

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_190915

UNIVERSAL
LIBRARY



٤٥١٠٥٨
ف - ن

كتاب

في اللوغارذمات اي الانساب

وفي مساحة المثلثات المستوية ومساحة السطوح والاجسام ومساحة
الاراضي وسلك البحر وعبارات لمساحة المثلثات الكروية
بواسطة الانساب

تأليف كرنيليوس فان ديك

بيروت سنة ١٨٧٣

في اللوغارذمات اي الان ب

الفصل الاول

في حقيقة الاساب

(١) قد تقدّم في كتاب علم الجبر والمقابلة فصل ٨ عدد ١٨ الخ أن القوات تُضرب بجمع دلائلها ونقسم بطرح دلائلها بعضها من بعض والمجذور كذلك (انظر كتاب الجبر عدد ١١٤ الخ) فإذا وُضِعَت هذه الدلائل على ترتيب في جملول لكي تستعمل في الحسابات سُمِّيَت لوغارزمات أو أنساباً من λόγος نسبة و αριθμός عدد

(٢) فالانساب اذا هي دلائل سلسلة قوات وجذور وفي نظامها وترتيبها يجب ان يعتمد على عدد ما اساساً او اصلاً او قوة اولى نسبة واحد ابدأ ثم تترقى من هذا الاصل سلسلة قوات وتنفيد دلائلها في الجداول للاستعمال عند الحاجة اليها وايضاحاً لذلك لنفرض الاصل ن ثم نأخذ لهذا الاصل سلسلة قوات ايجابية وسلبية

مثالها نُ نَ نَ نَ نَ نَ نَ نَ نَ الخ
فتسبب ن = ٢ ونسب ن = ١ ونسب ن = ٠ ونسب ن = ٠ ونسب ن = ٢

(٢) ان في نظام الانساب الاكثر استعمالاً المسمى انساب بريكنس نسبة الى مخترعها الاساس ١٠ ثم بوضع ١٠ عضواً عن ن في السلسلة المذكورة

تصير ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ الخ

اي ١٠٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠ ١٠ ١ ١ ١ ١ الخ

فتكون انساب هذه الابلاد ٤ و ٢ و ٢ و ١ و ١ و ١ و ٢ و ٢ الخ

(٤) الدلائل الكسرية ان كانت للجذور اولقوات الجذور يجب

نحويلها الى كسور عشرية قبل وضعها في الجداول (ج ف ٩ ع ٩٦)

$$\text{مثالة نسب ن } \frac{1}{4} \text{ اون } \frac{1}{4} = \frac{25000}{100000} = \frac{2500}{10000}$$

$$\text{ن } \frac{1}{6} \text{ اون } \frac{1}{6} = \frac{16666}{100000} = \frac{1666}{10000}$$

$$\text{ن } \frac{1}{7} \text{ اون } \frac{1}{7} = \frac{14285}{100000} = \frac{1428}{10000}$$

$$\text{ن } \frac{1}{8} \text{ اون } \frac{1}{8} = \frac{12500}{100000} = \frac{1250}{10000}$$

وتزاد منازل هذه الكسور الى ان تختلف عن قيمة الكسر الحقيقية بما لا يعتد به في العمل

(٥) في عمل الانساب يجب ان يستعلم نسب كل من الاعداد

الطبيعية ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ الخ حتي يعرف من الجداول نسب اي عدد

فرض ولذلك يجب الاعتماد على الاساس اولا ثم تعتبر بقية الاعداد

قوات او جذورا لذلك الاساس فان كان الاساس ١٠ يعتبر كل عدد

قوة او جذرا من ١٠ اما امكانية استعمال قوات او جذور من ١٠ تعدل

كل الاعداد الطبيعية بالتقريب فواضح من امكانية زيادة الدليل او

نقصه الى غير نهاية فان زيد زادت القوة وان نقص قلت القوة لا محالة

وان كان الدليل كسرا فان زيدت الصورة علت القوة وان زيد

المخرج انخفضت القوة

(٦) لكي نستعلم نسب اي عدد فرض حسب النظام المشار اليه

اي الذي اساسه ١٠ يجب ان نستعلم للعشرة قوة او جذرا بدل العدد

المفروض فيكون دليل تلك القوة او ذلك الجذر نسب ذلك العدد

(١٠) اذا كان العدد المطلوب نسبة بين ١ و ١٠ يكون نسبة بين ٢ و ٢- فلكي نستعلم نسبة طرح كسراً من ٢- او نضيف كسراً الى ٢- اي يضاف كسر سلمي الى ٢- او كسر ايجائي الى ٢-

مثالة نسب ٠٠٨ هو - ٠٩٦٩١ - ٢ او ٢ + ٠٩٠٣٠٩ - ٢ لانه ان اضيف واحد الى

$$- ٠٩٦٩١ \text{ هكذا } + ١٠٠٠٠٠$$

$$- ٠٩٦٩١$$

$$+ ٠٩٠٣٠٩$$

صار الكسر ايجائياً بطرحه من واحد ولكن قد زيد واحداً فبُصِّح باضافة ١ الى دليل النسب اي الى ٢- و ٢- ١ = ٢- اذا ٢- ٠٩٦٩١ - ٢ + ٠٩٠٣٠٩ - ٢ ونستعمل الطريقة الثانية اكثر من الاولى فيكتب النسب ٠٩٠٣٠٩ - ٢ اي بدل على كون الدليل سليماً بالخط المرسوم فوقه وعلى هذا القياس

$$\text{نسب } ٠٣ = \overline{١٤٧٧١٢}$$

$$\text{. } ٠٦ = \overline{٣٧٧٨١٥}$$

$$\text{. } ٠٠٩ = \overline{٣٩٥٤٣٤}$$

(١١) بيان مما سبق ان دليلاً سليماً يبين بعد المنزلة الاولى في الكسر المطلوب نسبة عن فاصلة الكسور العشرية فنرى في الامثلة المتقدمة ٢ في المنزلة الاولى ودليلاً ٠٦ في المنزلة الثانية ودليلاً ٢ فتس على ذلك

(١٢) لاجل تسهيل العمل يجعل دليل النسب ايجائياً ايضاً احياناً وذلك باضافة ١٠ اليه فعوضاً عن ١ يكتب ٩ وعوضاً عن ٢ يكتب

٨ لان ١٠ - ١ = ٩ و ١٠ - ٢ = ٨ وعلى هذا النسق نغير الانساب السلية

$$\text{مثالة } ٠٩٠٣٠٩ \overline{١} \text{ يصير } ٠٩٠٣٠٩$$

$$\text{و } ٠٩٠٣٠٩ \overline{٣} \text{ و } ٠٩٠٣٠٩ \overline{٨}$$

$$\text{و } ٠٩٠٣٠٩ \overline{٣٩} \text{ و } ٠٩٠٣٠٩ \overline{٨٩}$$

فيكون كل دليل قد زاد ١٠ ويُحَسَّب ذلك في العمل فلا يحصل منه خطأ

(١٣) مجتمعة نسبي عددان هو نسب حاصل العددان وفضلة نسبي

فان كثرت حلقات السرد الى ان يصير الكسر صفراً يكون النسب السلبي غير متناهٍ
فيقال ان نسب صفراً هو غير متناهٍ وسلي (جبر ع ٢١٨ الخ)

(١٦) الامر واضح ايضاً ان كل الانساب السلبية تختص بالكسور
التي قيمتها بين واحد وصفر والايجابية تختص بالاعداد على النسق
الطبيعي التي هي اكثر من واحد فتشغل انساب الصحاح والكسور جميع
الاعداد فلا تبقى اعداد اخر توخذ منها انساب لكميات سلبية واذا لافرق
بين الكميات الايجابية والسلبية من جهة الضرب او القسمة بها تستعمل
الانساب الايجابية للكميات السلبية ايضاً وبعد العمل بها كانت الايجابية
تجعل لها العلامة التي يقتضيها كون الكمية ايجابية او سلبية كما عرفت من الجبر
(١٧) اذا كانت سلسلة اعداد على سلسلة هندسية تكون انسابها
في سلسلة حسابية لانه في سلسلة هندسية تزيد الاعداد بمضروب فيه
مشترك والانساب تزيد بفضلة مشتركة

مثال ذلك ١ ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠٠ على سلسلة هندسية وانسابها
على سلسلة حسابية ٠ ١ ٢ ٣ ٤

(١٨) ومطلقاً في كل سلسلة هندسية ان فرض

ت -- الحلقة الاولى ول = نسبها

ون -- تناسب ول = نسبة

فنسب ت ن = ل + ل (ع ١٢)

ت ن = ل + ل

ت ن = ل + ل الخ اي الكميات ت ن ت ن ت ن

ت ن الخ على سلسلة هندسية وانسابها ل + ل ل + ل ل + ل الخ
على سلسلة حسابية (جبر ع ٢٠٥ و ٢١٢)

الفصل الثاني

في كيفية تناول الانساب واعدادها من الجداول

(١٩) ان دلائل الانساب من ١ الى ١٠٠ مقيّدة في الجدول ومن ثمّ فصاعداً يتقدّم الجزء الكسري فقط ويقدر الدليل على موجب القاعدة المذكورة سابقاً (ع ٨ و ١١)

(٢٠) أولاً ان كان العدد المطلوب نسبة بين ١ و ١٠٠ فاطلبه في عمود الاعداد عن يمين الجدول فترى نسبة عن يساره في عمود الانساب مع دليله

مثاله نسب ١٨ هو ٢٥٥٢٧٢ و ١٠٥٢٧٢ هو ٧٢ و ١٨٦٢٢٢ هو ١٨

ما هو نسب ٢٠ هو ٢٢ ٥٤ ٩٩ ٢ ٨ ١٠ ٦٠

(٢١) ثانياً ان كان العدد بين ١٠٠ و ١٠٠٠ اي عدداً اذ ثلاثة ارقام مع اية عدة كانت من الاصفار عن يمينه فغض النظر عن الاصفار واطلب الارقام في عمود الاعداد فترى عن يساره في العمود الاول الجزء الكسري من نسبته فخذ واجعل له دليلاً على موجب ما تقدم في ع ٨

مثاله لو قيل ما هو نسب ٤٥٨ لقل اطلب هذا العدد في عمود الاعداد فترى عن يساره الجزء الكسري من نسبته اي ٦٦٠٨٦٥ والعدد ٤٥٨ ذو ثلاث منازل فيكون دليله ٢ ونسبة الكامل ٦٦٠٨٦٥ وهكذا يتناول نسب ٧٩٦ اي ٩٠٠٩١٢ تنبيه قد يتكرر الرقمان الاولان في انساب عدة اعداد فيتقدّم مرة واحدة فقط في الجدول ويبقى موضعها خالياً في ما تختمها الى ان يتغيرا

(٢٢) ان اضيفت الى العدد اصفار عن يمينه مثاله ٤٥٨٠ فاطلب ٤٥٨ في عمود الاعداد وخذ الجزء الكسري من عمود الانساب الاول كما

فترى فضلة الأعداد ٢٠٢ و ٤٢٠ والخ فضلة الانساب ٤٣٤ و ٤٢٢ اي زيادة واحد في العدد يزيد النسب ٤٢٢ وهذه الفضلة مقيدة في العمود الأخير عن اليسار. اطلب الفضلة في العمود الأول تحت الصف من القسم الأسفل وتحت الرقم الخامس للعدد المفروض في أعلى الصحيفة فتحة وتجاه الفضلة ترى ما يجب اضافته الى النسب المقيد في الجدول مثاله لو طلب نسب ٢١٧١٦ لقليل

$$\text{نسب } ٢١٧١ = ٤٢٢٦٦٦٠$$

$$\text{ونسب } ٢١٧٢ = ٤٢٢٦٨٦٠$$

$$\text{الفضلة } ٢٠٠$$

اطلب ٢٠٠ في عمود الفصلات وتجاهها وتحت ٦ ترى ١٢ فاضمها الى نسب ٢١٧١ فيكون لك الجزء الكسري من نسب ٢١٧١٦
٤٢٢٦٦٦٠ اي نسب ٢١٧١٠
١٢

$$\text{المجموع } ٤٢٢٦٧٨٠ \text{ اي نسب } ٢١٧١٦$$

(٢٦) لنا ما سبق هذه القاعدة لاستعلام نسب عدد فيه أكثر من أربعة ارقام. خذ نسبي عددين احدهما أكبر والثاني اصغر من العدد المفروض وفضلة العددين وفضلة النسبين ثم قل نسبة فضلة العددين الى فضلة نسبيهما كنسبة فضلة اصغر العددين والعدد المفروض الى ما يجب اضافته الى نسب اصغرها

$$(٢٧) \text{ فان طلب نسب } ٢٦٨٤٢ \text{ فخذ نسب } ٢٦٨٤٠ \text{ ونسب } ٢٦٨٥٠$$

$$٧٩٢٦٧٤ \quad ٧٩٢٦٠٠ \text{ ونسب } ٧٩٢٧٠٠$$

$$٦٥٢٧٨٢٥ \quad ٦٥٢٧٠٠٠ \text{ ونسب } ٦٥٢٨٠٠٠$$

وقس على ذلك

مثال اول لوقيل ما هو نسب ٢٦٢٥٧٢ لقليل

نسب ٢٦٢٦٠٠ هو ٥٠٥٥٩٤٢

٥٠٥٥٩٢١ . ٢٦٢٥٠٠

الفضل ١٠٠ و ١٢

تم قل ١٠٠:١٢::٧٢:٨٠ تقريباً

و ٥٠٥٥٩٢١ + ٩ = ٥٠٥٥٩٤٠ وهو النسب المطلوب

مثال ٢ ما هو نسب ٧٨٢٦٤ الجواب ٤٠٨٩٣٥٥

٢ . . . ١٤٢٥٤٢ . ٥٠١٥٦٩٨

٢ . . . ١١٢٩٥٣٥

(٢٨) اذا تناولت ما يجب زيادته الى النسب من الاجزاء النسبية

في الجدول فان كان للعدد خمسة ارقام فاضف الجزء النسبي كما هو وان

كان له ٦ ارقام فافعل كما تقدم للخمسة ثم للسادس اقطع منزلة كسراً

واضف الباقي

مثال لوقيل ما هو نسب ٨٧٦٥٤٢٢

لقليل نسب ٨٧٦٥٠٠ - ٦٩٤٢٧٥٢

الاصلاح للرقم الخامس ٢ = ٢٠

السادس ٢ = ١٠

السابع ٢ = ١٠

نسب ٨٧٦٥٤٢٢ - ٦٩٤٢٧٧٤

ولو قيل ما هو نسب ٢٢٤٥٦٧ لقليل

نسب ٢٢٤٥٠٠ - ٥٢٧٠١٤٢

الاصلاح للرقم الخامس ٦ - ١١١

السابع ٧ - ٧

نسب ٢٢٤٥٦٧ = ٥٢٧٠٢٦١

(٢٩) خامساً ان كان العدد كسراً عشرياً . قد تقدم انه ليس فرق

بين نسب كسر عشري ونسب صحيح من ذات ارقام الكسر الا في

الدليل كما تقدم (ع ١٤) فاطلب نسب صحيح مركب من نفس ارقام الكسر
واجعل دليله السلي مساوياً لعدد منزلة الرقم الاول من الكسر عن منزلة
الاعشار حسماً تقدم (ع ١١)

مثالہ نسب ۰۷۶۴۲ ہو ۰۸۸۴۲۶ او ۰۸۸۴۲۶
 ۰۰۲۵۹ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰
 ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰

(۳۰) سادساً ان كان العدد صحيحاً وكسراً عشرياً فاطلب نسبة

کمالو کان صحیحاً واجعل لہ دلیلاً حسباً تقدم ع-۱

مثالۃ نسب ۲۶'۴۲ هو ۴۲'۰۶۲ دلیلۃ واحد لان ۲۶ فیہ رفبان (ع ۷)
ونسب ۲۶'۴۲ هو ۴۲'۰۶۲ ونسب ۲۷'۴۴۰ هو ۴۴۰'۰۶۲ ونسب ۲۷'۴۴۰ هو ۴۴۰'۰۶۲
ونسب ۲۷'۴۴۰ هو ۴۴۰'۰۶۲

(٣١) سابعاً ان كان العدد كسراً دارجياً فقيمة الكسر هو الخارج

من قسمة الصورة على المخرج وفي الانساب تم القسمة بالطرح اي فضلة
نسبي عدددين هو نسب الخارج من قسمة احدهما على الآخر (ع ١) فلكي
تستعلم نسب كسر دارجي اطرح نسب المخرج من نسب الصورة فالباقي
نسب الكسر ويجوز تحويله الى كسر عشري ثم يتناول نسبه كما تقدم
ع ٢٩ وع ٣٠ وان كانت الصورة اقل من المخرج يكون دليل النسب
سلبياً (ع ٩)

فلو قيل ما هو سبب $\frac{9}{17}$ لقيل

نسب الصورة هو ١:٥٢:٢٨

المخرج . ١٩٢٩٥٢

٩٠٩١٩٦ او ٩٠٩١٩٦

نسب ۲۶۲ هو ۲۶۲
۱۶۵۲

$$V' \cdot 45V7, \bar{V}' \cdot 25V7 \quad \cdot \quad \frac{V}{7579} \cdot$$

(٢٢) ان كان العدد مختلطاً فحوّله الى كسر غير حقيقي ثم افعل كما تقدم

$$\text{مثاله } ٢\frac{٧}{٩} = \frac{٢٥}{٩} \text{ ونسبه } ٥٧٧٢٤$$

(٢٣) لكي تجد العدد الطبيعي الذي يخص نسباً مفروضاً اي ان

كان معك نسب ونريد العدد الذي هو له فالامر واضح ان طريقة ذلك هي عكس طريقة تناول نسب ذلك العدد فان لم يقصد التدقيق التام فاطلب النسب المفروض في عمود الانساب فترى تجاهه الثلاثة الارقام الأول من عدد في عمود الاعداد والرابع ان كان له رابع في راس عمود الانساب فخذ هذه الارقام وافصل منها كسراً ان اقتضى الحال

حسباً يناسب دليل النسب المفروض (ع ٨ و ١١)

$$\text{مثاله العدد الذي يخص } ٢\frac{٨٦٤٩٢}{٧٢٢٧} \text{ هو } ٧٢٢٧$$

$$٢٩٦٦٩ \quad \cdot \quad ٢٩٠١٢ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$٢٣٢٢٤ \quad \cdot \quad ١٦٣٥٧٢ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$٠٠٧٧٨٢ \quad \cdot \quad ٢٨٩١١٥ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

في المثال الآخر يقتضي حسب دليل السب ان يكون الرقم الأول من العدد في المنزلة الثانية من منازل الكسر العشري فيلزم اضافة صفر عن يساره لكي يناسب الدليل وقد يلزم احباً تازيادة اصغار عن يمين العدد لكي يصير عدد ارقامه اكثر من دليل النسب

بواحد مثاله

$$\text{العدد الذي يخص } ٦\frac{٧١٥٦٧}{٥١٩٦٠٠} \text{ هو } ٥١٩٦٠٠$$

$$٤٦٨٤٠ \quad \cdot \quad ٤٦٧٠٦٢ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$٠٠٠٤٥٢٧ \quad \cdot \quad ٣٦٥٦٧٧ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$٠٠٠٢٩٦٢ \quad \cdot \quad ٤٠٥٩٨٠٢ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

(٢٤) اذا قصد التدقيق التام ولم يقيد النسب المفروض نفسه في

الجداول فيجب تعكيس القاعدة المذكورة ع ٢٦ فخذ من الجدول النسبين الاقربين الى المفروض احدهما اكبر والاخر اصغر منه وخذ فضلتهما وفضلة العددين الذين لها وايضاً فضلة اصغرها والنسب

المفروض ثم قل

نسبة فضلة النسيين

الى فضلة عدديهما

كنسبة فضلة المفروض واصغر النسيين

الى ما يجب اضافته الى اصغر العددين

مثالة اوقبل ما هو العدد الذي يخص ٢٦٧٢٢٥ لقبل

الاقرب الاكبر ٢٦٧٢٣٠ وعدده ٤٧١٢

الاصغر ٢٦٧٢٢١ وعدده ٤٧١٢

الفضلة ٤

المفروض ٢٦٧٢٢٥

الاقرب الاصغر ٢٦٧٢٢١

الفضلة ٤

١:٤ :: ٤:٤٤ الذي يجب اضافته الى اصغر

العددين اي ٤٧١٢

وهو العدد المطلوب ٤٧١٢٤٤

ما هو العدد الذي يخص ٤٢٧٦٢٧ الجواب ٢٢٧٨٢٤٥

٤٩٥٢٠٨ . ٣٦٩٤٧٩

٥٤٠٧٢٥٧ . ١٧٢٦٩٨

٠١٢٢٦٢٥ . ٢٠٩٢١٤

(٢٥) في تصحيح الجداول. قد يقع في الجداول احيانا غلط في الطبع

ويعرف صحة كل نسب بمقابلته على مجتمعات نسيين آخرين هما ضلعا المفروض

(ع ١٢)

مثالة ٤٨ = ٢ × ٢٤ = ٣ × ١٦ = ٤ × ١٢ = ٦ × ٨ فنسب ٤٨ = مجموع نسي ٢٤

٢ او ١٢ او ٤ او ٢٤ الخ و ٢ = ٢/٢ = ١/١ = ١/١ = ١/١ = ١/١ الخ فنسب ٢ = فضلة

نسب ٦ او ١٢ او ٢٤ او ٤ او ٢ او ١ الخ

تنبيه. لنا طريقة اخرى لاستعلام العدد الذي يخص نسباً ما وهو ان تطرح من النسب المفروض الاقرب اليه الاصغر ثم اضع الى الباقي عدة اصفار ثم اقسم على الفضل المشترك المعين في عموده واضف الخارج الى عدد الاقرب الاصغر مثالة

المفروض ٣٤٤١٠٤٩

الاقرب الاصغر ٣٤٤٠٩٠٩

(١٨٩) ١٤٠٠٠ (١٥٧)

عدد الاقرب الاصغر ٢٧٦٠ اضع له ١٨٩ يصير ٢٧٦٠٧٩ وهو المطلوب

الفصل الثالث

في اتمام الاعمال الحسابية بواسطة الانساب

(٢٦) ان جميع نسباً عدددين يكون المجمع نسب حاصلهما وان طرح نسب عدد من نسب عدد آخر يكون الباقي نسب الخارج من قسمة احدهما على الآخر كما يتضح من كون الانساب سلسلة قوات وجذور (٥٢ و٥)

في الضرب بواسطة الانساب

(٢٧) اجمع انساب الاعداد المطلوبة ضربها فيكون المجمع نسب

حاصلها

اعداد	انساب	اعداد	انساب
٢٦٢	١٥٥٨٧٠٩	٦٤٠	٢٨٠٦١٨٠
في ٧٨٤	٠٨٩٤٢١٦	٢٢١٦	٠٢٦٤٧٢٩
الحاصل ٢٨٢٨	٢٤٥٢٠٢٥	١٤٨٢	٢١٧٠٩١٩

اضرَب	٨٩'٢٤	١'٩٥٠٠٦٠	١٢٤	٢'١٢٧١٠٥
في	٢'٦٨٧	٠'٥٦٦٦٧٢	٢٥٠٦	١'٤٠٨٢٤٠
الحاصل	٢٢٩'١	٢'٥١٧٢٢٢	٢٤٤٠	٢'٥٢٥٢٤٥

(٢٨) ان كان بعض الدلائل او كلها سلبية تُجمع حسب قواعد جمع الكميات الايجابية والسلبية في الجبر مع اعتبار كون الجزء الكسري ايجابياً (ع ١٠) فاذا اقتضى بعد جمع الجزء الكسري اضافة شيء الى الصحيح يجب ان يُحسَب ايجابياً فيُطرح من الدليل السليبي قبل اتمام الجمع مثال ذلك

اضرَب	٦٢'٨٤	١'٧٩٨٢٢٦	٠'٢٩٤	٢'٤٦٨٢٤٧
في	٠'٦٨٢	١'٨٢٢٧٨٤	٠'٨٢٧٢	١'٩٢٢٨٢٩
الحاصل	٤٢'٨٦	١'٦٢٢٠٢	٠'٢٤٦١	٢'٢٩١١٧٦

وان حصل من هذا الجمع اشتباه فاطرح الدليل السليبي من ١٠ حسب ع ١٢ ثم افعل حسب ع ٢٧ ثم اطرح ١٠ من الحاصل مثاله

اضرَب	٦٢'٨٤	١'٧٩٨٢٢٦	٠'٢٩٤	١'٤٦٨٢٤٥
في	٠'٦٨٢	١'٨٢٢٧٨٤	٠'٨٢٧٢	١'٩٢٢٨٢٩
الحاصل	٤٢'٨٦	١'٦٢٢٠٢	٠'٢٤٦٦	٢'٢٩١١٨

اضرَب	٢٦'٨٢	١'٢٢٨٦٢	١'٢٢٨٦٢	١'٢٢٨٦٢
في	٠'٠٦٩	١'٨٢٨٨٥	١'٨٢٨٨٥	١'٨٢٨٨٥
	٠'٠١٨٥١	٢'٢٦٧٢٧	٢'٢٦٧٢٧	٢'٢٦٧٢٧
اضرَب	٠'٠٨٤٥	٢'٢٦٧٢٧	٢'٢٦٧٢٧	٢'٢٦٧٢٧
في	١'٠٦٨	٢'٢٦٧٢٧	٢'٢٦٧٢٧	٢'٢٦٧٢٧
	٩'٠٢٤٦	٩'٠٥٥٤٢	٩'٠٥٥٤٢	٩'٠٥٥٤٢

٢٠'٢٦٢ ٢٥'٢٨٨ ٩'١٨٨

١'٤٦٧ ٢٢٨'١٨ ١'٦٢٦

١'٨٦١ ٠'٠٨٤٢ ٠'٠٠٧٢٥٨

في هذه الأمثلة دلائل الانساب سلبية والكميات ايجابية فالحاصل ايجابي أيضاً

اضرِب	- ٦٢'٥٩	١'٧٩٦٥٠	- ٦٨'٢	١'٨٢٤٤٢
في	- ٠'٠٨٦٢	٣'٩٢٦٠١	- ٠'٠٠٩٦	٣'٩٨٢٢٧
الحاصل	+ ٠'٥٤٠٢	١'٧٢٢٥١	٠'٦٥٥٧	١'٨١٦٦٩

في القسمة بواسطة الانساب

(٤١) اطرح نسب المقسوم عليه من نسب المقسوم فالباقي نسب

الخارج (عد ٢٦)

اعداد	انساب	اعداد	انساب	
اقسم	٦٢٢٨	٣'٧٩٥٠٥	٨٩٦'٢	٢'٩٥٢٤٥
على	٢٩٨٢	٣'٤٧٤٥٢	٩'٨٤٧	٠'٩٩٢٢٠
الخارج	٢'٠٩٢	٠'٢٢٠٥٢	٩١'٠٢	١'٩٥٩١٥

(٤٢) الجزء الكسري من الانساب يُطرح كما في الحساب ولكن ان

كان احد الدلائل ايجابياً والآخر سلبياً او كان دليل المطروح اكبر من دليل المطروح منه يتم الطرح حسباً ذكر في الجبر اي بتبديل علامة المطروح ثم يُعمل فيه كما تقدم في الجمع واذا بقي من الجزء الكسري ما يضاف الى الصحيح بحسب ايجابياً ويُطرح من الدليل قبل تبديل علامته

اقسم	٠'٨٦٩٧	١'٩٢٩٢٧	٩'٩٢٩٢٧
على	٩٨'٦٥	١'٩٩٤١٠	١'٩٩٤١٠
الخارج	٠'٠٨٨١٦	٣'٩٤٥٢٧	٧'٩٤٥٢٧

بقي واحد من الجزء الكسري واذيف الى ا فصار - ٢ ثم تبديل العلامة لكون المقسوم عليه اكبر من المقسوم صار - ٢ و - ٢ - ١ = - ٢ او - ٢

اقسم	٢٩'٧٦	١'٤٧٢٦٢	٦'٨٢٢	٠'٨٢٤٥٥
على	٦٢٥٤	٣'٧٩٦١٦	٠'٢٦٢	٣'٥٥٨٧١
الخارج	٠'٠٤٧٥٨	٣'٦٧٧٤٧	١٨٨'٧٢	٢'٢٧٥٨٤

$$\therefore 178Y = 278 \div 1.751$$

(٤٥) لنا مما سبق هذه القاعدة لترقية الكميات بالانساب . اضرب
نسب الكمىة المفروضة في دليل القوة المفروضة . وتضع هذه القاعدة بان
الانساب هي دلائل جذور وقوات وقد راينا في الجبر ان الجذور والقوات
ترقى بضرب دلائلها في دليل القوة المفروضة

مثال ١ ما هو مكعب ٦٢٩٦
 نسب هذا الجذر هو ٧٩٩.٦
 دليل القوة المفروضة ٢
 القوة المطلوبة $٢٤٩٦ = ٢٩٧١٨$

مثال ٢ ما هي القوة الرابعة من ٢١٢٢
 نسب هذا الجذر ١٢٢٨٧٩
 الدليل المفروض ٤
 القوة المطلوبة $٢٠٦٦٤ = ٥٢١٥١٦$

مثال ٣ ما هي القوة السادسة من ١٦٨٩
 نسب هذا الجذر ٢٢٧٦٣
 الدليل المفروض ٦
 القوة المطلوبة $٢٣٢١٥ = ١٢٦٥٧٨$

مثال ٤ ما هي القوة الـ ١٤ من ١٠٠٣
 نسب هذا الجذر ٠٠٠١٢٠
 الدليل المفروض ١٢٢
 القوة المطلوبة $١٠٥٣٩ - ١٨٧٢٠$

(٤٦) يجب ان يعتبر هنا ايضاً ما قيل في الضرب بان الباقي بايد من الجزء الكسري هو ايجابي ومتى كان الدليل سلبياً يعمل به كما سبق وان استعير ١٠ ليصير ايجابياً فالعشرة تُضرب ايضاً فيكون الحاصل اكثر من اللازم ٢٠ في المال و ٢٠ في الكعب و ٤ في القوة الرابعة وهلم جراً فيجب طرحه من الحاصل

مثال ١ ما هو مكعب ٠.٦٢٩
 نسب هذا الجذر ٢٨١٢٢٢ او ٨١٢٢٢
 الدليل المفروض ٢
 القوة $٢٧٢٣٠٠٠٠ = ٤٣٦٧٢ = ٦٤٣٦٧٢$

مثال ٢ ما هي القوة الرابعة من ٠.١٢٣٤

نسبة ٠.٩١٣٢ أو ٠.٩١٣٢

الدليل ٢ ٢

القوة ٠.٠٠٠٢٣١٩ ٤٢٦٥٢٨ ٦٢٦٥٢٨

مثال ٣ ما هي القوة السادسة من ٠.٩٩٧٧

نسبة ٠.٩٩٩٠ أو ٠.٩٩٩٠

الدليل ٦ ٦

القوة ٠.٩٨٦٣ ٠.٩٩٩٠ ٠.٩٩٩٠

مثال ٤ ما هو مكعب ٠.٨٧٦٣

نسبة ٠.٩٤٣٦ أو ٠.٩٤٣٦

الدليل ٣ ٣

القوة ٠.٦٧٣٧ ٠.٨٧٦٣ ٠.٨٧٦٣

مثال ٥ القوة السابعة من ٠.٩٠٦١ = ٠.٥٠١٥

٦ القوة الخامسة من ٠.٩٣٤٤ = ٠.٧١٢٣

في التجذير بواسطة الانساب

(٤٧) التجذير عكس الترقية والترقية يتم بالضرب كما تقدم اما التجذير

فبالقسمة وهذه قاعدته

لكي تستعلم جذر كمية بالانساب اقسم نسب الكمية على دليل الجذر

المطلوب فالخارج نسب الجذر

مثال اول ما هو جذر ٦٤٨٢ المالي

نسبة ٢٨١١٧٧٦ (٢ الدليل المفروض)

الجذر ٢٥٤٦ = ١٤٠٥٨٨٨

مثاله لو غيرنا ٢٦٠٩٥٠ حتى يصير ٢٦٠٩٥٠١٦ فيقسم حينئذ على ٢ ويكون
الخارج ٢٦٠١٢

(٤٩) لنا ما سبق هذه القاعدة ان لم يفن المقسوم عليه الدليل
السلي فاضف الى دليل المقسوم كمية حتى يفنيه المقسوم عليه وزد عن يسار
الجزء الكسري نفس الكمية التي اضيفت الى الدليل السلي

مثال ١ ماهو جذر ٢٠٠٩٦٤٢ الخامس
نسبة ٢٠٠٩٦٤١٧ او ٢٠٠٩٦٤١٧ + ٥ (الدليل
الجذر ٢٠٠٩٦٤٢

مثال ٢ ماهو جذر ٢٠٠٤٩٢٥ السابع
نسبة ٢٠٠٤٩٢٢٩ او ٢٠٠٤٩٢٢٩ + ٧ (الدليل
جذره ٢٠٠٤٩٢٢

(٥٠) لنا عوضاً عن الطريقة السابقة ان نستعير عدة عشرات تماثل
الآحاد في الدليل المفروض ونضيفها الى دليل النسب السلي ثم نطرحها
بعد اتمام العمل

مثاله ماهو جذر ٢٠٠٢٦٩٨ الرابع
نسبة ٢٠٠٢٦٩٧ (٤) او ٢٠٠٢٦٩٧ (٤)
الجذر ٢٠٠٢٦٩٧

اربع عشرات وبعد القسمة على ٤ بقيت اكثر من اللازم بعشرة وان طرح ١٠ من ٩
يبقى ١

ماهو جذر ٢٠٠٨٩٢٦ الخامس
نسبة ٢٠٠٨٩٠٦٦ (٥) او ٢٠٠٨٩٠٦٦ (٥)
الجذر ٢٠٠٨٩٠٦٦

(٥١) لاجل استعمال قوة جذر اضرب نسب الكمية في دليل القوة
ثم اقسم الحاصل على دليل الجذر المفروض (ع ٤٥ و ٤٧)
مثال اول ماهي قيمة (٥٢) اي القوة السادسة من جذر ٥٢ السابع

نسب ٥٣ هو	١٧٢٤٢٨
اضربة في دليل القوة	٦
اقسم على دليل الجذر	١٠٠٢٤٥٦٨
الجذر ٢٠٠٠٦	١٤٧٧٩٥
مثال ٢ ما هي القوة الثامنة من جذر ٦٥٤ التاسع اي (٦٥٤) ^٨	

في النسبة بواسطة الانساب

(٥٢) اذا فرض ثلاثة اجزاء نسبة فلكي تستعلم الرابع بواسطة الانساب
اجمع نسب الجزء الثاني الى نسب الثالث واخرج من المجمع نسب الجزء
الاول فالباقي نسب الجزء الرابع وبناء هذه القاعدة واضح ما تقدم
مثال اول استعلم متناسبا راعا لهذه الكميات ٧٩٦٤ و ٢٧٨ و ٢٧٩٦٠
الجزء الثاني ٢٧٨ نسبة ٢٠٧٧٤٩
الـ الثالث ٢٧٩٦٠ . ٤٤٤٦٥٤
مجمعهما ٢٠٢٤٠٣
الجزء الاول ٧٩٦٤ نسبة ٢٩٠١١٢
فضلتهما ٢١٢٢٩ والعدد الذي يخص هذا

النسب اي ١٢٢٧ فهو الرابع من الاربع المتناسبة
مثال ٢ استعلم متناسبا راعا لهذه الكميات ٧٦٨ و ٢٨١ و ٩٧٨٠
الجزء الثاني ٢٨١ وسنة ٢٠٥٨٠٩٢
الـ الثالث ٩٧٨٠ . ٢٩٩٠٢٤
مجمعهما ٦٠٥٧١٢٦
الجزء الاول ٧٦٨ وسنة ٢٠٨٨٥٢٦
فضلتهما ٢٠٦٨٥٩٠ والعدد الذي يخصه ٤٨٥٢ فهو الرابع
من الاربع المتناسبة

في التم الحسابي

(٥٣) اذا اقتضى طرح عدد من آخر يسهل العمل احياناً بطرحه من ١٠ ونُصَاف الفضلة الى المطروح منه ثم تُطرح العشرة من المجموع مثاله عوضاً عن ت - ب نكتب ١٠ - ب + ت - ١٠ والعبارتان متساويتان لان الزيادة في الثانية هي ١٠ - ١٠ اي صفرو يمكننا عوضاً عن ١٠ ان نستعير ١٠٠ او ١٠٠٠ الخ حسب مقتضى الحال

(٥٤) فضلة عدد مفروض و ١٠ او ١٠٠ او ١٠٠٠ الخ يسمى متممة الحسابي ويستعمل التم الحسابي لكل عدد فيه رقم واحد صحيح مع كسرٍ عشري او بدونهِ بطرحهِ من ١٠ وما كان فيه رقبان صحيحان مع كسرٍ عشري او بدونهِ يستعمل متممة الحسابي بطرحهِ من ١٠٠ وما كان فيه ثلاثة ارقام صحيحا بطرحهِ من ١٠٠٠ الخ

مثاله ٢٤٦ متممة الحسابي هو $١٠ - ٢٤٦ = ٦٥٤$

$٢٤٦ - ١٠٠ = ١٤٦$ $٢٤٦ - ١٠٠٠ = ٦٥٤$

$٢٤٦ - ١٠٠٠ = ٦٥٤$ الخ

ثم حسب قواعد الطرح في الحساب اذا طُرح عددٌ من ١٠ او ١٠٠ او ١٠٠٠ الخ يُبتدأ عن اليمين ويطرح كل رقم من ١٠ ويضاف واحد الى كل منزلة الا الاولى مثاله

لوقيل من ١٠٠٠٠٠٠

اطرح ٧٦٢١٢٥

لقيل الفضلة اي التم الحسابي $٢٦٨٧٥ = ١٠ - ٢٦٨٧٥$ اي طُرح ٥ من ١٠ و ٢ من ١٠ و ٢ من ١٠٠ و ٨ من ١٠٠٠ و ٦ من ١٠٠٠٠ ولنا طريقة اخصر من هذه بدون زيادة واحد الى كل منزلة من المطروح اي طرح كل منزلة الا الاولى من ٩ لان ٢ من ٩ = ١ و ٢ من ٩ = ١ و ٨ من ٩ = ١ و ٦ من ٩ = ١ الخ

(٥٥) لنا ما سبق هذه القاعدة لاستعلام التم الحسابي لعددٍ ما

اطرح الرقم الاول عن اليمين الذي ليس هو صفراً من ١٠ وبقية الارقام من ٩ واذا كان عن اليمين اصفار فضعها كما هي

اذا طُلبَ المِثم الحسابي لنسب ذي دليل سلمي يجب اضافة الدليل الى ٩ لان اضافة كمية سلبية هي كطرح ايجابية كما علمت من الجبر. فضلة - ٢ و ٩ ليست ٦ بل ١٢

المِثم الحسابي من	٦٢٤٨٩٧	هو	٢٧٥١٠٢
.	٢٩٨٦٤٣	.	٧٠١٢٥٧
.	٦٣٤٣٠	.	٩٢٧٥٧٠
.	٢٧٠٦٤٩	.	١١٢٩٢٥١
.	٢٦٤٣٠٠	.	٦٢٥٨٠٠
.	٩٢٥٠٠١	.	٠٦٤٩٩٩

(٥٦) فائدة المِثم الحسابي تظهر في اتمام اعمال النسبة بالانساب لانه في النسبة يقتضي جمع بعض الكميات وطرح البعض الآخر في الرابع المناسبة اي النسبة البسيطة يقتضي جمع جزئين وطرح الاول من مجتمعهما وان وُضع عوضاً عن نسب الجزء الاول مِثم الحسابي يُجمع الى مجتمع الجزءين الآخرين او تُجمع الاجزاء الثلاثة دفعة واحدة ثم تطرح ١٠ من دليل الحاصل فيصح العمل كما لو تم بالطريقة الاعتيادية لان طرح عدد من آخره كاضافة مِثم الحسابي وطرح ١٠ او ١٠٠ او ١٠٠٠ من المجتمع (ع ٥٢) ويسهل العمل بكتابة الكميات على ترتيبها في النسبة

مثال اول نسبة	٦٢٧٢	المِثم الحسابي من نسبة	٦٢٠٢
الى	٧٦٩٤	نسبة	٢٨٨٦١٥
كسبة	٢٧٦١	نسبة	١٥٧٥٣٠
الى	٤٦١٢		١٠٦٦٣٩٧

اطرح عشرة من الدليل يبقى ٦٦٣٩٧. والعدد الذي يخصه هو ٦١٢٤

مثال ٢ نسبة ٢٥٢ م م نسبة الحسابي ٧٠٩٦٨٨

الى ٦٧٢٠٥ نسبة ٢٠٨٢٧٦٩

كنسبة ٤٩٧ نسبة ٢٠٦٩٦٣٦

الى ٢٠١٢٠٩٣

اي الى ١٢٢١٠١

مثال ٣ نسبة ٤٦٢٤ م م نسبة الحسابي ٨٢٢٤٠٤

الى ٨٩٢٠١ نسبة ٢٠٩٥٠٤١

كنسبة ٧٠٦٢٨٨٢٩٨ نسبة ٠٠٠٨٨٢٩٨

الى ١٤٧ ٢٠١٦٧٤٢

مثال ٤ نسبة ٩٠٨٥ م م نسبة الحسابي ٩٠٠٦٥٦

الى ٦٤٢ نسبة ٢٠٨٠٨٢١

كنسبة ٧٦٢٠٢٠٨٨٢٥٢ نسبة ١٠٠٨٨٢٥٢

الى ٤٩٨١ ٢٠٦٩٨٢٩

في النسبة المركبة

(٥٧) في النسبة المركبة كما في البسيطة يستعمل المطلوب بواسطة

الانساب بالجمع عوضاً عن الضرب وبالطرح عوضاً عن القسمة حسبما

نقدم

مثال اول ان كانت فائدة ٢٦٥ ديناراً على ٣ سنين و ٩ اشهر ٨٢٠١٢ ديناراً

فكم تكون فائدة ٨٩٨٠ ديناراً على سنتين و ٦ اشهر

ان هذه المسئلة طريقتها في الحساب ان تكتب هكذا

٢٦٥ ديناراً : ٨٢٠١٢ دينار :: ٨٩٤٠ ديناراً :
 و ٢٧٥ سنين : ٨٢٠١٢ . :: ٢٠٥ سنة :
 الجواب : {

ثم يقسم حاصل الجزء الثالث والرابع والخامس على حاصل الجزء بين الاولين وبالنسب

يطرح مجموع انساب الاولين من مجموع اسباب الثلاثة الاخر

٢٠٦٢٢٩	نسب ٢٦٥ هو
٠٠٥٧٤٠٢	٠ ٢٠٧٥
٢٠١٢٦٢٢	مجموعهما
١٠٩١٤٥٠	نسب ٨٢٠١٢ هو
٢٠٩٥١٢٤	٨٩٤٠
٠٠٢٩٧٩٤	٢٠
٦٠٢٦٢٧٨	المجموع
٢٠١٢٦٢٢	اطرح مجموع الأولين
٢٠١٢٧٤٦	الباقى
عدده ١٢٤١ وهو المطلوب	

(٥٨) ثم يسهل العمل أيضاً بمجموع المنم الحسايي للأولين الى انساب الأخر عوضاً عن طرح مجموع نسبها غيرانه يزداد المجموع أكثر من اللازم بعشرين او ثلاثين وهلم جراً حسب عدد المنمات الحسايية التي جمعت ويجب طرح هذه الزيادة من المجموع حسبما تقدم

٧٠٤٢٧٧١	منم سبب الحسايي	٢٦٥
٩٠٤٢٥٩٧	٠	٢٠٧٥
١٠٩١٤٥٠	نسبة	٨٢٠١٢
٢٠٩٥١٢٤	٠	٨٩٤٠٠
٠٠٢٩٧٩٤	٠	٢٠
٢٠١٢٧٤٦		

اطرح ٢٠ يبقى ٢٠١٢٧٤٦ وعدده ١٢٤١ كما تقدم
مثال ٢ ان كانت اجرة ٥٢ رجلاً على ٤٢ يوماً ٢٢٠٠ دينار فكم تكون اجرة ٨٧ رجلاً على ٢٤ يوماً

$$\text{الجواب} : \left\{ \begin{array}{l} ٥٢ رجلاً : ٢٢٠٠ :: ٨٧ رجلاً : \\ ٤٢ يوماً : ٢٢٠٠ :: ٢٤ يوماً : \end{array} \right.$$

٨'٢٧٥٧٢	متم نسبه الحسابي	٥٣
٨'٢٧٦٧٥	. . .	٤٢
٣'٢٤٢٤٢	نسبة	٢٢٠٠
١'٩٣٩٥٢	.	٨٧
١'٥٣١٤٨	.	٣٤
٢٣'٤٦٥٨٩	المجموع	

اطرح ٢٠ يبق ٢'٤٦٥٨٩ عدد ٥'٢٢٣

(٥٩) وهكذا ان طلب قيمة حاصل عدة اعداد على حاصل عدة

اخرى فاجمع انساب المقسومة والمتماث الحسابية للمقسومة عليها

مثالة لو قيل اقسام ٢٩'٦٧ × ٢٤'٦٢ على ٦٩'٢٤ × ٨٦٢'٧ × ٤٩٧'٤ لفيل

١'٤٧٢٣٢	نسبة	٢٩'٦٧	} المقسوم
٢'٥٣٩٣٢	.	٢٤'٦٢	
٨'١٥٩٦٤	متم نسبه الحسابي	٦٩'٢٤	} المتقسم عليه
٩'١٠٤٤٧	. . .	٨٦٢'٧	
٧'٣٠٣٦٤	. . .	٤٩٧	
٣'٥٧٩٤٠	المجموع		

عدده ٠'٣٧٩٧

في حساب الفائدة المركبة بواسطة الانساب

(٦٠) في حساب الفائدة المركبة يُحسب رأس المال مع فائدته للسنة

الاولى رأس المال في السنة الثانية وهذا مع فائدته في الثانية رأس المال في

الثالثة وهلم جرا ولا بد من ان يكون المبلغ عند تمام كل سنة متناسبا

لرأس المال في اول تلك السنة فان كان رأس المال في السنة الاولى

دينارا وفائدته على سنة = ت فلنا

$$\left. \begin{array}{l} \text{ت : ت}^{\text{ر}} = \text{مبلغ السنة الثانية ورأس مال الثالثة} \\ \text{ت}^{\text{ر}} : \text{ت}^{\text{ق}} = \text{. . . الثالثة ورأس مال الرابعة} \\ \text{ت}^{\text{ق}} : \text{ت}^{\text{خ}} = \text{. . . الرابعة ورأس مال الخامسة} \end{array} \right\} \text{ا : ت : :}$$

اي مبلغ فائدة دينار على عدّة سنين يستعلم باستعلام المبلغ لسنة واحدة ثم ترفيقه الى قوة دليلها عدد السنين ومبلغ اية كمية فُرِضَتْ يستعلم بضربها في مبلغ دينار واحد او الجزء الكسري من دينار او غرش او صنف آخر وان استيعين بالانساب يتم الضرب بالجمع والترقية بالضرب حسبما تقدّم (٤٥)

(٦١) ؛ لئلاّ ما سبق هذه القاعدة لحساب الفائدة المركبة . استعلم فائدة الواحد من الصنف المفروض لسنة واحدة واضفها الى ذلك الواحد واضرب نسب المجمع في عدّة السنين المفروضة واضف الى الحاصل نسب رأس المال فيكون المجمع نسب مجمع الفائدة ورأس المال للوقت المفروض فخذ عدده واطرح منه رأس المال فيكون الباقي الفائدة ان فُرِضَ دفع الفائدة كل نصف سنة او كل ربع سنة فاستعلم فائدة الواحد من الصنف المفروض لنصف سنة او لربع سنة واضفها الى ذلك الواحد واضرب نسب المجمع في عدّة انصاف السنين او ارباع السنين في الوقت المفروض

ان فُرِضَ ر = رأس المال

أو ت = مبلغ الفائدة مع الواحد من الصنف المفروض لسنة واحدة

و ع = عدّة السنين

و م = مجمع رأس المال ع سنة

فاذا م = ت^ع × ر

فان اخذ انساب جانبي هذه المعادلة ثم نحوّلت حتى تدلّ على قيمة كل

واحدة من الكميات الاربع تصوير

(۱) نسب م = ع × نسبت ت + نسب ر

$$(2) \text{نسب ر} = \text{نسب م} - \text{ع} \times \text{نسب ت}$$

$$\frac{\text{نسبم} - \text{نسب ر}}{6} = \text{نسب ت} \quad (2)$$

$$(4) \quad \frac{\text{نسب م} - \text{نسب ر}}{\text{نسب ت}} = ع$$

وان فرضت ثلاث من هذه الكميات تُعرف منها الاخرى

مثال أول الى كم يبلغ ٢٠ غرشا في ١٠٠ سنة على فائدة مركبة هي ٦ غروش للمئة كل سنة. مجتمع غرش وفائدته في سنة واحدة ١٠٦،٠٦٠ نسبة ٠،٢٥٣٠٥٩.

اخره في
١٠٠

50.09

17.1.7

515175

راس المال ٢٠ ونسبه

المطلوب = ٦٧٨٦ غرشاً

مثال ٢ الم يبلغ غرش واحد في ٥٠٠ سنة على فائدة مركبة هي ٦ للمئة كل سنة
راس المال مع فائدته لسنة واحدة ١٠٦ ونسبة ١٠٢٥٢٠٥٩
اضربه في
٥٠٠

1570590

• • • • •

1570590

راس المال ا نسبه

المبلغ ٤٤٩٧٣

وكلُّ ما زاد منازل الكسر العشري في الانساب زاد الجواب تدقيقاً

مثال ٢ الى كم يبلغ ١٠٠٠ غرش في ١٠ سنين على فائدة مركبة هي ٦ تمروش للمئة كل سنة

الجواب ۸۵، ۱۷۹۰

مثال ٤ كم يكون رأس المال الذي يبلغ الى ١٦٤٢ غرشاً في ٢١ سنة: على فائدة مركبة هي اربعة غروش المئة لكل سنة
 الجواب ٧٢١٢١ غرشاً

مثال ٥ كم راس المال لكي يبلغ الى ٢٠٢ غرشا في ٤ سنين على فائدة مركبة هي ٦ غروش للمئة كل سنة

الجواب ١٦٠ غرشا

مثال ٦ اذا بلغ ٤٠٠ غرش الى ٥٦٩ غرش في اربع سنين فكم الفائدة عن كل سنة

الجواب ٩ للمئة

مثال ٧ في كم سنة يبلغ ٥٠٠ غرش الى ٩٠٠ على فائدة ٥ للمئة فائدة مركبة

الجواب في ١٢ سنة

مثال ٨ في كم سنة يبلغ ١٠٠٠ غرش الى ١٦٢٨٨ غرشا على فائدة ٥ للمئة فائدة مركبة

الجواب ١٠ سنين

مثال ٩ كم الفائدة حتى يبلغ ١١٠٦ غروش الى ٢٠٠٠ غرش في ١٥ سنة

الجواب ٤ للمئة

مثال ١٠ كم راس المال حتى يبلغ الى ٢١٨٨ غرشا في ٨ سنين على فائدة ٦ للمئة

الجواب ٢٠٠ غرش

مثال ١١ كم يبلغ ١٢٠٠ غرش في ١٠ سنين على فائدة ٦ للمئة ان اضيفت الفائدة

الى راس المال كل نصف سنة

الجواب ٢١٦٧ ٢٢ غرشا

مثال ١٢ في كم سنة بضاعف مبلغ على فائدة مركبة هي ٦ للمئة

الجواب ١١ ٩ سنة

مثال ١٣ كم يبلغ ٥٠٠ غرش في ٢٨ سنة على فائدة مركبة ٦ للمئة

الجواب ٤٧ ٢٥٩٣ غرشا

في ازدياد السكان

(٦١ ب) ازدياد سكان بلاد يُحَسَّب كالفايدة المركبة على فرض

كون الزيادة السنوية متناسبة لعدد السكان وان فرض عدد السكان

في اول سنة ونسبة الزيادة الى الاصل يُحَسَّب الزيادة للسنة كالمقام

يُضَاف ذلك الى اصل السنة الاولى وَيُنَى على المجموع الحساب للسنة

الثانية كما في الفائدة المركبة

ان فُرض ر = عدد السكان في أوّل سنة
و ت = ١ + الكسر الدال على نسبة الزيادة الى الاصل
و ع = عدّة السنين
و م = مجموع السكان بعدد سنة
فحسب ما تقدم في الفائدة

$$م = ت \times ر$$

$$(١) \text{ نسب م} = ع \times \text{نسب ت} + \text{نسب ر}$$

$$(٢) \text{ نسب ر} = \text{نسب م} - ع \times \text{نسب ت}$$

$$(٣) \text{ نسب ت} = \frac{\text{نسب م} - \text{نسب ر}}{ع}$$

$$(٤) ع = \frac{\text{نسب م} - \text{نسب ر}}{\text{نسب ت}}$$

مثال اول . عدد سكان بلاد في ١٨٧٠ م - ٩٦٢٥٠٠٠ وان كانت الزيادة السنوية $\frac{1}{32}$ من الكل فكم يكون عددهم في سنة ١٨٨٠
ر = ٩٦٢٥٠٠٠ ع = ١٠ سنين ت = $\frac{1}{32}$ - $\frac{1}{32}$ نسب م = ١٠ × نسب
نسب $\frac{25}{32}$ + نسب ٩٦٢٥٠٠٠ م = ١٢٨٦٠٠٠ عدد السكان في ١٨٨٠

مثال ٢ ان كان عدد سكان بلاد ٥ في اول قرن وكانت الزيادة السنوية $\frac{1}{13}$ فكم يكون عددهم في آخر القرن

الجواب ١٢٢٧٢٢٧

مثال ٣ ان كان عدد سكان بلاد في آخر قرن ٤٥٨٦٠٠٠ وكانت الزيادة السنوية $\frac{1}{13}$ فكم كان عددهم في اول القرن

الجواب ٢٠٠٠٠٠٠

مثال ٤ كان عدد سكان بلاد في سنة ١٨٧٠ ٧٢٤٠٠٠٠ وفي سنة ١٨٨٠ ٩٦٢٥٠٠٠ فكم الزيادة السنوية على شرط كونها متناسبة كل سنة الى عدد السكان في أوّل تلك السنة

$$\text{نسب ت} = \frac{\text{نسب م} - \text{نسب ر}}{ع} = \frac{٩٦٢٥٠٠٠ - ٧٢٤٠٠٠٠}{١٠}$$

$$ت = ٢٩ \text{ اطرح الواحد ببق } = \frac{٢٩}{1} = ٢٩ \text{ للمئة}$$

مثال ٥ في كم سنة يكثر عدد سكان بلاد من ٢٠٠٠٠٠ حتى يصير ٥٠٠٠٠٠
إذا كانت الزيادة السنوية $\frac{7}{36}$ الجواب $\frac{1}{47}$

مثال ٦ ان كان عدد سكان بلاد ٧٠٠٠٠٠٠ والزيادة السنوية $\frac{1}{30}$ فكم يكون
عدد هم بعد ٢٥ سنة

مثال ٧ كان عدد سكان بلاد في سنة ١٨٠٠ م ٥٢٠٦٠٠٠ فكم كان عددهم
في ١٧٨٠ إذا كانت الزيادة السنوية $\frac{1}{38}$

مثال ٨ في كم سنة يبلغ عدد سكان بلاد من ٤٠٠٠٠٠ الى ٧٠٠٠٠٠ ان
كانت الزيادة السنوية $\frac{2}{3}$

مثال ٩ كم الزيادة السنوية اذا بلغ عدد السكان من ٩٠٠٠ الى ١٥٠٠٠ في
١٢ سنة

ان لم يزد عدد سكان بلاد بدخول غرباء اليها ولم ينقص بارتحال
سكان منها فنسبة الزيادة الى الاصل تساوي فضلة نسبة عدد الموتي
ونسبة المولودين الى عدد السكان

مثال ١٠ ان كان عدد سكان بلاد في وقت ما ١٠٠٠٠٠٠ والزيادة بالولادة
كل سنة $\frac{1}{74}$ والنقصان بالموت كل سنة $\frac{1}{40}$ فكم عدد السكان بعد ٦٠ سنة

$$\text{الزيادة السنوية} = \frac{1}{40} - \frac{1}{74} = \frac{7}{360}$$

$$\text{عددهم بعد ٦٠ سنة} = ٢١٧٥٥٠٠٠$$

الزيادة او النقصان كل سنة من دخول غرباء الى بلاد او ارتحال
سكان منها تساوي فضلة الزيادة بالدخول والنقصان بالارتحال ثم ان
اضيفت هذه الفضلة الى فضلة الزيادة بالولادة والنقصان بالموت او
طُرِحَتْ منها تبقى الزيادة السنوية

مثال ١١ ان فُرض نسبة عدد المولودين الى السكان $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$ الموتي

$\frac{1}{5}$ الداخلين

$\frac{1}{6}$ الراحين

وكان عدد السكان هذه السنة ١٠٠٠٠٠٠ فكم عددهم بعد ٢٠ سنة

الزيادة السنوية الطبيعية $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} =$

بالدخول $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} =$

و $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$ الزيادة السنوية ثم حسبنا تقدم العدد بعد ٢٠ سنة ١٢٦١١٠٠٠

مثال ١٢ ان فُرِضَتْ نسبة عدد المولودين الى السكان $\frac{1}{3}$

ونسبة عدد الموتى الى السكان $\frac{1}{6}$

الداخلين $\frac{1}{4}$

الراجلين $\frac{1}{6}$ وعدد السكان ٣٠٠٠٠٠٠٠ ففي كم

سنة يبلغ ٤٥٠٠٠٠٠

ان فُرِضَتْ المدة التي فيها يضاعف عدد سكان بلاد تكون الاعداد

الدالة على المئات في سلسلة هندسية قرابتها ٢ وعدة المئات اقل من

عدد الحلقات واحداً

فان فُرِضَ $r =$ الحلقة الاولى

و $m =$ الحلقة الاخيرة

و $e =$ عدة المئات فلما $r \times e = ٢$

او نسب $m =$ نسب $r + e \times$ نسب ٢

مثال ١ ان تضاعف نسل زوج واحد مرة في كل ٢٥ سنة فكم عددهم في نهاية

١٠٠٠ سنة

عدة المئات $= ٤٠$ والجواب ٢١٩٩٢٠٠٠٠٠٠٠٠٠

مثال ٢ لنفرض ان نسل نوح مبتدئين من نيبو الثلاثة وسائهم قد تضاعفوا مرة

في كل ٢٠ سنة فكم عددهم في نهاية ٢٠٠ سنة

الجواب ١٩٦٦٠٨

مثال ٣ كان عدد سكان بلاد في سنة ١٨٢٠ م ٩٦٢٥٠٠٠ فكم يكون عددهم

في سنة ٢٠٢٠ ان تضاعفوا مرة في كل ٢٥ سنة

الجواب ٢٤٦٤٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

مثال ٤ لنفرض ان نسل آدم وحواء قد تضاعفوا مرة في كل ٥٠ سنة الى وقت

الطوفان اي ١٦٥٠ سنة فكم كان عدد سكان العالم في ذلك الوقت

في المعادلات الدليلية

(٦٢) المعادلة الدليلية هي ما كان فيها الحرف الدال على الكمية

المجهولة دليل قوة

مثالها $ك = ب$ و $ك - ب = س$

وهذه المعادلات تتحل على اسهل مرام بواسطة الانساب ولما كان جانباً المعادلة متساويين. يكون انسابها متساوية ايضاً فان اخذ انساب الجانبيين تتحل المعادلة بقواعد الجبر

مثاله ما هي قيمة ك في هذه المعادلة $ك = ٢٤٢$ سب $٢ =$ سب ٢٤٢ ونسب قوة

$=$ سب الجذر في دليل القوة (٤٥) اي (سب ٢) $\times$ ك $=$ سب ٢٤٢

$$وك = سب ٢٤٢ = \frac{٢٢٨٥٦١}{٤٧٧١٢} = ٥ = ٢ \text{ و } ٢٤٢ = ٢$$

(٦٣) المثال السابق من ابسط المعادلات الدليلية وينحل غيرها بعد

اخذ انساب الجانبيين بالخطأين حسباً تقدم في المعادلات من الدرجة العليا في الجبر او بفرض قيمتين للمجهولة واستعلام الخطأ فيهما ثم قل نسبة فضلة الخطأين الى فضلة القيمتين المفروضتين كنسبة الخطأ

الاصغر الى الاصلاح اللازم في القيمة المفروضة له

مثال اول ما هي قيمة ك في هذه المعادلة $ك = ٢٥٦$

لفرض $ك = ٢٠٥$ و ٢٠٦

بالمفروض الثاني

بالمفروض الاول

$ك = ٢٠٥$ ونسب $ك = ٥٤٤٠٢ =$ ك $= ٢٠٦$ ونسب $ك = ٥٥٦٢٠ =$

اضرب في ٢٠٥ اضرب في ٢٠٦

(نسب ك) $\times$ ك $= ١٩٠٤٢٤$ (نسب ك) $\times$ ك $= ٢٠٠٢٦٨$

سب $٢٥٦ = ٢٤٠٨٢٤ =$ سب $٢٥٦ = ٢٤٠٨٢٤ =$

الخطا $- ٥٠٢٠٠ =$ الخطا $- ٤٠٥٥٦ =$

فضلة الخطابين ٩٨٤٢ : تم قل ٩٨٤٢ : ١ : ٤٠٠٦ : ٤١١٩ :
 الاصلاح اللازم ٢٦ : ٤١١٩ : ١١٩ : ٢

تم افرض ك = ١١ او ١٢ ، وكرر العمل حسبما تقدم

المفروض الاول الثاني

ك = ١١' ٤" وسب ك = ٦٠٢٥٠ ك = ١٢' ٤" وسب ك = ٦٠٢٢٦

اضرب في ٢٠١١ اضرب في ٢٠١٢

$$\frac{2'41962}{2'42068} = \frac{\text{نسب ك}}{\text{نسب ك} \times \text{ك}}$$
$$\text{نسب } 206 = 2'4.824 = \text{نسب } 206$$

خطأ + 0.1149 الخطأ + 0.1544

فضلة الخطأين ٠.٠١٠٥ تم قل ٠.٠١٠٥ ٠.٠١ ٠.٠١٣٩ ٠.٠١١٠

تقريباً اطرح هذا من ١١.٤' يبقى ك = ٢ وهو المطلوب لان ٢٥٦ = ٤

مثال ۲ حل ۴ كـ = ۱۰۰ كـ ؟

٢٥٢ ك - ٩ ك

(٦٤) قد يكون دليل قوة قوة كافية $m^4 = b$

مثال ٢ ما هي قيمة k في هذه المعادلة $1000 = 4^k$

$$2^4 \times 3^4 - 1 = 16 \times 81 - 1 = 1295$$

ای $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ و $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ سب $\frac{2}{3}$

$$1.2 = \frac{4979597}{4771212} = \frac{212}{2} = 106$$

ونستعلم قيمة كسر مثل هذا اية اذا كان كلا الصورة واخرج نسباً طرح نسب نسب
المخرج من نسب نسب الصورة



الفصل الرابع

في نظام نيبيرونظام بر كس و كينية اصطناع الجدول

(٦٥) اذا كانت اعداد على سلسلة هندسية تكون انسابها على سلسلة

حسابية . افرض سلسلة هندسية

١ ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠٠ ١٠٠٠٠٠

فانسابها

٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ اي سلسلة حسابية

اذا استعلمنا متوسطاً هندسياً بين عددين في السلسلة الاولى يكون نسبة

المتوسط الحسابي بين العددين الموافقين لها في السلسلة الثانية . مثاله

المتوسط الهندسي بين ١ و ١٠ (انظر جبرع ٢١٤) هو جذر ١٠ المالي

اي ٣'١٦٢٢٧٧ * المتوسط الحسابي بين صفر و واحد هو ٠'٥ فنسب

٣'١٦٢٢٧٧ هو ٠'٥ ثم استعلم متوسطاً هندسياً بين ٣'١٦٢٢٧٧ و

١٠ اي ٥'٦٢٣٤١٣ والمتوسط الحسابي بين ٠'٥ و واحد اي ٠'٧٥

فنسب ٥'٦٢٣٤١٣ هو ٠'٧٥

ثم استعلم متوسطاً هندسياً بين ٣'١٦٢٢٧٧ و ٥'٦٢٣٤١٣ اي

٤'٢١٦٩٦٤ والمتوسط الحسابي بين ٠'٥ و ٠'٧٥ هو نسب ٤'٢١٦٩٦٤

اي ٠'٦٢٥

ثم استعلم متوسطاً هندسياً بين ٥'٦٢٣٤١٣ و ٤'٢١٦٩٦٤ فيكون

نسبة المتوسط الحسابي بين ٠'٦٢٥ و ٠'٧٥ اي ٠'٦٨٧٥

فلما نسب ٥'٦٢٣٤١٣ اي ٠'٧٥

ونسب ٤'٢١٦٩٦٤ اي ٠'٦٨٧٥

نقدّم (٩ و ١٥ و ١٧) ان نسب واحد صفر

$$\begin{aligned}
 \text{نسب } ٢ &= ٢ \times \left(\frac{1}{٢٣} \times ٧ + \frac{1}{٥٣} \times ٥ + \frac{1}{٢٢} \times ٢ + \frac{1}{٢} \right) \times \text{الخ} = ٦٩٣١٤٧ \\
 \text{نسب } ٢ &= ٢ \times \left(\frac{1}{٢٣} \times ٧ + \frac{1}{٥٣} \times ٥ + \frac{1}{٢٢} \times ٢ + \frac{1}{٢} \right) \times \text{الخ} = ١٠٩٨٦١٢ \\
 ٤ - ٢ \times \text{نسب } ٢ &= ١٢٨٦٢٩٤ \\
 ٥ - \text{نسب } ٢ + ٢ \times \text{الخ} &= ١٦٠٩٤٢٨ = \text{الخ} \left(\frac{1}{٧٤} \times ٧ + \frac{1}{٥٤} \times ٥ + \frac{1}{٢٤} \times ٢ + \frac{1}{٤} \right) \\
 ٦ = \text{نسب } ٢ + \text{نسب } ٢ &= ١٧٩١٧٥٩ \\
 ٧ = \text{نسب } ٥ + ٢ \times \left(\frac{1}{٧٦} \times ٧ + \frac{1}{٥٦} \times ٥ + \frac{1}{٢٦} \times ٢ + \frac{1}{٦} \right) &= ١٩٤٥٩١٠ \\
 ٨ = \text{نسب } ٤ + \text{نسب } ٢ &= ٢٠٧٩٤٤١ \\
 ٩ = ٢ \times \text{نسب } ٢ &= ٢١٩٧٢٢٤ \\
 ١٠ = \text{نسب } ٥ + \text{نسب } ٢ &= ٢٣٠٢٥٨٥
 \end{aligned}$$

الخ

الخ

(٧٠) نسبة نسب عدد في نظام ينسب الى نسبة في نظام آخر كنسبة

قاعدة النظام الواحد الى قاعدة النظام الآخري نسب (١ + ك) =

$$\text{أ} \times \text{ن} (١ + ك)$$

اي نسب عدد في نظام بر كس وهو النظام الاعنيادي يُستعمل بضرب
نسبه حسب نظام ينسب في قاعدة نظام بر كس ولجل استعمال تلك القاعدة

لنا من المعادلة الاخيرة

$$\frac{\text{نسب } (١ + ك)}{\text{ن} (١ + ك)} = \text{أ} \quad \text{لنفرض ك} = ٩ \text{ فلنا}$$

$$\frac{\text{نسب } ١}{\text{ن} ١٠} = \text{أ} \quad \text{ونسب } ١٠ = ١ \text{ فإذا}$$

$$\frac{١}{\text{ن} ١٠} = \frac{١}{٢٣٠٢٥٨٥} = \frac{١}{٤٣٤٢٩٤}$$

وهي قاعدة النظام الاعنيادي منها نحسب انساب الاعداد هكذا

$$\text{نسب } ٢ = ٦٩٣١٤٧ \times ٤٣٤٢٩٤ = ٣٠١٠٣٠$$

$$\text{نسب } ٢ = ١٠٩٨٦١٢ \times \text{نسب } ٢ = ٤٧٧١٢١$$

$$\text{نسب } ٢ \times ٢ = ٤ = ٦٠٢٠٦٠$$

نسب ۵ = نسب ۱۰ - نسب ۲ = ۱ - نسب ۲ = ۶۹۸۹۷۰

نسب ۶ = نسب ۲ + نسب ۲ = ۷۷۸۱۰۱

نسب ۷ = ۱۰ × ۶۹۵۲۹۴ - ۸۴۵۰۹۸

نسب ۸ = ۲ × نسب ۲ = ۹۰۴۰۹۰

نسب ۹ = ۲ × نسب ۲ = ۹۵۴۲۴۲

نسب ۱۰ = ۱۰۰۰۰۰

الخ الخ الخ
قاعدة لتسهيل جمع الكسور الواقعة في سرد الانساب

ليكن z مجموع العدد المطلوب نسبة مع العدد الذي تحته . اقسم ٦٧٨٥٨٨٩٦٣٨ .
 اية مضاعف قاعدة ريكس على z واقسم الخارج على مربع z واقسم هذا الخارج ايضاً
 على مربع z وذلك الخارج ايضاً على مربع z الى ان لا ينقسم الخارج على مربع z ثم اكتب
 هذه الخواارج بعضها تحت بعض واقسمها على التوالي على الاعداد الوترية $١ \ ٢ \ ٣ \ ٥ \ ٧$
 ٩ الخ الى النهاية واجمع الخواارج من هذه القسومات واضف الى المجموع نسب العدد
 تحت المطلوب نسبة فاك ان فهو النسب المطلوب وهذا مثالة

مثال اول. مطلوب نسب ۲

العدد الذي نخه هو واحد و $2 - 1 = 2 = r$ ومرة $4 - 9$ ثم حسب القاعدة

1) ΓΛ 90 Γ 9702	(ΓΛ 90 Γ 9702	9) ΓΛ 90 Γ 9702
2) Γ 97179975	(1.0755551	9) Γ 97179975
3) 907222	(7121111	9) 907222
4) 99717	(07555	9) 99717
5) 22159	(29.5	9) 22159
11) 29.5	(227	9) 29.5
12) 020	(25	9) 020
13) 71	(2	71

5-1-59990

..... اصف سب ا

نسب ۲ = ۲۰۱۰۲۹۹۹۰

الفصل الرابع

مثال ٢ مطلوب نسب ٢ على ٢٥ الضرب $\times ٠.٤$
 $٢ + ٢ = ٥ = ز$ مربعه ٢٥ ويجوز عوضاً عن القسمة

١) ١٧٢٧١٧٧٩٢	(١٧٢٧١٧٧٩٢	٢٥) ١٧٢٧١٧٧٩٢
٢) ٦٩٤٨٧١٢	(٢٢١٦٢٣٧	٢٥) ٦٩٤٨٧١٢
٥) ٢٧٧٩٤٨	(٥٥٥٩٠	٢٥) ٢٧٧٩٤٨
٧) ١١١١٨	(١٥٨٨	٢٥) ١١١١٨
٩) ٤٤٥	(٥٠	٢٥) ٤٤٥
١١) (	٢	١٨

١٧٦.٩١٢٦٠

٢٠١.٢٩٩٩٥

اضف ن ٢

٤٧٧١٢١٢٥٥ = نسب ٢

في التريغونومتريا اي حساب المثلثات

الفصل الاول

في الجيوب والمماسات والقواطع الخ

(٧١) مدار التريغونومتريا هو النسبة الكائنة بين اضلاع مثلثات وزواياها. وليس قسم من العلوم التعليمية اكثر اعتباراً منها لانه على قواعدها يسلك النوني في الاجر العظام وعلماء الجغرافيا يعينون مواقع الاماكن المختلفة على سطح الارض وعلماء الهيئة يقيسون ابعاد الاجرام السموية ومقاديرها وحركاتها فيجبرون سلفاً بحدوث كسوف الشمس وخسوف القمر وما يشبه ذلك

(٧٢) حساب المثلثات قسمان. حساب المثلثات المستوية اي التي تحيط بها خطوط مستقيمة وحساب المثلثات الكروية وهي التي يحيط بها اقواس دوائر

(٧٣) في كل مثلث يُمحَث عن الاضلاع وعن الزوايا ولاجل قياس الزوايا يُستعان بالدائرة وللدائرة ٣٦٠ درجة والدرجة ٦٠ دقيقة والدقيقة ٦٠ ثانية والثانية ٦٠ ثالثة وقد عرفت علاماتها. فليس للدرجة طول معين بل هي ٣٦٠ من دائرة كبيرة كانت او صغيرة

(٧٤) قياس زاوية هو الجزء من محيط دائرة الواقع بين خطي الزاوية

إذا جعل رأسها مركزاً ولا خلاف مها كان البعد

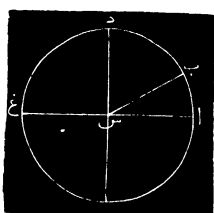
(٧٥) ان رُسم للدائرة قطران احدهما عمود على الآخر تُقسم بهما الدائرة الى اربعة اجزاء متساوية كل واحد 90° فكل زاوية قائمة $= 90^\circ$ وقائمتان $= 180^\circ$ واربع قائمات $= 360^\circ$

(٧٦) مجموع زوايا مثلث $=$ قائمتين اي 180° (أقليدس ق ٢٢ ك ١) فلا يمكن ان يكون في مثلث اكثر من قائمة واحدة ولا اكثر من زاوية واحدة منفرجة

(٧٧) من قوس او زاوية هو الفضلة بعد طرحها من 90° او طرح

90° منها

شكل ١



فتم القوس اب هو ب د وتم الزاوية اس ب هو الزاوية ب س د وتم القوس ب د ع هو ب د متم $10^\circ - 8^\circ$ متم $70^\circ - 20^\circ$ $50^\circ - 20^\circ$ $120^\circ - 30^\circ$ $170^\circ - 80^\circ$

فكل زاوية حادة ومتمها 90° ايلاً والزائمتان الحادتان من مثلث ذي قائمة $= 90^\circ$ فكل واحدة منها متم الاخرى

(٧٨) كمال قوس او زاوية هو الفضلة بعد طرحها من 180° فكمال

القوس ب د ع هو القوس ا ب وكمال الزاوية ب س غ هو الزاوية ب س ا

وكال $10^\circ - 170^\circ$ وكال $8^\circ - 100^\circ$

$120^\circ - 60^\circ$ و $150^\circ - 30^\circ$ الخ

فكل زاوية وكالها 180° ايلاً كما ترى ان اس ب و ب س غ معاً $=$ قائمتين اي 180°

(٧٩) فرع. الزوايا الثلاث من كل مثلث مستوي تساوي قائمتين

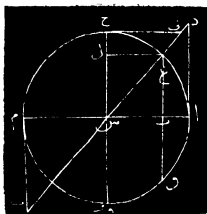
(أقليدس ق ٢٢ ك ١) فمجمع كل اثنتين منها هو كمال الأخرى وتستعلم الثالثة بطرح مجمع الآخرين من ١٨٠ أو يستعلم مجمع اثنتين منها بطرح الثالثة من ١٨٠

(٨٠) نصف القطر خطٌ مستقيم مرسوم من المركز إلى المحيط ويُحَسَّب واحدًا منها كان طوله وإليه مرجع الأعداد الدالة على المخطوط الأخرى هي على نسبة ثابتة إلى نصف القطر أي إلى واحد

(٨١) لاجل تسهيل حساب المثلثات قد رُسِمَ في الدائرة وحولها بعض المخطوط وسميت جيوباً ومماساتٍ وقواطع الخ ويجب على المبتدئ الاعتناء التام بمعرفتها

(٨٢) جيب قوس هو الخط المرسوم من أحد طرفيها عموداً على نصف القطر الماراً بطرفيها الآخر

شكل ٢



مثالة ب غ جيب القوس ا غ
فرع جيب قوس هو نصف وتر مضاعف تلك
القوس أي ب ع هو نصف ع ق الذي هو
وتر القوس ع ا ق وهي مضاعف القوس غ ا

(٨٣) سهم الجيب هو الجزء من القطر الواقع بين الجيب وطرف القوس مثل ب ا فإنه سهم جيب القوس ا غ

(٨٤) مماس قوس هو الخط المستقيم العمود على القطر المار بطرف القوس يلاقيه خط آخر مرسوم من المركز ماراً بالطرف الآخر لتلك القوس مثل ا د فإنه مماس القوس ا غ وهو عمود على س ا ويلاقيه س د المرسوم من المركز ماراً على غ

(٨٥) القاطع هو الخط المرسوم من المركز ماراً بطرف القوس حتى

يلاقى المماس مثل س د فانه قاطع القوس ا غ
(٨٦) في الهندسة لا يعين طول المماس والقاطع بل كل خط مس الدائرة
هو مماس وكل خط قطعها هو قاطع واما في حساب المثلثات فلا يكون
قاطعاً او مماساً الا بموجب الشرط المذكور اي تقاطعها فالمماس بالنسبة
الى القاطع والقاطع بالنسبة الى المماس

(٨٧) ب غ هو جيب القوس ا غ وهذه القوس تقابل الزاوية
غ س ا اي ب غ هو جيب الزاوية غ س ا ومطلقاً جيب قوس او
قاطعها او مماسها هو كذلك للزاوية الواقعة عند المركز التي تقابلها القوس
وتلك القوس قياس تلك الزاوية

(٨٨) جيب زاوية حادة ومماسها يقابلانها كما يرى من شكل ٢ اما
القاطع فهو واحد من الخطين المحدثين الزاوية
(٨٩) نظير الجيب هو جيب متم الزاوية

مثاله غ ل هو جيب الزاوية ع س ح وهي متم الزاوية غ س ا و غ ل هو نظير
جيب الزاوية غ س ا ونظير المماس هو مماس متم الزاوية . مثاله ف ح فانه نظير
ماس الزاوية غ س ا ونظير القاطع هو قاطع متم الزاوية . مثاله س ف هو نظير قاطع
الزاوية غ س ا وقد تقدم انه في كل مثلث قائم الزاوية احدى الحادتين هي متم الاخرى
فجيب احدها او قاطعها او مماسها هو نظير الجيب او نظير القاطع او نظير المماس للآخرى
(٩٠) جيب كمال زاوية ومماسه وقاطعه = جيب الزاوية نفسها

ومماسها وقاطعها

مثاله الزاوية غ س م جيبها ع ب وهو جيب الحادة غ س ا ايضاً . كل زاوية
حادة جيبها يقابلها واما المنفرجة فجيبها خارج عنها ويقابل كمالها . ماس غ س م هو
م ت = ا د وهو ماس غ س ا وقاطع غ س م هو س د

(٩١) سهم جيب زاوية ليس هو سهم جيب كمالها لان سهم جيب

زاوية حادة هو فضلة نظير الجيب ونصف القطر واما سهم جيب زاوية
منفرجة فهو مجنوع نظير الجيب ونصف القطر

مثالة سهم جيب اس غ هو اب = اس - ب س وسهم جيب م س غ هو
م ب = م س + ب س

في نسبة الجيوب والماسات والقواطع الخ بعضها الى بعض

(٩٢) نستعلم نسبة هذه الخطوط بعضها الى بعض من نسب اضلاع

مثلثات متشابهة (اقلیدس ق ٤ ك ٦)

في ربع الدائرة اس ح (شكل ٢) ثلاث مثلثات متشابهة اي اس د ب س غ
او ل س غ و ح س ف اذ لكل واحد منها زاوية قائمة ودا و غ ب و س ح
متوازية و ج ف و ل غ و س ا كذلك ول غ = س ب ول س = غ ب فان
اقتضى الامر يجوز وضع احد الخطين المتساويين عوضاً عن الآخر

(٩٣) لنضع هذه الاشارات عوضاً عن الاجزاء المذكورة اي $\frac{1}{2}ق =$

نصف القطر ج = الجيب م = الماس ق = القاطع ن ج = نظير
الجيب ن م = نظير الماس ن ق = نظير القاطع ف بين المثلثين س ب غ
و س ا د هذه النسب

(١) اس : ب س :: ا د : ب غ اي $\frac{1}{2}ق : ن ج :: م : ج$

(٢) س غ : س د :: ب غ : ا د اي $\frac{1}{2}ق : ق :: ج : م$

(٣) س ب : س ا :: س غ : س د اي ن ج : $\frac{1}{2}ق :: \frac{1}{2}ق : ق$

فاذا ($\frac{1}{2}ق$) = ن ج $\times$ ق وبين المثلثين س د غ و س ح ف هذه النسب

(٤) س ح : س ل :: ح ف : ل غ اي $\frac{1}{2}ق : ج :: م : ن ج$

(٥) س غ : س ف :: ل غ : ح ف اي $\frac{1}{2}ق : ن ق :: ج : ن م$

(٦) س ل : س ح :: س غ : س ف اي ج : $\frac{1}{2}ق :: \frac{1}{2}ق : ن ق$

فاذا ($\frac{1}{2}ق$) = ج $\times$ ن ق وبين س ا د و س ح ف هذه النسب

(٧) س ج : ا د :: س ف : س د اي $\frac{1}{2}ق : م :: ن ق : ق$

(٨) س ا ح ف :: س د :: س ف اي $\frac{1}{2}$ ق : ن م :: ق : ن ق

(٩) ا د : ا س :: س ح : ح ف اي م : $\frac{1}{2}$ ق : $\frac{1}{2}$ ق : ن م

فإذا $\frac{1}{2}$ ق = $\frac{1}{2}$ م × م

(٩٤) وبين هذه الخطوط نسب آخر ناتجة من كون مربع الوتر =

مربعي الضلعين (اقليدس ق ٤٧ ك ١)

مثاله في المثلثات س ب غ س ا د س ح ف (شكل ٢) وهي ذات قائمات

(١) س غ = س ب + ب غ اي $\frac{1}{2}$ ق = (ن ج) + ج

(٢) س د = س ا + ا د اي ق = $\frac{1}{2}$ ق + م

(٣) س ف = س ح + ح ف اي (ن ق) = $\frac{1}{2}$ ق + (ن م)

وتجذب المثلثات المتماثلة

$$\frac{1}{2} \text{ ق} = \frac{1}{2} (\text{ن ج}) + \text{ج} = \frac{1}{2} (\text{ن ج}) + \frac{1}{2} (\text{ن ج}) = \frac{1}{2} (\text{ن ج})$$

فان فرض $\frac{1}{2}$ ق = ا لنا

$$\frac{1}{2} \text{ ق} = \frac{1}{2} (\text{ن ج}) + \text{ج} = \frac{1}{2} (\text{ن ج}) + \frac{1}{2} (\text{ن ج}) = \frac{1}{2} (\text{ن ج})$$

$$\frac{1}{2} \text{ ق} = \frac{1}{2} (\text{ن ج}) + \text{ج} = \frac{1}{2} (\text{ن ج}) + \frac{1}{2} (\text{ن ج}) = \frac{1}{2} (\text{ن ج})$$

(٩٥) جيب ٩٠

ووتر ٦٠ في كل دائرة = نصف القطر في إذا متساوية

ومماس ٤٥ بعضها لبعض وبرهانه

اولاً في ربع الدائرة اس ح (شكل ٢) القوس ا ح = ٩٠° وجيبها س ح اي نصف

القطر (حسب ع ٨٢) اي جيب ٩٠° = نصف القطر

ثانياً ليكن اص قوس ٦٠° فالزاوية اس ص ايضاً ٦٠° والمثلث اس ص متساوي

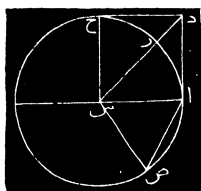
الاضلاع (ع ٧٥) واقليدس ك ٤١ (١٥) لان الزوايا الثلاث = ١٨٠° والزاوية

اس ص = ٦٠° فيكون مجموع الآخرين ١٢٠° وهما متساويتان لان اس ص = ص س

فكل واحدة منهما = ٦٠° فجميع زوايا المثلث متساوية وهو متساوي الاضلاع فإذا وتر

٦٠° = نصف قطره = جيب ٩٠°

شكل ٢



ثالثاً: لكن ارفوس ٤٥° فيكون اد ماسها
والزاوية اس د ايضاً ٤٥° وس اد قائمة لان الماس
عمود على القطر. اطرح اس د اي ٤٥° من س اد
اي من ٩٠° تبقى اد س $= ٤٥^\circ$ ايضاً اذا اس = اد
اي ماس $٤٥^\circ =$ نصف القطر = جيب $٩٠^\circ =$ وتر ٦٠°

فرع. نظير ماس اس د = اس نصف القطر
نظير ماس اس د = اس نصف القطر

(٩٦) جيب $٣٠^\circ =$ نصف نصف القطر لان جيب $٣٠^\circ =$ نصف

وتر ٦٠° وهو = نصف القطر فاذا جيب $٣٠^\circ =$ نصف نصف القطر
فرع اول. نظير جيب $٦٠^\circ =$ نصف نصف القطر لان نظير جيب ٦٠° هو
جيب ٣٠° (ع ٨٩)

فرع ٢ نظير جيب $٣٠^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

لان (ع ٩٤) مربع ن ج $٣٠^\circ = (\frac{1}{2} \sqrt{3})^2 = \frac{3}{4}$ - مربع ج $٣٠^\circ = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

وبالتخذير ن ج $٣٠^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

(٩٦ ب) جيب $٤٥^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ لان

$(\frac{1}{2} \sqrt{2})^2 = 1 =$ مربع جيب $٤٥^\circ +$ مربع ن ج $٤٥^\circ = 1$ ج ٤٥°

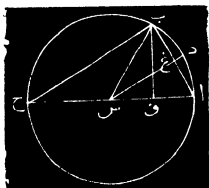
لان نظير جيب ٤٥° وجيبها متساويان

فاذا ج $٤٥^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ وبالتخذير ج $٤٥^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

(٩٧) وتر قوس ما هو متناسب متوسط بين قطر الدائرة وسهم

جيب تلك القوس

شكل ٤



ليكن اب وتر قوس اد ب وب ف جيبها
واف سهم الجيب فالزاوية اب ح قائمة لانها في
نصف دائرة (اقليدس ق ٢١ ك ٢) واف ب
قائمة فالمثلثان اف ب واح ب متشابهان

(اقليدس ق ٨ ك ٦) واح : اب :: اب : اف اي الوتر متناسب متوسط بين
القطر اح وسهم الجيب اف

لنفرض القوس ا د = ت و ا د ب = ٢ ت فبواسطة ب ف العمود على ا ح قد
انقسم المثلث ا ب ح الى مثلثين متشابهين (اقليدس ق ٨ ك ٦) والمثلثان اس غ ا ح ب
متشابهان ايضاً فالمثلثات الاربعة اس غ ا ح ب ف ح ب و ف ا ب متشابهة
وب ح = ٢ س غ لان ب ح : س غ :: ح ا : س ا و ح ا = ٢ س ا فاذا ح ب
= ٢ س غ ونصبر اضلاع المثلثات جيوب ونظائر جيوب الخ هكذا

ا غ = جيب ت ا ب = ٢ جيب ت و ب ف ه = جيب ٢ ت س غ = نظير
جيب ت ب ح = ٢ ن ج ت ا ف = سهم جيب ٢ ت ح ف = سهم جيب
ك ا ل ٢ اس = نصف القطر و ا ح = القطر وبين هذه الاضلاع نسب كثيرة .
مثالها بين المثلثين اس غ و ا ب ف

اس : ا غ :: ا ب : ا ف اي ا ق : جيب ت :: ٢ جيب ت : سهم ج ٢ ت
اس : س غ :: ا ب : ب ف اي ا ق : ن جيب ت :: ٢ ج ت : ج ٢ ت
ا غ : س غ :: ا ف : ب ف اي ج ت : ن جيب ت :: سهم جيب ٢ ت : جيب ٢ ت
اي ا ق × سهم ج ٢ ت = ٢ مربع ج ت
و ا ق × ج ٢ ت = ٢ ج ت × ن جيب ت
و ج ت × جيب ٢ ت = سهم جيب ٢ ت × ن جيب ت
وبين المثلثين اس غ و ب ف ح

اس : س غ :: ب ح : ح ف اي ا ق : ن جيب ت :: ٢ ن جيب ت : سهم جيب
ك ا ل ٢
ا غ : س غ :: ب ف : ح ف اي جيب ت : ن جيب ت :: ج ٢ ت : سهم جيب
ك ا ل ٢

اي ا ق × سهم جيب ك ا ل ٢ = ٢ مربع ن جيب ت الخ
وجيب ت × سهم جيب ك ا ل ٢ = ن جيب ت × ج ٢ ت
اي مسطح نصف القطر في سهم جيب ك ا ل مضاعف القوس المفروضة
= مضاعف مربع نظير جيب تلك القوس

مسطح جيب قوس في سهم جيب ك ا ل مضاعف القوس = مسطح
نظير جيب القوس في جيب مضاعف تلك القوس الخ

الحاصل اذا فرضنا القوس ١ لنا ما تقدم

$$\frac{1}{\sin \alpha} = 1 \quad \frac{1}{\cos \alpha} = 1 \quad \frac{1}{\tan \alpha} = 1$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = 1 \quad \frac{1}{\cos \alpha} = 1 \quad \frac{1}{\tan \alpha} = 1$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = 1 \quad \frac{1}{\cos \alpha} = 1 \quad \frac{1}{\tan \alpha} = 1$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = 1 \quad \frac{1}{\cos \alpha} = 1 \quad \frac{1}{\tan \alpha} = 1$$

تنبيه . هذه النسب لا يقتضي حفظها غيباً بل يجب مراجعتها الى ان تدرك تماماً

الفصل الثاني

في الجداول التريغونومترية

(٩٨) انه لاجل تسهيل اعمال حساب المثلثات قد حُسِبَ الجيب والمماس والقاطع لكل درجة وكل دقيقة ولكل عشر ثوانٍ وفي بعض الجداول لكل ثانية وسُمِّيت هذه الجداول القانون التريغونومتري وسياتي الكلام في كيفية عملها ولا حاجة في الجداول الى تعيين الجيوب والمماسات والقاطعات لاكثر من ٩٠ لانها هي هي في كل ربع من الدائرة

مثال جيب ٢٠° = جيب ١٥٠° (انظر ع ٩٠)

(٩٩) اذا طُلِبَ جيب زاوية منفرجة او مماسها او قاطعها فخذ ما يساويه اي جيب الزاوية الحادة المكملتها او مماسها او قاطعها

(١٠٠) قد حُسِبَت الجداول للدائرة نصف قطرها واحد ان كان ذلك الواحد شعرة او قدماً او ميلاً او فرسخاً غير انه يجب ان نَعُدَّ الجيوب

والمماسات الخ من جنس نصف القطر

(١٠١) كل جيب اقل من نصف القطر الأَجِيب ٩٠° (ع ٨٢)

ويُدَلُّ عليها في الجداول بكسر عشري

مثاله جيب ٢٠° = ٣٤٢.٠٢ . وجيب ٤٠° = ٦٤٢.٧٩ .

٦٠° = ٨٦٦.٠٢ . ٨٩° = ٩٩٩.٨٥ . الخ

وكما قُصِدَ التدقيق في الجداول زِيدَت مازل الكسور العشرية فيها

ماس كل زاوية اصغر من ٤٥° هو ايضاً اقل من نصف القطر (ع ٩٥)

وماس كل زاوية اكبر من ٤٥° هو اكبر من نصف القطر ويُدَلُّ عليها

في الجداول بكسر عشري وصحيح والامر واضح ان كل قاطع هو اكبر من

نصف القطر لانه مرسوم من المركز الى نقطة خارج محيط الدائرة

(١٠٢) الاعداد المشار اليها المقيّدة في الجداول سُمِيت جُوباً ومماسات

وقواطع الخ طبيعية لكونها دالة على طول الخطوط المذكورة في ع ٨٢

و ٨٢ الخ ومنها تُحَسَّب زوايا المثلثات واضلاعها غير ان العمل بها يقتضي

له ضرب وقسمة ولكي يتخلص من ذلك قد حُسِبَت لهذه الجيوب الخ

الطبيعية انساناً وثبّتت في جداول آخر بها يتم الضرب والقسمة بواسطة

الجمع والطرح وسميت انساب الجيوب الخ الطبيعية لان كل جيب او

ماس الخ في الجداول المشار اليها اخيراً هو نسب ذلك الجيب او ذلك

الماس الخ بين الجيوب والمماسات الطبيعية

(١٠٣) قد تقدّم ان الجيوب والمماسات الخ الطبيعية تُحَسَّب لنصف

قطر قيمته واحد (ع ١٠٠) فيكون كل القواطع وبعض المماسات

اكثر من واحد والجيوب وبعض المماسات اقل من واحد فتى أُخِذَت

انساب هذه الاعداد يكون بعض دلائلها ايجابية والبعض سلبية (ع ٩)

فلكي لا توضع دلائل ايجابية وسلبية في جدول واحد يُضاف الى كل دليل ١٠ (ع ١٢) فتصير جميعها ايجابية

مثال ذلك جيب ٢٠ الطبيعي = ٢٤٢.٢. ونسبة ٥٣٤.٠٥ ثم باضافة ١٠ الى الدليل يصير ١٠ - ١ = ٩ فيكون الجيب النسبي في الجدول ٥٣٤.٠٥ او نحسب ان الجيوب الطبيعية حسبت لصف قطر طول ١٠٠٠٠٠٠٠ الذي نسبة ١٠

في كيفية تناول الجيوب والماسات الخ من الجداول

(١٠٤) نظير الجيب ونظير الماس ونظير القاطع لزواية ما هي جيب او ماس او قاطع متم تلك الزاوية (ع ١٩) وقد سبق ان متم زاوية هو الفضلة بعد طرحها من ٩٠ اما ٤٥ فهي نصف ٩٠ وفي ربع دائرة ان كانت الزاوية اكبر من ٤٥ فتمها اصغر من ٤٥ وان كانت اصغر من ٤٥ فتمها اكبر من ٤٥ فكل نظير الجيب ونظير الماس ونظير القاطع لزواية اكبر من ٤٥ له مثله بين الجيوب والماسات والقواطع لزوايا اصغر من ٤٥ وبالعكس. فرى في الجداول عموداً واحداً دالاً على الجيوب لزوايا اكبر من ٤٥ ونظاير الجيوب لزوايا اصغر من ٤٥

مثاله ٩٢٣٩٦٧ هو جيب ١٠ النسبي ونظير جيب ٨٠

و ٩٠٥٣٤.٠٥ . . . ٢٠ . . . الخ ٧٠

وهكذا في الماسات والقواطع

(١٠٥) لكي تناول الجيب او نظير الجيب او الماس او نظير الماس من الجداول اطلب الدرجات في راس الجدول والدقائق في الصف عن اليمين فيكون المطلوب تجاهها في العمود الاول الذي في راسه صفر مثاله لو قيل ما هو جيب ٤٢° ٢٥' لنيل

اطلب ٤٢° من راس الجدول ومن الصف عن اليمين ٢٥' وتجاهها ترى ٨٢٧١٥

وهو المطلوب وإن طُلِبَ نظير الجيب فخذ الدرجات من اسفل الوجه والدقائق من عن اليسار مبتدئاً من اسفل العمود فنجد المطلوب نجاهها وهكذا في الماس ونظير الماس (١٠٦) اذا اخذت الدرجات من اعلى الصفحة فخذ الدقائق في الصف عن اليمين. وإن اخذت الدرجات من اسفل فخذ الدقائق من العمود عن اليسار

مثالة لو قبل ما هو جيب $٢١^{\circ} ٨١'$ النسبي لقبل خذ ٨١° من اعلى الصفحة و $٢١'$ من الصف عن اليمين ترى نجاهها $٩٠^{\circ} ٩٥٠٠٢'$ وهكذا الماس واذا طُلِبَ نظير الجيب او نظير الماس فاطلب الدرجات في اسفل الصفحة والدقائق في العمود عن اليسار (١٠٧) ان كانت الزاوية المفروضة اكبر من ٩٠° فاطلب جيب اوقاطع او نظير الجيب او نظير القاطع لكامها اي اطرحها من ١٨٠° وخذ المطلوب للباقي حسب ما تقدم (ع ٩٨ و ٩٩)

مثالة لو قبل ما هو جيب $٤٤^{\circ} ٩٦'$ لقبل $١٨٠^{\circ} - ٤٤^{\circ} ٩٦' = ١٦^{\circ} ٨٢'$ فاطلب ٨٢° من فوق و $١٦'$ من الصف عن اليمين فترى نجاهها $٩٠^{\circ} ٩٦٦٦٢'$ وهكذا الماس اما نظير الجيب ونظير الماس فن اسفل والدقائق من عن اليسار

(١٠٨) ان بعض الجداول حاوية انساب التواني ايضاً والبعض انساب الدرجات والدقائق فقط والبعض لكل ثمانية عشرة فان طُلِبَ جيب او ماس او نظيرها لدرجات ودقائق وتواني من جدول حاو الدرجات والدقائق فقط فخذ نسب الدرجات والدقائق المفروضة كما تقدم والنسب للدرجة التي تلي المفروضة الاكبر منها واطرح احدهما من الآخر ثم قل نسبة ٦٠° الى التواني المفروضة :: فضلة النسبين المذكورين الى الاصلاح اللازم لمعرفة نسب التواني وهذا الجزء الرابع من النسبة يجب اضافته الى الدرجات والدقائق المفروضة ان كان المطلوب نسب جيب او ماس او قاطع وطرحه ان كان المطلوب نسب نظير

جيب او نظير ماس او نظير قاطع لانه كلما زادت الجيوب قلت نظائرها
وهكذا في المماسات والقواطع ايضا

مثال اول . ما هو جيب $10^{\circ} 42' 12''$ النسبي

$$\text{جيب } 10^{\circ} 42' 12'' = 9' 40.490$$

$$14^{\circ} 42' 12'' = 9' 40.038$$

الفضلة $\frac{48}{\text{تم قل}}$

$60 : 10 : 100 : 48 : 8$ التي يجب اضافتها الى نسب $10^{\circ} 42' 12''$ فيكون جيب $10^{\circ} 42' 12''$ النسبي $9' 40.498$

مثال ٢ ما هو نظير جيب $16^{\circ} 42' 16''$ النسبي

$$\text{نظير جيب } 16^{\circ} 42' 16'' = 9' 92710$$

$$17^{\circ} 42' 16'' = 9' 92707$$

الفضلة $\frac{8}{\text{تم قل}}$

$60 : 10 : 100 : 48 : 8$ التي يجب طرحها من نسب $16^{\circ} 42' 16''$

$$\text{اي نظير جيب } 16^{\circ} 42' 16'' = 9' 92709$$

$$\text{ماس } 10^{\circ} 42' 16'' = 9' 60476$$

$$\text{نظير ماس } 10^{\circ} 42' 16'' = 10' 20700$$

$$\text{جيب } 10^{\circ} 42' 16'' = 9' 92906$$

$$\text{نظير جيب } 10^{\circ} 42' 16'' = 9' 70670$$

ان كان 60 ينقسم على الثواني بدون باقى اي كانت $\frac{1}{6}$ او $\frac{1}{4}$ او $\frac{1}{2}$ الخ من 60 فنخذ ذلك
الجزء من فضلة النسبين واصله او استظه حسب مقتضى الحال بدون عمل النسبة المذكورة
وذلك لاختصار العمل فقط

الجدول التي فيها تقيدت انساب الجيوب والمماسات لكل ثانية
عاشرة نتناول منها تلك الانساب للدرجات والدقائق كما تقدم اما
الثواني فان كانت 10 او 20 او 30 او 40 او 50 فنتناول من الجدول
راساً تجاه الثواني المفروضة وان كانت الثواني بين 10 و 20
او بين 20 و 30 الخ يستعلم ما ينبغي اضافته او طرحه بالنسبة على الطريقة

المتقدم شرحها تماما . او تناول تلك الكمية من عمود الاجزاء النسبية
عن اليسار او من اسفل الصحيفة وتُضَاف او تُطْرَح حسب ما تقدم شرحه
مثال ذلك لو قيل ما هو جيب $٢٤^{\circ} ٢٥' ٢٧''$ الطبيعي لقل

اطلب ٢٤° من راس الصحيفة و $٢٥'$ من العمود عن اليمين فتجاهها ترى جيب
 $٢٤^{\circ} ٢٥' = ٥٦٥٢.٧$

من اسفل الصحيفة ترى الجزء النسبي لثانية واحدة تحت ٢٤° اي ٤٠٠ اضرب
هذا الجزء في $٢٧ - ١٤٨$ اي ما يجب اضافته الى الجيب المذكور فلنا
 ٥٦٥٢.٧

١٤٨

جيب $٢٤^{\circ} ٢٥' ٢٧'' = ٥٦٥٣.٥٥$

ولو قيل ما هو نظير جيب $٥٦^{\circ} ٢٤' ٢٨''$ الطبيعي لقل
اطلب ٥٦° في اسفل الصحيفة و $٢٤'$ في العمود عن اليسار مبتدئا من اسفل وتجاهها
تجد نظير جيب ٥٦° و $٢٤' = ٥٥٠٩٦٦$

والجزء النسبي $٢٨' ٤'' = ١١٢$

نظير جيب $٥٦^{\circ} ٢٤' = ٥٥٠٨٥٣$

جيب $٢٧^{\circ} ١٧' ١٢''$ الطبيعي $= ٤٥٨٤٤٢$

نظير جيب $٤٥^{\circ} ٢٢' ٢٢'' = ٧٠٢٢٨١$

ماس $٦٣^{\circ} ٢٢' ٢٤'' = ٢٠٠٩٤٥٠$

نظير ماس $٨١^{\circ} ٤٨' ٥٦'' = ١٤٣٨٢٥$

وهكذا في الجيوب والمماسات الخ النسبية . مثاله لو قيل ما هو جيب $٢٤^{\circ} ٢٧' ٢٤''$
النسبي لقل

جيب $٢٤^{\circ} ٢٧' ٢٠'' = ٩٦١٧.٢٣$

الجزء النسبي لاربعة ثوانٍ $= ١٨$

جيب $٢٤^{\circ} ٢٧' ٢٤''$ النسبي $= ٩٦١٧.٥١$

ففس على ذلك

الخطا الحاصل من هذه الطريقة لا يزيد عن واحد في المنزلة السادسة
من الكسور العشرية واذا قُصِدَ تدقيق أكثر من ذلك فيستعان بالجدول

المعين على وجه ١١٤ المقيد فيه فضلة انساب الجيوب الصغار وانساب
اقواسها محوالة الى ثوان . مثاله

$$\text{جيب } ٥ \text{ النسبي على وجه } ٢٢ = ٧'١٦٢٦٩٦$$

$$\text{نسب } ٥ \times ٦٠ = ٢٠١ = ٢'٤٧٧١٢١$$

$$\text{الفضلة} = ٤'٦٨٥٥٧٥$$

وهذه الكمية تراها في الجدول المشار اليه على صحيفة ١١٤ تحت نسب
ج ١ - نسب اتجاه ٥ دقائق وهذه الاعداد تتغير قليلاً في درجتين
فلكي نستعلم جيب قوس اصغر من ٢ نتناول من الجدول المشار اليه
الكمية تجاه الثواني التي هي الاقرب الى الثواني المفروضة ثم نضيف اليها
نسب الثواني

مثاله لو قيل ما هو جيب ٧ ٢٢ النسبي لقليل

$$\text{جيب } ٧ \text{ النسبي لقليل} = ٤'٤٢ \text{ ونجاه } ٤٢٠ \text{ ترى } ٤'٦٨٥٥٧٥$$

$$\text{ثم نسب } ٤٤٢ = ٢'٦٤٥٤٢٢$$

$$\text{جيب } ٧ \text{ النسبي} = ٧'٢٢٠٩٩٧$$

ان طلب الماس فاطلب العدد تحت نسب م ١ + نسب ا مثاله لو قيل ما هو ماس
٢٦ ٢٧ النسبي لقليل

$$\text{ماس } ٢٦ \times ٦٠ = ١٦٥٦ \text{ ونجاهها } ٤'٦٨٥٥٨٤$$

$$\text{نسب } ١٦٥٦ = ٢'٢١٩٠٦٠$$

$$\text{ماس } ٢٦ \text{ النسبي} = ٧'٩٠٤٦٤٤$$

اذا طلب نظير ماس قوس اصغر من ٢ فاطرح نسب القوس محوالة
الى ثوان من الكمية المقيدة في الجدول

مثاله لو قيل ما هو نظير ماس ٢٦ ٢٧ لقليل اطلب الكمية تحت نسب ن م ١ +

$$\text{نسب ا اي } ١٥'٢١٤٤١٦$$

$$\text{نسب } ١٦٥٦ = ٢'٢١٩٠٦٠$$

$$\text{نظير ماس } ٢٦ \text{ النسبي} = ١٢'٠٩٥٢٥٦$$

الجيب الاقرب الاكبر $9^{\circ} 40.538 = 14^{\circ} 43'$

الاصغر $9^{\circ} 40.490 = 14^{\circ} 43'$

الفضل ٤٨

الجيب المفروض $9^{\circ} 40.498$

الاقرب الاصغر $9^{\circ} 40.490$

الفضل ٨ ثم قل $100:60::8:48$

اضف ١٠ الى الدرجات والدقائق للاقرب الاصغر نصير

$10^{\circ} 43' 14''$

مثال ٢ ما في قوس نظير الجيب $9^{\circ} 9772$

الاقرب الاكبر $9^{\circ} 9807 = 82^{\circ} 48'$

الاصغر $9^{\circ} 9707 = 82^{\circ} 49'$

الفضل ١٠٠

المفروض $9^{\circ} 9772$

الاقرب الاصغر $9^{\circ} 9707$

الفضل ٦٦ ثم قل $100:60::66:40$

التي يجب طرحها من درجات الاقرب الاصغر وقائمة فتصير

$82^{\circ} 48' 20''$

حبيب $9^{\circ} 20.621 = 9^{\circ} 15' 6''$

نظير حبيب $9^{\circ} 98107 = 16^{\circ} 24' 20''$

ماس $10^{\circ} 43424 = 16^{\circ} 48' 16''$

نظير ماس $10^{\circ} 23554 = 16^{\circ} 48' 24''$

في معرفة القاطع ونظير القاطع

(١١١) في بعض الجداول لم يتقيد القاطع ولا نظير القاطع ولكنها

يُعرفان من الجيب ونظير الجيب لانه حسب (ع ٩٢) نظير الجيب X

القاطع = (١٢) وبالانساب يتم الضرب بالجمع وفي الجدول نصف القطر ١٠ فنظير الجيب + القاطع = ٢٠ والقاطع = ٢٠ - نظير الجيب وايضاً حسب (ع ٩٢) الجيب $\times$ نظير القاطع = (١٢) اي في الجدول الجيب + نظير القاطع = ٢٠ ونظير القاطع = ٢٠ - الجيب (١١٢) لنا ما سبق هذه القاعدة لمعرفة القاطع. اطرح نظير الجيب من ٢٠ لمعرفة نظير القاطع اطرح الجيب من ٢٠ ويسهل هذا الطرح بطرح الرقم الاول من ١٠ وما سواه من ٩ حسبما تقدم في المثلث الحسابي (ع ٥٥) مع اضافة ١٠ الى دليل الجيب او نظير الجيب (١١٢) يُعرف المثلث الحسابي للجيب بطرح ١٠ من دليل نظير القاطع ويعرف المثلث الحسابي لنظير الجيب بطرح ١٠ من دليل القاطع وبهذه الوسيلة لا نحتاج الى طرح كل رقم من ٩

الفصل الثالث

في حل مسائل المثلثات القائمة الزاوية

(١١٤) لكل مثلث ستة اجزاء وهي ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا وان

عُرف ثلاثة منها احدها ضلع يعرف منها ما سواها

(١١٥) المثلثات اما قائمة الزاوية او غير قائمة ومعرفة النوع الاول

اسهل من معرفة النوع الثاني وقد ينقسم كل مثلث الى مثلثين كل واحد

قائم الزاوية بواسطة خط عمودي مرسوم من احدى الزوايا على الضلع

المتقابل لها

(١١٦) في كل مثلث قائم الزاوية واحد من الاجزاء الستة معروف ابداً وهو القائمة وهي لا تتغير مهما تغيرت سائر الاجزاء وان عُرِفَتْ احدى الحادتين تُعرَف الاخرى بطرح المعروفة من 90° فلانحتاج الى معرفة احد الاجزاء الخمسة الباقية الا احده الحادتين وضيع من الاضلاع فتتوصل بهما الى معرفة كل اجزاء المثلث

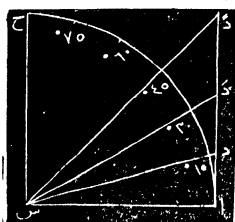
(١١٧) لاجل ايضاح كيفية استخراج الاجزاء المجهولة من المعروفة لنفرض مثلثا (شكل ٥) س ا د وليعدل واحد من اضلاعه نصف القطر الذي بُنِيَ الجداول عليه واولاً لتعدل



شكل ٥

القاعدة س ا نصف القطر المشار اليه فان رُسِمَت دائرة على المركز س وعلى بعد

س ا يكون د ا مماساً لها وس د قاطعاً فنصف قطر الزاوية س ومماسها وقاطعها هي اضلاع المثلث الثلاثة فان تناولت المماس من جدول الجيوب والمماسات الطبيعية فلك طول الضلع د ا وان تناولت القاطع من الجدول فلك طول الوتر س د وان تناولتهما من جدول الجيوب النسبية فلك نسبتي الجزئين المذكورين فتحتاج الى العددين اللذين يقابلانها فقط وهكذا في كل مثلث قاعدة تعدل نصف القطر الجدولي يستعلم الضلعان الاخران بين المماسات والقواطع في الجدول

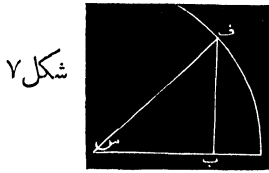


شكل ٦

مثالة لينقسم الربع اس ح الى اربعة

اجزاء متساوية اي كل واحد 15° ثم في المثلث س ا د يكون ا د مماس 15° وس د قاطع 15° وفي س ا د يكون يكون ا د مماس 30° وس د قاطع 30° وفي س ا د يكون ا د مماس 45° وس د قاطع 45° وهكذا الخ

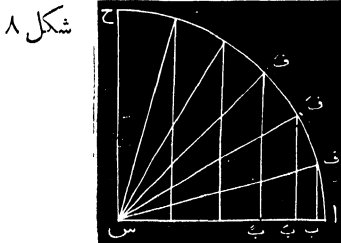
(١١٨) ثم لجعل وتر مثلث ذي قائمة نصف القطر كما في ف ب س



شكل ٧

شكل ٧ وعلى المركز س وبعد س ف ا رسم دائرة فيكون ب ف جيب الزاوية عند س وب س نظير جيبها وس ف نصف

القطر فان أخذ من الجدول جيب زاوية س فهو طول ف ب او نظير جيبها فطول ب س وهكذا في كل مثلث قائم الزاوية وتره يعدل نصف القطر الجدولي يكون الضلعان الاخران بين الجيوب ونظائر الجيوب في الجدول



شكل ٨

مثاله لبقسم الربع ا ح (شكل ٨) الى اجزاء متساوية كل واحد ١٥° في ف ف ف الخ ثم في المثلث س ب ف يكون ف ب جيب زاوية ١٥° وب س نظير جيبها وب ف المثلث

س ب ف يكون ب ف جيب زاوية ٢٠° وب س نظير جيبها وفي المثلث س ب ف يكون ب ف جيب ٤٥° وب س نظير جيبها الخ

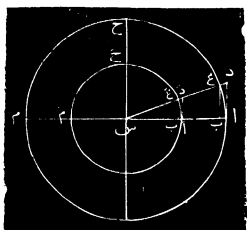
(١١٩) فان كان ضلع مثلث قائم الزاوية مساويا لنصف القطر الجدولي يُعرف الضلعان الآخران بالنظر الى الجدول فقط وان لم يكن ضلع منه مساويا لنصف القطر الجدولي يُعرف المجهولان من هذه النسبة

نسبة نصف قطر دائرة : نصف قطر اخرى ::

جيب او ماس او قاطع زاوية في احدها :

جيب او قاطع او ماس تلك الزاوية في الاخرى

شكل ٩



وذلك يبرهن في الدائرتين المتراكبتين
(شكل ٩) $ا ح م آ ح م$ فدرجات القوس
اغ = درجات القوس آ غ وحيثا هاب ع
و ب غ و القاطعات س د س د
والماسان ا د آ د والمثلثات الاربع س ا د
س ب غ س آ د س ب غ متشابهة

لان كل واحد ذو قائمة والزاوية عند س مشتركة ولنا من ذلك هك النسب (اقليدس
ق ٤٦)

(١) س غ : س غ :: ب غ : ب غ اي نصف قطر : نصف قطر :: جيب

جيب :

(٢) س ا : س ا :: د ا : د ا اي نصف قطر الى نصف قطر :: ماس الى

ماس

(٣) س ا : س ا :: س د : س د اي نصف قطر الى نصف قطر :: قاطع

الى قاطع

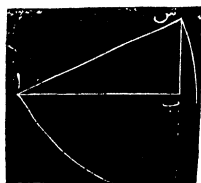
فرع . ب غ : ب غ :: د ا : د ا :: س د : س د اي جيب احدى الدائرتين
الى جيب الاخرى كما س الاولى الى ماس الاخرى او كقاطع الاولى الى قاطع الاخرى
وهذه النسب يعتمد عليها في معرفة اكثر المثلثات وان جعل احد اضلاع المثلث نصف
قطر يكون الآخران ماساً او قاطعاً او جيباً للقوس المرسوم على ذلك النصف القطر
(١٢٠) متى جعل طرف خط مركزاً للدائرة وطول الخط البعد

الذي عليه ترسم الدائرة قيل انه قد جعل نصف قطر

(١٢١) في كل مثلث قائم الزاوية ان جعل الوتر نصف قطره يكون احد

الضلعين جيب الزاوية المتقابلة له والضلع الآخر نظير الجيب لتلك الزاوية

شكل ١٠

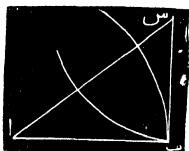


مثاله (شكل ١٠) في المثلث ا ب س
ان جعل ا . مركزاً و اس نصف القطر
يكون س ب جيب الزاوية عند ا
واب نظير الجيب لها وان جعل س مركزاً

و س ا نصف القطر يكون ا ب جيب الزاوية عند س وب س نظير الجيب لها

(١٢٢) ان جعل احد الضلعين نصف القطر يكون الضلع الآخر
ماساً للزاوية المتقابلة له والوتر قاطعاً لتلك الزاوية

شكل ١١



مثاله (شكل ١١) ان جعل ا ب نصف
القطر يكون ب س ماس زاوية ا و اس
قاطعها وان جعل س ب نصف القطر يكون
ب ا ماس الزاوية س و س ا قاطعها

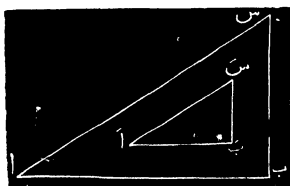
(١٢٣) الضلع الذي هو جيب او ماس او قاطع لاحدى الزاويتين
المحاذتين هو نظير الجيب او نظير الماس او نظير القاطع للزاوية الاخرى
المحاذة

مثاله (شكل ١٠) س ب هو جيب زاوية ا ونظير جيب زاوية س و ا ب
هو جيب زاوية س ونظير جيب زاوية ا و (شكل ١١) ان جعلت القاعدة نصف
القطر يكون ب س ماس زاوية ا ونظير ماس زاوية س و اس قاطع الزاوية
ا ونظير قاطع الزاوية س وان جعل الساق نصف القطر يكون ا ب ماس الزاوية
س ونظير الماس للزاوية ا و اس قاطع الزاوية س ونظير القاطع للزاوية ا

(١٢٤) اذا فرض مثلث قائم الزاوية وطلبت معرفة اضلاعه او
زواياه يصنع مثلث آخر شبيه به ومساوٍ للذي بنيت الجدول عليه ثم
تركب نسبة بين الاضلاع والزوايا المتشابهة

شكل

١٢



مثاله لو فرض المثلث ا ب س
وطليت معرفة اجزائه فاصنع آخر مثله
وليفرض مساوئه للذي بنيت عليه الجدول
مثل ا ب س ثم يجعل الضلع الموافق

في كل واحدٍ منهما نصف القطر فيكون اسم واحد لكل ضلعين متوافقين في المثلثين .
مثاله (شكل ١٢) ان جعل ا ب نصف القطر فاحسب ا ب نصف القطر فيصير
ب س ماساً للزاوية ا في الاول و ب س ماساً للزاوية ا في الثاني وقس على ذلك
(١٢٥) لا يخفى ان الاضلاع تختلف اسماؤها حسب اختلاف الضلع

المعدود نصف القطر

مثالة (شكل ١٢) ان عدد $اس$ نصف القطر يكون اسم $س ب$ جيباً وان عدد $اب$ نصف القطر يكون اسم $س ب$ مماساً وقس على ذلك

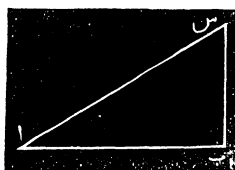
(١٢٦) لنا نظريتان لمعرفة اجزاء مثلث قائم الزاوية احدها يعتمد عليها متى كان المجهول ضلعاً والاخرى متى كان المجهول زاوية

النظرية الاولى

ان كان المجهول ضلعاً

نسبة العدد الجدولي من اسم الضلع المفروض الذي هو جيب او مماس او قاطع الخ : الضلع المفروض :: العدد الجدولي من اسم الضلع المطلوب : الضلع المطلوب

شكل ١٢



مثالة (شكل ١٢) في المثلث $اب س$ ان فرض الوتر $اس$ والزاوية $ا$ وطلب الساق $س ب$ فان حسب اسم نصف القطر يكون $س ب$ جيب الزاوية $ا$

فتقول

نسبة نصف القطر الجدولي $اس$: جيب الزاوية $ا$ الجدولي : $س ب$ وان طلب $اب$ فقل نسبة نصف القطر الجدولي : $اس$:: جيب الزاوية $س$ او نظير جيب $ا$: $اب$ وهكذا ان جعل $اب$ نصف القطر غير ان اسماء الخطوط تختلف حينئذ كما علمت مما تقدم

النظرية الثانية

(١٢٧) متى كان المجهول زاوية فقل

نسبة الضلع المفروض محسوباً نصف القطر : نصف القطر الجدولي :: الضلع الآخر المفروض : العدد الجدولي من اسم الضلع الثاني المفروض

مثالة في المثلث $اب س$ (شكل ١٢) ان $فرض$ الوتر $اس$ والقاعدة $اب$ وطُلبت الزاوية $اس ب$ فاجعل $اس$ نصف القطر فيكون $اب$ جيب الزاوية $اس ب$ ثم قل نسبة $اس$: نصف القطر الجدولي :: $اب$: جيب $اس ب$ ومتى عُرِفَت $اس ب$ تُعرَف $س اب$ بطرح $اس ب$ من ٩٠° ثم يستعلم الضلع $ب س$ اذا طُلب بالنظرية الاولى

(١٢٨) رى مما سبق انه متى كان المطلوب ضلعاً يكون الجزء الاول من النسبة عدداً جدولياً اى يتناول من الجداول . وان كان المطلوب زاوية يكون الجزء الاول من النسبة ضلعاً مفروضاً . اما نصف القطر فهو من الاعداد الجدولية ابداً

(١٢٩) نرى أيضاً أنه لاستعلام زاوية يكون الجزء الأول من النسبة ضلعاً محسوباً نصف القطر واستعلام ضلع لا يلزم أن يكون أحد الأجزاء المفروضة نصف القطر

(۱۳۰) نری ایضاً ما تقدم انه لاستعلام ضلع مُحَسَّب اي ضلع کان نصف القطر ولاستعلام زاوية يجب ان يُجْعَلَ احد الاضلاع المفروضة نصف القطر وفي جدول الجيوب والمماسات الخ الطبيعية نصف القطر والمماسات واحدٌ ابداً وفي جدول الجيوب النسبية نصف القطر ۱۰ ابداً (ع ۱۰۳)

(١٢١) ان اعتمد على الجيوب الخ الطبيعية نحل النسبة كما في الحساب اي بالضرب والقسمة وان اعتمد على الجيوب الخ النسبية فبالجمع والطرح كما في الانساب (ع ٥٢)

(١٢٢) نصف القطر النسبي اي .١ يكتب في الجدول ١٠٠٠٠٠٠٠٠
ولما كان صحيحاً فاضافته الى عدد او طرحه منه سهل جداً

(١٣٢) في كل مثلث قائم الزاوية لابد من افتراض جزءين ما عدا

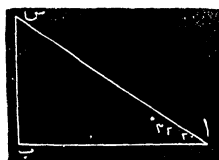
القائمة وقد يكون المفروضان

- (١) اما الوتر وزاوية
(٢) واما الوتر وساق
(٣) واما ساق وزاوية
(٤) واما الساقان

المفروض الاول

(١٣٤) مفروض { الوتر } { المطلوب } القاعدة والساق

شكل ١٤



مثال اول . لنفرض (شكل ١٤) الوتر اس
= ٤٥ ميلاً والزاوية ا ٢٠° . مطلوب طول
القاعدة اب والساق ب س . بما ان المطلوب ضلع
يُجْعَل اى ضلع كان نصف القطر فلنفرض الوتر
نصف القطر فيكون ب س جيب الزاوية ا واب

جيب الزاوية س او نظير جيب الزاوية ا ثم لكي تستعلم ب س بالنظرية الاولى قل
(١/٢ ق) : ا : س :: جيب الزاوية ا : ب س فان اعتمدنا على الجيوب الطبيعية
تكون النسبة ١ : ٤٥ :: ٥٣٤٨٤ : ٠.٦٨ : ٢٤' = ب س وبالا نسب يتم العمل هكذا

نسبة (١/٢ ق) اي ١.٠.....

الى نسب ٤٥ اي ١'٦٥٩٢١٢

كنسبة جيب ٢٠° اي ٩'٧٢٨٢٢٧

الى ب س = ١'٢٨١٤٤٠ = ٢٤' . ٦٨

ثم اطرح ٢٠° من ٩٠° تبقى الزاوية س = ٧٠° ونستعلم ا ب هكذا نسبة
(١/٢ ق) : ا : س :: جيب س : ا ب

اي ١/٢ ق الى نسب ٤٥

اي ١'٦٥٩٢١٢

كنسبة جيب ٧٠° اي ٩'٩٢٦٨٢١

الى ا ب = ١'٥٨٠٠٤٤ = ٢٨' . ٢٢

ثم ان قُصِدَ امتحان العمل فاجعل احد الضلعين الآخرَين نصف القطر فان جُعِلَ ا ب نصف القطر يصير ا س قاطعاً للزاوية ا وب س مماساً لها

فكون النسبة قاطع ا س :: $\frac{1}{2}$ ق ا ب

و $\frac{1}{2}$ ق ا ب :: مماس ا ب س

وان جُعِلَ ب س نصف القطر يكون ا ب مماس الزاوية س واس قاطعها والنسب

قاطع س ا س :: $\frac{1}{2}$ ق . ب س

و $\frac{1}{2}$ ق : ب س :: مماس س ا ب

مثال ٢ مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٢٥٠ ذراعاً والزاوية عند القاعدة ٤٦° ٢٠ فا هو طول القاعدة والساق

الجواب القاعدة = ١٧٢' ١ من الذراع والساق = ١٨١' ٢٤ من الذراع

مثال ٢ مفروض الوتر ٤٢' ٦٧ والزاوية بين الوتر والساق ٤٣° ٢٨ مطلوب

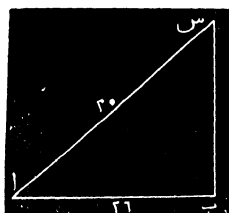
القاعدة والساق

الجواب القاعدة = ٤٢' ١٧٥ والساق = ٥٢' ٦١٢

المفروض الثاني

(١٢٥) مفروض { الوتر و ساق } مطلوب { الروايا والساق الآخر

شكل ١٥



مثال اول . وتر المثلث ا ب س ٢٥ ميلاً

والقاعدة ٢٦ ميلاً مطلوب الساق والزاويا

اجعل احد الضلعين المفروضين نصف

قطر (ع ١٢٠) ان قصدت استعمال الزوايا.

فان جعلت الوتر نصف القطر يصير ا ب

جيب الزاوية س وس ب جيب الزاوية ا

ثم قل ا س : $\frac{1}{2}$ ق :: ا ب : جيب س

اي $\frac{1}{2}$ ق $10^{\circ}00'00''$
نسب ٢٦ $1^{\circ}41'49.73''$

$11^{\circ}41'49.73''$
نسب اس اي ٢٥ $1^{\circ}04'40.68''$

$9^{\circ}87'09.00'' = س = 20^{\circ}08'47''$

ولاستعلام الساق س ب بالنظرية الاولى اطرح الزاوية س من 90° نبقى $1^{\circ}42'00''$
ثم قل

$\frac{1}{2}$ ق : اس :: جيب ا : ب س

اي نسب اس اي نسب ٢٥ $1^{\circ}04'40.68''$

$9^{\circ}87'09.73''$ $20^{\circ}08'47''$

$11^{\circ}46'79.88''$

$10^{\circ}00'00''$

اطرح نسب $\frac{1}{2}$ ق

$22^{\circ}42' = 1^{\circ}46'79.88''$ ب س

ثم ان جعلت القاعدة نصف النظر يصير ب س ماس ا واس قاطعها وتكون
النسبة لاستعلام الزاوية ا

ا ب : $\frac{1}{2}$ ق :: اس : قاطع ا ولاستعلام د س تكون النسبة $\frac{1}{2}$ ق : ا ب :: قاطع ا : ب س

(١٢٦) مثال ٢ في المثلث ا ب س (شكل ١٥) مفروض الوتر ٥ ميلاً والساق

ب س ٤٨ ميلاً مطلوب الزوايا والقاعدة . اجعل الوتر نصف القطر ثم قل ا س

$\frac{1}{2}$ ق :: ب س : جيب ا = $22^{\circ}08'47''$ و $\frac{1}{2}$ ق اس :: جيب س : ا ب = $24^{\circ}74''$

ميلاً وان جعل س ب نصف القطر يصير اس قاطع س وا ب ماسها وتكون النسب

ب س : $\frac{1}{2}$ ق :: اس : قاطع س

و $\frac{1}{2}$ ق : ب س :: ماس س : ا ب

مثال ٢ مفروض الوتر $22^{\circ}42'$ والساق $48^{\circ}29'$ مطلوب القاعدة والزوايا

الزوايا $17^{\circ}12'01''$ و $72^{\circ}47'09''$ والقاعدة $217^{\circ}6''$

المفروض الثالث

(١٢٧) مفروض { الزوايا } مطلوب { الوتر والساق الآخر }

مثال اول . مفروض في المثلث ا ب س (شكل ١٥) الزاوية عند القاعدة ١٣٤٧° والقاعدة ٦٠ مطلوب الوتر والساق س ب . ان جعل الوتر نصف القطر فقل

$$\text{جيب س.ا.ب} :: \text{ق} : \text{ا.س} = ٨٨'٢١$$

$$\text{و } \text{ق} : \text{ا.س} :: \text{جيب ا.ب س} = ٦٤'٨$$

وان جعلت القاعدة نصف القطر نصير النسب

$$\text{ق} : \text{ا.ب} :: \text{قاطع ا.ا.س} \text{ و } \text{ق} : \text{ا.ب} :: \text{ماس ا.ب س}$$

وان جعل ب س نصف القطر نصير ماس س : ا ب :: ق : ب س

$$\text{و } \text{ق} : \text{ب س} :: \text{قاطع س.ا.س}$$

(١٢٨) مثال ٢ مفروض ب س ٧٤ والزاوية عند س $٦١^\circ ٢٧'$ مطلوب

القاعدة والوتر . اجعل الوتر نصف القطر واطرح $٦١^\circ ٢٧'$ من ٩٠° يبق $٢٨^\circ ٢٣' =$

زاوية ا فتكون النسبة نسب جيب $٢٨^\circ ٢٣'$: نسب $٧٤ :: \text{ق} : \text{ا.س}$

ولاستعلام ا ب تكون $\text{ق} : \text{ا.س} :: \text{سب جب } ٦١^\circ ٢٧' : \text{ا.ب}$

وان جعلت القاعدة نصف قطر تكون النسب

$$\text{سب ماس } ٢٨^\circ ٢٣' : ٧٤ :: \text{ق} : \text{ا.ب}$$

$$\text{و } \text{ق} : \text{ا.ب} :: \text{قاطع } ٢٨^\circ ٢٣' : \text{ا.س}$$

وان جعل ب س نصف القطر تكون النسب

$$\text{ق} : \text{نسب } ٧٤ :: \text{قاطع } ٦١^\circ ٢٧' : \text{ا.س}$$

$$\text{و } \text{ق} : \text{نسب } ٧٤ :: \text{ماس } ٦١^\circ ٢٧' : \text{ا.ب}$$

الوتر $٨٤' ٥٤$ والقاعدة ١٢٦

المفروض الرابع

$$(١٣٩) \text{ مفروض } \left\{ \begin{array}{l} \text{القاعدة} \\ \text{والساق} \end{array} \right\} \text{ مطلوب } \left\{ \begin{array}{l} \text{الوتر} \\ \text{والزاوية} \end{array} \right\}$$

مثال اول مفروض ا ب ٢٨٤ والساق ب س ١٩٢ مطلوب الزوايا والوتر .

لا يمكن ان يجعل الوتر نصف القطر لانه مجهول بل يقتضي ان يجعل احد الضلعين

الآخرين نصف القطر فان جعلت القاعدة ا ب نصف القطر تكون النسبة

$$\text{نسب } ٢٨٤ : \text{ق} :: \text{نسب } ١٩٢ : \text{ماس زاوية ا} = ٣٤^\circ ٤'$$

$$\text{و } \text{ق} : \text{نسب } ٢٨٤ :: \text{قاطع } ٣٤^\circ ٤' : \text{ا.س} = ٣٤٣' ٨١$$

وان جعل ب س نصف النظر تكون النسب
نسب ١٩٢ : ٢٨٤ ق : ١٢٠ ق :: نسب ٢٨٤ : ٢٨٤ ماس الزاوية س
و ٢٨٤ ق : نسب ١٩٢ : ٢٨٤ قاطع س : ١٢٠ ق
مثال ٢ مفروض القاعدة ٦٤٠ والساق ٤٨٠ مطلوب الزاوية والوتر
الجواب الوتر = ٨٠٠ والزاوية عدد ١ = ٢٦° ٥٢' ١٢"

امثلة

(١) مفروض وتر مثلث ٦٨ والزاوية عند القاعدة ٢٩° ١٧' مطلوب القاعدة
والساق

(٢) مفروض الوتر ٨٥٠ والقاعدة ٥٩٤ مطلوب الزاوية والساق

(٣) الوتر ٧٨ والساق ٥٧ مطلوب القاعدة والزاوية

(٤) القاعدة ٧٢٣ والزاوية عند القاعدة ٦٤° ١٨' مطلوب الوتر والساق

(٥) الساق ٦٢٢ والزاوية عند القاعدة ٨١° ٢٦' مطلوب الوتر والقاعدة

(٦) القاعدة ٢٢ والساق ٢٤ مطلوب الوتر والزاوية

(١٤٠) ان فرض ضلعاً مثلث قائم الزاوية يستعلم الضلع الآخر

بدون المجدول حسب (اقلیدس ق ٤٧ ك ١) اي ان مربع الوتر = مربع

الضلعين الآخرين فان فرض الضلعان يكون جذر مجموع مربعيهما الوتر

وان فرض الوتر وضلع فاطرح مربع الضلع من مربع الوتر وخذ جذر

الباقى فهو الضلع المطلوب فان فرض و = الوتر و ق = القاعدة وس

= الساق لنا

$$و^2 = ق^2 + س^2 \quad و = \sqrt{ق^2 + س^2}$$

$$ق^2 = و^2 - س^2 \quad ق = \sqrt{و^2 - س^2}$$

$$س^2 = و^2 - ق^2 \quad س = \sqrt{و^2 - ق^2}$$

مثال اول ان فرض القاعدة ٢٢ والساق ٢٤ فاهو الوتر

الجواب ٤٠

٢ ان فُرِضَ الوتر ١٠٠ والقاعدة ٨٠ فما هو الساق

الجواب ٦٠

٢ ان فُرِضَ الوتر ٢٠٠ والساق ٢٢٠ فما هي القاعدة

الجواب $٢٠٠ - ٢٢٠ = ٢٠$ جذره ٢٠٤ تقريباً

(١٤١) يسهل العمل باستعلام فضلة المربعين بالانساب غيرائه

لا يتم ذلك بالطرح لان الطرح بالانساب في مثابة القسمة (٤١) وان

طُرِحَ نسب ق٢ من نسب و٢ يكون لنا نسب الخارج من قسمة احدها

على الآخر لا نسب فضلة مربعيها ولكن لنا واسطة اخرى لاستعلام فضلة

المربعين وهي متوقفة على القاعدة المعروفة من المجر بان حاصل مجموع

كيتين وفضلتهما = فضلة مربعيها اي $ق٢ - و٢ = (ق + و) \times (ق - و)$

(١٤٢) فلنا هذه القاعدة لمعرفة فضلة مربعي كيتين وهي اصف

نسب مجموعيها الى نسب فضلتهما

ثم بعد استعلام نسب فضلتهما يستعلم جذره المالى بقسمته على اثنين

(ع ٤٧)

مثال ١ ان فُرِضَ الوتر ٧٥ والقاعدة ٤٥ فما هو الساق

مجمع الضلعين المروضين ١٢٠ نسبة ٢٠٧٩١٨

فضلتهما ٢٠ نسبة ١٤٧٧١٢

$٢٠ \times ١٤٧٧١٢ = ٢٩٥٤٢٤٠$

الضلع المطلوب $٢٩٥٤٢٤٠ = ١٧٧٨١٥$

مثال ٢ مفروض الوتر ١٢٥ والساق ١٠٨ فما هي القاعدة

الجواب ٨١

مثال ٣ مفروض القاعدة ٢٧٢٠ والساق ٢١٠٤ مطلوب الوتر

الجواب ٤١٢٧١

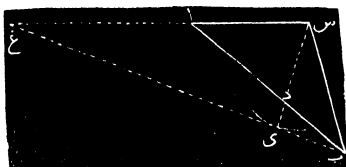
مثال ٤ مفروض الوتر ٥١٤ والساق ٤٢٢ مطلوب القاعدة

مجموع ضلعين من اضلاعه

الى فضلتهما :: ماس نصف مجموع الزاويتين المتقابلتين الى ماس

نصف فضلتهما

مثالة (شكل ١٨) مجموع اب واس : فضلتهما :: ماس نصف مجموع الزاويتين اس ب واب س : ماس نصف فضلتهما



شكل
١٨

البرهان. اخرج س ا الى غ واجعل اع = اب فيكون س غ مجموع س ا واب افضل من اب اد = اس فيكون دب فصلة اب واس ومجموع الزاويتين اس ب اب س = مجموع اس د وادس لان كل واحد من المجموعين = كمال س ا د (ع ٧٩) واس = اد فاذا ادس = اس د (اقليدس ق ٥ ك ١) واس د نصف مجموع اس ب واب س واب = اغ فاذا اغ ب = اب غ او دب ي و غ س ي او اس د = ادس = دب دي (اقليدس ق ١٥ ك ١) فاذا في المثلثين غ س ي ودب ي الزاويتان الباقيتان متساويتان اي دب ي = س ي غ فيكون س ي عموداً على ع ب (اقليدس ك ١٠ د ١) فان جعل س ي نصف القطر يكون غ ي ماس غ س ي (ع ١٤) اي ماس نصف مجموع الزاويتين المتقابلتين الضلعين اب واس ثم ان طرح من اكبر الزاويتين اس ب اب س نصف مجموعهما اي اس د تكون الباقية ي س ب نصف فضلتهما (ج ع ١٥٤) وان جعل س ي نصف القطر يكون ي ب ماس ي س ب اي ماس نصف فضلة الزاويتين المتقابلتين الضلعين اب واس فلنا

س غ = مجموع اب واس دب = فضلتهما

غ ي = ماس نصف مجموع الزاويتين المتقابلتين

ي ب = ماس نصف فضلتهما وبالمثلثات المتشابهة

س غ : دب :: غ ي : ي ب وذلك الخ

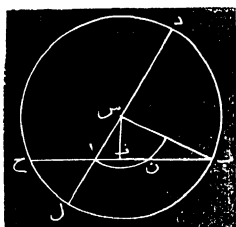
النظرية الثالثة

(١٤٥) ان رُسم على اطول اضلاع مثلث خط عمودي من الزاوية

المقابلة تكون نسبة الضلع الأطول الى مجنوع الآخرين :: فضلة الآخرين الى فضلة قسيّ الأطول الحاصلين من وقوع العمودي عليه (انظر اقليدس ق ط ك ٦)

في المثلث ا ب س (شكل ١٩) ان رُسم عمودي من س على ا ب تكون نسبة
 ا ب : س ب + س ا :: س ب - س ا : ب ف - ف ا

البرهان . على المركز s والبعد s ب a رسم دائرة d ح ب وارسم النقط
ل د ماراً بالنقطتين ا وس واخرج ب ا الى ح ثم حسب اقليدس (ق ٢٥
ك ٢) $ab \times ac = al \times ad$ فاذا  شكل ١٩



اب: اد: ال: اح: واد: اس
+ سد: د= سب: اس: ال= .
سل- سا= سب- سا: اح
= ح- ف- فا- ب- ف- فا
(افلیدس ق ۲ ک ۲)

تم بالتعويض في النسبة المذكورة

اب : س ب + س ا : س ب - س ا : ب ف - ف ا
 وهكذا ان وقع العمود خارج المثلث ويستفاد ذلك من اقليدس (ق ط ك ٦)
 وان فُرض الاضلاع الثلاثة يُعرف ان كان في المثلث زاوية منفرجة اولاً لانه ان
 كان مربع الضلع الذي يقابلها اعظم من مربعي الضلعين الاخرين كانت الزاوية
 منفرجة والاحادة (اقليدس ق ١٢ و ١٣ ك ٢)

(١٤٦) القسم الاطول من القاعدة يلي الضلع الاطول فان كان
ب س اطول من س ا يكون ب ف اطول من ف ا . على المركز
س والبعد س ا ارسم القوس ا ن فالقسم ن ف = ف ا (اقليدس
ق ٢ ك ٢) و ب ف اطول من ف ن فهو اطول من ا ف

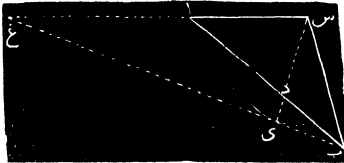
(١٤٧) نسبة قسم من الضلع المقسوم الى القسم الآخر كنسبة حماسات الزوايا المتقابلة لها او نظائر حماسات الزوايا المتوالية لها

مجمع ضلعين من اضلاعه

الى فضلتهما :: ماس نصف مجمع الزاويتين المتقابلتين الى ماس

نصف فضلتهما

شكل
١٨



مثاله (شكل ١٨) مجمع اب

واس : فضلتهما :: ماس نصف

مجمع الزاويتين اس ب واب س

: ماس نصف فضلتهما

البرهان . اخرج س ا الى غ واجعل اغ = اب فيكون س ع مجمع س ا
واب انفصل من اب اد = اس فيكون دب فصلا اب واس ومجمع
الزاويتين اس ب اب س = مجمع اس د وادس لان كل واحد من المجمعين
= كمال س اد (ع ٧٩) واس = اد فاذا ادس = اس د (اقليدس ق ٥
ك ١) واس د نصف مجمع اس ب واب س واب = اغ فاذا اغ ب
= اب ع او دب ي و غ س ي او اس د = ادس = ب دي
(اقليدس ق ١٥ ك ١) فاذا في المثلثين ع س ي ود ب ي الزاويتان الباقيتان
متساويتان اي دي ب = س ي ع فيكون س ي عمودا على غ ب (اقليدس
ك ١ ح ١٠) فان جعل س ي نصف القطر يكون غ ي ماس ع س ي (ع ٨٤)
اي ماس نصف مجمع الزاويتين المتقابلتين الضلعين اب واس ثم ان طرح من
اكبر الزاويتين اس ب اب س نصف مجمعهما اي اس د تكون الباقي ي س ب
نصف فضلتهما (ج ع ١٥٤) وان جعل س ي نصف القطر يكون ي ب ماس
ي س ب اي ماس نصف فضلة الزاويتين المتقابلتين الضلعين اب واس فلنا
س غ = مجمع اب واس دب = فضلتهما

غ ي = ماس نصف مجمع الزاويتين المتقابلتين

ي ب = ماس نصف فضلتهما وبالمثلثات المتشابهة

س غ : دب :: غ ي : ي ب وذلك الخ

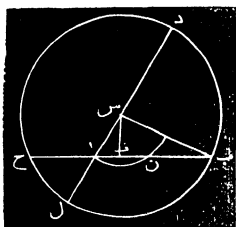
النظرية الثالثة

(١٤٥) ان رُسم على اطول اضلاع مثلث خط عمودي من الزاوية

المقابلة تكون نسبة الضلع الأطول الى مجنوع الآخرين :: فضلة الآخرين الى فضلة قسيّ الأطول الحاصلين من وقوع العمودي عليه (انظر اقليدس ق ط ك ٦)

في المثلث ا ب س (شكل ١٩) ان رُسم عمودي من س على ا ب تكون نسبة
 ا ب : س ب + س ا :: س ب - س ا : ب ف - ف ا

البرهان. على المركز S والبعد S ب $اس$ دائرة $د ح ب$ وارسم القطر
 ل $د$ مارًّا بالنقطتين $ا$ و $س$ واخرج $ب ا$ الى $ح$ ثم حسب اقليدس (ق ٢٥
 ك ٢) $ا ب \times ا ح = ا ل \times ا د$ فادًا  شكل ١٩



اب: اد: ال: اح: واد = اس
+ سد = سب: سا: ال =
سل - سا = سب - سا: اح
= ح - ف - فا = ب - ف - فا
(اقلیدس ق ۲۲)

تم بالتعويض في السببة المذكورة

اب : س ب ا س ا : س ب -- س ا : ب ف - ف ا
 وهكذا ان وقع العمود خارج المثلث ويستفاد ذلك من اقليدس (ق ط ك ٦)
 وان فرض الاضلاع الثلاثة يُعرف ان كان في المثلث زاوية منفرجة اولاً لانه ان
 كان مربع الضلع الذي يقابلها اعظم من مربعي الضلعين الاخرين كانت الزاوية
 منفرجة والافحاده (اقليدس ق ١٢ و ١٣ ك ٢)

(١٤٦) القسم الاطول من القاعدة يلي الضلع الاطول فان كان
ب س اطول من س ا يكون ب ف اطول من ف ا . على المركز
س والبعد س ا ارسم القوس ا ن فالقسم ن ف = ف ا (اقليدس
ق ٢ ك ٢) و ب ف اطول من ف ر فهو اطول من ا ف
(١٤٧) نسبة قسم من الضلع المقسوم الى القسم الآخر كنسبة مماسات
الزوايا المتقابلة لهما او نظائر مماسات الزوايا المتوالية لهما

لأنه في المثلثين $اسف$ $بسف$ $ان$ جعل $س$ $ف$ نصف القطر تكون
 $\frac{1}{2}$ $ق$: $ف$: $س$:: $ماس$ $اس$: $ف$: $ا$
 و $\frac{1}{2}$ $ق$: $ف$: $س$:: $ماس$ $بس$: $ف$: $ب$ $ف$

وبمساواة النسب $ماس$ $اس$: $ف$: $ا$ $ف$:: $ماس$ $بس$: $ف$: $ب$ $ف$ اي نسبة
 قسم الى آخر :: $ماسات$ الزوايا المتقابلة وها نظير الماسين للزاويتين $ا$ و $ب$ (ع ٨٩)
 فرع. القسم الاكبر يقابل الزاوية الكبرى ومن الزاويتين عند
 القاعدة الصغرى تلي الضلع الاطول وبالعكس فان كان $ب$ $ف$ اطول
 من $ا$ $ف$ تكون $بس$ $ف$ اكبر من $اس$ $ف$ (ع ٧٧)

(١٤٨) لكي تستعلم اضلاع مثلث حاد الزاوية او زواياه لا بد من
 افتراض ثلاثة من اجزائه وهذه الثلاثة الاجزاء

(١) زاويتان وضلع

(٢) او ضلعان والزاوية المقابلة احدهما

(٣) او ضلعان والزاوية المحاذية بينهما

(٤) او الاضلاع الثلاثة

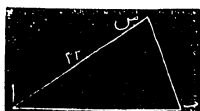
فالمفروض الاول والثاني يخلان بالنظرية الاولى (ع ١٤٢) والثالث
 بالنظرية الثانية (ع ١٤٤) والرابع بالنظرية الثالثة (ع ١٤٥)

(١٤٩) ينبغي ان يلاحظ كون الضلع الاطول مقابل الزاوية
 الكبرى (اقليدس ق ١٨ و ١٩ ك ١) وانه لا يكون لمثلث اكثر من زاوية
 واحدة منفرجة فالزاويتان المقابلتان الضلعين الاقصرين حادتين ابداً
 المفروض الاول

(١٥٠) مفروض زاويتان وضلع مطلوب الزاوية الاخرى والضلعان
 نستعلم الزاوية الاخرى بطرح مجموع المفروضتين من ١٨٠° (ع ٧٩)
 ويستعلم الضلعان حسب النظرية الاولى بهذه النسبة. نسبة جيب الزاوية

المقابلة الضلع المفروض: طول الضلع المفروض :: جيب الزاوية المقابلة
الضلع المطلوب: طول الضلع المطلوب

شكل ٢٠



مثال اول في المثلث ا ب س مفروض
ا س = ٢٢ والزاوية ا = $20^\circ 06'$ والزاوية
س = $10^\circ 49'$ مطلوب الزاوية ب والضلعين
س ب و ا ب

مجمع الزاويتين = $20^\circ 10' 05''$ اطرح هذا المجمع من 180° بقى $20^\circ 74' =$ ب

ثم قل جيب ب : نسب ٢٢ :: جيب ا : ب س
جيب س : ا ب

جيب ب $20^\circ 74'$ مئة الحسائي 0.1709

$1'00010$

: نسب ٢٢

$9'92.27$

:: ج $20^\circ 06'$

: الضلع ب س = $1'44101 = 27'64$

جيب ب مئة الحسائي 0.1709

$1'00910$

نسب ٢٢

$9'87887$

جيب $10^\circ 49'$

الضلع ا ب = $1'40011 = 25'12$

يُستعمل المئمة الحسائي على الطريقة الاعيادية او باستعلام نظير الناطع وطرح ١٠ من
الدليل (ع ١١٢) لان المفروض هنا جيب

مثال ٢ مفروض الضلع ا س = ٧١ والزاوية ا = $6^\circ 10' 7''$ والزاوية س =

$40^\circ 27'$ مطلوب الزاوية ب والضلعين س ب و ا ب . الزاوية ب = $45^\circ 44'$

ثم قل

جيب ب : نسب ٧١ :: جيب ا : ب س = $45^\circ 08'$
جيب س : ا ب = $46^\circ 42'$

تنبيه . في هذا المثال احدى الزوايا منفرجة فيتناول من الجداول جيب كالها

(ع ٩٩)

المفروض الثاني

(١٥١) مفروض ضلعان والزاوية المقابلة احدهما مطلوب الضلع

الآخر والزاويتان الاخرتان

تستعمل احدى الزاويتين بحسب النظرية الاولى بهذه النسبة

نسبة الضلع المقابل الزاوية المفروضة

: جيب تلك الزاوية :: الضلع المقابل الزاوية المطلوبة

: جيب الزاوية المطلوبة ثم تستعمل الاخرى بطرح مجتمعة المعروفتين

من ١٨٠ ويستعمل الضلع الآخر بالنسبة المذكورة في المفروض الاول

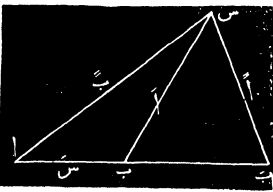
(١٥٢) في هذا المفروض ان كان الضلع المقابل الزاوية المفروضة

اقصر من الضلع الآخر المفروض يكون الجواب ملتبساً لانه يمكن رسم

مثلثين كل واحد منهما يستوفي شروط المسئلة

مثالة لبفرض الضلع ب والزاوية ا والضلع المقابل اي ا وهو اقصر من

شكل ٢١



ب . اجعل هذا الضلع المقابل الزاوية ا

نصف القطر وارسم قوساً يقطع الخط اح

ح في ب و ب فيكون خطاً آ و آ

متساويين فيصنع مما فرض مثلثان اب س

وا ب س ويكون الجواب جيب زاوية

وتلك الزاوية اما حادة ا ب س واما منفرجة اب س ويتعين المراد من كون

الضلع المقابل الزاوية المفروضة اطول من الضلع الآخر المفروض واقصر منه فان كان

اطول تكون الزاوية المقابلة الضلع المفروض حادة اذ لا يكون في مثلث اكثر من زاوية

واحدة منفرجة ولابد لها ان تتقابل الضلع الاطول وان كانت الزاوية المفروضة منفرجة

فلا بد ان تكون الاخرتان حادتين فيرفع الالتباس من الجواب

مثال اول . مفروض (شكل ٢١) الزاوية عد $1 = 35^\circ 20'$ والضلع المقابل

$1 = 50$ والضلع ب 20 مطلوب الضلع الآخر والزاويتان الاخرتان

اولاً لاستعلام الزاوية المتعائلة الضلع ب بحسب (ع ١٥١)

نسبة الضلع آ اي ٥٠ : جيب ا :: الضلع ب : جيب ب

نسب ٥٠ منته الحسابي ٨'٢٠١٠٢

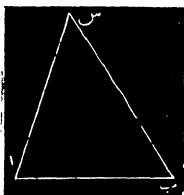
جيب ٢٠'٢٥ ٩'٧٦٢١٨

نسب ٧٠ ١'٨٤٥١٠

٩'٩٠٨٢١ = جيب ا ب س = ٥٠'٢٥٤ = او المنفرجة

ا ب س - ١٢٥'٥٦'١٠ اضعفها الى الزاوية ا واطرح المجموع من ١٨٠° يبقى
الزاوية ا س ب = ٤٣'١٨° ثم في المثلث ا ب س لكي تستعلم الضلع س قل
نسبة جيب ا : الضلع آ :: جيب ا س ب : الضلع س = ٢٧'٧٦° وان اضيفت الزاوية
ب الى الزاوية ا واطرح المجموع من ١٨٠° يبقى ١٨٠'٢٦'٩٠° = الزاوية ا س ب
ولاستعلام الضلع ا ب قل جيب ا : الضلع آ او س ب :: جيب ا س ب : ا ب
٨٦'٤٥ =

شكل ٢٢



مثال ٢ مفروض الزاوية ا ٢٥'٦٢

والضلع ا س - ٦٤ والضلع س ب = ٧٢

مطلوب الضلع ا ب والزاويتين ب و س

الضلع ب س : جيب ا : الضلع ا س :

جيب ب = ٥٢'٥٤'٢٥ و جيب ا : ب س

:: جيب س : الضلع ا ب = ٧٢'٠٥° ومجموع ا و ب = ١١٦'٢٠'٢٥° كما لما

٦٢'٢٩'٢٥° = س ولا التباس في هذه المسئلة لان الضلع المقابل الزاوية المفروضة

اطول من الضلع الآخر المفروض

مثال ٣ مفروض الزاوية ا ١٢١'٤٠° والضلع ب س = ٦٨ والضلع

ا س - ٤٧ مطلوب الزاويتين ب و س والضلع ا ب

الجواب ب = ٢٦'٢'٤° و س = ٢٢'١٧'٥٦° و ا ب = ٢٠'٢°

ولا التباس في هذه المسئلة لان الزاوية المفروضة منفرجة

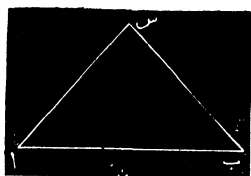
المفروض الثالث

(١٥٣) مفروض ضلعان والزاوية بينهما مطلوب الضلع الآخر

والزاويتين الاخرتين

تستعمل الزاويتان حسب النظرية الثانية (ع ١٤٤) والضلع المطلوب حسب النظرية الاولى وبطرح المفروضة من 180° يُعرَف مجموع الاخرين (ع ٧٩) وباضافة نصف فضلة كمتين الى نصف مجتمعهما لنا اكبرها وبطرح نصف فضلتها من نصف مجتمعهما لنا اصغرهما (جبر ع ١٥٤)

شكل ٢٢



مثال اول . في المثلث ا ب س
(شكل ٢٢) مفروض الزاوية $26^\circ = 14^\circ$ والضلع $اس = 29$ والضلع
ا ب = 52 مطلوب الزاويتين ب
وس والضلع ب س

$$مجمع الضلعين \quad 29 + 52 = 81$$

$$فضلتها \quad 29 - 52 = 23$$

$$مجمع ب وس = 180^\circ - 26^\circ - 14^\circ = 140^\circ$$

$$نصف مجتمعهما = 70^\circ$$

تم حسب النظرية الثانية نسبة

$$(اس + اب) : (اب - اس) :: ماس ا : ماس ب (س - س)$$

$$اي 81 : 23 :: ماس 70^\circ : ماس ب (س - س)$$

$$نسب 81 م ح = 23$$

$$14^\circ 14' 12''$$

$$ماس 70^\circ 52' = 10^\circ 63' 62''$$

$$ماس 70^\circ 52' = 9^\circ 81' 49''$$

$$نصف مجتمعهما = 70^\circ 52'$$

$$نصف فضلتها = 23^\circ 18' 50''$$

$$بالجمع \quad 110^\circ 1' 50'' = \text{الزاوية الكبرى}$$

$$٤٣^\circ 44' 10'' = \text{الزاوية الصغرى}$$

الضلع الاطول هو ا ب فتكون الزاوية س 110° ' ١ ' ٥٠ ' والزاوية ب = $43^\circ 44' 10''$ ثم لكي تستعلم الضلع ب س قل جيب ب : اس اي $29 ::$ جيب ا اي $26^\circ 14' ::$ ب = $24^\circ 44'$

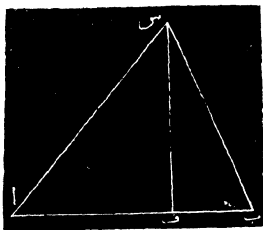
مثال ٢ مفروض الزاوية ا = $101^\circ 40'$ والضلع اس = ٧٦ والضلع ا ب = ١٠٩ مطلوب الزاويتين ب وس والضلع ب س
الجواب ب = $40^\circ 57\frac{1}{2}'$ س = $47^\circ 22\frac{1}{2}'$ وب س = $144^\circ 8'$

المفروض الرابع

(١٥٤) مفروض الاضلاع الثلاثة مطلوب الزوايا

ارسم عموداً على الضلع الاطول من الزاوية المقابلة له فينقسم به المثلث الى اثنين كل واحد ذوقائمه ويستعلم قسما الضلع بالنظرية الثالثة فيكون لنا في كلا المثلثين الوتر وضلع ومنهما نتوصل الى الاجزاء الباقية حسبما يقدم (ع ١١٣٥)

شكل
٢٤



مثال اول . في المثلث ا ب س (شكل ٢٤) مفروض الضلع ا ب - ٢٩ واس - ٢٥ وب س - ٢٧ مطلوب الزوايا . ارسم س ف عموداً على ا ب ثم حسب النظرية الثالثة ا ب : اس + س ب :: اس - س ب : ا ف - ف ب

$$8' 40.894$$

نسب ٢٩ م ح

$$1' 79.239$$

$$27 = 27 + 20 :$$

$$0' 9.309$$

$$8 = 27 - 20 ::$$

$$12' 72 = 1' 10.442$$

فضلة القسمين

اطول القسمين هو ا ف لانه يلي الضلع الاطول اس

نصف مجموع التسمين ١٩٥

نصف فضائهما ٦٢٦

بالمجموع ٢٥٨٦ = أطولها ا ف

بالطرح ١٢١٤ = أقصرها ف ب

فلنا في كل واحد من المثلثين ا ف س ب ف س الوتر والقاعدة ونستعلم الزوايا حسب (١٢٥ ع)

ا س : ق : ا ف : ن ج ا = ٤٢ ° ٢١ ' ٥٧ '

ب س : ق : ب ف : ن ج ب = ٦٠ ' ٥٢ ' ٤٢ °

اجمعها واطرح المجموع من ١٨٠ يبقى ٧٦ ' ٤٥ ' ٢١ ' ا س ب

مثال ٢ مفروض اضلاع مثلث ٧٨ و ٩٦ و ١٠٤ مطلوب الزوايا

المجاب ٤٥ ° ٤١ ' ٤٨ ° و ٦١ ° ٤٢ ' ٢٧ ' و ٧٢ ° ٢٤ ' ٤٥ °

امثلة

(١) مفروض الزاوية ا ٥٤ ° ٣٠ ° والزاوية ب = ٦٢ ° ١٠ ° والضلع ب س

= ١٦٤ مطلوب س والضلعين ا س و ا ب

(٢) مفروض الزاوية ا = ٤٥ ° ٦ ° والضلع المقابل ب س = ٩٢ والضلع

ا س = ١٠٨ مطلوب ب وس والضلع ا ب

(٣) مفروض الزاوية ا = ٦٧ ° ٢٤ ° والضلع ب س المقابل = ٦٢ والضلع

ا س = ٤٦ مطلوب ب وس والضلع ا ب

(٤) مفروض الزاوية ا = ١٢٧ ° ٤٢ ° والضلع المقابل ب س = ٢٨١ والضلع

ا س = ١٨٤ مطلوب ب وس والضلع ا ب

(٥) مفروض الضلع ا س = ٥٨ و ا ب = ٦٧ والزاوية ا بينها ٣٦ مطلوب

ب وس والضلع ب س

(٦) مفروض اضلاع مثلث الثلاثة ٦٢١ و ٢٦٨ و ٥٤٦ مطلوب الزوايا

(١٥٥) قد برهنّا صحة هذه النظريات الثلاث في حل مسائل

مثلثات غير قائمة الزاوية وهي تصلح أيضاً للمثلثات القائمة الزاوية

مثال في المثلث ا ب س (شكل ١٢) حسب النظرية الاولى (ع ١٤٣) جيب
 ب : ا س :: جيب ا : ب س وهي نفس النسبة المذكورة في (ع ١٢٤) غير انه في
 الجزء الاول وضع جيب ب عوضاً عن ا ق ولما كانت ب قائمة فجيها = ق (ع ٩٥)
 وايضاً جيب ا : ب س :: جيب س : ا ب وهي نفس النسبة المعتمد عليها في
 المثلثات القائمة الزاوية اذا جعل الوتر نصف القطر وعلى هذا البناء يُعتمد على النظريتين
 الاخرتين في مثلثات قائمة الزاوية غير انه متى عرفت احدى الزوايا بانها قائمة تكون
 الطريقة الاولى ابسط
 تنبيه . استخدام هذه القواعد في المساحة وسلك الجرسما في الكلام به في محله

الفصل الخامس

في بعض آلات الرسم وكيفية رسم المثلثات بها

(١٥٦) من آلات الرسم البيكار (شكل ٢٥) يُصنع مفصلة من

معدنين لكي يتحرك قسماؤه الواحد على الآخر بسهولة وساق واحد من
 ساقية يفك ويركب عوضاً عنه قلم اوشي ثم آخر لتسهيل الرسم به



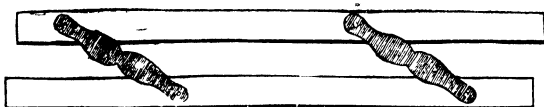
شكل
٢٥

اما مسطرة الموازية

(شكل ٢٦) فهي

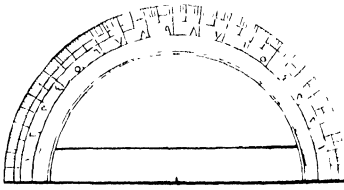
مسطرة مركبة من مسطرتين بسيطتين متوازيين الجانبين مترابطتين

شكل ٢٦



بواسطة عارضتين منحرفتين تدور كل واحدة منهما على مسار مركزها لها
 فينفارق القسم الواحد من الآخر. تستخدم لاجل رسم خطوط متوازية

شكل ٢٧



(١٥٧) من آلات الرسم

المنقلة (شكل ٢٧) وهي نصف

دائرة من نحاس او عاج او قرن

محيطها مقسوم الى درجات تُكتب

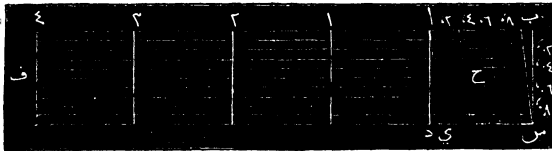
اعنادها طرْدًا وعكسًا. تُستخدم لاجل رسم زوايا مفروضة. يُجعل مركزها

على راس الزاوية ثم يُقطع من محيطها درجات الزاوية المفروضة

(١٥٨) من آلات الرسم المقياس البسيط (شكل ٢٨) السطح

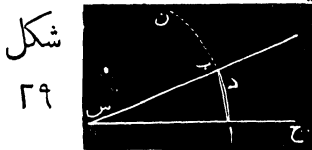
شكل ٢٨

أوتار	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
حجوب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
ماسات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩



الواحد مقسوم الى اجزاء متساوية والآخر الى اوتار وحجوب وماسات

(١٥٩) لرسم زاوية مفروضة يقتضي قياسها وقياس كل زاوية هو



شكل

٢٩

القوس التي تقابلها وقياس القوس ان

فُرِض نصف القطر هو وتر القوس

فالوتر اب (شكل ٢٩) هو قياس

القوس اد ب. والزاوية اس ب

(١٦٠) وتر $\frac{1}{2} = 60$ ق (ع ٩٥) فلاجل رسم زاوية اولاجل قياسها

يجب رسم قوس على $\frac{1}{2}$ ق = البعد بين ٠ و ٦٠ على خط الاوتار ونرسم

على المقياس غالباً خطين للاوتار ويجوز استعمال أيهما شئت غير أنه يجب قياس الزاوية على نفس الخط الذي أخذ منه نصف القطر (١٦١) لكي ترسم زاوية مفروضة ارسم خطاً مستقيماً واجعل احد طرفيه مركزاً وأخذ من خط الاوتار في المقياس ٦٠ بالبيكار واجعلها نصف قطر وارسم قوساً يقطع الخط المرسوم وأخذ وتر الزاوية المفروضة من المقياس وقسّه على القوس من نقطة تقاطع القوس والخط وارسم خطاً من المركز الى النقطة المعينة على القوس فيكون لك المطلوب وان كانت الزاوية منفرجة فخذ من المقياس وتر نصفها وقس مضاعفه على القوس وان كانت قائمة ترسم برسم خط عمودي على الخط المرسوم اولاً بدون استعمال المقياس وترسم زاوية مفروضة بواسطة المنقلة حسب ما تقدم

(١٦٢) لاجل قياس زاوية مرسومة خذ من المقياس وتر ٦٠ واجعل راس الزاوية مركزاً وارسم قوس دائرة نقطع ضلعي الزاوية ثم خذ البعد بين نقطتي التقاطع وضعه على خط الاوتار من المقياس فالقسم منه الواقع بين ساقى البيكار هو قياس الزاوية وان كانت منفرجة فاقسم القوس الى نصفين وقس احدهما كما تقدم فيكون مضاعفه قياس الزاوية واستعلام قياسها بالمنقلة اسهل من الطريقة الاخرى ولكن ان لم تكن المنقلة تحت اليد تستخدم الواسطة الاخرى

(١٦٣) على المقياس البسيط خطوط آخر غير خط الاوتار وخطوط الاجزاء المتساوية وهي خط الجيوب والمماسات والقواطع وانصاف المماسات الطبيعية بعضها تستخدم في سلك البحر وبعضها في إلقاء كرة على سطح مستو وما يشبه ذلك

(١٦٤) خط الدوائر المتسامنة يستعمل أيضاً في فن سلك الأجر وسيأتي ذكره في موضعه والفرق بينه وبين خط الأوتار هو اصطناعه بانقسام ربع الدائرة الى ثمانية اجزاء متساوية ليوافق اقسام الجهات على المحك

(١٦٥) خط الطول يدل على الاميال في درجة من الطول حسب اختلاف العرض

(١٦٦) خط القواطع يتبدى عند نهاية خط الجيوب لان اطول الجيوب = $\frac{1}{2}$ ق واقصر القواطع اطول من $\frac{1}{2}$ ق

(١٦٧) انصاف المماسات هي مماسات انصاف الاقواس المفروضة مثالة $\frac{1}{2}$ مماس = 20° مماس 10° وهذا الخط يستعمل غالباً في إنشاء كرة على سطح مستوي

(١٦٨) في رسم المثلثات توضع الزوايا والاضلاع حسبما تقدم في (ع ١٥٨ و ١٦١) ثم تقاس الاجزاء المفروضة حسب (ع ١٥٨ وع ١٦٢) وقد وضعنا هنا بعض العمليات توافق المفروضات الاربع في حساب المثلثات غير القائمة الزاوية (ع ١٤٨) وتصلح ايضاً على حدٍ سوى للقائمة الزاوية

(١٦٩) عملية اولى. مفروض زوايا مثلث وضع من اضلاعه مطلوب الضلعان الآخران برسم المثلث

ارسم الضلع المفروض ومن طرفيه ارسم الزاويتين المفروضتين واخرج ضلعاً من كل واحدة الى ان يلتقياً ثم قسمها على مقياس الاجزاء المتساوية مثال اول. مفروض (شكل ٢٢) الضلع ا س = 22° والزاوية = $1^\circ 56'$ والزاوية س = $10^\circ 49'$ مطلوب رسم المثلث وطول اب وب س
الجواب ا ب = 20° وب س = $27^\circ \frac{1}{2}$

٢ في مثلث قائم الزاوية مفروض الوتر = ٩٠° والزاوية عند القاعدة = ٢٢° ٢٠' مطلوب القاعدة والساق برسم المثلث

الجواب القاعدة = ٧٦ والساق = ٤٨

٢ مفروض الضلع اس = ٦٨ والزاوية ا = ١٢٤° والزاوية س = ٢٧° مطلوب رسم المثلث

(١٧٠) عملية ثانية. مفروض ضلعان والزاوية المقابلة احدها مطلوب رسم المثلث وطول الضلع الآخر والزاويتين الاخرتين. ارسم احد الضلعين المفروضين ومن احد طرفيه قس الزاوية المفروضة وارسم خطاً غير مفروض طولاً ثم اجعل الطرف الآخر مركزاً وطول الضلع الثاني المفروض بعداً وارسم قوس دائرة تقطع الخط غير المفروض طوله واوصل بين نقطة التقاطع وطرفي الخط المرسوم اولاً

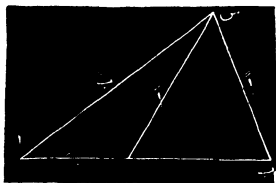
ان كان الضلع المقابل الزاوية المفروضة اقصر من الآخر يكون الجواب ملتبساً (ع ١٥٢)

مثال اول. مفروض الزاوية ا = ٦٣° ٢٥' والضلع اس = ٢٢° والضلع ب س = ٢٦° مطلوب الضلع اب والزاويتين ب وس

الجواب اب = ٢٦° تقريباً والزاوية ب = ٥٢° ٤٠' والزاوية س = ٦٣° ٢٩'

شكل

٢١



٢ مفروض الزاوية ا = ٢٠° ٢٥'

والضلع ب س او ب س = ٢٥°

والضلع اس = ٢٥°

ارسم الضلع اس = ٢٥° والزاوية ح

= ٢٠° ٢٥' واخرج اح الى غير نهاية ومن س على بعد ب س او ب س

اي ٢٥° ارسم قوساً يقطع اح في ب وب وارسم ب س وس ب فيحدث مثلثان

اب س واب س وكل واحد منهما مستوفي شروط المسئلة

٢ مفروض الزاوية ا = ١١٦° والضلع ب س = ٢٨° والضلع اس = ٢٦°

مطلوب رسم المثلث

(١٧١) عملية ثالثة. مفروض ضلعان والزاوية بينهما مطلوب الضلع

الآخر والزويتان الاخرين

ارسم احد الاضلاع المفروضة ومن احد طرفيه قس الزاوية المفروضة وارسم الضلع الآخر المفروض واوصل بين طرفي الضلعين

مثال اول . مفروض الزاوية $1 = 26^\circ 14'$ والضلع $اس = 78$ والضلع $اب = 106$ مطلوب $ب س$ والزويتين $ب$ و $س$

$$ب س = 50 = ب = 44^\circ 44' \text{ و } س = 110^\circ 2'$$

٢ مفروض الزاوية $ا = 86^\circ 1$ $اس = 165$ $اب = 84$ مطلوب الضلع $ب س$ والزويتين $ب$ و $س$

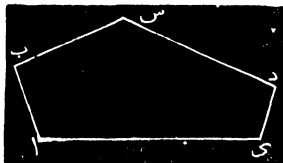
(١٧٢) عملية رابعة . مفروض الاضلاع الثلاثة مطلوب الزوايا . ارسم ضلعاً ومن احد طرفيه وعلى بعد طول ضلع آخر ارسم قوساً ومن الطرف الآخر على طول الضلع الثالث ارسم قوساً يقطع الاولى واوصل بين نقطة التقاطع وطرفي المرسوم اولاً

مثال اول . مفروض $اب = 78$ و $اس = 70$ و $ب س = 54$ مطلوب الزوايا $ا - 1 = 42^\circ 22'$ $ب = 60^\circ 52'$ $س = 76^\circ 54'$

مثال ٢ مفروض الاضلاع الثلاثة 58 و 39 و 46 فاجي الزوايا (١٧٣) ان فُرِضَتْ زوايا شكل كثير الاضلاع واضلاعه يُرَسَمُ حسب ما تقدم بوضع زواياه من خط الاوتار وطول اضلاعه من مقياس الاجزاء المتساوية

مثالة (شكل ٢٠) مفروض الضلع $اب = 20$ $ب س = 22$ $س د = 20$ $دي = 12$ والزاوية $ب = 102^\circ$ و $س = 120^\circ$ و $د = 108^\circ$ مطلوب رسم الشكل . ارسم $اب = 20$ واجعل الزاوية $ب = 102^\circ$

ثم ارسم $ب س = 22$ واجعل الزاوية $س = 120^\circ$ وارسم $س د = 20$ واجعل الزاوية $د = 108^\circ$ وارسم $دي = 12$ ثم اوصل بين $ي$ و $ا$ ثم نستعمل $ي ا$ من



المقياس والزوايتين ي وا من خط الاوتار

الفصل السادس

في مقياس كوتنر وكيفية استعماله

(١٧٤) انه في القرن الخامس عشر اخترع ادموند كوتنر من اعمال انكلترا مقياساً يتخل به مسائل حساب المثلثات ومسائل أخر حسابية وهو يدل على انساب اعداد وجيوب ومماسات الخ بواسطة خطوط مرسومة عليه وبهذه الخطوط يتم الضرب والقسمة والنسبة والترقية والتجذير الخ بغاية السرعة وهذه الخطوط موضوعة على السطح الثاني من المقياس البسيط الماضي ذكره وهي

اولاً خط جيوب مقسومة الى درجات دوائر متسامتة وعلامته **S.R**

ثانياً خط مماسات منسوم كالاول وعلامته **T.R**

ثالثاً خط اسباب الاعداد وعلامته **Num.**

رابعاً جيوب لكل درجة وعلامته **SIN.**

خامساً مماسات لكل درجة وعلامته **TAN.**

سادساً سهام جيوب وعلامته **V.S.**

سابعاً اجزاء خط نصف النهار وعلامته **MER.**

ثامناً مقياس اجزاء متساوية وعلامته **E.P.**

(١٧٥) اقسام خط الاعداد تدل على انساب الاعداد الطبيعية

٢ و ٤ و ٢ و ٤ الخ

انساب ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠ الخ هي ٢ و ٢ و ٢ الخ

فان دُل على نسب ١٠ بخط طوله قدم واحد

يدل على نسب ١٠٠ خط طوله قدمان
و على نسب ١٠٠٠ . . . ثلاثة اقدم وهلم جراً
فيجعل طول كل خط مناسباً لانساب الاعداد في الجدول واجزاء قدم
واحد تدل على انساب الاعداد بين ١ و ١٠ واجزاء قدمين على انساب
الاعداد بين ١٠ و ١٠٠ وهلم جراً
على مقياس كونتر بيندئي خط الانساب من اليسار وتكتب
الاعداد على النسق الطبيعي ١ و ٢ و ٣ الخ الى مسار نحاس بقرب وسط
المقياس ومن ثم ايضاً ٢ و ٤ الخ وهذه الاخيرة نقرأها ان اردت ٢٠
و ٢٠ و ٤٠ الخ فانساب الاعداد بين ١ و ١٠ يدل عليها باجزاء النصف
الاول من الخط وانساب الاعداد بين ١٠ و ١٠٠ باجزاء منه هي اكثر
من نصفه واقل من كله

(١٧٦) نسب ١ = ٠ فيكون نسبة على الخط نقطة الواحد
وانساب الاعداد بين واحد واثنين تكون بين ١ و ٢ على الخط ونسب ٢
هو البعد بين ١ الى ٢ ونسب ٢ هو البعد من ١ و ٢ فتكون الاقسام بين
الصباح في النصف الاول كسوراً وفي النصف الثاني يقرأ البعد بين الاعداد
عشرة عشرة فتكون الاقسام بين الصباح احاداً
مثال اول . خذ من المقياس طولاً يوافق نسب ٢٦
ضع ساق اليكار على ١ والثاني على القسم السادس بعد الثلاثة الاولى
٢ خذ ما يوافق نسب ٤٧

ضع ساق اليكار على ١ والثاني على القسم السابع بعد الاربعة الثانية وان كان
اليكار لا يفتح بهذا المنفذ خذ اولاً نصفه ثم النصف الآخر
(١٧٧) يرى في المقياس ان الاقسام تصغر من اليسار الى اليمين
كما نرى في الجدول ان فضلة الانساب يقل كل ما زادت الاعداد لان

فضلة نسب ١٠ ونسب ١٠٠ = فضلة نسب ١ ونسب ١٠

(١٧٨) خط الإبعاد حسب ما تقدم يدل على كل الانساب بين

١ و ١٠٠ وان تركنا الدلائل يدل على انساب كل الاعداد مهما كانت

(١٧٩) تُحَسَّب النقطة تحت الواحد دالة على نسب ١ او ١٠

او ١٠٠ الخ او ١ او ١٠ الخ لان الجزء الكسري من انساب هذه الاعداد

جميعها هو صفر فان احسبنا النقطة الاولى ١٠ يجب ان نزيد بقية الاقسام

عشر مرات فيكون ٢ = ٢٠ و ٢ = ٢٠ الخ والاثنين الثاني = ٢٠٠

والثلاثة الثانية = ٢٠٠ الخ وان احسبنا النقطة الاولى ١٠ يكون الاثنان

الاول ٢٠ والاثنان الثاني ٢ وقس على ذلك

فلو قبل خذ من المقياس البعد النال على نسب ٢٦٥ لقبل ٢٦٥ هو بين ١٠

و ١٠٠٠ فلنفرض الواحد - ١٠ فيكون ١٠ = ١٠٠ والثلاثة الثانية = ٢٠٠ والقسم

السادس بعدها = ٦٠ والنصف بين السادس والسابع = ٥ اذا من واحد الى ستة

اقسام ونصف بعد الثلاثة الثانية = نسب ٢٦٥

(١٨٠) يتم الضرب بواسطة هذا الخط بجمع انساب الاعداد التي

يُطَلَّب ضرب بعضها في بعض

فلو قبل اضرب ٩ في ٨ لقبل البعد بين ١ و ٨ مضافا الى البعد بين ١ و ٩ ينتهي

الى ٧٢ فيكون ٧٢ المحاصل من ضرب ٩ × ٨

(١٨١) تتم القسمة بواسطة المقياس بطرح نسب المقسوم عليه من

نسب المقسوم

فلو قبل اقسام ٤٢ على ٧ لقبل البعد من ١ الى ٧ مطروح من البعد بين ١ و ٤٢ = ٦

(١٨٢) تتم الترقية بواسطة المقياس بضرب نسب العدد في دليل القوة

المفروضة اي بتكرار النسب مرارا تساوي الاحاد في دليل القوة المفروضة

فلو قبل ما هو مال ٩ لقبل البعد من ١ الى ٩ مرتين ينتهي الى ٨١ مكعب ٤ =

البعد من ١ الى ٤ ثلاث مرات = ٦٤

(١٨٣) يتم التجذير بالمقياس باخذ نصف نسب الكمية او ثلثه او

ربعه حسب دليل الجذر

فلو قيل ما هو الجذر المالى من ٤٩ ل قيل نصف البعد بين ١ و ٤٩ = ٧ - الجذر
والجذر الكعبى من ٢٧ = ثلث البعد من ١ الى ٢٧ = ٣

(١٨٤) يتم عمل الاربع المتناسبة بجمع الوسطين وطرح الطرفين

الاول من المجمع وغالباً يسهل العمل بطرح الجزء الاول من الآخرين

اولاً فان كانت اربع كميات متناسبة فالحارج من قسمة الاولى على الثانية

= الحارج من قسمة الثالثة على الرابعة (ج ١٦٧ الخ) فان كانت نسبة

ا : ب :: س : د = د' = د و س' = د (ج ١٨١) فنسب ا - نسب

ب = نسب س - نسب د او نسب ا - نسب س = نسب ب

- نسب د

(١٨٥) على المقياس فضلة الجزء الاول من النسبة والثاني يعدل

فضلة الثالث والرابع او فضلة الاول والثالث = فضلة الثاني والرابع

وتؤخذ فضلة جزءين بقياس البعد بينهما وان كان الجزء الثاني اكبر من

الاولى فلا بد للرابع ان يكون اكبر من الثالث

مثاله لو قيل ٢ : ٨ :: ١٢ : فما هو الجزء الرابع ل قيل البعد بين ٢ و ٨ مضافاً الى ١٢

- ٢٢ او البعد من ٢ الى ١٢ مضافاً الى ٨ = ٢٢

مثال ٢. ان كان ثمن ٥٤ ذراع جوخ ٤٨ ديناراً فما هو ثمن ١٨ ذراعاً منه .

الجواب البعد بين ٥٤ و ٤٨ مطروح من ١٨ = ١٦

٢ ان كان ثمن ٦٢ رطل خمر ٨١ غرشاً فما هو ثمن ٣٥ رطلاً منه

الجواب البعد من ٦٢ و ٨١ مضافاً الى ٣٥ = ٤٥

في خط الجيوب

(١٨٦) خط الجيوب علامته على المقياس SIN. وهو دال على

انساب جيوب مطابقة لانساب الاعداد في خط الاعداد وقد راينا ان
هذه الاعداد تمتد

من ١ الى ١٠٠ ونسباها . و ٢'.....
او من ١٠ . ١٠٠٠ . ١'..... و ٢'.....
او من ١٠٠ . ١٠٠٠٠ . ٢'..... و ٤'.....
اي فضلة الطرفين في المجموع = ٢

ثم ان نسب جيب ° ٢٤ ' ٢٢ ' ٢١ = ٨'.....
ونسب جيب ° ٩٠ = ١٠'..... (ع ٩٥)

وفضلتهما ٢ فان نعيبت النقطة الاولى تحت رقم ١ من خط الاعداد = جيب ° ٢٤ ' ٢٢ ' ٢١ والنقطة تحت الطرف الآخر = جيب ° ٩٠ يسهل انقسام المسافة بينهما الى اجزاء دالة على انساب الجيوب بين الجيبين المذكورين ولو طلبت الدلالة على جيوب اصغر من ذلك لاقضى امتداد المقياس الى غير نهاية لانه كلما تدانى جيب قوس الى صغره زاد سببه السلي (ع ١٥) الى غير نهاية والعلامة الاولى على خط الجيوب هي عند ° ٤٠ والثانية عند ° ٥٠ ومن ثم تتدنى الدرجات ١ و ٢ و ٣ الخ من اليسار الى اليمين

خط المماسات

(١٨٧) اعداده من ١ الى ° ٤٥ تختلف قليلاً عن خط الجيوب لان نسب ماس

° ٢٤ ' ٢٢ ' ٢٠ = ٨'..... ونسب ماس ° ٤٥ = ١٠'.....

اي ق (ع ٩٥) فيكون آخر خط الماس ° ٤٥ وان طلب ماس راوية اكبر من ° ٤٥ ينبع مد المقياس بيناً وذلك غير موافق فارجع على الخط وزد الاعداد كما لو امتد المقياس الى اليمين لان الخط الواحد يصلح لقوس ولتحتها

(١٨٨) في عمل الاربع المتناسبة بواسطة المقياس كاستعلام الجزء

الرابع من مثلث من النسبة بين ثلاثة اجزاء مفروضة المسافة بين الجزء

الاول والوسط من اسمه = المسافة بين الوسط الآخر والجزء الرابع

(ع ١٨٥)

(١٨٩) ان اردت حل المسئلة الاولى (ع ١٢٤) مثلاً بواسطة المقياس فخذ النسبة $\frac{1}{2}$ ق : 40° ج : 20° : 24° الجزء الاول عدد جدولي و الجزء الثالث كذلك و الجزء الاول اي $\frac{1}{2}$ ق = جيب 90° فخذ البعد بين 90° و 20° و 2° من خط الجيوب و ضعه على خط الاعداد فتراه يمتد من 40 الى 24 و يؤخذ من عن يساره 40 لانه قد أخذ من عن يساره 90°

٢ في هذه المسئلة نفسها ان جعلت القاعدة $\frac{1}{2}$ ق تكون النسبة $\frac{1}{2}$ ق : 28° ماس 20° : 24° $\frac{1}{2}$ ق = ماس 40° فخذ البعد بين 40° على خط الماسات و 20° و ضعه على خط الاعداد فتراه يمتد من 28 الى 24

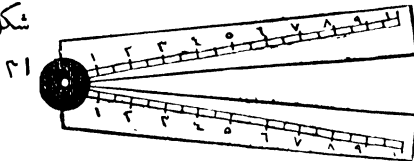
٣ ان جعل الساق $\frac{1}{2}$ ق تكون النسبة $\frac{1}{2}$ ق : 24° م : 40° : 28° لاجل ماس 40° فخذ ماس منه 20° فيمتد على خط الاعداد من 24 الى 28 و يوضع عن يمين 24 لانه في اخذ المم يجب ان نحسب المقياس قد امتد يميناً وان المم قد أخذ عن يمين 40°

٤ في (ع ١٢٥) النسبة $\frac{1}{2}$ ق : 26° ج : 48° فخذ البعد بين 40° و 26° على خط الاعداد و ضعه على خط الجيوب فيمتد من 90° الى 48°

٥ في (ع ١٢٦) النسبة $\frac{1}{2}$ ق : 48° م : 27° : 24° فخذ البعد بين 40° من خط الماسات و 27° و ضعه على خط الاعداد فيمتد من 48 الى 24

٦ في (ع ١٥٠) مثال اول النسبة ج 74° : 20° : 22° ج : 56° : 27° (١٩٠) فقد راينا ان مسائل حساب المثلثات تنحل بواسطة المقياس و باصطناع المثلثات و بالحساب و هذه الطريقة الاخيرة وحدها عليها الاعتماد لصحة العمل و فائدة الاخرين انما هي سرعة العمل و وضع صورة

شكل



المثلث امام النظر

ومن آلات الرسم
القطاع (شكل ٢١)

فائدة تسهيل رسم خطوط على قراض مفسرة عن خطوط آخر الى اية

درجة فُرِضَتْ

مثاله لو طُلِبَ رسم خطوط فيها يعدل كل قيراط من المرسوم ستة اذرع من القياس الحقيقي . خذ قيراطاً من مقياس القاريط بالبيكار وضع ساق من ساقه على ٦ من احدى ذراعي القطاع ثم افتح الذراعين حتى يقع الساق الآخر على ٦ من الذراع الاخرى وقس على ذلك

الفصل السابع

في مبادئ الحل التريغونومتري

(١٩١) المقصود في هذا الفصل هو استخراج عبارات دالة على الجيوب ونظائر الجيوب والمماسات الخ يُستعان بها على حل مسائل خاصة تقع بالاكثَر في علم الهيئة

في العلامات الايجابية والسلبية في حساب المثلثات

(١٩٢) يعين في المجدول الجيوب والمماسات الخ لربع واحد من ارباع الدائرة وهي تصلح للارباع الاربعة لانها على قياس واحد في الاربعة ولكن بعضها ايجابية وبعضها سلبية وفي معاملتها على طريقة جبرية لا بد من اعتبار ذلك كل الاعتبار

(١٩٣) لاجل ايضاح كيفية تغير العلامات الجيوب الخ في ارباع الدائرة الاربعة لنفرض (شكل ٢٢) خطاً س ت يدور على المركز س حتى ترسم نقطة ص منه الدائرة ا ب د ح . وليكن القطر ب ح عموداً

على القطر ا د فتقسم بهما الدائرة الى اربعة ارباع

(١٩٤) لنحسب الجيب ونظير الجيب والمماس الخ في الربع الاول ا ب ايجابية

جميعها ثم في الربع الثاني ب د يبقى الجيب ف ص ايجابيا لانه لم يزل فوق القطر

ا د الذي يقاس منه ولكن نظير الجيب

الذي يقاس من ب ح يصير سلبيا

حالا مبتدل من عن يمين ب ح الى

يساره (ج ٢٧٧) وفي الربع الثالث د ح

يصير الجيب سلبيا بانتقاله من فوق ا ي

الى اسفله ونظير الجيب يبقى سلبيا لانه ماق

عن يسار ب ح

وفي الربع الرابع ح ا يبقى الجيب سلبيا ويعود نظير الجيب ايجابيا لرجوعه الى

يمين ب ح

(١٩٥) علامات المماسات والقواطع نستعلم من علامات الجيوب

ونظائرها

في الربع الاول ق : ن ج : م : ج اي

$$م = \frac{ق \times ج}{ن ج} \quad (ع ٩٢ \text{ نسبة } ١) \text{ وعلامة الخارج تتوقف على علامة المقسوم وعلامة}$$

المقسوم عليه وعلامة ق ايجابية ابدا فان كان الجيب ونظير الجيب ايجابيين او سلبيين

يكون المماس ايجابيا والا سلبيا فهو ايجابي في الربع الاول واما في الربع الثاني فالجيب

ايجابي ونظيره سلبى فيكون المماس سلبيا وفي الربع الثالث هما سلبيان فيكون المماس

ايجابيا وفي الرابع الجيب سلبى ونظيره ايجابي فيكون المماس سلبيا

(١٩٦) حسب (ع ٩٢) نسبة ٢ و ٦ و ٩

$$\text{اولا } م : ق :: ق : ن م \text{ اي } م = \frac{ق(ق)}{ن} \text{ و } ق \text{ ايجابي ابدا فلنظير}$$

المماس علامة المماس

$$\text{وثانيا } ن ج : ق :: ق : الناطع اي الناطع = \frac{ق(ق)}{ن ج} \text{ فللقاطع علامة}$$

نظير الجيب

$$\text{ثالثاً ج: } \frac{1}{\sin} : \frac{1}{\cos} : \frac{1}{\tan} : \frac{1}{\cot} = \text{نظير الفاعط اى ان نظير الفاعط} = \frac{1}{\sin} \text{ ج}$$

فلنظير الفاعط علامة الجيب

سم الجيب بياس من ١ ابداً الى جهة واحدة فهو ايجابي ابداً
(١٩٧) كلما طالت القوس من ١ الى ب طال المماس ات وبقر ب
ب يزيد بسرعة ومتى كانت فضلة القوس و ٩٠ اصغر من كمية يمكن تعيينها يكون المماس
اطول من كمية يمكن تعيينها فسي غير متناه (ج ٤٤٧) وان كانت القوس ٩٠
فليس لها مماس بالحقيقة لان المماس خط عمودي على القطر المار بطرف قوس متنا
الى ان يلاقى خطاً آخر مرسوماً من المركز الى الطرف الآخر من القوس وان كان القوس
٩٠ فلا يمكن ان يلتصقا ليكون الفاعط والمماس حينئذ عموديان على نصف القطر ولكن
لما كان مماس قوس يقرب الى ٩٠ الى غير نهاية بطول الا قليلاً الى غير نهاية فيسي
مماس ٩٠ غير متناه

ثم في الربع الثاني المماس اولاً غير متناه ثم يقل شيئاً فشيئاً الى ان يتلاشى عند د
ونظير المماس كالمماس بالقلب وهو اذا لاشي عند ب وح وغير متناه عند ا ود
(١٩٨) الفاعط يزيد مع زيادة المماس الى ان يصير غير متناه عند ب ثم يقل
الى د حيث $\frac{1}{\sin} = \frac{1}{\cos}$ وهكذا في الربع الثالث والرابع
نظير الفاعط ينصغر مع زيادة الفاعط وبالعكس فعند ب وح $\frac{1}{\sin} = \frac{1}{\cos}$ وعند ا
ود يصير غير متناه

(١٩٩) الجيب يزيد في الربع الاول الى ان $\frac{1}{\sin} = \frac{1}{\cos}$ عند ب ثم ينصغر شيئاً
فشيئاً الى ان يتلاشى عند د وهكذا في الربع الثالث والرابع
نظير الجيب ينصغر في الربع الاول ويتلاشى عند ب ثم يزيد الى ان $\frac{1}{\sin} = \frac{1}{\cos}$
عند د وهكذا في الربع الثالث والرابع

(٢٠٠) الجيب ونظير الجيب يتغيران من صفر الى $\frac{1}{\sin}$ ولا يزيدان على $\frac{1}{\sin}$
البتة. الفاعط ونظير الفاعط لا يكونان اقل من $\frac{1}{\sin}$ ولكن يزيدان عليه الى غير نهاية.
المماس ونظير المماس هما قيمتان مختلفتان من صفر الى غير نهاية

(٢٠١) قد وضعنا المحاصل ما سبق في هذا الجدول الدال على

علامات هذه الخطوط وقيمتها في كل ربع وهذه العلامة ∞ معناها غير متناهٍ

الربع الاول	الثاني	الثالث	الرابع
+	+	-	-
+	-	-	+
+	-	+	-
° ٩٠	° ١٨٠	° ٢٧٠	° ٣٦٠
٠	٠	ق $\frac{1}{2}$	٠
ق $\frac{1}{2}$	٠	ق $\frac{1}{2}$	ق $\frac{1}{2}$
٠	٠	∞	٠
∞	٠	∞	∞
ق $\frac{1}{2}$	∞	ق $\frac{1}{2}$	ق $\frac{1}{2}$
∞	ق $\frac{1}{2}$	∞	ق $\frac{1}{2}$

(٢٠٢) برى من مقابلة هذين الجدولين ان علامة كل خط تتغير من ايجاب الى سلب وعكسه في ذلك الربع من الدائرة الذي فيه نصير قيمته صفراً او غير متناهٍ

(٢٠٣) ليس في دائرة اكثر من ٣٦٠ ولكن قد يدور جرم دورات متتابعة في دائرة واحدة كدوران الارض حول الشمس ويقتضي احياناً في علم الهيئة ان نجتمع اجزاء دورات عديدة فيكون المجموع اكثر من ٣٦٠ والجرم الذي قد دار دائرته مرة ثم دار فيها ثانية انما ينتهي الى نقطة كان فيها في المرة الاولى فالجيب او المماس الخ لقوس اكبر من ٣٦٠ = الجيب او المماس الخ لقوس ما اصغر من ٣٦٠ وان اضيف الى قوس محيط كامل مرة او عدة مرات تنتهي القوس في النقطة التي انتهت اليها قبل الاضافة فان فرض ط = محيطاً كاملاً اي ٣٦٠ و ك = قوساً ما فلنا

ج ك = ج (ط + ك) = ج (٢ ط + ك) = ج (٢ ط + ك) الخ

م ك = م (ط + ك) = م (٢ ط + ك) = م (٢ ط + ك) الخ

(٢٠٤) الامروا نصح ايضاً انه في دورات مختلفة في دائرة واحدة

الربع الاول بطابق ٥ و ٩ و ١٢ و ١٧ الخ

الثاني ٦ و ١٠ و ١٤ و ١٨ الخ

الثالث ٧ و ١١ و ١٥ و ١٩ الخ

الرابع ٨ و ١٢ و ١٦ و ٢٠ الخ

(٢٠٥) ان حُسِبَت قوس من نقطة ما الى جهة ما ايجابية فالقوس

المتددة من تلك النقطة الى الجهة المتقابلة تحسب سلبية

مثالة (شكل ٢٢) ان حُسِبَت القوس اص ايجابية تكون اص

سلبية وهذه الاخيرة لا تنتهي في الربع الذي تنتهي فيه الاولى ويجب مطابقة

علامات الخطوط لذلك فيكون جيب اص ايجابياً وجيب اص

سلبياً (ع ١٩٤) وان طُرِحَت قوس كبرى من قوس صغرى فان كانت

الصغرى ايجابية يكون الباقي سلبياً

في عبارات دالة على الجيوب والمماسات الخ

(٢٠٦) قد اتضح مما سبق اقسام الدائرة التي فيها يزيد خط او

ينقص ولكن لا تعلم من ذلك قيماتها المختلفة الا في طرفي كل ربع والمطلوب

هو معرفة زيادتها او نقصانها بزيادة اقواسها او نقصانها ولو زادت او

نقصت الخطوط بالنسبة الى زيادة اقواسها او نقصانها لكان نحصيل

المطلوب سهلاً والامر ليس كذلك لانه ان تضاعف قوس لا يتضاعف

ماسه ولا جيبه ولا قاطعه وليس لنا سبيل الا ان نستعلم من الجيوب

ونظائر الجيوب لقوسين مفروضتين عبارات دالة على الجيوب ونظائر

- (١) س ح : س ق :: ح ن : ق ف اي $\frac{1}{f} ق : ن ج ب :: ج ا : ق ف$
 (٢) س ح : ق ل :: س ن : ب ل اي $\frac{1}{f} ق : ج ب :: ن ج ا : ب ل$
 (٣) س ح : س ق :: س ن : س ف اي $\frac{1}{f} ق : ن ج ب :: ن ج ا : س ف$
 (٤) س ح : ق ل :: ح ن : ق ب اي $\frac{1}{f} ق : ج ب :: ج ا : ق ب$
 بتحويل هذه النسب الى معادلات نصير

$$\begin{aligned} (١) \quad \frac{ج ا \times ن ج ب}{\frac{1}{f} ق} &= (٢) \quad \frac{ج ب \times ن ج ا}{\frac{1}{f} ق} = ب ل \\ (٢) \quad \frac{س ن \times ن ج ب}{\frac{1}{f} ق} &= س ف \quad (٤) \quad \frac{ق ب \times ج ا \times ج ب}{\frac{1}{f} ق} \\ \text{اجمع (١) و (٢)} \quad \frac{(ج ا \times ن ج ب) + (ج ب \times ن ج ا)}{\frac{1}{f} ق} &= ق ف + ب ل \\ \text{اطرح (٢) من (١)} \quad \frac{(ج ا \times ن ج ب) - (ج ب \times ن ج ا)}{\frac{1}{f} ق} &= ق ف - ب ل \\ \text{اطرح (٤) من (٢)} \quad \frac{(ن ج ا \times ن ج ب) - (ج ا \times ج ب)}{\frac{1}{f} ق} &= س ف - ق ب \\ \text{اجمع (٢) و (٤)} \quad \frac{(ن ج ا \times ن ج ب) + (ج ا \times ج ب)}{\frac{1}{f} ق} &= س ف + ق ب \end{aligned}$$

ويتضح من الشكل ان

$$\begin{aligned} ق ف + ب ل &= ب م + ب ل - ل م = جيب (أ + ب) \\ ق ف - ب ل &= ق ف - ق ص = د و = جيب (أ - ب) \\ س ف - ق ب &= س ف - ف م = س م = ن ج (أ + ب) \\ س ف + ق ب &= س ف + ص د = س و = ن ج (أ - ب) \end{aligned}$$

(١٢٨) بالتعويض عن الجانب الاول من المعادلات الاربع بقيمتي نصير

$$\begin{aligned} (١) \quad \frac{(ج ا \times ن ج ب) + (ج ب \times ن ج ا)}{\frac{1}{f} ق} &= جيب (أ + ب) \\ (٢) \quad \frac{(ج ا \times ن ج ب) - (ج ب \times ن ج ا)}{\frac{1}{f} ق} &= جيب (أ - ب) \end{aligned}$$

$$(٢) \text{ ن ج } (أ + ب) = (\text{ن ج } أ \times \text{ن ج } ب) - (\text{ج } أ \times \text{ج } ب)$$

ق

$$(٤) \text{ ن ج } (أ - ب) = (\text{ن ج } أ \times \text{ن ج } ب) + (\text{ج } أ \times \text{ج } ب)$$

ق

او بضرب الجانين في ق نصير

$$\frac{1}{ق} \times \text{ج } (أ + ب) = (\text{ج } أ \times \text{ن ج } ب) + (\text{ج } ب \times \text{ن ج } أ)$$

$$\frac{1}{ق} \times \text{ج } (أ - ب) = (\text{ج } أ \times \text{ن ج } ب) - (\text{ج } ب \times \text{ن ج } أ)$$

$$\frac{1}{ق} \times \text{ن ج } (أ + ب) = (\text{ن ج } أ \times \text{ج } ب) - (\text{ج } أ \times \text{ج } ب)$$

$$\frac{1}{ق} \times \text{ن ج } (أ - ب) = (\text{ن ج } أ \times \text{ج } ب) + (\text{ج } أ \times \text{ج } ب)$$

اي الحاصل من ق $\times$ جيب مجموع القوسين = الحاصل من جيب الاولى

$\times$ نظير جيب الثانية + الحاصل من جيب الثانية نظير جيب الاولى

والحاصل من ق $\times$ جيب فضلة القوسين = الحاصل من جيب الاولى $\times$ نظير

جيب الثانية - الحاصل من جيب الثانية $\times$ نظير جيب الاولى

والحاصل من ق $\times$ نظير جيب مجموع القوسين = حاصل نظير جيبها -

حاصل جيبها

والحاصل من ق $\times$ نظير جيب فضلة القوسين = حاصل نظير جيبها +

حاصل جيبها

هذه المعادلات الاربع هي اساس حساب الجيوب ونظائر الجيوب اي الحل

الزيفونوتي

عبارات دالة على جيب مضاعف قوس وعلى نظير جيبها

(٢٠٩) ان فرض جيب قوس ونظير جيبها يستعلم من المعادلات

المتقدمة عبارات دالة على الجيب ونظير الجيب لمضاعف تلك القوس

ويجوز ان يتعين للقوسين آ و ب اي طول كان فلنفرضها متساويتين

ثم بالتعويض عن ب بألف في المعادلة الاولى والثالثة تصيران

$\frac{1}{f} ق \times ج (أ + أ) = (ج أ \times ن ج أ) + (ج أ \times ن ج أ)$
 $\frac{1}{f} ق \times ن ج (أ + أ) = (ن ج أ \times ج أ) - (ج أ \times ج أ)$
 أي بكتابة ج^أ للدلالة على مربع جيب أ و ن ج^أ للدلالة على مربع نظير جيب أ
 أنصبران

$$(١) \frac{1}{f} ق \times ج أ = ج أ^2 \times ج أ \times ن ج أ$$

$$(٢) \frac{1}{f} ق \times ن ج أ = ن ج أ^2 - ج أ^2$$

عبارات دالة على جيب لصف قوس مفروضة ونظير جيبها

(٢١٠) لنفرض القوس في المعادلات السابقة نصف أ ثم بوضع $\frac{1}{f}$ عوضاً عن

أنصبران

$$\frac{1}{f} ق \times ج أ = ج أ^2 \times ج أ \times ن ج أ$$

$$\frac{1}{f} ق \times ن ج أ = ن ج أ^2 - ج أ^2$$

ثم اجعل مجموع مربعي الجيب ونظير الجيب = مربع $\frac{1}{f} ق$ (ع ٩٤) واقلب

المعادلة الأخيرة نصبران

$$ن ج أ^2 + ج أ^2 = \left(\frac{1}{f} ق\right)^2$$

$$ن ج أ^2 - ج أ^2 = \frac{1}{f} ق \times ن ج أ$$

ثم إن طرحت أحدهما من الأخرى يبقى ن ج^أ وان جيباً يبقى ج^أ أنصبران

$$ج أ^2 = \frac{1}{f} ق^2 - \left(\frac{1}{f} ق\right)^2 \times ن ج أ$$

$$ن ج أ^2 = \frac{1}{f} ق^2 + \left(\frac{1}{f} ق\right)^2 \times ن ج أ$$

اقسم على ٢ وجذرا الجانبيين نصبران

$$(١) ج أ = \sqrt{\frac{1}{f} ق^2 - \left(\frac{1}{f} ق\right)^2 \times ن ج أ}$$

$$(٢) ن ج أ = \sqrt{\frac{1}{f} ق^2 + \left(\frac{1}{f} ق\right)^2 \times ن ج أ}$$

عبارات دالة على الجيب ونظير الجيب لمتعدد قوس

مفروضة

(٢١١) قد استخراجنا عبارات دالة على مضاعف قوس من

العبارات في ٢٠٨ وهكذا نستعلم منها عبارات دالة على متعدد قوس

بوضع ٢ أو ٢ آ الخ عوضاً عن ب أو عن ب و آ معاً مثالة

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f} \times \text{ج} = \frac{1}{f} \times \text{ج} \times \frac{1}{f} \times \text{ج} &= (\text{ج} \times \text{ج} + \text{ج} \times \text{ج}) \\ \frac{1}{f} \times \text{ج} = \frac{1}{f} \times \text{ج} \times \frac{1}{f} \times \text{ج} &= (\text{ج} \times \text{ج} + \text{ج} \times \text{ج}) \\ \frac{1}{f} \times \text{ج} = \frac{1}{f} \times \text{ج} \times \frac{1}{f} \times \text{ج} &= (\text{ج} \times \text{ج} + \text{ج} \times \text{ج}) \end{aligned} \right\} \text{الخ}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f} \times \text{ج} = \frac{1}{f} \times \text{ج} \times \frac{1}{f} \times \text{ج} &= (\text{ج} \times \text{ج} + \text{ج} \times \text{ج}) \\ \frac{1}{f} \times \text{ج} = \frac{1}{f} \times \text{ج} \times \frac{1}{f} \times \text{ج} &= (\text{ج} \times \text{ج} + \text{ج} \times \text{ج}) \\ \frac{1}{f} \times \text{ج} = \frac{1}{f} \times \text{ج} \times \frac{1}{f} \times \text{ج} &= (\text{ج} \times \text{ج} + \text{ج} \times \text{ج}) \end{aligned} \right\} \text{الخ}$$

عبارات دالة على حاصل جيوب ونظائر جيوب

(٢١٢) نستعلم هذه العبارات بجمع المعادلات المذكورة في ٢٠٨

وطرح بعضها من بعض

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \times \text{ج} - (\text{ب} - \text{أ}) &= (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) \\ \frac{1}{f} \times \text{ج} - (\text{أ} - \text{ب}) &= (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) \\ \frac{1}{f} \times \text{ج} - (\text{أ} - \text{ب}) &= (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) \\ \frac{1}{f} \times \text{ج} - (\text{أ} - \text{ب}) &= (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) \end{aligned}$$

بجمع الاولى والثانية

$$\frac{1}{f} \times \text{ج} - (\text{أ} - \text{ب}) - (\text{أ} - \text{ب}) = \text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}$$

نطرح الثانية من الاولى

$$\frac{1}{f} \times \text{ج} - (\text{أ} - \text{ب}) - (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) = \text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}$$

بجمع الثالثة والرابعة

$$\frac{1}{f} \times \text{ج} - (\text{أ} - \text{ب}) - (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) - (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) = \text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}$$

نطرح الثالثة من الرابعة

$$\frac{1}{f} \times \text{ج} - (\text{أ} - \text{ب}) - (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) - (\text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}) = \text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج}$$

يقطب هذه المعادلات والقسمة على ٢ نصير

$$(١) \text{ج} \times \text{ج} - \text{ج} \times \text{ج} = \frac{1}{f} \times (\text{ج} \times \text{ج}) + (\text{أ} - \text{ب}) \times (\text{ج} \times \text{ج}) - (\text{أ} - \text{ب})$$

(٢) $\text{ج ب} \times \text{ن ج} \text{ أ} = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ج} (\text{أ} + \text{ب}) - \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ج} (\text{أ} - \text{ب})$
 (٣) $\text{ن ج} \text{ أ} \times \text{ن ج} \text{ ب} = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ن ج} (\text{أ} - \text{ب}) + \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ن ج} (\text{أ} + \text{ب})$
 (٤) $\text{ج أ} \times \text{ج ب} = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ن ج} (\text{أ} - \text{ب}) - \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ن ج} (\text{أ} + \text{ب})$
 (٢١٢) ان فرض $\text{ب} = \text{أ}$ يصير $\text{أ} + \text{ب} = \text{أ} + \text{أ} = ٢\text{أ}$ و $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} - \text{أ} = ٠$ وحينئذ
 = ٠ (ع ٢٠١) ونظير جيب ٠ = $\frac{1}{\text{ق}}$ فإذا $\frac{1}{\text{ق}} \times \text{ن ج} \text{ أ} = ٠$ ($\frac{1}{\text{ق}}$) ثم بتحويل
 هذه المعادلات نصير

الاولى $\text{ج أ} \times \text{ن ج} \text{ أ} = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ج} \text{ أ} \times ٢$
 الثالثة $\text{ن ج} \text{ أ} - \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ن ج} \text{ أ} \times ٢$
 الرابعة $\text{ج أ} - \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times \text{ج} \text{ أ} \times ٢$
 (٢١٤) لنفرض $\text{م} = \text{مجمع قوسين}$ وف = فصلتها فإذا $\frac{1}{\text{ف}} (\text{م} + \text{د}) =$
 = اكبرها و $\frac{1}{\text{ف}} (\text{م} - \text{د}) =$ اصغرها (ع ١٥٢)

ثم بالتعويض في المعادلات الأربع ابي بوضع م عوضاً عن $\text{أ} + \text{ب}$ ود عوضاً عن
 $\text{أ} - \text{ب}$ و $\frac{1}{\text{ف}} (\text{م} + \text{ف})$ عوضاً عن $\frac{1}{\text{ف}} (\text{م} - \text{ف})$ عوضاً عن ب نصير
 (١) $\text{ج} \frac{1}{\text{ف}} (\text{م} + \text{ف}) (\text{م} - \text{ف}) = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times (\text{ج م} + \text{ج ف})$
 (٢) $\text{ج} \frac{1}{\text{ف}} (\text{م} - \text{ف}) (\text{م} + \text{ف}) = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times (\text{ج م} - \text{ج ف})$
 (٣) $\text{ن ج} \frac{1}{\text{ف}} (\text{م} - \text{ف}) (\text{م} + \text{ف}) = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times (\text{ن ج م} + \text{ن ج ف})$
 (٤) $\text{ج} \frac{1}{\text{ف}} (\text{م} + \text{ف}) (\text{م} - \text{ف}) = \frac{1}{\text{ف}} (\frac{1}{\text{ق}}) \times (\text{ن ج م} - \text{ن ج ف})$
 او اجعل $\frac{1}{\text{ق}}$ انصير

(١) $\text{ج} (\text{أ} + \text{ب}) + \text{ج} (\text{أ} - \text{ب}) = \text{ج أ} \times ٢ + \text{ن ج ب}$
 (٢) $\text{ج} (\text{أ} + \text{ب}) - \text{ج} (\text{أ} - \text{ب}) = \text{ج أ} \times ٢ - \text{ن ج ب}$
 (٣) $\text{ن ج} (\text{أ} - \text{ب}) + \text{ن ج} (\text{أ} + \text{ب}) = \text{ن ج أ} \times ٢ + \text{ج ب}$
 (٤) $\text{ن ج} (\text{أ} - \text{ب}) - \text{ن ج} (\text{أ} + \text{ب}) = \text{ن ج أ} \times ٢ - \text{ج ب}$
 (٢١٥) ان فرض $\frac{1}{\text{ق}} =$ انصير المعادلاتان الاولتان في (ع ٢٠٨)

$\text{ج} (\text{أ} + \text{ب}) - \text{ج أ} \times ٢ + \text{ن ج ب} = \text{ن ج أ} \times ٢ - \text{ج ب}$
 $\text{ج} (\text{أ} - \text{ب}) - \text{ج أ} \times ٢ + \text{ن ج ب} = \text{ن ج أ} \times ٢ - \text{ج ب}$

بصرب احدهما في الاخرى نصير

$\text{ج} (\text{أ} - \text{ب}) \times \text{ج} (\text{أ} - \text{ب}) = \text{ج أ} \times \text{ن ج ب} - \text{ج ب} \times \text{ن ج أ}$
 ثم حسب (ع ٩٤) ان كان $\frac{1}{\text{ق}} = ١$ يصير

ن ج^أ ب = ا - ج^أ ب و ن ج^أ ا = ا - ج^أ ا
وبالتعويض عن ن ج^أ ب و ن ج^أ ا نصير
ج (أ + ب) × ج (أ - ب) = ج^أ (ا - ج^أ ب) - ج^أ (ا - ج^أ ب) × ج^أ ب
وبضرب اجزاء الجانب الثاني وحطها نصير
ج (أ + ب) × ج (أ - ب) = ج^أ (ا - ج^أ ب) - ج^أ (ا - ج^أ ب) × ج^أ ب
اولان فضلة مربعي كينين = مسطح مجنعهما في فضلتهما (ج ٨٩)
ج (أ + ب) × ج (أ - ب) = ج^أ (ا - ج^أ ب) - ج^أ (ا - ج^أ ب) × ج^أ ب
اي مسطح جيب مجنعه قوسين في جيب فضلتهما = مسطح مجنعه جيبهما
في فضلة جيبهما

عبارات دالة على مماسات اقواس

(٢١٦) تستخرج هذه العبارات من عبارات الجيوب ونظائرها.

حسب (ع ٩٣) النسبة الاولى

ا^ق : الماس : ن ج : ج

اي ا^ق = ج^ق / ج و ا^ق = ج^ق / ج = ج^ق / ج = ج^ق / ج

فماس (أ + ب) مثلاً = ا^ق × ج (أ + ب)
ن ج (أ + ب)

ثم ان عوض عن ج (أ + ب) و ن ج (أ + ب) بقيامتها حسب (ع ٢٠٨)

نصير م (أ + ب) = ا^ق (ج^ق × ج^ق + ج^ق × ج^ق)
ن ج^ق × ج^ق - ج^ق × ج^ق

(٢١٧) يدل في هذه العبارة على قيمة ماس مجنعه قوسين باجزاء

من الجيوب ونظائرها ولتحصيل عبارة دالة على ماس مجنعه قوسين في

اجزاء من الماس نقسم الصورة والمخرج من الجانب الثاني من المعادلة

الاخيرة على ن ج^ق × ن ج^ق فلا تتغير بذلك قيمة الكسور (ج ٤٦)

$$\begin{aligned} & \text{الصورة منسومة على } \text{ن ج أ} \times \text{ن ج ب} = \\ & \frac{\text{ق}^{\frac{1}{2}} \times (\text{ج أ} \times \text{ن ج ب} + \text{ج ب} \times \text{ن ج أ})}{\text{ن ج أ} \times \text{ن ج ب}} \times \text{ق}^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ج أ} + \text{ج ب}}{\text{ن ج أ} + \text{ن ج ب}} \times \text{ق}^{\frac{1}{2}} \\ & \text{م أ} + \text{م ب} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{المخرج منسوم على } \text{ن ج أ} \times \text{ن ج ب} = \\ & \frac{\text{ن ج أ} \times \text{ن ج ب} - \text{ج أ} \times \text{ج ب}}{\text{ن ج أ} \times \text{ن ج ب}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ن ج ب}} \times \frac{\text{ج أ}}{\text{ن ج أ}} - 1 = \frac{\text{أ}}{\text{ق}^{\frac{1}{2}}} - 1 \\ & \frac{\text{م ب}}{\text{ق}^{\frac{1}{2}}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{فماس } (\text{أ} + \text{ب}) = \text{م أ} + \text{م ب} \\ & 1 - \frac{\text{م أ} \times \text{م ب}}{(\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2} \end{aligned}$$

لازالة (ق^{1/2}) من المخرج اضرب الصورة والمخرج فيه وإذا استعملنا ماس أ - ب حسباً تقدم لنا

$$\begin{aligned} (1) \quad (218) \quad & \frac{(\text{م أ} + \text{م ب}) \times (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2}{\text{م أ} \times \text{م ب} - (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2} = (\text{أ} + \text{ب}) \text{ م} \\ (2) \quad & \frac{(\text{م أ} - \text{م ب}) \times (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2}{\text{ق}^{\frac{1}{2}} + \text{م أ} \times \text{م ب}} = (\text{أ} - \text{ب}) \text{ م} \end{aligned}$$

ان فرست مساواة القوسين أ و ب ثم بوضع $\frac{1}{2}$ أ $\frac{1}{2}$ ب $\frac{1}{2}$ ج $\frac{1}{2}$ د كما تقدم في (عد ٢١٠ و ٢١١) نصير

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2} \text{ م} \times (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2}{\frac{1}{2} \text{ م} - (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2} = (\frac{1}{2} \text{ أ} + \frac{1}{2} \text{ ب}) \text{ م} \\ & \frac{\frac{1}{2} \text{ م} \times (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2}{\frac{1}{2} \text{ م} - (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2} = (\frac{1}{2} \text{ أ} - \frac{1}{2} \text{ ب}) \text{ م} \\ & \frac{(\frac{1}{2} \text{ م} + \frac{1}{2} \text{ م}) \times (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2}{\frac{1}{2} \text{ م} \times \frac{1}{2} \text{ م} - (\text{ق}^{\frac{1}{2}})^2} = (\frac{1}{2} \text{ أ} + \frac{1}{2} \text{ ب}) \text{ م} = \frac{1}{2} \text{ م} \end{aligned}$$

(٢١٩) ان قسمنا المعادلة الاولى في (ع ٢١٤) على الثانية وطرحنا (ق^١/_٢) من الصورة والمخرج نصير

$$\frac{ج}{٢} (م + ف) \times \frac{ن}{٢} (م - ف) = ج + م$$

$$\frac{ج}{٢} (م - ف) \times \frac{ن}{٢} (م + ف) = ج - م$$

والجواب الاول من هذه المعادلة (ج ٥٤) =

$$\frac{ج}{٢} (م + ف) \div \frac{ن}{٢} (م - ف) = \frac{م}{٢} (م + ف) \div \frac{ق}{٢} (م - ف)$$

حسب (ع ٢١٦) فادًا

$$\frac{ج}{٢} + ج = \frac{م}{٢} (م + ف)$$

$$ج - م = \frac{م}{٢} (م - ف)$$

(٢٢٠) حسب ٢١٤ م = مجموع قوسين وف = فصلتهما والامر واضح انه يمكن فرض اقواس مجتمعا = أ وفصلتهما = ب على شرط كون أ اكبر من ب ثم بالتعويض في المعادلة السابقة بوضع أ عوضاً عن م و ب عوضاً عن ف نصير

$$\frac{ج}{٢} + ج = \frac{م}{٢} (أ + ب)$$

$$\frac{ج}{٢} - ج = \frac{م}{٢} (أ - ب)$$

$$\frac{ج}{٢} + ج : \frac{ج}{٢} - ج = \frac{م}{٢} (أ + ب) : \frac{م}{٢} (أ - ب)$$

اي نسبة مجموع جيبى قوسين او زاويتين : فصلتهما :: ماس نصف مجموع القوسين او الزاويتين : ماس نصف فصلتهما. ثم حسب (ع ١٢٢) نسبة اضلاع مثلث بعضها الى بعض كسبة جيوب رواياه المتقابلة فنسبة مجموع ضلعي مثلث : فصلتهما :: ماس مجموع الزاويتين المتقابلتين للصلعين : ماس فصلتهما وقد تبهرن ذلك (ع ١٤٤) على طريقة هندسية

نُستخرج عبارات دالة على نظير الماس حسب (ع ٩٢)

$$ن = م \div \frac{(ق^١/٢)}{٢}$$

$$ن (أ - ب) = \frac{(ق^١/٢)}{٢} \div \frac{(ق^١/٢) - م \times م}{٢} \quad (ع ٢١٨)$$

$$\frac{(ق^١/٢)}{٢} \div \frac{(ق^١/٢) - م \times م}{٢} = \frac{(ق^١/٢)}{٢} \div \frac{(ق^١/٢) - م \times م}{٢}$$

$$\frac{(\frac{1}{f}ق)}{ن م ب} \times \frac{(\frac{1}{f}ق)}{ن م آ} - (\frac{1}{f}ق) = (أ + ب) م$$

$$\frac{(\frac{1}{f}ق)}{ن م ب} + \frac{(\frac{1}{f}ق)}{ن م آ}$$

اضرب الصورة والمخرج في $ن م آ \setminus ن م ب$ واقسم على $(\frac{1}{f}ق)$ وافعل كما
لنقدم في م (أ - ب) نصير

$$(1) \quad ن م (أ - ب) = ن م آ \times ن م ب - (\frac{1}{f}ق)$$

$$ن م ب + ن م آ$$

$$(2) \quad ن م (أ - ب) = ن م آ \times ن م ب + (\frac{1}{f}ق)$$

$$ن م ب - ن م آ$$

(٢٢٠) بَدَلْ على ماس مجتميع قوسين او فضلتها باجزاء من نظير الماس .

لنغرض $\frac{1}{f}ق =$ افلما حسب (عد ٩٢ و ٢٢٠)

$$(1) \quad م (أ + ب) = \frac{1}{ن م ب + ن م آ}$$

$$ن م (أ + ب) = ن م آ \times ن م ب - 1$$

$$(2) \quad م (أ - ب) = \frac{1}{ن م ب - ن م آ}$$

$$ن م (أ - ب) = ن م آ \times ن م ب + 1$$

وحسب (عد ٢٠٨)

$$ج (أ + ب) = ج آ \times ج ب + ج آ \times ج ب$$

$$ج (أ - ب) = ج آ \times ج ب - ج آ \times ج ب$$

اقسم الجواب الثاني أولاً على $ج ب \setminus ج آ$ ثم على $ج آ \setminus ج ب$ نصير

$$ج (أ + ب) = م آ \times م ب + م آ \times م ب$$

$$ج (أ - ب) = م آ \times م ب - م آ \times م ب$$

وهكذا نقسم العبارة الدالة على نظير الجيوب أولاً على $ج ب \setminus ج آ$ ثم على $ج آ \setminus ج ب$

$\times ج ب$ نصير

$$ن ج (أ + ب) = ن م ب - م آ = ن م آ - م ب$$

$$ن ج (أ - ب) = ن م ب - م آ = ن م آ + م ب$$

اقسم العبارة الدالة على ماس آ (عد ٢١٨) على ماس $\frac{1}{f}ق$ نصير

$$\frac{2}{\frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m} = \frac{2}{\frac{1}{r}m} = \frac{2r}{m}$$

تكثر هذه العبارات الى غير نهاية وقد وضعنا هنا عشر عبارات بدون براميتها
تمريناً للتعليم

$$(1) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \quad (2) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m$$

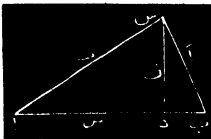
$$(3) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \quad (4) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m$$

$$(5) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \quad (6) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m$$

$$(7) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \quad (8) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m$$

$$(9) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \quad (10) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m$$

عبارات دالة على مساحة مثلث في اجزاء من اضلاعه



(٢٢١) ليكن ا ب س مثلثا والضلوع
ب س = ا و ا س = ب و ا ب = س
وس د = ف و ا د = د ومساحة المثلث = م

شكل ٢٤

$$\text{ثم } \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \quad (2) \frac{1}{r}m = \frac{1}{r}m - \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m$$

$$\frac{(1/r)m - (1/r)m + (1/r)m}{(1/r)m} = \frac{(1/r)m}{(1/r)m}$$

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك)

$$\frac{(1/r)m - (1/r)m + (1/r)m}{(1/r)m} = \frac{(1/r)m}{(1/r)m}$$

بتحويل المعادلة وتجذير الجانبيين نصير

$$ف = \frac{١}{٤} (٤ ب س - (ب + س - آ)^2)$$

الزوايا منفرجة $٢ س$ وهذه العبارة تصح أيضاً اذا كانت

فلنا طول العمود في اجزاء من اضلاع المثلث والمساحة = مسطح القاعدة

$$X \frac{1}{4} (٢٧١) اي م = \frac{1}{4} س ف = \frac{1}{4} (٤ ب س - (ب + س - آ)^2)$$

وفي عبارة دالة على مساحة مثلث في اجزاء من اضلاعه وقد تحول الى صورة ابسط العمل بها اسهل . فالعبارة تحت علامة الجذر هي فضلة مربعين اي $٤ ب س$ و $(ب + س - آ)^2$ وذلك = الحاصل من مجموع الجذرين في فصلتها (ج ٨٩) فيعمل هذان المربعان الى ضلعين هما

$$٢ ب س + (ب + س - آ) = (ب + س - آ) - ٢ ب س$$

$$٢ ب س - (ب + س - آ) = (ب + س - آ) - ٢ ب س$$

وهكذا $(ب + س - آ) - ٢ ب س$ و $(ب + س - آ) - ٢ ب س$ وهما فضلة مربعين فيتحلان الى ضلعين هكذا

$$(ب + س - آ) - ٢ ب س = (ب + س - آ) \times (ب + س - آ)$$

$$٢ ب س - (ب + س - آ) = (ب + س - آ) \times (ب + س - آ)$$

عوض بهن الاضلاع الاربعة في المعادلة المذكورة نصير

$$م = \frac{1}{4} (ب + س - آ) \times (ب + س - آ) \times (ب + س - آ) \times (ب + س - آ)$$

وهكذا ان كان المثلث ذا زاوية منفرجة

فلاضلاع الثلاثة $آ ب س$ داخله في كل جزء من العبارة

ثم لنفرض $ن = \frac{1}{4} (آ + ب + س)$ اي نصف مجموع الاضلاع فبالنعويض

$$م = \frac{1}{4} ن (ن - آ) \times (ن - ب) \times (ن - س)$$

(٢٢٢) لنا ما سبق هذه القاعدة لاستعلام مساحة مثلث اذا

فُرِضَت الاضلاع الثلاثة

من نصف مجموع الاضلاع اطرح كل ضلع على حدته واضرب

البواقي الثلاث بعضها في بعض وفي نصف مجموع الاضلاع وخذ جذر

الحاصل المائي فهو مساحة المثلث

الفصل الثامن

في كيفية اصطناع القانون التريغونومتري أي جداول الجيوب والمماسات الخ
(٢٢٢) القانون التريغونومتري هو عدة جداول منحوية على الجيب
ونظيره والمماس الخ لكل درجة من ربع الدائرة وفي اصطناعها يستعلم
أولاً الجيب ونظيره لدقيقة واحدة ثم بالجمع أو الضرب تستعلم الجيوب
ونظائرها الخ لاقواس أطول ويبدأ بقوس بين جيبه أو نظير جيبه ونصف
القطر نسبة معلومة وقد تقدم (ع ٩٦ فرع) ان نظير جيب ٦٠ = نصف
ق وقد ذكرت عبارة دالة على نظير جيب نصف قوس اذا علم نظير
جيب القوس (ع ٢١٠) فان انتصف قوس ٦٠ ثم انتصف نصفه
وهلم جرا نصير

٢	٢٠	٥٦	١٥	١	٥٢	٢٠	٦٠
١	٤٥	٢٨	٧	٢٠	٥٦	١٥	٢٠
١٠	٥٢	٤٤	٢	٤٥	٢٨	٧	١٥
				١٤	٢	٤٥	٧
				٧	١	٥٢	٢٠

ثم حسب العبارة الثانية (ع ٢١٠)

$$ج \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \left(\frac{1}{f} \right) + \frac{1}{f} \left(\frac{1}{f} \right) \times ن ج أ$$

$$ثم لنفرض \frac{1}{f} ق = ١ - أ = ٦٠ = ب = ٢٠ = س = ١٥ = د = ٧ = ٢٠ = ي$$

الخ اذا

$$ن ج ب = ن ج \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \times \frac{1}{f} = ٨٦٦٠٢٥٤$$

$$ن ج س = ن ج \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \times \frac{1}{f} + \frac{1}{f} = ٩٦٥٩٢٥٨$$

$$ن ج د = ن ج \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \times \frac{1}{f} + \frac{1}{f} = ٩٩١٤٤٤٩$$

$$ن ج ي = ن ج \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \times \frac{1}{f} + \frac{1}{f} = ٩٩٧٨٥٨٩$$

(٢٢٦) جيوب الاقواس ونظائرها الواقعة بين 30° و 60°
 تُستخرج بالطرح فقط لان 2 جيب $30^\circ = \frac{1}{2}$ ق (ع ٩٦) فان فرض α
 $= 30^\circ$ تصير المعادلة الاولى في (ع ٢٢٤) ج $(30^\circ + \beta)$
 $=$ ن ج $\beta -$ ج $(30^\circ - \beta)$

ثم اجعل ب = ا' و ا' و ا' الخ بالتتابع يكون لنا

ج. ٢٠. ١' = ن ج ١' - ج ٢٩ ١٠'

$$ج. ٢٠. ١ = ٢٠ ج. ١ - ٢٠ ج. ٢٠. ١٠٨$$

وبعد حساب جيوب الاقواس بين 30° و 60° يكون لنا منها نظائرها لان
 جيوب الاقواس بين 30° و 45° هي نظائر الجيوب للاقواس بين 45°
 و 60° وجيوب الاقواس بين 45° و 60° هي نظائر الجيوب للاقواس بين
 30° و 45° (ع ٩٦)

(٢٢٧) هذه هي كيفية استخراج الجيوب ونظائرها الطبيعية وانساب

هذه الجيوب باضافة ١٠ الى الدليل هي الجيوب ونظائرها النسبية (عد
١٠٢ و ١٠٣)

(٢٢٨) الماسات والنواضع ونظائرها تُستخرج من الجيوب ونظائرها

لأنه حسب (ع ٩٢)

ق:ن ج:م ج و ق:ج ن:م ن:ج

و ن ج : ق : ق : فا و ج : ق : ق : ن فا

فالماس = $\frac{1}{2}$ ق × ج نظير الماس = $\frac{1}{2}$ ق × ن ج

$$\frac{\text{ج} \text{ (ق) }^{\text{ج}}}{\text{ج}} = \text{وظير الفاعل} \quad \frac{\text{ن ج} \text{ (ق) }^{\text{ن ج}}}{\text{ن ج}} = \text{الفاعل}$$

وإذا أُتِمَّ العمل بالانساب

الماس = 10 + ج - ن ج

نظير الماس = $10 + \text{ن ج} - \text{ج}$
 الناطع = $20 - \text{ن ج}$ نظير الناطع = $20 - \text{ج}$

الفصل التاسع

طرق خصوصية لحل بعض المسائل في حساب المثلثات المستوية

(٢٢١) تحل كل مسائل حساب المثلثات المستوية بواسطة

النظريات المذكورة في فصل ٢ و ٤ في هذا الفصل نذكر بعض الطرق
 الآخر بها يسهل العمل أحياناً ويدقق في الجواب

ان فضلة جيوب الزوايا بقرب ٩٠ وفضلة نظائر الجيوب بقرب ٠
 قليلة جداً فمن الاعتماد عليها يقع خطأ في الجواب مقداره بعض الثواني
 فيجب تغيير العمل حتى لا تستعلم زاوية صغيرة بواسطة نظير جيوبها ولا
 زاوية قريبة من ٩٠ بواسطة جيوبها

ان فضلة المماسات النسبية ونظائرها هي على أقلها عند ٤٥ وتزيد
 الى طرفي ربع الدائرة وفي الجداول التي فيها سبع منازل من الكسور
 العشرية تكون أقل الفضلة بين ثانية وثانية ٤٢ فتستعلم اية زاوية فرضت
 بمواسطة ماسها بدون ان يقع في الجواب خطأ أكثر من ثانية واحدة ان
 تقيدت في الجداول ماسات الثواني

ثم ان فضلة الجيوب النسبية والمماسات النسبية في اول الربع وفضلة
 المماسات ونظائر الجيوب في آخر اي بقرب ٩٠ يختلف جداً حتى لا يصح
 استعمال زواياها بالتدقيق بواسطة الاجزاء النسبية للفضلات بينها فقد
 وضعنا هنا بعض القواعد

لاستعلام جيب الزوايا الصغار ومماساتها بالتدقيق

لكي تستعلم الجيب النسبي لقوس صغيرة

حوّل القوس المفروضة الى ثواني وكسور عشرية من الثواني وخذ

نسبة واضف اليه ٤٦٨٥٥٧٤٩ واطرح من المجموع ثلث المثلث الحسابي

لنظير جيب القوس المفروضة النسبي

لكي تستعلم المماس النسبي لقوس صغيرة

حوّل القوس الى ثواني وكسور كما تقدم واضف الى نسبة ٤٦٨٥٥٧٤٩

واضف الى المجموع ثلثي المثلث الحسابي لنظير جيبها النسبي

لكي تستعلم قوساً صغيرة من جيبها النسبي

اضف الى النسب المفروض ٥٢١٤٤٢٥١ واضف الى المجموع ثلث

المثلث الحسابي لنظير الجيب النسبي واطرح من المجموع ١٠ فيكون الباقي

نسب الثواني في القوس المفروضة

لكي تستعلم قوساً صغيرة من مماسها النسبي

اضف الى المماس المفروض ٥٢١٤٤٢٥١ واطرح من المجموع ثلثي

المثلث الحسابي لنظير الجيب النسبي واطرح من الباقي ١٠ فالباقي نسب

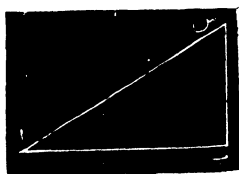
عدد الثواني في القوس

(٢٤٢) هاك بعض العبارات لحل مسائل مثلثات قائمة الزاوية

بالتدقيق بواسطة استعمال جيب نصف قوس او مماسه

شكل

٢٦



في المثلث ا ب س (شكل ٢٦) اجل

اس : اق فنسبة

اس : اب :: ا : ب ج ا

و ي طرح التاليين من السابقين (ج ١٨٨)

اس : اس - اب :: ا : ا - ن ج ا

$$\frac{\text{اس} - \text{اب}}{\text{اس}} = \frac{1 - \text{ن ج ا}}{1} = \frac{1}{1} \text{ ج } \frac{1}{1} \text{ (ع ٢١٠)}$$

$$\frac{\text{اس} - \text{اب}}{\text{اس}} = \frac{1}{1} \text{ ج } \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \text{ ج } \frac{1}{1}$$

ثم يجمع اجزاء النسبة المذكورة وطرحها (ج ١٨٨)

اس + اب : اس - اب :: ا + ن ج ا : ا - ن ج ا

$$\frac{\text{اس} - \text{اب}}{\text{اس} + \text{اب}} = \frac{1 - \text{ن ج ا}}{1 + \text{ن ج ا}} = \frac{1}{1} \text{ ماس } \frac{1}{1} \text{ (ع ٢٢٠)}$$

$$\frac{\text{اس} - \text{اب}}{\text{اس} + \text{اب}} = \frac{1}{1} \text{ ماس } \frac{1}{1}$$

(٢٢٢) احياناً يُفرض جزء واحد من مثلث قائم الزاوية فضلاً

عن القائمة ومجموع جزءين آخرين او فضلتهما فتتخل المسئلة حينئذٍ بهذه

النسب

$$\frac{\text{اس} - \text{اب}}{\text{اس} + \text{اب}} = \frac{1}{1} \text{ م } \text{ (١) حسب العبارة المذكورة انما}$$

وحسب (ع ١٤٠ و ١٤١) (٢) ب س = (اس - اب) × (اس + اب)

نضرب احدى المعادلتين في الاخرى ونجذب برصيد

$$\frac{1}{1} \text{ م } \times \text{ب س} = \text{اس} - \text{اب} \text{ وبالتحويل الى نسبة}$$

$$\text{ (١) م } \frac{1}{1} : 1 :: \text{اس} - \text{اب} : \text{ب س}$$

اي نسبة ماس نصف احدى الزاويتين المحاذيتين الى ا :: فضلة الوتر والضلع

عند تلك الزاوية : الضلع الآخر

ثم بقسمة المعادلتين عوضاً عن ضربها نصير

$$\frac{1}{1} \text{ م } = \frac{1}{1} \text{ م } \text{ وبالتحويل الى نسبة}$$

$$\text{ (٢) م } 1 : 1 :: \text{اس} + \text{اب} : \text{ب س}$$

ايضاً في المثلث ا ب س (شكل ٢٦) ا ب : ب س :: ١ : ماس ا
وبالمجمع والطرح ا ب + ب س : ا ب - ب س :: ١ + ماس ا : ١ - ماس ا

$$\frac{١ - م}{١ + م} : ١ :: ب س : ا ب - ب س$$

ثم حسب (ع ٢١٨) ان كانت احدى الافواس ١ والاخرى ٤٥° التي ماسها
= $\frac{١}{٢}$ ق لنا

$$\frac{١ - م}{١ + م} = (١ - ٤٥) ماس$$

وبالتحويل الى نسبة

$$(٢) ١ : م :: (١ - ٤٥) : ا ب + ب س : ا ب - ب س$$

اي نسبة واحد الى ماس فضلة ٤٥° واحدى الزاويتين الحادتين :: مجموع
الساقين الى فضلتهما

مثال اول . في مثلث قائم الزاوية فضلة الوتر والقاعدة ٦٤ والزاوية عند القاعدة
٢٢ $\frac{١}{٢}$ مطلوب الساق

الجواب ٢١١

٢ مجموع الوتر والقاعدة = ١٨٥'٢ والزاوية عند القاعدة ٢٧° مطلوب الساق

الجواب ٦٢٠

٣ معروض مجموع القاعدة والساق = ١٢٨'٤ والزاوية عند القاعدة = $\frac{١}{٢}$ ٤١°
مطلوب الاضلاع

١ : م :: (٤٥ - $\frac{١}{٢}$ ٤١) :: ١٢٨'٤ : ٨'٤ = فضلة القاعدة والساق ثم
نصف النصلة مع نصف المجموع = القاعدة = ٦٨'٤ ونصف الفضلة الا نصف المجموع
= الساق = ٦٠

٤ معروض مجموع الوتر والساق = ٨٢ والزاوية عند الساق = ٤٠° مطلوب
القاعدة

٥ معروض فضلة الوتر والساق = ١٦'٥ والزاوية عند الساق = $\frac{١}{٢}$ ٢٧°
مطلوب القاعدة

٦ معروض فضلة القاعدة والساق = ٢٥ والزاوية عند الساق = $\frac{١}{٢}$ ٢٧°
مطلوب الاضلاع

(٢٣٤) في المثلثات غير القائمة الزاوية ان فُرض ضلعان والزاوية بينهما او ان فُرضت الاضلاع الثلاثة حسب المفروض الثالث والرابع (ع ١٥٢ و ١٥٤) فلنا خمس نظريات خصوصية لحل مسائلها ونارة تستعمل هذه واخرى تلك حسب المطلوب في المسئلة

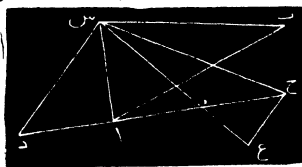
في المفروض الثالث (ع ١٥٢)

في علم الهيئة يُفرض احياناً نسب ضلعي مثلث فبواسطة النظرية الآتية تحل المسئلة بدون استخراج الاعداد الطبيعية التي تخص تلك الانساب

نظرية ١

في كل مثلث مستوٍ ان فُرضت زاوية والضلعان المحيطان بها تكون نسبة اصغرها : اكبرها :: ق : ماس زاوية اكبر من ٤٥
ونسبة ق : زيادة تلك الزاوية فوق ٤٥ :: ماس نصف مجتمع الزاويتين المتقابلتين : ماس نصف فضلتهما

في المثلث ا ب س (شكل ٢٧) لي فرض اس و ا ب والزاوية س ا ب من ا ا رسم د ح عموداً على اس واجعل ا د و ا ف = اس واح = اب وليكن ح غ عموداً على خط مرسوم من س ماراً بنقطة ف فتكون سبة



شكل ٢٧

اس : اب :: ق : ماس اس ح
وق : ق : م (اس ح - ٤٥) :: م (اس ب + ب) : م (اس ب - ب)

البرهان

في المثلث اس د القائم الزاوية ا د = اس فكل واحدة من الزاويتين الحادتين ا د س د س ا = ٤٥° ولهذا السبب نفس كل واحدة من الزاويتين اس ف

س ف ا = ٤٥° فالزاوية د س ف قائمة وكل واحدة من الزاويتين غ ف ح
ف ح غ = ٤٥° و غ ح = غ ف و يوازي س د

ثم في المثلث اس ح ان جعل اس ١ ق يكون اح الذي يساوي اب
ماس الزاوية اس ح فنسبة

$$\text{اس : اب} :: \frac{1}{\text{ق}} : \text{م} \text{ اس ح}$$

وفي المثلث س غ ح ان جعل س غ ١ ق يكون غ ح الذي يساوي
ف ع ماس الزاوية ح س غ فنسبة

$$\frac{1}{\text{ق}} : \text{م} (\text{اس ح} - ٤٥^\circ) :: \text{س غ} : \text{غ ف} \text{ ولان غ ح يوازي س د}$$

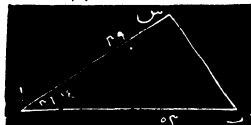
(اقليدس ق ٢ ك ٦) نسبة

$$\text{س غ} : \text{ف غ} :: \text{د ح} : \text{ف ح}$$

وقد رُسم د ح = مجموع اس واب و ف ح = فضلة اس واب
وحسب النظرية الثانية (ع ١٤٤) نسبة مجموع الصلحين : فضلتهما :: ماس نصف
مجموع الزاويتين المتقابلتين : ماس نصف فضلتهما فنسبة

$$\frac{1}{\text{ق}} : \text{م} (\text{اس ح} - ٤٥^\circ) :: \frac{1}{\text{ق}} \text{ م} (\text{اس ب} + \text{ب}) : \frac{1}{\text{ق}} \text{ م} (\text{اس ب} - \text{ب})$$

شكل ٢٨



مثالة . في المثلث ا ب س

(شكل ٢٨) مفروض الزاوية ا =

$$٢٦^\circ \text{ ' } ١٤ \text{ ' } \text{ والضلع اس} = ٢٩$$

والضلع اب = ٥٢

$$\text{اس} = ٢٩ = ١' ٥٩١٠٦٤٦$$

$$\text{اب} = ٥٢ = ١' ٧٣٤٢٧٥٩$$

$$\frac{1}{\text{ق}} = ١٠$$

$$\text{ماس } ٥٢ \text{ ' } ٢٩ \text{ ' } ٩ = ١٠' ١٢٢٢١١٢$$

ثم حسب النسبة الاخيرة

$$\frac{1}{\text{ق}} = ١٠' ٠٠٠٠٠٠$$

$$\text{م } ٨ \text{ ' } ٢٩ \text{ ' } ٩ = ٩' ١٨٢٢٢٨١ \text{ و م } \frac{1}{\text{ق}} (\text{ب} + \text{س}) \text{ اي}$$

$$\text{م } ٧٦ \text{ ' } ٥٢ = ١٠' ٦٣٢٦١٨١$$

$$\text{م } ٢٢ \text{ ' } ٨ \text{ ' } ٥٠ = ٩' ٨١٤٩٥٦٢$$

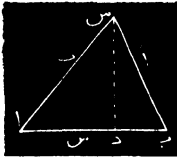
$$\frac{1}{\text{ق}} (\text{ب} - \text{س})$$

فلما جمع الزاويتين وفضلتهما كما في النظرية الثانية (ع ١٢٥)
لكي يستعلم الضلع المطلوب حسب النظريات في الفصل الرابع
يقضي أولاً استعمال الزاوية المقابلة أحد الضلعين المفروضين. ويستعلم
ذلك الضلع بدون هذه الوسطة بالنظرية الآتية

نظرية ب

في كل مثلث مستوٍ نسبة مضاعف حاصل ضلعين : فضلة جنم
مربعيهما ومربع الضلع الثالث :: $\frac{1}{2} ق : \frac{1}{2} ق$: نظير جيب الزاوية الواقعة بين
الضلعين

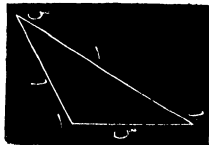
شكل ٣٩



في المثلث ا ب س (شكل ٣٩) اضلاعه
ا ب ٢ و س ٣ و ب س ٢ ب' + س' - ا' = ١
 $\frac{1}{2} ق : \frac{1}{2} ق$ ن ج ا لانه في المثلث ا س د القام
الزاوية ب' د' :: $\frac{1}{2} ق : \frac{1}{2} ق$ ن ج ا

اضرب في ٢ س
ا ب س : ٢ د س :: $\frac{1}{2} ق : \frac{1}{2} ق$ ن ج ا
حسب (اقليدس ق ١٢ ك ٢) $٢ د س = ب' + س' - ا'$
نسبة $٢ ب س : ٢ ب' + س' - ا' :: \frac{1}{2} ق : \frac{1}{2} ق$ ن ج ا

شكل ٤٠



وهكذا ان كانت الزاوية ا معرجة كما
في مثلث ا ب س (شكل ٤٠) غير ان ا'
يكون اعظم من ب' س' حسب (اقليدس

ق ١٢ ك ٢) فيكون نظير جيب اسلياً انظر (ع ١٩٤)

من هذه النظرية تستخرج عبارات دالة على اضلاع مثلث ونظائر
جيوب زواياه فان نحوئت النسبة الاخيرة الى معادلة وأجري كما تقدم في
بقية الاضلاع والزوايا تخرج هذه العبارات

للزوايا	للأضلاع
ن ج ا = $\frac{1}{2} ق \times \frac{ب^2 + س^2 - أ^2}{2 ب س}$	ا = $\frac{ب^2 + س^2 - أ^2}{2 ق}$
ن ج ب = $\frac{1}{2} ق \times \frac{أ^2 + س^2 - ب^2}{2 أ س}$	ب = $\frac{أ^2 + س^2 - ب^2}{2 ق}$
ن ج س = $\frac{1}{2} ق \times \frac{أ^2 + ب^2 - س^2}{2 أ ب}$	س = $\frac{أ^2 + ب^2 - س^2}{2 ق}$

هذه العبارات مفيدة أحياناً في حساب المثلثات ولكن قلما تصلح لأجراء العمل بواسطة الانساب

المفروض الرابع

ان فرضت أضلاع مثلث الثلاثة تستعلم الزوايا باحد من النظريات الثلاث الآتية ولنفرض مثلثاً أضلاعه أ و ب و س كما تقدم والزوايا المقابلة هذه الأضلاع ا و ب و س ولنعرض $\frac{1}{2} =$ مجموع الأضلاع

نظرية ج

$$\text{جيب ا} = \frac{\frac{1}{2} ق}{ب س} \times \frac{ب (ن - ا) (ن - ب) (ن - س)}{2}$$

$$\text{جيب ب} = \frac{\frac{1}{2} ق}{أ س} \times \frac{أ (ن - ا) (ن - ب) (ن - س)}{2}$$

$$\text{جيب س} = \frac{\frac{1}{2} ق}{أ ب} \times \frac{ب (ن - ا) (ن - ب) (ن - س)}{2}$$

في المثلث اس د (شكل ٢٩) بسطه

$\frac{1}{2} ق : ب :: ج : ا$ ف وبالتحويل

$$ج \times ا = ب \times \frac{1}{2} ق \text{ وحسب (ع ٢٢١)}$$

$$ف = \frac{ب (ب^2 + س^2 - أ^2)}{2 ق}$$

س

ونحويل هذه المعادلة حسباً ذكر في آخر الفصل السابع نصير .

$$ف = ٢٦ \times ٢ \times (ن - أ) \times ٢ \times (ن - ب) \times ٢ \times (ن - س)$$

عوض عن ف بهذه القيمة واقسم على المسمى نصير

$$ج = \frac{٢٦ \times ٢}{٢٦ \times ٢ \times (ن - أ) \times ٢ \times (ن - ب) \times ٢ \times (ن - س)}$$

ونتم الحساب بواسطة هذه المعادلة بجميع انساب الكميات تحت علامة الجذر وقسمه
المجموع على ٢ للتجذير والى الخارج اضف نسب ١ ق والمتم الحسابى لنسبى ب و س
(عد ٢٩ و ٤٧ و ٥٩)

مثال . مفروض أ = ١٢٤ ب = ١٠٨ و س = ٨٠ مطلوب الزوايا ا

و ب و س

لاستعلام الزاوية ا

$$ن = ١٦١ \text{ سب } ٢٢٠٦٨٢٥٩$$

$$ن - أ = ٢٧ \text{ سب } ١٤٣١٢٦٢٨$$

$$ن - ب = ٥٢ \text{ سب } ١٧٢٤٢٧٥٩$$

$$ن - س = ٨١ \text{ سب } ١٩٠٨٤٨٥٠$$

$$٢) ٧٢٧٠٩٥٠٦$$

$$٢) ٧٢٧٠٩٥٠٦ = \text{نسب مساحة المثلث (عد ٢٢٢)}$$

$$١٠٢٠١٠٢٠٠ \times ٢ \text{ ق}$$

$$١٢٢٦٥٠٥٢$$

$$٧٢٦٦٥٧٦٢ = \text{ب } ١٠٨ \text{ م ح}$$

$$٨٠٠٩٦٩١٠٠ = \text{س } ٨٠ \text{ م ح}$$

$$٩٢٩٩٩٩١٥ = \text{ج } ٨٩^\circ ٢٨' ٢١''$$

لاستعلام الزاوية ب

$$١٢٢٦٥٠٥٢$$

$$٧٢٦٦٥٧٦٢ = \text{أ } ١٢٤ \text{ م ح}$$

$$٨٠٠٩٦٩١٠٠ = \text{س } ٨٠ \text{ م ح}$$

$$٩٢٩٩٩٩١٥ = \text{ج } ٨٩^\circ ٢٨' ٢١''$$

لاستعلام الزاوية س

١٢' ٩٢٦٥٠٠٥٢

٧' ٨٧٢٨٩٥٢

٧' ٩٦٦٥٧٦٢

أ = ١٢٤ م ح

ب = ١٠٨ م ح

ج س = ٩' ٧٧٥٩٧٦٧ = ٢٠' ٢٩' ٢٦

نظرية د

جيب $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left| \begin{array}{l} (ن - ب) \\ (ن - س) \end{array} \right|$
ب س

جيب $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left| \begin{array}{l} (ن - أ) \\ (ن - س) \end{array} \right|$
أ س

جيب $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left| \begin{array}{l} (ن - أ) \\ (ن - ب) \end{array} \right|$
أ ب

حسب (ع ٢١٠) ج $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \times \text{ج أ}$

عوض عن ن ج ا ب فتنو كما ذكرت في نظرية ب نصير

ج $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right)$
ب س

و $\left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right)$
ب س

و $\left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right)$
ب س

فنصير

ج $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \times \left(\frac{1}{r} \right)$
ب س

ولكن ب س + أ - ب - س = أ - (ب - س) = (أ + ب - س) ×

(أ - ب + س) (ج ٨٩) ثم بوضع ن = $\frac{1}{r} (أ + ب + س)$

ونحول المعادلة والتخذ بنصير

$$ج \frac{1}{ف} = 1 \frac{1}{ف} \times ق \frac{1}{ف} \times (ن - ب) \times (ن - س) \\ \text{بَس}$$

مثال . لنفرض كما تقدم $أ = ١٢٤$ $ب = ١٠٨$ $س = ٨٠$ مطلوب $اوب$

لاستعلام الزاوية $ا$

$$ن - ب = ٥٢ \text{ نسبة } ١٧٢٤٢٧٥٩$$

$$ن - س = ٨١ \text{ } ١٩٠٨٤٨٥٠$$

$$ب = ١٠٨ \text{ ح م } ٧٩٦٦٥٧٦٢$$

$$س = ٨٠ \text{ ح م } ٨٠٩٦٩١٠٠$$

$$٢) ١٩٦٦٢٤٧١$$

$$ج \frac{1}{ف} = 1 \frac{1}{ف} \times ق \frac{1}{ف} \times (ن - ب) \times (ن - س) = ١٩٦٦٢٤٧١$$

لاستعلام الزاوية $ب$

$$ن - أ = ٢٧ \text{ } ١٤٩١٢٦٢٨$$

$$ن - س = ٨١ \text{ } ١٩٠٨٤٨٥٠$$

$$أ = ١٢٤ \text{ ح م } ٧٨٧٢٨٩٥٢$$

$$س = ٨٠ \text{ ح م } ٨٠٩٦٩١٠٠$$

$$٢) ١٩٦٦٢٤٧١$$

$$ج \frac{1}{ف} = 1 \frac{1}{ف} \times ق \frac{1}{ف} \times (ن - ب) \times (ن - س) = ١٩٦٦٢٤٧١$$

نظرية $د$

$$ن (ن - أ) \times ق \frac{1}{ف} \times بَس = 1 \frac{1}{ف}$$

$$ن (ن - ب) \times ق \frac{1}{ف} \times آس = 1 \frac{1}{ف}$$

$$ن (ن - س) \times ق \frac{1}{ف} \times آت = 1 \frac{1}{ف}$$

$$\text{حسب (عد ٢١٠) } ٢ (٢١٠) = 1 \frac{1}{ف} \times ق \frac{1}{ف} \times ن ج ا$$

بالنعويض والتحويل كما في النظرية السابقة

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \text{ ب س} + \text{ب}^2 + \text{س}^2 - \text{أ}^2}{2 \text{ ب س}} \times \left(\frac{1}{4} \text{ ق}\right) = \frac{1}{4} \text{ ج}^2 \\
 &\quad - \left(\frac{1}{4} \text{ ق}\right) \times (\text{ب} + \text{س} + \text{أ}) (\text{ب} + \text{س} - \text{أ}) \\
 &\quad \text{اجعل } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{س} + \text{أ}) = \text{و حوّل وجذّر نصير} \\
 &\quad \frac{1}{4} \text{ ج}^2 = \frac{1}{4} \text{ ق} \times \frac{(\text{ب} + \text{س} + \text{أ}) (\text{ب} + \text{س} - \text{أ})}{2 \text{ ب س}}
 \end{aligned}$$

مثال. لنرض كما تقدم $\text{أ} = 144 = \text{ب} = 108 = \text{س} = 80$ مطلوب ب وس

لاستعلام الزاوية ب

$$\begin{aligned}
 \text{ب} &= 161 = 2' 20.68259 \\
 (\text{ب} - \text{ن}) &= 52 = 1' 72.42759 \\
 \text{أ} = 144 &= \text{م ح} \quad 7' 87.28952 \\
 \text{س} = 80 &= \text{م ح} \quad 8' 96.91100 \\
 &= 19' 90.09070 \quad (2) \\
 \text{ج} \frac{1}{4} \text{ ب} &= 2' 90.04030 \quad \text{ب} = 9' 42' 52
 \end{aligned}$$

لاستعلام الزاوية س

$$\begin{aligned}
 \text{ن} &= 161 = 2' 20.68259 \\
 \text{س} - \text{ن} &= 81 = 1' 90.84800 \\
 \text{أ} = 144 &= \text{م ح} \quad 7' 87.28952 \\
 \text{ب} = 108 &= \text{م ح} \quad 7' 96.91100 \\
 &= 19' 90.47822 \quad (2) \\
 \text{ج} \frac{1}{4} \text{ س} &= 1' 97.72911 \quad \text{س} = 20' 26' 20
 \end{aligned}$$

نظرية و

$$\left. \frac{(ن - ب) \times (ن - س)}{(ن - آ)} \right|_{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} ق = 1 \frac{1}{2} ماس$$

$$\left. \frac{(ن - آ) \times (ن - س)}{(ن - ب)} \right|_{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} ق = 1 \frac{1}{2} ماس$$

$$\left. \frac{(ن - آ) \times (ن - ب)}{(ن - س)} \right|_{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} ق = 1 \frac{1}{2} ماس$$

الماس = مسطح $\frac{1}{2} ق \times$ الجيب منسوماً على نظير الجيب (ع ٢١٦)
فحسب نظرية د ولا

$$\frac{(ن - ب) \times (ن - س)}{ب س} \times \frac{1}{2} ق = \frac{1 \frac{1}{2} ج \times \frac{1}{2} ق}{1 \frac{1}{2} ج ن} = 1 \frac{1}{2} م$$

$$\left. \frac{(ن - آ)}{ب س} \right|_{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} ق =$$

$$\left. \frac{(ن - ب) \times (ن - س)}{(ن - آ)} \right|_{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} ق = 1 \frac{1}{2} م اي$$

مثال . مفروض كما نندم آ = ١٢٤ ب = ٨٠ س = ٨٠ مطلوب اوس

لاستعلام الزاوية ا

$$1' ٧٢٤٢٧٥٩ = ن - ب = ٥٢$$

$$1' ٩٠٨٤٨٥٠ = ن - س = ٨١$$

$$٨' ٥٦٨٦٣٦٢ = ن - آ = ٢٧ م ح$$

$$٧' ٧٩٣١٧٤١ = ن = ١٦١ م ح$$

$$٢) ١٩' ٩٩٤٥٧١٢$$

$$٢١' ٢٨' ٨٩ = ١ = ٩' ٩٩٧٢٨٥٦ = 1 \frac{1}{2} م$$

لاستعلام الزاوية س

$$١'٤٢١٢٦٢٨ = ٢٧ = \hat{A} - \text{ن}$$

$$١'٧٢٤٢٧٥٩ = ٥٢ = \hat{B} - \text{ن}$$

$$٨'٠٩١٥١٥٠ = ٨١ = \hat{C} - \text{ن}$$

$$٧'٧٩٢١٧٤١ = ١٦١ = \hat{C} - \text{ن}$$

$$٢) ١٩'٠٤'٠٢٢٨٨$$

$$\hat{M} = ١'٥٢'١٦٤٤ = \text{س} \quad \hat{S} = ٢٠'٢٩'٠٢٦ = \text{س}$$

بالنظريات الثلاث الاخيرة لا يقع التباس في الزاوية لان $\frac{1}{2}$ زاوية لا بد ان يكون اقل من ٩٠

متى كانت الزاوية صغيرة تكون النظرية الاولى ادق مما سواها
ومتى كانت بقرب ٩٠ فالثلاث الاخيرة توافر على الاولى

ثم كتاب الانساب

وحساب المثلثات المستوية ويتلوه بعض قضايا حساب المثلثات
الكروية والعبارات التي تحمل بها مسائله

حساب المثلثات الكروية

ان القضايا الهندسية التي بها يتعلّق حساب المثلثات الكروية قد
تبرهنّت في آخر كتاب اقليدس فلا داعي هنا سواء لاطباق تلك القضايا
على حل مسائل المثلثات الكروية قائمة كانت او غير قائمة
حد - المثلثان القطبيان هما مثلثان على سطح كرة رؤوس زوايا
الواحد هي اقطاب اضلاع الآخر ويسمى الواحد متم الآخر. (اقليدس
مثلثات كروية ق ١١)

حد - المثلث الرباعي هو مثلث كروي ضلع من اضلاعه ٩٠ اى
ربع دائرة

لكل مثلث كروي ستة اجزاء ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا اذا فرض
من هذه الستة ثلاثة تستعلم البقية

وكيفية ذلك انما هي مدار حساب المثلثات الكروية وهو ينقسم الى
قسمين الاول حساب مثلثات كروية قائمة الزاوية والثاني حساب مثلثات
كروية غير قائمة الزاوية

في المثلثات الكروية القائمة الزاوية

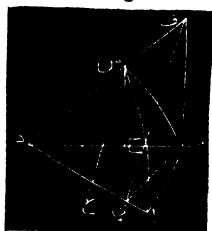
الفصل الأول

من جيوب اضلاع مثلث كروي قائم الزاوية ومماس ضلع واحد يصنع

مثلثان مستويان شبيهان شكلاً ووضعاً

ليكن $ا ب س$ مثلثاً كروياً قائم الزاوية عند $ب$ وليكن $د$ مركز الكرة فالسطح

شكل ٤١



$س ب د$ عمودي على السطح $د ب ا$ لان
 $س ب ا$ قائمة. من $س$ ارسم $س ح$ عموداً
 على السطح $د ب ا$ فلكون السطح $س ب د$
 عموداً على السطح $د ب ا$ يكون الخط $س ح$
 في السطح $س ب د$ وعموداً على الخط $د ب$

وعموداً على كل خط يمكن رسمه في السطح $د ب ا$ من النقطة $ح$ (اقليدس مضافات
 ك ٢ حد ٢)

ارسم $ح ع$ عموداً على $د ا$ وارسم $ع س$ فكل الخط $غ س$ واقع في السطح
 $س د ا$ فالمثلث $س ح غ$ قائم الزاوية عند $ح$ والمثلث $د غ س$ قائم الزاوية

ايضاً وذلك لانه في المثلث القائم الزاوية $س ح ع$ $س ح - ح ع = س ع$ (١)

وفي القائم الزاوية $د غ ح$ $د غ + ح غ = د ح$ (٢)

بالطرح $س ح - د غ = س غ - د ح$ (٣)

بالمقابلة $س ح : د ح = س غ : د غ$ (٤)

ولكن $س ح - د ح = س د$ لان $س د ح$ ذو قائمة

فبالمساواة $س غ - د غ = س د$ فيكون $س د$ وزر

مثلث قائم الزاوية $د ع س$ (اقليدس ق ٤٧ ك ١)

من $ب$ ارسم $ب ي$ عموداً على $د ا$ و $ب ف$ عموداً على $د ب$ في السطح

$س د ب$ بعد مده فالنقطة $ف$ واقعة في الخط $د س$ بعد اخراجه. ارسم $ي ف$.

فلكون $ف$ في السطح $س د ا$ تكون النقطة $ي$ في ذلك السطح ايضاً فالخط $ي ف$

واقع في السطح $س د ا$ فالمثلثان $س غ ح$ $ف ي ب$ متشابهان شكلاً ووضعاً

كلا الخططين $ح ع$ و $ب ي$ عمود على $د ا$ منها متوازيان وكلا الخططين $ح س$

و $ب ف$ عمود على $د ب$ فهما متوازيان فالزاوية $ع ح س = ي ب ف$ و $غ ح س$

قائمة فتكون $ي ب ف$ قائمة ايضاً ولسبب الموازاة المذكورة لنا

$$د ح : د ب = ح غ : ب ي$$

$$و د ح : د ب = ح س : ب ف \quad \text{فسبة}$$

$$ح غ : ب ي = ح س : ب ف \quad \text{اي}$$

ح غ : ح س = ب ي : ب ف
 فزاوية من المثلث الواحد = زاوية من الآخر والاضلاع المحيطة بهما متناسبة
 فالمثلثان متشابهان (اقليدس ق ٦ ك ٦) وهما متشابهان وضعا لان اضلاعهما تحدث
 زوايا متساوية مع المخط الواحد د ب عند ح وب
 س ح جيب القوس س ب و د ح نظير جيبها وب ف ماسها وس غ
 جيب القوس اس و غ د نظير جيبها وب ي جيب القوس اب و د ي
 نظير جيبها

الفصل الثانية

في كل مثلث كروي قائم الزاوية نسبة جيب ضلع الى ماس الضلع
 الآخر كنسبة نصف القطر الى ماس الزاوية التي تلي الضلع الاول
 اوجب ضلع الى ماس الضلع الآخر كنظير جيب الزاوية التي تلي
 الضلع الاول الى نصف القطر (شكل ٤١)

لفرض الزوايا ١ وب وس والاقواس التي تقابل الاضلاع آ ب
 س اي آ يقابل ا الخ ثم في المثلث المستوي القائم الزاوية ي ب ف نسبة
 ي ب : ب ف :: ق : ق : ماس ب ي ف
 اي جيب س ماس آ = ق : ق : ماس ا وذلك الخ
 ثم ماس ا × نظير ماس ا = ق : ق (حساب المثلثات البسيطة عد ٩٢)
 اي ماس ا = $\frac{ق}{ق}$ وبالتعويض عن ماس ا بهذه القيمة في النسبة الاخيرة
 وقسمه الزوج الثاني على ق نصير

ج س : ماس آ = ا : $\frac{ق}{ق}$ اي
 ج س : ماس آ = ا : ١

جيب س : ماس آ = ن ج : ا : $\frac{ق}{ق}$

اي $\frac{ق}{ق} \times$ جيب س = ماس آ × ن م

(١)

وذلك الخ

فرع اذا رسم الماس للقوس اب عوضا عن القوس ب س لنا

(٢)

$$\frac{1}{2} ق \times جيب آ = ماس س \times ن م س$$

الفضية الثالثة

في كل مثلث كروي قائم الزاوية نسبة جيب القائمة الى جيب الوتر كسبة جيب احدى الزاويتين الاخرتين الى جيب الضلع الذي يقابلها (شكل ٤١)

$$جيب ٩٠^\circ = \frac{1}{2} ق$$

ثم في المثلث البسيط س ح غ نسبة

$$جيب س ح غ : س غ = جيب س غ ح : س ح اي$$

$$\frac{1}{2} ق : جيب ب = جيب آ : جيب ا$$

$$اي \frac{1}{2} ق \times جيب آ = جيب ب : جيب ا \quad (١) \text{ وذلك الخ}$$

فرع . اذا رسم ماس للقرس ا ب نصير النسبة

$$\frac{1}{2} ق : جيب ب = جيب س : جيب س$$

$$اي \frac{1}{2} ق \times جيب س = جيب ب \times جيب س \quad (٢)$$

تعليقة . لنا ماسبق هذه المعادلات

$$(١) \frac{1}{2} ق \times جيب س = ماس آ \times ن م س$$

$$(٢) \frac{1}{2} ق \times جيب آ = ماس س \times ن م س$$

$$(٣) \frac{1}{2} ق \times جيب آ = جيب ب \times جيب ا$$

$$(٤) \frac{1}{2} ق \times جيب س = جيب ب \times جيب س$$

وهذه المعادلات راجعة الى المثلث الكروي القائم الزاوية ا ب س في الشكل

٤١ ولكنها تصح ايضا في كل مثلث كروي قائم الزاوية فلتطبقها على المثلث الكروي

القائم الزاوية ف د س المتم المثلث ا ب س (شكل ٤٢) اي ف س متم ب س

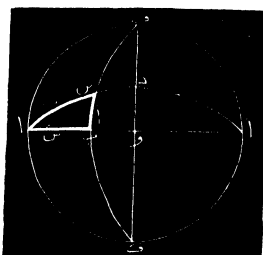
وس د متم اس وف د متم د و قياس الزاوية ب اس فتظهر المعادلات

المذكورة على الهيئات الآتية

$$(١) \text{ نصير } \frac{1}{2} ق \times ج س د = م ف د \times ن م س \quad (ن)$$

$$(٢) \frac{1}{2} ق \times ج ف د = م س د \times ن م ف \quad (م)$$

$$(٣) \frac{1}{2} ق \times ج ف د = ج ف س \times ج س \quad (و)$$



(٤) $\frac{1}{2} ق \times ج س د = ج ف س \times ج ف (ف)$
 لان $ج س د = ن ج ا س = ن ج ب$
 و $ماس ف د = ن م د و = ن م ا الخ$
 فاذا اطبقنا المعادلات نوم وف على
 المثلث اب س نصير

شكل ٤٢

- (٥) $\frac{1}{2} ق / ن ج ب = ن م ا \times ن م س$
 (٦) $\frac{1}{2} ق \times ن ج ا = ن م ب \times م س$
 (٧) $\frac{1}{2} ق \times ن ج ا = ن ج ا \times ج س$
 (٨) $\frac{1}{2} ق \times ن ج ب = ن ج ا \times ن ج س$

وفي المعادلة (٦) الجانب الثاني منها مؤلف من القوسين المتوالين للزاوية ا ونصح
 ايضاً من جهة س فتصير المعادلة

$$(٩) \frac{1}{2} ق \times ن ج س = ن م ب \times م ا$$

وبنفس هذه الملاحظة من المعادلة (٧) نصير

$$(١٠) \frac{1}{2} ق \times ج س = ن ج س \times ج ا$$

وقد ننتج بعض هذه المعادلات هندسياً (انظر شكل ٤١) لانه من المثلثين

المتوازيين في السطح د ا لنا

$$د ب : د ح = د ي : د ع$$

$$\frac{1}{2} ق : ج ا = ن ج س : ن ج ب$$

وهي نسبة المعادلة (١) اي نسبة $\frac{1}{2} ق$ الى نظير جيب ضلع كسبة نظير جيب

الضلع الآخر الى نظير جيب الوتر

بواسطة هذه المعادلات العشر نحل كل مسألة في حساب المثلثات

الكروية القائمة غير ان حفظها والعمل بها عسر لكثرتها ولاجل تسهيل
 العمل يعتمد على منم الوتر ومنم كل من الزاويتين غير القائمة عوضاً عن
 الاقواس نفسها

فلنفرض ب الوتر وب منته ثم

$$ب + ب = ٩٠^\circ \text{ و } ب - ب = ٩٠^\circ - ب$$

ج ب = ن ج ب ون ج ب = ج ب وماس ب = ن م ب
 وإذا فرضنا أ = مم أ لنا
 جيب أ = ن ج أ ون ج أ = ج أ وماس أ = ن م أ
 وهكذا ج س = ن ج س ون ج س = ج س وم س = ن م س
 فبالتعويض بهذه القيمات عن ب و ا وس في المعادلات العشرونك أ وس
 على ما هالنا

أجزاء نبيير الدائرة

(انظر اقليدس صفحة ٢٦)

- (١١) $\frac{1}{f} ق \times ج س = م أ \times م آ$
- (١٢) $\frac{1}{f} ق \times ج آ = م س \times م س$
- (١٣) $\frac{1}{f} ق \times ج آ = ن ج ب \times ن ج آ$
- (١٤) $\frac{1}{f} ق \times ج س = ن ج ب \times ن ج س$
- (١٥) $\frac{1}{f} ق \times ج ب = م آ \times م س$
- (١٦) $\frac{1}{f} ق \times ج آ = م ب \times م س$
- (١٧) $\frac{1}{f} ق \times ج آ = ن ج آ \times ن ج س$
- (١٨) $\frac{1}{f} ق \times ج ب = ن ج آ \times ن ج س$
- (١٩) $\frac{1}{f} ق \times س = م ب \times م آ$
- (٢٠) $\frac{1}{f} ق \times ج س = ن ج س \times ن ج آ$

لنا من هذه المعادلات قاعدة نبيير لحل مسائل مثلثات كروية قائمة بواسطة

الاجزاء الدائرة

- (١) $\text{مسطح } \frac{1}{f} ق \text{ في جيب الوسط} = \text{مسطح مائتي المتواليين}$
- (٢) $\text{مسطح } \frac{1}{f} ق \times \text{جيب الوسط} = \text{مسطح نظير جيب المتواليين}$

تنبيه. خذ مم الوتر ومم كلا الزاويتين ابداً

في المثلثات الكروية غير القائمة الزاوية

القضية الأولى

في كل مثلث كروي نسبة جيوب الاضلاع بعضها الى بعض كنسبة جيوب الزوايا التي تقابلها بعضها الى بعض (اقليدس . مثلثات كروية ق ٢٤)
القضية الثانية

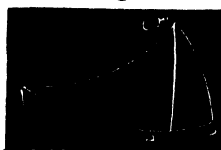
في كل مثلث كروي اذا رُسمت قوس دائرة عظيمة من احدى الزوايا عمودية على الضلع المقابل قاعدة او على القاعدة بعد اخراجها تكون نسبة نظير جيب ضلع الى نظير جيب الضلع الآخر كنسبة نظير جيب قسم من القاعدة الى نظير جيب القسم الآخر . (اقليدس مثلثات كروية ق ٢٦)
القضية الثالثة

في كل مثلث كروي اذا رُسمت قوس عمودية على القاعدة او على القاعدة بعد اخراجها تكون ماسات قسي القاعدة متناسبة بالتكافؤ الى نظير ماسات قسي الزاوية

باطفاق معادلة ٢ من المثلثات الكروية ذات القائمة الماضي ذكرها على شكل ٤٢

شكل ٤٢

نصير



شكل ٤٤

$$\frac{1}{r} \text{ ق } \text{ج س د} = \text{ماس اد} \times \text{ن م اس د} \text{ وايضا } \frac{1}{r} \text{ ق } \text{ج س د} = \text{ماس ب د} \times \text{ن م ب س د}$$

$$\frac{1}{r} \text{ ق } \text{ج س د} = \text{ماس ب د} \times \text{ن م ب س د}$$

وبالمساواة

$$\text{ماس اد} \times \text{ن م اس د} = \text{ماس ب د} \times \text{ن م ب س د}$$

$$\text{اي ماس اد : ماس ب د :: ن م ب س د : ن م اس د}$$

القضية الرابعة

ليرسم كما تقدم في ق ٢ فنسبة نظير جيب الزاويتين عند طرفي القاعدة
احدها الى الاخرى كنسبة جيب قسي الزاوية المقابلة احدها الى الآخر
باطفاق معادلة (٧) على المثلث ا س د نصير

$$\begin{aligned} \text{(ص)} \quad \frac{1}{\sin A} \times \sin C &= \sin B \times \sin A \\ \text{(ط)} \quad \text{وايضاً} \frac{1}{\sin A} \times \sin B &= \sin C \times \sin B \end{aligned}$$

بقسمة معادلة ص على معادلة ط نصير

$$\begin{aligned} \frac{\sin C}{\sin B} &= \frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{اي نسبة} \\ \sin C &= \sin A \\ \sin C : \sin A &= 1 \end{aligned}$$

القضية الخامسة

ارسم كما تقدم فنسبة جيب احد قسي القاعدة الى جيب القسم الآخر
كمماس الزاوية التي تلي الواحد الى مماس الزاوية التي تلي الآخر
باطفاق معادلة (١) على المثلث ا س د نصير

$$\begin{aligned} \text{(ص)} \quad \frac{1}{\sin A} \times \sin C &= \sin B \times \sin A \\ \text{(ط)} \quad \text{وايضاً} \frac{1}{\sin A} \times \sin B &= \sin C \times \sin B \end{aligned}$$

بقسمة (ص) على (ط) نصير

$$\begin{aligned} \frac{\sin C}{\sin B} &= \frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{اي نسبة} \\ \sin C &= \sin A \\ \sin C : \sin A &= 1 \end{aligned}$$

القضية السادسة

ارسم كما تقدم فنسبة نظير مماس ضلع الى نظير مماس الضلع الآخر
كنسبة نظير جيب قسم من الزاوية الى نظير القسم الآخر

باطفاق معادلة (١) على المثلث اس د نصير

$$\begin{aligned} \text{ق} \times \text{ج} \text{ اس د} &= \text{ن م اس} \times \text{ن م س د} \quad (\text{ض}) \\ \text{وايضاً} \quad \text{ق} \times \text{ج ب س د} &= \text{ن م ب س} \times \text{ن م س د} \quad (\text{ظ}) \end{aligned}$$

بقسمة (ض) على (ظ) نصير

$$\frac{\text{ن ج اس د}}{\text{ن ج ب س د}} = \frac{\text{ن م اس}}{\text{ن م ب س}} \quad \text{اي نسبة}$$

$$\text{ن م اس} : \text{ن م ب س} = \text{ن ج اس} : \text{ن ج ب س د}$$

الفضية السابعة

ارسم كما تقدم . نظير جيب ضلع من اضلاع مثلث كروي يعدل
مسطح نظير جيب الضلعين الآخرين مع مسطح جيبهما في نظير جيب
الزاوية المحاذية بينهما

في المثلث الكروي اب س شكل ٤٢ و ٤٤ لكن س د عمودية على القاعدة داخل
المثلث او بعد اخراج القاعدة ثم حسب ق ٢

$$\begin{aligned} \text{ن ج اس} : \text{ن ج س ب} &= \text{ن ج اد} : \text{ن ج ب د} \quad (١) \\ \text{اذا وقع س د داخل المثلث ب د} &= (\text{اب} - \text{اد}) \\ \text{اذا وقع س د خارج المثلث ب د} &= (\text{اد} - \text{اب}) \\ \text{ون ج ب د} &= \text{ن ج} (\text{اد} - \text{اب}) \\ \text{ون ج} (\text{اب} - \text{اد}) &= \text{ن ج} (\text{اد} - \text{اب}) \\ \text{لان كل واحد يعدل} & \end{aligned}$$

$$\text{ن ج اب} \times \text{ن ج اد} + \text{ج اب} \times \text{ج اد}$$

حسب المعادلة الاخيرة (ع ٢٠٨) مثلثات مستوية

ثم بالتعويض عن ن ج ب د بهذه القيمة في معادلة ا نصير

$$\text{ن ج اس} : \text{ن ج س ب} = \text{ن ج اد} : \text{ن ج اب} \times \text{ن ج اد} + \text{ج اب} \times \text{ج اد}$$

$$\text{ن ج اد} \times \text{ج اد} \quad (٢)$$

اقسم الزوج الثاني من هذه النسبة على ن ج اد اي عوض عن ج اد بماس

$$ا د لان \frac{ج ا}{ن ج ا د} = ماس ا د نصير$$

ن ج ا س : ن ج س ب = ا : ن ج ا ب + ج ا ب × ماس ا د (٢)
اطبق معادلة (٦) من الفصل السابق على المثلث ا س د واجعل $\frac{ا د}{ا د}$ واحدًا

نصير

$$ن ج ا = ماس ا س × ن م ا د (ك)$$

وحسب المثلثات البسيطة (ع ١٩٦)

$$ماس ا س × ن م ا س = ا (ل)$$

اضرب (ك) في ماس ا س ملاحظًا معادلة ل نصير

$$ماس ا س × ن م ا = ماس ا د$$

عوض عن ماس ا د بهذه القيمة في نسبة (٢) نصير

$$ن ج ا س : ن ج س ب = ا : ن ج ا ب + ج ا ب × ماس ا س × ن م ا (٤)$$

بالتحويل الى معادلة نصير

$$ن ج س ب = ن ج ا س × ن ج ا ب + ج ا ب × (ن ج ا س × ماس ا س) × ن ج ا$$

$$وماس ا س = \frac{ج ا س}{ن ج ا س} اي ن ج ا س × ماس ا س = ج ا س (ع ١٩٥)$$

فتصير المعادلة

$$ن ج س ب = ن ج ا س × ن ج ا ب + ج ا ب × ج ا س × ن ج ا$$

وذلك الخ

اذا فرضت الزوايا = ا و ب و س

والاضلاع المقابلة كل زاوية آ وبّ وسّ نصير المعادلة

$$\left\{ \begin{array}{l} ن ج آ = ن ج بّ × ن ج سّ + ج بّ × ج سّ × ن ج ا \\ وكذلك ن ج بّ = ن ج آ × ن ج سّ + ج آ × ج سّ × ن ج ب \\ و ن ج سّ = ن ج آ × ن ج بّ + ج آ × ج بّ × ن ج س \end{array} \right.$$

ومن هذه المعادلات الثلاث نستخرج هذه العبارات الدالة على نظائر جيوب زوايا

مثلث كروي

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ن ج أ} - \text{ن ج ب} \times \text{ن ج س} \\ \text{ج ب} \times \text{ج س} \\ \text{ن ج ب} - \text{ن ج أ} \times \text{ن ج س} \\ \text{ج أ} \times \text{ج س} \\ \text{ن ج س} - \text{ن ج أ} \times \text{ن ج ب} \\ \text{ج أ} \times \text{ج ب} \end{array} \right. = \begin{array}{l} \text{ن ج أ} \\ \text{ن ج ب} \\ \text{ن ج س} \end{array}$$

وبما ان هذه المعادلات لا تصلح للانساب بل نحل بالجيوب الخ الطبيعية فيقتضي تحويلها الى ما يصلح للعمل بالانساب

قد تقدم في حساب المثلثات البسيطة (ع ٢١٠) ان

$$\text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{أ}^{\frac{1}{2}} = \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{ق}^{\frac{1}{2}} + \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{ق}^{\frac{1}{2}} \times \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{أ}^{\frac{1}{2}} \text{اي}$$

$$1 + \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{أ}^{\frac{1}{2}} = \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{ق}^{\frac{1}{2}} + \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{ق}^{\frac{1}{2}} \times \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{أ}^{\frac{1}{2}}$$

فيالتعويض حسب الاولى من المعادلات (ص)

$$\text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{أ}^{\frac{1}{2}} = 1 + \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{أ}^{\frac{1}{2}} - \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{ب}^{\frac{1}{2}} \times \text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{س}^{\frac{1}{2}} - \text{ج ب} \times \text{ج س}$$

$$= (\text{ج ب} \times \text{ج س} - \text{ن ج ب} \times \text{ن ج س} + \text{ن ج أ}) \times \text{ج ب} \times \text{ج س} \quad (م)$$

ثم حسب المثلثات المستوية (ع ٢٠٨) معادلة (٢) بعد ضربها

$$\text{ن ج} (\text{ب} + \text{س}) = \text{ن ج ب} \times \text{ن ج س} - \text{ج س} \times \text{ج ب}$$

فيالتعويض في المعادلة (م) نصير

$$\text{ن ج}^{\frac{1}{2}} \text{أ}^{\frac{1}{2}} = \text{ن ج أ} - \text{ن ج} (\text{ب} + \text{س})$$

$$\text{ج ب} \times \text{ج س}$$

في حساب المثلثات المستوية (ع ٢٠٨) لنا

$$(1) \text{ن ج} (\text{أ} + \text{ب}) = \text{ن ج أ} \times \text{ن ج ب} - \text{ج أ} \times \text{ج ب}$$

$$(2) \text{ن ج} (\text{أ} - \text{ب}) = \text{ن ج أ} \times \text{ن ج ب} + \text{ج أ} \times \text{ج ب}$$

بطرح (١) من (٢) نصير

$$\text{ن ج} (\text{أ} - \text{ب}) - \text{ن ج} (\text{أ} + \text{ب}) = \text{ج أ} \times \text{ج ب}$$

ثم اذا فرضنا $\text{أ} + \text{ب} = 1$ و $\text{أ} - \text{ب} = \text{ب}$ نصير

$$\text{ن ج ب} - \text{ن ج} = 1 \text{ ج}^2 \left(\frac{\text{ب} + 1}{2} \right) \times \left(\frac{\text{ب} - 1}{2} \right) \text{ ج}$$

باطفاق هذه المعادلة على التي تقدمت واحسب ب + س قوساً واحدة لنا

$$\text{ن ج}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{س}}{2} \right) \times \left(\frac{\text{ب} + \text{س} - \text{أ}}{2} \right) \text{ ج}$$

$$\frac{\text{ج ب} \times \text{ج س}}{\text{ب} + \text{س} - \text{أ}} = \frac{\text{ب} + \text{س} + \text{أ}}{2} - \text{أ} \text{ فلنفرض}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{ب} + \text{س} + \text{أ}}{2} \text{ فنصير المعادلة}$$

$$\text{ن ج}^2 = \frac{1}{2} \text{ ج ص} \times \text{ج} (\text{ص} - \text{أ}) \text{ اي}$$

$$\left| \frac{\text{ج ص} \times \text{ج} (\text{ص} - \text{أ})}{\text{ج ب} \times \text{ج س}} \right| = \frac{1}{2} \text{ ن ج}$$

هذا اذا كان $\frac{1}{2}$ ق واحدًا فلاجل استخدام هذه العبارات للانساب يقتضي ان ندخل $\frac{1}{2}$ ق تحت علامة الجذر فلنا هذه المعادلات الثلاث الدالة على نظير جيب نصف قوس

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\frac{1}{2} \text{ ق} \times \text{ج ص} \times \text{ج} (\text{ص} - \text{أ})}{\text{ج ب} \times \text{ج س}} \right| = \frac{1}{2} \text{ ن ج} \\ \left| \frac{\frac{1}{2} \text{ ق} \times \text{ج ص} \times \text{ج} (\text{ص} - \text{ب})}{\text{ج أ} \times \text{ج س}} \right| = \frac{1}{2} \text{ ن ج} \\ \left| \frac{\frac{1}{2} \text{ ق} \times \text{ج ص} \times \text{ج} (\text{ص} - \text{س})}{\text{ج أ} \times \text{ج ب}} \right| = \frac{1}{2} \text{ ن ج} \end{array} \right. \text{ ط}$$

وعلى هذه الكيفة نستخرج من العبارات السابقة (ص) عبارات دالة على جيب

نصف قوس وفي

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ق} \times \text{ج ص} - \text{س} \times \text{ج (ص - ب)} \\ \text{ج ب} \times \text{ج س} \\ \frac{1}{2} \text{ق} \times \text{ج (ص - ١)} \times \text{ج (ص - س)} \\ \text{ج أ} \times \text{ج س} \\ \frac{1}{2} \text{ق} \times \text{ج (ص - ١)} \times \text{ج (ص - ب)} \\ \text{ج أ} \times \text{ج ب} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \frac{1}{2} \text{ج} \\ = \frac{1}{2} \text{ب} \\ = \frac{1}{2} \text{س} \end{array}$$

ظ

القضية الثامنة

في كل مثلث كروي نظير جيب احدى الزوايا يعدل مسطح جيبى
الآخرين في نظير جيب الضلع بينهما الا مسطح نظير جيب احدى
الزاويتين الاخرين في نظير جيب الاخرى
ليكن ا ب س شكل ٤٥ مثلثا كرويا اضلاعه ا ب س
وليكن المثلث ك ل ي مكملته اي مثله القطبي
اضلاعه ك ل ي

حسب اقليدس ق ١١ مثلثات كروية بين زوايا هذين المثلثين واضلاعهما

$$\text{ك} = ١٨٠ - \text{ا} \quad \text{ل} = ١٨٠ - \text{ب} \quad \text{ي} = ١٨٠ - \text{س}$$

$$\text{ك} = ١٨٠ - \text{ا} \quad \text{ل} = ١٨٠ - \text{ب} \quad \text{ي} = ١٨٠ - \text{س}$$

العبارة الاولى من عبارات (ص)

ق ٧ اذا اطبقت على المثلث القطبي

نصير

$$\text{ن ج ك} = \text{ن ج ل} \times \text{ن ج ي} +$$

$$\text{ج ل} \times \text{ج ي} \times \text{ن ج ك} \quad (١)$$

وبالتعويض عن قيمة ك ل ي وك نصير

$$\text{ن ج (١٨٠ - ا)} = \text{ن ج (١٨٠ - ب)} \times \text{ن ج (١٨٠ - س)} +$$

$$\text{ج (١٨٠ - ب)} \times \text{ج (١٧٠ - س)} \times \text{ن ج (١٨٠ - ا)} \quad (٢)$$

شكل ٤٥



$$\text{و ن ج } (1 - 180^\circ) = - \text{ن ج } 1 \text{ الخ}$$

$$\text{و ج } (180^\circ - \text{ب}) = - \text{ج ب } \text{الخ}$$

ثم بالتعويض في (٢) وتغيير علامات جانبي المعادلة المحادثة نصير

$$\text{ن ج } 1 = \text{ج ب } \times \text{ج س } \times \text{ن ج } \bar{\text{أ}} - \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س}$$

وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

فاذا عاملنا المعادلتين الاخيرين من معادلات (ص) هذه المعاملة نحصل على

هذه الثلاث المعادلات

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ن ج } 1 = \text{ج ب } \times \text{ج س } \times \text{ن ج } \bar{\text{أ}} - \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} \\ \text{ن ج } \text{ب} = \text{ج } 1 \times \text{ج س } \times \text{ن ج } \bar{\text{ب}} - \text{ن ج } 1 \times \text{ن ج } \text{س} \\ \text{ن ج } \text{س} = \text{ج } 1 \times \text{ج ب } \times \text{ن ج } \bar{\text{س}} - \text{ن ج } 1 \times \text{ن ج } \text{ب} \end{array} \right. \text{غ}$$

بالمقابلة والقسمة نصير

$$\text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س}$$

$$\text{ن ج } \bar{\text{ب}} = \text{ج } 1 \times \text{ج س}$$

$$\text{ن ج } \bar{\text{س}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } 1 \times \text{ن ج } \text{ب}$$

$$\text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س}$$

$$\text{ن ج } \bar{\text{ب}} = \text{ج } 1 \times \text{ج س}$$

$$\text{ن ج } \bar{\text{س}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } 1 \times \text{ن ج } \text{ب}$$

$$\text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س}$$

$$\text{ن ج } \bar{\text{ب}} = \text{ج } 1 \times \text{ج س}$$

$$\text{ن ج } \bar{\text{س}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } 1 \times \text{ن ج } \text{ب}$$

ومن هن نستخرج عبارات دالة على جيب نصف ضلع مثلث كروي او نظير جيب

نصفه في اجزاء من رواياه . مثاله . اضع 1 الى جانبي معادلة (٢) نصير

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

$$1 + \text{ن ج } \bar{\text{أ}} = \text{ن ج } 1 + \text{ن ج } \text{ب} \times \text{ن ج } \text{س} + \text{ج ب } \times \text{ج س}$$

وبالتعويض في المعادلة الثالثة (ع ٢٠٨) من حساب المثلثات المستوية نصير

$$ن ج ا + ن ج (ب - س) = ٢ ن ج \frac{1}{2} (١ + ب - س) \times ن ج \frac{1}{2} (١ + س - ب)$$
 وبالتعويض في المعادلة المذكورة سابقاً نصير

$$٢ ن ج \frac{1}{2} ا = ٢ ن ج \frac{1}{2} (١ + ب - س) \times ن ج \frac{1}{2} (١ + س - ب)$$

$$ج ب \times ج س$$

افرض $١ + ب + س = ٢ ص$ ثم $١ + ب - س = ٢ ص - ٢ س$
 و $١ + س - ب = ٢ ص - ٢ ب$ و $٢ ب - ٢ س = ٢ (ب - س)$ وبالتعويض

$$٢ ن ج \frac{1}{2} ا = ٢ ن ج (ص - س) \times ن ج (ص - ب) اي$$

$$ج ب \times ج س$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ن ج \frac{1}{2} ا = ن ج (ص - س) \times ن ج (ص - ب) \\ ج ب \times ج س \\ ن ج \frac{1}{2} ب = ن ج (ص - ١) \times ن ج (ص - س) \\ ج ا \times ج س \\ ن ج \frac{1}{2} س = ن ج (ص - ١) \times ن ج (ص - ب) \\ ج ا \times ج ب \end{array} \right. غ$$

لأجل استعمال ج $\frac{1}{2} ا$ في اجزاء من الزوايا يجب طرح جانبي معادلة (٢) من
 ا فتصير

$$١ - ن ج ا = ١ - ن ج ا + ن ج ب \times ج س$$

$$ج ب \times ج س$$

وقد تقدم ان $١ - ن ج ا = ٢ ن ج \frac{1}{2} ا$ فبالتعويض

$$٢ ن ج \frac{1}{2} ا = (ج ب \times ج س - ن ج ب \times ج س) - ن ج ا$$

$$ج ب \times ج س$$

وباجراء العمل كما في استخراج عبارات ظل الدالة على نظير جيب $\frac{1}{2} ا$ ستخرج

هذه المعادلات

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ج} \frac{1}{2} \text{أ} = \frac{(-\text{ج} \times \text{ص} \times \text{ن} \text{ج} - \text{ص})}{2} \\ \frac{1}{2} \text{ج} \frac{1}{2} \text{ب} = \frac{(-\text{ج} \times \text{ص} \times \text{ن} \text{ج} - \text{ب})}{2} \\ \frac{1}{2} \text{ج} \frac{1}{2} \text{س} = \frac{(-\text{ج} \times \text{ص} \times \text{ن} \text{ج} - \text{س})}{2} \end{array} \right.$$

إذا انقسمت الأولى من هذه على الأولى من ظا نصير

$$\frac{1}{2} \text{ماس} \frac{1}{2} \text{أ} = \frac{(-\text{ن} \text{ج} \times \text{ص} \times \text{ن} \text{ج} - \text{ص})}{2}$$

وعلى هذا النمق نستخرج عبارات دالة على ماس $\frac{1}{2}$ ب وماس $\frac{1}{2}$ س

متناسبات نيپير

من العبارات الكثيرة الاستعمال في حساب المثلثات الكروية ما سُميت متناسبات نيپير نسبة إلى نيپير الشهير مخترع الانساب وهي مبرهنة في هندسة المثلثات الكروية في الاقليدس ق ٢٠ وق ٢١ فلتراجع هناك

$$\text{ن} \frac{1}{2} \text{ج} \frac{1}{2} (\text{أ} + \text{ب}) : \text{ن} \frac{1}{2} \text{ج} \frac{1}{2} (\text{أ} - \text{ب}) :: \text{م} \frac{1}{2} \text{س} : \text{م} \frac{1}{2} (\text{أ} + \text{ب})$$

$$\text{ج} \frac{1}{2} (\text{أ} + \text{ب}) : \text{ج} \frac{1}{2} (\text{أ} - \text{ب}) :: \text{م} \frac{1}{2} \text{س} : \text{م} \frac{1}{2} (\text{أ} - \text{ب})$$

(١) أي نسبة قطر جيب نصف مجموع ضلعي مثلث كروي إلى نظير

جيب نصف فضلها كنسبة نظير ماس نصف الزاوية بينها إلى ماس

نصف الزاويتين الأخرين

(٢) أي نسبة جيب نصف مجموع ضلعي مثلث كروي إلى جيب

نصف فضلها كنسبة نظير ماس نصف الزاوية بينها إلى ماس نصف

فضلة الزاويتين الأخرين

$$\begin{aligned} \text{ن ج } \frac{1}{4} (ب + 1) : \text{ن ج } \frac{1}{4} (ب - 1) :: \text{م } \frac{1}{4} \text{ س} : \text{م } \frac{1}{4} (أ + ب) \\ \text{ج } \frac{1}{4} (ب + 1) : \text{ج } \frac{1}{4} (ب - 1) :: \text{م } \frac{1}{4} \text{ س} : \text{م } \frac{1}{4} (أ - ب) \end{aligned}$$

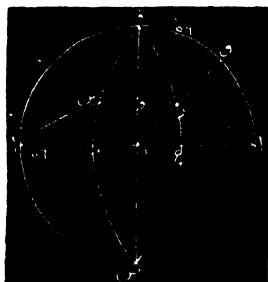
(١) اي نسبة نظير جيب نصف مجموع زاويتين من زوايا مثلث كروي الى نظير جيب نصف فضلتهما كماس نصف الضلع بينهما الى ماس نصف مجموع الضلعين الآخرين

(٢) اي نسبة جيب نصف مجموع زاويتين من زوايا مثلث كروي الى جيب نصف فضلتهما كنسبة ماس نصف الضلع بينهما الى ماس نصف فضلتهما

في حل مسائل المثلثات الكروية

لأجل الاعانة على مسائل هذا الباب يوافق درس انواع المثلثات الكروية على كرة صناعية ومن ذلك يسهل على المبتدئ رسم المثلثات على سطح مستوي

فلو فرض ضلع مثلث كروي قائم الزاوية ٥٦° والزاوية بينه وبين الوتر ٢٤° وطلب الوتر والضلع الآخر والزاوية الأخرى لم ياستطع المبتدئ حل المسئلة بالعبارة المتقدم ذكرها بدون تصور هيئة المثلث الحقيقي



شكل ٤٦

ونسبته الى سطح الكرة . فاذا اخذنا هذا المثلث على سطح كرة ارضية اصح اذا فصلنا ٥٦° من خط الاستواء ومن احدى الهواجر فعلى الحالة الاولى يكون الوتر قوس دائرة عظيمة اولها طرف الضلع الذي فرض ٥٦° فوق خط الاستواء او تحت نحدث مع خط الاستواء زاوية ٢٤° كما

تري من الرسم وعلى الثانية يكون الضلع ٥٦° قوساً من احدى الهواجر والوتر قوس دائرة عظيمة عن بين تلك الهاجرة او عن يسارها نحدث معها زاوية ٢٤° والضلع الآخر

قوس دائرة عظيمة عمودية على الضلع المفروض

إذا نُظِرَ إلى كرة من بعيد يترأى أنها دائرة والعين في محورها وتلك الدائرة هي دائرة عظيمة من تلك الكرة وكل دائرة عظيمة سطحها مارةً بالعين يترأى كأنها قطر الدائرة فترسم خطوطاً مستقيمة

لنرخص $اف$ $أص$ (شكل ٤٦) الدائرة المحاذية من النظر إلى كرة من بعيد فانظر إلى $أخط$ الاستواء والنظر في $ص$ الهاجرة المتوسطة أي التي العين في سطحها ولنرخص $اب = ٥٦^\circ$ الضلع المفروض واس الوتر فيحدث حسب المفروض الزاوية $باس = ٢٤^\circ$ فيكون $بس$ قوساً من هاجرة وفي الضلع الآخر عموداً على $اب$ فالمثلث $ابس$ مستوفٍ الشروط المفروضة

أيضاً $افصل = ٥٦^\circ$ من $فال$ $ق$ وارسم القوس $دق$ وافصل القوس $ع = ٢٤^\circ$ وارسم الربع $فرع$ فالمثلث $فقر$ مستوفٍ الشروط من الرسم يتضح أن $دو = ٢٤^\circ$ وفي أطول من $بس$ وإن $اس$ أطول من $اب$ أي أكثر من ٥٦°

كذلك الأمر واضح أن $أع = ٢٤^\circ$ أطول من $قر$ وإن $فر$ أطول من $فق$ لأن $فر$ أقرب مساواةً إلى $فغ = ٩٠^\circ$ من $فق$ إلى $فأ = ٩٠^\circ$ ولأجل الإيضاح أيضاً لنرخص مثلاً كروياً قائم الزاوية الوتر $= ١٥٠^\circ ٣٣' ٢٠''$ والزاوية عند القاعدة $٢٣^\circ ٢٧' ٢٩''$ المطلوب القاعدة والساق

لنرخص في الرسم السابق $آبس$ هذا المثلث فتكون $اس = ١٥٠^\circ ٣٣' ٢٠''$ والزاوية $باس = ٢٣^\circ ٢٧' ٢٩''$ والمطلوب $آب$ و $وبس$

هذا المثلث عبارة عن كل مثلث كروي قائم الزاوية كل من وتره وقاعدته أطول من ٩٠° . فليعتبران في هذا النوع تكون القاعدة أطول من الوتر والزاوية المتقابلة القاعدة أكبر من قائمة فهو مع المثلث المكمل يحدث هلالاً أبداً لأنه من قطب إلى قطب ١٨٠° كنهما وقعت الدائرة العظيمة المارة بهما . من $ا$ إلى $آ$ ١٨٠° أن قبست على خط الاستواء $ا$ $د$ $أ$ وعلى دائرة البروج $اس$ $أ$ والهلال مؤلف أبداً من مثلثين فاذا اتخذ ضلع أحدهما أطول من ٩٠° فختار المثلث المكمل للعمل به فختار في هذا المفروض المثلث $ابس$. $اس$ أطول من $اب$ فتكون $آب$ أطول من الوتر $أس$ والزاوية $اسب$ أصغر من ٩٠° فالتوالي $أسب$ أكبر من ٩٠°

$$\begin{aligned} \text{ن ج } \frac{1}{4} (ب + ١) : \text{ن ج } \frac{1}{4} (ب - ١) :: \text{م } \frac{1}{4} \text{ س } : \text{م } \frac{1}{4} (أ + ب) \\ \text{ج } \frac{1}{4} (ب + ١) : \text{ج } \frac{1}{4} (ب - ١) :: \text{م } \frac{1}{4} \text{ س } : \text{م } \frac{1}{4} (أ - ب) \end{aligned}$$

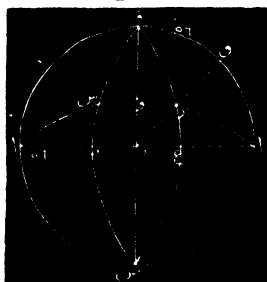
(١) اي نسبة نظير جيب نصف مجموع زاويتين من زوايا مثلث كروي الى نظير جيب نصف فضلتهما كماس نصف الضلع بينهما الى ماس نصف مجموع الضلعين الآخرين

(٢) اي نسبة جيب نصف مجموع زاويتين من زوايا مثلث كروي الى جيب نصف فضلتهما كنسبة ماس نصف الضلع بينهما الى ماس نصف فضلتهما

في حل مسائل المثلثات الكروية

لأجل الاعانة على مسائل هذا الباب يوافق درس انواع المثلثات الكروية على كرة صناعية ومن ذلك يسهل على المبتدىء رسم المثلثات على سطح مستوي

فلو فرض ضلع مثلث كروي قائم الزاوية ٥٦° والزاوية بينه وبين الوتر ٢٤° وطلب الوتر والضلع الآخر والزاوية الأخرى لم ياستطع المبتدىء حل المسئلة بالمبارات المتقدم ذكرها بدون تصور هيئة المثلث الحقيقي



شكل ٤٦

ونسبته الى سطح الكرة . فاذا اخذنا هذا المثلث على سطح كرة ارضية اصح اذا فصلنا ٥٦° من خط الاستواء ومن احدى الهواجر فعلى الحالة الاولى يكون الوتر قوس دائرة عظيمة اولها طرف الضلع الذي فرض ٥٦° فوق خط الاستواء او تحت نحدث مع خط الاستواء زاوية ٢٤° كما

تري من الرسم وعلى الثانية يكون الضلع ٥٦° قوساً من احدى الهواجر والوتر قوس دائرة عظيمة عن يمين تلك الهاجرة او عن يسارها نحدث معها زاوية ٢٤° والضلع الآخر

قوس دائرة عظيمة عمودية على الضلع المفروض
إذا نُظِرَ إلى كرة من بعيد يترأى أنها دائرة والعين في محورها وتلك الدائرة هي دائرة
عظيمة من تلك الكرة وكل دائرة عظيمة سطحها مارٌّ بالعين يترأى كأنها قطر الدائرة
فترسم خطوطاً مستقيمة

لنفرض $اف أ ص$ (شكل ٤٦) الدائرة المحاذية من النظر إلى كرة من بعيد
فانظر إلى $أ$ خط الاستواء وانظر $ف ص$ الهاجرة المتوسطة أي التي العين في سطحها
ولنفرض $اب = ٥٦^\circ$ الضلع المفروض واس الوتر فيحدث حسب المفروض
الزاوية $باس = ٢٤^\circ$ فيكون $ب س$ قوساً من هاجرة وفي الضلع الآخر عموداً على
 $اب$ فالمثلث $اب س$ مستوفٍ الشروط المفروضة

ايضاً افصل ٥٦° من $ف$ إلى $ق$ وارسم القوس $د ق$ وافصل القوس $ع أ = ٢٤^\circ$
وارسم المربع $ف ر ع$ فالمثلث $ف ق ر$ مستوفٍ الشروط
من الرسم يتضح ان $د و = ٢٤^\circ$ وفي اطول من $ب س$ وان $اس$ اطول
من $اب$ أي أكثر من ٥٦°

كذلك الامر واضح ان $أ ع = ٢٤^\circ$ اطول من $ق ر$ وان $ف ر$ اطول
من $ف ق$ لان $ف ر$ اقرب مساواة إلى $ف غ = ٩٠^\circ$ من $ف ق$ إلى $ف أ = ٩٠^\circ$
ولاجل الابضاح ايضاً لنفرض مثلاً كروياً قائم الزاوية الوتر $= ١٥٠^\circ ٣٣' ٢٠''$
والزاوية عند القاعدة $٢٣^\circ ٢٧' ٢٩''$ المطلوب القاعدة والساق

لنفرض في الرسم السابق $أ ب س$ هذا المثلث فتكون $اس = ١٥٠^\circ ٣٣' ٢٠''$
والزاوية $ب أ س = ٢٣^\circ ٢٧' ٢٩''$ والمطلوب $أ ب$ و $ب س$

هذا المثلث عبارة عن كل مثلث كروي قائم الزاوية كل من وتره وقاعدته اطول
من ٩٠° فليعتبر ان في هذا النوع تكون القاعدة اطول من الوتر والزاوية المتقابلة
القاعدة اكبر من قائمة فهو مع المثلث المكمل يحدث هلالاً ابداً لانه من قطب إلى
قطب ١٨٠° كينما وقعت الدائرة العظيمة المارة بهما من $ا$ إلى $أ$ ١٨٠° ان قبست على
خط الاستواء $ا د أ$ او على دائرة البروج $اس أ$ والهلال مؤلف ابداً من مثلثين
فاذا اتخذ ضلع احدهما اطول من ٩٠° فختار المثلث المكمل للعمل به فختار في هذا
المفروض المثلث $اب س$ اس اطول من $اب$ فتكون $أ ب$ اطول من
الوتر $أ س$ والزاوية $اس ب$ اصغر من ٩٠° فالتوالي $أ س ب$ اكبر من ٩٠°

لأنهما معاً قائمتان فقبل ان الاضلاع والزوايا المتقابلتهما من جنس واحد
 قبل ان جزء من جنس واحد اذا كانا اكبر من 90° او اصغر 90° وقبل
 انهما مختلفا الجنس اذا كان احدهما اكبر من 90° والاخر اصغر من 90°
 فاذا كان ضلعاً مثلث كروي قائم الزاوية من جنس واحد يكون الوتر اقل من
 90° واذا كانا مختلفي الجنس يكون الوتر اكثر من 90°
 لحل المثلث ا س ب ا س = $180^\circ - 100^\circ 43' 20'' = 79^\circ 16' 40''$
 لاستعلام ب س استخدم معادلة (٢) او (١٢) من معادلات المثلثات
 الكروية القائمة الزاوية

$$\begin{array}{rcl} \text{ب جيب } 79^\circ 16' 40'' & \cdot & 1 \\ 29^\circ 27' 22'' & \cdot & 1 \\ \hline 9^\circ 59' 49'' 84 & & \\ \text{آ} & \cdot & 1 \\ 11^\circ 17' 11'' & \cdot & 1 \\ \hline 9^\circ 59' 1078 & & \\ \text{لاجل استعمال اب نستخدم معادلة (١) او (١١)} & & \\ \text{آماس } 11^\circ 17' 11'' & \cdot & 1 \\ 29^\circ 27' 22'' & \cdot & 1 \\ \hline 10^\circ 26' 3774 & & \\ \text{ان م} & & \\ \text{س جيب } 27^\circ 22' 22'' & \cdot & 1 \\ \hline 9^\circ 59' 1078 & & \\ \text{اطرحهما من} & & \\ 180^\circ & & \end{array}$$

$$105^\circ 47' 28'' = \text{آ ب}$$

مسائل مثبوتة في حل مثلثات كروية قائمة الزاوية

(١) في المثلث الكروي القائم الزاوية ا ب س (شكل ٤٧) مفروض ا ب =
 $118^\circ 21' 4''$ والزاوية $22^\circ 40' 12''$ مطلوب بقية اجزاء المثلث
 ا س = $116^\circ 17' 55''$ س = $100^\circ 59' 26''$
 و ب س = $21^\circ 5' 42''$

(٢) مفروض ا ب $53^\circ 14' 20''$ و آ $91^\circ 25' 53''$

مطلوب بقية اجزاء المثلث

$$\text{ا س} = 91^\circ 4' 9'' \text{ و س} = 105^\circ 18'$$

$$\text{و ب س} = 91^\circ 47' 10''$$

شكل

٤٧



(٢) مفروض اب ١٠٢° ٥٠' ٢٥' وا ١١٢° ١٤' ٢٧'

مطلوب بقية اجزاء المثلث

اس = ٨٤° ٥١' ٢٦' س = ١٠١° ٤٦' ٥٦' وب س = ١١٢° ٤٦' ٢٧'

(٤) مفروض اب ٤٨° ٢٤' ١٦' وب س ٥٩° ٢٨' ٢٧'

مطلوب بقية اجزاء المثلث

اس = ٧٠° ٢٢' ٤٢' س = ٦٦° ٢٠' ٤٠' وس = ٥٢° ٢٢' ٥٦'

(٥) مفروض اب ١٥١° ٢٢' ٩' وب س ١٦° ٢٥' ١٤'

مطلوب الاجزاء الاخر

اس = ١٤٧° ١٦' ١٥' وس = ١١٧° ٢٧' ٢٥' وا = ٢١° ٥٢' ٤٩'

(٦) مفروض اب ٧٣° ٤' ٢١' واس ٨٦° ١٢' ١٥'

مطلوب الاجزاء الاخر

ب س = ٧٦° ٥١' ٢٠' وا = ٧٧° ٢٤' ٢٢' وس = ٧٣° ٢٩' ٤٠'

(٧) مفروض اس ١١٨° ٢٢' ١٢' واب ٤٧° ٢٦' ٢٥'

مطلوب الاجزاء الاخر

ب س = ١٢٤° ٥٦' ٢٠' وا = ١٢٦° ١٩' ٢٠' وس = ٥٦° ٥٨' ٤٤'

(٨) مفروض اب ٤٠° ١٨' ٢٢' واس ١٠٠° ٢' ٧'

مطلوب الاجزاء الاخر

ا = ٩٨° ٢٨' ٥٢' وس = ٤١° ٤' ٦' وب س = ١٠٢° ١٢' ٥٢'

(٩) مفروض اس ٢٢° ٢' ٢٢' وا = ٤٩° ٢٨' ١٢'

مطلوب الاجزاء الاخر

اب = ٤٩° ٢٦' ٦' وس = ٦٠° ٢٩' ٢٠' وب س = ٤١° ٤٢' ٢٢'

(١٠) مفروض اب ٢٩° ١٢' ٥٠' وس ٢٧° ٢٦' ٢١'

مطلوب الاجزاء الاخر

مقيس ا = ٦٥° ٢٧' ٥٧' او كما لها

اس = ٥٢° ٢٤' ١٢'

ب س = ٤٦° ٥٥' ٢'

(١١) مفروض اب ١٠٠° ١٠' ٢' وس ٩٠° ١٤' ٢٠'

مطلوب الاجزاء الاخر

لأنهما معاً قائمتان فقبل أن الاضلاع والزوايا المتباينتهما من جنس واحد
قبل أن جزء من جنس واحد إذا كانا أكبر من 90° أو أصغر 90° وقبل
أنهما مختلفا الجنس إذا كان أحدهما أكبر من 90° والآخر أصغر من 90°
فإذا كان ضلعاً مثلث كروي قائم الزاوية من جنس واحد يكون الوتر اقل من
 90° وإذا كانا مختلفي الجنس يكون الوتر أكثر من 90°
لحل المثلث ا س ب ا س = $180^\circ - 100^\circ 42' 20'' = 79^\circ 17' 40''$
لاستعلام ب س استخدم معادلة (٢) أو (١٣) من معادلات المثلثات
الكروية القائمة الزاوية

$$\begin{array}{rcl} \text{ب جيب } 79^\circ 17' 40'' & \times & 40^\circ 26' 29'' \\ \hline 1 & \times & 22^\circ 27' 29'' \\ \hline \text{أ} & \times & 11^\circ 17' 07'' \\ \hline \text{لاجل استعمال ا ب نستخدم معادلة (١) أو (١١)} \\ \text{أماس } 11^\circ 17' 07'' & \times & 79^\circ 17' 40'' \\ \hline \text{ان م} & \times & 22^\circ 27' 29'' \\ \hline \text{س جيب } 27^\circ 22' 22'' & \times & 9^\circ 66' 66'' \\ \hline & & 180^\circ \end{array}$$

$$102^\circ 57' 28'' = \text{أ ب}$$

مسائل منشورة في حل مثلثات كروية قائمة الزاوية

- (١) في المثلث الكروي القائم الزاوية ا ب س (شكل ٤٧) معروض ا ب = $118^\circ 21' 4''$ والزاوية $22^\circ 40' 12''$ مطلوب بقية اجزاء المثلث
ا س = $116^\circ 17' 00''$ س = $100^\circ 09' 26''$
و ب س = $21^\circ 05' 42''$
(٢) مفروض ا ب $52^\circ 14' 20''$ و أ $91^\circ 25' 05''$
مطلوب بقية اجزاء المثلث
ا س = $91^\circ 4' 9''$ و س = $52^\circ 15' 8''$
و ب س = $91^\circ 47' 10''$

شكل

٤٧

(٢) مفروض اب ١٠٢° ٥٠' ٢٥' وا ١١٢° ١٤' ٢٧'

مطلوب بقية اجزاء المثلث

اس = ٨٤° ٥١' ٢٦' س = ١٠١° ٤٦' ٥٦' وب س = ١١٢° ٤٦' ٢٧'

(٤) مفروض اب ٤٨° ٢٤' ١٦' وب س ٥٩° ٢٨' ٢٧'

مطلوب بقية اجزاء المثلث

اس = ٧٠° ٢٢' ٤٢' وس = ٤٠° ٢٠' ٥٢' ٥٦'

(٥) مفروض اب ١٥١° ٢٢' ٩' وب س ١٦° ٢٥' ١٤'

مطلوب الاجزاء الاخر

اس = ١٤٧° ١٦' ١٥' وس = ١١٧° ٢٧' ٢٥' وا = ٢١° ٥٢' ٤٩'

(٦) مفروض اب ٧٣° ٤' ٢١' واس ٨٦° ١٢' ١٥'

مطلوب الاجزاء الاخر

ب س = ٧٦° ٥١' ٢٠' وا = ٧٧° ٢٤' ٢٢' وس = ٧٣° ٢٩' ٤٠'

(٧) مفروض اس ١١٨° ٢٢' ١٢' واب ٤٧° ٢٦' ٢٥'

مطلوب الاجزاء الاخر

ب س = ١٢٤° ٥٦' ٢٠' وا = ١٢٦° ١٩' ٢' وس = ٥٦° ٥٨' ٤٤'

(٨) مفروض اب ٤٠° ٢٢' ٢٢' واس ١٠٠° ٧' ٢٢'

مطلوب الاجزاء الاخر

ا = ٩٨° ٢٨' ٥٢' وس = ٤١° ٤' ٦' وب س = ١٠٢° ١٢' ٥٢'

(٩) مفروض اس ٢٢° ٢' ٢٢' وا = ٤٩° ٢٨' ١٢'

مطلوب الاجزاء الاخر

اب = ٤٩° ٢٦' ٦' وس = ٦٠° ٢٩' ٢٠' وب س = ٤١° ٤١' ٢٢'

(١٠) مفروض اب ٢٩° ١٢' ٥٠' وس ٢٦° ٢٦' ٢١'

مطلوب الاجزاء الاخر

ملحس ١ = ٦٥° ٢٧' ٥٧' او كالم

اس = ٥٢° ٢٤' ١٢'

ب س = ٤٦° ٥٥' ٢'

(١١) مفروض اب ١٠٠° ١٠' ٢' وس ٩٠° ١٤' ٢٠'

مطلوب الاجزاء الاخر

حساب المثلثات الكروية

ملتبس . اس = $100^{\circ} 9' 52''$ او كمالها

ب س = $1^{\circ} 19' 50''$. .

ا = $1^{\circ} 21' 12''$. .

(١٢) مفروض اب $54^{\circ} 21' 25''$ وس $61^{\circ} 2' 10''$

مطلوب بقية الاجزاء

ملتبس . ب س = $129^{\circ} 28' 28''$ او كمالها

ا س = $111^{\circ} 44' 24''$. .

ا = $123^{\circ} 47' 44''$. .

(١٣) مفروض اب $121^{\circ} 26' 25''$ وس $111^{\circ} 14' 27''$

مطلوب بقية الاجزاء

ملتبس . ا = $146^{\circ} 0' 50''$ او كمالها

اس = $66^{\circ} 10' 28''$. .

ب س = $140^{\circ} 20' 57''$. .

مثلثات ربعية

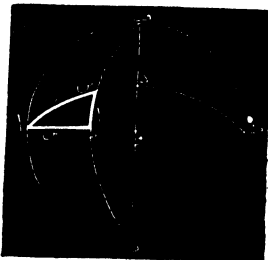
تحل مسائل المثلثات الربعية مثل مسائل مثلثات قائمة الزاوية كما

يتضح من (شكل ٤٧)

إذا فُرض مثلث ربعي فلا بد من اربعة وهذه الاربعة مع مثلث واحد قائم الزاوية

شكل ٤٧

تدخل نصف الكرة تماماً فلاجل حل احدى



المثلثات الربعية ا ف س ا ر س ث ف س

ث ر س يكفي حل المثلث الصغير القائم الزاوية

ا ب س . اذا اضيف ا ب س الى نصف الملال

ا ر ب يكون المجمع المثلث الربعي ا ر س

ويطرح منه نصف الملال ا ف ب يبقى المثلث

الربعي ا ف س

اذا عُرِف ا س يُعرَف كالتس وهو ضلع من ث ف س ومن ث ر س

إذا عُرِفَ س ب و اضيف اليه ٩٠ يكون المجمع رس او طُرِحَ من ٩٠
 يبقى س ف وهو ضلع من اضلاع ا ف س ومن اضلاع ت ف س

عملية اولى

في مثلث رباعي مفروض الضلع الرباعي ٩٠ وضلع يليه ٤٢ ٢١
 والزاوية المقابلة هذا الضلع الثاني ٣٦ ٢١ مطلوب بقية الاجزاء

من هذا المفروض لا يعلم هل المثلث المطلوب هو ا ف س او ا ر س لان
 ا س = ٤٢ ٢١ مشترك بينهما والزاوية ا ف س = ا ر س = ٣٦ ٢١ = ا ب
 فلنحل ا ب س

لاستعلام الزاوية ا افرضها الاوسط

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ق \times ن ج س ا ب &= \frac{1}{2} ق \times ج ف ا س = ن م ا س \times م ا س ا ب \\ ١٠٠٠٤٠٢٢١ &= ٢١ ٤٢ = ٢١ ٣٦ \\ ٩٨٦٩٤٧٣ &= ٢١ ٣٦ \\ ن ج س ا ب &= ٣٥ ٤٠ ٥١ = ٩٩٠٩٧٠٤ \\ &٩٠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٥٤ ١٩ ٩ &= ف ا س \\ ١٢٥ ٤ ٥١ &= ر ا س \end{aligned}$$

لاستعلام الزاوية س افرضها الاوسط

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ق \times ن ج ا س ب &= ج س ا ب \times ن ج ا ب \\ ٩٧٦٥٨٦٩ &= ٣٥ ٤٠ ٥١ = ٩٧٦٥٨٦٩ \\ ن ج ا ب &= ٣٦ ٥١ = ٩٩٠٥٠٨٥ \\ ن ج ا س ب &= ٦٢ ٢ ٤٥ = ٩٦٧٠٩٥٤ \\ &١٨٠ \end{aligned}$$

$$١١٧ ٥٧ ١٥ = ا س ف = ت س ر$$

لاجل استعلام الضلع ب س افرضه الاوسط

حساب المثلثات الكروية

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \times \text{ج ب س} &= \text{ماس ا ب} \times \text{ن م ا س} \\ \text{ماس ا ب} &= ٢٦^\circ ٢١' = ٩٨٦٩٤٧٣ \\ \text{ن م ا س} &= ٦٢^\circ ٢' = ٩٧٣٤٨٣٥ \\ \hline \text{ج ب س} &= ٢٢^\circ ٨' = ٩٥٩٤٣٠٨ \end{aligned}$$

$$\text{ف س} = ٦٦^\circ ٥١' = ٤٩$$

$$\text{ر س} = ١١٢^\circ ٨' = ١١$$

فلنا كل الزوايا وكل الاضلاع في المثلثات الاربع المذكورة

عملية ثانية

مفروض مثلث كروي ربعي الضلع الربعي ٩٠° وضع يليه ٩٠° ١١٥°
والزاوية بينهما ١١٥° ٥٥° مطلوب بقية الاجزاء

ارسم كما تقدم فالشروط تدل على ان المثلث الواقعة عليه المسئلة انما هو المثلث ر س
ت ر = ٩٠° ولنفرض ت س ١١٥° ٩° فالزاوية ر ت س = ١١٥° ٥٥°
= رد من ر ت س اطرح ٩٠° اي ر ت ب تبقى وت د = ب ا س =
١٢٥° ٥٥° فتعامل هنا ايضا المثلث ا ب س . اطرح ت س من ١٨٠° يبقى
٦٤° ٥١' = ا س

لاجل استعمال ب س افرضه الاوسط

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \times \text{ج ب س} &= \text{ج ا س} \times \text{ج ب ا س} \\ \text{ج ا س} &= ٦٤^\circ ٥١' = ٩٩٥٦٧٤٤ \\ \text{ج ب ا س} &= ٢٥^\circ ٥٥' = ٩٦٤٠٥٤٤ \\ \hline \text{ج ب س} &= ٥٢^\circ ١٨' = ٩٥٩٧٣٨٨ \end{aligned}$$

$$\text{ر س} = ١١٢^\circ ١٨' = ١٦$$

لأجل استعمال اب اجعلها اوسط

ق × ج اب = ماس ب س × ن م ب اس

$$٩'٦٣٤٢٥١ = '١٩ '١٨ '٢٣ = \text{ماس ب س}$$

$$٩'٢١٢٤٢٣ = '٥٥ '٢٥ = \text{ن م ب اس}$$

$$٨'٩٤٧٦٧٤ = '٨ '٢٦ '٦٢ = \text{ج اب}$$

١٨٠

$$\text{ت رس} = '٥٢ '٢٣ '١١٧$$

لأجل استعمال الزاوية س افرصها الاوسط

ق × ن ج س = ن م اس × ماس ب س

$$٩'٦٧١٦٣٤ = '٥١ '٦٤ = \text{ن م اس}$$

$$٩'٦٣٤٢٥١ = '١٩ '١٨ '٢٣ = \text{ماس ب س}$$

$$٩'٣٠٥٨٨٥ = '٥٣ '١٩ '٧٨ = \text{ن ج س}$$

١٨٠

$$\text{رس ت} = '٧ '٤٠ '١٠١$$

$$\text{الجواب} \left\{ \begin{array}{l} \text{فقد استعملنا الضلع رس} = '١٩ '١٨ '١١٢ \\ \text{الزاوية ت رس} = '٥٢ '٢٣ '١١٧ \\ \text{رس ت} = '٧ '٤٠ '١٠١ \end{array} \right.$$

عمليات

(١) في مثلث رباعي مفروض الضلع الرباعي ٩٠° وضلع يليه ٦٧° والزاوية بينها

١٨° ٤٩' مطلوب بقية اجزاء المثلث

الجواب . الضلع الآخر ٥٣° ٥' ٤٤' والزاوية المقابلة الضلع الرباعي ١٠٨° ٣٣'

٢٩° والزاوية الاخرى ٦٠° ٤٨' ٥٤'

(٢) مفروض مثلث رباعي الضلع الرباعي ٩٠° وزاوية تليها ١١٨° ٤٠' ٣٦'

والضلع المقابلة لها ١١٣° ٢' ٢٨' مطلوب بقية اجزاء المثلث

الجواب . الضلع الآخر ٥٤° ٣٨' ٥٧° والزاوية المقابلة لها ٥١° ٢' ٣٥° والزاوية

المقابلة الضلع الرباعي ٧٢° ٢٦' ٢١'

- (٢) مفروض مثلث ربعي الضلع ربعي ٩٠° والزائويان اللتان تليانه الواحدة $٩٦^\circ ١٣' ٤٦''$ والآخرى $٧٣^\circ ١٢' ٤٠''$ مطلوب بقية الاجزاء
الجواب . ضلع $٧٠^\circ ٨' ٢٩''$ والضلع الآخر $٧٣^\circ ١٧' ٢٩''$ والزاوية المقابلة الضلع ربعي $٩٦^\circ ١٣' ٢٣''$
- (٤) مفروض مثلث ربعي الضلع ربعي ٩٠° وضلع يليه $٨٦^\circ ١٤' ٤٠''$ والزاوية المقابلة هذا الضلع $٢٧^\circ ١٢' ٢٠''$ مطلوب بقية الاجزاء
الضلع الآخر $٤٣^\circ ٢' ٢٢''$ والزاوية المقابلة $٥١^\circ ٢٢' ٢٢''$ والزاوية المقابلة الضلع ربعي $١٤٣^\circ ٤٢' ٢٠''$
- (٥) مفروض مثلث ربعي الضلع ربعي ٩٠° والضلعان الاخران الواحد $١١٨^\circ ٢٢' ١٦''$ والآخر $٦٧^\circ ٤٨' ٤٠''$ مطلوب الزوايا الثلاث
الزوايا $٦٤^\circ ٢٢' ٢١''$ و $١٢١^\circ ٢' ٤٠''$ و $٧٧^\circ ١١' ٦''$ الكبرى تنجاه الضلع الاطول
- (٦) مفروض مثلث ربعي الضلع ربعي ٩٠° والزاوية المقابلة $١٠٤^\circ ٤١' ١٧''$ وضلع يلي الضلع ربعي $٧٣^\circ ٢١' ٦''$ مطلوب بقية الاجزاء
الجواب . الضلع الآخر $٤٩^\circ ٤٣' ١٦''$ والزاوية الواحدة $٤٧^\circ ٤٣' ٢٨''$ والزاوية الاخرى $٦٧^\circ ٥٦' ١٣''$

مثلثات كروية غير قائمة الزاوية

كل مسائل هذا الباب تحل بقواعد المثلثات الكروية ذوات القائمة
الا الواقعة تحت مفروضين لان كل مثلث كروي غير قائم الزاوية مولف
من مجنec مثلثين كرويين قائمين او من فضلتهما
اذا فرض ضلع وزاويتان او اذا فرضت زاوية وضلعان فاعل
حسب هذه القاعدة

ارسم عموديا من طرف ضلع ومقابل زاوية مفروضة او كمالها فينقسم به
المثلث الى مثلثين كرويين كل واحد قائم الزاوية وواحد منها مفروض

وترى وضع يليه منها تستعلم بقية الاجزاء فتستخدم لمعرفة ما يطلب من
المثلث الاول ولجل التسهيل قد جمعنا هنا القواعد المذكورة في القضايا
الما ذكرها

(١) جيوب اضلاع مثلث كروي متناسبة الى جيوب الزوايا التي
تقابلها

(٢) اذا انقسمت القاعدة بواسطة عمودي عليها من الزاوية المقابلة
فجيبا قسي القاعدة متناسبان الى نظير ماسي الزاويتين اللتين تليانها
(٣) نظير جيب قسي القاعدة متناسبة الى نظير جيب الضلعين
الذين يليانها

(٤) ماسا قسي القاعدة متناسبان بالتكافؤ الى نظير ماسي قسي
الزاوية المقابلة

(٥) نظير جيب الزاويتين عند القاعدة متناسبان الى جيب قسي
الزاوية المقابلة القاعدة كل واحد الى القسم الذي يليه
(٦) نظير جيب قسي الزاوية المنقسمة متناسبان الى نظير ماسي
الضلعين اللذين يليانها

اما المفروضان المستثنيان المشار اليهما انفا فها

(١) اذا فرض الاضلاع وطُلبت الزوايا

(٢) اذا فرضت الزوايا الثلاث وطُلبت الاضلاع

والاول اهم وتعل المسئلة بواسطة معادلات (ط) و (ظ) من
القضية السابقة المذكورة انفا

لفرض كما تقدم ا ب س مثلثا كرويا زواياه ا ب و س واضلاعه
ا و ب و س الضلع آ يقابل الزاوية ا وهم جراً

مثال اول. في المثلث ا ب س مفروض آ = ٧٠° ٤' ١٨" و ب = ٦٣° ٢١' ٢٧" و س = ٥٩° ١٦' ١٢" مطلوب الزاوية ا

العبرة الاولى من عبارات (ط) هي

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} ق \times ج \times ص \times ج (ص - آ)}{ج ب \times ج س} \right) = ١ \frac{1}{2}$$

ونضع كتابة الجانب الثاني هكذا

اي اربعة اضلاع تحت علامة الجذر

$$\sqrt{\frac{1}{2} ق \times ج \times ص \times ج (ص - آ)} \times \frac{1}{ج س}$$

نسب $\frac{1}{2} ق$ هو ١٠ - نسب ج ب ونسب ج ب

$\frac{1}{2} ق$ هو ١٠ - نسب ج س اي المثلث الجيب

ب س = آ = ٧٠° ٤' ١٨" = ١٨° ٢٢' ٢٣" المثلث الجيب
 ا ب = س = ٥٩° ١٦' ١٢" = ٦٩° ٦٥' ٦٧"
 ا س = ب = ٦٣° ٢١' ٢٧" = ٤٩° ٤٨' ٧٤"

$$\frac{١٩٢° ٤٢' ٨''}{٢}$$

ص = ٩٦° ٢١' ٤' جيب ٩٩٧٢٢٦
 ص - آ = ٢٦° ١٦' ٤٦' ٩٦٤٦١٥٨

$$\frac{١٩٢° ٧٥' ٧٩''}{٢}$$

١ $\frac{1}{2}$ = ٤٠° ٤٩' ١٠ ج ٩٨٧٨٩٦٥

$$\frac{٢}{١ - ٢٠° ٢٨' ٨''}$$

اذا استخدمنا هذه المعادلة لاستعلام ا نكتب آ اولاً في راس العمود واذا استخدمناها لاستعلام ب نكتب ب اولاً في راس العمود هكذا

لأجل استعمال الزاوية ب

$$\left| \frac{\frac{1}{2} \text{ ق} \times \text{ج} \times \text{ص} \times (\text{ص} - \text{ب})}{\text{ج} \times \text{أ} \times \text{ج} \text{ س}} \right|_2 = \text{ج} \frac{1}{2} \text{ ب}$$

$$= \left| \frac{1}{2} \text{ ق} \times \text{ج} \times \text{ص} \times (\text{ص} - \text{ب})}{\text{ج} \text{ س}} \times \frac{1}{2} \text{ ق} \right|_2 =$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ب} & = & 62^\circ 21' 27'' \\ \text{س} & = & 59^\circ 16' 22'' \text{ من جيب} \\ \text{أ} & = & 70^\circ 4' 18'' \end{array}$$

$$2) 192^\circ 42' 8''$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ص} & = & 96^\circ 21' 42'' \text{ جيب} \\ (\text{ص} - \text{ب}) & = & 34^\circ 59' 27'' \end{array}$$

$$2) 192^\circ 42' 8''$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ب} & = & 30^\circ 4' 49'' \text{ ن ج} \\ & & 2 \end{array}$$

$$\text{ب} = 70^\circ 9' 28''$$

بالمعادلة الاخرى في (ط) نستعلم الزاوية س ولكن لأجل زيادة الايضاح

نستعلم س بواسطة المعادلة الثالثة من معادلات (ظ)

$$\left| \frac{\frac{1}{2} \text{ ق} \times \text{ج} \times (\text{ص} - \text{ب}) \times (\text{ج} - \text{أ})}{\text{ج} \text{ ب} \times \text{ج} \text{ أ}} \right|_2 = \text{ج} \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$= \left| \frac{1}{2} \text{ ق} \times \text{ج} \times (\text{ص} - \text{ب}) \times (\text{ج} - \text{أ})}{\text{ج} \text{ ب} \times \text{ج} \text{ أ}} \right|_2 =$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ص} & = & ٥٩^\circ ١٦' ٢٢'' \\ \text{آ} & = & ٧٠^\circ ٤' ١٨'' \text{ متم جيب } ٠.٢٦٨١٧ \\ \text{ب} & = & ٦٢^\circ ٢١' ٢٧'' \text{ . . } ٠.٤٨٤٧٩ \end{array}$$

$$\text{٢) } ١٩٢^\circ ٤٢' ٨''$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ص} & = & ٩٦^\circ ٢١' ٤'' \\ \text{ص-آ} & = & ٢٦^\circ ١٦' ٤٦'' \text{ جيب } ٩'٦٤٦١٥٨ \\ \text{ص-ب} & = & ٢٢^\circ ٥٩' ٢٧'' \text{ . } ٩'٧٢٦٠٢٤ \end{array}$$

$$\text{٢) } ١٩'٤٥٧٤٨٨$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{١}{\text{ف}} \text{س} & = & ٢٢^\circ ٢٢' ١٧'' \text{ جيب } ٩'٧٧٨٧٤٤ \\ & & ٢ \end{array}$$

$$\text{س} = ٦٤^\circ ٤٦' ٢٤''$$

لاجل ايضاح اتفاق هذين الصنفين من المعادلات
لنستعلم الزاوية ١ من المعادلة

$$\text{ج } \frac{١}{\text{ف}} = \frac{\frac{١}{\text{ف}} \text{ق}}{\text{ج ب}} \times \frac{\frac{١}{\text{ف}} \text{ق}}{\text{ج س}} \times (\text{ص-ب}) \times (\text{ص-س})$$

$$\begin{array}{rcl} \text{آ} & = & ٧٠^\circ ٤' ١٨'' \\ \text{ب} & = & ٦٢^\circ ٢١' ٢٧'' \text{ متم جيب } ٠.٤٨٧٤٩ \\ \text{س} & = & ٥٩^\circ ١٦' ٢٢'' \text{ . } ٠.٦٥٦٩٧ \end{array}$$

$$\text{٢) } ١٩٢^\circ ٤٢' ٨''$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ص} & = & ٩٦^\circ ٢١' ٤'' \\ \text{ص-ب} & = & ٢٢^\circ ٥٩' ٢٧'' \text{ جيب } ٩'٧٢٦٠٢٤ \\ \text{ص-س} & = & ٢٧^\circ ٤' ٤١'' \text{ . } ٩'٧٨٠٢٤٧ \end{array}$$

$$\text{٢) } ١٩'٦٣٠٧٣٧$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{١}{\text{ف}} & = & ٤٠^\circ ٤٩' ١٠'' \text{ جيب } ٩'٨١٥٢٦٣ \\ & & ٢ \end{array}$$

$$١ = ٨١^\circ ٢٨' ٢٠''$$

مثال ٢- في مثلث كروي ا ب س مفروض الزاوية ١٨° ١٩' ٤٨' والزاوية ب ٤٨° ٠' ١٠' والزاوية س ١٢١° ٨' ٦' مطلوب الاضلاع آ ب س

بمعادلة المثلث القطبي لنا

$$١ = ١٨^\circ ١٩' ٤٨' \text{ كماها } ١٤١^\circ ٤٠' ٤٢'$$

$$\text{ب} = ٤٨^\circ ٠' ١٠' \text{ . } ١٢١^\circ ٥٩' ٥٠'$$

$$\text{س} = ١٢١^\circ ٨' ٦' \text{ . } ٥٨^\circ ٥١' ٥٤'$$

ثم نستعلم زوايا هذا المثلث هكذا

$$١٤١^\circ ٤٠' ٤٢'$$

$$١٢١^\circ ٥٩' ٥٠' \text{ متم جيب } ١٢٨٩٠٩'$$

$$٥٨^\circ ٥١' ٥٤' \text{ . . } ٠٦٧٥٥١'$$

$$\text{٢) } ٢٢^\circ ٢٦' ٢٢'$$

$$١٦٦^\circ ١٦' ١٢' \text{ جيب } ٢٧٥٢٧٥'$$

$$٢٤^\circ ٢٥' ٢١' \text{ . } ٢٦١٩٢٥٢'$$

$$\text{٢) } ١٩^\circ ١٩١' ٠٨٨'$$

$$٦٦^\circ ٤٧' \frac{٢٧}{٢} \text{ ن ج } ٥٩٥٥٤٤'$$

٢

$$١٢١^\circ ٢٥' ١٥' = \text{زاوية}$$

$$٥٨^\circ ٢٤' ٤٥' = \text{كماها} = \text{آ من المثلث الاصلی}$$

$$\text{وعلى هذا النسق يستعلم ب} = ٦٠^\circ ١٤' ٢٥'$$

$$\text{س} = ٨٩^\circ ١' ١٤'$$

وقد تستعلم الاضلاع رأساً بمعادلات غ او غ وجه ١٤٧ فلنستعلم الضلع ب باحدى تلك المعادلات

$$\text{ج} \frac{١}{٢} = \text{ب} \left(\frac{\text{ن ج ص} \times \text{ن ج (ص - ب)}}{\text{ج} \times \text{ا ج س}} \right)$$

$$١٧'١٩'' ٢٨ = ١$$

$$١٠' ٠'' ٤٨ = ب$$

$$٦' ٨' ١٢١ = س$$

$$٢) ٢٤' ٢٧' ٢٠٧$$

$$٢' ٢٧٥٢٧٦ = ٤٧' ٤٢' ١٢ ج + = ن ج ص$$

$$٢' ٧٥٠٦١٢ = ٢٧' ٤٢' ٥٥ = (ب - ص) ن ج$$

$$٢) ١٩' ١٢٥٩٨٨$$

$$٢٧' ٢٢' ٥٥ = (ص - ب)$$

$$٢' ٥٦٢٩٩٤ = الجذر$$

$$٢' ٧٩٢٤٤٥ = ١٨' ١٩'' ٢٨ = ج$$

$$٢' ٩٢٢٤٤٢ = ٦' ٨' ١٢١ = ج س$$

$$٢) ١٩' ٧٢٤٨٨٨$$

$$٢' ٨٦٢٤٤٤ = الجذر$$

$$١' ٧٠٠٥٥٠ = النضلة$$

$$١٠ = اضع ١٠ ق جدولي$$

$$٢' ٧٠٠٥٥٠ = جيب ١٠ ب = ٢٠' ٧' ١٤$$

$$٢$$

$$ب = ٦٠' ١٤' ٢٨ تقريباً$$

عمليات

(١) في مثلث كروي ا ب س اضلاعه آ ب س مفروض ب = ١١٨' ٢

١٤' وس = ١٢٠' ١٨' ٢٢' والزوايا بينها = ٢٧' ٢٢' ٢٤' مطلوب بقية
اجزاء المثلث

الجواب آ = ٢٢' ٥٧' ١٢' الزاوية ب = ٩١' ٢٦' ٤٤' وس = ١٠٢' ٥٢' ٥

(٢) مفروض آ = ٨١' ٢٨' ١٧' وب = ٧٠' ٩' ٢٨' وس = ٦٤' ٤٦'

٢٢' مطلوب آ و ب وس الاضلاع

الجواب آ = ٧٠' ٤' ١٢' ب = ٦٣' ٢١' ٢٤' وس = ٥٩' ١٦' ٢١'

(٢) مفروض الاضلاع الثلاثة $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٩٣^\circ ٢٧' ٢٤''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ١٠٠^\circ ٤' ٢٦''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٩٦^\circ ١٤' ٥٠''$ مطلوب الزوايا $\overset{\circ}{\underset{'}{A}}$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}}$ وس
 الجواب $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٩٤^\circ ٢٩' ٤''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ١٠٠^\circ ٣٢' ١٩''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٩٦^\circ ٥٨' ٤٥''$
 (٤) مفروض ضلعان $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٨٤^\circ ١٦'$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٨١^\circ ١٢'$ والزاوية $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٨٠^\circ ٢٨'$ مطلوب بقية الاجزاء

الجواب ملتبس لان الزاوية $\overset{\circ}{\underset{'}{B}}$ قد تكون حادة وقد تكون منفرجة فاذا كانت $\overset{\circ}{\underset{'}{B}}$ حادة تكون $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٩٧^\circ ١٣' ٤٥''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٨٣^\circ ١١' ٢٤''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٩٦^\circ ١٣' ٢٣''$ واذا كانت $\overset{\circ}{\underset{'}{B}}$ منفرجة تكون $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٢١^\circ ١٦' ٢٣''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٩٦^\circ ٤٨' ٢٦''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٢١^\circ ١٩' ٢٩''$
 (٥) مفروض الضلع $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٦٤^\circ ٢٦'$ والزاويتان اللتان تليانه $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٤٩^\circ$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٥٢^\circ$ مطلوب بقية الاجزاء

الجواب $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٤٥^\circ ٥٦' ٤٦''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٤٣^\circ ٢٩' ٤٩''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٩٨^\circ ٢٨' ٤٦''$
 (٦) مفروض الاضلاع الثلاثة $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٩٠^\circ$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٩٠^\circ$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٩٠^\circ$ مطلوب الزوايا $\overset{\circ}{\underset{'}{A}}$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}}$ وس

الجواب $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٩٠^\circ$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٩٠^\circ$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٩٠^\circ$
 (٧) مفروض ضلعان $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٧٧^\circ ٢٥' ١١''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ١٢٨^\circ ١٣' ٤٧''$ والزاوية $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ١٢١^\circ ١١' ١٢''$ مطلوب بقية الاجزاء

الجواب $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٨٤^\circ ٢٩' ٢٠''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٦٩^\circ ١٣' ٥٩''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٧٢^\circ ٢٨' ٤٢''$
 (٨) مفروض الاضلاع الثلاثة $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٦٨^\circ ٢٤' ١٢''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٥٩^\circ ٢١' ١٨''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ١١٢^\circ ١٦' ٢٢''$ مطلوب الزوايا $\overset{\circ}{\underset{'}{A}}$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}}$ وس

الجواب $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٤٥^\circ ٢٦' ٢٨''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٤١^\circ ١١' ٢٠''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ١٢٤^\circ ٥٣' ٥٥''$
 (٩) مفروض $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٨٩^\circ ٢١' ٢٧''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٩٧^\circ ١٨' ٢٩''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٨٦^\circ ٥٢' ٤٦''$ مطلوب $\overset{\circ}{\underset{'}{A}}$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}}$ وس

الجواب $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٨٨^\circ ٥٧' ٢٠''$ و $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٩٧^\circ ٢١' ٢٦''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ٨٦^\circ ٤٧' ١٧''$
 (١٠) مفروض $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ٢١^\circ ٢٦' ٤١''$ وس $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٤٣^\circ ٢٢' ١٢''$ والزاوية $\overset{\circ}{\underset{'}{C}} = ١٢^\circ ١٦'$ مطلوب بقية الاجزاء

الجواب ملتبس . $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٧٣^\circ ٧' ٢٤''$ او $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ١٢^\circ ١٧' ٤٠''$
 الزاوية $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ١٥٧^\circ ٢' ٤٤''$ او $\overset{\circ}{\underset{'}{B}} = ٥٨^\circ ٢٠''$
 س $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ١٦^\circ ١٤' ٢٧''$ او $\overset{\circ}{\underset{'}{A}} = ١٦٣^\circ ٤٥' ٢٢''$

(١١) مفروض الزاوية $1 = 56^{\circ} 18' 40''$ وب $49^{\circ} 10' 28''$ و 1 د واحد من قسي القاعدة $23^{\circ} 54' 16''$ النقطة د واقعة على القاعدة ا ب والزاوية س منفرجة . مطلوب اضلاع المثلث والزاوية س

الجواب ملتبس س $125^{\circ} 20'$ او $125^{\circ} 07'$

مس = ۱۲۲° ۲۹' ، ۱۲۴° ۱۹'

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ, \angle 2 = 180^\circ$$
$$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n = \bar{z}$$

(۱۲) مفروض ۱ = $80^{\circ} 10' 10''$ وب $8^{\circ} 48' 26''$ وس = $91^{\circ} 52' 41''$ مطلوب آ وب وس

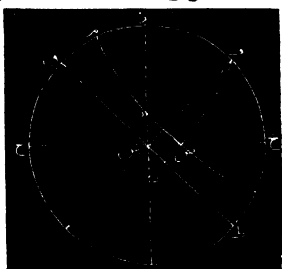
الجواب أ = $79^{\circ} 28' 22''$ وب = $8^{\circ} 49' 16''$ وس = $87^{\circ} 12' 50''$

في استخدام حساب المثلثات الكروية في علم الهيئة

ان مسائل كثيرة من مسائل علم الهيئة وعلم الجغرافية مرجعها الى حساب المثلثات الكروية وقد ذكرنا هنا بعضها ترغيباً للمطالع وتبييناً للفائدة الحاصلة من هذا الفن فلنوضح كيفية اطباق بعض العمليات المتقدم ذكرها في حل مسائل علم الهيئة

لنفرض خطوط هذا الرسم دوائر مرسومة في التقدير السماوي ولتكن زمت الرأس
 وح خ الافق وح ز ف خ خط نصف النهار و ق ط خط الاستواء و ف قطبة
 فيكون ق ز = ف خ عرض الناظر
 و ف ز متم العرض و م ر ص دائرة
 توازي خط الاستواء ولنفرض في هذا
 الرسم ميل الشمس شمالاً د ص. فبواسطة
 دوران الارض البومي على محورها تشرق
 الشمس عند ص وتنتهي الى خط نصف

شكل ٤٨



النهار عند م وتحدو على تلك الدائرة نفسها من الجانب الآخر. اما الخط ز د ففوس من دائرة سميت المتسامنة الاولى اي تمر بسمت الراس وبالنقطة الشرقية والغربية من

الافق . فاذا كان العرض شمالياً وميل الشمس ايضاً شمالياً تشرق الشمس الى شمال نقطة الافق الشرقية وتغرب الى شمال النقطة الغربية ويتناس بعد ها عن هاتين النقطتين بالقوس ص س على الافق وهذه القوس نستعمل بواسطة المثلث الكروي القائم الزاوية س د ص القائمة عند د لان د ص = ميل الشمس والزاوية ص س د = متم عرض المكان لان الزاوية ف س خ = العرض وص س د متمها والضلع س د قسم من خط الاستواء يقبض كم تشرق الشمس قبل الساعة السادسة او كم تغيب بعد الساعة السادسة اذا لحقت الشمس ر اي كانت على المتسامية الاولى تكون الى شرقي الناظر او الى غربيه فيستعمل ذلك من المثلث ز ف ر . الضلع ز ف = متم العرض والزاوية ف ز ر قائمة و ف ر بعد الشمس القطبي = متم ميلها . فلنا وتر مثلث كروي قائم الزاوية وضلع من اضلاعه فيستعمل بقية اجزائه . فالزاوية ز ف ر = الساعة قبل الظهر او بعده و ز ر بعد الشمس عن سمت الراس = متم ارتفاعها وقد وضعنا هنا بعض المسائل ايضاحاً لكثرة العلامات التي تحل بواسطة المثلث س د ص

عمليات

(١) في اية ساعة تشرق الشمس في مكان عرضه ٤٨° شمالي اذا كان ميلها ٢١° شمالي

$$د ص = ٢١^\circ \quad ف خ = ف س خ = ٤٨^\circ \quad \text{فتكون}$$

ص د س = ٤٢° اي متم العرض . مطلوب القوس س د ثم نحويها الى وقت على ان كل ٤ دقائق تعدل درجة واحدة فهي عبارة عن كم تشرق الشمس قبل الساعة السادسة صباحاً وكم تغيب بعد الساعة السادسة مساءً بغير التفات الى الانكسار

افرض س د الاوسط فلنا

$$\frac{1}{4} ق \times ج س د = ماس ٢١ \times ماس ٤٨ \text{ او } ن م ٤٢$$

$$ماس ٢١ = ٩٠٨٤١٧٧$$

$$٤٨ = ١٠٠٠٤٥٥٦٣$$

$$\text{بعد طرح } ١٠ = ٩٠٦٣٩٧٤٠ = س د = ٢٥^\circ ١٤'$$

$$= ٢٥^\circ ٢٣٤٦'$$

$$\frac{٤}{٦}$$

$$٥٦ \quad ٤٠ \quad ٥١$$

$$٦$$

بالمجموع $٥٦ \quad ٤٠ \quad ٥٧$ وقت الغروب

بالطرح $٥٤ \quad ١٩ \quad ٤٦$. الشروق

إذا كان العرض شمالياً وميل الشمس جنوبياً فبالجمع يُحصل على وقت الشروق وبالطرح على وقت الغروب

(٢) ما هي ساعة الشروق وساعة الغروب في $42^{\circ} 40'$ عرض شمالي إذا كان ميل الشمس $23^{\circ} 12'$

(٣) ما هو وقت الشروق ووقت الغروب في عرض $23^{\circ} 54'$ شمالي إذا كان ميل 10° شمالياً وإذا كان 23° جنوبياً

ونستخدم عبارات المثلثات غير القائمة لاستعلام الوقت ولعرفة المسافة بين مكانين على سطح الكرة كما سيذكر في علم الهيئة مفصلاً

مساحة السطوح والأجسام

الفصل الأول

في مساحة اشكال يحيطها خطوط مستقيمة

(١) حدود السطوح والأجسام في هذا المؤلف هي كحدودها في

الهندسة

(٢) مساحة شكل هي مقدار الفسحة التي يحيط بها اضلاع الشكل

(٣) لما كان اعتماد العلماء في المساحة وعلم الهيئة على قياسات غير

مألوفة عند الشرقيين فافتضى ان نضع هنا جداول دالة على تلك

القياسات

جدول اول

في اسماء القياسات المعول عليها في مساحة الطول

٢ حبات شعير = عقدة اصبع

١٢ عقدة اصبع = قدم

٢ اقدام = ذراع

٦ اقدام = باع

١٦ $\frac{1}{4}$ قدم = قصبة

٥ $\frac{1}{4}$ اذرع = قصبة

٤ قصبات = سلسلة

$$٤٠ \text{ قصبة} = \text{رمية سهم}$$

$$٣٢٠ \text{ قصبة} = \text{ميل}$$

$$٢ \text{ اميال} = \text{فرسخ}$$

جدول ثانٍ

في اسماء القياسات المعول عليها في مساحة المربعات

$$١٤٤ \text{ عفدة اصبع} = \text{قدم مربع}$$

$$٩ \text{ اقدام} = \text{ذراع}$$

$$٣٦ \text{ قدماً} = \text{باغ}$$

$$\frac{٢٧٢}{٤} \text{ قدم} = \text{قصبة مربعة}$$

$$\frac{٣٠}{٤} \text{ ذراع} = \text{قصبة}$$

$$١٦ \text{ قصبة} = \text{سلسلة}$$

$$١٦٠٠ \text{ قصبة} = \text{رمية سهم}$$

$$١٠٢٤٠٠ \text{ قصبة} = \text{ميل مربع}$$

$$٩ \text{ اميال} = \text{فرسخ}$$

جدول ثالث

اسماء القياسات المعول عليها في النظام المعروف بالنظام العشري

مبدأ هذا النظام المتر وهو $\frac{١}{١٠٠٠٠٠٠}$ من ربع الهاجرة

$$١٠ \text{ دسيمترات} = \text{متراً}$$

$$١٠٠ \text{ ستمتر} =$$

$$١٠٠٠ \text{ مليمتر} =$$

$$١٠ \text{ مترات} = \text{ديكامتر}$$

$$١٠٠ \text{ متر} = \text{هكتومتر}$$

$$١٠٠٠ \text{ كيلومتر} =$$

$$١٠٠٠٠ \text{ مريامتر} =$$

$$١٠٠ \text{ دسيمترات مربعة} = \text{متراً مربعاً}$$

$$١٠٠٠٠ \text{ ستمتر مربع} = \text{ستمتر مربعاً}$$

$$١٠٠٠٠٠٠ \text{ ملليمتر مربع} = \text{متراً مربعاً}$$

$$١٠٠ \text{ متر مربع} = \text{آر}$$

$$١٠٠٠٠ \text{ هكتار} = \text{هكتار}$$

$$١٠٠٠ \text{ دسيمتر مكعب} = \text{متر مكعب}$$

$$١٠٠٠٠٠٠ \text{ سنتيمتر مكعب} = \text{دسيمتر مكعب}$$

$$١٠٠٠٠٠٠٠٠ \text{ ملليمتر مكعب} = \text{دسيمتر مكعب}$$

$$١ \text{ دسيمتر مكعب} = \text{ليتر}$$

(تابع الجدول الثاني)

$$١٦٠ \text{ قصبة} = \text{فدان}$$

$$١٠ \text{ سلاسل} = \text{فدان}$$

$$\text{ميل مربع} = ٦٤٠ \text{ فداناً} = ١٠٢٤٠٠ \text{ اقصبه} = ٢٧٨٧٨٤٠٠ \text{ قدم} = ٤٠١٤٤٤٨٩٦$$

عقدة اصبع او قيراطاً

العملية الأولى

في مساحة مربع او مستطيل او معين او شبه معين

(٤) اضرب احد الاضلاع في العمود الواقع عليه من الضلع الذي

يوازيه فما كان فهو المساحة (اقليدس ق ٢٦ ك ١)

مثال اول . كم قدماً مربعاً في سطح طولهُ $\frac{٢٢}{٢}$ قدماً وعرضهُ ١٨ قدماً

$$\text{الجواب } ١٨ \times \frac{٢٢}{٢} = ٤٢٢$$

(٢) ما هي مساحة قطعة ارض مربعة ضلعٌ منها ٦٦ قدماً

$$\text{الجواب } (٦٦)^2 = ٤٣٥٦ \text{ قدماً مربعاً} = ١٦ \text{ قصبة مربعة}$$

(٣) محلّ طولهُ ٢٢ ذراعاً وعرضهُ ١٧ ذراعاً وعلوّهُ ١١ ذراعاً فكم ذراعاً مربعاً

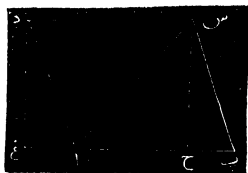
في حيطانهِ الاربعة

$$\text{الجواب } ٨٥٨$$

(٥) ان فرضت اضلاع شكل متوازي الاضلاع وزواياه يستعلم

العلو العمودي بحساب المثلثات المستوية

شكل ١



مثاله في شكل ا ب س د الخط س ح
العلو العمودي لثلث قائم الزاوية وتره ب
س وبحساب المثلثات (عد ١٢٤) لنا
هذه النسبة $\frac{1}{4} ق : ب س :: جيب ب :$

س ح ثم نستعلم المساحة بضرب س ح في ا ب او د س كما تقدم ويتم العلان
معاً بهذه النسبة

$\frac{1}{4} ق : جيب$ احدى زوايا الشكل

$::$ مسطح الضلعين المحيطين بالزاوية

: مساحة الشكل لان المساحة = ا ب $\times$ س ح و س ح =

ب س $\times$ جيب ب = فالمساحة = ا ب $\times$ ب س $\times$ جيب ب اي

$\frac{1}{4} ق$ $\frac{1}{4} ق$

$\frac{1}{4} ق : جيب ب :: ا ب \times ب س : المساحة$

مثال اول . مفروض الضلع ا ب = ٥٨ قصبة وب س = ٤٢ قصبة والزاوية

ب = ٦٣ فاهي مساحة الشكل

تنبيه . يُضرب ا ب $\times$ ب س بجمع نسيهما كما عرفت من حساب المثلثات

(عد ٢٩) وهذه صورة العمل

نسبة $\frac{1}{4} ق$ ١٠٠٠٠٠٠٠

: جيب ب ٦٣ ٩٩٤٩٨٨١

:: ا ب ٥٨ ١٧٦٢٤٢٨

$\times$ ب س ٤٢ ١٦٢٢٢٤٩

: المساحة ٢١٧٠٤٤ = ٢٢٣٦٥٥٨ قصبة مربعة

مثال ٢ مفروض ضلع معين ٦٧ ذراعاً واحدى زواياه ٧٣ فاهي مساحة

الجواب ٤٢٩٢٢٧ ذراعاً مربعاً

(٢) ماهي مساحة مشى طوله ٩ اذرع وه قراريط وعرضه ذراعان و ٧ قراريط

(٦) متى كان المفروض اقلماً وقراريط يتم الضرب بقاعدة ضرب

الاثني عشريات في علم الحساب وعدلنا عن ذكرها هنا لقللة استعماله

(٧) ان فرضت مساحة شكل متوازي الاضلاع وضلع منه يستعلم

الضلع الآخر بقسمة المساحة على الضلع المفروض وان فُرِضَتْ مساحة مربع يستعلم ضلعه باستخراج جذرها المالي كما علمت من الجبر (ع ٢٧٢ و ٢٧٣)

مثال اول . ما هو عرض ثوب طوله ٢٦ ذراعاً وفيه ٦٣ ذراعاً مربعاً
الجواب $1\frac{2}{3}$ ذراع

(٢) ما هو ضلع قطعة ارض فيها ٢٨٩ قصبة مربعة

(٣) كم ذراع بسط عرضه $1\frac{1}{4}$ ذراع يلزم لنرش محل طوله ١٥ ذراعاً وعرضه

$10\frac{1}{3}$ اذرع

الجواب ١٢٠ ذراعاً

(٤) ما هو طول ضلع مربع يساوي مستطيلاً طوله ٩٢٦ ذراعاً وعرضه ١٠٤ اذرع

(٥) كم لوح زجاج في طاقة علوها خمسة اقدام وعرضها قدامان و ٨ قراريط اذا

كان طول اللوح ١٠ قراريط وعرضه ٨ قراريط

العملية الثانية

في مساحة المثلث المستوي

(١) القاعدة الاولى . اضرب ضلعاً من اضلاع المثلث في نصف

العمود عليه من الزاوية المقابلة او اضرب نصف الضلع في العمود او اضرب

الضلع في العمود وخذ نصف الحاصل فما كان فهو المساحة . لانه اذا كان

مثلث وشكل ذو اضلاع متوازية على قاعدة واحدة وبين خطين

متوازيين يكون المثلث نصف الشكل (افلديس ق ٤١ ك ١)

مثال اول . مفروض ا ب ٦٥ قدماً

و س ف ٢١٢ قدماً فاي مساحة المثلث

الجواب ١٠١٤ قدماً مربعاً

مثال ٢ ما هي مساحة لوح مثلث الاضلاع قاعدة ٢ اقدام وقيراطان وعلوه

العمودي قدامان وتسع قراريط

الجواب ٤ اقدام و ٥١ قيراطاً



شكل ٢

(٩) ان فُرِض ضلعان من اضلاع المثلث والزاوية بينهما يستعلم العلو العمودي بحساب المثلثات وتستعلم المساحة ايضاً حسب ما تقدم في مساحة مستطيل (ع ٥)

مثال ذلك (شكل ١) في المثلث ا ب س $\frac{1}{2}$ ق : ب س :: جيب ب : س ج ولان المثلث نصف المستطيل لنا هذه النسبة $\frac{1}{2}$ ق : جيب زاوية من زوايا المثلث :: مسطح ضلعي الزاوية : مضاعف مساحة المثلث (ع ٥)

مثاله ان فُرِض ا س (شكل ١) ٣٩ قدماً و ا ب ٦٥ قدماً والزاوية ا $٥٣^{\circ} ٧' ٤٨''$ فاهي مساحة المثلث

الجواب ١٠١٤ قدماً

ان فُرِض ضلع واحد والزوايا تستعلم المساحة بهذه النسبة

نسبة مسطح $\frac{1}{2}$ ق X جيب الزاوية المقابلة الضلع المفروض : مسطح جيب الزاويتين الاخرين

:: مربع الضلع المفروض : مضاعف المساحة كما يتضح من (شكل ٢) لان

$\frac{1}{2}$ ق : جيب ب :: ب س : س ف

وجيب ا س ب : جيب ا :: ا ب : س ب

بضرب النسبتين $\frac{1}{2}$ ق X ج ا س ب : ج ب X ج ا :: ا ب X ب س : س ف

X س ب :: ا ب : ا ب X س ف = مضاعف مساحة المثلث

مثال . مفروض ضلع مثلث ٥٧ قدماً والزاويتان عند طرفي الضلع ٥٠° و ٦٠°

فاهي المساحة

الجواب ١١٤٧ قدماً مربعاً

(١٠) ان فُرِضت الاضلاع فقط تستعلم زاوية حسب المفروض الرابع

من حساب المثلثات المستوية الحادة الزوايا ومن ثم يتوصل الى معرفة

العلو العمودي والمساحة حسباً تقدم ويتوصل الى معرفة المساحة بدون

ذلك بواسطة هذه القاعدة

انقادة الثانية. اطرح كل ضلع على حدته من نصف مجنec الاضلاع واضرب الباقي الثلاث بعضها في بعض وفي نصف مجنec الاضلاع وخذ جذر المحاصل المالي

$$\text{مثاله ان فرضت الاضلاع } \bar{a} \text{ و } \bar{b} \text{ و } \bar{s} \text{ وفرض ن نصف مجنecها}$$

$$\text{فالمساحة} = \sqrt{n \times (\bar{a} - n) \times (\bar{b} - n) \times (\bar{s} - n)}$$

حسبا تبرهن في حساب المثلثات (ع ٢٢١) وان قُصِد انمام العمل بالانساب فاجمع انساب الكميات المحاصلة بعد الضرب والطرح ثم خذ نصف المجنec فاكان فهو نسب المساحة

مثال اول. في المثلث ا ب س (شكل ٢) مفروض الضلع $\bar{a} = ٥٢$ قدما و $\bar{b} = ٣٩$ قدما و $\bar{s} = ٦٥$ قدما مطلوب ضلع مربع مساحته تعدل مساحة المثلث

$$\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{s}) = n \quad ٧٨ = n - \bar{a} = ٢٦ \quad n - \bar{b} = ٢٩$$

$$n - \bar{s} = ١٢ \quad \text{فالمساحة} = \sqrt{١٢ \times ٢٩ \times ٢٦ \times ٧٨} = ١٠١٤ \text{ قدما مربعا}$$

وبالانساب

$$\frac{1}{2} \text{ المجنec} = ٧٨ = ١٨٩٢٠٩$$

$$\text{الباقي الاول} = ٢٦ = ١٤١٤٩٧$$

$$\text{. الثاني} = ٢٩ = ١٥٩١٠٦$$

$$\text{. الثالث} = ١٢ = ١١٢٩٤$$

$$\frac{٢) ٦٠١٢٠٦}{٢) ٣٠٠٦٠٣}$$

$$\text{المساحة} = ١٠١٤$$

$$\text{ضلع المربع} = ١٠٥٠٣٠١ = ٣١٨٤٣$$

مثال ٢ مفروض اضلاع مثلث ٢٧١ و ٢٦٤ و ٢٢ قدما فاي مساحته

(٢) مفروض اضلاع مثلث ١٣٤ و ١٠٨ و ٨٠ قصبة فاي مساحته

الجواب ٤٣١٩

(١١) في مثلث متساوي الاضلاع ان فرض ضلع منه $\bar{a}$ نصير

العبارة الدالة على المساحة

$$\sqrt{n \times (\bar{a} - n) \times (\bar{a} - n) \times (\bar{a} - n)} \quad \text{ون} = \frac{2}{3} \bar{a} \quad \text{ون} = ١$$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4}$ فتكون المساحة $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ اي مساحة مثلث متساوي الاضلاع = ربع مربع احد اضلاعه $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ مثال ١ ما هي مساحة مثلث كل من اضلاعه ٢٤ قدماً

الجواب $\frac{1}{4} \times ٥٠٠$ قدم

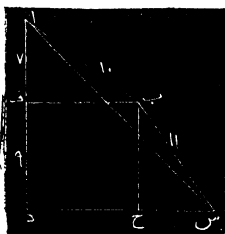
مثال ٢ كم فداناً في حقله مثلثة الاضلاع كل ضلع منها ١٠٠ قصبة

مثال ٣ قاعدة مثلث ٦٩٧ وضلع منه ٥٢٤ والضلع الآخر ٨١٢ ولرسم خط

ينصف الزاوية المقابلة القاعدة مطلوب طول كل قسم من قسبي القاعدة الحادتين من الخط المشار اليه (اقليدس ق ٢ ك ٦)

الجواب القسم الاطول ٦٨٤ و٤٢٠ والاقصى ٢٧٦

مثال ٤ ارسم ثلاثة خطوط متوازية عرضاً بعد الاعلى عن الاوسط ٧ وبعد



شكل ٢

الاسفل عن الاوسط ٩ اي ا ف = ٧

و ف د = ٩ ثم ارسم خطاً بين الاعلى والاوسط

= ١٠ = ا ب وبين الاوسط والاسفل

١١ = ب س ثم ارسم اس مطلوب طول

اس ومساحة المثلث اس ب (شكل ٢)

الجواب ا س = ٢٠٨٩ ولاجل مساحة ا ب س استعلم اولاً مساحة الشكل

ا ب ح د ثم مساحة ب ح س ومن المجموع اطرح مساحة ا د س

مثال ٥ اذا رسم ب س على الجانب الايسر من ب ح فاهو طول اس حينئذ

وما هي مساحة المثلث

الجواب ا س = ١٦٠٢١ والمساحة = $\frac{1}{2} (٤٠٦٧ + ٥١٦٩)$

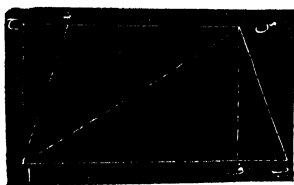
العملية الثالثة

في مساحة منحرف ذي ضلعين متوازيين

(١٢) اضرب نصف مجموع الضلعين المتوازيين في العلو العمودي

فما كان فهو المساحة

شكل ٤



مثال في (شكل ٤) ا ب س د
المساحة تساوي نصف مجتميع ا ب
وس د $\times$ العلو العمودي س ف او
اح لان الشكل كله مركب من المثلثين

اس ب اس د ومساحة اس ب = $\frac{1}{2}$ ا ب $\times$ س ف واس د = $\frac{1}{2}$ س د $\times$ ف
اح او س ف

مثال ١ ان فُرض ا ب = ٤٦ قدماً وب س = ٢١ قدماً وس د =
٢٨ قدماً والزوايا ب = ٧٠° فاي مساحة الشكل

$\frac{1}{2}$ ق : ب س :: جيب ب : س ف = ٢٩' ١٢ و $\frac{1}{2}$ ١٢٢٢٢ =

مثال ٢ فاي مساحة حثل له ضلعان متوازيان طول احدهما ٦٥ قصبة وطول

الآخر ٢٨ قصبة وبينهما ٢٧ قصبة



اذا فُرضت اضلاع منحرف ذي
ضلعين متوازيين مثل ا ب د س يستعمل
العمود بين المتوازيين دي او اف

شكل ٥

بهذه القاعدة

بعد العمود على الضلع الاطول عن (شكل ٥) ب اي ب ي = نصف فضلة
مربعي الضلعين الاقصرين مقسوماً على فضلة الضلعين الاطولين + نصف تلك الفضلة



بعد العمود على الضلع الاقصر

(شكل ٦) عن س اي ف س يعدل

كما تقدم الا نصف فضلة الضلعين

شكل ٦

الاطولين

لفرض ا ب = ٤٠ س د = ٢٢ اس = ١٥ د ب = ٢٠

$١٥ = \sqrt{٢٢٥} - ٢٠$ $٤٠٠ = ٢٢٥ - ٤٠٠$

$٨٧ \frac{1}{2} = ٢ \div ١٧٥$ $٢ \frac{1}{2} = ٢ \div ٧$ $٧ = ٢٢ - ٤٠$

$١٢ \frac{1}{2} = ٧ \div ٨٧ \frac{1}{2}$ $١٦ = ٢ \frac{1}{2} + ١٢ \frac{1}{2}$ $١٦ = ٢ \frac{1}{2} + ١٢ \frac{1}{2}$

$٩ = ٢ \frac{1}{2} - ١٢ \frac{1}{2}$ $٩ = ٢ \frac{1}{2} - ١٢ \frac{1}{2}$

$١٦ = \sqrt{٢٠٦} - ١٦ = ١٢ = \sqrt{٢١٥} - ٢٠$ $١٦ = ١٢ = \sqrt{٢٠٦} - ١٦$

اذا كانت فضلة الضلعين الاطولين اكثر من الخارج من قسمة فضلة مربعي الضلعين الاخرين على ٢ يكون ميل الضلعين الاقصرين الى الجهتين المتقابلتين كما في (شكل ٦) فعند ذلك يجب طرح الخارج المشار اليه من فضلة الضلعين الاطولين بعد قسمتها على ٢ فيكون لك بعد العمود الثاني على الضلع الاطول من الزاوية المقابلة

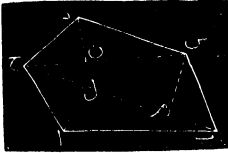
العميلة الرابعة

في مساحة منحرف كثير الاضلاع

(١٣) اقسام الشكل الى مثلثات برسم اقطار بين زواياه واستعلم مساحة كل مثلث على حده ثم اجمع المساحات فما كان فهو مساحة الشكل (ج ٢٧١)

ان وقع العمود في مثلثين على قطري واحد فمساحة الشكل المركب من المثلثين تساوي نصف مسطح القطر في مجموع العمودين

شكل ٧



مثاله في (شكل ٧) ا ب س ح المساحة

$$= \frac{1}{2} \times \text{ح} \times \text{ا} + \frac{1}{2} \times \text{ح} \times \text{ب} = \frac{1}{2} \times \text{ح} \times (\text{ا} + \text{ب})$$

مثاله ان فرض في شكل ا ب س د ح القطر ب ح = ٢٦ و س ح = ٢٢ والعمود ا ل = ٢٠ و س م = ٩٢ و د ن = ٧٢

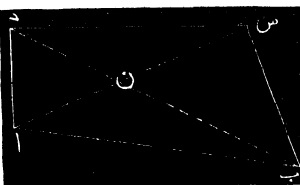
ف تكون المساحة ١٨ × ١٤٦ + ١٦ × ٧٢ = ٢٧٩٦ وعلى ذلك نستعلم مساحة كل شكل ذي اربعة اضلاع

(١٤) ان فرض قطرا منحرف ذي اربعة اضلاع تستعلم المساحة هذه النسبة

٢: جيب الزاوية عند نقطة تقاطع القطرين

:: مسطح القطرين : مضاعف مساحة الشكل

شكل ٨



مثاله في (شكل ٨) ا ب س د جيب

الزوايا الاربع عند ن متساوية لان

المحاذيت هما كمالا المنفرجتين فلكل

واحدة منها جيب واحد (ح م ع ٩٠)

ثم بوضع ن للدلالة على جيب كل واحدة من هذه الزوايا نستعلم مساحة المثلثات الاربع بهذه النسب حسب (ع ٩)

$$\frac{1}{4}ق : جيب ن :: ب ن \times ا ن : ٢ : مساحة ا ب ن$$

$$\frac{1}{4}ق : جيب ن :: ب ن \times س ن : ٢ : مساحة ب س ن$$

$$\frac{1}{4}ق : جيب ن :: د ن \times س ن : ٢ : مساحة س د ن$$

$$\frac{1}{4}ق : جيب ن :: د ن \times ا ن : ٢ : مساحة ا د ن$$

ثم يجمع النسب (ج ١٨٧) (اقليدس ق ٢ ك ٥ فرع)

$$\frac{1}{4}ق : جيب ن :: ب ن \times ا ن + ب ن \times س ن + د ن \times س ن + د ن \times ا ن$$

: ٢ : مساحة ا ب س د والجزء الثالث من هذه النسبة -

$$(ا ن + ب ن) \times (ب ن + د ن) = ا س \times ب د حسب الشكل .$$

اي $\frac{1}{4}ق : جيب ن :: ا س \times ب د : ٢ : مساحة ا ب س د$ كما تقدم

والامر واضح ان هذه القاعدة تصح في مستطيل ايضا لانه ان كان احد القطرين عمودا على الآخر يكون جيب ن = $\frac{1}{4}ق$ (ح م ٩٥) فسطح القطرين يعدل مضاعف مساحة الشكل (اقليدس ق ١٤ ك ٥)

مثال ١ مفروض قطرا شكل ٢٧ و ٦٢ وزاوية التقاطع ٥٤° فاي مساحة الشكل

الجواب ٩٢٨

(٢) مفروض القطران ٨٥ و ٩٢ وزاوية التقاطع ٧٤° فاي المساحة

(٣) طول ضلع شكل ذي ضلعين متوازيين ١٢ وطول الضلع الذي يوازي

٨ وبينهما فاي المساحة واذا اخرج الضلعان الاخران الى ان يلتقيا فكم مساحة المثلث الحادث من ذلك

الجواب مساحة الشكل ٥٠ مساحة المثلث ٤٠

١٤ (ب) ان كان الشكل ذا اربعة اضلاع وعلى هيئة قابلة للرسم في

دائرة تستعلم مساحته باحدى هاتين القاعدتين

القاعدة الاولى . خذ مسطح ضلعين متواليين من اضلاعه ثم مسطح

الضلعين الآخرين واضرب نصف مجمع الحاصلين في جيب الزاوية

الحادثة بين ضلعين من المضروب فيها

اذا كانت فضلة الضلعين الاطولين اكثر من الخارج من قسمة فضلة مربعي الضلعين الاخرين على ٢ يكون ميل الضلعين الاقصرين الى المجهتين المتقابلتين كما في (شكل ٦) فعند ذلك يجب طرح الخارج المشار اليه من فضلة الضلعين الاطولين بعد قسمتها على ٢ فيكون لك بعد العمود الثاني على الضلع الاطول من الزاوية المقابلة

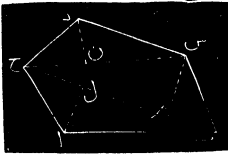
العميلة الرابعة

في مساحة منحرف كثير الاضلاع

(١٣) اقسام الشكل الى مثلثات برسم اقطار بين زواياه واستعلم مساحة كل مثلث على حده ثم اجمع المساحات فيا كان فهو مساحة الشكل (ج ٢٧١)

ان وقع العمود في مثلثين على قطري واحد فمساحة الشكل المركب من المثلثين تساوي نصف مسطح القطر في مجموع العمودين

شكل ٧



مثاله في (شكل ٧) ا ب س ح المساحة

$$= \frac{1}{2} \times \text{ح} \times \text{ا} + \frac{1}{2} \times \text{ب} \times \text{ح} \times \text{س} = \frac{1}{2} \times (\text{ا} + \text{ب} \times \text{س}) \times \text{ح}$$

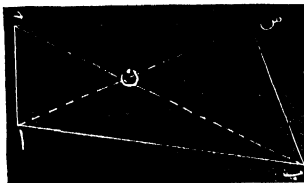
مثاله ان فرض في شكل ا ب س د ح القطر ب ح = ٢٦ و س ح = ٢٢ والعمود ا ل = ٥ و س م = ٩ و د ن = ٧ فتكون المساحة ١٨ × ١٤ + ١٦ × ٧ = ٢٧٩ و على ذلك تستعلم مساحة كل شكل ذي اربعة اضلاع

(١٤) ان فرض قطرا منحرف ذي اربعة اضلاع تستعلم المساحة هذه النسبة

٢: ق: جيب الزاوية عند نقطة تقاطع القطرين

:: مسطح القطرين: مضاعف مساحة الشكل

شكل ٨



مثاله في (شكل ٨) ا ب س د جيب

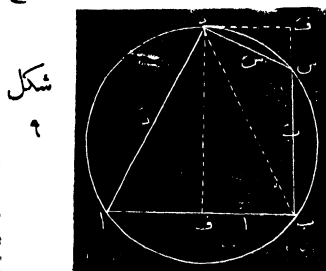
الزوايا الاربع عند ن متساوية لان

المحاذيتين هما كما لي المنفرجتين فلكل

واحدة منها جيب واحد (ح م ع ٢٠)

القاعدة الثانية. اطرح كل ضلع على حدته من نصف مجموع الاضلاع واضرب الباقي بعضها في بعض وخذ الجذر المالى من الحاصل فما كان فهو المساحة

مثال ان فرض الاضلاع ١ و ب و س و د ونصف مجتمعا = ن تكون المساحة = $(ن - ١) \times (ن - ب) \times (ن - س) \times (ن - د)$ وذلك بتفصيل



اف' = اد' - دف' وس' ف' = س' د' - د' ف' فاذا

د ف = ا د × ج = د ج

و د ف = س د × ج = س ج

و اف $\overline{r_j - 1} = \overline{r_j - r_j} = 0$

$$\overline{s_j - 1} = \overline{s_j - s_j} = \overline{s_j} - \overline{s_j} = 0$$

وبالشكل ب ف = اب - ا ف = أ - د = ا - ج

ب فَا = ب س + س فَا = بَب + س س - ا ج

وبف' + دف' = دب' = ب ف' + دف' فاذا

$$A - \overline{A} = A + \overline{A} - \overline{A} = A + (\overline{A} + \overline{B}) + (\overline{A} + B) + \overline{C}$$

وبتحويل هذه المعادلة نصير

$$ج = ١ - \frac{(ب^2 + س^2 - آ^2 - د^2)}{(٢ آ د + ٢ ب س)}$$

$$وج = \frac{(٢ آ د + ٢ ب س) - (ب^2 + س^2 - آ^2 - د^2)}{٢ آ د + ٢ ب س}$$

ثم بالتعويض عن ج في العبارة السابقة الدالة على المساحة نصير

$$اب س د = \frac{١}{٤} (٢ آ د + ٢ ب س) - (ب^2 + س^2 - آ^2 - د^2)$$

وهذه الكميات الواقعة تحت علامة الجذر هي دالة على الفرق بين مربعين فيمكن

حلها كما تقدم (ح م ع ٢٢١) الى هذه الاجزاء (ب + س - آ - د) × (آ + د -

- ب - س) وهذه نخل الى (آ + ب + س - د) (ب + س + د - آ)

(آ + ب + د - س) (١ + د + س - ب)

ثم ان فُرض ن = نصف مجموع اضلاع الشكل

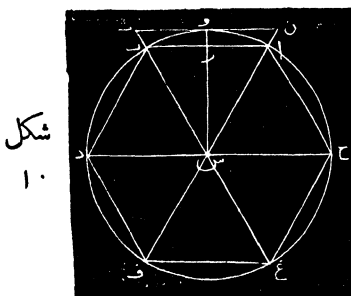
$$المساحة = (ن - آ) × (ن - ب) × (ن - س) × (ن - د) (ع ٢)$$

وان نوهم نصغير احد الاضلاع حتى يتلاشى فيتحول الشكل الى مثلث وتكون العبارة

الدالة على المساحة كما تقدم في (ع ١٠)

العملية الخامسة

في مساحة شكل كثير الاضلاع منتظم



اضرب احد اضلاعه في نصف

بعده العمودي عن المركز وهذا

الحاصل في عدد اضلاع الشكل فما

كان فهو المساحة لان كل كثير

الاضلاع منتظم فيه من المثلثات ما

يمثل عدد اضلاعه كما يرى في (شكل ١٠) اب د ف غ ح ذي ستة

اضلاع فله ست مثلثات متساوية ومساحة كل واحد منها = اب

$$\times \frac{١}{٢} س ز (ع ٩)$$

مساحة الشكل = مساحة احد المثلثات $\times$ عدد اضلاعه

مثال اول . ما هي مساحة شكل منتظم ذي ثمانية اضلاع ضلع منه ٦٠ والعمود من المركز ٧٢'٤٢٦

الجواب ١٧٢٨٢

(٢) ما هي مساحة منتظم ذي عشرة اضلاع اضلاعه ٤٦ والعمود من المركز ٧٠'٧٨٦٧

(١٦) ان فرض عدد الاضلاع وطولها فقط يستعلم البعد العمودي بحساب المثلثات . لان محيط دائرة مرسومة حول الشكل يُقسم الى اجزاء متساوية ماثلة عدة اضلاع الشكل (اقليدس ق ١٦ ك ٤) فيكون كل ضلع وتر قوس وهي معروفة فتُعرف الزاوية عند المركز لان س ر العمودي من المركز ينصف ا ب والزاوية ا س ب (اقليدس ق ٢ ك ٢) فالزاوية ب س ر هي ذات الجزء من ٣٦٠ الذي كان ب من محيط الشكل ثم في المثلث القائم الزاوية ب س ر ان جعل ب ر نصف القطر لنا (ح م ١٢٢) ق : ب :: نظير ماس ب س ف : س ف اي ق : ق : احد اضلاع الشكل :: نظير ماس الزاوية المتقابلة : العمودي من المركز على ذلك الضلع :

مثال ١ : مفروض ضلع ذي ستة اضلاع منتظم = ٢٨ قيراطا فما هي مساحته الزاوية ب س ر = ١٢ من ٩٠ = ٩٠

و ق : ق : نظير ماس ٩٠ : ٢٢٩٠٩ = س ر العمودي والمساحة = ١٩ × ٩٠٩ × ٦ × ٦ = ٢٧٥١٦

مثال ٢ : ما هي مساحة منتظم ذي عشرة اضلاع كل ضلع منه ٦٢ قدما الجواب ٢٩٥٧٦ قدما

(١٧) نرى من النسبة السابقة انه يمكن اصطناع جدول منتظم خطوط عمودية ومساحات لجميع الاشكال الكثيرة الاضلاع المنتظمة كل ضلع منها = ١ وذلك ان جعل ق = ١ (ح م ١٠٠) وع = عدد الاضلاع تصير النسبة ا : ب : ج : نظير

ماس $\frac{٢٦٠}{٤}$: العمودي والعمودي $\frac{١}{٢}$ نظير ماس $\frac{٢٦٠}{٤}$ والمساحة $\frac{١}{٢}$ مسطح
العمودي $\times$ عدد الاضلاع كما تقدم (ع ١٥) فيكون العمودي في مثلث متساوي
الاضلاع $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٤}$ ن $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ والمساحة $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ والمساحة $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$
وفي المربع يكون العمودي $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ والمساحة $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$ م $\frac{٢٦٠}{٨}$
وعلى هذه الكيفية اصطنع هذا الجدول الذي فيه قد فرض ضلع كل شكل ١

اسماء	زوايا	عموديات	مساحات
ذو ٣ اضلاع	٦٠°	٠.٢٨٨٦٧٥٢	٠.٤٢٣٠١٢٧
ذو ٤ اضلاع	٩٥°	٠.٥٠٠٠٠٠٠	١.٠٠٠٠٠٠٠
٥	٩٦°	٠.٦٨٨١٩١٠	$١.٧٢.٤٧٧٤$
٦	٩٠°	$٠.٨٦٦.٢٥٤$	$٢.٥٩٨.٧٦٢$
٧	$٩٥^\circ \frac{٥}{٧}$	$١.٠٢٨٢٦.٠١$	٢.٦٢٣٩١٢٤
٨	$٩٦^\circ \frac{١}{٢}$	$١.٢٠٧١.٠٦٩$	٤.٨٢٨٤٢٧١
٩	٩٠°	١.٢٧٢٧٣٨٥	٦.١٨١٨٢٤٢
١٠	٩٨°	١.٥٢٨٨٤١٨	$٧.٦٩٤٢.٨٨$
١١	$٩٦^\circ \frac{٢}{١١}$	١.٧٠٢٨٤٢٩	٩.٢٦٥٦٢٩٩
١٢	٩٥°	$١.٨٦٦.٢٥٢$	١١.١٩٦١٥٢٤

وافادة هذا الجدول هي استعمال مساحة اي شكل منتظم فرض عدد اضلاعه
ماثل اضلاع شكل في الجدول لان مساحات الاشكال المنتظمة هي كمربعات اضلاعها
المتشابهة (اقليدس ق ٢٠ ك ٦)

فلكي نستعلم مساحة شكل منتظم اضرب مربع احد اضلاعه في مساحة منتظم شبيه
بوضعه ١

مثال ١ ما هي مساحة منتظم ذي عشرة اضلاع كل ضلع منه ١.٠٢ قصبة

الجواب ٨٠٠٥٠٠٠ قصبة

(٢) ما هي مساحة منتظم ذي ١٢ ضلعا كل ضلع منه ٨٧ قدما

الفصل الثاني

في تربيعة الدائرة واجزائها

(١٨) حدود الدائرة واجزائها كحدودها في الهندسة فلا نذكر هنا

الأبعضا

قطاع دائرة هو ما وقع منها بين قوس منها ونصف قطر ينتهيان الى طرفي القوس وقد يكون اكبر من نصف دائرة وقد يكون اصغر

قطعة دائرة هي ما وقع منها بين قوس منها ووتر القوس وقد سمي الوتر احيانا قاعدة القطعة وعلو القطعة هو طول عمودي من القوس على نقطة انتصاف الوتر

المنطقة هي الجزء من الدائرة الواقع بين وترين متوازيين ومتى تساوى الوتران سُميت المنطقة متوسطة

الحلقة هي المساحة الواقعة بين محيطي دائرتين متراكبتين

الهلال هو المساحة الواقعة بين قوسي دائرتين تتقاطعان

(١٩) ان تربيعة الدائرة قد اعنتى به علماء التعاليم في ادوار كثيرة والى

الآن لم ينتهوا الى معرفة مساحتها الا تقريبا غير انه يتقدم في هذا التقريب الى حد ما يشاء والى حد ما يقتضيه التدقيق اللازم كما علمت من الهندسة

(٢٠) ان فرض محيط دائرة وقطرها تُعرف من ذلك المساحة لانها

= مسطح $\frac{1}{2}$ المحيط $\times \frac{1}{2}$ القطر (اقليدس ق ٥ ك ا م) ولكن حسبنا تقدم

لم يُكشَف عن طريقة المعرفة المحيط تماما ويقترَب الى ذلك برسم ذوي اضلاع كثيرة في الدائرة ومحيطها بها وبهذه الاشكال نتوصل الى معرفة

$= 360^\circ 14' 10''$ اي محيط دائرة نصف قطرها $= \frac{1}{2}$ وقطرها $= 1$
 المحيط لا يفني القطر تماماً ولكن بواسطة حساب التمام والفاضل استخرج سرد
 يقرب الى ذلك وهو قوس $30^\circ = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{4 \times 4} - \frac{1}{5 \times 5} + \frac{1}{6 \times 6} - \frac{1}{7 \times 7} + \frac{1}{8 \times 8} - \frac{1}{9 \times 9} + \frac{1}{10 \times 10} \right)$
 ومجموع هذا السرد $12 \times$ المحيط وهذا هو السرد الذي اعتمد عليه في حساب
 المحيط الى 140 منزلة من الكسور العشرية وهو

$$\begin{array}{r} 360^\circ 14' 10'' 50 \quad 8979225826 \quad 7645585479 \\ 0.28841971 \quad 7939957010 \quad 0.820374944 \\ 0.923078174 \quad 0.628720899 \quad 8728.244898 \\ 242117.779 \quad 82148.8701 \quad 52745.7747 \\ 0.9284276 + 0.7 - \end{array}$$

وفي الغالب يكفي $360^\circ 14' 16''$ وقد درجت العادة ان يُعبر عن هذا العدد في
 العبارات التعاليمية بالحرف اليوناني π فاذا فرض القطر q يكون المحيط πq وان
 فرض نصف القطر $\frac{1}{2}q$ يكون المحيط $\pi \frac{1}{2}q$
 (٢٢) ثم ان ضرب هذا الخارج في 7 يحصل $+ 21' 9''$ اي 22 تقريباً فنسبة
 القطر : المحيط $7 : 22$ تقريباً

وان ضرب في 112 يحصل $+ 254' 99''$ اي 255 اكثر تقريباً فنسبة القطر
 : المحيط $112 : 255$ اكثر تقريباً وكان الفيلسوف ارخيدس اول من برهن النسبة
 الاولى وقد امتد فيها من ايامه الى 150 منزلة من الكسور العشرية كما ذكرنا
 ويكفي لاكثر المسائل ان يمتد فيها الى 4 او 5 منازل ثم متى عرفنا نسبة القطر الى المحيط
 يسهل علينا معرفة مساحة الدائرة لان المساحة = نصف المحيط $\times \frac{1}{2}q$

العملية الأولى

(٢٣) لكي يستعمل محيط دائرة اذا فرض قطرها اضرب القطر في

$$360^\circ 14' 10'' \text{ او اضرب القطر في } 22 \text{ واقسم الحاصل على } 7$$

$$\text{او اضرب القطر } 255 \text{ واقسم الحاصل على } 112 \text{ (ع ٢٢)}$$

(١) ان كان قطر الارض 7920 ميلاً فاهو محيطها

$$\text{الجواب } 24912' 8 \text{ ميلاً}$$

- (٢) كم ميلاً تمر بها الارض في فلكها اذا فُرض فلكها دائرة قطرها ١٩٠٠٠٠٠٠٠ ميل
الجواب ٥٩٦٩٠٢١٠٠ ميل
- (٣) ما هو محيط دائرة قطرها ٧٦٩٨٤٢ قصبة

العملية الثانية

- (٢٤) لكي يستعلم القطر من المحيط اقسم المحيط على ٣٠١٤١٥٩ او
اضرب المحيط في ٧ واقسم الحاصل على ٢٢
- او اضرب المحيط في ١١٢ واقسم الحاصل على ٢٥٥ (ع ٢٣)
- (١) ان كان محيط الشمس ٢٨٠٠٠٠٠ ميل فاهو قطرها
الجواب ٨٩١٢٦٧ ميلاً

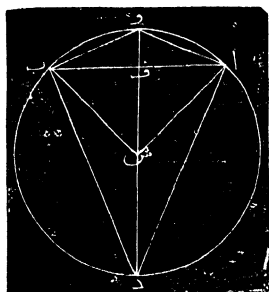
- (٢) ما هو قطر شجرة محيطها ٥٠ اقدام
- (٢٥) في هذه النسبة ٣٠١٤١٥٩ : ١ :: المحيط : القطر يمكن ان نستعلم الجزء
الرابع بقسمة الثاني على الاول وضرب الخارج في الجزء الثالث و ١ ÷ ٣٠١٤١٥٩ = ٣١٨٢١
- ٠ فان ضرب محيط دائرة في ٣١٨٢١ يحصل قطرها
- (١) ان كان محيط القمر ٦٨٥٠ ميلاً فكم قطرها

- الجواب ٢١٨٠ ميلاً
- (٢) ان كان محيط فلك زحل ٥٦٥٠٠٠٠٠٠ ميل فاهو بعده عن الشمس
- (٣) ان كان محيط دولاب ٤ اقدام و ٧ قراريط فاهو قطره
- حاشية مفيدة

$$\left. \begin{aligned} ٨٨٦٣ &= \text{ضلع مربع مساوٍ للدائرة} \\ ٧٠٧ &= \text{ضلع مربع مرسوم في الدائرة} \\ ٨٦٦ &= \text{ضلع مثلث متساوي الاضلاع في الدائرة} \end{aligned} \right\} \text{ قطر دائرة } \times$$

$$\left. \begin{aligned} ٢٨٢١ &= \text{ضلع مربع مساوٍ للدائرة} \\ ٢٢٥١ &= \text{ضلع مربع مرسوم في الدائرة} \\ ٢٧٥٦ &= \text{ضلع مثلث متساوي الاضلاع في الدائرة} \end{aligned} \right\} \text{ المحيط } \times$$

درجات القوس

شكل
١٢

ليكن ا ب (شكل ١٢) وتر قوس
اوب و ف و علوه فان اف = ب ف
و ا و = ب و (اقليدس ق ٤ ك ١)
فيكون ب ف جيب نصف القوس
اوب و س ف نظير جيبه و ف و
سهم جيبه و ب و وتره ثم في المثلث
الناظم الزاوية س ب ف

ب ف : جيب ب س ف اي القوس ب و
س ب : ق }
س ف : نظير جيب ب س ف اي القوس ب و
(١) اذا كان نصف القطر س و = ٢٥ والوتر ا ب ٤٢ فاهو طول
القوس اوب

س ب : ق :: ب ف : جيب ب س ف اي ب و = ٦٠ تقريبا
والمحيط = ١٤١٥٩ × ٢٠٨ = ١٥٧٠٨ و ٢٦٠ : ٢٦٠ : ١٥٧٠٨ : ١٨ : ٢٦٠
= ب و اي اوب = ٥٢٢٦

(٢) ماهو طول قوس وتره ٢١٦ و ١/٢ قطر دائرته ١٢٥

الجواب ٢٦١٨

(٢٩) ان فرض الوتر وعلو القوس يُستعلم من ذلك ١/٢ القطر ومن

ثم طول القوس

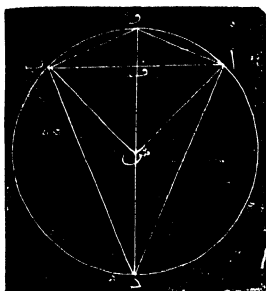
ليكن ب ا الوتر و ف و علو القوس اوب فحسب اقليدس ق ٢٥ ك ٢ د ف
= ب ف و د و = ف و د ف = ف و + ب ف اي القطر = علو القوس + مربع
نصف الوتر مقسوما على العلو متي عُرِف القطر يستعلم طول القوس حسبنا نقدم

(١) مفروض وتر قوس ١٧٢٢ وعلوه ٥٠ فاهو طول القوس
القطر = ٥٠ + ٨٦٢٦ = ٢٠٠ فتكون في القوس ١٢٠° (ع ٢٨) طولها
٢٠٩٤٤ (ع ٢٦)

(٢) مفروض وتر قوس ١٢٠ وعلوها ٤٥ فاهو طولها

الجواب ١٦٠٨

درجات القوس

شكل
١٢

ليكن ا ب (شكل ١٢) وتر قوس
اوب و ف و علوه فان اف = ب ف
و ا و = ب و (اقلدس ق ٤ ك ١)
فيكون ب ف جيب نصف القوس
اوب و س ف نظير جيبه و ف و
سهم جيبه و ب و وتره ثم في المثلث
الناجم الزاوية س ب ف

ب ف : جيب ب س ف اي القوس ب و
س ب : ق } س ف : نظير جيب ب س ف اي القوس ب و
(١) اذا كان نصف النظر س و = ٢٥ والوتر ا ب ٤٢٢ فاهو طول

القوس اوب

س ب : ق :: ب ف : جيب ب س ف اي ب و = ٦٠ تقريبا
والمحيط = ٢٦١٨ : ١٥٧٠٠٨ :: ٦٠ : ٢٦٠ و ١٥٧٠٠٨ = ٥٠ × ٢١٤١٥٩
= ب و اي اوب = ٥٢٢٦

(٢) ماهو طول قوس وتره ٢١٦ ١/٢ وقطر دائرته ١٢٥

الجواب ٢٦١٨

(٢٩) ان فرض الوتر وعلو القوس يستعلم من ذلك ١/٢ القطر ومن

ثم طول القوس

ليكن ب ا الوتر و ف و علو القوس اوب فحسب اقلدس ق ٢٥ ك ٢ د ف
= ب ف و د و = ف و + د ف = ف و + ب ف اي القطر = علو القوس + مربع
نصف الوتر مقسوما على العلو متي عرف القطر يستعلم طول القوس حسبا نقدم

(١) مفروض وتر قوس ١٧٢٢ وعنوه ٥٠ فاهو طول القوس

القطر = ٥٠ + ٢٠٠ = ٢٠٠ ف تكون في القوس ١٢٠° (٢٨ ع) طولها

٢٠٩٤٤ (٢٦ ع)

(٢) مفروض وتر قوس ١٢٠ وعلوها ٤٥ فاهو طولها

الجواب ١٦٠٨

(٢) ان كان قطر دائرة ١١٢ والمحيط ٢٥٥ فما هي المساحة

الجواب ١٠٠٢٩

(٤) كم ذراعاً مربعاً في دائرة قطرها ٧ اقدام

(٣١) ان فُرض محيط دائرة تستعلم المساحة باستعلام القطر أولاً

او بدون ذلك بضرب مربع المحيط في ٠.٧٩٥٨^٢ لانه ان فُرض محيط

دائرة واحداً يكون القطر $1 \div 3.14159 = 0.31831$ وربع مسطح

هذا الكسر في المحيط $= 0.7958 =$ المساحة ومساحات الدوائر

كمرعات اقطارها فتكون ايضاً كمرعات محاطها (اقليدس ق ٨ ك ١)

(١) ان فُرض قطر دائرة ١٢٦ قدماً فما هي المساحة الجواب ١٤٧٢ قدماً

(٢) ما هي مساحة سطح بركة مستديرة محيطها ١٠ قصبات

(٣٢) ان فُرضت مساحة دائرة يستعلم القطر بقسمة المساحة على

٠.٧٨٥٤ وتجدبر الخارج وذلك عكس القاعدة في (ع ٣٠)

(١) ما هو قطر دائرة مساحتها ١٢٣٦^٢ ٢٨٠

$$22 = \sqrt{484} \text{ و } 484 = 7854 \div 16.2$$

(٢) ما هو قطر دائرة مساحتها ١٩٦٣٥

(٣٣) نسبة مساحة دائرة : مساحة مربع محيط بها :: ١٠٠ : ٧٨٥٤

والى مساحة مربع فيها :: ٧٨٥٤ : $\frac{1}{4}$

ليكن ا ب د ف (شكل ١٢) المربع في الدائرة

و ن ل المحيط بها فمساحة الدائرة =

1×7854 (ع ٣٠) ومساحة المربع

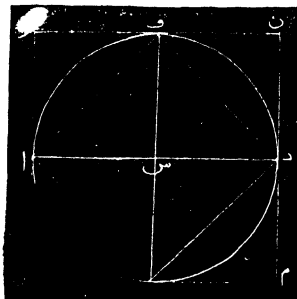
المحيط (ع ٤) = ون^٢ = ا د^٢ والمربع في

الدائرة انما هو نصف المحيط بها لان عدد

مثلثات نصف عدد مثلثات الآخر

شكل

١٢



(١) ما هي مساحة مربع في دائرة مساحتها ١٥٩

الجواب ٠.٧٨٥٤ : $\frac{1}{4}$:: ١٥٩ : ١٠١٢٢

حاشية . لنا هذه القواعد التقريبية لاجل استعمال طول قوس دائرة
(١) كل قوس دائرة تعدل تقريباً $\frac{1}{4}$ فضله وتر القوس و ٨ امثال وتر نصف

القوس

(٢) اذا فرض علو القوس = ع وقطر الدائرة = ق فحينئذ القوس = $ق^2 \times$

$$\begin{aligned} & \frac{ع^2}{ق^2 - ع^2} + \frac{ع}{ق^2 \times ٢} + ١ \times \sqrt{ق^2 - ع^2} = \text{القوس} \\ & + \frac{ع^2}{ق^2 \times ٥ \times ٤ \times ٢} + \frac{ع}{ق^2 \times ٢} + ١ \times \sqrt{ق^2 - ع^2} = \text{القوس} \\ & + \frac{ع^2 \times ٢}{ق^2 \times ٦ \times ٤ \times ٢} + \frac{ع}{ق^2 \times ٢} + ١ \times \sqrt{ق^2 - ع^2} = \text{القوس} \end{aligned}$$

(٤) او القوس = $\frac{ق^2}{٤} \left(٥ - \frac{ع}{ق} \right) + \frac{ع}{ق^2} \times ٢ + \sqrt{ق^2 - ع^2}$ تقريباً جداً

(٥) اذا فرض ج جيب قوس و $\frac{1}{4} ق$ = نصف قطر الدائرة فالقوس = ج $\times$

$$\begin{aligned} & + ١ + \frac{ج^2}{ق^2 \times ٢} + \frac{ج^3}{ق^3 \times ٤ \times ٢ \times ٥} + \frac{ج^4}{ق^4 \times ٦ \times ٤ \times ٢ \times ٧} \\ & + \frac{ج^5}{ق^5 \times ٨ \times ٦ \times ٤ \times ٢ \times ٩} + \frac{ج^6}{ق^6 \times ١٠ \times ٨ \times ٦ \times ٤ \times ٢ \times ١١} + \frac{ج^7}{ق^7 \times ١٢ \times ١٠ \times ٨ \times ٦ \times ٤ \times ٢ \times ١٣} \end{aligned}$$

العملية الرابعة

(٣٠) لاستعلام مساحة دائرة اضرب مربع القطر في ٧٨٥٤ او

مربع نصف القطر في ٣١٤١٥٩ او اضرب نصف القطر في نصف

المحيط او اضرب القطر في المحيط وخذ ربع الحاصل . لان مساحة دائرة

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ المحيط}$ (اقلیدس ق د ك ا م) وذلك $= \frac{1}{4}$ حاصل القطر

في المحيط وان كان القطر واحداً يكون المحيط ٣١٤١٥٩ (ع ٢٣)

وربع هذا العدد = ٧٨٥٤ تقريباً ومساحات الدوائر هي كمربعات

اقطارها (اقلیدس ق ٧ ك ا م) فمساحة دائرة = مسطح مربع قطرها في

٧٨٥٤ . اي في مساحة دائرة قطرها واحد

(١) ما هي مساحة دائرة قطرها ٦٢٢ قدماً

الجواب ٣٠٤٨٣٦ قدماً مربعاً

(٢) كم فدناً في جزيرة مستديرة قطرها ١٢٤ فصة

الجواب ٧٥ فدناً و ٧٦ فصة

العملية الخامسة

(٣٤) لاجل استعمال مساحة قطاع دائرة اضرب نصف القطر في نصف طول القوس او قل

نسبة ٣٦٠: درجات القوس :: مساحة الدائرة : مساحة القطاع
مثال ١. مفروض القوس اوب (شكل ١٢) ١٢٠° وقطر الدائرة ٢٢٦ فا
هي مساحة القطاع اوب س

$$\text{مساحة الدائرة} = ٤٠١١٥ (\text{ع } ٢٠)$$

$$\text{و } ٣٦٠: ١٢٠ :: ٤٠١١٥: \frac{2}{3} = ١٢٣٧١ \text{ مساحة القطاع}$$

$$(٢) \text{ ما هي مساحة ربع دائرة نصف قطرها } ٦٢١$$

$$(٢) \text{ ما هي مساحة نصف دائرة قطرها } ٢٢٨$$

$$(٤) \text{ ما هي مساحة قطاع اصغر من نصف دائرة ان كان نصف القطر } ١٥ \text{ وتر}$$

قوس القطاع ١٢

$$\text{نصف وتر القوس} = \text{جيب } ٢٣^\circ \frac{٢}{٤} \text{ تقريباً } (\text{ع } ٢٨) \text{ فيكون كل القوس } ٩١^\circ \frac{١}{٢}$$

$$\text{ومساحة الدائرة } ٧٠٦٨٦$$

$$\text{و } ٣٦٠: ٩٧^\circ \frac{١}{٢} :: ٧٠٦٨٦: ٩٢٦ = \text{مساحة القطاع}$$

$$(٥) \text{ ان قُرِضَت القوس ا د ب (شكل ١٢) } ٢٤٠^\circ \text{ ونصف القطر } ١١٢ \text{ فاي}$$

$$\text{مساحة القطاع ا د ب س}$$

العملية السادسة

(٣٥) لاجل استعمال مساحة قطعة من دائرة استعلم مساحة قطاع

قاعدته قوس القطعة وايضاً مساحة المثلث المصطنع بوتر القطعة ونصفي
القطر المحدثين القطاع

ثم ان كانت القطعة اصغر من نصف دائرة فاطرح مساحة المثلث من
مساحة القطاع فما كان فهو مساحة القطعة والا فاضف مساحة القطاع

الى مساحة المثلث (انظر شكل ١٢)

مساحة المثلث اب س = $\frac{1}{2}$ القوس اب $\times$ س ف وس ف
 = س و - ف و اي فضلة نصف القطر و علو القوس وايضاً س ف
 = نظير جيب $\frac{1}{2}$ القوس او ب وان لم يُفرض نظير الجيب هذا ولا
 الوتر يستعملان من القوس ونصف القطر

مثال ١. مفروض القوس او ب = ١٢٠° ونصف قطر الدائرة = ١١٣ قدمًا
 فاهي مساحة القطعة او ب ف

في المثلث انقائم الزاوية ب س ف نسبة $\frac{1}{2}$ ق : ب س :: جيب ب س و : ب ف
 = ٩٧' ٨٦ قدمًا (ع ٢٨) $\frac{1}{2}$ الوتر

نظير الجيب ف س = $\frac{1}{2}$ س و (ح م ع ٩٦) = ٥٦' ٥

مساحة القطاع او ب س (ع ٢٤) = ١٢٢٧١' ٦٧

المثلث اب س = ب ف $\times$ ف س = ٥٥٢٨' ٩٧

مساحة القطعة = ٧٨٤٢' ٧

(٢) مفروض قاعدة قطعة اصغر من نصف دائرة ١١ اقدام ونصف قطر الدائرة
 = ١٢ قدمًا فاهي مساحة القطعة

قوس القطعة = $\frac{1}{2}$ ٤٩' (ع ٢٨)

مساحة القطاع = ٦١' ٨٩ (ع ٢٤)

مساحة المثلث = ٥٤' ٥٤

مساحة النطقة = ٧' ٣٥ اقدام مربعة

(٢) ماهي مساحة قطعة علوها ١٩' ٢ وقاعدتها ٧٠

الجواب ٩٤٧' ٨٦

(٤) ماهي مساحة قطعة اد ب (شكل ١٢) ان كانت القاعدة اب = ١٩٥' ٧

والعلو ف د = ١٦٩' ٥

الجواب ٢٢٢٧٢

حاشية . لاجل تسهيل العمل في مساحة قطع الدوائر قد اصطحب جدول متضمن
 مساحة قطع دائرة قطرها واحد وبه يتوصل الى مساحة قطع دوائر اخر لان علو قطع

متشابهة هو كقطار دوائرها فان انقسم علو قطعة مفروضة على قطر دائرتها يكون الخارج علو قطعة متشابهة قطرها واحد ومساحة تلك القطعة متضمنة في الجدول وحسب خصائص الاشكال المتشابهة نسبة قطعة الى اخرى :: مربع قطر دائرة الاولى : مربع قطر دائرة الاخرى . فلنا من ذلك هذه القاعدة لاستعلام مساحة قطعة من الجدول انقسم علو القطعة على قطر دائرتها واطلب الخارج في عمود العلون من الجدول وخذ العدد الذي يقابله في عمود المساحات واضربه في مربع قطر الدائرة
تنبيه اول . جميع اعداد الجدول هي كسور عشرية فليتنبه الى ذلك وان لم توضع فاصلة

تنبيه ثان . ان قصيد التدقيق الكلي وما وجد الخارج المشار اليه في عمود العلون فليصرف فيه كما في اخذ الانساب التي لم تنفذ في الجدول
تنبيه ثالث . ليس في الجدول مساحة قطعة اكبر من نصف دائرة وان طُلبت مساحة قطعة اكبر من نصف دائرة مثل ا د ب (شكل ١٢) فاستعمل مساحة القطعة ا ب و واطرحها من مساحة الدائرة

او انقسم علو القطعة المفروضة على قطر دائرتها واطرح الخارج من واحد ثم اطلب الباقي في عمود العلون واطرح المساحة المقابلة له من ٧٨٥٤ واضرب الباقي في مربع النطر مثال اول . ما هي مساحة قطعة علوها ١٦ وقطر الدائرة ٤٨

الجواب ٥٢٨

(٢) ما هي مساحة قطعة علوها ٢٢ والنطر ٤٨

الجواب ١٢٨١'٥٥

لنا ايضا هاتين القاعدتين لاستعلام مساحة قطعة

الاولى . الى وتر القوس اضف $\frac{2}{3}$ وتر نصف القوس واضرب المجمع في $\frac{2}{3}$ العلون
مثاله ان فرض س و س = الوترين و ع = العلون فالقطعة = $(س + \frac{2}{3}س)$
 $\times \frac{2}{3} ع$ تقريباً

الثانية . ان فرض ع = علو القطعة و ق = قطر الدائرة فالقطعة = $٢ ع$
 $\sqrt{٢ ق} \times (\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{٢٤}{٢٢٨} - \frac{2}{3} \frac{٢٤}{٢٢٨} - \frac{2}{3} \frac{٢٤}{٢٢٨})$

جدول مساحة قطع دائرة قطرها واحد وقد قُرض انقسامه الى ١٠٠٠ جزء

مساحة	علو	مساحة	علو	مساحة	علو	مساحة	علو	مساحة	علو
١٢٨٩٩٥	٢٢٢	٩٢٢٢٢	١٧٥	٥١٤٤٦	١١٧	١٨٧٦٦	٢٠٩	٤٢٢٢٢	٢٠١
١٢٩١٨٤	٢٢٤	٩٢٣٠٧٤	١٧٦	٥٢٠٩٠	١١٨	١٩٢٢٩	٢٠	٤٢٢٢٢	٢٠٢
١٤٠٦٨٨	٢٢٥	٩٢٣٨٦٦	١٧٧	٥٢٧٢٦	١١٩	١٩٧١٦	٢١	٤٢٢٢٢	٢٠٣
١٤١٥٢٧	٢٢٦	٩٢٤٠١	١٧٨	٥٢٢٨٥	١٢٠	٢٠٢٠٦	٢٢	٤٢٢٢٢	٢٠٤
١٤٢٣٨٧	٢٢٧	٩٢٥٢٦٤	١٧٩	٥٢٩٠٦	١٢١	٢٠٦٩٠	٢٣	٤٢٢٢٢	٢٠٥
١٤٣٢٢٨	٢٢٨	٩٢٦١٣٤	١٨٠	٥٢٤٦٨٩	١٢٢	٢١١٧٨	٢٤	٤٢٢٢٢	٢٠٦
١٤٤٠٩١	٢٢٩	٩٢٦٩٠٢	١٨١	٥٢٥٢٤٥	١٢٣	٢١٦٥٩	٢٥	٤٢٢٢٢	٢٠٧
١٤٤٩٤٤	٢٣٠	٩٢٧٧٧٤	١٨٢	٥٢٥٠٠٢	١٢٤	٢٢١٥٤	٢٦	٤٢٢٢٢	٢٠٨
١٤٥٧٩٩	٢٣١	٩٢٨٤٤٧	١٨٣	٥٢٦٦٦٣	١٢٥	٢٢٦٥٢	٢٧	٤٢٢٢٢	٢٠٩
١٤٦٦٥٥	٢٣٢	٩٢٩٢٢١	١٨٤	٥٢٧٢٢٦	١٢٦	٢٣١٥٤	٢٨	٤٢٢٢٢	٢١٠
١٤٧٥١٢	٢٣٣	٩٢٩٩٩٧	١٨٥	٥٢٧٩٩١	١٢٧	٢٣٦٥٩	٢٩	٤٢٢٢٢	٢١١
١٤٨٣٧١	٢٣٤	١٠٠٧٧٤	١٨٦	٥٢٨٦٥٨	١٢٨	٢٤١٦٨	٣٠	٤٢٢٢٢	٢١٢
١٤٩٢٣٠	٢٣٥	١٠١٥٥٢	١٨٧	٥٢٩٢٣٧	١٢٩	٢٤٦٨٠	٣١	٤٢٢٢٢	٢١٣
١٥٠٠٩١	٢٣٦	١٠٢٣٢٤	١٨٨	٥٢٩٩٩٩	١٣٠	٢٥١٦٥	٣٢	٤٢٢٢٢	٢١٤
١٥٠٩٥٢	٢٣٧	١٠٣١١٦	١٨٩	٦٠٦٧٢	١٣١	٢٥٦١٤	٣٣	٤٢٢٢٢	٢١٥
١٥١٨١٦	٢٣٨	١٠٣٩٠٠	١٩٠	٦١٣٤٨	١٣٢	٢٦١٢٦	٣٤	٤٢٢٢٢	٢١٦
١٥٢٦٨٠	٢٣٩	١٠٤٦٨٥	١٩١	٦٢٠٦٦	١٣٣	٢٦٦٧١	٣٥	٤٢٢٢٢	٢١٧
١٥٣٥٤٦	٢٤٠	١٠٥٤٧٢	١٩٢	٦٢٧٠٧	١٣٤	٢٧٢٢٩	٣٦	٤٢٢٢٢	٢١٨
١٥٤٤١٢	٢٤١	١٠٦٢٦١	١٩٣	٦٣٣٨٩	١٣٥	٢٧٨٢١	٣٧	٤٢٢٢٢	٢١٩
١٥٥٢٨٠	٢٤٢	١٠٧٠٥١	١٩٤	٦٤٠٧٤	١٣٦	٢٨٣٥٦	٣٨	٤٢٢٢٢	٢٢٠
١٥٦١٤٩	٢٤٣	١٠٧٨٤٢	١٩٥	٦٤٧٦٠	١٣٧	٢٨٨٩٤	٣٩	٤٢٢٢٢	٢٢١
١٥٧٠١٩	٢٤٤	١٠٨٦٣٦	١٩٦	٦٥٤٤٩	١٣٨	٢٩٤٣٥	٤٠	٤٢٢٢٢	٢٢٢
١٥٧٨٩٠	٢٤٥	١٠٩٤٣٠	١٩٧	٦٦١٤٠	١٣٩	٢٩٩٧٩	٤١	٤٢٢٢٢	٢٢٣
١٥٨٧٦٢	٢٤٦	١١٠٢٢٦	١٩٨	٦٦٨٢٣	١٤٠	٣٠١٢٦	٤٢	٤٢٢٢٢	٢٢٤
١٥٩٦٣٦	٢٤٧	١١١٠٢٤	١٩٩	٦٧٥٢٨	١٤١	٣٠٦٧١	٤٣	٤٢٢٢٢	٢٢٥
١٦٠٥١٠	٢٤٨	١١١٨٢٣	٢٠٠	٦٨٢٣٥	١٤٢	٣١٢٢٩	٤٤	٤٢٢٢٢	٢٢٦
١٦١٣٨٦	٢٤٩	١١٢٦٢٤	٢٠١	٦٨٩٢٤	١٤٣	٣١٨٦٦	٤٥	٤٢٢٢٢	٢٢٧
١٦٢٢٦٢	٢٥٠	١١٣٤٢٦	٢٠٢	٦٩٦٢٥	١٤٤	٣٢٥٢٥	٤٦	٤٢٢٢٢	٢٢٨
١٦٣١٤٠	٢٥١	١١٤٢٣٠	٢٠٣	٧٠٣٢٨	١٤٥	٣٣٢٠٧	٤٧	٤٢٢٢٢	٢٢٩
١٦٤٠١٩	٢٥٢	١١٥٠٣٥	٢٠٤	٧١٠٣٣	١٤٦	٣٣٨٧٢	٤٨	٤٢٢٢٢	٢٣٠
١٦٤٨٩٩	٢٥٣	١١٥٨٤٢	٢٠٥	٧١٧٤١	١٤٧	٣٤٤٤١	٤٩	٤٢٢٢٢	٢٣١
١٦٥٧٨٠	٢٥٤	١١٦٦٥٠	٢٠٦	٧٢٤٥٠	١٤٨	٣٥٠١١	٥٠	٤٢٢٢٢	٢٣٢
١٦٦٦٦٢	٢٥٥	١١٧٤٦٠	٢٠٧	٧٣١٦١	١٤٩	٣٥٥٨٥	٥١	٤٢٢٢٢	٢٣٣
١٦٧٥٤٦	٢٥٦	١١٨٢٧١	٢٠٨	٧٣٨٧٤	١٥٠	٣٦١٦٢	٥٢	٤٢٢٢٢	٢٣٤
١٦٨٤٣٠	٢٥٧	١١٩٠٨٢	٢٠٩	٧٤٥٨٩	١٥١	٣٦٧٤١	٥٣	٤٢٢٢٢	٢٣٥
١٦٩٣١٥	٢٥٨	١١٩٨٩٧	٢١٠	٧٥٣٠٦	١٥٢	٣٧٣٢٢	٥٤	٤٢٢٢٢	٢٣٦
١٧٠٢٠٢	٢٥٩	١٢٠٧١٢	٢١١	٧٦٠٢٦	١٥٣	٣٧٩٠٩	٥٥	٤٢٢٢٢	٢٣٧
١٧١٠٨٩	٢٦٠	١٢١٥٢٩	٢١٢	٧٦٧٤٧	١٥٤	٣٨٤٩٦	٥٦	٤٢٢٢٢	٢٣٨
١٧١٩٧٨	٢٦١	١٢٢٣٤٧	٢١٣	٧٧٤٦٩	١٥٥	٣٩٠٨٧	٥٧	٤٢٢٢٢	٢٣٩
١٧٢٨٦٧	٢٦٢	١٢٣١٦٧	٢١٤	٧٨١٩٤	١٥٦	٣٩٦٨٠	٥٨	٤٢٢٢٢	٢٤٠
١٧٣٧٥٨	٢٦٣	١٢٣٩٨٨	٢١٥	٧٨٩٢١	١٥٧	٤٠٢٧٦	٥٩	٤٢٢٢٢	٢٤١
١٧٤٦٤٩	٢٦٤	١٢٤٨١٠	٢١٦	٧٩٦٤٩	١٥٨	٤٠٨٧٥	٦٠	٤٢٢٢٢	٢٤٢
١٧٥٥٤٢	٢٦٥	١٢٥٦٣٤	٢١٧	٨٠٣٨٠	١٥٩	٤١٤٧٦	٦١	٤٢٢٢٢	٢٤٣
١٧٦٤٣٥	٢٦٦	١٢٦٤٥٩	٢١٨	٨١١١١٢	١٦٠	٤٢٠٨٠	٦٢	٤٢٢٢٢	٢٤٤
١٧٧٣٢٠	٢٦٧	١٢٧٢٨٥	٢١٩	٨١٨٤٦	١٦١	٤٢٦٨٧	٦٣	٤٢٢٢٢	٢٤٥
١٧٨٢١٥	٢٦٨	١٢٨١١٣	٢٢٠	٨٢٥٨٢	١٦٢	٤٣٢٩٦	٦٤	٤٢٢٢٢	٢٤٦
١٧٩١١٢	٢٦٩	١٢٨٩٤٢	٢٢١	٨٣٣٢٠	١٦٣	٤٣٩٠٨	٦٥	٤٢٢٢٢	٢٤٧
١٨٠٠١٩	٢٧٠	١٢٩٧٧٢	٢٢٢	٨٤٠٥٩	١٦٤	٤٤٥٢٢	٦٦	٤٢٢٢٢	٢٤٨
١٨٠٩١٨	٢٧١	١٣٠٦٠٥	٢٢٣	٨٤٨٠١	١٦٥	٤٥١٣٩	٦٧	٤٢٢٢٢	٢٤٩
١٨١٨١٧	٢٧٢	١٣١٤٣٨	٢٢٤	٨٥٥٤٤	١٦٦	٤٥٧٥٩	٦٨	٤٢٢٢٢	٢٥٠
١٨٢٧١٨	٢٧٣	١٣٢٢٧٢	٢٢٥	٨٦٢٨٩	١٦٧	٤٦٣٨١	٦٩	٤٢٢٢٢	٢٥١
١٨٣٦١٩	٢٧٤	١٣٣١٠٨	٢٢٦	٨٧٠٣٦	١٦٨	٤٧٠٠٠	٧٠	٤٢٢٢٢	٢٥٢
١٨٤٥٢١	٢٧٥	١٣٣٩٤٥	٢٢٧	٨٧٧٨٥	١٦٩	٤٧٦٣٢	٧١	٤٢٢٢٢	٢٥٣
١٨٥٤٢٥	٢٧٦	١٣٤٧٨٤	٢٢٨	٨٨٥٣٥	١٧٠	٤٨٢٦٢	٧٢	٤٢٢٢٢	٢٥٤
١٨٦٣٢٩	٢٧٧	١٣٥٦٢٤	٢٢٩	٨٩٢٨٧	١٧١	٤٨٨٩٤	٧٣	٤٢٢٢٢	٢٥٥
١٨٧٢٣٤	٢٧٨	١٣٦٤٦٥	٢٣٠	٩٠٠٤١	١٧٢	٤٩٥٢٨	٧٤	٤٢٢٢٢	٢٥٦
١٨٨١٤٠	٢٧٩	١٣٧٣٠٧	٢٣١	٩٠٧٩٧	١٧٣	٥٠١٦٥	٧٥	٤٢٢٢٢	٢٥٧
١٨٩٠٤٧	٢٨٠	١٣٨١٥٠	٢٣٢	٩١٥٥٤	١٧٤	٥٠٨٠٤	٧٦	٤٢٢٢٢	٢٥٨

