمة

وحيث تبين من النظرية المتقدمة انه يمكن ابدال النسبة بين أى زاويتين
مركزيتين بالنسبة بين قوسيهما فلا مانع من مقارنة قوس الزاوية المركزية
بربع المحيط بدل مقارنتها بالزاوية القائمة وهذا معنى قولهم ان الزاوية المركزية

تقاس بالقوس المحصور بين ضلعيها
ولتسهيل هذه المقارنة يتقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزءاً متساوية تسمى
درجات وكل درجة الى ٦٠ دقيقة وكل دقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا
فاذا كان القوس المحصور بين ضلعي زاوية مركزية محتوياً على ٢٤ درجة
فتماس هذه الزاوية يكون $\frac{24}{90}$ أى $\frac{4}{15}$
* (تنبيه) *

النسبة بين قطاعين في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية كالنسبة بين قوسيهما
* (الدعوى العشرون النظرية شكل ٦٤ و ٦٥) *

كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها
أى ان كل زاوية محيطية مثل الزاوية - ا د تقاس بنصف القوس د -
المحصور بين ضلعيها
(برهانها) أن يقال لو فرض المركز ح واقعا بين ضلعي الزاوية - ا د
كما في (الشكل ٦٤) ووصل القطر ا ه ونصف القطرين - ح
و د لكانت الزاوية - ح ه ا الخارجة عن المثلث - ا ح د مساوية
للمجموع الزاويتين - ا ح د و - ح ا د وحيث ان الضلع ح ا يساوى الضلع
ح د تكون الزاوية - ح ا د = للزاوية - ا ح د ويلزم من هذا أن تكون
الزاوية - ح ه د ضعف الزاوية - ا ح د وحيث ان الزاوية المركزية - ح ه د
تقاس بالقوس - ه د ينتج من ذلك أن الزاوية - ا ح د تقاس بنصف
القوس - ه د وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ح ا د تقاس بنصف القوس
ه د فينتج من هذا أن الزاوية الكلية - ا د تقاس بنصف القوس الكلى
- ه د وهو المطلوب

ولو فرض المركز ح خارجا عن الزاوية - ا د كما في (الشكل ٦٥) ثم
وصل القطر ا ه لحدثت زاوية د ا ه قياسها نصف القوس د ه
والزاوية - ح ا ه قياسها نصف القوس - ه د ويلزم من هذا أن تقاس
الزاوية - ا د التى هى فاضل الزاويتين - ا ه د و د ا ه بنصف فاضل

القوسين - ه و ه

فقد ثبت بهذا أن كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها
* (نتائج) *

ينتج من هذه النظرية أولاً أن الزوايا المحيطية مثل - ا ح و - د ح الخ
المرسومة في قطعة واحدة متساوية لأن نصف القوس - و ح مقياس لكل
من تلك الزوايا كما في (الشكل ٦٦)

وثانياً أن الزاوية المرسومة في نصف الدائرة مثل الزاوية - ا د كما في
(الشكل ٦٧) تكون قائمة لأنها تقاس بنصف نصف المحيط - و د أى
بربع المحيط

وثالثاً أن الزاوية المرسومة في قطعة أكبر من نصف الدائرة مثل الزاوية
- ا ح من (الشكل ٦٦) تكون حادة لأنها تقاس بنصف القوس - و ح
الاقبل من نصف المحيط

ورابعاً أن الزاوية المرسومة في قطعة أصغر من نصف الدائرة مثل الزاوية
- و ح من (الشكل ٦٦) تكون منفرجة لأنها تقاس بنصف القوس
- ا ح الأكبر من نصف المحيط

* (الدعوى الحادية والعشرون النظرية شكل ٦٩) *

الزاوية الحادثة من مماس ووتر تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها
أى أن الزاوية الحادثة من مماس ووتر مثل الزاوية - ا ح تقاس بنصف
القوس ا م د المحصور بين ضلعيها

(برهانها) أن يوصل القطر ا د المار بنبطة التماس ا فيكون نصفي
القوس ا م د معياراً للزاوية القائمة - ا د ونصف القوس ا ح
معياراً للزاوية المحيطية ا ح ويلزم من هذا أن يكون نصف القوس الكلى
ا م د معياراً للزاوية الكلية - ا ح وهو المطلوب

وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ا ه تقاس بنصف القوس ا ح المحصور
بين ضلعيها

الدعوى

* (الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل ٦٩ الثمانى) *

كل زاوية رأسها بين المركز والمحيط تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها مضافا اليه نصف القوس المحصور بين امتدادى ضلعيها
أى ان كل زاوية مثل α رأسها بين المركز والمحيط تقاس بنصف القوس β المحصور بين ضلعيها مضافا اليه نصف القوس γ المحصور بين امتدادى ضلعيها

(برهانها) أن يوصل الوتر δ فتكون الزاوية α الخارجة عن المثلث $\alpha \delta \epsilon$ مساوية لمجموع الزاويتين الداخلتين $\alpha \delta \epsilon$ و $\delta \epsilon \alpha$ وحيث ان الزاوية $\alpha \delta \epsilon$ تقاس بنصف القوس β والزاوية $\delta \epsilon \alpha$ تقاس بنصف القوس γ وينتج أن الزاوية α تقاس بنصف القوس $\beta + \gamma$ مضافا اليه نصف القوس δ وهو المطلوب

* (الدعوى الثامنة والعشرون النظرية شكل ٦٩ الثالث) *

كل زاوية رأسها خارجة عن المحيط تقاس بنصف القوس المقعر نحو رأسها المحصور بين ضلعيها مطروحا منه نصف القوس المحدث المحصور كذلك بينهما
أى ان كل زاوية رأسها خارجة عن المحيط مثل الزاوية α تقاس بنصف القوس β المقعر نحو رأسها المحصور بين ضلعيها مطروحا منه نصف القوس γ المحدث المحصور كذلك بينهما

(برهانها) أن يوصل الوتر δ فتكون الزاوية $\alpha = \delta \epsilon \alpha + \alpha \delta \epsilon$ وحيث ان الزاوية $\delta \epsilon \alpha$ تقاس بنصف القوس β والزاوية $\alpha \delta \epsilon$ تقاس بنصف القوس γ ينتج أن الزاوية α تقاس بنصف القوس $\beta - \gamma$ نصف القوس δ وهو المطلوب

* (تنبيه) *

اذا كان أحد ضلعي الزاوية قاطعا والآخر مماسا أو كلاهما مماسا المحيط الدائر فلا تزال هذه النظرية صحيحة والبرهان واحد

* (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ٦٨) *

الزاويتان المتقابلتان من كل شكل رباعي داخلي متممتان لبعضهما
أى ان مجموع الزاويتين المتقابلتين مثل $\angle \text{و}$ و $\angle \text{د}$ من كل شكل رباعي
داخلي مثل $\angle \text{ا}$ و $\angle \text{د}$ يساوى قائمتين لان الزاوية $\angle \text{ب}$ تقاس بنصف القوس
 ا د ح والزاوية $\angle \text{د}$ تقاس بنصف القوس ا ح د فيكون نصف المحيط
مقياسا لمجموع الزاويتين $\angle \text{و}$ و $\angle \text{د}$ فاذن يكون مجموعهما مساويا لقائمتين
وهو المطلوب

وبالعكس اذا وجد في شكل رباعي مثل $\angle \text{ا}$ و $\angle \text{د}$ زاويتان متقابلتان متممتان
لبعضهما كان ذلك الشكل قابلا للرسم في الدائرة
لانه لو مرر محيط دائرة بالنقط الثلاث ا د ح لكان نصف القوس ا م ح
معيارا للزاوية $\angle \text{د}$ ويلزم من هذا أن يكون نصف القوس ا د ح معيارا
للزاوية $\angle \text{ب}$ المتممة للزاوية $\angle \text{د}$ وهذا لا يتحقق الا اذا كانت الزاوية $\angle \text{ب}$
محيطية وهو المطلوب

* (في الدعوى العملية المتعلقة بالمقالة الاولى والثانية) *

* (الدعوى الاولى العملية شكل ٧٠) *

اذا كان المطلوب تنصيف مستقيم محدود مثل المستقيم ا ب فطريقة ذلك
أن تؤخذ نقطة بالبيكار ا ب كبر من نصف الخط ا ب ويركز في النقطة ا
ويرسم قوسان أحدهما فوق الخط والاخر تحته ثم يركز في النقطة ب
ويرسم قوسان كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين اللذين فوق
الخط ونقطة تقاطع القوسين اللذين تحته فهذا المستقيم يكون عمودا على
وسط المستقيم المعلوم والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل ا د و د ب
و د ه و ه ا لكان الشكل الحادث معيننا وقد تقرر في المقالة الاولى
أن قطري المعين ينصفان بعضهما عمادا فقد ثبت بهذا أن البعد ا د
البعيد ح د

* (تنبيه) *

هذه العملية تستعمل لاقامة عمود على وسط مستقيم محدود

الدعوى

(الدعوى الثانية العملية شكل ٧١) *

إذا كان المطلوب إقامة عمود على مستقيم من نقطة معينة عليه فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم α - والنقطة المعينة عليه α ثم يؤخذ من المستقيم α نقطة مثل β على عين النقطة α ونقطة أخرى مثل γ على يسارها بحيث يكون البعد $\alpha\beta =$ للبعد $\alpha\gamma$ ثم تؤخذ فتحة بالبيكار أكبر من $\alpha\beta$ ويركز في النقطة β ويرسم قوس دائرة فوق الخط $\alpha\gamma$ أو فتحته ثم يركز في النقطة γ ويرسم قوس دائرة كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين والنقطة المعينة α فهذا المستقيم يكون هو العمود المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية أنه لو وصل $\beta\gamma$ و $\alpha\gamma$ - لحدث مثلث متساوي الساقين وقد تقرر في المقالة الأولى أن المستقيم المار من رأس المثلث المتساوي الساقين إلى وسط قاعدته يكون عموداً عليها

(تنبيه) *

إذا علم مستقيم مثل α - ونقطة معينة عليه مثل β وكان المطلوب أن يحد من النقطة α مستقيم يصنع مع المستقيم المعلوم α - زاوية قائمة تعمل العملية المتقدمة بعينها

(الدعوى الثالثة العملية شكل ٧٢ الثاني) *

إذا كان المطلوب إزالة عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم α - والنقطة المعروفة α ويؤخذ على α نقطتان مثل β و γ ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر $\beta\gamma$ ويركز في النقطة β ويرسم محيط دائرة ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر $\beta\gamma$ ويركز في النقطة γ ويرسم محيط دائرة فيتقاطع المحيطان في النقطة δ وفي نقطة أخرى مثل ϵ ثم يوصل مستقيم بين نقطتي التقاطع فيكون هو العمود المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية أن المستقيم $\delta\epsilon$ المار بالمركزين β و γ

عمود على وسط الوتر المشترك $ان$ وقد تقرر في المقالة الاولى انه اذا كان
أحد مستقيمين عمودا على آخر كان الآخر عمودا عليه
* (الدعوى الرابعة العملية شكل ٧٣) *

اذا علمت نقطة على مستقيم معلوم وكان المطلوب مد مستقيم منها يصنع مع
المستقيم المعلوم زاوية تساوي زاوية معلومة فطريقة ذلك أن تفرض
النقطة المعلومه $ا$ والمستقيم المعلوم $ا -$ والزاوية المعلومه $ك$ فيركز
في رأس الزاوية $ك$ وتؤخذ قوسه بالبيكار بقدر ما يراد ويرسم قوس
مثل $ل$ ينتهي بضامى الزاوية ثم يركز في النقطة $ا$ ويرسم قوس
غير محدود مثل $و$ ثم تؤخذ قوسه بالبيكار بقدر الوتر $ل و$ ويركز
في النقطة $و$ ويرسم قوس يقطع القوس غير المحدود $و$ في نقطة مثل
 $د$ ثم يوصل $ا د$ فتكون الزاوية الحادة $ا - د$ مساوية للزاوية
المعلومه $ك$

والدليل على صحة هذه العملية أن نصف القطر $ا - = ك و$ والوتر
 $و د = ل و$ فيلزم أن يكون القوس $د و$ مساويا للقوس $ل و$
ويلزم من هذا أن تكون الزاوية $ا د = ل و$

* (الدعوى الخامسة العملية شكل ٧٤) *

اذا كان المطلوب تنصيف قوس معلوم أو زاوية مفروضة فطريقة تنصيف
القوس المعلوم كالقوس $ا -$ أن يوصل الوتر $ا -$ ثم تؤخذ قوسه بالبيكار
أكبر من نصف الوتر $ا -$ ويركز في النقطة $ا$ ويرسم قوسا نأخذ منه
فوق الوتر والآخر تحتته ثم يركز في النقطة $و$ ويرسم قوسا كذلك ثم يوصل
مستقيمين بين نقطة تقاطع القوسين اللذين فوق الوتر ونقطة تقاطع القوسين
اللذين تحتته فهذا المستقيم يكون عمودا على وسط الوتر $ا -$ ومنصفا
للقوس $ا -$

وطريقة تنصيف الزاوية المعلومه كالزاوية $ا ح -$ أن يركز في النقطة $ح$
وتؤخذ قوسه بالبيكار بقدر ما يراد ويرسم قوس مثل $ا ه -$ ينتهي بضامى

الزاوية ثم يهضم عمود على وسط الوز a - فهذا العمود ينصف الزاوية
 a -

*** (تنبیه) ***

يمكن بالطريقة المتقدمة أن يقسم القوس المعلوم والزاوية المعلوم إلى
 أربعة أجزاء متساوية أو ثمانية أو ستة عشر وهكذا .

*** (الدعوى السادسة العملية شكل ٧٥) ***

إذا علم مستقيم ونقطة خارجة عنه وكان المطلوب مده مستقيم يمر بالنقطة
 المعلومه ويوازي المستقيم المعلوم فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم
 a - والنقطة المعلومه a - وتؤخذ نقطة من المستقيم المعلوم كالنقطة
 h - ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر البعد ah ويركز في النقطة a ويرسم
 القوس غير المحدود h - ثم يركز في النقطة h ويرسم القوس a -
 ويؤخذ h - $=$ a - ثم يوصل المستقيم ah فيكون هو الموازي المطلوب
 والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل المستقيم ah لظهر أن الزاويتين
 المتبادلتين الداخلتين a - h - و h - a - متساويتان ويلزم من هذا
 أن يكون المستقيمان a - و h - متوازيين

*** (الدعوى السابعة العملية شكل ٧٦) ***

إذا علم زاويتان من مثلث وكان المطلوب إيجاد الزاوية الثالثة فطريقة ذلك
 أن يفرض a - إحدى الزاويتين المعلومتين و b - الزاوية الأخرى ويرسم
 المستقيم غير المحدود a - b - ثم نقسأ في النقطة h - زاوية a - h -
 $=$ a - وزاوية h - a - $=$ b - فالزاوية الباقية c - h - تكون الزاوية
 الثالثة المطلوبة لان مجموع هذه الزوايا الثلاث يساوي قائمتين

*** (الدعوى الثامنة العملية شكل ٧٧) ***

إذا علم من مثلث ضلعان والزاوية المنحصرة بينهما وكان المطلوب رسم المثلث
 فطريقة ذلك أن يفرض b - أحد الضلعين المعلومين و a - الضلع الآخر
 و a - الزاوية المنحصرة بينهما ويرسم المستقيم غير المحدود a - b - ثم نقسأ في

النقطة د زاوية ه د و تساوى الزاوية المعلومة ا ثم يؤخذ
د ع = ر و د ح = و ثم يوصل ع ح فيكون د ع ح هو
المثلث المطلوب

* (الدعوى التاسعة العملية شكل ٧٨) *

اذا علم من مثلث ضلع وزاويتان وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك
أن يقال ان الزاويتين المعلومتين اما أن تكونا مجاورتين للضلع المعلوم
أو احدهما مجاورة له والاخرى مقابلة له ففي هذه الحالة الاخيرة يبحث
عن الزاوية الثالثة من المثلث بالطريقة المتقدمة فى العملية السابعة فيصير
كلتا الزاويتين المجاورتين للضلع معلومة حينئذ يرسم مستقيم غير محدود
ويؤخذ منه الجزء د ه بقدر الضلع المعلوم ثم تعمل فى النقطة د زاوية
ه د و تساوى احدى الزاويتين المجاورتين للضلع المعلوم وتعمل فى
النقطة ه زاوية د ه ع تساوى المجاورة الاخرى فيستقاطع الخطان
د و ه ع فى نقطة مثل ح حينئذ يكون د ه ح هو المثلث
المطلوب

* (الدعوى العاشرة العملية شكل ٧٩) *

اذا علم من مثلث اضلاعه الثلاثة وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك أن
يقربض ا احدا الاضلاع الثلاثة و ر الضلع الآخر و الضلع
الثالث فيرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه بعد د ه يساوى الضلع ا
ثم تؤخذ قنحة بالبيكار بقدر الضلع الثانى ر ويركز فى النقطة ه ويرسم
قوس دائرة ثم تؤخذ قنحة بالبيكار بقدر الضلع الثالث و ويركز فى النقطة
د ويرسم قوس دائرة يقطع القوس الاوّل فى نقطة مثل و ثم يوصل د و
و ه و ه و فيكون د ه و هو المثلث المطلوب

* (تنبيه) *

يشترط فى إمكان حل هذه المسئلة أن يكون مجموع كل ضلعين أكبر من
الثالث وفاضلهما أصغر منه

* (الدعوى

* (الدعوى الحادية عشر العمالية شكل ٨٠ و ٨١ و ٨٢) *

اذا علم من مثلث ضلعان وزاوية مقابلة لاحدهما وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك أن يفرض الضلعان المعلومان a و b والزاوية المعلومه $\angle C$ هي المقابلة للضلع c ومن المعلوم ان الزاوية المعلومه $\angle C$ اما أن تكون قائمة أو منفرجة أو حادة فان كانت قائمة أو منفرجة كان وترها أكبر أضلاع المثلث وحينئذ يرسم المثلث تنشأ زاوية مثل $\angle C$ تساوى الزاوية المعلومه $\angle C$ ويؤخذ $d = a$ ثم تؤخذ نقطة بالبيكار بقدر الضلع المعلوم b ويركز في النقطة d ويرسم قوس يقطع الخط d في نقطة مثل e ويوصل المستقيم de فيكون d هو المثلث المطلوب وان كانت الزاوية المعلومه $\angle C$ حادة فان كان الضلع المقابل لها a أكبر من الضلع b أجريت العمالية المتقدمة بعينها وحينئذ يكون d هو المثلث المطلوب كما في (الشكل ٨١)

وان كان الضلع المقابل لها a أصغر من الضلع b فالقوس الذي مركزه d ونصف قطره d = b يقطع الضلع d في نقطتين مثل e و f موضوعتين في جهة واحدة بالنسبة للنقطة d فاذا وجدت مثلثان d و e و d و f كلاهما يوافق حل المسئلة كما في (الشكل ٨٢)

* (تنبيه) *

اعلم ان هذه المسئلة يستحيل حلها في جميع الاحوال اذا كان الضلع b أصغر من العمود المنزل من النقطة d على الخط d

* (الدعوى الثانية عشر العمالية شكل ٨٣) *

اذا علم ضلعان والزاوية المنحصرة بينهما من شكل متوازي الاضلاع وكان المطلوب رسمه فطريقة ذلك أن يفرض أحد الضلعين المعلومين a والضلع الآخر b والزاوية المنحصرة بينهما $\angle C$ ثم يرسم خط $d = a$ وتنشأ في النقطة d زاوية $\angle C$ و $d = b$ ويؤخذ $d = b$

ويرسم قوسان مركزاً أحدهما النقطة $ق$ ونصف قطره $ق ع = د ه$
ومركز الآخر النقطة $ه$ ونصف قطره $ه ع = د ن$ ويوصل $ق ع$
و $ه ع$ فيكون $د ه ع ق$ هو المتوازي الاضلاع المطلوب
والدليل على صحة هذه العملية ان الاضلاع المتقابلة متساوية بالعمل وقد تقرر
في المقالة الاولى ان الشكل الرباعي اذا تساوت اضلاعه المتقابلة كان
متوازي الاضلاع ومن المعلوم ان هذا الشكل قد اشتمل على معالم المسئلة
بشروطها

* (تنبيه) *

اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة وكان الضلعان المحيطان بها غير متساويين
كان الشكل الحادث مستطيلاً وان كانا متساويين كان مربعاً
* (الدعوى الثالثة عشر العملية شكل ٨٤) *

اذا كان المطلوب تعيين مركز دائرة أو قوس معلوم فطريقة ذلك أن يؤخذ من
المحيط $أ$ ومن القوس ثلاث نقط مثل $ا$ و $و$ و $ح$ ويوصل $ا -$
و $ح$ بالفعل أو بالوهم ثم يقام عمود $د ه$ على وسط $ا - ح$ وعمود $ق ع$
على وسط $ح - و$ فالنقطة $و$ التي هي مائتي العمودين تكون هي المركز
المطلوب

* (تنبيه) *

هذه الطريقة تستعمل لرسم محيط دائرة يمر بالنقط الثلاث $ا$ و $و$ و $ح$
المعلومة وتستعمل أيضاً لرسم محيط دائرة يكون المثلث المعلوم $ا - ح$
داخله

* (الدعوى الرابعة عشر العملية شكل ٨٥) *

اذا كان المطلوب رسم مستقيم يمر بمحيط دائرة معلومة ويمر بنقطة معينة
فطريقة ذلك أن يقال اذا كانت النقطة المعلومة $ا$ على المحيط يوصل نصف
القطر $ح ا$ ويقام العمود $ا د$ على $ح ا$ فيكون $ا د$ هو المماس
المطلوب

واذا كانت النقطة المعلومة α خارجة عن المحيط يوصل المستقيم α بين المركز والنقطة α وينصف α بنقطة مثل γ ويرسم محيط دائرة نصف قطرها يساوي γ ومركزه γ وهذا المحيط يقطع المحيط المعلوم في نقطتين مثل β و δ فاذا وصل $\alpha - \beta$ و $\alpha - \delta$ كان كل منهما مماسا للمحيط المعلوم ومارا بالنقطة المعلومة

والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل $\gamma - \beta$ و $\gamma - \delta$ لظهر أن كلا من الزاويتين $\gamma - \alpha - \beta$ و $\gamma - \alpha - \delta$ قائمة لان كلاهما مرسومة في نصف الدائرة

• (تنبيه) •

اعلم ان المماس $\alpha - \beta$ يساوي المماس $\alpha - \delta$ والزاوية $\alpha - \gamma - \beta$ تساوي الزاوية $\alpha - \gamma - \delta$ لان المثلث $\alpha - \gamma - \beta$ القائم الزاوية في γ يساوي المثلث $\alpha - \gamma - \delta$ القائم الزاوية في γ لان الوتر $\alpha - \beta$ مشترك والضلع $\gamma - \beta$ يساوي الضلع $\gamma - \delta$

• (نتيجة) •

ينتج من هذه العملية طريقة لرسم محيط دائرة من محيطى زاوية معلومة

• (الدعوى الخامسة عشر العملية شكل ٨٧ و ٨٨ ثانى) •

اذا علم ثنائى كالمثلث $\alpha - \beta - \gamma$ وكان المطلوب رسم دائرة داخلية فطريقة ذلك ان تنصف الزاوية α بالمستقيم α و الزاوية β بالمستقيم β و فالنقطة γ التى هى ملتقى المستقيمين تكون مركز الدائرة المطلوبة فاذا أنزل من النقطة γ اعمدة $\gamma - \delta$ و $\gamma - \epsilon$ و $\gamma - \zeta$ على اضلاع المثلث فهذه الاعمدة تكون متساوية كما تقرر فى المقالة الاولى وحينئذ المحيط الذى مركزه النقطة γ ونصف قطره العمود $\gamma - \delta$ يكون مماسا لاضلاع المثلث المعلوم

• (تنبيهان) •

الاول حيث ان بعد النقطة γ عن الضلع $\alpha - \beta$ كبعدها عن الضلع $\alpha - \delta$ يكون على المستقيم المنصف للزاوية α -

ويعلم من ذلك ان الخطوط المستقيمة المنصفة لزايا مثلث تتقاطع في نقطة واحدة

النهائي اذا سم الخطان المنصفان لزاويتين خارجيتين من مثلث كالزاويتين م - ح و د - ح فنقطة تقاطعهما و تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ح - د ولا امتدادى الضلعين الآخرين من المثلث واذا سم الخطان المنصفان للزاويتين ل - ا و ا - ب فنقطة تقاطعهما و تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ا - ب ولا امتدادى الضلعين الآخرين من المثلث

ولمذ الخطان المنصفان للزاويتين ع ا و ا - ب كانت نقطة تقاطعهما و مركز الدائرة مماسة للضلع ا - ب ولا امتدادى الضلعين الآخرين من المثلث

فحينئذ يمكن ان يرسم أربع دوائر تمس ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة

(الدعوى السادسة عشر العملية شكل ٨٨ و ٨٩)

اذا علم مستقيم مثل ا - ب وزاوية مثل ح وكان المطلوب ان يرسم على المستقيم ا - ب قطعة دائرة كل زاوية مرسومة فيها مساوية للزاوية المعلومة ح فطريقة ذلك ان يمد المستقيم ا - ب جهة د ثم تنشأ في النقطة د زاوية د - ه = ح ويقام د - ه وعمودا على د - ه و ع و ع وعمودا على وسط ا - ب ثم تؤخذ قوس بالبيكار بقدر د - ه ويركز في النقطة و التي هي ملتقى العمودين وترسم دائرة فتكون القطعة ا م - ه هي المطلوبة

والدليل على صحة هذه العملية ان الخط د - ب مماس ليكون عمودا على نهاية نصف القطر د - ه ويلزم من هذا ان يكون نصف القوس ا - ب معيار الزاوية ا - ب وللزاوية المحيطية ا م - ب فاذن تكون الزاوية ا م - ب = ا - ب = د - ه = ح ويلزم من هذا ان تكون

كل زاوية مرسومة في القطعة ا م - مساوية للزاوية المعلومة ح

* (نبيه) *

اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة كانت القطعة المطلوبة نصف دائرة قطرها
الخط المعلوم

تمت المقالة الثانية على يد المتوكل على ربه المعبد المبدي على عزت اقامدى *
أحد خوجات العلوم الرياضية والطبيعية بـ مدرسة المهندسخانة الخديوية

* (دروس في المقالة الثالثة) *

المقالة الثالثة يبحث فيها عن مساحة الاشكال المستقيمة الاضلاع وعن

خواص الاشكال المتشابهة

* (الحدود) *

(حد ١) مساحة الشيء تعين ما فيه من أمثال الوحدة الخطية او ابعاضها ان كان الشيء خطاً أو أمثال مربعها كذلك ان كان سطحاً أو أمثال مكعبها كذلك ان كان جسماً

(حد ٢) الشكلان المتكافئان شكلان متساويان في المساحة سواء كانا متشابهين أو غير متشابهين فالدائرة مثلاً يمكن ان تكافئ مربعاً كما ان المثلث يمكن ان يكافئ مستطيلاً أو مربعاً أو دائرة أو شكلاً مخمساً أو مستمسا أو نحو ذلك

ولا يكون الشكلان متساويين الا اذا أمكن انطباق أحدهما على الآخر انطباقاً كلياً كالدائرتين المرسومتين ببعدين متساويين وكالمثلثين ذوي الاضلاع المتناظرة المتساوية

(حد ٣) ارتفاع متوازي الاضلاع هو كما في (الشكل ٩٣) العمود مثل h هو المحصور بين ضلعين متقابلين مثل a و b مأخوذين قاعدتين له
(حد ٤) ارتفاع المثلث هو كما في (الشكل ٩٤) العمود مثل h النازل من رأس زاوية من زواياه مثل a على الضلع المقابل لها مثل b المأخوذ قاعدة له

(حد ٥) ارتفاع شبه المنحرف هو كما في (الشكل ٩٥) العمود مثل h هو المحصور بين الضلعين المتوازيين مثل a و b المأخوذين قاعدتين له

* (الدعوى الاولى النظرية شكل ٩٩ و ١٠٠) *

نسبة المستطابقين إلى إحدى الارتفاع إلى بعضهما كنسبة قاعدتيهما
فالمستطابقان مثل a و b وهما في الارتفاع h نسبة

حدهما : الآخر :: القاعدة أ - : القاعدة أه
(برهانها) أن يفرض أولان بين القاعدتين أ - و أه مقياسا مشتركا
مثلي م بحيث تكون

$$\text{القاعدة أ -} = \text{م} \text{ مثلا}$$

$$\text{والقاعدة أه} = \text{م}$$

فيكون أ - : أه :: م : م و يجعل م = أ يكون
أ - : أه :: م : م

فإذا قسمنا القاعدة أ - الى سبعة اجزاء متساوية كانت القاعدة أه
محتوية على أربعة اجزاء منها وإذا اقتسام كل نقطة من نقط التقاسيم عودا
على أ - انقسم المستطيل أ - ح د الى سبعة مستطيلات متساوية لان
قواعدها متساوية وارتفاعاتها كذلك

ومن حيث ان المستطيل أه ح د يحتوي على أربعة مستطيلات منها تكون
نسبة المستطيل أ - ح د : المستطيل أه ح د :: م : م
فنتج من مقارنة هذه النسبة بالنسبة السابقة التي هي القاعدة أ - :
القاعدة أه :: م : م

نسبة المستطيل أ - ح د : المستطيل أه ح د :: القاعدة أ - :
القاعدة أه وهو المطلوب

وثانيا انه اذا لم يكن بين القاعدتين أ - و أه مقياس مشترك تكون
نسبة المستطيل أ - ح د : المستطيل أه ح د :: القاعدة أ - :
القاعدة أه

لانه لو لم تكن هذه النسبة صحيحة لكان الحد الرابع اما أكبر من القاعدة
أه أو أصغر منها

فلو فرضناه أكبر من أه بان جعلناه مثل أ و لكان أ - ح د :
أه ح د :: أ - : أ و فلو قسمنا القاعدة أ - الى أقسام
متساوية بشرط ان يكون القسم الواحد أصغر من البعد ه و لوقعت
بالاقل نقطة من نقط التقاسيم مثل ع بين ه و و اذا اقتسامها عودا

مثل

مثل $\frac{ك}{هـ}$ على $\frac{ا}{ب}$ يحدث مستطيل $\frac{ا}{ب} = \frac{ك}{هـ}$ فيلزم أن تكون
نسبة المستطيل $\frac{ا}{ب} = \frac{د}{هـ}$: المستطيل $\frac{ا}{ب} = \frac{ك}{هـ}$:: $\frac{ا}{ب} : \frac{ا}{ب}$
لأن بين القاعدتين $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ا}{ب}$ مقياساً مشتركاً
وحيث أن المقدمات المتناظرة متساوية في هاتين المتناسبتين يتركب من
التوالي متناسبة هي

$$\frac{ا}{هـ} : \frac{د}{هـ} :: \frac{ا}{ب} : \frac{ا}{ب}$$

وحيث أن الحد الأول من هذه المتناسبة أصغر من الحد الثاني يلزم أن يكون
الحد الثالث أصغر من الحد الرابع والواقع هنا عكسه فلا تكون هذه المتناسبة
صحيحة وحيث أنها ناتجة من متناسبتين يكون الغلط في أحدهما أو فيهما
معاً وحيث أن المتناسبة الثانية

$$\frac{ا}{ب} : \frac{د}{هـ} :: \frac{ا}{ب} : \frac{ا}{ب}$$

يكون الغلط حاصل في المتناسبة الأولى

$$\frac{ا}{ب} : \frac{د}{هـ} :: \frac{ا}{هـ} : \frac{ا}{ب}$$

أن يكون أكبر من القاعدة $\frac{ا}{هـ}$

وبمثل هذا يبرهن على أن الحد الرابع لا يمكن أن يكون أصغر من القاعدة $\frac{ا}{هـ}$
فحينئذ تكون نسبة المستطيلين المتحدى الارتفاع الى بعضهما ~~كنسبة~~
قاعدتهما وهو المطلوب اثباته

(الدعوى الثانية النظرية شكل ١٠١) *

نسبة أى مستطيلين الى بعضهما ~~كنسبة~~ حاصل ضرب قاعدة الأول
في ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثاني في ارتفاعه
فاذا رمز بالحرف $ص$ المستطيل قاعدته $ق$ وارتفاعه $ع$ وبالحرف
 $صم$ المستطيل اخر قاعدته $ق$ وارتفاعه $ع$ يكون $ص : صم$
:: $ق \times ع : ق \times ع$

(برهانه) أن يتصور مستطيل ثالث مثل $م$ قاعدته تساوى قاعدة

المستطيل الاول وارتفاعه يساوى ارتفاع المستطيل الثانى فيكون

$$صه : م :: ع : ع \text{ و}$$

م : صه :: ق : ق فاذا ضربنا حدود التناسيب الاولى فى حدود
التناسب الثانية بالترتيب يحدث

$$صه \times م : م \times صه :: ع \times ق : ق \times ع \text{ وبقسمة حدى}$$

التناسب الاولى على م ينتج

$$صه : صه :: ع \times ق : ع \times ق \text{ وهو المطلوب اثباته}$$

• (فى مساحة المستطيل) •

مساحة المستطيل هى نسبته الى مستطيل آخر مأخوذ وحدة وحيث ثبت
فى النظرية المتقدمه أن نسبة أى مستطيلين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب
قاعدته الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه ينتج
أنه اذا جعل أحدهما المستطيلين وحدة للقياس علمت مساحة المستطيل الآخر
بقسمة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه على حاصل ضرب قاعدة وحدة
القياس فى ارتفاعه

• (مثال ذلك) •

$$\text{اذا كان المستطيل صه قاعدته } ق = ٦ \text{ وارتفاعه } ع = ٤$$

$$\text{فماتكون مساحته بالنسبة للمستطيل صه الذى قاعدته } ق = ٣$$

$$\text{وارتفاعه } ع = ٢$$

فالجواب أن يقال ان نسبة مساحة الاول صه الى الثانى صه كنسبة
حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه أى ٦×٤ الى حاصل ضرب قاعدة
الثانى فى ارتفاعه أى ٣×٢ أو $\frac{٦ \times ٤}{٣ \times ٢} = ٤$

أعنى ان المستطيل صه يحتوى على المستطيل صه المجهول وحدة

أربع مرات

والعادة أن تقاس السطوح بمربع الوحدة الخطية أى بالمربع الذى ضلعه يساوى وحدة الطول

فإذا جعل المتر وحدة للطول يكون المتر المربع وحدة للسطوح وإذا كان الذراع وحدة للطول يكون الذراع المربع وحدة للسطوح وهكذا وحيث أن مربع الواحد واحد ينتج من ذلك أن نسبة أى مستطيل الى مربع الوحدة الخطية كنسبة حاصل ضرب قاعدة المستطيل المذكور في ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة المربع في ارتفاعه وحيث أن قاعدة مربع الوحدة الخطية تساوى الوحدة الخطية وارتفاعه كذلك تكون المناسبة هكذا

$$\frac{\text{المستطيل}}{\text{المربع}} = \frac{\text{حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع}}{1 \times 1}$$

اعنى ان مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه فينتج المستطيل الذى قاعدته $3,53$ وارتفاعه $7,25$ =

مساحته $3,53 \times 7,25 = 25,74$ أمتار مربعة أو 25 سنتيمتر مربع و 94 ديسيمتر مربع و 7 أمتار مربعة

(الدعوى الثالثة النظرية شكل ١٠١ ثانى)

مساحة المثلث القائم الزاوية تساوى نصف حاصل ضرب احد الضلعين المحيطين بزاويته القائمة في الآخر

فالمثلث ABC القائم الزاوية في C مساحته تساوى نصف حاصل ضرب AC في BC أى $\frac{AC \times BC}{2}$

لأننا إذا قمنا بالمستطيل الذى قاعدته BC وارتفاعه AC نشاهد أن هذا المستطيل ضعف المثلث ABC وحيث أن مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه ينتج أن مساحة المثلث ABC تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه وهو المطلوب اثباته

* (الدعوى الرابعة النظرية شكل ١٠٢ ثانياً) *

مساحة أى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

فمساحة المثلث ا-د-ه مثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته د-ه

فى ارتفاعه ا-د أى تساوى $\frac{د \times ا}{٢}$ لان مساحة المثلث ا-د-ه

القائم الزاوية فى د تساوى $\frac{د \times ا}{٢}$ ومساحة المثلث ا-د-ه القائم

الزاوية فى د تساوى $\frac{د \times ا}{٢}$ ومساحة المثلث الكلى ا-د-ه تساوى

بمجموع مساحتي المثلثين ا-د-ه و ا-د-ه فتكون مساحة المثلث ا-د-ه

$$= \frac{د \times ا}{٢} + \frac{د \times ا}{٢} = د \times ا$$

$$= \frac{د \times (١+١) ا}{٢} = د \times ا$$

وهو المطلوب اثباته

* (وينتج من هذه النظرية نتائج) *

الاولى ان نسبة المثلثات المتحدة القاعدة الى بعضها كنسبة ارتفاعاتها الى

بعضها

الثانية ان نسبة المثلثات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة قواعدها

الى بعضها

الثالثة ان نسبة أى مثلثين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول

فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه

الرابعة ان المثلثات ذات القاعدة المشتركة التى رؤسها على مستقيم مواز

للقاعدة المذكورة متكافئة ولا يوضح ذلك برمز بالحرف م لمثلث قاعدته

ق وارتفاعه ع وبالحرف م لمثلث آخر قاعدته ق وارتفاعه

$$ع \text{ فيكون } م = \frac{ق \times ع}{٢} = م = \frac{ق \times ع}{٢} \text{ وبقسمه أحدهما}$$

على الآخر يحدث

$$\frac{ق \times ع}{٢} : \frac{ق \times ع}{٢} = م : م \text{ أو } ق \times ع : ق \times ع = م : م \text{ فإذا}$$

$$\text{كانت } ق = ق \text{ يكون } م : م :: ق : ق$$

وإذا

واذا كانت ع = ح يكون م : م :: ق : ق
(تنبيه) اذا وقع ارتفاع المثلث خارجا عنه كما في الشكل تجرى فيه النظرية
المتقدمة بطرح مساحة المثلث ا د ر من مساحة المثلث ا د ه هكذا

$$\begin{aligned} \frac{ا د \times ا د}{٢} &= ا د ر \\ و \\ ا د - \frac{ا د \times ا د}{٢} &= ا د ر \\ ا د ر - ا د ر &= ا د ر - \frac{ا د \times ا د}{٢} \\ ا د ر - \frac{ا د \times ا د}{٢} &= ا د ر - \frac{ا د \times ا د}{٢} \\ ا د ر - \frac{ا د \times ا د}{٢} &= ا د ر - \frac{ا د \times ا د}{٢} \end{aligned}$$

(الدعوى الخامسة النظرية شكل ٩٧)

مساحة أي شكل متوازي الاضلاع تساوى حاصل ضرب قاعدته
في ارتفاعه

فالشكل ا د ر المتوازي الاضلاع مساحته تساوى حاصل ضرب
قاعدته ا د في ارتفاعه د ه أي ا د ر د ه = ا د ر د ه
(برهان) أن يوصل القطر د ر فينقسم المتوازي الاضلاع الى مثلثين
متساويين كما تقدم اثباته في المقالة الاولى فمساحة المثلث ا د ر
= ا د ر د ه ومساحة المثلث د ر ه = د ر ه د ه و
ا د ر د ه = د ر ه د ه فمساحة المثلث ا د ر
= ا د ر د ه

ومساحة متوازي الاضلاع ا د ر تساوى مساحة المثلث ا د ر
زائدة مساحة المثلث د ر ه فتكون مساحة متوازي الاضلاع

$$\begin{aligned} ا د ر د ه + د ر ه د ه &= ا د ر د ه + د ر ه د ه \\ ا د ر د ه + د ر ه د ه &= ا د ر د ه + د ر ه د ه \\ ا د ر د ه + د ر ه د ه &= ا د ر د ه + د ر ه د ه \\ ا د ر د ه + د ر ه د ه &= ا د ر د ه + د ر ه د ه \end{aligned}$$

(وينتج من هذه النظرية تلخيص)

الاولى ان نسبة الاشكال المتوازية الاضلاع المتحدة القاعدة الى بعضها كنسبة ارتفاعها الى بعضها

الثانية ان نسبة الاشكال المتوازية الاضلاع المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة قواعدها الى بعضها

الثالثة ان نسبة أى شكلين متوازي الاضلاع الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول في ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثاني في ارتفاعه

الرابعة ، انه اذا اتحدت القاعدة والارتفاع في مستطيل ومتوازي الاضلاع كان المستطيل مكافئاً للمتوازي الاضلاع

(الدعوى السادسة النظرية شكل ٩٥)

مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب ارتفاعه في مجموع قاعدتيه المتوازيتين

فشكل $ا ب ح د$ الشبيه بالمنحرف مساحته تساوى نصف حاصل ضرب ارتفاعه $هـ د$ في مجموع قاعدتيه المتوازيتين $ا ب$ و $ح د$ أى تكون مساحته $= \frac{هـ د (ا ب + ح د)}{٢}$

(برهانها) أن يوصل القطر $ا د$ فينتسم الشكل الى مثلثين $ا ب د$ و $ا ح د$ ومساحة المثلث $ا ب د = \frac{ا ب \times هـ د}{٢}$ ومساحة المثلث $ا ح د = \frac{ا ح \times هـ د}{٢}$

$\frac{ا د \times هـ د}{٢}$ ومساحة شبه المنحرف $ا ب ح د$ تساوى مساحة المثلث $ا ب د$ زائدة مساحة المثلث $ا ح د$ فتكون مساحة $ا ب ح د = \frac{ا ب \times هـ د}{٢} + \frac{ا ح \times هـ د}{٢}$

$= \frac{ا ب \times هـ د + ا ح \times هـ د}{٢}$ وحيث ان $ا د = ا ب + ا ح$ تكون مساحة $ا ب ح د = \frac{ا د \times هـ د}{٢}$ وهو المطلوب اثباته

(نتيجه ١)

حيث نبين أن مساحة شبه المنحرف $ا ب ح د = \frac{هـ د (ا ب + ح د)}{٢}$ أو $ا ب \times هـ د = \frac{هـ د (ا ب + ح د)}{٢} \times ٢$

أو $\frac{هـ د}{٢} \times (ا ب + ح د)$ يعلم من ذلك أن مساحة شبه المنحرف

تساوى

تساوى حاصل ضرب ارتفاعه في نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين أو تساوى حاصل ضرب نصف ارتفاعه في مجموع قاعدتيه المتوازيتين

*(تنبيه ٢)

يمكن أخذ مساحة شبه المنحرف بضرب ارتفاعه في قاعدته المتوسطة بعين قاعدتيه المتوازيتين لأن هذه القاعدة المتوسطة تساوى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين كما صرح به في المقالة الأولى

(الدعوى السابعة النظرية شكل ١٠٦)

إذا قسم مستقيم مثل ad الى قسمين مختلفين مثل a و d فالربع المنشأ على المستقيم الكامل ad يحتوي على المربع المنشأ على الجزء a وعلى المربع المنشأ على الجزء الآخر d وعلى ضعف المستطيل المكون من الجزئين a و d أعني أن ad^2 أو $(a + d)^2 = a^2 + d^2 + 2ad$

(برهانها) أن يرسم المربع ad ويؤخذ $ae = a$ ويمتد ae موازياً للمستقيم ad ثم $ط$ موازياً للمستقيم ad فينقسم المربع ad الى أربعة أجزاء (الأول) a^2 وهو المربع المنشأ على a لاتنا أخذنا $ae = a$ (والثاني) ed^2 وهو المربع المنشأ على d لأن $ad = ae + ed$ أو فيكون $ad = ae + ed$ أو أي أن $d = ed$ هو وبسبب التوازي يكون $ae = ed$ و $d = ed$ هو فيكون $ط$ ae مساوياً للمربع المنشأ على ad فاذا طرحنا هذين المربعين من المربع الكلي يبقى المستطيلان $ad \times ed$ و $ed \times ط$ ومساحة كل واحد منهما تساوى $a \times d$ وبهذا ثبت المطلوب

(تنبيه ٣)

هذه القضية تبين بالقانون الجبري هكذا

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

(الدعوى الثامنة النظرية شكل ١٠٧)

أى مستقيم مثل ac كان فاضل مستقيمين مثل ab و bc يكون المربع المنشأ عليه مساويا للمربع المنشأ على أحدهما a زائدا المربع المنشأ على الآخر c ناقصا ضعف مستطيل الخطين ab و bc أعنى أن

$$ac^2 = (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 - 2ab - 2bc + c^2$$

(برهانها) أن يرسم المربع ac^2 ف ثم يؤخذ $ah = ac$ ويمتد ac موازيا للمستقيم bc و bc موازيا a ويكمل المربع hac^2 ف مساحة كل من المستطيلين ab و bc و ac و ac^2 تساوى $a \times b$ و $b \times c$ فاذا طرحناهما من الشكل الكلى

ac^2 لكها الذى مقداره يساوى $a^2 + b^2$ يبقى المربع ac وهذا وبهذا يثبت المطلوب

(تنبيه)

هذه القضية تبين بالقانون الجبري هكذا

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

(الدعوى التاسعة النظرية شكل ١٠٨)

المستطيل المنشأ على مجموع خطين مثل a و b وعلى فاضلهما c يساوى فاضل مربعى هذين الخطين أعنى أن $(a + b) \times c = (a - b) \times d$

$$a^2 - b^2 = c^2 - d^2$$

(برهانها) أن يرسم مربعان ac^2 و bd^2 على a و b ثم يمتد a بكمية b و b بكمية a ويكمل المستطيل ac^2

فالقاعدة

فالقاعدة اك من المستطيل هي حاصل جمع الخطين ار و ر ه وارتفاعه اه هو فاضل الخطين المذكورين فحينئذ المستطيل اكله $= (ا + ر) \times (ا - ر)$ لكن هذا المستطيل مركب من جزئين ار ه ه + ر ل ك والجزء ر ل ك يساوى المستطيل ه د ع ف لان ر ه = د ه و ر ل ك = ه د ف فيكون اكله = ار ه ه + ه د ع ف وحيث ان هذين الجزئين مكوّنان للمربع ار ه ف ناقصا المربع د ع ع الذى هو المربع المنشأ على ر ه يكون

$$\overline{ار} - \overline{ر ه} = (ا + ر) \times (ا - ر)$$

• (تنبيه) •

هذه القضية تكذب بالقانون الجبرى هكذا

$$\overline{ر ه} - \overline{ر ل} = (ر + ل) \times (ر - ل)$$

• (الدعوى العاشرة النظرية • شكل ١٠٩) •

المربع المرسوم على وتر الزاوية القائمة من المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرى فليكن ار ه مثلث قائم الزاوية فى ا فترسم مربعات على الاضلاع الثلاثة ثم ينزل من الزاوية القائمة على الوتر عمود او يمد الى ه ويوصل القطران ار و ر ه فحيث ان الزاوية ار ه مركبة من الزاوية ار ه ومن الزاوية القائمة ر ه و ان الزاوية ر ه ل مركبة من الزاوية ار ه المذكورة ومن الزاوية القائمة ار ه تكون الزاوية ار ه = ر ه ل وكون ار ه = ر ه من المربع و ر ه = ر ه كذلك يكون المثلث ار ه مساويا للمثلث ر ه ل لتساوى الزاوية المحصورة بين الاضلاع المتساوية بالتناظر واعلم ان المثلث ار ه نصف المستطيل ر ه د ه المتحد منه فى القاعدة ر ه

وفي الارتفاع $د$ وان المثلث $د$ نصف المربع $ا$ لان الزاوية
 $د$ قائمة كالزاوية $د$ $ا$ والمستقيمين $ا$ و $ا$ لا يكونان
 الا خطا مسبوقة قيا ما وازيا للمستقيم $د$ فينتهذ يكون الارتفاع $ا$
 مشتركا بين المثلث $د$ والمربع $ا$ المتحددين في القائمة $د$
 فيكون المثلث نصف المربع وقد تبين ان المثلث $ا$ مساويا للمثلث $د$
 فيكون المستطيل $د$ الذي هو ضعف المثلث $ا$ مكافئا للمربع
 $ا$ الذي هو ضعف المثلث $د$ وبمثل هذا يبرهن على ان المستطيل
 $د$ مكافئ للمربع $ا$ وحيث ان المستطيلين $د$ و $د$
 مكثون للمربع $د$ يكون المربع $د$ المنشأ على الوتر
 مساويا لجمع المربعين $ا$ $د$ و $ا$ المتشأين على الضلعين
 الآخرين أي ان $د = ا + ا$

• (نتائج) •

الاولى مربع أحد ضلعي الزاوية القائمة يساوي مربع الوتر ناقصا مربع

$$الضلع الآخر ويكتب هكذا $د = ا - ا$$$

الثانية اذا كان $د$ مربعا قطره $ا$ يكون المثلث $ا$ $د$

قائم الزاوية ومتساوي الساقين فيحدث $د = ا + ا = ا$
 أعني ان المربع المنشأ على القطر $ا$ ضعف المربع المنشأ على الضلع $ا$

وحيث ان $ا : ا :: ا : ا$ يكون $ا : ا :: ا : ا$
 أعني انه لانسبة قياسية بين قطر المربع وضلعه أنظر (شكل ١١٨)

الثالثة حيث تبين ان المربع $ا$ مكافئ للمستطيل $د$ والارتفاع $د$
 مشترك بين المربع $د$ والمستطيل $د$ يكون نسبة
 المربع $د$ للمستطيل $د$ كنسبة القاعدة $د$ للقاعدة

$د$ أعني يكون $د : ا :: د : ا$ أعني ان نسبة

مربع الوتر لمربع أحد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة كنسبة الوتر للـ سهم
المجاور لهذا الضلع والسهم هنا جزء من الوتر محدود ودباله مود النازل من
الزاوية القائمة فالجزء د هو السهم المجاور للضلع ا ب والجزء د ه
هو السهم المجاور للضلع ا ح .

ويوجد أيضاً كما تقدم $\overline{د} : \overline{ح} :: د : ح$
 الرابعة حيث ان المستطيلين $\overline{د ه و}$ و $\overline{د ح و}$ ارتفاعا واحدا
 تكون نسبة أحدهما الى الآخر كالنسبة بين $\overline{د}$ و $\overline{ح}$ ومن حيث ان
 المستطيلين مكافئان للمربعين $\overline{أ}$ و $\overline{آ}$ يكون

$\overline{a} : \overline{a'} :: e : s$
 يعنى ان نسبة أحد مربعى ضلعى الزاوية القائمة الى الآخر كنسبة مهمى
 الوترين المحاورين لهما

• (تعريف • شكل ١٠٩. الثاني) •

مقطع مستقيم مثل ١ - على اخر مثل ٢، هو الجزء آ - المحصور بين موقعي العمودين النازلين من النقطتين ١ و ٢ على المستقيم ٢.

(الدعوى الحادية عشر النظرية * شكل ١١٠) *

مربع الضلع المقابل للزاوية الحادة من أى مثلث يساوى مجموع مربعي
الضلعين الآخرين ناقصا ضعف المستطيل المكون من أحدهما والضلعين
ومن مسقط الآخر على الأول
فإذا كانت الزاوية حادة في المثلث ABC وأنزلنا عمودا AD على
محاورها BC يكون

$$57 \times 7 - 5 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

(برهانها) أن يقال لا يخلو ما أن يقع العمود داخل المثلث أو خارجه فإذا وقع العمود a داخل المثلث ABC كان $a = b - c$ و

$$\text{ومنه ينتج } \overline{س} = \overline{ر} + \overline{د} - ٢ \times \overline{د} \times \overline{س}$$

$$\text{فاذا أضفنا } \overline{أ} \text{ يكون } \overline{أ} + \overline{س} = \overline{أ} + \overline{ر} + \overline{د} + \overline{د} = \overline{أ} + \overline{ر} + ٢ \times \overline{د}$$

وحيث أن المثلثين المتماثلين الزاوية $\overline{أ} - \overline{د}$ و $\overline{أ} - \overline{ر}$ ينتجان $\overline{أ} + \overline{س}$

$$= \overline{أ} - \overline{ر} \text{ و } \overline{أ} + \overline{ر} = \overline{أ} \text{ يكون}$$

$$\overline{أ} = \overline{أ} + \overline{ر} - ٢ \times \overline{د} \times \overline{س}$$

واذا وقع العمود $\overline{د}$ خارج المثلث $\overline{أ} - \overline{س}$ كان $\overline{س} = \overline{د}$ وعليه يكون

$$\overline{س} = \overline{ر} + \overline{د} - ٢ \times \overline{د} \times \overline{س} \text{ فاذا أضفنا } \overline{أ}$$

$$\text{واختصرنا نتج } \overline{أ} = \overline{ر} + \overline{د} - ٢ \times \overline{د} \times \overline{س}$$

*(الدعوى الثانية عشر النظرية * شكل ١١١)*

مربع وتر الزاوية المنفرجة من أى مثلث منفرج الزاوية يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين زائدا ضعف المستطيل المكون من أحدهما ومن مسقط الآخر على الأول

فاذا كانت الزاوية $\overline{د}$ من المثلث $\overline{أ} - \overline{ر}$ منفرجة وأنزلنا

$$\overline{د} \text{ عمودا على مجاورها } \overline{س} \text{ يكون } \overline{أ} + \overline{ر} = \overline{أ} + \overline{س} + ٢ \times \overline{د} \times \overline{س}$$

(برهانها) أن يقال ان العمود لا يمكن أن يقع داخل المثلث لانه لو وقع في $\overline{هـ}$ مثلثا كان في المثلث $\overline{أ} - \overline{هـ}$ زاوية قاعته $\overline{هـ}$ وزاوية منفرجة $\overline{د}$ ممكن هذا غير ممكن فلا يقع العمود الا خارج المثلث وعينئذ يكون $\overline{س} = \overline{ر} + \overline{د}$

$$\text{ومنه ينتج } \overline{س} = \overline{ر} + \overline{د} + ٢ \times \overline{د} \times \overline{س} \text{ فاذا أضفنا}$$

٢ اد واختصرنا كما في النظرية السابقة حدث

$$\overline{ا د} = \overline{ا ح} + \overline{ح د} + ٢ ح د \times د$$

* (الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ١١٢) *

اذا وصل مـ بـ بتقيم مثل ا هـ من رأس أى مثلث مثل ا ب ح الى وسط قاعدة مـ ب حدث

$$\overline{ا د} + \overline{ا هـ} = \overline{ا ب} + \overline{ا هـ} + ٢ ا هـ \times ح$$

(برهانها) أن ننزل العمود ا د على القاعدة ب ح فن المثلث ا هـ ب يحدث

$$\overline{ا د} = \overline{ا هـ} + \overline{هـ د} - ٢ هـ د \times ح$$

ومن المثلث ا ب ح يحدث

$$\overline{ا د} = \overline{ا هـ} + \overline{هـ د} + ٢ هـ د \times ح$$

فاذا جمعنا ولا حظنا ان هـ د = هـ د يحدث

$$\overline{ا د} + \overline{ا هـ} = \overline{ا ب} + \overline{ا هـ} + ٢ ا هـ \times ح$$

* (الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ١١٣ الثانى) *

كل شكل رباعى مجموع مربعات أضلاعه الاربعة يساوى مجموع مربعى قطريه زائدا أربعة أمثال مربع الخط الموصول بين وسطيهما

(برهانها) أن يفرض ا ب و د قطرى المربع ا ب ح د و ع و وسطيهما اتم يوصل بـ د و د و ع و فبمقتضى النظرية المتقدمة يحدث

$$\text{من المثلث ا ب د} \quad \overline{ا ب} + \overline{ا د} = \overline{ب د} + ٢ ا ب \times د$$

$$\text{ومن المثلث ا ب ح} \quad \overline{ا ب} + \overline{ا ح} = \overline{ب ح} + ٢ ا ب \times ح$$

$$\text{وبالجمع يكون} \quad \overline{ا ب} + \overline{ا ب} + \overline{ا د} + \overline{ا ح} = \overline{ب د} + \overline{ب ح} + ٢ ا ب \times د + ٢ ا ب \times ح$$

$$= ٢ (دو + د٢) + ٤ او$$

ومن المثلث دود د٢ + د٢ = د٢ + د٢ = د٢ + د٢ فيكون

$$او + د٢ + د٢ + د٢ = د٢ + د٢ + د٢ + د٢ = د٢ + د٢ + د٢ + د٢$$

وحيث ان $او = د٢$ و $د٢ = د٢$ يكون

$$او + د٢ + د٢ + د٢ = د٢ + د٢ + د٢ + د٢ = د٢ + د٢ + د٢ + د٢$$

نتيجة اذا افكان الشكل الرابعي متوازي الاضلاع انعدم المستقيم ع و
وكان مجموع مربعات الاضلاع الاربعة من أى شكل متوازي الاضلاع
مساويا لمجموع مربعي قطريه

(في الخطوط المناسبة والاشكال المشابهة)

*(الدعوى الخامسة عشر النظرية * شكل ١١٤)*

المستقيم الموازي لاحد اضلاع مثلث يقسم ضلعيه الاخرين الى اجزاء
متناسبة فالمستقيم مثل ده الموازي للقاعدة دد من المثلث ادح
يقسم الضلعين ا- و اح الى اجزاء متناسبة بحيث يكون
اد : دد :: اه : ده

(برهانها) أن يوصل ده و دد فيجذ مثلثان ده د و ده د
متكافئان لاتحاد القاعدة ده وتساوى الارتفاعين لان الرأسين د
و د موضوعتان على مستقيم مواز للقاعدة والنسبة بين المثلثين ادده
و دده المشتركين في الرأس ه والمتحددين في الارتفاع كالنسبة بين
قاعدتيهما اد و دد أعنى

$$ادده : دده :: اد : دد$$

والنسبة بين المثلثين ادده و دده المشتركين في الرأس د والمتحددين
في الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما اه و ده أعنى
ادده : دده :: اه : ده

لكن المثلث سهه يكافئ دهه فيكون

اه : سه :: اه : دهه

* (نتائج) *

الاولى ينتج من التناسبة المتقدمة ان

اه + سه : اه :: اه + دهه : اه أى

اه : اه :: اه : اه وان

اه : سه :: اه : دهه

الثانية المستقيمان مثل اه و دهه المقطوعان بتوازيات اه و دهه

و دهه و سه الخ ينقسمان الى اجزاء متناسبة بحيث يكون

دهه : دهه :: دهه : دهه

لانا اذا مددنا المستقيمين اه و دهه وكانت ط نقطة تلاقيهما يحدث

من المثلث طهه الذى فيه الخط اه مواز للقاعدة دهه ان

طهه : اه :: طو : دهه او

طهه : طو :: اه : دهه

ومن المثلث دهه ط ان

طهه : دهه :: طو : دهه او

طهه : طو :: دهه : دهه فينتج

اه : دهه :: دهه : دهه

وبمثل هذا يتضح ان

دهه : دهه :: دهه : دهه وهكذا

أى ان الخطين اه و دهه منقسمان بالخطوط المستقيمة المتوازية اه

و دهه و دهه الخ الى اجزاء متناسبة

* (الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ١١٦) *

اذا قطع خط مثل دهه ضلعين مثل اه و اه من مثلث مثل

اهه بحيث يكون اه : دهه :: اه : دهه يكون الخط

د ه مواز للقاعدة د ه وهذه عكس الدعوى السابقة
(برهانها) أن يقال لو لم يكن د ه مواز للقاعدة د ه بأن كان د و
هو الموازى لها الحدث ا د : د : ا و : و وقد فرضنا ان
ا د : د : ا ه : ه فنتج من مقارنة هذه التناسبة بالسابقة
ان ا و : و : ا ه : ه وهى محالة

* (الدعوى السابعة عشر النظرية * شكل ١١٧ و ١١٧ الثانى) *

الخط ا د المنصف للزاوية مثل ا من مثلث مثل ا د يقسم القاعدة
د الى سهمين د و د مناسبين للصاعين ا - و ا
والخط ان المنصف للزاوية الخارجة د ا ه يحدد على القاعدة
الامتدة جزئين - و و مناسبين للصاعين المذكورين
- و ا د

(برهان القضية الاولى) أن يرسم من النقطة د خط مثل د ه يوازى
ا د ويمتد حتى يقطع الامتداد - ا فيكون في المثلث د ه ه خط ا د
مواز للقاعدة د ه ويحدث د : د : ا - : ا ه لكن
المثلث ا د ه متساوى الساقين لانه يلزم من توازى ا د و د ه أن
تكون الزاوية ا د ه = د ا د والزاوية ا ه د = د ا د

وحيث ان د ا د = د ا د بالفرض تكون الزاوية ا د ه = ا ه د
ويكون ا ه د = ا د فاذا وضعنا ا د عوضا عن ا ه في التناسبة
المتقدمة يكون د : د : ا - : ا وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يرسم د ح يوازى ا د فيحدث من المثلث
- ا ن هذه التناسبة د : د : ا - : ا ح وبمثل ما تقدم
يبرهن على ان المثلث ا ح د متساوى الساقين أى ان ا ح = ا د
ف يكون د : د : ا - : ا وهو المطلوب

* (تعريف) *

المثلثان المتشابهان مثلثان أضلاعهما المتناظرة متناسبة فاذا علم مثلث

أمكن دائماً رسم مثلث مشابه له لانه اذا غيرت أضلاع المثلث المعلوم
تغير انسيبها نحدث ثلاثة أضلاع أخرى يمكن بها تكوين مثلث لأن كلا منها
أقل من مجموع الضلعين الآخرين

(الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ١١٩)

اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعهم المتناظرة
(والاضلاع المتناظرة هي المقابلة لازوايا المتساوية)

فإذا كان في مثلثين مثل $\alpha - \beta$ و $\gamma - \delta$ زاوية $\alpha = \gamma$ وزاوية
 $\beta = \delta$ وزاوية $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ يكون

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta :: \alpha - \beta : \gamma - \delta$$

(برهانها) أن يقال لو وضع الضلعان $\alpha - \beta$ و $\gamma - \delta$ على استقامة
واحدة ومدة الضلعان α و γ حتى التقيا في نقطة مثل α وكان
الشكل الحادث $\alpha - \beta$ و متوازي الاضلاع لانه يلزم من كون الخط
 $\alpha - \beta$ مستقيماً واحداً والزاوية $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ أن يكون الخط $\alpha - \beta$

موازي للخط $\gamma - \delta$ أو $\alpha - \beta$ كما تقرر ذلك في المقالة الاولى وكذا يلزم من
كون الزاوية $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ أن يكون الخط $\alpha - \beta$ أو $\gamma - \delta$
موازي للخط $\gamma - \delta$

ويلزم من كون الخط $\alpha - \beta$ موازياً للقاعدة $\alpha - \beta$ في المثلث $\alpha - \beta$ و
أن يكون $\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$ أو كما تقرر ذلك في النظرية
لخامسة عشر فاذا وضع في هذه المناسبة نسبة الخط $\gamma - \delta$ بدل مساويه أو
تكون نسبة $\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$

ويلزم من كون الخط $\gamma - \delta$ موازياً للضلع $\alpha - \beta$ أن يكون $\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$
أي $\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$ فاذا وضع $\alpha - \beta$ بدل مساويه $\gamma - \delta$ يكون $\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$
 $\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$ ويلزم من اتحاد نسبة $\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$ في هذه
المتناسبة والمتناسبة المتقدمة أن يكون $\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$
أي أن الاضلاع المتناظرة متناسبة فقد ثبت بهذا أن المثلثين اللذين زواياهما

المتناظرة منساوية. تشابهان وهو المطلوب
وينتج من هذه النظرية انه يكفي لتشابه المثلثين تساوى زاويتيهم لان الزاوية
الثالثة تكون حينئذ مساوية لتظيرتها
* (الدعوى التاسعة عن النظرية شكل ١٢٠) *

المثلثان اللذان اضلاعهما المتناظرة متناسبة زواياهما المتناظرة
متساوية

فالمثلثان مثل $a - b$ و $c - d$ اذا كان فيهما $e - f$: $g - h$
:: $a - b$: $c - d$:: $e - f$: $g - h$ تكون الزاوية $a = e$
والزاوية $b = f$ والزاوية $c = g$ و $d = h$

(برهانها) ان يقال لو انشئت زاوية مثل e وهو مساوية للزاوية a
وزاوية مثل f و c مساوية للزاوية b لكانت الزاوية d من المثلث
 $e - f$ مساوية للزاوية a وحينئذ تكون كل زاوية من المثلث $a - b$
مساوية لتظيرتها من المثلث $e - f$ ويلزم من هذا أن يكون

$a - b$: $c - d$:: $e - f$: $g - h$ والمفروض ان

$a - b$: $c - d$:: $e - f$: $g - h$ ويلزم من تساوى الحدود الثلاثة
في هاتين التناسبتين أن يكون الحد الرابع $h = g$ وكذا يلزم من
تساوى الزوايا المذكورة أن تكون

$a - b$: $c - d$:: $e - f$: $g - h$ والمفروض ان

$a - b$: $c - d$:: $e - f$: $g - h$ ويلزم أيضا من تساوى الحدود الثلاثة
في هاتين التناسبتين أن يكون الحد الرابع $h = g$ وحيث تساوت
الاضلاع المتناظرة من المثلثين $e - f$ و $c - d$ تكون زواياهما المتناظرة
كذلك ويلزم من كون زوايا المثلث $e - f$ انشئت مساوية لتظايرها من
المثلث $a - b$ أن تكون زوايا المثلث $e - f$ مساوية لزوايا المثلث $a - b$
كل لتظيرتها

فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين اضلاعهما المتناظرة متناسبة زواياهما

المتناظرة

المتناظرة متساوية

• (تنبيهات) •

الاول الزوايا المتساوية من مثلثين أو تارها متناسبة
 الثاني يشاهد من هذه القضية وسابقتها أن تساوى الزوايا ملازم لتناسب
 الاضلاع وتناسب الاضلاع ملازم لتساوى الزوايا وأحد هذين الشرطين
 كاف في تشابه المثلثين وليس كذلك في الاشكال المغايرة للمثلث لانه لو نظر الى
 الشكل الرباعي كالمرسوم في الشكل ١٢١ ورسم الخط ه ه و موازيا
 للضلع ح ح فكانت كل زاوية من الشكل الرباعي ا ه و د مساوية
 لتظيرتها من الشكل الرباعي ا د ح و وليست الاضلاع المتناظرة
 متناسبة كما هو واضح من الشكل وكذا يمكن تقارب النقطتين س و د
 أو تباعدهما بدون تغيير تناسب اضلاع الشكل الرباعي المذكور وهي ا س
 و س د و د ح و ح ا وبهذا تتغير مقادير الزوايا فثبت بهذا انه يمكن
 في الشكل الرباعي اختلاف تناسب الاضلاع بدون تغيير مقادير الزوايا وتغيير
 الزوايا بدون تبديل الاضلاع أعني انه لا يلزم من تناسب الاضلاع تساوى
 الزوايا ولا من تساوى الزوايا تناسب الاضلاع الا في المثلث فقط

الثالث أهم القضايا في علم الهندسة قضية شكل العروس مع هاتين القضيتين لأن جميع الأشكال المسطحة المستوية يمكن تقسيمها إلى مثلثات وكل مثلث يمكن تقسيمه إلى مثلثين قائمي الزاوية

• (الدعوى العشر ون النظرية شكل ١٢٢) •

إذا ساوت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر وكانت الأضلاع المحيطة
بها بين الزاويتين متناسبة كان المثلثان متشابهين
أى إذا كانت الزاوية ١ من المثلث ١ - ٢ مساوية للزاوية ٢ من
المثلث ٢ و كانت ١ - ٢ : ٢ هـ :: ١ هـ : ٢ د يكون المثلث
١ - ٢ متشابه للمثلث ٢ هـ د

(برهانها) ان يقال لو أخذ البعد $a = 5$ ورسم من النقطة

ر مستقيم مثل ر ح مواز للضلع - ح لكات كل زاوية من المثلث
 ا ر ح مساوية لنظيرتها من المثلث ا - ح كما تقر ذلك في المقالة الاولى
 ويلزم من هذا أن يكون

$$ا - ح : ا ر :: ا ح : ا ح \text{ والمفروض أن}$$

$$ا - ح : د ه :: ا ح : د و \text{ ويلزم من كون}$$

ا ر = د ه أن يكون الحد الرابع د و = ا ح ويلزم من هذا أن يكون
 المثلث ا ر ح مساويا للمثلث د ه و كما تقر ذلك في النظرية السادسة
 من المقالة الاولى ويلزم من كون المثلث ا ر ح مشابها للمثلث ا - ح
 أن يكون مساويه وهو المثلث د ه و مشابها للمثلث ا - ح وهو المطلوب
 * (الدعوى الحادية والعشرون النظرية) *

المثلثان اللذان أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة متشابهان لان
 المثلثين اللذين بهذه المتساوية زواياهما المتناظرة متساوية وقد تقر في النظرية
 الثامنة عشر انه اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعها
 المتناظرة فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين أضلاعهما المتناظرة متوازية
 أو متعامدة متشابهان وهو المطلوب

* (الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل ١٢٥) *

اذا وصل من رأس مثلث الى قاعدته خطوط مستقيمة قدر ما يراد فهذه
 الخطوط تقسم قاعدة المثلث وما وازاها الى أجزاء متناسبة أى اذا وصل من
 رأس مثلث مثل ا - ح الى قاعدته - ح خطوط مستقيمة مثل ا د
 و ا ر الخ فهذه الخطوط تقسم القاعدة - ح وما وازاها مثل د ه
 الى أجزاء متناسبة أعنى يكون

$$د ل : د و :: ل ك : و ر :: ك ط : ر ح \text{ الخ}$$

(برهانها) أن يقال يلزم من كون الخط د ل موازيا للخط - و أن تكون
 كل زاوية من المثلث ا د ل مساوية لنظيرتها من المثلث ا - و ويلزم من
 هذا أن يكون

د ل : س و :: ا ل : ا و
 وأيضا يلزم من كون الخط ل ك موازيا للخط ر و أن تكون
 ا ل : ا و :: ل ك : و ر
 ويلزم من اتحاد نسبة ا ل : ا و في هاتين المتناسبتين أن يكون
 د ل : س و :: ل ك : و ر
 وبمثل هذا يبرهن على أن

ل ك : و ر :: ط ك : ر ح وهكذا
 فقد ثبت بهذا انه كما تنقسم القاعدة س ح في النقط و و ر و ح
 ينقسم الخط د ه في النقط ل و ك و ط
 فينتج من هذا انه اذا انقسمت القاعدة س ح الى اقسام متساوية في النقط
 و و ر و ح ينقسم الخط د ه في النقط ل و ك و ط الى
 اقسام متساوية كذلك

* (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل ١٢٦) *

اذا انزل عمود من رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية على وترها
 فاعلم

أولا أن هذا العمود يقسم المثلث الى مثلثين كلاهما يشابه المثلث
 الكلي

وثانيا أن كلا من الضلعين المحيطين بالقائمة يصير وسطا متناسبا بين وتر القائمة
 والقسم المجاور له

وثالثا أن العمود المنزل من القائمة على الوتر يكون وسطا متناسبا بين قسمي
 الوتر المذكور

أي اذا انزل عمود مثل ا د من رأس الزاوية القائمة ا في المثلث القائم
 الزاوية ا س ح على وترها س ح فاعلم

أولا أن هذا العمود يقسم المثلث ا س ح الى مثلثين ا س د و ا د ح
 كلاهما يشابه المثلث الكلي ا س ح

$$r - s = \sqrt{r^2 - s^2}$$

ومن المتناسبة (٢) أن

$$r - s = \sqrt{r^2 - s^2}$$

فلوجعت هذه الاشياء المتساوية لننتج أن

$$r - s = \sqrt{r^2 - s^2} + \sqrt{r^2 - s^2} = \sqrt{r^2 - s^2} + \sqrt{r^2 - s^2}$$

$$r - s = \sqrt{r^2 - s^2} + \sqrt{r^2 - s^2} = \sqrt{r^2 - s^2} + \sqrt{r^2 - s^2}$$

فقد ثبت بهذا أن مربع وتر القاطعة يساوى مجموع مربعي الضلعين الآخرين وقد أقيم الدليل على صحة هذه الدعوى فيما تقدم بوجه آخر فهذا دليل على أن براهين القضايا الهندسية قطعية اذ النظريات مؤسسة على البديهيات التي لا شك فيها

* (نتيجة شكل ١٢٧) *

ينتج من هذه النظرية انه لو وصل وتران مثل AB و AC من أى نقطة من نقط المحيط مثل A الى الخوازيق قطر مثل BC لكان المثلث الحادث ABC قائم الزاوية فى A وحينئذ يكون العمود AD المنزل من أى نقطة من المحيط على القطر وسطا متناسبا بين قسمة القطر المذكور وهما BD و DC وكذا يكون الوتر AB وسطا متناسبا بين القطر BC والقسم المجاور له وهو BD أعنى يكون

$$r - s = \sqrt{r^2 - s^2}$$

وأيا يكون الوتر AC وسطا متناسبا بين القطر BC والقسم المجاور له وهو DC أعنى يكون

$$r - s = \sqrt{r^2 - s^2}$$

ويلزم من هذا أن يكون

أ - : أ ه :: د ه : د ه × د ه : د ه × د ه
 فاذا قسم هذا النسبة الثانية على المضروب المشترك الذي هو د ه آلت
 هذه المتناسبة الى هذه

$$أ - : أ ه :: د ه : د ه$$

ولوقورن المربعان أ - و د ه لحدث

$$أ - : أ ه :: د ه : د ه$$

وكذا لوقورن المربعان أ ه و د ه لحدث

$$أ ه : أ ه :: د ه : د ه$$

وقد ذكرنا ذلك في النتيجة الثالثة والرابعة من شكل العروس فلاحاجة
 للاطالة فتأمل

• (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ١٢٨) •

المثلثان اللذان في أحدهما زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر النسبة بينهما
 كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بالزاوية الاولى و مستطيل الضلعين
 المحيطين بنظيرتها أى ان

$$\text{المثلث أ - د ه : المثلث أ ه د :: أ - × أ ه : أ ه × أ د}$$

(برهانها) أن يقال لو وصل الخط د ه لحدث مثلث أ ه د ارتفاعه

عين ارتفاع المثلث أ ه د لاشتراكهما فى الرأس ه واتحاد اتجاه

القاعدتين أ - و أ ه ويلزم من هذا ان يكون

$$أ ه : أ ه :: أ ه : أ ه$$

وكذا يلزم من اتحاد الارتفاع فى المثلثين أ - د ه و أ ه د أن يكون

$$أ - د ه : أ ه د :: أ ه د : أ ه د$$

فلو ضربت هذه دودها تين المتناسبتين بالترتيب لحدث

ا-هـ × ا-ح : ا-هـ × ا-د :: ا-ب × ا-د : ا-ب × ا-هـ
وبقسمة حتى النسبة الاولى على المضروب المشترك ا-هـ يصير
ا-ب : ا-د :: ا-ب × ا-د : ا-د × ا-هـ وهو المطلوب
(نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية ان المثلثين المذكورين يكونان متكافئين اذا كان
المستطيل ا-ب × ا-ح مساويا للمستطيل ا-د × ا-هـ أو اذا كانت
ا-ب : ا-د :: ا-ب : ا-هـ وهذا انما يتأتى اذا كان الخط د-هـ
موازيا للخط ا-هـ

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية شكل ١٢٢)

نسبة المثلثين المتشابهين الى بعضهما ما كنسبة مربع ضلع من أحدهما
لمربع نظيره

أى ان المثلث ا-ب-ح : المثلث د-هـ-و :: ا-ب : د-هـ
(برهانها) أن يقال يلزم من كون المثلث ا-ب-ح مشابها للمثلث د-هـ-و
أن تكون الزاوية ا = د والزاوية ب = هـ والزاوية ج = و
ويلزم من كون الزاوية ا = د أن يكون

ا-ب : د-هـ :: ا-ح : د-و :: د-هـ × ا-ح : د-و × ا-ب
كما نقرر ذلك في النظرية المتقدمة وهذه المناسبة يمكن وضعها بهذه الصورة

$$\frac{ا-ب}{د-هـ} \times \frac{ا-ح}{د-و} = \frac{ا-ح}{د-و}$$

ويلزم من كون المثلث ا-ب-ح مشابها للمثلث د-هـ-و ان يكون

$$\frac{ا-ب}{د-هـ} = \frac{ا-ح}{د-و}$$

فاذن يكون

$$\frac{ا-ب}{د-هـ} = \frac{ا-ح}{د-و} \times \frac{ا-ح}{د-و} = \frac{ا-ح}{د-و}$$

(تعريف شكل ١٢٩ الثانى) *

كثيرا الاضلاع المتشابهة ان شكلان مركبان من مثلثات متشابهة بالتناظر

ومتماثلة الوضع ومتحدة العدد فاذا علم كثيرا الاضلاع مثل $ا د ه$ أمكن دائما رسم شكل آخر يكون مشابها له لانه لو وصل القطران $ا ح$ و $ا د$ من النقطة $ا$ ومد من نقطة ما مثل $س$ من نقط الضلع $ا ب$ أو من نقط استقامته $س ح$ موازيا للضلع $د ح$ ثم $د ك$ موازيا للضلع $ه د$ ثم $د ه$ موازيا للضلع $د ه$ وهكذا يظهر أن الشكلي $ا د ه$ و $ا س ح د ه$ مركبان من مثلثات متحدة العدد ومتشابهة ومتماثلة الوضع
 * (الدعوى السادسة والعشرون النظرية شكل ١٢٩) *

كثيرا الاضلاع المتشابه ان زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما المتناظرة متناسبة

(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من تشابه المثلثات المتناظرة أن تكون الزاوية $ر ع و = ر ح ا$

والزاوية $و ح ط = ا د ه$ فاذن تكون الزاوية $ر ح ط = ر د ه$ وهكذا

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من تشابه المثلثات المذكورة أن تكون

و ر : ا - :: ر ع : ر ح :: و ح : ا د :: ح ط : د ه
 :: و ط : ا ه :: ط ع : د ه :: و ع : ا ه

وينتج من تساوى هذه النسب أن

و ر : ا - :: ر ع : ر ح :: ح ط : د ه :: ط ع : د ه
 :: و ع : ا ه وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن الاضلاع المتناسبة في كثيرى الاضلاع المتشابهين هي المحيطة بالزوايا المتساوية ويقال لهما اضلاع متناظرة والرؤس المتناظرة هي رؤس الزوايا المتساوية

*(الدعوى

* (الدعوى السابعة والعشرون النظرية شكل ١٢٩) *

كثيرا الاضلاع اللذان زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما المتناظرة متساوية. متشابهان أعني انهما يتركان من مثلثات متناظرة متشابهة ومتماثلة الوضع

(برهانها) أن يقال لو وصل من رأسين متناظرتين مثل $ا$ و $و$ أنظار مثل $ا ح$ و $ا د$ و $و ح$ و $و ط$ لكان المثلث $ا ح د$ مشابها للمثلث $و ح ط$ لان الزاوية $ا ح د = و ح ط$ بالفرض وأيضا $ا ح : و ح :: ح د : ح ط$ وقد تقرر في النظرية الحادية والعشرين أن المثلثين اللذين بهما المثلثان متشابهان ويلزم من تشابههما أن تكون الزاوية $ا ح د$ مساوية للزاوية $و ح ط$ فاذا طرحنا الزاوية $ا ح د$ من الزاوية $ا ح د$ والزاوية $و ح ط$ من الزاوية $و ح ط$ المساوية للزاوية $ا ح د$ كانت الزاوية $ا ح د$ مساوية للزاوية $و ح ط$ لكن حيث أن المثلثين $ا ح د$ و $و ح ط$ متشابهان تكون

$$ا ح : و ح :: ح د : ح ط$$

وقد فرضنا أن

$$ا ح : و ح :: ح د : ح ط$$

فاذن يكون

$$ا ح : و ح :: ح د : ح ط$$

وقد اتضح ان الزاوية $ا ح د = و ح ط$ فاذن يكون المثلث $ا ح د$ مشابها للمثلث $و ح ط$ وبمثل هذا يبرهن على أن المثلث $ا ه د$ مشابه للمثلث $و ح ط$ وكذا البواقي كما انما كان عدد الاضلاع في كثيرى الاضلاع المقروطين

* (الدعوى الثامنة والعشرون النظرية شكل ١٢٩) *

النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين

والنسبة بين سطحهما كالنسبة بين مربعي ضلعيهما متناظرين
(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من تشابه الشكلين أن يكون

$$ا - : ور :: ح - : رح :: ح د : ح ط الخ$$

وقد تقرر في علم الحساب أن نسبة مجموع المقدمات الى مجموع التاليات
كنسبة أحد المقدمات الى تاليه فان يكون

$$ا - + ح - + ح د + الخ : ور + رح + ح ط +$$

$$الخ :: ا - : ور$$

وحيث ان ا - + ح - + ح د + الخ يساوى محيط الشكل
ا - ح د ه و ور + رح + ح ط + الخ يساوى محيط
الشكل ور ح ط ع ينتج أن

محيط الشكل ا - ح د ه : محيط الشكل ور ح ط ع :: ا -
: ور وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من كون المثلث ا - ح مشابها
للمثلث ور ح أن يكون

$$ا - ح : ور ح :: ا ح : و ح$$

وكذا يلزم من تشابه المثلثين ا ح د و و ح ط ان يكون

$$ا ح د : و ح ط :: ا ح : و ح$$

ويلزم من اشتراك النسبة الثانية في هاتين المتناسبتين أن يكون

$$ا - ح : ور ح :: ا ح د : و ح ط$$

وبمثل هذا يبرهن على أن

$$ا ح د : و ح ط :: ا ه د : و ع ط$$

فينتج من تساوى هذه النسب أن مجموع المقدمات الى مجموع التاليات
كنسبة مقدم الى تاليه أى ان

$$ا - ح + ا ح د + ا ه د : ور ح + و ح ط + و ع ط :: ا - ح$$

$$: ور$$

وحيث

وحيث ان $ا-ح + ا-د + ا-ه$ يساوى الشكل $ا-د-ه$
 و $د-ر-ح + د-ط + د-ع$ يساوى الشكل $د-ر-ط-ع$
 ينتج أن

الشكل $ا-د-ه$: الشكل $د-ر-ط-ع$:: $ا-ح$: $د-ر$
 وقد تقرر أن

$$ا-ح : د-ر :: ا-د : د-ر$$

فاذن يكون

الشكل $ا-د-ه$: الشكل $د-ر-ط-ع$:: $ا-د$: $د-ر$
 وهو المطلوب

* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية انه اذا انشئت ثلاثة اشكال متشابهة اضلاعها المتناظرة
 مساوية لاضلاع مثلث قائم الزاوية يكون الشكل المنشأ على الضلع الاكبر
 مساويا لمجموع الشكلين الاخرين لان هذه الاشكال الثلاثة مناسبة
 لمربعات اضلاعها المتناظرة وحيث كان مربع الوتر مساويا لمجموع المربعين
 المنشأين على الضلعين الاخرين ينتج من ذلك ان الشكل المنشأ على الضلع
 الاكبر مساو لمجموع الشكلين الاخرين

* (الدعوى التاسعة والعشرون النظرية شكل ١٣٠) *

الوتران مثل $ا-و$ و $د-ه$ المتقاطعان في دائرة جزأ أحدهما مناسباً
 لعكس جزئى الآخر أعنى أن

$$ا-ه : د-ه :: د-ح : ه-د$$

(برهانها) أن يقال لو وصل $د-و$ و $ا-ح$ ليكن المثلثان الحادثان
 $ا-د-و$ و $د-ه-و$ متشابهين لان الزاوية $ه$ مشتركة والزاوية $ا = د$
 لوقوعهما في قطعة واحدة والزاوية $د = ه$ كذلك ويلزم من تشابه
 هذين المثلثين أن يكون

أه : د ه :: د ه : ه ه وهو المطلوب
* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية أن

$$أه \times د ه = د ه \times ه ه$$

والمعنى أن المستطيل المكوّن من جزئى أحد الوترين يكافئ المستطيل المكوّن من جزئى الوتر الآخر

* (الدعوى الثلاثون النظرية شكل ١٣١) *

إذا أخذت نقطة مثل ه خارج الدائرة ومدّتها فقاطعان مثل ه ه
و ه ه حتى انتهيا بالقوس المقعر ه ه فالقاطعان الكاملان يكونان
مناسبين بعكس جرتيهما الخارجيتين أعني يكون

$$ه ه : ه ه :: ه ه : ه ه$$

(برهانها) أن يقال لو وصل أ ه و ه ه كان المثلثان الحادثان ه ه ه
و ه ه ه متشابهين لأن الزاوية ه ه مشتركة والزاوية ه ه = ه ه
لوقوعهما فى قطعة واحدة وينتج من تشابههما أن

$$ه ه : ه ه :: ه ه : ه ه ! وهو المطلوب$$

* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية أن

$$ه ه \times ه ه = ه ه \times ه ه$$

والمعنى أن المستطيل المكوّن من أحد القاطعين وجزئته الخارج عن الدائرة
يكافئ المستطيل المكوّن من القاطع الآخر وجزئته كذلك

* (الدعوى الحادية والثلاثون النظرية شكل ١٣١ الثانى)

إذا وجدت أربع نقط مثل ه ه و ه و ه ه على مستقيمين
متقاطعين مثل أ ه و ه ه وكان أ ه ه ه = أ ه ه ه
كانت هذه النقط على محيط دائرة واحدة

(برهانها) أن يقال لرفرض أن المحيط الذى يمر بالنقط ه ه و ه ه و ه ه

يقطع

يقطع الخط $ا ه$ في نقطة أخرى غير النقطة $ه$ كالنقطة $م$ من اللازم أن يكون

$$ا - ا ه = ا ه \times ا م$$

والمفروض أن

$$ا - ا ه = ا ه \times ا ه$$

فينتج من هاتين المعادلتين أن

$$ا م \times ا ه = ا ه \times ا ه \text{ وهو محال}$$

فإذن تكون النقطة $ه$ على المحيط المار بالنقطة $و ب و د$ وهو المطلوب

* (الدعوى الثانية والثلاثون النظرية شكل ١٢٢) *

إذا أخذت نقطة مثل $ه$ خارج دائرة ومد منها مماسة تقسم مماس مثل $ها$ واخر قاطع مثل $ه د$ كان المماس وسطا متناسبا بين القاطع وجزئه الخارج أعنى أن

$$ه د : ه ا :: ه ا : ه د$$

(برهانها) أن يقال لو وصل المستقيمان $ا د$ و $ا ه$ لكان المثلثان الحادئان $ه ا د$ و $ه ا ه$ متشابهين لان الزاوية $ه$ مشتركة والزاوية $ه ا د$ الواقعة بين المماس $ها$ والوتر $ا د$ مساوية للزاوية $ه د ه$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$ه د : ه ا :: ه ا : ه د \text{ وهو المطلوب}$$

* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية أن مربع الخط المماس يكافئ المستطيل المكوّن من الخط القاطع ومن جزئه الخارج أعنى أن

$$ه ا^2 = ه د \times ه د$$

* (الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية شكل ١٢٣) *

إذا نصفت زاوية مثلث بمستقيم فالمستطيل المكوّن من ضلعيها

يساوي المستطيل المكون من قسمي المضلع المقابل لها زائدا مربع المستقيم
المنصف لها

أى اذا نصفت زاوية مثل $\angle$ من مثلث مثل $\triangle$ بمسـتقيم مثل
 $\angle$ كان

$$\angle \times \angle = \angle \times \angle + \angle^2$$

(برهانها) أن يقال لو رسم محيط دائرة ماز برؤس زوايا المثلث $\triangle$ ومد
الخط $\angle$ جهة $\angle$ حتى انتهى الى محيط الدائرة فى نقطة مثل $\angle$ ووصل
 $\angle$ الى $\angle$ المثلث الحادث $\angle$ مشابها للمثلث $\triangle$ لانه يلزم من
كون الزاوية $\angle$ مساوية للزاوية $\angle$ بالفرض والزاوية $\angle$
مساوية للزاوية $\angle$ لوقوعهما فى قطعة واحدة أن يكون المثلثان
الذى كوران متشابهين ويلزم من تشابههما أن تكون اضلاعهما المتناظرة
متناسبة أى يكون

$$\angle : \angle :: \angle : \angle$$

فينتج من هذه المناسبة أن

$$\angle \times \angle = \angle \times \angle$$

اكن $\angle = \angle + \angle$ فاذا ضرب كل من حدود هذه المعادلة
فى $\angle$ يكون

$$\angle \times \angle = \angle \times \angle + \angle^2$$

ويلزم من كون

$$\angle \times \angle = \angle \times \angle$$

أن يكون

$$\angle \times \angle = \angle \times \angle + \angle^2 \text{ وهو المطلوب}$$

(الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية شكل ١٣٤) *

المستطيل المكون من ضلعي مثلث يكافئ المستطيل المكون من الارتفاع المنزل
على ضلعه الثالث ومن قطر الدائرة المرسومة على المثلث الذى كور

أى ان المستطيل المكون من ضلعين مثل $ا - و$ و $ا د$ من مثلث مثل
 $ا - د$ يكافئ المستطيل المكون من الارتفاع $ا د$ المنزل على ضلعه
 الثالث $د - و$ ومن قطر الدائرة $د ه$ المرسومة على المثلث المذكور
 أعنى ان

$$ا - د \times ا د = ا د \times د ه$$

(برهانها) أن يقال لو وصل $ا ه$ لكان المثلث $ا - د$ القائم الزاوية
 فى $د$ مشابها للمثلث $ا ه د$ القائم الزاوية فى $ا$ لان الزاوية $ه$
 $=$ $د$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$ا - د : د ه :: ا د : د ه$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$ا - د \times ا د = ا د \times د ه \quad (١)$$

وهو المطلوب

(نتيجة)*

اذا ضرب كل من طرفى المعادلة (١) فى $د - و$ أى الضام الثالث من
 المثلث حدث

$$ا - د \times ا د \times د ه = د - و \times ا د \times د ه$$

وحيث ان مساحة المستطيل المكون من $ا د$ و $د - و$ تساوى ضعف
 مساحة المثلث $ا - د$ بعلم من ذلك انه اذا ضربت اضلاع مثلث فى بعضها
 كان حاصل الضرب مساويا لضعف مساحة المثلث مضروبة فى قطر دائرة
 المحيط المارة برؤوسه

واعلم أن حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة يسمى فى بعض الاحيان مساحة
 جسمية وسيأتى بيانه فى المقالة السادسة

(تنبيه)*

اعلم انه يمكن أن يبرهن أيضا على أن مساحة المثلث تساوى محيطه أى مجموع
 اضلاعه مضروبا فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله انظر (شكل ٨٧ من

(اللوحة ٤)

لان كلامن ارتفاعات المثلثات $أح - و - س$ و $أح - و - س$ المشتركة في الرأس $ح$ يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث $أ - ح - و$ فينبذ يكون مجموع هذه المثلثات مساويا لمجموع القواعد $س - و - س$ و $أ - ح - و$ مضروباً في نصف نصف القطر $ح - د$ أى في ربع الفطرة قد ثبت بهذا أن مساحة المثلث $أ - ح - و$ تساوى محيطه مضروباً في ربع قطر الدائرة المرسومة داخله و هو المطلوب

(الدعوى الخامسة والثلاثون النظرية شكل ١٣٥)

المستطيل المكوّن من قطري شكل رباعي مرسوم داخل دائرة يساوى مجموع مستطيلي اضلاعه المتقابلة أعنى أن

$$أ د \times ح و = أ ح \times د و + أ د \times ح و$$

(برهانها) أن يؤخذ القوس $هـ هـ =$ للقوس $أ د$ ويوصل $هـ هـ$ الذى يقطع القطر $أ - ح$ في $و$ فيكون المثلث الحادث $أ - ح - و$ ومثابها للمثلث $أ - د - و$ لانه يلزم من كون القوس $هـ هـ$ مساويا للقوس $أ د$ أن تكون الزاوية $ح - هـ - و$ أو $ح - و - هـ$ مساوية للزاوية $أ - د - و$ وأيضا الزاوية $أ - د - ح = أ - ح - و$ أو $و - ح - د$ لوقوعهما في قطعة واحدة فاذن يكون المثلث $أ - ح - و$ ومثابه للمثلث $أ - د - و$ ويلزم من كونهما متشابهين أن يكون

$$أ د : ح و :: د و : ح د$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$أ د \times ح د = ح و \times د و + أ د \times ح و \quad (١)$$

ولنبرهن الآن على أن المثلث $أ - ح - و$ ومثابه للمثلث $أ - د - و$ فنقول حيث كان القوس $أ د$ مساويا للقوس $هـ هـ$ يكون

$$أ د + د هـ = ح د + د هـ \text{ أى } أ هـ = ح د$$

فاذن تكون الزاوية $أ - هـ - و$ أو $أ - و - هـ$ مساوية للزاوية $د - ح - و$

وايضا

وأيضاً الزاوية $\angle ا د = \angle د د$ لوقوعهما في قطعة واحدة فينثب
يكون المثلث $ا د د$ مشابهاً للمثلث $د د د$ وينتج من تشابههما أن

$$ا - د : د :: د : د$$

وينتج من هذه التناسبة أن

$$ا - د \times د = د \times د \quad (٢)$$

فإذا جمعت هذه المعادلة (٢) الى المعادلة (١) حدث

$$ا د \times د - ا - د \times د = د \times د - د \times د + د \times د + د \times د$$

$$= (ا د + د) \times د = د \times ا د \text{ وهو المطلوب}$$

* (الدعوى السادسة والمثلثون النظرية شكل ١٣٥) *

نسبة احد قطري الشكل الرباعي المرسوم داخل دائرة الى قطره الاخر
كنسبة مجموع المستطيلين المكونين من الاضلاع المتصلة المارة بنهايتي القطر
الاول الى مجموع المستطيلين المكونين من الاضلاع المتصلة المارة بنهايتي
القطر الاخر اعني أن

$$ا د : د :: ا د \times د + ا د \times د : ا - د \times د + ا د \times د$$

(برهانها) أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المرسومة على الشكل ثم
يقال حيث ان الشكل الرباعي $ا د د$ منقسم بالقطر $ا د$ الى المثلثين
 $ا - د$ و $ا د د$ يكون

$$ا - د \times د + ا د \times د = ا د \times د \text{ نق } (كما تقرر في نتيجة النظرية ٣٤)$$

وأيضاً يكون

$$ا د \times د + ا د \times د = ا د \times د \text{ نق } \text{ وبالجمع يكون}$$

$$ا د \times (ا - د + د) = ا د \times د \text{ نق } \text{ ا - د}$$

وحيث ان الشكل الرباعي منقسم بالقطر $د د$ الى المثلثين $ا - د$
و $د د د$ يكون

$$د \times (ا - د + د) = د \times د \text{ نق } \text{ ا - د}$$

فحينئذ يكون

$$\begin{aligned} \angle \alpha &= (\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma) \times \alpha \\ (\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma) & \text{ ويلزم من هذا أن يكون } \\ \alpha : \beta : \gamma &:: \alpha \times \beta + \beta \times \gamma + \gamma \times \alpha : \alpha \times \beta + \beta \times \gamma + \gamma \times \alpha \\ &+ \alpha \times \beta \text{ وهو المطلوب} \end{aligned}$$

• (الدعوى السابعة والثلاثون النظرية شكل ٣ من اللوحة ١٧) •
إذا سويت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر وكانت إحدى الزاويتين
الباقيتين من المثلث الأول متممة لنظيرتها من المثلث الآخر كانت النسبة
بين الضلعين المقابلين للزاويتين المتساويتين كالنسبة بين الضلعين المقابلين
للزاويتين المتممتين لبعضهما

أي إذا سويت زاوية مثل $\angle \alpha$ من مثلث مثل $\angle \alpha$ نظيرتها مثل
 $\angle \alpha$ من مثلث مثل $\angle \alpha$ وكانت إحدى الزاويتين الباقيتين من
المثلث الأول مثل الزاوية $\angle \alpha$ متممة لنظيرتها مثل الزاوية $\angle \alpha$
يكون

$$\alpha : \beta : \gamma :: \alpha : \beta : \gamma$$

(برهانها) أن يقال لو وضع المثلثان كما هو مبين في (الشكل ٣ من اللوحة
١٧) ومد الضلع α على استقامة جهة β حتى قطع الضلع α
في و لحدث

$$\alpha : \beta : \gamma :: \alpha : \beta : \gamma$$

لأن الخط α منصف للزاوية α وقد تنقز في النظرية السابعة عشر
أن الخط المنصف لزاوية من مثلث يقسم الضلع المقابل لها إلى قسمين مناسبين
للضلعين المحيطين بها وحيث كانت الزاوية α متممة للزاوية α
وللزاوية α و تكون الزاوية α مساوية للزاوية α ويلزم من
هذا أن يكون الخط α موازيا للخط α كما تنقز ذلك في المقالة
الأولى

ويلزم

ويلزم من توازيهما أن تكون الزاوية α و γ مساوية للزاوية α هـ δ
فاذن يكون

$$\alpha : \alpha \text{ هـ} :: \gamma : \gamma \text{ هـ}$$

فاذا ضرب كل حد من هذه النسبة في نظيره من النسبة السابقة يحدث
 $\alpha \times \alpha : \alpha \times \alpha \text{ هـ} :: \gamma \times \gamma : \gamma \times \gamma \text{ هـ}$
وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك α و حدى النسبة
الثانية على المضروب المشترك γ و يكون

$$\alpha : \alpha \text{ هـ} :: \gamma : \gamma \text{ هـ} \text{ أو}$$

$$\gamma : \gamma \text{ هـ} :: \alpha : \alpha \text{ هـ} \text{ وهو المطلوب}$$

* (الدعوى الثامنة والثلاثون النظرية شكل ٤ من اللوحة ١٧) *
اذا تمت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر كانت النسبة بين هذين
المثلثين كالنسبة بين المستطيلين المكونين من الاضلاع المحيطة بالزاويتين
المذكورتين فاذا كانت الزاوية هـ α متممة للزاوية α هـ يكون

$$\alpha : \alpha \text{ هـ} :: \alpha : \alpha \text{ هـ} : \alpha \times \alpha \text{ هـ}$$

(برهانها) أن يوضع المثلثان كما هو مبين في (الشكل ٤ من اللوحة ١٧)
ثم يوصل γ فيحدث

$$\alpha : \alpha \text{ هـ} :: \alpha : \alpha \text{ هـ} : \alpha \times \alpha \text{ هـ}$$

$$\alpha : \alpha \text{ هـ} :: \alpha : \alpha \text{ هـ} : \alpha \times \alpha \text{ هـ}$$

فاذا ضربت الحدود المتناظرة في بعضها حدث

$$\alpha \times \alpha : \alpha \times \alpha \text{ هـ} :: \alpha \times \alpha : \alpha \times \alpha \text{ هـ}$$

وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك α يكون

$$\alpha : \alpha \text{ هـ} :: \alpha : \alpha \text{ هـ} : \alpha \times \alpha \text{ هـ}$$

وهو المطلوب

* (الدعوى التاسعة والثلاثون النظرية شكل ٥ من اللوحة ١٧) *
قطر الشكل الرباعي المرسوم على الدائرة يتقاطعان في نقطة تقاطع المستقيمين

الموصولين بين نقط تماس اضلاعه المتقابلة
(برهانها) أن يوصل القطر ه ر والمستقيمان ا ح و س و ثم يبحث
عن النسبة الكائنة بين البعدين ه ط و ر ط اللذين هما بعدا نقطة
تقاطع المستقيمين ه ر و س عن النقطتين ه و ر ثم يبحث أيضا
عن النسبة الكائنة بين البعدين ه ط و ر ط اللذين هما بعدا نقطة
تقاطع المستقيمين ه ر و ا ح عن النقطتين المذكورتين ه و ر
بان يقال حيث ان في المثلثين س ط ه و ر ط ر زاوية س ط ه =
زاوية ر ط و وان الزاوية ه س ط متممة للزاوية ط ر س يكون
ه س : د ر :: ه ط : ط ر (كأن تقو بذلك في النظرية السادسة
والثلاثين)

ويحدث أيضا من المثلثين ا ط ه و ر ط ر أن

$$ا ه : ح ر :: ه ط : ط ر$$

وحيث تقر في المقالة الثانية أن

$$ا ه = ه س و ح ر = ر س$$

يعلم من ذلك أن

$$ه ط : ط ر :: ه ط : ط ر$$

وأن النقطة ط هي النقطة ط بعينها وأن القطر ه ر يمر بنقطة
تقاطع المستقيمين س و ا ح
وبمثل هذا يبرهن على أن القطر ح و يمر أيضا بنقطة تقاطع المستقيمين
المذكورين س و ا ح

فقد ثبت بهذا أن الخطوط المستقيمة الاربعة وهي ه ر و ح و و ا ح
و س تتقاطع في نقطة واحدة وهو المطلوب

* (الدعوى الاربعون النظرية شكل ٦ من اللوحة ١٧) *

اذا وقعت نقطة مثل ح على مستقيم معلوم مثل ا س وكانت ا ح : ح ر

م : م : د وكانت نقطة أخرى مثل د على استقامته وكان أيضا

ا د : د : م : م : د

كانت النسبة بين أى مستقيمين موصولين من النقطتين ا و د الى أى
قطعة من نقط المحيط الذى قطره د ثابتة ومساوية لنسبة م : د
(برهانها) أن يقال يلزم من كون

ا د : د : م : م : د

أن يكون

ا د : ا د : د : د : م : م : د

م : م : د

لانه قد تقرر في علم الحساب أن نسبة مجموع المقدمين الى مجموع التالين
كنسبة فاضل المقدمين الى فاضل التالين فاذا رمزنا بالحرف و لمركز
الدائرة حدث

ا و : ا و : د و : د و : م : م : د

وبقسمة حدود النسبتين الاوليين على ا و ابدال د و بمساويه ك و
تؤول هذه المتناسبة الى

ا و : ك و : د و : م : م : د

فاذن يكون المثلث ا ك و مشابها للمثلث د ك و ويلزم من تشابههما
أن يكون

ا ك : د ك : ا و : د و : م : م : د

وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية انه لو وصل الخط ك د لانقسمت الزاوية ا ك د الى
قسمين متساويين ولو وصل الخط ك د لانقسمت الزاوية د ك ه الى
قسمين متساويين كذلك

(تنبيهات)

* (التنبيه الاول في تعاريف لازمة) *

اذا قسم مستقيم مثل $ا$ الى جزئين مثل $ا$ و $و$ كما في الشكل ٧ من اللوحة ١٧ باى كيفية كانت سمى هذان الجزآن بقسمى المستقيم $ا$ و أيضا اذا أخذت نقطة مثل $د$ على استقامة $ا$ فالجزآن $ا$ و $د$ يسمىان أيضا بقسمى المستقيم $ا$ وقسمي الحالة الاولى أى التى فيها نقطة التقسيم موضوعة بين النقطتين $ا$ و $و$ يميزان بالقسمين الجعيين وقسمي الحالة الثانية أى التى فيها النقطة المذكورة على استقامة $ا$ لا بين طرفيه يميزان بالقسمين الطرفيين فلو قسم المستقيم $ا$ فى نقطة $و$ بحيث يكون $ا : و :: د : م$ وتحصل أيضا من تعيين النقطة $د$ عليه متناسبة بهذه الصورة $ا : د :: و : م$: $د$ كان المستقيم $ا$ متوافق التقسيم فى النقطتين $و$ و $د$ وكانت النقطتان $و$ و $د$ متوافقتى الاقتران بالنسبة للمستقيم $ا$ ولاشترال هذه النسبة $م : د$ فى المتناسبتين السابقتين يكون

$$ا : د :: و : م$$

وبتغيير محل الوسطين يكون

$$ا : و :: د : م \quad (١)$$

ويعلم من هذه المتناسبة أن الخط $و$ متوافق التقسيم أيضا فى النقطتين $و$ و $ا$ وأن النقطتين $و$ و $ا$ متوافقتا الاقتران فى الخط $و$ و اذا سوى حاصل ضرب طرفى المتناسبة (١) بحاصل ضرب وسطيهما حدث

$$ا : و :: د : م \Rightarrow ا \times و = و \times د$$

ويعلم من هذه المعادلة انه اذا كان المستقيم متوافق التقسيم كان حاصل ضرب الخط الكلى فى جزئه المتوسط مساويا لحاصل ضرب جزئيه المتطرفين واذا نظر للخط $و$ الذى هو قطر الدائرة المرسومة فى الشكل ٩ من

اللوحة

اللوحة ١٧ يرى انه متوافق التقسيم في النقطتين δ و α وأن
النقطتين δ و γ أيضا متوافقتا الاقتران في الخط α -
وبالجملة فالمستقيم المنصف لزاوية مثلث والمستقيم المنصف لمجاورتها يجعلان
المضلع المقابل لهما متوافق التقسيم

(التنبيه الثاني)

اذا علمت نقطة مثل α على قطر دائرة مثل القطر $\delta\gamma$ (كما في الشكل ٦
من اللوحة ١٧) وكان المطلوب إيجاد النقطة المتوافقة الاقتران بها
في الخط $\delta\gamma$ فطريقة ذلك أن يوصل مستقيمان من نقطة من المحيط
مثل κ الى النقطتين α و γ ثم تنسأ زاوية $\delta\kappa\alpha = \alpha\kappa\gamma$
فتكون النقطة δ متوافقة الاقتران بالنقطة α وبمثل هذه العملية
تعيين النقطة α اذا كانت النقطة δ معلومة .

(التنبيه الثالث)

يمكن أيضا إيجاد النقطة δ بان يمد من النقطة α المماس $\alpha\epsilon$ ثم ينزل
من النقطة ϵ عمود على القطر $\delta\gamma$ فيقطع في النقطة المطلوبة
لانه لو وصل $\epsilon\delta$ لكانت الزاوية $\alpha\epsilon\delta = \delta$ للزاوية $\delta\epsilon\gamma$ كما
تقرر ذلك في المقالة الثانية

(الدعوى الحادية والاربعون النظرية شكل ٨ من اللوحة ١٧)
اذا أخذت نقطة مثل γ في مستوى مثلث مثل $\alpha\beta\delta$ وانزل منها اعمدة
مثل $\gamma\delta$ و $\gamma\epsilon$ و $\gamma\zeta$ على اضلاعه $\delta\alpha$ و $\alpha\beta$ و $\beta\delta$
كان مجموع مربعات الاجزاء الثلاثة غير المتجاورة مثل $\delta\epsilon$ و $\delta\zeta$
و $\alpha\zeta$ مساويا لمجموع مربعات الاجزاء الثلاثة الاخرى هي $\alpha\delta$ و $\beta\delta$
و $\alpha\beta$ أعني أن

$$\delta\epsilon^2 + \delta\zeta^2 + \alpha\zeta^2 = \alpha\delta^2 + \beta\delta^2 + \alpha\beta^2$$

(برهانها) أن يقال لو وصل $\gamma\alpha$ لحدث

فالأعداد المقامة على اضلاع المثلث من النقط $د$ و $هـ$ و $و$ تتقاطع في نقطة واحدة

لانه ان قيل قد لا تتقاطع في نقطة واحدة يقال لو انزل من النقطة $ح$ التي هي تقاطع المودين $ح د$ و $ح هـ$ عمود على $ا ب$ لقطعه في $و$ ويلزم من هذا أن يكون

$$د هـ + د و + ا و = ا هـ + ا د + ا و$$

فلو طرحت هذه المعادلة من المعادلة المفروضة لحدث

$$ا و - ا د = د و - د هـ$$

$$ا و + ا د = د و + د هـ$$

وهذه معادلة محالة لان $ا و$ أصغر من $ا د$ و $د و$ أصغر من $د هـ$

(التنبية الثاني)

اعلم أن هذه النظرية يمكن تطبيقها على الشكل الرباعي وعلى أى مضلع مستو وأما ما ذكر في التنبية الأول فلا يتأتى الا في المثلث فقط

(الدعوى الثانية والاربعون النظرية شكل ٩ من اللوحة ١٧)

اذا قطع مثلث مثل $ا ب ح$ بقاطع مثل $د هـ$ حدث

$$ا و \times د هـ = د و \times ا هـ$$

(برهانها) أن يقال لو متعن النقطة $د$ مستقيم مثل $د هـ$ يوازي $ا ب$ لحدث

$$ا و : د و :: ا هـ : د هـ$$

$$د و : د هـ :: د هـ : د هـ$$

وقد تقر في علم الحساب انه اذا ضربت حدود متناسبة هندسية في نظائرها من متناسبة أخرى كانت الحواصل الناتجة متناسبة فاذا يكون

$$ا و \times د هـ : د و \times ا هـ :: د هـ : د هـ$$

وبقسمة حذى النسبة النائية على المضروب المشترك - ثى يكون

$$أ و \times س د : - و \times دى :: أ ه : ح ه$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$أ و \times س د \times ح ه = - و \times دى \times أ ه$$

وهو المطلوب

* (تنبيه)

اعلم أن هذه النظرية صحيحة ولو قطع ه و امتدادات الاضلاع ا ح

و ح - و ا - وليس هناك حالة أخرى

* (الدعوى الثالثة والاربعون النظرية شكل ١٠ من اللوحة ١٧)

إذا أخذت نقطة مثل ح فى مستوى مثلث مثل ا - ح ووصل منها

لرؤسه ا و - و ح خطوط مستقيمة ح ا و ح - و ح و

ومدت حتى قطعت اضلاع المثلث فى نقط مثل د و ه و و حدث

$$أ و \times س د \times ح ه = - و \times دى \times أ ه$$

(برهانها) أن يقال يلزم من كون المثلث ا - د س مقطوعا بالقاطع ح و

أن يكون

$$أ و \times ح - \times دى = - و \times دى \times أ ح$$

ومن كون المثلث ا د ح مقطوعا بالقاطع ح ه أن يكون

$$ح ه \times س د \times أ ح = أ ه \times ح - \times دى$$

فلو ضربت هاتان المعادلتان واختصرت حدود حاصل الضرب لحدث

$$أ و \times س د \times ح ه = - و \times دى \times أ ه$$

وهو المطلوب

* (تنبيهان)

الاول يمكن أن يبرهن على صحة هذه النظرية بطرق أخرى لا نبين على النظرية

السابقة

وبيان ذلك أن يقال لو مدت من النقطة ه مستقيم ه - يوازي ح -

ومستقيم

ومستقيم ه ك يوازي ا ب لحدث عنهما متناسبات وجبت كان

للمثلثين ا ب د و ا د ح ارتفاع مشترك يكون

$$س : ا ب د :: س : ا د ح$$

وبلزم من اشتراك الارتفاع في المثلثين س ح د و ح د د أن يكون

$$س ح د : س د د :: س د د : س د د$$

فينتج من ذلك أن

$$ا ب د : س د د :: س د د : س د د$$

وبمثل هذا يبرهن على أن

$$س ح د : ا ب د :: س د د : ا ه د$$

$$ا ب د : س د د :: ا د ح : ا د د$$

فلوضربت حدود هذه المتناسبات بالترتيب لحدث

$$ا ب د \times س ح د \times ا د ح : ا ب د \times ا د ح \times س د د = س ح د \times ا د د \times ا ب د$$

$$:: س د د \times ا ه د \times ا د د : ا د د \times ا ه د \times س د د$$

وبلزم من كون ا ب د س ح د د ا د ح = ا ب د س د د ا د د

أن يكون

$$س د د \times ا ه د \times ا د د = ا د د \times ا ه د \times س د د$$

وهو المطلوب

(التنبية الثاني)

اعلم أن هذه النظرية صحيحة ولو كانت النقطة ح خارجة عن المثلث

وفي هذه الحالة توجد احدى نقط التقاطع على أحد اضلاع المثلث والنقطة ا ب

الاخرى ا د على امتداد الضلعين الاخرين كما هو مبين في الشكل ١٠

الثاني و ١٠ الثالث من اللوحة ١٧

(الدعوى الرابعة والاربعون النظرية)

اذا قسمت اضلاع مثلث بثلاث نقط وكان حاصل ضرب الاجزاء الثلاثة غير

المجاورة مساويا لحاصل ضرب الاجزاء الثلاثة الاخرى كانت النقط الثلاث

على مستقيم واحد واذا وصل من تلك النقطة الى رؤس المثلث خطوط مستقيمة تقاطعت هذه الخطوط في نقطة واحدة فالخاصية الاولى تقع عندما يكون عدد النقط المفروضة على اضلاع المثلث عددا زوجيا وعدد النقط المفروضة على امتداداتها عددا فرديا والخاصية الثانية تقع عندما يكون عدد النقط المفروضة على اضلاع المثلث عددا فرديا وعدد النقط المفروضة على امتداداتها عددا زوجيا

(وبرهان) هذه النظرية كما مقرّر في النظرية الحادية والاربعين فتأمل

* (تنبيهان) *

الاول اعلم أن السبب الموجب لتقرير هذه النظريات هنا هو كثرة استعمالها في البرهنة على كثير من النظريات المهمة وحل كثير من العمليات

* (التنبيه الثاني) *

اعلم أن من النظريات المقررة في ملحقات المقالة الاولى ما يمكن البرهنة عليه بواسطة ما تقرّر في التنبيه الاول من النظرية الحادية والاربعين وهي نظرية ٣٣ ونظرية ٣٤ ومنها ما يمكن البرهنة عليه بواسطة النظرية الرابعة والاربعين التي نحن بصدد ها وهي نظرية ٣٢ ونظرية ٣٥ لكن المقصود من وضع النظريات في الملحقات البرهنة عليها بواسطة نظريات مقررة في مقالة تلك الملحقات فقط

* (الدعوى الخامسة والاربعون النظرية شكل ١١ من اللوحة ١٧) *

اذا أخرجت أربعة خطوط مستقيمة مثل $a - b$ و $a - c$ و $a - d$ و $a - e$ من نقطة واحدة مثل a وقطعت مستقيما مثل $b - c$ في نقط مثل

$b - d$ و $c - d$ و $d - e$ وكان

$b - c :: d - e :: c - d$

فهذه الخطوط تقسم أي خط مستقيم قطعتة الى أقسام بواقعية سواء كان

ذلك الخط موازيا للخط $b - c$ أو غير مواز له مثل $b - d$ بحيث يكون

$b - c :: d - e :: c - d$

(برهانها)

(برهانها) أن يقال اذا كان القاطع الثانى موازياً للقاطع الاول - هـ
كانت النظرية واضحة وأما اذا كان القاطع الثانى كيفما اتفق مثل - هـ
فيقال لو بد من النقطة - مستقيم مثل - صه - يوازي ا - ومد
من الجهتين حتى لاقى هـ فى - هـ و ا فى - صه لحدث

$$\begin{aligned} & - هـ : ا :: - هـ : - هـ \quad \text{و} \\ & - صه : ا :: - هـ : - هـ \quad \text{و المقروض أن} \\ & - هـ : - هـ :: - هـ : - هـ \end{aligned}$$

فينتج من هذه المتناسبات أن - هـ = - صه

ويلزم من كون الخط - صه موازياً للخط ا - أن يكون

$$\begin{aligned} & - هـ : ا :: - هـ : - هـ \quad \text{و} \\ & - صه : ا :: - هـ : - هـ \end{aligned}$$

ويلزم من كون - هـ = - صه أن يكون

$$- هـ : - هـ :: - هـ : - هـ$$

وهو المطلوب

واعلم أن الخطوط المستقيمة الاربعة وهى ا - و ا - و ا - و ا -
تكون ما يسمى بالخرمة التوافقية والمستقيمين ا - و ا -
اقترايين بالنسبة للخطين ا - و ا - وكذا عكسه

* (تنبيهان) *

الاول اعلم انه يتكون خرمة توافقية من الخطوط المستقيمة الاربعة وهى
ا - و ا - و ا - و ا - اذا كان البعد المحصور بين النقطة -
ونقطة تلاقي المستقيم ا - بالمستقيم المار بالنقطة - والموازي للمستقيم
ا - مساوياً للبعد المحصور بين النقطة - ونقطة تلاقي الموازي المذكور
بالمستقيم ا - أى اذا كان - هـ = - هـ يتكون من الخطوط
الاربعة وهى ا - و ا - و ا - و ا - خرمة توافقية لانه قد تقرر أن

$$- : - :: - : - \text{ وأ } -$$

$$- : - :: - : -$$

وحيث كان $- = -$ ينتج من هاتين المناسبتين أن

$$- : - :: - : -$$

وهذه المناسبة تثبت توافق القسمته وهو المطلوب

(التنبيه الثاني)

قد لا يعتبر الانقطة مثل $-$ على أحد هذه الخطوط المستقيمة وحينئذ تسمى

النقطة $-$ والمستقيم $-$ نقطة ومستقيما اقترائين

(الدعوى السادسة والاربعون النظرية شكل ١٢ من اللوحة ١٧)

إذا أخذت نقطة مثل $-$ في مستوى زاوية مثل $-$ وتمدتها فاطمان

مثل $-$ و $-$ وهما المتممان للشكل الرباعي $-$ كانت نقطة

تقاطع قطريه وهى $-$ على المستقيم التوافقى الاقترانى للنقطة $-$ بالنسبة

للمستقيمين $-$ و $-$

(برهانها) أن يقال يلزم من كون اضلاع المثلث $-$ متطوعة بالقاطع

$-$ أن يكون

$$- \times - \times - = - \times - \times -$$

ولو وصل $-$ الى الذى يقطع $-$ فى $-$ و $-$ فى $-$ ظهر أن

الخطوط المستقيمة الثلاثة وهى $-$ و $-$ و $-$ متقاطعة فى نقطة

واحدة وهى $-$ ويلزم من هذا أن يكون

$$- \times - \times - = - \times - \times -$$

فاذا قسمت هذه المعادلة على السابقة كل طرف على نظيره وحذفت المضارب

المشتركة حدث

$$\frac{-}{-} = \frac{-}{-}$$

فاذن يكون $-$ هو المستقيم الاقترانى للنقطة $-$ بالنسبة للمستقيمين

$-$ و $-$ وهو المطلوب

(تنبيهان)

* (تنبيهان) *

الاول اذا مَدَّ من النقطة ح بجهة خطوط مستقيمة ووصلت اقطار الاشكال الرباعية المتحصلة كانت نقط تقاطع تلك الاقطار على خط مستقيم واحد هو المستقيم الاقتراني للنقطة ح بالنسبة للخطين ا - و ا ح الثاني حين تكون النقطة المعلومة ح خارجة عن الزاوية يكون المستقيم الاقتراني داخلها وحين تكون النقطة ح داخلها يكون المستقيم الاقتراني خارجها

• * (الدعوى السابعة والاربعون النظرية) *

* (شكل ١٣ من اللوحة ١٧) *

اذا أخذت نقطة مثل ا في مستوى دائرة ومد منها قواطع مثل ا - ح و ا - د من نهايتي كل وتر حاصل من تلك القواطع كالتابيتين - و ح و مستقيمان مماسان لمحيط الدائرة مثل - د و ح و المتقاطعين في د فجميع النقط المتحصلة بالكيفية التي تحصلت بها النقطة د تكون على مستقيم واحد

(برهانها) أن يقال لو وصل القطر ا ح وأنزل من النقطة د العمود د ه على القطر ا ح لكانت النقط الثلاث وهي - و ح و ه على محيط الدائرة الذي قطره د ح فاذن يكون

$$ا - ح \times ا - د = ا - و \times ا - ح$$

ولو فرض أنه مَدَّ من النقطة ا مستقيم قاطع للمحيط في نقطتين رمز

احدهما - و ورمز الاخرى ح فاحصل أيضا

$$ا - و \times ا - ح = ا - د \times ا - ح$$

و (هـ) رمز موقع العمود المتزل على ا ح من نقطة تقاطع مماسين اخرين وقد تقرر في النظرية الثلاثين أن

$$ا - و \times ا - ح = ا - د \times ا - ح$$

أه = أه ويعلم من ذلك أن موقع العمود المنزل على أ ح من نقطة تقاطع المماسين الجديدين يقع في النقطة ه فحينئذ جميع النقاط التي مثل د تكون على العمود المقام على القطر أ ح من النقطة ه التي تعين بهذا الارتباط

$$\frac{\overline{أه}}{\overline{أح}} = \frac{\overline{أد} \times \overline{أه}}{\overline{أح}^2} = أه$$

و أك هو المماس الممتد من النقطة ك أي أن بعد النقطة ه عن النقطة أ يساوى الثالث المتناسب مع الخطين أ ح و أك
* (تنبيهات) *

الاول حين تكون النقطة المفروضة أ خارجة عن الدائرة يقطع الخط د ه هذه الدائرة وحين تكون النقطة أ داخل الدائرة يكون الخط د ه خارجها

الثاني اعلم أن النقطة ك التي هي نقطة تماس الدائرة بالمماس الممتد من النقطة أ تقع على المستقيم د ه لأن بعد النقطة أ عن موقع العمود المنزل من النقطة ك على أ ح هو أيضا ثالث متناسب مع المستقيمين أ ح و أك

الثالث يقتضى التنبيه الثالث من النظرية الاربعين يكون القطر م ح متوافق القسم في النقطتين أ و ه

الرابع الوتر د ح متوافق القسم أيضا في النقطتين أ و ه لأنه لو وصل د ه و ه لحدث

$$أ د : د ه :: أ ح : ح ه$$

$$أ د : د ه :: أ ح : ح ه$$

فينتج من هاتين المناسبتين أن

$$أ د : د ه :: أ ح : ح ه$$

$$أ د : أ ح :: د ه : ح ه$$

فيعلم من ذلك أن أه هو الخط المنصف للزاوية د ه و المتممة للزاوية

هـ هـ فاذن يكون العمود د هـ منصفاً للزاوية هـ هـ هـ ويلزم من هذا أن يكون هـ هـ متوافقاً القسمة في النقطتين ا و هـ وهو المطلوب

* (الدعوى الثامنة والاربعون النظرية) *

* (شكل ١٤ من اللوحة ١٧) *

اذا أخذت نقطة مثل ا في مستوى دائرة ومدة منها قاطع مثل ا هـ و ا هـ ح ثم وصل هـ ح و هـ د فتنقط التقاطع التي مثل هـ أي التي تحصل من أخذ هذه الخطوط مثنى تكون على مستقيم واحد

(برهانها) أن يقال فوعد من النقط هـ و ح و هـ ح خطوط مستقيمة مماسة للدائرة ووصل هـ هـ للزم أن تكون النقطة هـ على المستقيم هـ هـ كما تقرر ذلك في النظرية التاسعة والثلاثين

وقد تقرر في النظرية السابقة انه اذا مدت قواطع أخر كان المستقيم الموصول بين نقط تقاطع المماسات الجديدة هو هـ هـ بعينه وكانت نقطة التقاطع

هـ الحادثة من الخطوط المستقيمة التي مثل هـ ح و هـ ح على هـ هـ دائماً فاذن تكون النقطة التي مثل هـ على خط مستقيم وهو المطلوب

واعلم أن المستقيم الذي يصل بين النقطتين هـ و هـ يقطع الذي يصل

بين النقطتين هـ و هـ في نقطة من المستقيم هـ هـ بعينه ويبرهن على ذلك بما ذكر

* (تنبيهات) *

الاول حين تكون النقطة المعلومة خارجة عن الدائرة يكون الخط الذي يشتمل على جميع النقط التي مثل هـ قاطعاً للدائرة وحين تكون النقطة المعلومة داخل الدائرة يكون المستقيم المذكور خارجها

الثاني اعلم أن الخط المستقيم والنقطة اللذين سميناهما في النظرية ٤٥ و ٤٦ و ٤٧ و ٤٨ بالخط الاقتراني والنقطة الاقترانية هما المسميان

عند بعض المؤلفين بالقطين العكسين ولهذين القطين خواص آخر مهممة
 جدًا مشروحة في الدروس الهندسية التي ألفها المهندس بوبيلير
 الثالث اعلم أن السبب الموجب لتقرير هذه النظريات عقب المقالة الثالثة
 هو أن كثيرًا من المسائل المقررة في المخطات يتوقف حلها عليها

• (في الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الثالثة) •

• (الدعوى الاولى العملية) •

شكل ١٢٧ الاول والثاني والثالث و ١٣٨ الاول والثاني والثالث
اذا كان المطلوب تقسيم مستقيم محدود مثل المستقيم a الى اقسام
متساوية قدر ما يراد فذلك طرق

• (الطريقة الاولى) •

ان يرسم من احدى نهايتي الخط مستقيم غير محدود مثل al يصنع مع
المستقيم المعلوم زاوية تماثل لـ a ثم يؤخذ من المستقيم al بعد
كيف اتفق مثل ad ويكترز على المستقيم al بقدر عدد الاقسام المطلوبة
ثم يوصل مستقيم بين نهاية القسم الاخير ونهاية الاخرى من المستقيم المعلوم
ويرسم من النقطة d مستقيم مواز له فيعين على المستقيم المعلوم قسم
مثل ac يساوى أحد الاقسام المطلوبة

فاذا كان المطلوب تقسيم المستقيم a الى خمسة اقسام متساوية مثلا
يكترز البعد ad على المستقيم al خمس مرات أى يؤخذ البعد d
 $= d$ والبعد $hd = d$ و $hd = d$ و $hd = d$ و $hd = d$ وه
ثم يوصل المستقيم rs ويرسم من النقطة d مستقيم dc يوازي
 rs فيكون $ac = \frac{a}{5}$

وهذه الطريقة مؤسسة على النظرية الخامسة عشر

• (الطريقة الثانية شكل ١٢٧ الثاني) •

ان يرسم من النهاية a مستقيم غير محدود مثل al يصنع مع المستقيم
المعلوم a زاوية ما ثم يرسم من النهاية s مستقيم آخر غير محدود
كذلك مثل sc يوازي المستقيم al ويضاده في الاتجاه بحيث يصنعان
مع المستقيم a زاويتين متبادلتين داخليتين متساويتين ثم يؤخذ بعد كيف
اتفق مثل ad ويوضع على al بالابتداء من النهاية a وعلى المستقيم

رَ لَ بالبدا من ر ويكثر خمس مرات على كليهما

أى يؤخذ د = ح ا و ه د = د و وه = ه د و ر = وه
 وه ثم يؤخذ ه د = و ر و ه ه = ه د و ه د = ه د
 و آ = ح ك ثم يوصل أ آ و ح ح و د د و ه ه و و و ر = ر
 فينقسم المستقيم المعلوم ا ب الى خمسة أقسام متساوية أعني ان أقسام ا ب
 ح ط و ط ع و ع ك و ك ر متساوية وهذه الطريقة
 أحسن من الاولى وأكثر منها استعمالا

* (الطريقة الثالثة شكل ١٣٧ الثالث) *

ان يرسم على المستقيم المعلوم ا ب مثلث متساوى الاضلاع مثل ح ا ر
 ويؤخذ على أحد اضلاعه مثل ا ح بعد كيف اتفق مثل د و يمتد ح ا
 على استقامته جهة ا (ان احتجج لآه) ويكثر ح د خمس مرات أى
 يؤخذ البعد ح آ = د ٥ د ثم يرسم على ح آ مثلث متساوى
 الاضلاع ح آ ر ويؤخذ البعد ح آ = د والبعد ط ح = ح آ
 و ع ط = ط ح و ك ع = ع ط ثم يوصل ح ع و ح ط
 و ح ك و ح ك فينقسم الخط ا ب الى خمسة أقسام متساوية وهى
 ر ح و ح ط و ط ع و ع ك و ك ر

لانه قد تقرر فى النظرية الثانية والعشرين انه اذا وصل من رأس مثلث الى
 قاعدته خطوط مستقيمة قدر ما يراد فهذه الخطوط تقسم قاعدة المثلث وما
 وازاها الى أجزاء متناسبة وانه اذا انقسمت القاعدة الى أجزاء متساوية
 ينقسم ما وازاها الى أجزاء متساوية

واذا كان المطلوب تقسيم المستقيم ا ب الى أقسام مناسبة لا طول
 معلومة مثل د و م و ل فلذلك طريقتان

(الطريقة

* (الطريقة الاولى شكل ١٣٨) *

أن يرسم من النقطة $ا$ مستقيم غير محدود مثل $ا ر$ يصنع مع المستقيم
المعلوم زاوية ما ثم يؤخذ عليه بعد $ا = ح$ وبعد $ح = م$
وبعد $م = د$ ويوصل $هـ$ ثم يرسم من النقطة $د$ مستقيم $د و$
يوازي $هـ ر$ ويرسم من النقطة $ح$ مستقيم $ح ي$ يوازي $هـ ر$
فينقسم المستقيم $ا ر$ الى الاقسام المطلوبة
لانه يلزم من كون الخطين $ا ر$ و $ا هـ$ مقطوعين بالتوازيات $ح ي$
و $د و$ و $هـ ر$ أن يكون

$$ا ح : ا ح :: ح و : د و :: د و : د و :: د و : د و$$

كما نقرر ذلك في النظرية الخامسة عشر

وحيث كان $ا ح = ح و$ و $ح و = م و$ و $م و = د هـ$ و $د هـ = د و$ يكون
 $ا ح : ح و :: ح و : د و :: د و : م و :: م و : د و$ وهو المطلوب

* (الطريقة الثانية شكل ١٣٨ الثالث) *

ان يرسم من النهاية $ا$ مستقيم غير محدود مثل $ا ر$ يصنع مع المستقيم
المعلوم $ا ر$ زاوية ما ثم يرسم من النهاية $ر$ مستقيم يوازي $ا ر$ ويضاده
ثم يؤخذ البعد $ا ح = ح و$ والبعد $ح د = د م$ والبعد $د هـ = هـ ز$
ويؤخذ أيضا البعد $ر د = د هـ = هـ ز$ والبعد $ز ح = ح و$
 $= م$ والبعد $ح آ = ا ح = ح و$ ثم يوصل $ا آ$ و $ح و$ و $د و$
و $هـ ر$ فتكون الاقسام المطلوبة هي $ا ح$ و $ح د$ و $د و$ وهذه
الطريقة مختارة عن سابقتها

* (تنبية) *

اذا علم مستقيم محدود مثل $ا ر$ وكان المطلوب تقسيمه الى قسمين نسبة
أحدهما الى الآخر كنسبة طول معلوم مثل $م$ الى طول آخر معلوم
كذلك مثل $د$ فطريقة ذلك أن يرسم من النقطة $ا$ مستقيم غير محدود

مثل $ا$ في الشكل ١٣٨ الثاني ويؤخذ عليه $ا = م$ ثم يرسم من النقطة $ـ$ مستقيم غير محدود مثل $ـك$ وعليه يؤخذ $ـح = د$ ثم يوصل $ـد$ فينقسم المستقيم $ـا$ في النقطة $ـح$ الى القسمين المطلوبين اعني أن

$$ا ح : ح ـ :: م : د$$

لانه يلزم من كون الزاوية $ا = ـ$ و $ا ح د = ـ ح د$ أن تكون الزاوية $ا د ح = ـ ح د$ وأن يكون المثلث $ا د ح$ مشابه للمثلث $ـ ح د$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$ا ح : ح ـ :: ا د : د ـ$$

وحيث كان $ا = م$ و $ـ ح د = د$ يكون

$$ا ح : ح ـ :: م : د$$
 وهو المطلوب

(مثالان)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب ينقسم مستقيم محدود الى ثلاثة أجزاء مناسبة لثلاثة أعداد مفروضة مثل ٢ و ٣ و ٤

فالطريقة أن ينقسم المستقيم المعلوم الى أجزاء متساوية عددها $٢ + ٣ + ٤ = ٩$ أي ينقسم الى أجزاء متساوية عددها يساوي مجموع الاعداد المفروضة ثم يؤخذ القسم الاول مع اثنائي لتكوين الجزء الاول من الاجزاء المطلوبة ويؤخذ القسم الثالث والرابع والخامس لتكوين الجزء الثاني وما بقى من الخط يكون هو الجزء الثالث

(المثال الثاني)

أن يكون المطلوب إيجاد حاصل ضرب مستقيم محدود في كسر معين كالكسر $\frac{٧}{٤}$

فالطريقة أن يقدم المستقيم المعلوم الى ثلاثة أقسام متساوية ويكسر رأسه
تلك الاقسام سبع مرات فيحصل المطلوب
• (الدعوى الثانية العملية) •

• (شكل ١٣٩ الاول والثاني والثالث) •

اذا علمت ثلاثة خطوط مستقيمة مثل $ا و ب و ج$ وكان المطلوب
اجباها مستقيم يكون رابعا متناسبا مع الخطوط المعلومه فلذلك طرق
• (الطريقة الاولى) •

أن ترسم زاوية مثل $هـ د و$ ثم يؤخذ على $د هـ$ البعد $د ب$ والبعد
 $د ج = د هـ$ وعلى $د و$ يؤخذ $د ز = د هـ$ ثم يرسم من النقطة
 $ح$ مستقيم مثل $ح ط$ يوازي $ر هـ$ فيكون $ط$ هو الرابع المتناسب
المطلوب

لانه يلزم من كون الخط $ح ط$ موازيا للخط $ر هـ$ أن يكون
 $د ر : د ج :: د هـ : د ط$

وحيث كان $د ر = ا$ و $د ج = ب$ و $د هـ = ج$ فيكون

$ا : ب :: ج : د ط$ والمطلوب أن يكون

$ا : ب :: ج : د هـ$

فاذن يكون $د هـ = د ط$ وهو المطلوب

• (الطريقة الثانية شكل ١٣٩ الثاني) •

أن ترسم زاوية مثل $هـ د و$ ثم يؤخذ على $د هـ$ البعد $د ر =$
البعد $ا$ وبجانبه $د ج = د هـ$ ويؤخذ على $د و$ البعد $د ز = ج$
ثم يوصل $ر هـ$ ويرسم من النقطة $ح$ مستقيم $ح ط$ يوازي $ر هـ$
فيكون $ط$ هو الرابع المتناسب المطلوب

لانه يلزم من كون الخط $ح ط$ موازيا للخط $ح ر$ أن يكون

$د ر : د ج :: د هـ : د ط$

وحيث كان $د ر = ا$ و $د ج = ب$ و $د هـ = ج$ فيكون

$ا : ب :: ج : د ط$ والمطلوب أن يكون

١ : ر :: ح : م

فأذن يكون ر = ح ط وهو المطلوب

* (الطريقة الثالثة شكل ١٢٩ الثالث) *

أن يرسم مستقيم غير محدود مثل د ه ثم يؤخذ عليه البعد د ر =
و د ح = ثم يرسم من النقطة ر مستقيم غير محدود مثل ر ك
يصنع مع المستقيم د ه زاوية مائمه يؤخذ البعد ر ع = ح ثم يوصل
ع د ويمد من النقطة ح مستقيم مثل ح ط يوازي ر ع فيكون
ح ط هو الرابع المتناسب المطلوب

لأنه يلزم من كون الخط ح ط موازاً للخط ر ع أن يكون

د ر : د ح :: ر ع : ح ط

وحيث كان د ر = أ و د ح = ر و ر ع = ح فيكون

١ : ر :: ح : ط والمطلوب أن يكون

١ : ر :: ح : م

فأذن يكون ر = ح ط وهو المطلوب

* (أمثلة) *

* (المثال الأول) *

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم بحيث تكون مساحته
مساوية لمساحة مستطيل معلوم فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف ق لقاعدة
المستطيل المعلوم وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف ق للخط المعلوم
الذي يفرض قاعدة للمستطيل المطلوب وبالحرف م لارتفاعه ثم يقال
حيث أن كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه
يكون

$$م = ق \times ع \text{ و } م = ق \times م$$

وحيث كان المطلوب أن يكون م = م يلزم أن يكون

$$ق \times ع$$

$$ق \times ع = ق \times م$$

وقد نقر في علم الحساب انه اذا كان حاصل ضرب كيتين مساويا لحاصل ضرب كيتين يتركب من الكميات الاربع متناسبة هندسية طرفاها كيتا أحد الحاصلين ووسطاهما كيتا الحاصل الآخر فاذا ن يكون

$$ق : ق :: ع : م$$

فيعلم من هذه التناسبة أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المتناسب

الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي ق و ع فاذا اجريت عملية استخراجهم ليقى الاعلمية انشاء المستطيل الذي علم كل من قاعدته وارتفاعه وقد ذكرنا عملية ذلك في الدعوى الثانية عشر العملية من المقالة الثانية

(المثال الثاني)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم تكون مساحته مساوية لمساحة مثل مفروض فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف م للمثلث المفروض وبالحرف ق اقبعده وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف م للمستطيل المطلوب وبالحرف ق لقاعدته المساوية للخط المعلوم وبالحرف م لارتفاعه المطلوب ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في نصف ارتفاعه وكذلك مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه يكون

$$م = ق \times \frac{1}{2} ع \text{ و } م = ق \times م$$

وحيث كان المطلوب أن يكون م = م يلزم أن يكون

$$ق \times \frac{1}{2} ع = ق \times م$$

وهذا تساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$ق : ق :: \frac{1}{2} ع : م$$

فيعلم من هذه التناسبة أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع التناسب

الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي $ق$ و $و$ و $\frac{1}{4} ع$
 • (المثال الثالث) •

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم يكافئ شبه منحرف مفروضا
 بطريقة ذلك أن يرمز بالحرف $م$ مساحة شبه المنحرف المفروض
 وبالحرف $ص$ لقاعدته الصغرى وبالحرف $ك$ لقاعدته الكبرى
 وبالحرف $ع$ لارتفاعه وبالحرف $م$ لمساحة المستطيل المطلوب
 وبالحرف $ق$ للخط المعلوم الذي يفرض قاعدة له وبالحرف $س$ لارتفاعه
 المطلوب ثم يقال حيث أن كل شبه منحرف مساحته تساوى حاصل ضرب
 نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين في ارتفاعه وكل مستطيل مساحته تساوى
 حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه يكون

$$م = \frac{1}{4} (ص + ك) \times ع \quad و$$

$$م = ق \times س$$

وحيث كان المطلوب أن يكون $م = م$ يلزم أن يكون

$$\frac{1}{4} (ص + ك) \times ع = ق \times س$$

وهذه التساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$ق : \frac{1}{4} (ص + ك) :: ع : س$$

فيعلم من هذه التناسبة أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع التناسب
 الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي

$$ق \quad و \quad \frac{1}{4} (ص + ك) \quad ع$$

• (المثال الرابع) •

أن يكون المطلوب انشاء مثلث على قاعدة معلومة يكافئ مثلنا مفروضا
 بطريقة ذلك أن يرمز بالحرف $م$ لمساحة المثلث المعلوم وبالحرف $و$

لقاعدته

لقاعدته وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف م لمساحة المثلث المطلوب
وبالحرف ق لقاعدته المعلومة وبالحرف س لارتفاعه المطلوب
ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف
ارتفاعه يكون

$$م = ق \times \frac{1}{2} ع \text{ و } م = س \times \frac{1}{2} س$$

وحيث كان المطلوب أن يكون م = م يلزم أن يكون

$$ق \times \frac{1}{2} ع = س \times \frac{1}{2} س$$

وهذه المتساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$ق : ق :: \frac{1}{2} ع : \frac{1}{2} س \text{ أو}$$

$$ق : ق :: ع : س$$

فيعلم من هذه المناسبة ان ارتفاع المثلث المطلوب هو الرابع المتناسب

الهندسى للخطوط الثلاثة المعلومة التى هى ق و س و ع

(الدعوى الثالثة العملية شكل ١٢٧ الثانى)

اذا علم خطان مستقيمان مثل م و د وكان المطلوب ايجاد الثالث
المتناسب معهما أى ايجاد خط مستقيم مثل س يكون هو الطرف الثانى
من متناسبة هندسية حدها الاول مبين بالخط م ووسطاهما متساويان
وكلاهما مبين بالخط د فلذلك طرقت

(الطريقة الاولى)

أن يرسم مستقيم غير محدود مثل ا س ويؤخذ ا س = م ويرسم
على هذا المستقيم نصف محيط دائرة ثم تؤخذ قنحة بالبيكار بقدر الخط د
ويركز فى النقطة ا ويرسم قوس دائرة يقطع نصف المحيط فى نقطة مثل د
ثم ينزل من النقطة د العمود د د على ا س فيكون المستقيم

١ هو الثالث المناسب المطلوب

لانه قد تقر في نتيجة النظرية الثالثة والعشرين ان الوتر a وسط مناسب بين القطر a - والقسم المجاور له وهو a أي ان

$$a - : a :: a : a$$

وحيث كان $a - = m$ و $a = d$ يكون

$$m : d :: d : a$$

والمطلوب أن يكون

$$m : d :: d : s = a$$

وهو المطلوب

• (الطريقة الثانية شكل ١٢٧ الثالث) •

أن يرسم مستقيم غير مجذور مثل a - وتعين عليه نقطة مثل a ويقام منها العمود a - على a - ويؤخذ $a - = d$ ثم يؤخذ على يسار النقطة a بعد مثل $a = m$ ويوصل m - ثم يقام من النقطة a - العمود a - على m - فيكون a هو الخط المطلوب لانه قد تقر في النظرية الثالثة والعشرين ان العمود المثل من رأس الزاوية القائمة على وترها وسط مناسب بين قسمي الوتر المذكور أي ان

$$a : a - :: a - : a$$

وحيث كان $a = m$ و $a - = d$ يكون

$$m : d :: d : a$$

والمطلوب أن يكون

$$m : d :: d : s = a$$

وهو المطلوب

• (الطريقة الثالثة) •

أن يـ ذكر أحد الخطين المعطيين ثم يبحث عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة المعلومة بأحدى الطرق المشروحة في الدعوى الثانية العملية

• (مثالان) •

• (الاول) •

* (الاول) *

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على قاعدة معلومة يكافئ مربعاً معلوماً
فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م اضلع المربع المعلوم وبالحرف ن لقاعدة
المستطيل المطلوب وبالحرف م لارتفاعه ثم يقال حيث أن كل مستطيل
مساحته تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه وهو كل مربع مساحته
تساوي تربيع أحد اضلاعه يكون

$$م^2 = ن \times م \text{ أو } م \times م = ن \times م$$

ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$ن : م :: م : م$$

وبعلم من هذه التناسبة أن الارتفاع المطلوب هو الثالث المتناسب مع الخطين
ن و م

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب تحويل مربع الى مثلث ارتفاعه معين فطريقة ذلك
أن يرمز بالحرف م اضلع المربع المعلوم وبالحرف ع لارتفاع المثلث
المطلوب وبالحرف م لقاعدته المطلوبة ثم يقال حيث أن كل مثلث
مساحته تساوي حاصل ضرب قاعدته في نصف ارتفاعه وكل مربع مساحته
تساوي حاصل ضرب ضلعه في نفسه يكون

$$م^2 = \frac{ع}{2} \times م \text{ أو } م \times م = \frac{ع}{2} \times م$$

ومن هذه المساواة ينتج أن

$$\frac{ع}{2} : م :: م : م$$

فيعلم من هذه التناسبة أن قاعدة المثلث المطلوب هي السالب المتناسب مع
نصف ارتفاعه و اضلع المربع المعلوم

* (الدعوى الرابعة العملية) *

* (شكل ١٤٠ الاول والثاني والثالث و ١٣٢) *

اذا علم مستقيمان مثل $ا$ و $ب$ وكان المطلوب إيجاد مستقيم مثل $س$
يكون وسطا متناسبا بينهما فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

أن يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ عليه البعد $د ه$ = $ا$ والبعد $ه و$
= $ب$ ثم يرسم نصف محيط قطره $د و$ ويقام من النقطة $ه$ العمود
 $ه ر$ على القطر $د و$ فيكون العمود $ه ر$ هو الوسط المناسب
المطلوب لانه قد تقررت في النظرية الثالثة والعشرين ان

$$د ه : ه ر :: ه ر : ه و$$

وحيث كان $د ه$ = $ا$ و $ه و$ = $ب$ يكون

$$ا : ه ر :: ه ر : ب$$

والمطلوب أن يكون

$$ا : س :: س : ب$$

فاذن يكون $س$ = $ه ر$ وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٤٠ الثاني)

ان يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه البعد $ا ب$ = $ا$ أكبر المستقيمين
المعومين ثم يؤخذ $ا ج$ = المستقيم الآخر يرسم نصف محيط قطره
 $ا ب$ ثم يمد من النقطة $ا$ مستقيمه $س$ فيكون البعد المحصور بين نقطة
التماس و النقطة $ا$ هو الوسط المناسب المطلوب لانه قد تقررت في النظرية
الثانية والثلاثين ان

$$ا ب : ا ج :: ا ج : ا س$$

وحيث كان $ا ب$ = $ا$ و $ا ج$ = $ب$ يكون

$$ب : ا ج :: ا ج : ا س$$

والمطلوب أن يكون

$$ب : س :: س : ا$$

فاذن يكون $س$ = $ا ج$ وهو المطلوب

* (الطريقة الثالثة شكل ١٤٠ الثالث) *

أن يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه البعد $ا$ بقدر أكبر المستقيمين
المعلومين ويرسم نصف محيط دائرة قطره $ا$ ثم يؤخذ بعد $ا$ بقدر
أصغر المستقيمين المعلومين ويقام من النقطة $ح$ عمود $هـ$ على $ا$
ثم يوصل $ا$ هـ فيكون الوتر $ا$ هـ هو الوسط المناسب المطلوب لانه قد
تقرر في نتيجة النظرية الثالثة والعشرين ان

$$ا - : ا هـ :: ا هـ : ا$$

وحيث كان $ا - = ح$ و $ا هـ = ا$ يكون

$$ح - : ا هـ :: ا هـ : ا$$

والمطلوب أن يكون

$$ح - : ح :: ح : ا$$

فاذن يكون $ح = ا هـ$ وهو المطلوب

* (الطريقة الرابعة شكل ١٣٢) *

أن يرسل مستقيم مثل $هـ$ يساوى أكبر المستقيمين المعلومين ويؤخذ منه
بعد $هـ$ يساوى أصغر المستقيمين المذكورين ثم يمرر محيط دائرة
بالنقطتين $د$ و $ح$ ويرسم من النقطة $هـ$ مستقيم مماس $ها$
فيكون هو الوسط المناسب المطلوب

لانه قد تقرر في النظرية الثانية والثلاثين أن

$$هـ ح : ها :: ها : هـ$$

وحيث كان $هـ ح = ح$ و $هـ د = ا$ يكون

$$ح - : ها :: ها : ا$$

$$ح - : ح :: ح : ا$$

فاذن يكون $ح = ها$ وهو المطلوب

* (أمثلة) *

المثال الاول أن يكون المطلوب تحويل مستطيل الى مربع يكافئه فطريقة

ذلك أن برمز بالحرف $ق$ لقاعدة المستطيل المعلوم وبالحرف $ع$ لارتفاعه وبالحرف $س$ لضلع المربع المطلوب
 يتم يقال حيث أن كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في
 ارتفاعه وكل مربع مساحته تساوى حاصل ضرب ضلعه في نفسه يكون

$$ق \times ع = س^2 \text{ أو } ق \times ع = س \times س$$

ومن هذه المتساوية ينتج أن

$$ق : س :: س : ع$$

فيعلم من هذه التناسبة أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين قاعدة
 المستطيل المعلوم وارتفاعه

المثال الثانى أن يكون المطلوب تحويل مثلث معلوم الى مربع فطريقة ذلك
 أن يبحث عن الوسط المناسب الهندسى بين قاعدة المثلث ونصف ارتفاعه
 المثال الثالث أن يكون المطلوب تحويل متوازى الاضلاع الى مربع
 يكافئه فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المناسب الهندسى بين قاعدة
 المتوازى الاضلاع وارتفاعه

المثال الرابع أن يكون المطلوب تحويل شبه منحرف الى مربع يكافئه
 فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المناسب الهندسى بين نصف مجموع قاعدتي
 شبه المنحرف وارتفاعه

* (تنبيه عمومى يتعلق بالخطوط المتناسبة) *

قد تقرّر في الدعوى الثانية العملية أن

$$ا : س :: ح : س$$

وفي الدعوى الثالثة العملية أن

$$م : ح :: ح : س$$

وفي الدعوى الرابعة العملية أن

$$ا : س :: س : ح$$

فينتج من التناسبات الاولى أن

$$(١) \quad \frac{x}{1} = \text{سـ} \quad \text{ومن النسبة الثانية أن}$$

$$(٢) \quad \frac{2}{3} = \text{سـ} \quad \text{ومن الثالثة أن}$$

$$(٣) \quad 1 \times 1 = \text{سـ} \quad \text{أو} \quad 1 \times 1 = \text{سـ} \quad \text{فالتساوية (١) تدل على الحد الرابع من متناسبة هندسية طرفها الأول}$$

ا ووسطاهما - و

$$(٢) \quad \text{تدل على الحد الرابع من متناسبة هندسية طرفها الأول}$$

م ووسطاهما متساويان وكلاهما يساوي د أو على الثالث المناسب مع المقدارين م و د

$$(٣) \quad \text{تدل على الوسط متناسب الهندسي بين المقدارين ا و}$$

و إذا رمز بالحرف م لأحد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية وبالحرف د ضلعها الآخر وبالحرف سـ لوترها حدث

$$\text{سـ} = \text{م} + \text{د} \quad \text{أو} \quad \text{سـ} = \sqrt{\text{م} + \text{د}}$$

فهذه المعادلة تدل على وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة مبيّن بالحرف م وضلعه الآخر مبيّن بالحرف د ولورمز بالحرف م لوتر القائمة وبالحرف د لأحد الضلعين المحيطين بها وبالحرف سـ ضلعها الآخر لحدث

$$\text{م} = \text{د} + \text{سـ} \quad \text{أو} \quad \text{سـ} = \text{م} - \text{د}$$

$$\text{أو} \quad \text{سـ} = \sqrt{\text{م} - \text{د}}$$

فهذه المتساوية تدل على أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية وتره م وضلعه الآخر د

وقد تقرر في النتيجة الثانية من النظرية العاشرة أن نسبة قطر المربع اضلعه كنسبة جذر الاثنين للواحد فينبقى على هذا أن المربع الذي قطره يساوى

٤ يكون اضلعه مساويا $\sqrt{2}$ فحينئذ المعادلة التي بهذه الصورة

سه $= \sqrt{2}$ تدل على ضلع المربع الذي قطره يساوى ٢ ولرسمه توضع

المعادلة المذكورة بهذه الصورة سه $= \sqrt{2} \times 1$ ثم يبحث عن

الوسط المتناسب الهندسى بين ٢ و ١ فيكون هو ضلع المربع المطلوب

وإذا فرض معادلة بهذه الصورة

سه $= \sqrt{5}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فلتكتب

هكذا

$$\sqrt{1 + 2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} = \text{سه}$$

فيكون سه هو وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة يساوى

١ وضلعه الآخر يساوى ٢

ولوفرض معادلة بهذه الصورة

سه $= \sqrt{6}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فلتوضع

هكذا

$$\sqrt{1 + 2} + \sqrt{2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{6} = \text{سه}$$

فيكون سه هو وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة يساوى

٢ وضلعه الآخر يساوى $\sqrt{2}$

أو يوضع هكذا

$$\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6} = \text{سه}$$

فيكون سه هو الوسط المتناسب الهندسى بين مستقيمين أحدهما يساوى

٢ والاخر يساوى ٣

وإذا فرض معادلة بهذه الصورة

سه $= \sqrt{3}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فلتكتب هكذا

$$\overline{1 \times 3} \gamma = \overline{3} \gamma = \overline{3}$$

فيكون $\overline{3}$ هو الوسط المناسب الهندسي بين مستقيمين أحدهما يساوي ٣ والاخر يساوي ١

وبالجملة اذا برز بالحرف $\overline{m}$ لعدد صحيح مركب من مضروبين أحدهما $\overline{h}$ والاخر $\overline{v}$ كان $\overline{m} \gamma$ أو $\overline{m} \gamma \overline{h} \times \overline{v}$ هو الوسط المناسب الهندسي بين $\overline{h}$ و $\overline{v}$

و $\overline{m} \gamma$ أو $\overline{m} \gamma \overline{h} \times \overline{v}$ يدل في جميع الحالات على الوسط المناسب الهندسي بين $\overline{m}$ والواحد

وقد ذكرنا طرقا لرسم كل من الرابع المناسب والثالث المناسب والوسط المناسب وذكرنا أيضا طريقة لرسم المثلث القائم الزاوية الذي علم منه ما يكفي لرسمه

واعلم ان المعادلات التي ذكرناها في هذا التنبيه مفيدة جدا اذ هي الارتيابات الاصلية المستعملة في الهندسة وفي تطبيق الجبر على الهندسة
* (الدعوى الخامسة العملية) *

* (شكل ١٤٢ الثاني) *

اذا علمت نقطة مثل $\overline{c}$ بين ضاهي زاوية مثل $\overline{a}$ $\overline{v}$ وكان المطلوب أن يمتد من هذه النقطة مستقيم مثل $\overline{c}$ $\overline{h}$ نسبة جزئه $\overline{c}$ لجزئه الاخر $\overline{c}$ $\overline{h}$ كنسبة $\overline{m}$: $\overline{h}$

فطريقة ذلك أن يمتد من النقطة المعلومة $\overline{c}$ مستقيم مثل $\overline{c}$ - يوازي $\overline{a}$ الذي هو أحد ضاهي الزاوية ثم يبحث عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة وهي $\overline{m}$ و $\overline{h}$ و $\overline{a}$ ثم يؤخذ $\overline{h}$ بقدر الرابع المناسب المذكور ويوصل المستقيم $\overline{h}$ $\overline{c}$ فيكون $\overline{h}$ $\overline{c}$ هو المستقيم المطلوب لانه يلزم من كون الخط $\overline{c}$ - موازيا للخط $\overline{a}$ أن يكون

$$\overline{c} : \overline{h} :: \overline{a} : \overline{h}$$

وحيث ان $\overline{a}$: $\overline{h} :: \overline{m}$: $\overline{h}$ يكون

$$\overline{c} : \overline{h} :: \overline{m} : \overline{h}$$

لـ

ح د : ح ه :: م : ن

وهو المطلوب

(تنبيه)

حين تكون النقطة المعلومه ح على الخط المنصف للزاوية المعلومه
ع ا صه يكون للمسئله حلان وحين تكون الكمية م مساوية للكمية
ن تختصر العملية بأن يؤخذ ح ه بقدر ا ب ثم يوصل ه ح د
فيكون ح د = ح ه وبهذه الكيفية تحل مسئلة هي
أن يكون المعلوم نقطة مثل ا بين ضلعي زاوية مثل د ح - كما في الشكل
١٤٢ من اللوحة ه ويكون المطلوب أن يثبت من ه هذه النقطة مستقيم
جزاه ا د و ا - الماكتسان بين النقطة المعلومه ا وضلي الزاوية
متساويان

(الدعوى السادسة العمالية)

(شكل ٢٨٨)

اذا علم مستقيمان مثل ا - و ح د ممكنا التقاطع لكن نقطة تقاطعهما
خارجة عن لوحة الرسم وكان المطلوب أن يثبت مستقيم ثالث مثل ح ل
أو ح د يمر بنقطة تقاطع الخطين المعلومين ا - و ح د وبهذه النقطة مثل
ح أو ح معينة الوضع بين ضلعي زاوية الخطين ا - و ح د أو خارجها
فلطريقة عمل ذلك حالتان

(الحالة الاولى)

أن يثبت من النقطة المعلومه ح مستقيم كيف اتفق مثل ه ح ف ثم يؤخذ
نقطة مثل ر على المستقيم ا - ويمتد منها مستقيم مثل ر ك يوازي
ه ف ويقسم ر ك الى جزئين أحدهما ر ل والاخر ل ك بحيث
يكون

ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف

[فتعين]

تتعين النقطة ل ويكون المستقيم ل ح هو المستقيم المطلوب
لانه يلزم من كون

ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف

أن تتقاطع الخطوط الثلاثة ر ه و ل ح و ك ف في نقطة واحدة
كما هو واضح مما تقرر في النظرية الثمانية والعشرين
(الحالة الثمانية)

أن يمد من النقطة المعلومة ح مستقيم كيف اتفق مثل ه ح ف ثم تؤخذ
نقطة مثل ر على المستقيم ا ب ويمد منها مستقيم مثل ر ك يوازي
ه ح ف ثم يقسم ر ك الى جزئين أحدهما ر ل والاخر ل ك بحيث
يكون

ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف

ثم يبحث عن النقطة ل التي هي النقطة الاقترانية للنقطة ل أي
المقارنة لها في الخط ر ك فيكون المستقيم ل ح هو المستقيم المطلوب
لانه يلزم من كون النقطتين ح و ح متوافقتي الاقتران أن يكون

ه ح : ح ف :: ه ح : ح ف

وكذا يلزم من كون النقطتين ل و ل متوافقتي الاقتران أن يكون

ر ل : ل ك :: ر ل : ل ك

وفد سبق بالعمل أن ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف

فاذن يكون ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف او

ر ل - ل ك : ل ك :: ه ح - ح ف : ح ف أي

ر ك : ل ك :: ه ف : ح ف

ويلزم من هذا أن تتقاطع الخطوط الثلاثة ر ه و ك ف و ل ح في نقطة واحدة

(تنبيه)

اعلم أنه يمكن تعيين النقطة ل مباشرة بدون احتياج للنقطة ل المتوافقة الاقتران مع النقطة ل

وذلك بأن يمد من النقطة المعلومة ح مستقيم مثل ح ف ه ثم يؤخذ نقطة مثل ر على المستقيم ا - ويمد منها مستقيم مثل ر ك يوازي ه ح ثم يبحث عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة ه ف و ر ك و ف ح ويؤخذ ك ل بقدر الرابع المناسب المذكور فتعين النقطة ل والمستقيم الذي يمر بها وبالنقطة المعلومة ح يمر بتقاطع الخططين المعلومين ا - و ح د لانه يلزم من كون

ه ف : ر ك :: ف ح : ك ل

أن تتقاطع الخطوط الثلاثة ر ه و ك ف و ل ح في نقطة واحدة

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ١٤٣ و ١٤٤ من اللوحة ٦)

إذا كان المطلوب إنشاء مربع يكافئ شكلاً متوازي الاضلاع معلوماً أو مثلثاً مفروضاً بطريقة ذلك أن يقال

أولاً ليكن ا - ح د شكلاً متوازي الاضلاع و ا - قاعدته و د ه ارتفاعه فيبحث عن الوسط المناسب بين القاعدة ا - والارتفاع د ه يأخذى الطريق المقررة في الدعوى الرابعة العملية وليكن ط ع هو الوسط

المناسب

المتناسب المذكور ثم ينشأ على ط ϵ مربع يكون هو المربع المطلوب
 أى المكافئ للشكل المتوازي الاضلاع ا-د ϵ لانه يلزم من كون ط ϵ
 وسطا متناسبا بين القاعدة ا-د والارتفاع د-ه أن يكون
 ا-د : ط ϵ :: ط ϵ : د-ه
 فاذن يكون

$$\overline{\text{ط} \epsilon} = \text{ا-د} \times \text{د-ه}$$

وحيث ان ا-د $\times$ د-ه يساوى مساحة متوازي الاضلاع ا-د-ه
 يكون المربع المنشأ على ط ϵ مكافئا لتوازي الاضلاع المعلوم وهو
 المطلوب

ونأى البكى ا-د هو المثلث المقروض و-د-ه قاعدته و اء ارتفاعه
 فيبحث عن الوسط المناسب بين القاعدة -د-ه ونصف الارتفاع اء
 وليكن ط ϵ هو الوسط المذكور ثم ينشأ على ط ϵ مربع يكون هو
 المربع المطلوب أى المكافئ للمثلث ا-د-ه
 لانه يلزم من كون ط ϵ وسطا متناسبا بين القاعدة -د-ه ونصف
 الارتفاع اء أن يكون

$$\text{د-ه} : \text{ط} \epsilon :: \text{ط} \epsilon : \frac{1}{2} \text{ اء}$$

فاذن يكون

$$\overline{\text{ط} \epsilon} = \frac{1}{2} \text{ اء} \times \text{د-ه}$$

وحيث ان -د-ه $\times \frac{1}{2}$ اء يساوى مساحة المثلث ا-د-ه يكون
 المربع المنشأ على ط ϵ مكافئا للمثلث ا-د-ه وهو المطلوب

• (تنبيه) •

اعلم انه قد سبق حل هاتين المسئلتين بطريقة حسابية فى الامثلة المشروحة
 فى الدعوى الرابعة العملية

• (الدعوى الثامنة العملية) •

• (شكل ١٤٥ من اللوحة ٦) •

إذا كان المطلوب إنشاء مستطيل مثل $ا د ه ط$ على مستقيم معلوم مثل
 $ا د$ بكافئ مستطيل $ا م$ فمفروض $ا م$ و $ا د$ فطريقة ذلك أن يبحث عن
 الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة المعروفة وهي $ا د$ و $ا م$ و $ا ح$
 وليكن $ا ط$ هو الرابع المناسب المذكور ثم ينشأ مستطيل $ا ح د ط$ ضاعبه
 المتجاورين $ا د$ والآخر $ا ط$ فيكون هو المستطيل المطلوب أي المكافئ
 للمستطيل المفروض $ا م د$

لأنه يلزم من كون $ا ط$ رابعاً متناسباً بامع الخطوط الثلاثة $ا د$ و $ا م$
 و $ا ح$ أن يكون

$$ا د : ا م :: ا ح : ا ط$$

فاذن يكون

$$ا د \times ا ط = ا م \times ا ح$$

أي أن المستطيل $ا د ه ط$ مكافئ للمستطيل $ا م د$ وهو المطلوب
 • (تنبيه) •

اعلم أنه قد سبق حل هذه المسئلة بطريقة حسابية في الامثلة المقررة
 في الدعوى الثانية انعمانية

• (امثلة) •

• (المثال الاول) •

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المكافئ لشكل متوازي الاضلاع
 قاعدته تسعة أذرع وارتفاعه أربعة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار
 القاعدة في مقدار الارتفاع فحذر حاصل الضرب هو مقدار ضلع المربع
 المطلوب

ففي هذا المثال بضرب تسعة أذرع في أربعة أذرع فيكون الحاصل من
 الضرب ستة وثلاثين ذراعاً مربعاً وهو مقدار مساحة كل من المستطيل
 المعلوم والمربع المطلوب فإذا أخذ جذر الستة والثلاثين كان ناتج الجذر

سنة أذرع وهو مقدار ضلع المربع المطلوب

(المثال الثاني)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المكافئ لثلث قاعدته اثنا عشر ذراعا وارتفاعه ستة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار القاعدة في نصف مقدار الارتفاع ثم يؤخذ جذر حاصل الضرب فيكون الناتج من الجذر هو مقدار ضلع المربع المطلوب

ففي هذا المثال يضرب اثنا عشر ذراعا في ثلاثة أذرع فيكون حاصل الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعا وهو مقدار مساحة كل من المثلث المعلوم والمربع المطلوب فإذا أخذ جذر الستة والثلاثين كان ناتج الجذر ستة أذرع وهو مقدار ضلع المربع المطلوب

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ارتفاع المستطيل الذي مقدار قاعدته اثنا عشر ذراعا ليكون مكافئا للمستطيل المعلوم مقدار قاعدته تسعة أذرع ومقدار ارتفاعه أربعة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار قاعدة المستطيل المعلوم في مقدار ارتفاعه ثم يقسم حاصل الضرب على مقدار القاعدة الأخرى التي يراد إنشاء المستطيل عليها فيكون خارج القسمة هو مقدار الارتفاع المطلوب

ففي هذا المثال يضرب تسعة أذرع في أربعة أذرع فيكون حاصل الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعا فإذا قسم هذا الحاصل على اثني عشر ذراعا كان خارج القسمة ثلاثة أذرع وهو مقدار ارتفاع المستطيل المطلوب

(الدعوى التاسعة العملية)

(شكل ١٥٢ من اللوحة ٦)

إذا علم مربع مثل Δ وكان المطلوب إنشاء مستطيل يكافئه ويكون مجموع ضلعيه المتجاورين مساويا لخط معلوم مثل AB فطريقة ذلك أن يرسم نصف محيط قطر AB ثم يرسم مستقيم مثل CD يوازي القطر AB

بشرط أن يكون البعد بينهما مساويا للخط $ا$ و المساوى لضع المربع المعلوم
 ثم ينزل على القطر $ا$ عمود مثل $هـ$ و من النقطة $هـ$ التي
 تقاطع الخط $هـ$ بالمحيط فهذا العمود يقسم القطر $ا$ الى قسمين هما
 $ا$ و $و$ والمستطيل المكون منهما هو المستطيل المطلوب لان مجموعهما
 يساوى $ا$ ومستطيلهما $ا$ و $و$ يساوى مربع العمود $هـ$ و
 كما نقر ذلك في نتيجة النظرية الثالثة والعشرين وحيث ان العمود $هـ$ و
 يساوى العمود $ا$ و $ا$ يساوى ضلع المربع المعلوم $م$ يكون هذا
 المستطيل مكافئا للمربع المعلوم $م$ وهو المطلوب

• (تنبيه) •

يلزم لا مكان حل هذه المسئلة ان لا يزيد البعد $ا$ عن نصف القطر أعني أن
 لا يزيد ضلع المربع المعلوم $م$ عن نصف الخط المعلوم $ا$

• (امثلة) •

• (المثال الاول) •

اذا علم مربع مساحته ستة وثلاثون ذراعا مربعا وكان المطلوب انشاء
 مستطيل يكافئه ويكون محيطه ستة وعشرين ذراعا فطريقة ذلك أن ينصف
 المحيط فيكون الناتج ثلاثة عشر ذراعا وهو مقدار مجموع الضلعين المتجاورين
 من المستطيل المطلوب

وحيث ان ضلع المربع المعلوم أقل من نصف هذا المجموع يعلم من ذلك أن حل
 هذه المسئلة ممكن وحيث نذكر معرفة كل من الضلعين المتجاورين من المستطيل
 المطلوب يرمز بالحرف $م$ لاحده ما فيكون الآخر مساويا للكمية
 ١٣ - $م$ فاذن يكون

$$م - (١٣ - م) = ٣٦ \text{ أو}$$

$$١٣ - م - م = ٣٦ \text{ أو}$$

$$١٣ - م = ٣٦$$

وبمقتضى

وبمقتضى القواعد المقررة فى الدرجة الثانية من علم الجبر يكون

$$\text{أو} \quad \sqrt{36 - \frac{13}{4}} \pm \frac{13}{4} = \text{سه}$$

$$\text{أو} \quad \sqrt{\frac{4 \times 36}{4} - \frac{13}{4}} \pm \frac{13}{4} = \text{مه}$$

$$\text{أو} \quad \sqrt{\frac{144 - 169}{4}} \pm \frac{13}{4} = \text{مه}$$

$$\text{مه} = \sqrt{\frac{13}{4}} \pm \frac{13}{4} = \frac{5}{2}$$

فاذا أضيف الكسر الثانى الذى هو $\frac{5}{2}$ الى الكسر الاول الذى هو $\frac{13}{4}$ كان الناتج مساويا لاحد بعدى المستطيل المطلوب انشاؤه وإذا طرح الكسر الثانى من الكسر الاول كان الباقى مساويا لبعده الآخر فاذن يكون أحد بعدى المستطيل $\frac{5}{2} + \frac{13}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ والبعده الآخر $\frac{13}{4} - \frac{5}{2} = \frac{13}{4} - \frac{10}{4} = \frac{3}{4}$ وذلك لان $4 = \frac{18}{4} = \frac{5}{2} - \frac{13}{4}$ و $13 = 4 \times 9$ و $36 = 4 \times 9$ و $13 = 4$ و $13 = 2 \times 13 = 26$.

وحيث ان هذا المستطيل مشتمل على شروط المسئلة فهو المطلوب

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربعا مساحته تسعة وأربعون ذراعا مربعا بحيث يكون مجموع الضلعين المتجاورين من ذلك المستطيل مساويا لاربعة عشر ذراعا فطريقة ذلك أن يقال حيث أن ضلع المربع المعلوم سبعة أذرع ونصف مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل سبعة أذرع كذلك يعلم من ذلك أن حل هذه المسئلة ممكن وحينئذ اعرفه كل من الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب يجرى العمل كما فى المثال الاول

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربعا مساحته أربع وستون ذراعا مربعا ويكون مجموع الضلعين المتجاورين من ذلك المستطيل أربعة عشر ذراعا فطريقة ذلك أن يقال حيث أن ضلع المربع المعلوم ثمانية أذرع ونصف مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل سبعة أذرع يعلم من ذلك أن حل هذه

المسئلة غير ممكن

- * (الدعوى العاشرة العملية) *
- * (شكل ١٥٣ من اللوحة ٦) *

اذا علم مربع مثل γ وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون فاضل ضاعبه المتجاورين مساويا لخط معلوم مثل α فطريقة ذلك أن يرسم محيط قطره الخط المعلوم α ثم يقام على طرف هذا القطر عمود مثل α ويؤخذ α بقدر ضاع المربع المعلوم γ ثم يوصل مستقيم بين النقطة δ والمركز ϵ فالمستقيمان $\delta\epsilon$ و $\gamma\epsilon$ يكونان الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب لان فاضلهما يساوى القطر هو α وأما قطر α وحاصل ضربهما وهو $\delta\epsilon \times \gamma\epsilon$ يساوى مربع α كما تبين ذلك في نتيجة النظرية الثانية والثلاثين وحيث كان مربع α يساوى المربع المعلوم γ يلزم أن يكون هذا المستطيل مكافئاً للمربع المعلوم γ وهو المطلوب

* (مثال) *

اذا علم مربع مساحته ستة وثلاثون ذراعاً مربعاً مثلاً وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون فاضل ضاعبه المتجاورين تسعة أذرع فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف α لاصغر الضلعين المتجاورين فيكون الضاع الآخر $\beta + ٩$ α وتكون مساحة المستطيل $(\beta + ٩) \alpha$ $\times$ α وحيث كان المطلوب أن يكون المستطيل مكافئاً للمربع المعلوم وكانت مساحة المربع المعلوم ستة وثلاثين ذراعاً مربعاً يلزم أن يكون

$$\alpha (\beta + ٩) \alpha = ٣٦ \quad \text{أو}$$

$$\alpha^2 + ٩\alpha = ٣٦ \quad \text{أو}$$

$$\alpha^2 + ٩\alpha = ٣٦ \quad \text{ومن هذه المعادلة ينتج أن}$$

$$\alpha = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \times 36}}{2} \quad \text{أو}$$

$$\begin{aligned} \text{سـ} &= \frac{\pm 9}{2} - \sqrt{\frac{\pm 9}{2} + \frac{4 \times 36}{2}} = \frac{\pm 9}{2} - \sqrt{\frac{\pm 9}{2} + 72} \\ \text{سـ} &= \frac{\pm 9}{2} - \frac{10}{2} = 3 \text{ أو سـ} = 12 \end{aligned}$$

وحيث ان المقدار الثاني سالب لا يؤخذ الا الاول وحينئذ يكون أصغر الضلعين ثلاثة أذرع وأكبرهما $9 + 3 = 12$ ذراعا وحيث أن $3 \times 12 = 36$ و $12 - 3 = 9$ يكون هذا المستطيل هو المستطيل المطلوب لانه قد اشتمل على شروط المسئلة بتمامها
 * (تنبيهان) *

الاول اعلم ان حل هذه الدعوى ممكن دائما
 الثاني اذا كان المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربع معلوما كان للمسئلة حلول لا حصر لاعددها بمعنى ان المسئلة التي بهذا المنطوق سيالة لا ينحصر حلها في مستطيل واحد

وذلك ان مربع الخط المماس أو يكافئ المستطيل الحادث من ضرب أى خط قاطع مدمن النقطة د مثل دو في جزئه الخارج ده أى ان

$$\overline{اد} = \overline{دو} \times \overline{ده} = \overline{دو} \times \overline{ده} = \overline{دو} \times \overline{ده} \text{ الخ}$$

و $\overline{دو}$ و $\overline{ده}$ و $\overline{دو}$ رموز لنقط التقاطع بفرض ان الخطوط

$\overline{دو}$ و $\overline{دو}$ الخ مرسومة

* (الدعوى الحادية عشر العملية) *

* (شكل ١٤١ من اللوحة ٥) *

اذا كان المطلوب تقسيم مستقيم محدود مثل ا- الى قسمين أكبرهما وسط متناسب بين الخط الكلى والجزء الآخر فذلك جملة حلول
 * (الحل الاول) *

لتكن النقطة و هى نقطة التقسيم و ا د هو القسم الاكبر المطلوب فعل منطوق المسئلة يلزم أن يكون

ا - : او :: او : و -

وقد تقرر في علم الحساب ان نسبة مجموع الحدين الاولين الى الحد الاول كنسبة مجموع الحدين الاخيرين الى الحد الثالث فاذن يكون

ا - + او : ا - :: او + و - : او

وحيث ان او + و - = ا - يكون

ا - + او : ا - :: ا - : ا -

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$(ا - + او) \times او = ا -$$

فالمجهول في هذه المعادلة هو او و ا - + او

ويعلم من هذه المعادلة ان الخطين المجهولين هما ضلعان مستطيل قاضل ضلعيه

يساوى الخط المعلوم ا - ومساحته تساوى ا - فاذن يمكن ايجاد

ذلك المستطيل بما ذكر في العملية السابقة فن ذلك تنتج طريقة رسمية

هي أن يقام الغنمود د على ا - من النهاية - ويؤخذ د و

مساويا لنصف الخط ا - ثم تؤخذ قفحة بالبسكار بقدر د ويرسم محيط

دائرة مركزه النقطة د ثم يوصل المستقيم ا ه فيكون أحد الخطين

المطلوبين = ا ه والاخر = ا د لان فاضلهما د ه = د و -

$$= ا - ومستطيلهما او ه ا د \times ا د = ا -$$

فاذن يكون ا - + او = ا ه ويكون او = ا د فاذا جعلت

النقطة ا مركزا ورسم قوس دائرة نصف قطره يساوى ا د كانت نقطة

تقاطع هذا القوس بالخط المعلوم ا - هي نقطة التقسيم المطلوبة فاذن

يكون او هو القسم الاكبر المطلوب

(تنبيه)

قد بين أن

$$او = ا د = ا ه - د = ا د - د = ا ه - د$$

$$\overline{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = 1$$

فاذا رمز بالحرف r للخط a يكون

$$\overline{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = \overline{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = 1$$

و $\frac{1}{r} = r$ فاذا كان يكون

$$(1 - \overline{\frac{1}{r}}) \times \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \overline{\frac{1}{r}} = 0$$

• (الحل الثاني) •

ليكن r هو القسم الاكبر المطلوب فعلى منطوق المسئلة يلزم أن يكون

$$a : r :: r : a - r$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$r^2 = a(a - r) = \overline{a} - a \times r$$

$$\overline{a} = a \times r + r^2$$

وبمقتضى القواعد المقررة في الدرجة الثانية من علم الجبر يكون

$$r^2 = \overline{a} - a \times r \quad \text{أو} \quad \overline{a} = a \times r + r^2$$

$$r^2 = \overline{a} - a \times r \quad \text{أو} \quad \overline{a} = a \times r + r^2$$

$$\text{أو } r^2 = \overline{a} - a \times r \quad (1)$$

$$\text{و } r^2 = \overline{a} - a \times r \quad (2)$$

وحيث ان مقدار r غالب ومقداره المطلق أكبر من الخط a بعلم

ن ذلك أن المقعدار الأول الذي هو $\frac{1}{2}$ = + $\sqrt{\frac{1}{2}}$ + $\frac{1}{2}$ هو الذي يوافق حل المسئلة وبالتأمل في هذه المعادلة وملاحظة
 انقز في التنبية العمومي المتعلق بالخطوط المتناسبة يعلم أن القسم الأكبر
 المطلوب يتحصل بطرح نصف الخط المعلوم $\frac{1}{2}$ من وتر مثل قائم الزاوية
 حذض المعى زاوية القائمة يساوى الخط المعلوم $\frac{1}{2}$ وضلعها الآخر
 ساوى نصفه ومن هنا نتج طريقة رسمية

في أن يقام العمود $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{2}$ من نهايته $\frac{1}{2}$ ويؤخذ $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$ = ويوصل $\frac{1}{2}$ ثم يطرح $\frac{1}{2}$ من $\frac{1}{2}$ أى يؤخذ $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ فيكون $\frac{1}{2}$ مساويا للقسم الأكبر المطلوب فإذا أخذ $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$ = أى ينقسم الخط المعلوم $\frac{1}{2}$ كما هو المطلوب ويكون

$\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$

* (الحل الثالث) *

أن يقام العمود $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{2}$ من نهايته $\frac{1}{2}$ ويؤخذ $\frac{1}{2}$ مساويا
 لنصف الخط $\frac{1}{2}$ ثم تؤخذ قفحة بالبيكار بعد $\frac{1}{2}$ ويرسم محيط دائرة
 مركزه النقطة $\frac{1}{2}$ ثم يوصل المستقيم $\frac{1}{2}$ فيقطع محيط الدائرة في النقطة
 $\frac{1}{2}$ ثم يؤخذ $\frac{1}{2}$ مساويا للبعد $\frac{1}{2}$ فينقسم الخط $\frac{1}{2}$ في النقطة و
 الى القسمين المطلوبين ويكون

$\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$

لانه يلزم من كون الخط $\frac{1}{2}$ عمودا متساويا من نهاية نصف القطر $\frac{1}{2}$ أن
 يكون مماسا للمحيط ولولمّا الخط $\frac{1}{2}$ على استقامته جهة $\frac{1}{2}$ حتى قطع
 المحيط في النقطة ه لحدث

$\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$

كما نقر ذلك في النظرية الثانية والثلاثين وقد نقر في علم الحساب أن نسبة
 المقدم ناقصا تاليه الى تاليه كنسبة المقدم الثاني ناقصا تاليه الى تاليه فاذن

يكون

پیکون

اه - ا - ا : ا :: ا - ا : ا
 ويلزم من كون نصف القطر ح مساوياً لنصف الخط ا أن يكون
 ده مساوياً للخط ا ويلزم من هذا أن يكون
 اه - ا - ا = ا = ا ، و
 ا - ا - ا = ا - ا = ا - ا

فازن ديکون

او : ا - :: و : او
وبتغيير موضع الوسطين يكون
ا - : او :: و : و
وهو المطلوب

* (4.1.1) *

اعلم أن الخط ah ينقسم في النقطة s كما ينقسم الخط ab في النقطة u وأعي أن

أه : هه :: هه : اه
لأنه قد تقرر أن

أه : أ- : أ- : أ- : أ- وأن أ- = ده
فأذن يكون

அஃ : டஃ :: டஃ : டஃ

ثم ان هذا التقسيم يسمى بنسبة الوسط والطرفين بمعنى أن الخط المقسوم بطريق
نسبة الوسط والطرفين هو ما كانت نسبتة لجزئه الاكبر كنسبة جزئه الاكبر
لجزئه الاصغر وبعبارة أخرى هو ما كان مربع جزئه الاكبر مكافئاً للمستطيل
المكون من ذلك الخط وجزئه الاصغر وسيأتى استعمال هذا التقسيم

* (الدعوى الثانية عشر العملة) *

* (شکل ۲۸۹) *

إذا كان المطلوب رسم مستقيم يمر دائرتين فطريقة ذلك أن يقال ليكن Γ مستقيماً مماساً للدائرتين من الخارج و Δ مماساً لهما من الداخل ولتكن α نقطة تقاطع Γ بخط المراكزين Γ و β نقطة تقاطع Δ بالخط Γ فيعلم من ذلك أنه إذا علم موضع النقطتين α و β يكفي أن يمتد من كل منهما مستقيم مماس لأحدى الدائرتين فيمس الأخرى وحينئذ تحل المسئلة فإذا وصل نصف القطرين Γ و Δ يكون المثلث $\Gamma\Delta\alpha$ مشابهاً للمثلث $\Gamma\Delta\beta$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$\Gamma\alpha : \Delta\alpha :: \Gamma\beta : \Delta\beta \quad (١)$$

ولو وصل نصف القطرين $\Gamma\beta$ و $\Delta\beta$ لكان المثلث $\Gamma\beta\Delta$ مشابهاً للمثلث $\Gamma\alpha\Delta$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$\Gamma\beta : \Delta\beta :: \Gamma\alpha : \Delta\alpha$$

وحيث أن $\Gamma\alpha = \Gamma\beta$ و $\Delta\alpha = \Delta\beta$ يكون

$$\Gamma\alpha : \Delta\alpha :: \Gamma\beta : \Delta\beta \quad (٢)$$

وحيث أن كلامنا من نصف القطرين Γ و Δ معلوم يعلم من ذلك أن النقطتين α و β نقطتان مقترنتان قائمتان للبعد $\Gamma\alpha$ إلى قسمين النسبة بينهما ثابتة ومساوية للنسبة المعلومة $\Gamma\beta : \Delta\beta$ ومن هنا نتج طريقة رسمية هي أن يرسم في الدائرة Γ قطر $\Gamma\alpha$ كيف اتفق مثل القطر $\Gamma\beta$ ثم يمتد من النقطة α نصف قطر مثل $\alpha\beta$ يوازي $\Gamma\beta$ ثم يوصل $\Gamma\beta$ و $\alpha\beta$ فتكون النقطتان α و β الحادتين من

تقاطع

تقاطع خط المركزين بالمستقيمين $ك ل$ و $ك ل$ النقطتين المطلوبتين

لانه يلزم من كون $ح ك$ مواز بالخط $ح ل$ أن يكون

$$ح ح : ح ك :: ح ك : ح ل$$

وحيث ان $ح ك = ح م$ و $ح ل = ح د$ يكون

$$ح ح : ح ك :: ح م : ح د$$

وكذا يلزم من تساوى الزوايا المتساطرة من المثلثين $ح ك ح$ و $ح د ح$ أن يكون

$$ح ح : ح ك :: ح م : ح د$$

فحينئذ اذا مضم كلتا النقطتين $ك$ و $د$ مماس لدائرة $ح$ أولدائرة $ح$ كان مماسا للآخرى

• (منافشات) •

الاولى اذا كان البعدين المركزين $ح ح$ أكبر من مجموع نصفي قطري الدائرتين امكن أن يمتد أربعة خطوط مستقيمة كل منها يمس الدائرتين لكن اثنان منها يمسانها من الخارج باقي تكون نقطة تلاقيهما بخطة المركزين غير محصورة بين المركزين المذكورين والاثنان الآخران يمسانها من الداخل بان تكون نقطة تلاقيهما بخطة المركزين محصورة بين هذين المركزين

والثانية اذا كان البعدين المركزين $ح ح$ مساويا لمجموع نصفي قطري الدائرتين امكن أن يمتد ثلاثة خطوط مستقيمة كل منها يمس الدائرتين لكن اثنان منها يمسانها من الخارج والثالث يمسهما من الداخل

والثالثة اذا كان البعدين المركزين $ح ح$ أصغر من مجموع نصفي قطري الدائرتين وأكبر من فاضلهما امكن أن يمتد خطان مستقيمان كلاهما يمس

الدائرتين من الخارج فقط

والرابعة اذا كان البعدين المركزين $ح ح$ مساويا للناضل نصف قطري
الدائرتين امكن أن يحدد مستقيم يسمى $م$ من الخارج فقط
والخامسة اذا كانت احدى الدائرتين داخل الاخرى لا يمكن أن يحد
مستقيم يسمى $م$ الامن الخارج ولا من الداخل لان المستقيم الذي يمر بحيط
الدائرة الصغرى يقطع محيط الكبرى كما هو واضح
(تنبيه)

اعلم أن حل هذه المسئلة بم هذه الطريقة اسهل من حلها بالطريقة المعتادة
المشيرة في ملحقات المقالة الثانية

(الدعوى الثالثة عشر العملية)

(شكل ٢٩٠)

اذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين معلومتين مثل $ا$ و $ب$
ويس مستقيما وضعه معين مثل $ل م$
فطريقة ذلك أن يقال لتكن $د$ هي نقطة تماس المحيط المطلوب بالمستقيم
المعلوم فلو وصل المستقيم $ل ا$ ومد على استقامته جهة $ا$ حتى قطع
المستقيم المعلوم في نقطة مثل $ه$ للزم أن يكون

$هـ - ل : هـ د :: د - ل : هـ ا$

فيعلم من هذه المناسبة أن البعدين نقطة التماس $د$ ونقطة تقاطع المستقيم
المعلوم بالمستقيم المار بنقطتين المعلومتين وسط متناسب بين المستقيمين
 $هـ - ل$ و $هـ ا$ ومن هنا تنتج طريقة رسمية

هي أن يوصل مستقيم بين النقطتين المعلومتين ويمد حتى يقطع المستقيم المعلوم
في نقطة مثل $ه$ ثم يبحث عن الوسط المتناسب بين المستقيمين $هـ - ل$ و $هـ ا$
ثم يؤخذ من المستقيم المعلوم $ل م$ البعد $هـ د$ أو $هـ م$ بقدر الوسط
المتناسب المذكور فتكون النقطة $د$ أو $م$ نقطة تماس المحيط المطلوب

بالمستقيم

بالمستقيم المعلوم ل م
 ورسم هذا المحيط بمذمن النقطة و عمود مثل و ر على ل م ثم يقيم
 عمود مثل س ك على وسط المستقيم ا ب فالنقطة ح التي هي تقاطع
 العمودين تكون مركز المحيط المطلوب ويكون ح و نصف قطره وبهذا تحل
 المسئلة

* (تنبيه) *

الوسط المناسب الذي يحدث من هذه المناسبة

هـ ر : سـ هـ : سـ هـ : هـ ا

يمكن رسمه في الشكل بعينه بسهولة وذلك أن يرسم على هـ نصف محيط
 دائرة ويقام من المنتطة ا العمود ا د فالوتر هـ د يكون هو الوسط
 المناسب المطلوب ويكون بعد ذلك أن يؤخذ هـ و بقدر هـ د

* (مناقشات) *

حل هذه المسئلة يمكن دائماً ما دامت النقطتان ا و ر موضوعتين
 في جهة واحدة بالنسبة للخط ل م وفي هذه الحالة يمكن رسم دائرتين
 كتأهما توافق حل المسئلة لكن احدهما تماس المستقيم المعلوم ل م
 في النقطة و والاخرى تمسه في النقطة و التي بعد هـ عن النقطة هـ
 بقدر الوسط المناسب هـ د

ولا يمكن حلها اذا كان المستقيم المعلوم واقعا بين النقطتين ا و ر
 وحين يكون المستقيم ا ب الماراً بالنقطتين المعلومتين ا و ر موازياً
 للمستقيم المعلوم ل م فلا يكون هو الوسط مناسب يمكن رسمه في هذه
 الحالة نقطة تماس المستقيم المعلوم ل م بالمحيط المطلوب توجد لا محالة
 في تقاطع المستقيم المعلوم ل م بالعمود المقام على وسط المستقيم ا ب
 ولا يوجد في هذه الحالة الا محيط واحد يوافق حل المسئلة

* (الدعوى الرابعة عشر العملية) *

* (شكل ٢٩١) *

إذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يس ضلعي زاوية ويمر بنقطة معينة
فيهم ما

فطريقة ذلك أن تتصف الزاوية المعلومة بالاستقيم لـ ϵ ثم ينزل من
النقطة α عمود مثل $\alpha\epsilon$ أعلى لـ ϵ ويؤخذ $\alpha\epsilon$ بقدر $\alpha\epsilon$
فالخط الذي يكون مركزه على لـ ϵ ويمر بالنقطة α يمر أيضاً بالنقطة

أ وحينئذ نزل هذه المسئلة الى السابقة
واعلم أنه يمكن رسم دائرتين كلتا هما توافق حل المسئلة
• (الدعوى الخامسة عشر العملية) •

• (شكل ٢٩٢) •

إذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين مثل α و β ويس محيط
دائرة أخرى معلومة مثل ϵ

فطريقة ذلك أن يقال ليهرض أن المسئلة محلولة وأن $\alpha\epsilon$ هو المحيط
المطلوب فلو تم الامام المشترك ϵ حتى قابل القاطع $\alpha\epsilon$ ومد من
النقطة ϵ مستقيم مثل $\epsilon\delta$ و قاطع المحيط الدائرة المعلومة ϵ للزم
أن يكون

$$\delta\epsilon = \alpha\epsilon \text{ أو } \delta\epsilon = \alpha\epsilon$$

$$\delta\epsilon = \alpha\epsilon \text{ و } \delta\epsilon = \alpha\epsilon$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$\delta\epsilon = \alpha\epsilon \text{ و } \delta\epsilon = \alpha\epsilon$$

وبعلم من هذه المتساوية أن المحيط الذي يمر بالنقطة α و β يمر
بالنقطة ϵ وحيث أن القاطع $\delta\epsilon$ عمود بالاختيار من النقطة ϵ
تكون النقطة ϵ من جملة نقط المحيط ومن هنا نتج طريقة رسمية .

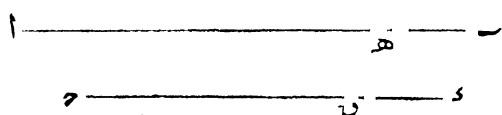
هي أن يمرر بالنقطتين المعلومتين α و β محيط دائرة يقطع محيط الدائرة

المعلومة δ في نقطتين مثل $هـ$ و $و$ ثم يوصل المستقيمان $ا$ و $هـ$ ويمتدان حتى يلتقيان في نقطة مثل $د$ ثم يمتد من النقطة $د$ مستقيماً مثل $د$ م يس محيط الدائرة المعلومة δ فالنقطة $م$ تكون نقطة تماس المحيطين وحينئذ يسهل رسم المحيط المطلوب

وحيث انه يمكن أن يمتد من النقطة $د$ مستقيماً آخر مثل $د$ م يس محيط الدائرة δ يعلم من ذلك أن لهذه المسئلة حلين

(الدعوى السادسة عشر العملية)

اذا علم مستقيمان غير اصبعين مثل $ا$ و $د$ وكان المطلوب ايجاد أكبر مقياس مشترك بينهما كهذين



فطريقة ذلك أن يوضع الخط الاصغر $د$ على الاكبر $ا$ مرة أو أكثر بقدر انحصار فيه فإذا اشتمل الخط الاكبر $ا$ على الخط الاصغر $د$ مرة واحدة مثلاً وفضل باق مثل $هـ$ أصغر من $د$ يوضع أيضاً هذا الباقي $هـ$ على الخط الاصغر $د$ فإذا اشتمل الخط $د$ على $هـ$ مرتين مثلاً وفضل باق مثل $و$ أصغر من $هـ$ يوضع أيضاً الباقي الثاني $و$ على الباقي الاول $هـ$ فإذا اشتمل $هـ$ على $و$ ثلاث مرات بدون باق كان $و$ أكبر مقياس مشترك بين المستقيمين المعلومين $ا$ و $د$

لان الباقي الاخير $و$ انما تحصل باتباع القاعدة المقررة في علم الحساب المستعملة في ايجاد القاسم الاعظم المشترك بين عددين

(تنبيه)

لايجاد النسبة بين المستقيمين $ا$ و $د$ بعدم معرفة أكبر مقياس مشترك

بينهما يقال حيث تبين ان

$$\begin{aligned} & \text{هـ} = ٣ \text{ د} \\ & \text{د} = ٢ \text{ هـ} + \text{د} = ٦ \text{ د} + \text{د} = ٧ \text{ د} \\ & \text{ا} = ١ \text{ د} + \text{هـ} = ٧ \text{ د} + ٣ \text{ د} = ١٠ \text{ د} \end{aligned}$$

يكون

$$\text{ا} : \text{د} :: ١٠ \text{ د} : ٧ \text{ د}$$

وبقسمة حدى النسبة الثانية على د يكون

$$\text{ا} : \text{د} :: ١٠ : ٧$$

* (الدعوى السابعة عشر العملية) *

اذا علم قوسان غير اصمين وكان المطلوب ايجاداً كبرمقياس مشترك بينهما فطريقة ذلك أن يقال حيث انه يمكن أن يوضع أحد القوسين على الآخر الذى نصف قطره كنصف قطر القوس الاوّل كما يمكن أن يوضع مستقيم على مستقيم آخر نتصل كبرمقياس مشترك بين القوسين المعلومين بعملية مشابهة للتي علمت لايجاداً كبرمقياس مشترك بين مستقيمين معلومين

* (تنبيه) *

اذا علمت زاويتان وكان المطلوب ايجاداً كبرمقياس مشترك بينهما فطريقة ذلك أن يرسم قوسان يحددان اضلاع الزاويتين المعلومتين بشرط أن يكون نصف القطر في كليهما واحداً ثم يبحث عن كبرمقياس مشترك بين هذين القوسين لتعلم النسبة بينهما فتكون النسبة المطلوبة مساوية للنسبة بين هذين القوسين

لانه قد تقرر في تنبيه النظرية الثامنة عشر من المقالة الثانية انه اذا كان بين القوسين المأخوذين في دائرة واحدة أو في دائرتين متساويتين مقياس مشترك كانت نسبة أحد القوسين الى الآخر كنسبة الزاوية المقابلة للقوس الاوّل الى الزاوية المقابلة للقوس الثانى

* (الدعوى الثامنة عشر العملية) *

اذا علم مستقيمان مثل $ا$ و $د$ وكان المطلوب إيجاد مقدار مقرب
من النسبة الكائنة بينهما كهذين

$$ا - ب \dots \dots \dots ١$$

$$د - هـ \dots \dots \dots ٢$$

فطريقة ذلك أن يقال ليكن المطلوب إيجاد نسبة $ا$ الى $د$ بأقل من
عشر (أى ان المقدار المتروك يكون أقل من عشر) فلذلك يؤخذ الخط $د هـ$
بقدر عشر $د$ ثم يوضع $هـ$ على $ا$ مرة أو أكثر بقدر عدد مرات
انحصاره فيه فاذا اشتمل $ا$ على $هـ$ سبع مرات مثلا وفصل باق مثل
 $س$ أصغر من $هـ$ كانت النسبة بين الخطين $ا$ و $د$ محصورة
بين هذين العددين $\frac{٧}{١١}$ و $\frac{٨}{١١}$ فالعدد الاول $\frac{٧}{١١}$ أقل من النسبة
المطلوبة بأقل من عشر والعدد الثانى $\frac{٨}{١١}$ أكثر من النسبة المطلوبة بأقل
من عشر

لانه يلزم من كون $ا < د \times \frac{٧}{١١}$ و $ا > د \times \frac{٨}{١١}$ أن
تكون نسبة $ا$ الى $د$ محصورة بين $\frac{٧}{١١}$ و $\frac{٨}{١١}$

(تنبيه) *

يمثل هذه الطريقة فيحصل مقدار مقرب من النسبة الكائنة بين قوسين
معلومين أو زاويتين معلومتين عندما يكون مقام الكسر الدال على درجة
التقريب قوة للعدد ٢ غير أن الطريقة الآتية عمومية لانها صالحة لجميع
الحالات

(الدعوى التاسعة عشر العمالية) *

اذا كان المطلوب إيجاد مقدار مقرب من النسبة الكائنة بين قوسين معلومين
أو زاويتين معلومتين

فطريقة ذلك أن يقال ليكن $ا$ و $س$ القوسين المعلومين أو القوسين اللذين
نسبتهما تساوى نسبة الزاويتين المعلومتين فلايجاد النسبة بين $ا$ و $س$
مقربة بأقل من سبع مثلا يضرب المقدار $ا$ فى ٧ ثم يوضع $س$ على

١٧ مرارا بقدر انحصاره فيه فاذا اشتمل ١٧ على - خمس عشرة مرة وفضل باق يوجدان

$$١٧ < - ١٥ \times \text{ و } ١٧ > - ١٦ \times$$

فاذن يكون

$$١ < - \frac{١٥}{٧} \times \text{ و } ١ > - \frac{١٦}{٧} \times$$

ويعلم من ذلك أن نسبة ١ الى - محصورة بين $\frac{١٥}{٧}$ و $\frac{١٦}{٧}$ فالمقدار الاول $\frac{١٥}{٧}$ ينقص عن النسبة المطلوبة بأقل من سبع والمقدار الثانى $\frac{١٦}{٧}$ يزيد على النسبة المطلوبة بأقل من سبع

(تنبيه)

اعلم انه يمكن استعمال هذه الطريقة لايجاد مقدار يقرب من النسبة الكائنة بين مستقيمين معلومين

(الدعوى العشرون العملية)

١ (شكل ١٥٤ من اللوحة ٦)*

اذا كان المطلوب ايجاد نسبة تقريبية بين قطر المربع وضلعه فطريقة ذلك ان يقال ليكن ا- ح- مربع ا د - قطره فلايجاد نسبة تقريبية بين القطر ا ح - والضلع ح - يوضع الضلع ح - على القطر ا ح - وذلك بان تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر ح - ويركز في النقطة ح - نصف دائرة فيظهر أن القطر ا ح - قدر الضلع ح - مرة واحدة ويبقى كسر مثل ا د أصغر من ح - فاذن يكون

$$\frac{ا ح}{ح} = ١ + \frac{ا د}{ح} = ١ + \frac{ا د}{٠٠٠٠} \quad (١)$$

ولمعرفة مقدار الكسر ا د يقال يلزم من كون الزاوية ا - ح - قائمة أن يكون الخط ا ب مماسا للمعيط ويلزم من هذا أن يكون

$$ا د : ا - :: ا - : ا هـ \text{ أو }$$

$$\frac{ا د}{ا هـ} = \frac{ا -}{ا}$$

وحيث ان الخط ا هـ يشتمل على ا - مرتين ويبقى كسر مثل ا د أصغر

من ا- يكون

$$\frac{1}{\frac{1}{5} + 2} = \frac{-1}{\frac{1}{5} + -2} = \frac{5}{-1}$$

وبهذا ناول المعادلة (١) الى هذه الصورة

$$\frac{1}{\frac{1}{5} + 2} + 1 = \frac{7}{-1} \quad \dots \dots (2)$$

وحيث ان $\frac{1}{\frac{1}{5} + 2} = \frac{5}{-1}$ يكون

$$\frac{1}{\frac{1}{5} + 2} + 1 = \frac{7}{-1}$$

متسلسل غير منتهى فاذا حسب مقدار هذا الكسر الى الحد الرابع يوجد أن

$$\frac{41}{29} = \frac{12}{29} + 1 = \frac{7}{-1}$$

أى ان النسبة التقريبية بين قطر المربع وضلعه هى :: ٤١ : ٢٩
واذا حسبت بجهل حدودا اكثر من السابقة سهل تحصيل نسبة اكثر قربا من
هذه النسبة وقد ذكرنا فى النتيجة الثانية من النظرية العاشرة ان نسبة قطر
المربع لضلعه كنسبة جذرا الاثنين للواحد وبما ذكرى محل ما ذكره من الامثلة
فنقول

• (المثال الاول) •

أن يكون المطلوب ايجاد قطر المربع الذى ضلعه نسبة أذرع

قطريه ذلك أن يضرب مقدار الضلع المعلوم فى هذه النسبة $\frac{41}{29}$
فان يكون

$$7 + \frac{2}{29} = \frac{200}{29} = \frac{41}{29} \times 5 = 5$$

او يضرب مقدار الضلع المعلوم فى $\frac{2}{29}$ فيحصل المطلوب

• (المثال الثانى) •

أن يكون المطلوب ايجاد ضلع المربع الذى قطره احد عشر ذراعا

فطريقة ذلك أن يضرب مقدار القطر المعلوم فى هذه النسبة $\frac{29}{41}$ او يقسم
القطر المعلوم على $\frac{41}{29}$ فيحصل المطلوب

• (الدعوى الحادية والعشرون العملية) •

إذا كان المطلوب إيجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مستطيلين معلومين

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف α لأحد بعدي المستطيل الأول وبالحرف β لبعده الآخر وبالرمزين α' و β' لبعدي المستطيل الثاني وبالحرفين γ و δ للمستقيمين المطلوبين ثم يقال حيث $\alpha\beta = \gamma\delta$ كان المطلوب أن يكون

$$\gamma : \delta :: \alpha : \beta \quad \text{ينبغي أن}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}$$

وحيث أن أحد الخطين اختياري فلأمانع من فرض الخط γ مساويا للخط β أو الخط α فإذا جعل $\gamma = \beta$ آت المعادلة السابقة إلى هذه

$$\beta = \frac{\alpha\beta}{\delta} \quad \text{ومن هذه المعادلة ينتج أن}$$

$$\alpha : \beta :: \beta : \delta$$

فيعلم من ذلك أن ثاني الخطين المطلوبين δ رابع متناسب مع الخطوط الثلاثة α و β و β فإذا بحث عن هذا الرابع المتناسب كانت نسبته إلى الخط β مساوية لنسبة المستطيل $\alpha\beta$ إلى المستطيل $\beta\delta$ وبما ذكره من الأمثلة فنقول

• (المثال الأول) •

أن يكون المطلوب إيجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مربعين معلومين مثل α و α' فطريقة ذلك أن يبحث عن الثالث المتناسب مع الخطين α و α'

• (المثال الثاني) •

أن يكون المطلوب إيجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين
مثليين أو شكين $\llcorner$ كثيرى الاضلاع معلومين فطريقة ذلك أن يقال حيث
انه يمكن تحويل أى شكل كثير الاضلاع الى مربع يكافئه يعلم من ذلك انه
لايجاد المستقيمين المطلوبين يلزم ان يبحث عن ضلع المربع المكافئ لاحد
الشكين المعلومين وعن ضلع المربع المكافئ للشكل الآخر فانثالث
المتناسب مع ضلعى هذين المربعين يكون هو المطلوب

• (المثال الثالث) •

اذا كان المطلوب إيجاد مستقيمين مثل $ص$ و $هـ$ تكون نسبة احدهما
الى الآخر كنسبة حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة مثل $ا$ و $ب$
و $ج$ الى حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة $\llcorner$ كذلك من

أ و ب و ج

فطريقة ذلك أن يقال حيث كان المطلوب أن يكون

$$ص : هـ :: ا \times ب \times ج : د \times هـ \times ز$$

ينفج من ذلك أن

$$ص = \frac{ا \times ب \times ج \times هـ}{د \times ز}$$

وحيث ان احد الخطين المطلوبين اختياري يمكن ان يجعل $ص = د$
وحينئذ يكون

$$ص = \frac{ا \times ب \times ج}{ز}$$

فيعلم من هذه المعادلة انه يلزم أن يبحث أولاً عن الرابع المتناسب مع الخطوط
الثلاثة أ و ب و ج وليكن $د$ مثلاً وثانياً عن الرابع المتناسب مع
الخطوط الثلاثة د و ب و ج وليكن $ز$ فيكون $د$ مساوياً

لمقدار الخط المجهول $ص$ وحينئذ يكون

$$ل : ص :: ا : - \times - \times - : آ \times - \times -$$

• (المثال الرابع) •

أن يكون المطلوب إيجاد مستقيمين مثل $ص$ و $ص$ تكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة حاصل ضرب أربعة خطوط مستقيمة معلومة مثل $ا$ و $-$ و $-$ و $-$ إلى حاصل ضرب أربعة خطوط مستقيمة معلومة كذلك مثل $آ$ و $-$ و $-$ و $-$ فطريقة ذلك أن يقال حيث كان المطلوب أن يكون

$$ص : ص :: ا : - \times - \times - : آ \times - \times -$$

ينتج أن

$$\frac{ا \times - \times - \times - \times ص}{ا \times - \times - \times -} = ص$$

وحيث إن أحد الخطين اختياري يمكن أن يجعل $ص = د$ وحينئذ يكون

$$\frac{ا \times - \times - \times -}{ا \times - \times -} = \frac{د \times - \times - \times -}{ا \times - \times -} = ص$$

فيعلم من هذه المعادلة أنه يلزم أن يبحث أولاً عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة $ا$ و $-$ و $-$ وليكن $ل$ مثلاً وثانياً عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة $-$ و $ل$ و $-$ وليكن $ل$ وثالثاً عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة $-$ و $ل$ و $د$ وليكن $ل$ فيكون أحد المستقيمين المطلوبين $ص = ل$ والمستقيم الآخر $ص = د$ فاذن يكون

$$ل : د :: ا : - \times - \times - : آ \times - \times -$$

وهو المطلوب

وكل مثال من هذا القبيل يحل بالطريقة المذكورة

* (الدعوى الثانية والعشرون العملية) *

* (شكل ١٤٦ من اللوحة ٦) *

إذا كان المطلوب انشاء مثلث يكافئ شكلاً كثيراً الاضلاع معلوماً فطريقة ذلك أن يقال ليكن ABC هو الشكل المعلوم في وصل A و B والقطر AC الذي يفصل المثلث ABC ثم يرسم من النقطة C مستقيم مثل CD يوازي AB ويمتد حتى يقطع الامتداد AB ثم يوصل D و C فيكون الشكل الكثير الاضلاع ACD هو مكافئ للشكل ABC والنقص عنه مضاعفان للمثلث ABC و هو قاعدة مشتركة هي BC وارتفاعها مشتركان رأسيهما C و B موضوعان على الخط AD الموازي للقاعدة فاذن يكون هذان المثلثان متكافئين فاذا اضيف لكل منهما الشكل ABC ينتج أن الشكل ACD هو مكافئ للشكل ABC و ACD هو مكافئ له وحيداً فيتم قول الخمس ABC هو الى ACD يكافئه وهو BCD

وهذه الطريقة يمكن تطبيقها على أي شكل كثير الاضلاع كثيراً ما كان عدد أضلاعه لان الشكل الذي يكون عدداً ضلعه m مثلاً يتم قول في المرة الاولى الى الشكل يكافئه عدداً ضلعه $m - 1$ وهذا يتم قول الى الشكل آخر يكافئه عدداً ضلعه $m - 2$ وهكذا فلا بد أن ينتهي هذا التحويل الى مثلث يكافئ الشكل المفروض

* (تنبيه) *

قد تقدم أن كل مثلث يمكن تحويله الى مربع يكافئه وذلك بعملية ذلك في الدعوى السابعة العملية فينتج أن يمكن دائماً انشاء مربع يكافئ مضاعفاً

مستويا معلوما وهذا هو المنحني بترتيب الشكل المستقيم الاضلاع
ومسئله ترتيب الدائرة مقصورة على ايجاد مربع يكافئ دائرة قطرها معين
* (الدعوى الثالثة والعشرون العملية) *

* (شكل ١٤٧ من اللوحة ٦) *

اذا كان المطلوب انشاء مربع يساوى مجموع مربعين معلومين الزوايا فاضلها
قطر يسه ذلك أن يقال ليكن a ضلع احد المربعين المعلومين و b ضلع
المربع الآخر فلايجاد مربع يساوى مجموع هذين المربعين يرسم مستقيمان
متعامدان مثل h و $و$ غير متناهيين ثم يؤخذ $هـ$ ب قدر الضلع
 a و $هـ$ ب قدر الضلع b ويوصل $د$ فيكون $د$ هو ضلع المربع
المطلوب

لانه يلزم من كونه المثلث $د هـ ر$ قائم الزاوية في $هـ$ أن يكون المربع
المنشأ على الوتر $د ر$ مساويا لمجموع المربعين المنشأين على الضلعين $د هـ$
و $هـ ر$ فاذن يكون

$$د ر^2 = د هـ^2 + هـ ر^2$$

وحيث ان $د هـ = ا$ و $هـ ر = ب$ يكون

$$د ر^2 = ا^2 + ب^2 \text{ وهو المطلوب}$$

ولايجاد مربع يساوى فاضل هذين المربعين المعلومين يرسم مستقيمان
متعامدان مثل $ح$ و $و$ غير متناهيين ثم يؤخذ البعد $هـ ر$
بقدر أصغر الضلعين المعلومين $ا$ و $ب$ ثم تؤخذ قوسه باليسار بقدر البعد
 $ر ح$ المساوى لأكبر الضلعين المعلومين $ا$ و $ب$ ويركز في النقطة $ر$
ويرسم قوس دائرة يتقاطع الخط $هـ ح$ في نقطة مثل $ح$ فيكون $هـ ح$
هو ضلع المربع المساوى للفاضل بين المربعين المعلومين $ا$ و $ب$

لانه يلزم من كونه المثلث $هـ ر ح$ قائم الزاوية في $هـ$ أن يكون المربع
المنشأ على الضلع $هـ ح$ مساويا للفاضل بين مربع الوتر $ر ح$ ومربع

الضلع الآخر $هـ ر$ أعنى أن

$$\overline{هـ ح} = \overline{ر ح} - \overline{هـ ر}$$

وحيث أن $ر ح = ا$ و $هـ ر =$ يكون

$$\overline{هـ ح} = ا - ر \text{ وهو المطلوب}$$

(تنبيه)

يمكن إيجاد مربع يساوى مجموع مربعات بقدر ما يراد لان العملية التى بواسطتها يتحول المربع الى مربع واحد يتحول بها ثلاث مربعات الى مربعين وهذان المربعان يتحولان الى واحد وكذا يمكن إيجاد مربع يساوى الفرق بين جله مربعات وجله مربعات اخرى أقل من مجموع الأول

(أمثلة)

(المثال الأول)

أن يكون المطلوب إيجاد مربع يساوى مجموع ثلاثة مربعات معلومة فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف $س$ الضلع المربع المطلوب وبالحرف $ز$ ضلع المربع الأول وبالحرف $د$ ضلع المربع الثانى وبالحرف $هـ$ ضلع المربع الثالث فعلى منطوق المثال يكون

$$س = ز + د + هـ$$

ويعلم من هذه المعادلة انه يلزم أن يبحث عن مربع يساوى مجموع المربعين

الأولين $ز$ و $د$ وليكن $م$ ثم يبحث عن مربع يساوى $م + هـ$

وليكن $ن$ فيكون $ن$ هو المربع المطلوب

وعلمية الرسم أن ترسم زاوية قائمة مثل $ا ح ك$ كفى (الشكل ٢٩٣)

ويؤخذ البعد $ا ح = ز$ والبعد $ا د = د$ ويوصل $د ز$ ثم يقام

العمود $دو$ على $د ز$ ويؤخذ البعد $د هـ = هـ$ ويوصل $هـ ز$

فيكون هـ د هو ضلع المربع المطلوب

(المثال الثاني)

أن يكون المطلوب إيجاد مربع يساوي الفاضل بين خمسة مربعات معلومة وثلاثة مربعات اخر معلومة كذلك

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف سـ ضلع المربع المطلوب وبالحروف ا و - و ح و د و هـ لاضلاع المربعات الخمسة وبالرموز آ و سـ و م لاضلاع المربعات الثلاثة التي يراد طرحها من المربعات الاولى فعلى منطوق المثال يكون

$$سـ^2 = آ^2 + ا^2 + ح^2 + د^2 + هـ^2 - أ^2 - ب^2 - ج^2 \text{ أو}$$

$$سـ^2 = آ^2 + ا^2 + ح^2 + د^2 + هـ^2 - (أ^2 + ب^2 + ج^2)$$

ويعلم من هذه المتساوية انه يلزم أن يبحث أولاً عن مربع مثل م يساوي مجموع المربعات آ و - و ح و د و هـ وثانياً عن مربع مثل م يساوي مجموع المربعات آ و - و ح ثم يبحث عن مربع مثل د يساوي الفاضل بين هذين المربعين م و م فيكون د هو المربع المطلوب

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المساوي لمجموع مربعين ضلع أحدهما يساوي أربع أذرع وضلع الآخر يساوي ثلاث أذرع فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف سـ لضلع المطلوب فعلى منطوق المسئلة يكون

$$سـ^2 = ٤^2 + ٣^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$٥ = ٢٥ \sqrt{\quad} = \text{سه}$$

أعنى ان ضلع المربع المطلوب يساوى خمسة أذرع

(المثال الرابع)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المساوى لفاضل مربعين ضلع أحدهما يساوى ثلاثة عشر ذراعا وضلع الآخر يساوى اثني عشر ذراعا فطريقة ذلك أن يرهن بالحرف سه للضلع المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{سه} = ١٢ - ١٣ = ١٢ - ١٣ = ١٠٤٤ - ١٠٦٩ = ٢٥$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$٥ = ٢٥ \sqrt{\quad} = \text{سه}$$

أعنى ان ضلع المربع المطلوب يساوى خمس أذرع

(الدعوى الرابعة والعشرون العملية)

(شكل ١٥٠ من اللوحة ٦)

إذا كان المطلوب انشاء مربع نسبته الى المربع المعلوم $ا - ب$ كنسبة خط معلوم مثل $ك$ لخط آخر كذلك مثل $ل$ فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه مثل $هـ ر$ ويؤخذ عليه البعد $هـ و = ك$ والبعد $و ر = ل$ ويرسم نصف محيط قطره $هـ ر$ ويقام من النقطة $و$ العمود $و ح$ على القطر ثم يوصل الوتران $هـ و$ و $و ر$ ويتان بغير تحديد ثم يؤخذ $ح ع$ يساوى $ا - ب$ الذى هو ضلع المربع المعلوم ثم يمتد من النقطة $ع$ مستقيم مثل $ع ط$ يوازي $هـ ر$ فيكون $ح ط$ ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من توازي $هـ ر$ و $ط ع$ أن يكون

$$ح ط : ح ع :: ح و : ح هـ$$

وقد تقر في علم الحساب ان المقادير المتناسبة مربعاتها متناسبة فاذن يكون

$\overline{حط} : \overline{حع} :: \overline{ح ه} : \overline{ح ر}$ (١)
وحيث ان المثلث $ه ح ر$ قائم الزاوية في $ح$ يكون

$\overline{ح ه} : \overline{ح ر} :: \overline{هو} : \overline{ور}$ أو $::$ الخط $ك$: الخط $ل$

كما تقرر ذلك في النظرية الثالثة والعشرين ويلزم من اشتراك نسبة $\overline{ح ه}$

: $\overline{ح ر}$ في هذه المناسبة وفي المناسبة (١) أن يكون

$\overline{حط} : \overline{حع} ::$ الخط $ك$: الخط $ل$

وحيث كان $\overline{حع} = \overline{ا - ب}$ يلزم أن يكون

$\overline{حط} : \overline{ا - ب} ::$ الخط $ك$: الخط $ل$

والمطلوب أن يكون

$\overline{س ه} : \overline{ا - ب} ::$ الخط $ك$: الخط $ل$

فاذن يكون $\overline{س ه} = \overline{حط}$ وهو المطلوب

(امثلة)

(المثال الاول)

اذا علم مربع مثل $ا - ح د$ كما في (الشكل ٢٩٤) وكان المطلوب انشاء
مربع ضعفه

فطريقة ذلك أن يوصل القطر $د ه$ ويؤخذ $ه ه$ بقدر $د ه$ فيكون
 $ه ه$ ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون $\overline{س ه} = \overline{حط} + \overline{ح د} = \overline{ح د} + \overline{ح د} = ٢ \overline{ح د}$ أن يكون

$\overline{س ه} = ٢ \overline{ح د}$ وهو المطلوب

(المثال الثاني)

اذا علم مربع مثل $ا$ $س$ $د$ كافي (الشكل ٢٩٤) وكان المطلوب انشاء
مربع يكون ثلاثة أمثاله في السطح

فطريقة ذلك أن يوصل القطر $س$ $د$ ويؤخذ $س$ $ه$ بقدر $س$ $د$ ثم يقام
العمود $ه$ $و$ على $س$ $ه$ ويؤخذ $ه$ $و$ حتى يقطع $س$ $د$ ثم يؤخذ $ه$ $ج$
بقدر $س$ $د$ ويوصل $ج$ $و$ فيكون $ج$ $و$ ضلع المربع المطلوب

لأنه يلزم من كون $ج$ $و$ = $س$ $ه$ + $ه$ $و$ $و$

هو $س$ $د$ = $س$ $د$ أن يكون

$ج$ $و$ = $س$ $د$ وهو المطلوب

(طريقة أخرى)

ليمكن من ضلع المربع المطلوب $و$ $ج$ ضلع المربع المعلوم فعل منطوق
المثال يكون

$$س \text{ $\times$ } ٣ = ا \text{ $\times$ } ١ \text{ أو } س \text{ $\times$ } ٣ = ا \text{ $\times$ } ١$$

ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$س : ا :: ٣ : ١$$

فيعلم من هذه التناسبة أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مسـتين
أحد هما يساوي ضلع المربع المعلوم والآخر يساوي ثلاثة أمثاله

(المثال الثالث)

اذا علم مربع مثل $ا$ وكان المطلوب ايجاد مربع آخر مساحته مساوية
لمساحة المربع المعلوم مضروبة في كمية معينة مثل $م$

فطريقة ذلك أن يقال ليكن $س$ $د$ ضلع المربع المطلوب فعل منطوق المثال
يكون

$$س \text{ $\times$ } م = ا \text{ $\times$ } م$$

ويعلم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما
يساوى ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى حاصل ضرب هذا الضلع
في الكمية المراد ضرب المربع المعلوم فيها فإنه إذا بحث عن الوسط المتناسب
المذكور وانتهى عليه مربع كان هو المربع المطلوب

*** (النال الرابع) ***

إذا علم مربع ضلعه δ وكان المطلوب إيجاد ضلع مربع آخر مساحته مساوية
لمساحة المربع المعلوم مقسومة على كمية معينة مثل m
فطريقة ذلك أن يتسال ليكن s ضلع المربع المطلوب فعلى منطوق المثال
يكون

$$s^2 = m^2 = \delta \times \frac{1}{m} = \delta \times \frac{1}{m}$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$\delta : s :: m : m^2$$

فيه لم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين δ و m^2 فلا يجاب
مقدار الضلع s يرسم نصف محيط دائرة قطره يساوى ضلع المربع المعلوم
 δ ويقسم هذا القطر إلى أقسام متساوية عددها يساوى m ثم ينشأ من
النقطة s التي هي النهاية المشتركة بين القسم الأول والثاني عمود على
القطر ويمتد حتى ينتهي إلى المحيط ثم يوصل الوتر s فيكون s هو
ضلع المربع المطلوب

$$\text{لان } \overline{\delta} : \overline{s} :: \overline{s} : \overline{m^2} \text{ ع } \delta : \text{ع } s :: \text{ع } s : \text{ع } m^2$$

وحيث أن $\delta \times \text{ع } m^2 = \text{ع } s$ يكون

$$\overline{\delta} : \overline{s} :: \overline{s} : \overline{m^2} \text{ ع } \delta : \text{ع } s :: \text{ع } s : \text{ع } m^2$$

وبقسمة حتى النسبة الثانية على $\text{ع } s$ يكون

$$\overline{\delta} : \overline{s} :: \overline{s} : \overline{m^2}$$

أو $\frac{ع}{م} :: \frac{ع}{م} :: ١$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$\frac{ع}{م} = \frac{ع}{م} \text{ وهو المطلوب}$$

فإذا كان المثلث ايجاد مربع مساحته خمس مساحة مربع معلوم مثل $\frac{ع}{م}$ يبحث عن الوسط التناسب بين مستقيمين أحدهما يساوي ضلع المربع المعلوم $\frac{ع}{م}$ والآخر يساوي خمسة ثم ينشأ على الوسط التناسب المذكور مربع يكون هو المطلوب

وإذا كان المطلوب ايجاد مربع مساحته خمسة أمثال مساحة مربع معلوم مثل $\frac{ع}{م}$ يبحث عن الوسط التناسب بين مستقيمين أحدهما يساوي ضلع المربع المعلوم $\frac{ع}{م}$ والآخر يساوي خمسة أمثاله ثم ينشأ على الوسط التناسب المذكور مربع يكون هو المطلوب

* (المثال الخامس) *

أن يكون المطلوب انشاء مربع نسبتته الى مربع معلوم كنسبة $\frac{ع}{م}$ الى $\frac{ع}{م}$

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم $\frac{ع}{م}$ كيف اتفق ويجعل وحدة خطية ثم يرسم مستقيم غير متناه مثل $\frac{ع}{م}$ كافي (الشكل ١٥٠) من اللوحة ٦ ويؤخذ عليه بعد مثل $\frac{ع}{م}$ ويساوي ثلاثة أمثال الوحدة المذكورة ثم يؤخذ بجانبه بعد مثل $\frac{ع}{م}$ ويساوي خمسة أمثال الوحدة المذكورة ويرسم نصف محيط دائرة قطرها $\frac{ع}{م}$ ويقام من النقطة $\frac{ع}{م}$ والعمود $\frac{ع}{م}$ على القطر ثم يوصل الوزان $\frac{ع}{م}$ و $\frac{ع}{م}$ ويتدان بغير تحديد ثم يؤخذ $\frac{ع}{م}$ بقدر ضلع المربع المعلوم $\frac{ع}{م}$ من النقطة $\frac{ع}{م}$ مستقيم مثل $\frac{ع}{م}$ يوازي $\frac{ع}{م}$ فيكون $\frac{ع}{م}$ مساويا لضع المربع المطلوب أعني أن نسبة المربع المتشاكل $\frac{ع}{م}$ الى المربع المعلوم كنسبة الثلاثة

لعمدة

* (حل آخر) *

ليكن سم ضلع المربع المطلوب و ح ضلع المربع المعلوم فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{سم} : \text{ح} :: ٣ : ٥$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$\frac{\text{سم}^2}{٥} \times ٣ = \frac{\text{ح}^2}{٣} \times ٥ = \text{سم}^2$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$\text{ح} : \text{سم} :: \text{سم} : \frac{\text{ح}^2}{٥}$$

فيعلم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ضلع المربع المعلوم والاخر يساوى ثلاثة أخماسه

* (الدعوى الخامسة والعشرون العملية) *

* (شكل ١٢٩ من اللوحة ٥) *

إذا علم شكل مستقيم الاضلاع مثل ا ب ح د ه وكان المطلوب انشاء شكل

مشابه له على ضلع معلوم مثل و ر الذى هو نظير الضلع ا ب

فطريقة ذلك أن توصل اقطار الشكل المعلوم وهى ا ب و ا د الخ ثم

تنشأ فى النقطة و زاوية مثل ر و ح تساوى الزاوية ا ب ح وتنشأ

فى النقطة ر زاوية مثل ر و ح تساوى الزاوية ا ب ح فالمثلث و ر ح

الحادث من تلاقى الخطين و ح و ر ح يكون مشابهاً للمثلث ا ب ح

وكذا ينشأ مثلث مثل و ح ط على الضلع و ح الذى هو نظير الضلع ا ب

يشابه المثلث ا ب ح وينشأ أيضاً مثلث مثل و ط ع على الضلع و ط

الذى هو نظير الضلع ا د يشابه المثلث ا ب ح فالشكل الحادث و ر ح ط

يكون هو الشكل المطلوب المشابه لكثير الاضلاع المعلوم ا ب ح د ه لان

هذين الشكلين مركبان من عدد واحد من المثلثات المتشابهة والمتماثلة

الوضع

* (الدعوى

• (الدعوى السادسة والعشرون العملية) •

اذا علم شكلان متشابهان وكان المطلوب انشاء شكل يشابههما ويساوى مجموعهما وفاضلهما

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف α لمساحة أحد الشكليين وبالحرف β لاحد اضلاعه وبالحرف γ لمساحة الشكل الآخر وبالحرف δ اضله المناظر للضلع α وبالحرف ϵ لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ζ لضلعه المناظر لكل من الضلعين α و β ثم يقال حيث ان نسبة الاشكال المتشابهة الى بعضها كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة الى بعضها يكون

$$\alpha : \beta :: \alpha^2 : \beta^2$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$\alpha : \beta :: \alpha^2 + \beta^2 : \alpha^2 + \beta^2$$

وكذا يكون

$$\alpha : \beta :: \alpha^2 : \beta^2$$

وحيث كان المطلوب أن يكون $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ ينتج من مقارنة هذه التناسبة بالسابقة أن

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

فيعلم من ذلك أن الضلع γ وتر مثلث قائم الزاوية ضلعا الم المحيطان بزاويتي القائمة هما α و β فحينئذ إذا انشئ على الضلع γ شكل مشابه للشكل α أو للشكل β يكون هو الشكل المطلوب أى المساوى لمجموعهما

واذا كان المطلوب أن يكون الشكل γ مساويا لفاضل الشكليين المعلومين α و β أى $\gamma = \alpha - \beta$ يقال حيث ان

$$\begin{aligned} & \text{ح} : \text{ك} :: \text{أ} : \text{ر} \quad \text{يلزم أن يكون} \\ & \text{ح} : \text{ع} - \text{ك} :: \text{أ} : \text{أ} - \text{ر} \quad \text{وكذا يكون} \\ & \text{ح} : \text{ر} :: \text{أ} : \text{صه} \end{aligned}$$

فينتج من مقارنة هاتين النسبتين أن

$$\text{صه} = \text{أ} - \text{ر}$$

وبعلم من ذلك أن الضلع صه هو ضلع من مثلث قائم الزاوية وتره ٢
وضلعه الآخر ر وأنه إذا انشئ على الضلع صه شكل مشابه للشكل
ح أول للشكل ك يكون هو الشكل المطلوب أى المساوى لفاضلهما

• (الدعوى السابعة والعشرون العملية) •

إذا كان المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما وتكون نسبته اليه كنسبة
مقدار معين مثل ر الى مقدار آخر كذلك مثل د
فطريقة ذلك أن يرز بالحرف ح مساحة الشكل المعلوم وبالحرف ٢
لاحد اضلاعه وبالحرف صه مساحة الشكل المطلوب وبالحرف صه
ضلعه المناظر للضلع ا فعلى منطوق المسئلة يكون

$$\text{صه} : \text{ح} :: \text{م} : \text{د}$$

وحيث ان هذين الشكلين متشابهان يكون

$$\text{صه} : \text{ح} :: \text{صه} : \text{أ}$$

فينتج من هاتين النسبتين أن

$$\text{صه} : \text{أ} :: \text{م} : \text{د}$$

فحينئذ يعين الضلع صه بالطريقة المقررة في الدعوى الرابعة والعشرين
العملية ويعد تعيينه ينشأ عليه شكل مشابه للشكل المعلوم ح فيكون
هو المطلوب

• (أمثلة) •

* (امثلة) *

* (المثال الاول) *

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ومساحته ربع مساحة الشكل المعلوم

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعديساوى نصف أحد اضلاع الشكل المعلوم ويعتبران ضلعين متناظرين ثم ينشأ على هذا البعد شكل يشابه الشكل المعلوم فيكون هو الشكل المطلوب

* (المثال الثانى) *

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ومساحته تسعة أمثال مساحة الشكل المعلوم

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعديساوى ثلاثة أمثال أحد اضلاع الشكل المعلوم ويعتبران ضلعين متناظرين ثم ينشأ على هذا البعد شكل يشابه الشكل المعلوم فيكون هو الشكل المطلوب

* (المثال الثالث) *

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ونسبة مساحته الى مساحة الشكل المعلوم كنسبة الثلاثة الى السبعة

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ح لمساحة الشكل المعلوم وبالحرف ا لاحداضلاعه وبالحرف س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر للضلع ا فعلى منطوق المثال يكون

$$ص : ح :: ٣ : ٧$$

وحيث ان هذين الشكلين متشابهان يكون

$$ص : ح :: ص : ا$$

فنتج من هاتين التناسبتين أن

$$ص : ا :: ٣ : ٧$$

نحينئذ يتعين الضلع صه كما في المثال الخامس من الدعوى الرابعة والعشرين العملية وبعد تعيينه ينشأ عليه شكل مشابه للشكل المعلوم ح فيكون هو الشكل المطلوب

• (الدعوى الثامنة والعشرون العملية) •

• (شكل ١٥١ من اللاوحة ٦) •

إذا كان المطلوب إنشاء شكل يشابه شكلاً معلوماً مثل الشكل ك ويكافئ شكلاً آخر معلوماً كذلك مثل الشكل ل فطريقة ذلك أن يرمن بالحرف ا لاحتضاع الشكل ك وبالحرف مه لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف صه لضعه المناظر للضلع ا ثم يقال حيث كان المطلوب أن يكون الشكل مه مشابهاً للشكل ك يلزم أن يكون

$$\text{ك} : \text{مه} :: \text{ا} : \text{صه}$$

وحيث كان المطلوب أيضاً أن يكون الشكل مه مكافئاً للشكل ل يلزم أن يكون

$$\text{ك} : \text{ل} :: \text{ا} : \text{صه}$$

نحينئذ إذا بحث عن المربع م المكافئ للشكل ك وعن المربع د المكافئ للشكل ل يكون

$$\text{م} : \text{د} :: \text{ا} : \text{صه}$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$\text{م} : \text{د} :: \text{ا} : \text{صه}$$

فيعلم من هذه المناسبة أن الضلع صه رابع متناسب مع الخطوط الثلاثة م و د و ا ومن هنا تنتج طريقة رسمية هي

أن يبحث عن ضلع المربع المكافئ للشكل ك وعن ضلع المربع المكافئ

لشكلاً

للتشكل ل ثم يبحث عن الرابع المناسب مع هذه الخطوط الثلاثة وينشأ عليه شكل مشابه للشكل ك فيكون هو الشكل المطلوب

(امثلة)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شبه منحرف معلوما رمزہ ل

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشأ عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمله بالحرف ك ثم يبحث عن ضلع المربع المكافئ للشكل ك ويرمله بالحرف م وعن ضلع المربع المكافئ للشكل ل ويرمله بالحرف ن وعن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة م و ن و ا ثم ينشأ عليه مثلث متساوى الاضلاع فيكون هو المثلث المطلوب أى المكافئ لشبه المنحرف المعلوم

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شكلاً متوازى الاضلاع معلوما رمزہ ل

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشأ عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمله بالحرف ك ثم تتم العملية كما فى المثال الاول

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ مثلثاً مختلف الاضلاع معلوما رمزہ ل

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشأ عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمله بالحرف ك ثم تتم العملية كما فى المثال الاول

(المثال الرابع)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شكلاً مختلفاً معلوما رمزہ ل

فطريقة ذلك أن يحوّل الخمس الى مثلث يكافئه ثم يحول هذا المثلث الى مثلث
منساوى الاضلاع فيكون هو المطلوب

تمت المقالة الثالثة على يد جامعه المتوكل على ربه المعيد المبدئ
على عزت أفندي أحد خوجات العلوم الطبيعية
والرياضية بمدرسة المهندسخانة الخديوية
ووكيل المدرسة التجهيزية
والمدرسة الابتدائية

* (دروس في المقالة الرابعة) *

المقالة الرابعة يبحث فيها عن خواص الاشكال المستقيمة الاضلاع المنتظمة ومساحة الدائرة

* (تعريف) *

الشكل المنتظم ما تساوت زواياه واضلاعه فكل شكل مستقيم الاضلاع يكون منتظما اذا تساوت زواياه واضلاعه سواء كان مثلثا أو شكلارباعيا أو خمسا أو سدسا أو غير ذلك

* (الدعوى الاولى النظرية) *

* (شكل ١٥٥ من الاوحة ٦) *

كل شكلين منتظمين متعددين في عدد الاضلاع يكونان متشابهين فإذا كان الشكل $ا ب ج د ه و$ سدسا منتظما و $ح ط ع ك ل$ سدسا آخر كذلك كان مجموع الزوايا المحيطية في الشكل الاول مساويا لثمانى قوائم كما يتقرر ذلك في النظرية التاسعة والثلاثين من المقالة الاولى وبمجموع الزوايا المحيطية في الشكل الثانى يساوى ثمانى قوائم ويلزم من هذا أن تكون الزاوية $ا = سدس الثمان قوائم$ والزاوية $ر = سدس الثمان قوائم$ فاذن تكون الزاوية $ا = للزاوية ر$ والزاوية $ر = للزاوية ح$ والزاوية $ح = للزاوية ط$ وهكذا

ويلزم من كون الشكل الاول منتظما أن يكون

$$ا = ر = ح = ط = د = ه = و = ز$$

وكذا يلزم من كون الشكل الثانى منتظما أن يكون

$$ح = ط = ع = ك = ل = ل$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$ا = ر = ح = ط :: ح ط :: د ه :: ط ع :: ع ك :: ك ل$$

فاذن يكون الشكل $ا ب ج د ه و$ مشابها للشكل $ح ط ع ك ل$

كانت قد ذكرنا في النظرية السابعة والعشرين من المقالة الثالثة

• (نتيجة) •

النسبة بين محيطي كثيرى الاضلاع المنتظمين المتحدين في عدد الاضلاع كالنسبة بين ضلعين متناظرين والنسبة بين سطحهما كالنسبة بين مربعي ضلعين متناظرين لان الشكليين اللذين بينهما المثابة متشابهان وقد تذكرنا في النظرية الثامنة والعشرين من المقالة الثالثة أن النسبة بين محيطي كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين وأن النسبة بين سطحهما كالنسبة بين مربعي ضلعين متناظرين

• (تنبيه) •

يعين مقدار زاوية أى شكل منتظم عدد اضلاعه معين بتقسيم مجموع زواياه على عدد اضلاعه كما يعين مقدار زاوية أى شكل متساوى الزوايا عدد اضلاعه معين انظر الدعوى التاسعة والثلاثين من المقالة الاولى

• (الدعوى الثانية النظرية) •

• (شكل ١٥٦ من اللوحة ٦) •

كل شكل منتظم يمكن رسمه في الدائرة ورسم دائرة فيه (برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن $a - ح د ه$ الخ شكلا منتظما فلنصور ممرور محيط دائرة بالنقط الثلاث $a - و - ح$ وكان مركزه $ط$ وانزل العمود $ط ع$ على $ح د$ ووصل $ط ا$ و $ط د$ ليكن الشكل الرباعي $ط ع د ح$ مساويا للشكل الرباعي $ط ع ا ح$ لانه لو جعل الضلع $ط ع$ فصلا مشتركا وطبق الشكل $ط ع د ح$ على الشكل $ط ع ا ح$ لانطبقت الزاوية القائمة $ح ط ع$ على القائمة $ا ط ع$ ووقعت النقطة $ح$ على النقطة $ا$ ويلزم من كون الشكل $a - ح د ه و ح$ منتظما أن تكون الزاوية $د ح ه = ا ح ع$ وأن يقع الضلع $ح د$ على استقامة الضلع $ا ح$ وحيث أن $ح د = ا ح$ تقع النقطة $د$ في a ويحد الشكل $ا - ح د ه$ لان الرباعي ان خيئت يكون البعد $ط و$

مساويا للبعد ط ا ويلزم من هذا أن تكون النقطة د على المحيط الذى يميز بالنقط الثلاث ا و س و ج وبمثل هذا يبرهن على ان المحيط الذى يميز بالرؤس الثلاث س و ج و د يميز أيضا بالرأس المتتالية لها وهى ه وهكذا

فقد ثبت بهم سدا ان المحيط الذى يميز بالنقط الثلاث ا و س و ج يمر بجميع رؤس زوايا الشكل المنتظم المفروض وهو المطلوب (وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كانت الاضلاع ا ب و س ج الخ اوتارا متساوية تكون ابعادها عن المركز متساوية كما تقرر ذلك فى المقالة الثانية فحينئذ اذا رسم محيط دائرة نصف قطره ط س ومركزه ط كان ذلك المحيط مماسا للضلع س ج فى وسطه وفى اواسط سائر اضلاع الشكل المنتظم المفروض

* (تنبيه) *

اعلم ان النقطة ط التى هى المركز المشترك للدائرة المرسومة داخل الشكل المنتظم وللدائرة المرسومة خارجه يمكن ان نعتبر أيضا مركزا للشكل المذكور وحينئذ يقال للزاوية التى مثل ا ط س أى المنحصره بين نصفي قطرين واصلين الى نهايتي ضلع واحد مثل ا ب زاوية مركزية وحيث ان جميع الاوتار ا ب و س ج الخ متساوية بعلم من ذلك أن الزوايا المركزية متساوية وحينئذ يتعين مقدار كل من تلك الزوايا بقسمة مجموع الاربع زوايا القائمة على عدد اضلاع الشكل

* (الدعوى الثالثة النظرية) *

* (شكل ٢٣ من اللوحة ١٧) *

كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة اذا كان متساوى الاضلاع كان متساوى الزوايا وكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة اذا كان متساوى الزوايا كانت اضلاعه متساوية مثنى

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية ا معيارها

$$\frac{\text{المحيط} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{ا}}{2} = \text{الزاوية} - \text{معيارها}$$

$$\frac{\text{المحيط} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{ا}}{2} = \text{القوس} - \text{ا} = \text{القوس}$$

ا ف تكون الزاوية ا مساوية للزاوية - وبمثل هذا يبرهن على تساوى الزوايا الاخر

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كانت الزاوية ا = - = ح

$$= \dots = \text{ف يكون المضاع} - \text{ا} = \text{ح} = \text{د} = \text{هـ} - \text{ا} - \frac{\text{المحيط} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{ا}}{2} = \text{ح} = \text{د} = \text{هـ} \text{ لان الزاوية ا معيارها}$$

$$\text{الزاوية} - \text{معيارها} = \frac{\text{المحيط} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{ا}}{2} \text{ يمكن}$$

حيث كانت الزاوية ا مساوية للزاوية - بالفرض يلزم أن يكون

$$\frac{\text{المحيط} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{ا}}{2} = \frac{\text{المحيط} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{القوس} - \text{ا} - \text{ا}}{2}$$

ويلزم من هذا أن يكون القوس ا = للقوس - ح وبمثل هذا

يبرهن على ان القوس ا - يساوى القوس ح د وان القوس - ح

يساوى القوس د هـ وهكذا ويلزم من هذا أن تكون الاضلاع متساوية

مثنى

* (تنبيه) *

اعلم ان الضلع الاول = الضلع الثالث و = الخامس و = السابع

وبساوى التاسع وهكذا وان الضلع الثانى = الضلع الرابع ويساوى

السادس و = الثامن وهكذا فاذا كان عدد اضلاع الشكل فردا بان

كان تسعة مثلا كان الضلع الاول هو الفارق بين الضلع التاسع والضلع

الثاني وكانت جميع اضلاع الشكل متساوية

(الدعوى الرابعة النظرية)

(شكل ٢٤ من اللوحة ١٧)

كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوي الزوايا كان متساوي
الاضلاع

وكثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوي الاضلاع كانت زواياه
متساوية مثني

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية $\angle A = \angle B = \angle C = \dots$
 $\angle F$ يكون الضلع AB منصف في نقطة التماس E لانه لو وصل نصفا
القطرين CA و CB لكانت الزاوية $\angle AEC = \angle BEC$ للزاوية $\angle C$
اقيامهما وحيث ان الزاوية $\angle A = \angle B$ للزاوية $\angle C$ بالفرض تكون
الزاوية $\angle AEC = \angle BEC$ للزاوية $\angle C$ ويلزم من هذا أن تكون الزاوية
الثالثة $\angle AEC = \angle BEC$ للزاوية $\angle C$ وحيث ان الضلع CE
مشارك في المثلثين $\triangle AEC$ و $\triangle BEC$ يكون المثلث $\triangle AEC = \triangle BEC$
للمثلث $\angle C$ كما تقرر ذلك في النظرية السابعة من المقالة الاولى ويلزم
من تساوي هذين المثلثين أن يكون الضلع $AE = BE$ مساويا للضلع CE
وبمثل هذا يبرهن على أن الضلع $BC = AC$ والضلع $AB = AC$
أي يبرهن على أن كل ضلع منصف في نقطة التماس وحيث ان التماس E
 $\angle AEC = \angle BEC$ التماس E يكون $AE = BE$ وبمثل هذا يبرهن على أن
جميع الاضلاع متساوية وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كان الضلع $AB = AC$
 $\angle C = \angle B = \dots$ $\angle A$ وأيضا $\angle C = \angle B$ ينتج
من ذلك أن الضلع $AC = BC$ وحيث ان الزاوية $\angle A = \angle B$ $\angle C$
اقيامهما والضلع $CE = \angle C$ لان كلاهما نصف قطر دائرة
بعينها يلزم أن يكون المثلث $\triangle AEC = \triangle BEC$ مساويا للمثلث $\triangle BEC$ كما تقرر

ذلك في النظرية السادسة من المقالة الاولى ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية ح ا ب = للزاوية ح ك ب وأن تكون الزاوية ا التي هي ضعف الزاوية ح ا ب مساوية للزاوية د التي هي ضعف الزاوية ح ك ب وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ب = د وهكذا الى آخره بمعنى أن الزوايا متساوية مشئى

* (تنبيه) *

اعلم أن الزاوية الاولى = الثالثة و = الخامسة و = السابعة وهكذا وأن الزاوية الثانية = الرابعة و = السادسة و = الثامنة وهكذا فإذا كان عدد اضلاع الشكل فردا بان كان سبعة مثلا كانت الزاوية الاولى هي الفارقة بين السابعة والثانية وكانت زوايا الشكل كلها متساوية

* (الدعوى الخامسة العملية) *

* (شكل ١٥٧ من اللوحة ٦) *

إذا كان المطلوب رسم مربع داخل دائرة معلومة فطريقة ذلك أن يرسم قطران متعامدان مثل ا ب و د ويوصل ا ب و د و ح د و د ا فيكون الشكل الحادث ا ب د د هو المربع المطلوب

لانه يلزم من تساوى الزوايا المركزية ا ه ب و ب ه د و د ه ا أن تكون الاقواس ا ب و ب د و د ا متساوية ويلزم من هذا أن تكون الاوتار ا ب و ب د و د ا متساوية ويلزم من كون كل من الزوايا ا و ب و د محيطية ومرسومة في نصف الدائرة أن تكون كل واحدة منها قائمة فقد ثبت بهذا أن الشكل ا ب د د مربع وهو المطلوب

* (تنبيه) *

حيث ان المثلث ب ه د قائم الزاوية ومتساوى الساقين يكون

$$٢ : ٣ :: ١ : ٢$$

كما تقر ذلك في النظرية العاشرة من المقالة الثالثة فيعلم من ذلك أن نسبة ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة إلى نصف القطر كنسبة جذر الاثنين للواحد

(مثالان)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثلاث أذرع

فطريقة ذلك أن يضرب مقدار نصف قطر الدائرة في جذر الاثنين فيحصل الضرب يكون المقدار المطلوب ففي هذا المثال يضرب ثلاث أذرع في جذر الاثنين فيحصل المطلوب

(المثال الثاني)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار نصف قطر الدائرة المرسوم داخلها مربع مقدار ضلعه خمس أذرع

فطريقة ذلك أن يقسم مقدار ضلع المربع المعروف على جذر الاثنين فيخرج القسمة يكون المقدار المطلوب ففي هذا المثال يقسم خمس أذرع على جذر الاثنين فيحصل المطلوب

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ١٥٨ من اللوحة ٦)

إذا كان المطلوب رسم مستقيم منتظم داخل دائرة معلومة

فطريقة ذلك أن يقال يفرض أن المسئلة محلولة وأن $ا -$ هو أحد اضلاع المستقيم المنتظم المطلوب فلو وصل نصف القطرين $ا ط$ و $ط$ لكان المثلث الحادث $ا ط -$ متساوي الاضلاع لان الزاوية $ا ط - =$

أربع قوائم فاذا جعلت الزاوية القائمة وحدة كانت الزاوية $ا ط - = \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} =$$

ويلزم من هذا أن يكون مجموع الزاويتين $\alpha - \beta$ و $\alpha - \gamma = \alpha - \delta$ وحيث أن الزاوية $\alpha - \beta = \alpha - \gamma$ تكون الزاوية $\alpha - \beta$ و $\alpha - \gamma$ فالذن يكون المثلث $\alpha - \beta$ متساوي الاضلاع لان زواياه الثلاث متساوية فقد ثبت به ان ضلع المستقيم المنتظم المرسوم داخل الدائرة مساو لنصف القطر ومن هنا ننتج طريقة رسمية هي ان تؤخذ قطعة بالبيكار بقدر نصف القطر ويركز في أي نقطة من المحيط ويضع الطرف الثاني من البيكار على المحيط فينصف من المحيط سدسه ثم ينقل البيكار لينفصل السدس الثاني من المحيط وهكذا حتى يرجع الى نقطة الابتداء ثم يوصل أو تارة تلك الأقواس فيحدث المستقيم المنتظم المطلوب

(تنبيهان) *

الاول اذا وصلت خطوط مستقيمة بين كل رأسين من رؤس زوايا المستقيم المنتظم $\alpha - \beta$ وهو يكون المثلث الحادث $\alpha - \beta$ متساوي الاضلاع الثاني حيث كان $\alpha - \beta = \alpha - \gamma = \alpha - \delta$ يكون الشكل $\alpha - \beta$ المتوازي الاضلاع معيناً وقد تقر في نتيجة النظرية الرابعة عشر من المقالة الثالثة أن مجموع مربعات الاضلاع الاربعة من أي شكل متوازي الاضلاع مساو مجموع مربعي قطريه فاذن يكون

$$\alpha - \beta + \alpha - \gamma = \alpha - \beta + \alpha - \gamma + \alpha - \delta + \alpha - \epsilon = \alpha - \delta + \alpha - \epsilon$$

$$\alpha - \beta = \alpha - \delta$$

فاذا طرح من كل من هاتين المتساويتين $\alpha - \beta$ يكون

$$\alpha - \beta = \alpha - \gamma$$

$$\alpha - \beta : \alpha - \gamma :: 1 : 1$$

$$\alpha - \beta : \alpha - \gamma :: 1 : 1$$

أعني أن نسبة ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الى

نصف القطر كنسبة جذر الثلاثة للواحد

* (مثالان) *

* (المثال الاول) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثلاث أذرع
فطريقة ذلك أن يضرب نصف القطر في جذر الثلاثة فحاصل الضرب يكون هو المقدار المطلوب ففي هذا المثال تضرب ثلاث أذرع في جذر الثلاثة فيحصل المطلوب

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار نصف قطر الدائرة المرسوم داخلها مثلث متساوي الاضلاع مقدار ضلعه خمس أذرع
فطريقة ذلك أن يقسم مقدار الضلع المعلوم على جذر الثلاثة فتخرج القسمة يكون المقدار المطلوب ففي هذا المثال تقسم خمس أذرع على جذر الثلاثة فيحصل المطلوب

* (الدعوى السابعة العملية) *

* (شكل ١٥٩ من اللوحة ٦) *

إذا كان المطلوب رسم معشر منتظم داخل دائرة معلومة فطريقة ذلك أن يقال لي فرض أن المسئلة محلولة وأن a هو أحد اضلاع المعشر المنتظم المطلوب فلو وصل نصف القطرين a و c لكان المثلث الحادث a - c متساوي الساقين ويلزم من هذا أن تكون الزاوية a - a مساوية للزاوية c - a وحيث فرض أن a هو أحد اضلاع المعشر المنتظم المطلوب يكون القوس a عشر المحيط وتكون الزاوية a - c عشر الاربع قوائم أو خمس القائمتين ويلزم من هذا أن يكون مجموع زوايا المثلث a - c قدر الزاوية a - c خمس مرات ويلزم من هذا أن تكون الزاوية a - c ضعف الزاوية c والزاوية c - a

ضعف الزاوية ع فلو نصف الزاوية ع - ا بمستقيم مثل سم لحدث
 ام : م ع :: ا - : ع ا أو :: ا - : ا ع

كما تقرر ذلك في النظرية السابعة عشر من المقالة الثالثة

وحيث ان الزاوية م - ع نصف الزاوية ا - ع تكون الزاوية م - ع
 مساوية للزاوية ع ويكون الضلع م ع مساويا للضلع م -
 فلو وضع م - بدل م ع في التناسبة السابقة لصارت هكذا

ام : م - :: ا - : ا ع

ويلزم من كون المثلث م - ع - متساوي الساقين أن تكون الزاوية الخارجة
 منه وهي ام - ضعف الزاوية ع وحيث ان الزاوية م - ا - ضعف
 الزاوية ع كذلك تكون الزاوية ام - مساوية للزاوية م - ا - ويلزم
 من هذا أن يكون المثلث ام - متساوي الساقين أي أن يكون م -
 = ا - فلو وضع ا - بدل مساويه م - في التناسبة السابقة
 لصارت هكذا

ام : ا - :: ا - : ا ع

فيعلم من هذه التناسبة أن ضلع المعشر المنتظم المطلوب وسط متناسب بين
 نصف القطر والجزء الاصغر ام ومن هنا تخرج طريقة رسمية هي
 أن يقسم نصف القطر ا ع الى قسمين ام و م ع بحيث يكون
 القسم الاكبر وهو م ع وسطا متناسبا بين نصف القطر ا ع وجزئه
 الاصغر ام ثم تؤخذ قنطرة بالبيكار بقدر القسم الاكبر المذكو وويركز
 في أي نقطة من محيط الدائرة ويوضع الطرف الثاني من البيكار في نقطة أخرى
 من المحيط وينقل البيكار مرة ثانية وثالثة وهكذا حتى يرجع الى نقطة
 الابتداء فينقسم المحيط الى عشرة اقواس متساوية ثم يوصل أوتار تلك
 الاقواس فيتشكل المعشر المنتظم المطلوب

• (النتيجة الاولى) •

إذا كان المطلوب رسم مخمس منتظم داخل الدائرة

فطريقة ذلك أن يقسم المحيط الى عشرة أقواس متساوية ثم توصل او تار
الاقواس التي كل قوس منها يساوى ضعف عشر المحيط فينشكل الخمس
المنتظم المطلوب

• (النتيجة الثانية) •

اذا كان المطلوب رسم الخمس عشرى المنتظم داخل الدائرة
فطريقة ذلك أن يطرح قوس يساوى عشر المحيط من قوس يساوى سدسه
فيبقى قوس يساوى جزءاً من خمسة عشر من المحيط ثم تؤخذ فتحة بالبيكار
بقدر هذا الجزء وتوضع على المحيط مرة بعد أخرى حتى يرجع الى نقطة
الابتداء فينشكل الخمس عشرى المنتظم المطلوب

$$\text{لان } \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15} = \frac{2}{30} = \frac{4}{60} = \frac{7}{75} = \frac{10}{150} = \frac{1}{15}$$

• (تنبيه) •

اذا رسم مضلع داخل الدائرة ونصفت الاقواس المقابلة لاضلاعه ووصلت
او تاراً أنصاف هذه الاقواس يتشكل مضلع عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع
الاول فان كان المضاع الاول منتظماً كان المضاع الحادث كذلك فلذا
يستعمل المربع لانشاء المضلعات المنتظمة التي يكون عدد اضلاعها مضاعفاً

للعدد ٢ مثل ٨ و ١٦ و ٣٢ و ٦٤ و ١٢٨ الخ
ويستعمل السدس المنتظم لانشاء المضلعات المنتظمة التي يكون عدد
اضلاعها مضاعفاً لكل من العددين ٦ و ٢ مثل ١٢ و ٢٤
و ٤٨ و ٩٦ و ١٩٢ الخ

ويستعمل المعشر لانشاء المضلعات التي يكون عدد اضلاعها مضاعفاً لكل
من العددين ١٠ و ٢ مثل ٢٠ و ٤٠ و ٨٠ و ١٦٠
و ٣٢٠ الخ

ويستعمل الخمس عشرى لانشاء المضلعات التي يكون عدد اضلاعها
مضاعفاً لكل من العددين ١٥ و ٢ مثل ٣٠ و ٦٠ و ١٢٠
و ٢٤٠ و ٤٨٠ الخ

وطالما اعتقد المتمدنون أن هذه المضلعات المنتظمة هي التي يمكن رسمها داخل الدائرة بواسطة طرق الهندسة الأصلية أو بها بواسطة حل المعادلات الجبرية لذوات الدرجة الأولى والثانية إلى أن ظهر المعلم غوس المتساوي وبرهن في كتابه الذي طبع في ناحية ساقسونيا سنة ألف وثمانمائة وواحدة من تاريخ الميلاد أنه يمكن بواسطة طرق مشابهة للطرق التي ذكرت أن يرسم داخل الدائرة مضلع منتظم عدد اضلاعه سبعة عشر ضلعاً بل يمكن أيضاً أن يرسم أى مضلع منتظم عدد اضلاعه $2^q + 1$ بشرط أن يكون $2^q + 1$ عدداً أولياً

* (الدعوى الثامنة العملية) *

* (شكل ١٦٠ من اللوحة ٦) *

إذا علم مضلع منتظم مرسوم داخل دائرة وكان المطلوب أن يرسم على هذه الدائرة مضلع مشابه له

فطريقة ذلك أن تنصف الأقواس $ا- و ح و ح- د$ الخ بنقط مثل $م و ن و م$ الخ ثم يمد من تلك النقط خطوط مستقيمة مماسة لمحيط الدائرة مثل $ر ح و ع ط و ط ع$ الخ فيحدث من تلاقى هذه الخطوط مضلع منتظم مشابه للمضلع المعلوم $ا- ح د ه و$ وتكون كل ثلاث نقط مثل $ق و س و ح$ على مستقيم واحد لانه حيث كانت اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة موازية لنظائرها من المضلع المرسوم داخل الدائرة تكون كل زاوية من زوايا المضلع الخارج مساوية لنظيرتها من المضلع الداخل وحيث كانت زوايا المضلع الداخل متساوية تكون زوايا المضلع الخارج كذلك وقد تنقز في النظرية الرابعة أن كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوي الزوايا كان متساوي الاضلاع فقد ثبت بهذا أن المضلع $س ر ح ط ع$ الخ منتظم وهو المطلوب

* (النتيجة الأولى) *

إذا علم مضلع منتظم مرسوم على دائرة وكان المطلوب أن يرسم داخل هذه

الدائرة

الدائرة مضلع منتظم مشابه له
 فطريقة ذلك أن يوصل من المركز الى رؤس زوايا الشكل المعلوم خطوط
 مستقيمة مثل $ق ر$ و $ق ح$ و $ق ط$ الخ فهذه الخطوط تقطع محيط
 الدائرة في نقط مثل $ا$ و $ب$ و $ج$ الخ فاذا وصلت الاوتار $ا ب$
 و $ب ج$ و $ج د$ الخ حدث مضلع داخل الدائرة مشابه للمضلع المعلوم
 المرسوم خارجها

أو توصل أوتارين نقط تماس المحيط باضلاع المضلع الخارج فيحدث أيضا
 مضلع داخل الدائرة مشابه للمضلع المعلوم المرسوم خارجها

(النتيجة الثانية)

يمكن أن يرسم على الدائرة جميع الاشكال المنتظمة التي علمت كيفية رسمها
 في هذه الدائرة وبالعكس

(الدعوى التاسعة النظرية)

(شكل ١٦٠ من اللوحة ٦)

كل مضلع منتظم مساحته تساوى حاصل ضرب محيطه في ربع قطر الدائرة
 المرسومة داخله

(برهانها) أن يقال ليكن $ح ط$ الخ مضلعاً منتظماً من مساحة المثلث
 $ر ح ط$ تساوى $ح ط$ $\times \frac{1}{4} ر م$ ومساحة المثلث $ق ح ط$ تساوى
 $ط ح$ $\times \frac{1}{4} ق د$ وحيث أن $ق د = ر م$ تكون مساحة
 مجموع المثلثين هكذا

$(ر ح + ح ط) \times \frac{1}{4} ر م$ فاذا أخذت مساحة جميع المثلثات
 المشتمل عليها المضلع يشاهد أن مساحة المضلع المذكور تساوى حاصل ضرب
 محيطه في $\frac{1}{4} ر م$ أى في ربع القطر وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن الخط $ق م$ الذى هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع هو
 عين العمود المنزل من المركز على أحد أضلاعه

* (الدعوى العاشرة النظرية) *

* (شكل ١٦١ من اللوحة ٦) *

نسبة محيطات المضامع المنتظمة المتحدة في عدد الاضلاع الى بعضها كنسبة أنصاف أقطار الدوائر المرسومة داخلها وكنسبة أنصاف أقطار الدوائر المرسومة خارجها ونسبة سطوح المضامع المذكورة الى بعضها كنسبة مربعات أنصاف الاقطار المذكورة

(برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن a أحد أضلاع مضلع منتظم مركزه h فيكون ah هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ويكون العمود hd المنزل على a هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله ويمكن أيضا rc أحد أضلاع المضلع المنتظم الاخر والنقطة p مركزه فيكون pr هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ويكون العمود pe المنزل على rc هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فثبت ان الزاوية a نصف زاوية المضلع الاول والزاوية r نصف زاوية المضلع الثاني تكون الزاوية a مساوية للزاوية r وأيضا تكون الزاوية s مساوية للزاوية c ويلزم من هذا أن يكون المثلث ahd مشابها للمثلث rcp وكذا يلزم أن يكون المثلث ahd مشابها للمثلث rcp ويلزم من هذا أن يكون

$$a : rc :: ah : rp :: dh : ep$$

وهو المطلوب

(برهان القضية الثانية) أن يقال حيث ان

$$a : rc :: ah : rp :: dh : ep$$

وان المقادير المتناسبة مربعاتها متناسبة كما تقر في علم الحساب فيكون

$$a^2 : rc^2 :: ah^2 : rp^2 :: dh^2 : ep^2$$

وحيث ان نسبة المضامع المذكورة الى بعضها كنسبة مربعي ضلعيها متساويين يكون

المضلع الاول : المضلع الثاني :: $\overline{ا} : \overline{ح} :: \overline{ا} : \overline{ه}$:: $\overline{ح} : \overline{ز} :: \overline{ا} : \overline{د}$:: $\overline{ح} : \overline{ط} :: \overline{ا} : \overline{ع}$
وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية عشر الفائدة) *

* (شكل ١٦٢ الثاني) *

الخط المحدث بالمخاط أصغر من كل خط محيط به
وعنى بالخط المحدث الخط المنحني أو المنكسر أو المركب منه - ما الذى لا يقطعه
المستقيم الا فى نقطتين

(برهانها) أن يقال ليكن $ا-د$ خطا منكسرا محدبا و $ه-و$ خطا
آرحيطا بالخط المحدث $ا-د$ ولومت الاضلاع $ا-و$ و $د-ه$ و
و $دا$ فى جهة واحدة حتى قطعت الخط المحيط حدثت هذه المتباينات

$$ا- + ح > ا + د + ه + ح$$

$$د- + ح > د + ح + ز + و$$

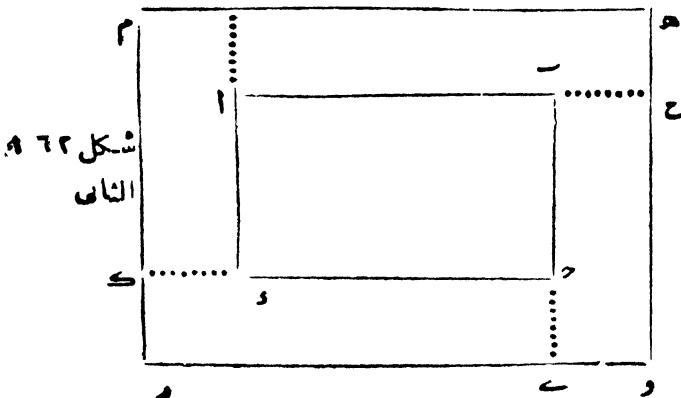
$$د + د > د + و + ز + د$$

$$دا + ا > د + ح + ك + م$$

فلوجعت هذه المتباينات طرفا لطرف وحذفت الاجزاء المشتركة من كل من
الطرفين حدث

$ا- + د + ح + و > دا + د + و + ز + م$
وبمثل هذا يبرهن على أن كل خط محدب كائنا ما كان عدداً أضلاعه فهو دائماً
أصغر من أى خط محيط به وهو المطلوب

ل



* (الدعوى الثانية عشر النظرية) *

(شكل ١٦٤ من اللوحة ٧) *

كل دائرتين متحدتين المركز يمكن دائماً أن يرسم داخل كبراهما مضلع منتظم أضلاعه لا تقطع محيط الصغرى وأن يرسم على محيط الصغرى مضلع منتظم أضلاعه لا تقطع محيط الكبرى

(برهان القضية الأولى) أن يقال ليكن Γ نصف قطر الدائرة الصغرى و Δ نصف قطر الكبرى فلورسم مستقيم مثل $\Delta\epsilon$ مماس لمحيط الصغرى في النقطة ϵ ومد على استقامته حتى انتهى إلى محيط الكبرى في نقطة β مثل $\Delta\beta$ و Δ ورسم داخل الدائرة الكبرى مضلع منتظم من المضلعات المنتظمة الممكن رسمها داخل الدائرة بواسطة العمليات المتقدمة ونصفت الأقواس الموزعة بأضلاعه ووصات أو تاراً نصف $\Delta\epsilon$ هذه الأقواس لتشكيل مضلع منتظم عدد أضلاعه ضعف عدد أضلاع الأول فلودووم على تنصيف هذه الأقواس لتحصل قوس مثل $\Delta\epsilon$ أصغر من القوس $\Delta\epsilon$ وهو فلوفرز أن النقطة ϵ هي وسط القوس $\Delta\epsilon$ لظهر أن الوتر $\Delta\epsilon$ أبعد من المركز عن الوتر $\Delta\epsilon$ وأن المضلع المنتظم الذي أحد أضلاعه $\Delta\epsilon$ لا يقطع محيط الدائرة التي نصف قطرها Δ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو وصل $\Delta\epsilon$ والذان يقطعان المماس $\Delta\epsilon$ في ϵ و Δ ليكن $\Delta\epsilon$ هو أحد أضلاع المضلع المنتظم المرسوم على الدائرة الصغرى المشابه للمضلع المرسوم داخل الدائرة الكبرى الذي ضلعه $\Delta\epsilon$

وحيث أن الخط $\Delta\epsilon$ أصغر من الخط $\Delta\epsilon$ يظهر أن المضلع المرسوم على الدائرة الصغرى الذي ضلعه $\Delta\epsilon$ لا يقطع محيط الدائرة الكبرى فيعلم من ذلك أنه يمكن بواسطة العمل المتقدم أن يرسم مضلع منتظم داخل الدائرة الكبرى وأن يرسم مضلع مشابه له على محيط الدائرة الصغرى بحيث تكون أضلاعهما محصورة بين محيطي الدائرتين

* (تنبيه) *

* (تنبيه) *

يمكن أن يرسم جزء من مضلع منتظم داخل أكبر القطعين وحر و ط ح ح
وأن يرسم جزء آخر مشابه له على القطع الاصغر بحيث تكون اطراف المضلعين
محصورة بين المحيطين ويكونى لعمل ذلك أن يقسم القوس و س ر الى قسمين
متساويين ثم الى أربعة أقسام متساوية ثم الى ثمانية أقسام متساوية وهكذا
حتى يحصل جزء أصغر من القوس و س هـ

ويطلق قسم المضلع المنتظم هنا على الشكل المحدود بجملة أوتار متساوية
مرسومة في القوس و ر من أحد طرفيه الى الآخر وهذا القسم وان
وجدت فيه خواص المضلع المنتظم وهي تساوى الاضلاع والزوايا وامكان
دسعه في الدائرة ورسم الدائرة فيه الا انه لا يكون جزءا من مضلع منتظم الا اذا
كان القوس الموتر باحد اضلاعه جزءا متداخلا في المحيط أعنى الا اذا اشتمل
محيط الدائرة على قوسه مرارا صحيحة بدون باق

* (الدعوى الثالثة عشر النظرية) *

نسبة محيطى الدائرتين الى بعضهما كنسبة نصفى قطريهما

ونسبة الدائرتين الى بعضهما كنسبة مربعى نصفى قطريهما

(برهانها) أن يقال لو رسم فى الدائرتين مضلعان منتظمان متشابهان لازم
أن تكون نسبة محيطى هذين المضلعين الى بعضهما كنسبة نصفى قطري
الدائرتين المرسومين على المضلعين المذكورين وأن تكون نسبة سطحى هذين
المضلعين الى بعضهما كنسبة مربعى نصفى القطرين المذكورين كما تقرر ذلك
فى النظرية العاشرة وحيث انه يمكن اعتبار الدائرة مضلعاً منتظماً لاحصر
اعداد اضلاعه ينتج من ذلك أن نسبة محيطى الدائرتين الى بعضهما كنسبة
نصفى قطريهما وأن نسبة الدائرتين الى بعضهما كنسبة مربعى نصفى
قطريهما وهو المطلوب

* (تعريف) *

الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطوع المتشابهة هي التى تقابل

الزوايا المركزية المتساوية

* (الدعوى الرابعة عشر النظرية) *

* (شكل ١٦٦ من اللوحة ٧) *

نسبة القوسين المتشابهين الى بعضهما كنسبة نصفي قطريهما
ونسبة القطعين المتشابهين الى بعضهما كنسبة مربعي نصفي قطريهما
(برهان القضية الاولى) أن يقال لتكن الزاوية α مساوية للزاوية β
ف يكون

القوس α : المحيط α :: الزاوية α : ϵ قوائم
وكذا يكون

القوس β : المحيط β :: الزاوية β : ϵ قوائم
ويلزم من هذا أن يكون

القوس α : القوس β :: المحيط α : المحيط β
وحيث أن المحيط α : المحيط β :: α : β يكون

القوس α : القوس β :: α : β وهو المطلوب
(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث أن

القطع α : الدائرة α :: الزاوية α : ϵ قوائم و
القطع β : الدائرة β :: الزاوية β : ϵ قوائم يكون
القطع α : القطع β :: الدائرة α : الدائرة β

وحيث أن الدائرة α : الدائرة β :: α : β يكون

القطع α : القطع β :: α : β وهو المطلوب

* (الدعوى الخامسة عشر النظرية) *

كل دائرة مساحتها تساوي حاصل ضرب محيطها في ربع قطرها
(برهانها) أن يقال لو رسم على الدائرة مضلع منتظم لكانت مساحته مساوية
لحاصل ضرب محيطه في ربع قطر الدائرة المرسومة داخله كما تقرر ذلك في

النظرية

النظرية التاسعة فاذا كانت اضلاع هذا المضاع صغيرة جدا يتحد محيطه
بمحيط الدائرة وحينئذ تكون مساحة الدائرة مساوية لمساحته أى لخاصة
ضرب محيطها في ربع قطرها وهو المطلوب

(النتيجة الاولى)

• *(شكل ١٦٨ من اللوحة ٧)*

كل قطع دائرة مساحته تساوى حاصل ضرب قوسه في ربع قطره لان نسبة
القطع ا - ب الى الدائرة الكاملة كنسبة القوس ا م - ب الى المحيط
الكامل ا - د كما تفتر ذلك في المقالة الثانية أو كنسبة القوس ا م - ب
 $\times \frac{1}{4} > ا$ الى المحيط ا - د $\times \frac{1}{4} > ا$ وحيث ان مساحة الدائرة
= المحيط ا - د $\times \frac{1}{4} > ا$ ينتج ان مساحة القطع ا - ب = ا م - ب
 $\times \frac{1}{4} > ا$ وهو المطلوب

(النتيجة الثانية)

اذا رمز بالرمز م و م لمحيطى دائرتين مرموزا لقطر أحدهما بالرمز
ن واقطرا الآخر بالرمز ن حدث

$$م : م :: ن : ن \text{ أو }$$

$$م : ن :: م : ن$$

أعنى أن النسبة بين أى محيط دائرة وقطرها واحدة في سائر الدوائر
والعادة أن يرمز بالحرف ط لمحيط الدائرة التى قطرها واحد فعلى هذا
يكون

$$م : ن :: ط : ا \text{ ومن هذه المناسبة ينتج أن }$$

$$م = ط \times ن = ط \times ٢ \text{ نق } = ٢ ط \text{ نق}$$

(ونق رمز لنصف القطر)

وحيث ان كل دائرة مساحتها تساوى حاصل ضرب محيطها في ربع قطرها

نتج من ذلك أن الدائرة التي نصف قطرها نق

$$\text{مساحتها} = ٢ \text{ ط نق} \times \frac{1}{٢} \text{ نق} = \text{ط نق}^2$$

• (تنبيه) •

اعلم أن مسألة إيجاد خط مستقيم يساوي محيط دائرة معلومة نؤل إلى إيجاد مقدار النسبة المروزالها بالحرف ط أي إلى إيجاد طول محيط الدائرة التي قطرها واحد

وكذلك مسألة إيجاد مربع مكافئ لدائرة معلومة نؤل إلى إيجاد مربع يكافئ مستطيلاً قاعدته تساوي محيط الدائرة المعلومة وارتفاعه يساوي ربع قطرها

والى الآن لم يكن إيجاد النسبة الحقيقية بين محيط الدائرة وقطرها وانما الذى أمكن إيجاد نسبة تقريبية فقط ولكن بواسطة الكسور المتسلسلة وحساب المتواليات صارت تلك النسبة فى أقصى درجة من التقريب بحيث لو وجدت النسبة الحقيقية فلاثرة فيها زيادة عما ذكر

وقبل أن يعلم حساب المتواليات على وجه الاتقان كان المهندسون المتقدمون يذلون الوسع ما استطاعوا فى حل هذه المسئلة وأما الآن فقد صارت فى حيز الالهـمال لـكن لاجل تمرين المبتدئين وتوسيع ميادين افكارهم اجتهد من المهندسين المتقدمين مهندس يسمى ارشيدس وبين

أن النسبة بين محيط الدائرة وقطرها محصورة بين $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و ٣ و $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و ٣ وبين $\frac{71}{297}$ و ٣ و $\frac{7}{297}$ و ٣ فعلى هذا يكون $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و ٣

أو $\frac{2}{\sqrt{3}}$ مقداراً مقرباً من النسبة المذكورة زائداعنها بقل من $\frac{1}{297}$ ولكونه أسهل من غيره كان هو المختار فى الاستعمال ومن المتقدمين مهندس يسمى ميتبوس استخراج مقدار هذه النسبة اشتقرباً بما ذكر وهو $\frac{300}{113}$

وبالجملة فقد استخرج معرفة المتأخرين من المهندسين مقدار ط بواسطة الكسور الاشارية وقد موها الى درجة التقريب ما استطاعوا حتى وصلوا الى هذه الاعداد

١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢ و ٣ وقد صواب هذا الكسر الى
الخانة المائة والعشرين بل الى الخانة المائة والاربعين وهذه الكسور التي
تقدمت الى هذه الدرجة حصل بها التقريب الكافي كما لا يخفى وكتيرا
ما يجري العمل في الحسابات باعتبار $\frac{1}{10}$ وهذا
المقدار أقل من النسبة الحقيقية بأقل من جزء من عشرة ملايين فينتج من هذا
ان هذا المقدار $\frac{1}{10}$ يزيد عن النسبة الحقيقية بأقل من $\frac{1}{10}$

• (الدعوى السادسة عشر العملية) •

• (شكل ١٦٩ من الالوحة ٧) •

اذا علم ضلعان منتظمان متشابهان أحدهما مرسوم داخل دائرة والآخر
مرسوم عليه او كان المطلوب ايجاد سطح المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة
الذي عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الشكل الداخل المعلوم ثم ايجاد
سطح المضلع المنتظم المرسوم على الدائرة الذي عدد اضلاعه ضعف عدد
اضلاع الشكل الخارج المعلوم فطريقة ذلك أن يقال

ليكن $ا$ - أحداضلاع المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة و $هـ$ و
الموازي له هو أحداضلاع المضلع المنتظم المشابه له المرسوم على الدائرة ولتكن
النقطة $ح$ هي مركز تلك الدائرة فلو وصل الوتر $ام$ ورسم المماسات $ال$
و $ك$ لكان الوتر $ام$ هو أحداضلاع المضلع المنتظم المرسوم داخل
الدائرة الذي عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع المضلع المعلوم المرسوم داخل
الدائرة وحينئذ فان خط $ل ك$ الذي هو ضعف الخط $ل م$ يكون هو أحد
اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة المشابه للمضلع الداخل الذي ضلعه $ام$
اذا تقرّر ذلك يعلم انه يمكن اجراء العمل كما ذكر في الزاوية $ا ح م$ على سائر
الزوايا الاخرى التي تساويها

فاذا رسم بالحرف $ا$ لمساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة الذي ضلعه $ا ب$
وبالحرف $ب$ مساحة المضلع المشابه له المرسوم على الدائرة

وبالحرف $آ$ مساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة الذي ضلعه $ام$

وبالحرف $\bar{\gamma}$ مساحة المضلع المشابه المرسوم على الدائرة الذي ضاعه لك
 فلايجاد مقدار $\bar{\alpha}$ و $\bar{\gamma}$ يقال
 أولا حيث ان للمثلثين α و γ رأسا مشتركة في α وارتفاعا
 واحدا يكون

$$\alpha : \gamma :: \alpha : \gamma \quad \text{وأيضا}$$

$$\alpha : \gamma :: \text{الشكل } \alpha : \text{الشكل } \gamma \quad \text{فنتج أن}$$

$$\alpha : \gamma :: \alpha : \gamma$$

وأيضا حيث ان للمثلثين α و γ رأسا مشتركة في γ وارتفاعا
 واحدا يكون

$$\alpha : \gamma :: \alpha : \gamma$$

$$\text{وأيضا } \alpha : \gamma :: \text{الشكل } \alpha : \text{الشكل } \gamma \quad \text{فنتج أن}$$

$$\alpha : \gamma :: \alpha : \gamma$$

ويلزم من كون الخط α موازيا للخط γ أن يكون

$$\alpha : \gamma :: \alpha : \gamma$$

$$\text{وحيث ان } \alpha : \gamma :: \alpha : \gamma \quad \text{يكون}$$

$$\alpha : \gamma :: \alpha : \gamma \quad \text{فنتج أن}$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\gamma}$$

أعني ان مساحة الشكل α وسط متناسب بين مساحتي الشكلين المعلومين
 وهو المطلوب

ونانيا لايجاد مقدار $\bar{\gamma}$ يقال حيث ان للمثلثين α و γ رأسا

مشتركة

مشتركة في δ وارتفاع مشترك كما يكون

$$\delta \text{ لم} : \delta \text{ له} :: \text{لم} : \text{له}$$

ويلزم من كون الخط δ منصفاً للزاوية δ هـ م أن يكون

$$\text{لم} : \text{له} :: \text{م} : \text{هـ} \quad \text{هـ م} \text{ كما تقرر ذلك في النظرية السابعة عشر من}$$

المقالة الثالثة وحيث أن $\delta \text{ م} = \delta \text{ ا}$ يكون

$$\text{م} : \text{هـ} :: \delta \text{ ا} : \delta \text{ هـ}$$

ويلزم من كون الخط δ موازياً للخط هـ م أن يكون

$$\delta \text{ ا} : \delta \text{ هـ} :: \delta \text{ د} : \delta \text{ م} \quad \text{وقد سبق أن}$$

$$\delta \text{ د} : \delta \text{ م} :: \text{ا} : \text{آ} \text{ فينتج أن}$$

$$\delta \text{ لم} : \delta \text{ له} :: \text{ا} : \text{آ} \quad \text{ومن هذه التناسبة ينتج أن}$$

$$\delta \text{ لم} : \delta \text{ لم} + \delta \text{ له} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ}$$

وحيث أن $\delta \text{ لم} + \delta \text{ له} = \delta \text{ هـ م}$ يكون

$$\delta \text{ لم} : \delta \text{ هـ م} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ} \quad \text{أو}$$

$$\text{ا} : \delta \text{ لم} : \delta \text{ هـ م} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ}$$

وحيث أن $\text{ا} : \delta \text{ لم} = \delta \text{ ل} : \delta \text{ ك}$ يكون

$$\delta \text{ ل} : \delta \text{ هـ م} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ}$$

وحيث أن $\delta \text{ ل} : \delta \text{ هـ م} :: \text{الشكل} : \text{الشكل} -$ يكون

$$\text{ا} : \text{ا} + \text{آ} :: \text{الشكل} : \text{الشكل} -$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$\frac{\text{ا} + \text{آ}}{\text{ا}} = \frac{\text{الشكل} -}{\text{الشكل}} \quad \text{وحيث أن } \text{ا} = \frac{\text{ا} + \text{آ}}{\text{ا}} \text{ يكون}$$

$$\frac{\text{ا} + \text{آ}}{\text{ا} + \text{آ}} = \frac{\text{الشكل} -}{\text{الشكل} -} \quad \text{وهو المطلوب}$$

* (الدعوى السابعة عشر العملية) *

إذا كان المطلوب إيجاد نسبة تقريبية بين محيط الدائرة وقطرها
 فطريقة ذلك أن يقال لو فرض أن نصف قطرها = ١ لكان ضلع المربع
 المرسوم داخلها = $\sqrt{2}$ كما نقر ذلك في تنبيه الدعوى الخامسة العملية
 وحيث أن ضلع المربع المرسوم على الدائرة مساو لقطرها يكون ضلع المربع
 المذكور مساوياً للعدد ٢ ويلزم من هذا أن تكون مساحة المربع المرسوم
 داخل الدائرة مساوية للعدد ٢ ومساحة المربع المرسوم عليها = ٤
 فإذا رمز بالحرف ١ لمساحة المربع المرسوم داخل الدائرة وبالحرف ٢
 لمساحة المربع المرسوم عليها يكون ١ = ٢ و ٢ = ٤
 ويعتضى ما ذكر في الدعوى العملية المتقدمة تكون مساحة المثلث المنتظم
 المرسوم داخل الدائرة المرموز له بالحرف أ هكذا

$$\overline{أ} = \overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤} \quad \overline{٢} = \overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤}$$

وتكون مساحة المثلث المنتظم المرسوم على الدائرة المرموز له بالحرف ٢
 هكذا

$$\overline{٢} = \overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤} \quad \overline{٢} = \overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤}$$

وحيث علمت مساحة المثلث المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومساحة المثلث
 المنتظم المرسوم على الدائرة توجد بواسطتهما مساحة السادس عشرى
 المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم
 على الدائرة ويلزم لذلك أن يفرض جديداً أن

$$\overline{١} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤} \quad \overline{٢} = \overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤}$$

$$\overline{٢} = \overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤} \quad \overline{٢} = \overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤}$$

فنتج أن أ = $\overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤}$
 و $\overline{٢} = \overline{١} \times \overline{٢} = \overline{٢} \times \overline{٢} = \overline{٤}$

وحيث

وحيث علمت مساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم داخل الدائرة
ومساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم على الدائرة توجد بواسطتهما
مساحة المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ٣٢ فاذا دووم على اجراء
العمل بهذه الكيفية توجد مساحة المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ٦٤
ثم مساحة المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ١٢٨ ثم مساحة المضلع
المنتظم الذى عدد اضلاعه ٢٥٦ وهكذا حتى لا يبقى الا فرق يسير جدا
بين مساحة الشكل المرسوم داخل الدائرة ومساحة الشكل المرسوم
خارجها

وحيث ان الدائرة محصورة بين الشككين والفرق بين مساحتي هذين الشككين
يسير جدا لا يساوى جزأ من عشرة ملايين يعلم من ذلك انه يمكن أن تعتبر
مساحة احدهما هذين الشككين مساوية لمساحة الدائرة وأن مساحة الدائرة
تساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها
وقد رقت الخانات المتوافقة فى جدول هالك بصورته

عدد الاضلاع	مساحة المصراع الداخل	مساحة المصراع الخارج
٤	٢٠٠٠٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠٠٠
٨	٢٨٢٨٤٢٧١	٢٢١٣٧٠٨٥
١٦	٢٠٦١٤٦٧٢	٢١٨٢٥٩٧٩
٣٢	٢١٢١٤٤٥١	٢١٥١٧٢٤٩
٦٤	٣١٤٦٥٤٨٥	٣١٤٤١١٨٤
١٢٨	٣١٤٠٣٣١١	٣١٤٢٢٢٣٦
٢٥٦	٣١٤١٢٧٧٢	٣١٤١٧٥٠٤
٥١٢	٣١٤١٥١٣٨	٣١٤١٦٣٢١
١٠٢٤	٣١٤١٥٧٢٩	٣١٤١٦٠٢٥
٢٠٤٨	٣١٤١٥٨٧٧	٣١٤١٥٩٥١
٤٠٩٦	٣١٤١٥٩١٤	٣١٤١٥٩٣٣
٨١٩٢	٣١٤١٥٩٢٣	٣١٤١٥٩٢٨
١٦٣٨٤	٣١٤١٥٩٢٥	٣١٤١٥٩٢٧
٣٢٧٦٨	٣١٤١٥٩٢٦	٣١٤١٥٩٢٦

فيعلم من ذلك أن سطح الدائرة = ٣١٤١٥٩٢٦ وحيث أنه صار
تقديم الكسر الاعشارى الى سابع خانه وترك البواقي حسب الكسور بزيادة
ترقيم خانه ليكون الناتج من الحساب فى غاية من التقريب

وحيث ان مساحة الدائرة مساوية لحاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها فينتج
من ذلك انه اذا كان نصف قطرها واحدا يكون نصف المحيط
= ٣١٤١٥٩٢٦ وان كان قطرها واحدا يكون المحيط
= ٣١٤١٥٩٢٦ فبين أن مقدار ط الذى هو النسبة التقريبية
بين محيط الدائرة وقطرها = ٣١٤١٥٩٢٦ وهو المطلوب

(امثلة)

* (المثله) *

* (المثال الاول) *

أن يكون المطلوب ايجاد خط مستقيم يكافئ محيط دائرة قطرها معين
 فطريقة ذلك أن يقسم قطر الدائرة المعلومة الى سبعة أقسام متساوية ثم يرسم
 مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعدد در سبع القطر المعلوم ثم يكرر هذا البعد
 اثنتين وعشرين مرة فيحصل المطلوب بالجليل من التقريب

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب ايجاد مربع يكافئ دائرة معلومة
 فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى
 محيط الدائرة المعلومة والاخر يساوى ربع قطرها فالوسط المناسب
 المذكور يكون ضلع المربع المطلوب

أو يبحث عن الوسط المناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى نصف محيط
 الدائرة المعلومة والاخر يساوى نصف قطرها فالوسط المناسب الذى ينتج
 من هذه العملية يكون ضلع المربع المطلوب
 أو يبحث عن الوسط المناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ربع محيط الدائرة
 المعلومة والاخر يساوى قطرها فالوسط المناسب الذى ينتج من هذه العملية
 يكون ضلع المربع المطلوب

* (المثال الثالث) *

أن يكون المطلوب ايجاد دائرة تكافئ مربع معلوما
 فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف م ضلع المربع المعلوم وبالحرف د للدائرة
 المطلوبة وبالحرف هـ لنصف قطرها فعلى المثال يكون

$$م = د = ط = نق = \frac{٢٢}{٧} \times نق \text{ فينتج أن}$$

$$نق = م : \frac{٢٢}{٧} = \frac{٢٢}{٢٢} = ٧ \text{ م} \times \frac{٢}{٢٢} \text{ أى}$$

$$٧ م : نق :: نق : \frac{٢}{٢٢}$$

ويعلم من هذه المناسبة أن نصف قطر الدائرة المطلوبة وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما يساوي سبعة أمثال ضلع المربع المعلوم والاخر يساوي جراً من اثنين وعشرين جراً من ضلع المربع المذكور

(المثال الرابع)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار محيط الدائرة التي قطرها خمس أذرع فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م للمحيط المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$م + \frac{0}{5} = \frac{11}{5} = 0 \times \frac{22}{5} = 0 \times ط = 0$$

أي أن المحيط المطلوب يساوي خمسة عشر ذراعاً وخمسة أسباع الذراع

(المثال الخامس)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار قطر الدائرة التي محيطها سبع وأربعون ذراعاً وسبع ذراع

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ن للقطر المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$\frac{1}{5} + 47 = ط \times ن = ن \times \frac{22}{5} \text{ ومن هذه المعادلة ينتج أن}$$

$$10 = \frac{(47 + \frac{1}{5})5}{22} = \frac{22}{5} : (47 + \frac{1}{5}) = ن$$

أي أن القطر المطلوب يساوي خمسة عشر ذراعاً

(المثال السادس)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار مساحة الدائرة التي قطرها خمس أذرع فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ب لمساحة الدائرة المطلوبة فعلى منطوق المثال يكون

$$س = ط \times ن = ط \times \frac{1}{2} = 0 \times \frac{22}{5 \times 2} = 0$$

$$أو س = 20 \times \frac{11}{2} = \frac{220}{2} = 110$$

أي أن المساحة المطلوبة تساوي تسعة عشر ذراعاً وثماناً وتسعة أجزاء من

أربعة عشر جراً من الذراع المربع

(المثال السابع)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار قطر الدائرة التي مساحتها تسعة وثلاثين ذراعاً مربعاً وهي الذراع المربع فطريقة ذلك أن يرمن بالحرف $\frac{1}{2}$ للقطر المطلوب وبالحرف $\frac{1}{4}$ لنصفه وبالحرف $\frac{1}{5}$ للمساحة المعلومة فعلى منطوق المثال يكون

$$\begin{aligned} ٥ = ط \times \frac{1}{2} &= ط \times \frac{1}{4} = ط \times \frac{1}{5} = ط \times \frac{1}{10} \\ \text{و من هذه المعادلة ينتج أن} & ٥ = ط \times \frac{1}{10} \\ ٥ = ط &= ط \times \frac{1}{10} = ط \times \frac{1}{10} = ط \times \frac{1}{10} \\ \text{وان} & \frac{٥}{١} = \frac{ط}{١٠} = \frac{ط}{١٠} = \frac{ط}{١٠} = \frac{ط}{١٠} \end{aligned}$$

و يعلم من ذلك أنه لايجاد قطر الدائرة بعد معرفة مساحتها يلزم أن تضرب المساحة المعلومة في أربعة عشر ويقسم حاصل الضرب على إحدى عشر ثم يؤخذ جذر الناتج فيكون المتحصل من الجذر مساوياً لمقدار القطر المطلوب

المثال الثامن

أن يكون المطلوب معرفة مقدار طول القوس الذي مقداره ٤٥ درجة و ٢٠ دقيقة بفرض أن نصف قطره ٤ و ٥ امتار فطريقة ذلك أن يبحث عن النسبة الكائنة بين هذا القوس وربيع المحيط ثم تضرب هذه النسبة في طول ربع المحيط فينتج المطلوب

وصورة العملية هكذا

$$\begin{aligned} ٢٠ + ٤٥ &= ٦٥ \times ٤٥ + ٢٠ = ٤٥ + ٢٠ \\ ٢٧٠٠ &= ٢٧٠٠ \text{ وربع المحيط} = ٦٠ \times ٩٠ = ٥٤٠٠ \end{aligned}$$

والنسبة الكائنة بين ٢٧٠٠ و ٥٤٠٠ = $\frac{٢٧٠٠}{٥٤٠٠} = \frac{٦٨}{١١٥}$ فاذن يكون طول

القوس المطلوب هكذا

$$٥ و ٤ \times ط \times \frac{٣٤}{١٢٥} = ٥ و ٤ \times ط \times \frac{٦٨}{١٢٥} =$$

وصورة العملية بواسطة اللوغاريتم هكذا

$$لوغا ٣٤ = ٥٣١٤٧٨٩ و ١$$

$$لوغا ط = ٩٧١٤٩٩ و ١٠$$

$$لوغا ٤ و ٥ = ٧٣٢٣٩٣٨ و ٠$$

$$مكمل لوغا ١٢٥ = ٨٦٩٦٦٦٣ و ٧$$

$$لوغا ٣٥ = ٦٣٠٦٨٨٩ و ٠$$

$$فيكون ٣٥ و ٤ امتار = ٢٧٢٦ و ٤$$

والمتروك في هذا المقدار أقل من جزء من عشرة الاف من المتراى أقل من
عشر المليمتر

(المثال التاسع)

أن يكون المطلوب إيجاد مساحة قطع دائرة نصف قطرها اثناعشر مترا
وقوسه يساوى ٦٠ درجة فطريق ذلك ان يبحث عن طول هذا القوس
ثم يضرب الناتج في ربع القطر فينتج المطلوب

وصورة العملية هكذا

$$القوس : ٢ ط نق :: ٦٠ : ٣٦٠$$

$$القوس = \frac{٢ ط نق \times ٦٠}{٣٦٠} = \frac{ط نق}{٣} = \frac{١٢ \times ط}{٣} = ٤ ط$$

$$والقطع = ٤ ط \times ٦ = ٢٤ ط = ٣٩٦٠ و ٧٥ مترا
مربعاً وهو المطلوب$$

امثلة في جمع محيطات الدوائر وطرحها

المثال الاول

أن يكون المطلوب إيجاد محيط دائرة يساوى بمحور محيطين معلومين فطريقة
ذلك أن يرسم بالرمز م لاحد المحيطين المعلومين وبالرمز نق لنصف قطره

وبالرمز

وبالرمز م' للمحيط الآخر وبالرمز نق' لنصف قطره وبالخرف م
 للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

$$م = م' + م'' \text{ وحيث ان } م = ٢ \text{ ط نق و } م' = ٢ \text{ ط نق}$$

$$\text{و } م'' = ٢ \text{ ط نق يكون}$$

$$٢ \text{ ط نق} = ٢ \text{ ط نق} + ٢ \text{ ط نق} = ٢ \text{ ط (نق' + نق')}$$
 فينتج ان نق = نق' + نق'
 أعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوى مجموع نصفي قطري المحيطين
 المعلومين

المثال الثانى

أن يكون المطلوب إيجاد محيط دائرة يساوى فاضل محيطين معلومين فطريقة
 ذلك ان يبحث عن فاضل نصفي قطري المحيطين المعلومين فينتج نصف قطر
 المحيط المطلوب

المثال الثالث

أن يكون المطلوب إيجاد محيط دائرة يساوى مجموع جـله محيطات معلومة
 فطريقة ذلك ان يبحث عن مسـة تقسم يساوى مجموع انصاف اقطار المحيطات
 المعلومة فيكون هو نصف قطر المحيط المطلوب

المثال الرابع

أن يكون المطلوب إيجاد محيط دائرة يساوى الفاضل بين جـله محيطات
 معلومة وجـله محيطات كذلك فطريقة ذلك ان يبحث عن محيط يساوى جـله
 المحيطات الاول ثم يبحث عن محيط آخر يساوى جـله المحيطات الاخر ثم عن
 محيط يساوى فاضل هذين المحيطين فيكون هو المحيط المطلوب
 أمثله فى جمع الدوائر وطرحها

المثال الاول

أن يكون المطلوب إيجاد دائرة تساوى مجموع جـله دوائر معلومة فطريقة
 ذلك ان يرمز بالرمز د لاحدى الدوائر المعلومة وبالرمز نق لنصف

قطرها وبالرمز $\frac{1}{2}$ للدائرة الثانية المعلومة كذلك وبالرمز $\frac{2}{2}$ نق لنصف
 قطرها وبالرمز $\frac{3}{2}$ للدائرة الثالثة وبالرمز $\frac{4}{2}$ نق لنصف قطرها وبالرمز $\frac{5}{2}$
 للدائرة المطلوبة وبالرمز $\frac{6}{2}$ نق لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} \dots \dots \dots \text{الخ}$$

وحيث ان

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ و $\frac{2}{2} = \frac{2}{2}$ و $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ و $\frac{4}{2} = \frac{4}{2}$ و $\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ و $\frac{6}{2} = \frac{6}{2}$
 يكون $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2}$ (نق + نق + نق + نق + نق + نق)
 فينتج أن نق = نق + نق + نق + نق + نق + نق
 أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى مجموع مربعات انصاف
 اقطار الدوائر المعلومة

المثال الثاني

أن يكون المطلوب ايجاد دائرة تساوى فاضل دائرتين معلومتين فطريقة ذلك
 أن يرمز بالرمز $\frac{1}{2}$ للدائرة الكبرى وبالرمز $\frac{2}{2}$ نق لنصف قطرها وبالرمز $\frac{3}{2}$
 للدائرة الصغرى وبالرمز $\frac{4}{2}$ نق لنصف قطرها وبالرمز $\frac{5}{2}$ للدائرة
 المطلوبة وبالرمز $\frac{6}{2}$ نق لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} \text{ وحيث ان } \frac{2}{2} = \frac{2}{2} \text{ و } \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

و $\frac{4}{2} = \frac{4}{2}$ يكون

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} \text{ و } \frac{4}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} \text{ و } \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$$

فينتج ان نق = نق - نق

أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى فاضل مربعي نصفي قطري
 الدائرتين

الدائرتين المعلومتين

المثال الثالث

أن يكون المطلوب إيجاد الفاضل بين جلة دوائر معلومة وجلة دوائر كذلك
فطريقة ذلك أن يبحث عن دائرة تساوى جلة الدوائر الاولى ثم يبحث أيضا
عن دائرة تساوى جلة الدوائر والاخر ثم دائرة تساوى فاضل هاتين
الدائرتين فتسكون هي الدائرة المطلوبة

أمثلة في ضرب محيطات الدوائر وتقسيمها

المثال الاول

إذا علم محيط مثل م وكان المطلوب إنشاء محيط ضعفه فطريقة ذلك أن
يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز م للـمحيط المطلوب
وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون $م = ٢$ م
وحيث أن $م = ٢$ ط نق و $م = ٢$ ط نق

يكون ٢ ط نق $= ٢ \times ٢$ ط نق

ومن هذه المتساوية ينتج أن ٢ ط نق

أعنى أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوى ضعف نصف قطر المحيط المعلوم

المثال الثانى

إذا علم محيط مثل م وكان المطلوب إنشاء محيط يكون ثلاثة أمثاله
فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز م
للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون
 $م = ٣$ م وحيث أن $م = ٣$ ط نق

و $م = ٣$ ط نق يكون ٣ ط نق $= ٣ \times ٣$ ط نق
ومن هذه المتساوية ينتج أن ٣ ط نق

أعنى أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوى ثلاثة أمثال نصف قطر المحيط
المعلوم

المثال الثالث

إذا علم محيط مثل م وكان المطلوب إيجاد محيط آخر يساوى المحيط المعلوم مضروباً في كمية معينة مثل د

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز م للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

$$م = م \times د \text{ وحيث أن } م = ٢ \text{ ط نق و } م = ٢ \text{ ط نق}$$

يكون $٢ \text{ ط نق} = ٢ \text{ ط نق} \times د$

ومن هذه المساوية ينتج أن نق = نق $\times د$
أعني أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوى نصف قطر المحيط المعلوم مضروباً في الكمية التي يراد ضرب المحيط المعلوم فيها

المثال الرابع

إذا علم محيط مثل م وكان المطلوب إيجاد محيط آخر يساوى المحيط المعلوم مقسوماً على كمية معينة مثل د

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز م للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

$$م = \frac{م}{د} \text{ وحيث أن } م = ٢ \text{ ط نق و } م = \frac{٢ \text{ ط نق}}{د}$$

ومن هذه المساوية ينتج أن نق = نق $\times \frac{١}{د}$

أعني أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوى نصف قطر المحيط المعلوم مقسوماً على الكمية التي يراد قسمة المحيط المعلوم عليها

المثال الخامس

أن يكون المطلوب إنشاء محيط نسبته إلى محيط معلوم كنسبة ٣ إلى ٥
فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز م للمحيط المعلوم وبالرمز نق لنصف قطره وبالرمز م للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق

المثال يكون م' : م :: ٣ : ٥

وحيث ان م : م :: نق' : نق

يكون نق' : نق :: ٣ : ٥

ومن هذه التناسبة ينتج أن نق' = نق × $\frac{3}{5}$

أعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي ثلاثة أخماس نصف قطر المحيط
المعلوم

أمثلة في ضرب الدوائر وتقسيمها

المثال الأول

إذا علمت دائرة مثل د وكان المطلوب إيجاد دائرة ضعفها فطريقة ذلك

أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومه وبالرمز د' للدائرة

المطلوبة وبالرمز نق' لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

د' = ٢ د وحيث ان د = ط نق' و د' = ط نق' يكون

ط نق' = ٢ ط نق ومن هذه المتساوية ينتج أن نق' = ٢ نق

أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة ضعف مربع نصف قطر الدائرة
المعلومة

المثال الثاني

إذا علمت دائرة مثل د وكان المطلوب إيجاد دائرة ثلاثة أمثالها

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومه وبالرمز د'

للدائرة المطلوبة وبالرمز نق' لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

د' = ٣ د وحيث ان د = ط نق' و د' = ط نق' يكون

يكون ط نق' = ٣ ط نق ومن هذه المتساوية ينتج أن نق' = ٣ نق

أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة ثلاثة أمثال مربع نصف قطر

الدائرة المعلومة

المثال الثالث

إذا علمت دائرة مثل δ وكان المطلوب إيجاد دائرة أخرى تساوى الدائرة المعلومة مضروبة فى كمية معينة مثل $\frac{1}{2}$

فطريقة ذلك أن يرمن بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز δ للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$\delta = \delta \times \delta \text{ وحيث ان } \delta = \text{ط نق} \text{ و } \delta = \text{ط نق}$$

يكون $\text{ط نق} = \text{ط نق} \times \delta$ ومن هذه المتساوية ينتج أن

$$\text{نق} = \text{نق} \times \delta$$

أعنى ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى مربع نصف قطر الدائرة المعلومة مضروباً فى الكمية التى يراد ضرب الدائرة المعلومة فيها

المثال الرابع

إذا علمت دائرة مثل δ وكان المطلوب إيجاد دائرة أخرى تساوى الدائرة المعلومة مقسومة على كمية معينة مثل $\frac{1}{2}$

فطريقة ذلك أن يرمن بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز δ للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$\delta = \frac{\delta}{2} \text{ وحيث ان}$$

$$\delta = \text{ط نق} \text{ و } \delta = \text{ط نق}$$

$$\text{ط نق} = \text{ط نق} = \frac{\text{ط نق}}{2} \times \text{ط نق} \text{ ومن هذه المتساوية ينتج أن}$$

$$\frac{\text{نق}}{2} = \text{نق}$$

أعني أن مربع نصف قطر الدائرة المطلوب يساوي مربع نصف قطر الدائرة
المعلومة مقسوما على الكمية التي يراد تقسيم الدائرة المعلومة عليها
المثال الخامس

أن يكون المطلوب انشاء دائرة نسبتها الى دائرة معلومة كنسبة ٣ الى ٥
فطريقة ذلك أن يرمن بالحرف γ للدائرة المعلومة وبالرمن η لنصف
قطرها وبالرمن δ للدائرة المطلوبة وبالرمن η لنصف قطرها فعلى
منطوق المثال يكون

$$\delta : \gamma :: \gamma : ٥$$

وحيث ان

$$\delta : \gamma :: \eta : \eta'$$

يكون

$$\eta' : \eta :: \gamma : ٥$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

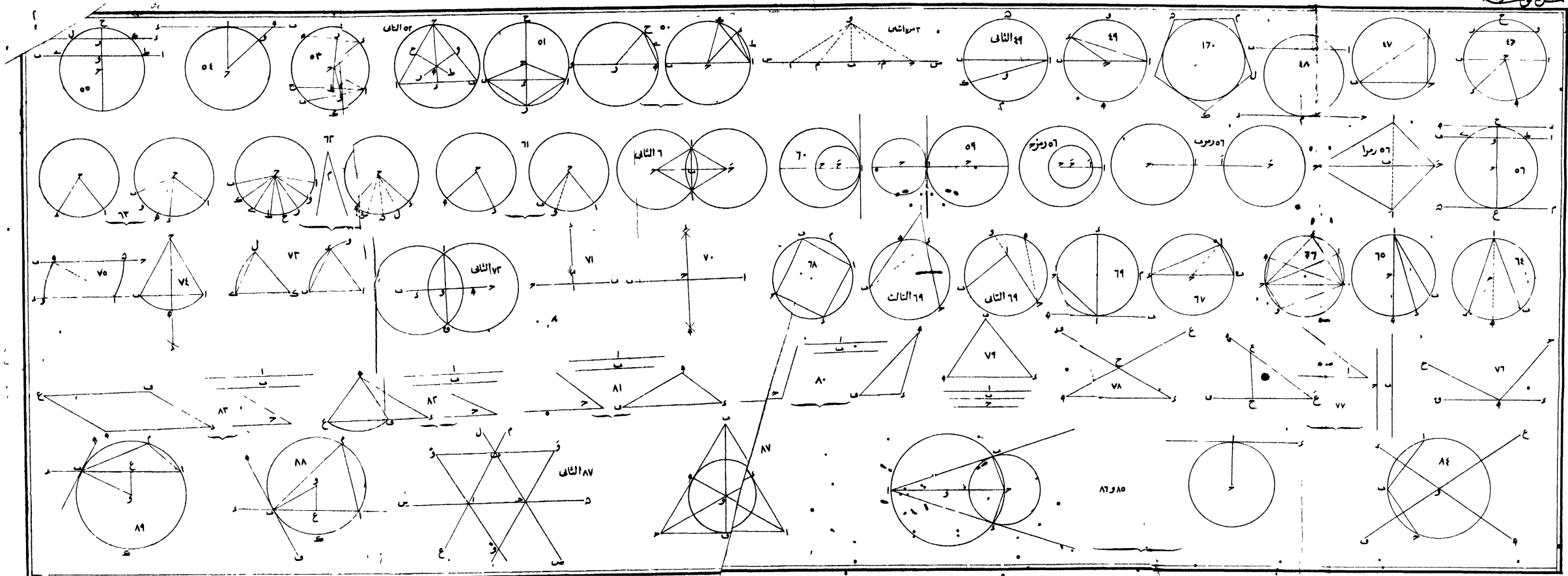
$$\eta' = \eta \times \frac{\gamma}{٥}$$

أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوي ثلاثة اقسام مربع نصف
قطر الدائرة المعلومة

قد تم طبع الجزء الاول من النخبة العزبية في تهذيب الاصول الهندسية
 بدار الطباعة العامرة المنشأة ببولاق مصر القاهرة في ايام دولة
 صاحب الرأي السديد حضرة أفندينا ولي النعم محمد السعيد
 ووافق تمام طبعه تحت ملاحظة ناظر المطبعة العامرة
 المذكورة ذات المنافع المشهورة حضرة علي
 أفندي جرده بياغه الله مأموله وقصده في واسط
 جمادة الاولى سنة ١٢٧٦ انة ألف ومائتين
 وست وسبعين من الهجرة النبوية
 على صاحبها أفضل
 الصلاة وأزكى
 التحية

بلغت تكاليف هذا الكتاب تسعة وعشرون غرنا وعشرة فضة لا غير

خالص الكرم



اشكال النظريات المقالة الثالثة من الاصول الهندسية الجديدة

متمم لوحده

