UNIVERSAL LIBRARY
OU_224536
UNIVERSAL LIBRARY

دیباچہ

تین سو برس قبل مسیح سے سترھویں صدی عیسوی تک حکیم اقلیدس کا ترتیب دیا ہوا علم ہندسہ ریاضی اور سائنس کی دوسری شاخوں کی بہ نسبت سب سے زیادہ مکمل ہو چکا تھا یہاں تک کہ لوگ عام طور پر یہ خیال کرنے لگے تھے کہ اب اس علم میں کسی اہم اضافہ کی گنجائش ہی باقی نہیں رہی۔ فرانس کے مشہور فلسفی اور ریاضی داں ڈے کارٹ (Descartes) نے سترھویں صدی کی ابتدا میں یہ محسوس کیا کہ ہندسہ کا علم اضافہ اور ترقی کے رک جانے کی وجہ سے ایک مردہ علم بن گیا ہے، اور اس میں نئے سرے سے جان ڈالنے کے لیے ضروری ہے کہ جبر و مقابلہ کے علم سے اس کا رشتہ جوڑا جائے۔ اس نئے ہندسہ کو "تحلیلی ہندسہ" یا "محددوں کا ہندسہ" کہتے ہیں جسے ڈے کارٹ نے ۱۶۳۷ء میں پیش کیا۔ یہیں سے جدید ریاضی کی ابتدا ہوتی ہے۔ سترھویں صدی کے آخری حصہ میں نیوٹن اور لائب نٹز (Leibnitz) نے علم احصاء کی بنیاد رکھی۔ اس وقت سے یہ دونوں علم آزادانہ طور پر اور ایک دوسرے کی مدد سے آگے بڑھتے رہے اور آج بھی ان میں ترقی کی وسیع گنجائش ہے۔

نہ صرف ریاضی کی دوسری شاخوں بلکہ طبیعیات، کیمیا، حیاتیات، طب اور عمرانیات یہاں تک کہ روزمرہ کے ہر کاروبار میں بھی ترسیمی طریقہ کا اکثر استعمال ہوتا ہے اور اس لیے ضروری ہے کہ ریاضی کے طلبا اس موضوع کے بنیادی اصول جامعہ کی

ابتدائی جماعتوں میں سیکھ لیں۔ یہ کتاب مبتدیوں کے لیے لکھی گئی ہے اور جامعہ عثمانیہ کے انٹرمیڈیٹ کے نصاب پر حاوی ہے۔ اس کے باوجود کوشش کی گئی ہے کہ کتاب اپنے حدود کے اندر مکمل ہو۔ جن عنوانوں پر بحث کی گئی ہے ان کے متعلق تمام ضروری امور بتا دیے گئے ہیں تاکہ پھر اعلیٰ جماعتوں میں ان پر دوبارہ بحث کی ضرورت باقی نہ رہے۔

اس کتاب میں صرف قائم محور استعمال کیے گئے ہیں اگرچہ مائل محوروں اور قطبی محددوں کا ذکر بھی کر دیا گیا ہے۔ نقطہ کے محدد اور خطِ مستقیم کی مساوات سارے تحلیلی ہندسہ میں اساسی اہمیت رکھتے ہیں اس لیے پہلے دو باب میں ان پر تفصیلی بحث کی گئی ہے۔ پڑھنے والوں کی یہ کوشش ہونی چاہیے کہ اس حصّہ پر پوری طرح عبور حاصل کیے بغیر آگے نہ بڑھیں۔ دائرہ، مکافی، ناقص اور زائد کی معیاری مساواتیں پوری وضاحت کے ساتھ حاصل کی گئی ہیں اور مساواتوں کی مدد سے ان منحنیوں کی چند آسان اور مشہور خاصیتوں کو اخذ کیا گیا ہے۔ کئی توضیحی مثالیں دی گئی ہیں جن میں سوالوں کو تفصیل کے ساتھ حل کیا گیا ہے تاکہ طالب علم کو سوال حل کرنے کا طریقہ سمجھ میں آ جائے۔ متعدد مشقیں بھی فراہم کی گئی ہیں تاکہ طلباء خود اپنے طور پر سوال حل کریں اور مضمون پر مہارت حاصل کر لیں۔

ہم اُن تمام حضرات کے مشکور ہیں جنھوں نے اس کتاب کی ترتیب اور طباعت میں ہماری مدد کی۔ ہم سررشتہ تالیف و ترجمہ کے عہدہ داروں اور اہلکاروں کے بھی شکر گزار ہیں جن کی محنت اور کوشش کی وجہ سے کتاب کی طباعت میں بہت سہولت ہوئی۔

قاضی محمد حسین
رضی الدین صدیقی

سنہ ۱۳۴۸ ف

فہرستِ مضامین

محدّدوں کا ہندسہ

صفحہ	مضامین
۱	**پہلا باب: محدّد اور خطِ مستقیم**
۱	۱، ۱ محدّد
۶	۱، ۱۲ محدّد تین ابعاد میں
۷	**مشق ۱**
۹	۱، ۲ کارٹیزی محدّد
۱۰	۱، ۳ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ
۱۲	**مشق ۲**
۱۴	۱، ۴ خطِ مستقیم کی تقسیم

مضامین	صفحات
۱،۵ خطِ مستقیم کی تقسیم نسبت ک۱ : ک۲ میں	۱۵
مشق ۳	۲۰
۱،۶ مثلث کا رقبہ	۲۱
مشق ۴	۲۳
۱،۷ قطبی محدّد	۲۴
۱،۸ منحنی کی مساوات	۲۷
مشق ۵	۳۲
۱،۹ محدّدوں کی تبدیلی	۳۳
مشق ۶	۳۸
دوسرا باب : خطِ مستقیم	۴۱
۲،۱ سطحِ مستوی میں خطِ مستقیم کا تعیّن	″
۲،۱۱ خطِ مستقیم کی مساوات مختلف شکلوں میں	۴۲
۲،۱۲ خطِ مستقیم کی مساوات کی عام شکل کارٹیزی محدّدوں میں	۴۹
۲،۱۳ عام مساوات کی تحویل	۵۱
۲،۱۴ کسی نقطہ کا عمودی فاصلہ خطِ مستقیم سے	۵۶
مشق ۷	۶۱
۲،۲ دو خطوں کے درمیان زاویہ	۶۵

	مضامین	صفحات
۲،۳	دو خطوں کا نقطۂ تقاطع	۷۰
۲،۳۱	دو خطوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے خط کی مساوات	۷۳
۲،۴	دو خطوں کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساواتیں	۷۷
	مشق ۸	۸۰
۲،۵	لا، ما میں متجانس مساوات	۸۳
۲،۵۱	مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوں کا درمیانی زاویہ	۸۵
۲،۵۲	خطوں کے جوڑے کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساوات	۸۶
۲،۶	جن نقطوں پر ایک خط ایک منحنی کو کاٹتا ہے ان کو مبداء سے ملانے والے خطوں کی مساوات۔	۸۸
۲،۷	شرط کہ درجۂ دوم کی عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے	۹۰
	متفرق مثالیں اور سوالات ۹	۹۸
	باب دوم پر متفرق مشقی سوالات	۱۱۱
	تیسرا باب : دائرہ	۱۱۵
۳،۱	تعریف	//
۳،۲	دائرہ کی مساوات	//
۳،۲۱	نقطہ اور دائرہ کا تعلق معیاری مساوات کے لیے	۱۱۶
۳،۲۲	کسی قائم محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی مساوات	۱۱۷
۳،۲۳	نقطہ اور دائرہ کا تعلق عام مساوات کے لیے	۱۱۹
	مشق ۱۰	۱۲۲

	مضامین	صفحات
۳،۳	دائرہ کے وتر کی مساوات	۱۲۴
۳،۴	مماس	۱۲۶
۳،۴۱	دائرہ کے مماس کی مساوات	۱۲۷
۳،۴۲	مماس کی مساوات عام شکل میں	۱۳۰
۳،۴۳	عماد	۱۳۳
	عماد کی مساوات	۱۳۴
	مشق ۱۱	۱۳۶
۳،۵	دائرہ اور خطِ مستقیم کا تقاطع	۱۳۷
۳،۵۱	ایک نقطہ سے دائرہ کے مماس	۱۴۰
	مشق ۱۲	۱۴۵
۳،۶	وترِ تماس	۱۴۶
۳،۷	قطب اور قطبی	۱۴۹
۳،۷۱	قطبی کی مساوات	۱۵۰
۳،۷۲	عام صورت میں قطبی کی مساوات	۱۵۱
۳،۷۳	قطب کے محدد	۱۵۴
۳،۷۴	قطبی خطوں کی ایک اہم خاصیت	۱۵۵
۳،۸	بیرونی نقطہ سے دائرہ کے مماس کا طول	۱۵۷
	مشق ۱۳	۱۵۹
۳،۹	توضیحی مثالیں	،،
	دائرہ پر متفرق سوالات مشق ۱۴	۱۷۰

	مضامین	صفحات
	چوتھا باب : قطع مکافی	۱۷۵
۱ ، ۴	مخروطی تراشیں	رر
۲ ، ۴	قطع مکافی	۱۷۷
۳ ، ۴	مکافی کی شکل	۱۸۱
۳۱ ، ۴	مکافی کی مساوات	۱۸۸
۳۲ ، ۴	نقطہ اور مکافی کا تعلق	۱۹۲
۴ ، ۴	مکافی کا ماسکہ اور مرتب معلوم ہوں تو مکافی کی مساوات دریافت کرنا۔	۱۹۵
۴۱ ، ۴	مکافی کو مرتسم کرنے کا حیلی طریقہ	۱۹۸
۵ ، ۴	مکافی کے وتر، مماس اور عماد کی مساواتیں	۱۹۹
	مشقی سوالات ۱۵	۲۰۳
	مشقی سوالات ۱۶	۲۰۵
۶ ، ۴	مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے محدد	۲۰۶
	مشقی سوالات ۱۷	۲۰۸
۶۱ ، ۴	تماس کی شرط	۲۰۹
۶۲ ، ۴	مکافی کی تبدیلی تعبیر	۲۱۱
۷ ، ۴	عماد کی مساوات	رر
۸ ، ۴	منحنی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع اور تماس کی شرط	۲۱۲
	مشقی سوالات ۱۸	۲۱۴

	مضامین	صفحات
۴،۹	وترِ تماس کی مساوات	۲۱۵
۴،۹۱	قطبی اور قطب	۲۱۷
۴،۹۲	مکافی کے لحاظ سے خطِ مستقیم کے قطب کے محدد معلوم کرنا	۲۱۸
	مشقی سوالات ۱۹	۲۱۹
	مکافی پر متفرق سوالات ۲۰	۲۲۱
	پانچواں باب : قطع ناقص	۲۲۵
۵،۱	قطع ناقص کی تعریف	//
۵،۱۱	ناقص کی مساوات	//
۵،۱۲	ناقص کی شکل	۲۲۹
۵،۲	مرکز سے ماسکہ اور مرتب کے فاصلے	۲۳۱
۵،۳	ناقص کا دوسرا ماسکہ اور دوسرا مرتب	//
۵،۳۱	ناقص کے کسی نقطہ سے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔	۲۳۳
۵،۳۲	عکسِ مسئلہ	۲۳۷
۵،۳۳	ناقص کو ترسیم کرنے کا حیلی طریقہ	۲۴۰
۵،۳۴	ناقص کا وترِ خاص	//
۵،۳۵	خروج المرکز کی قیمت محوروں کی رقوم میں	۲۴۱
۵،۴	نقطہ اور ناقص کا تعلق	۲۴۲
۵،۵	امدادی دائرہ	۲۴۴
۵،۵۱	خارج المرکز زاویہ	۲۴۶

	مضامین	صفحات
۵،۵۲	اُس ناقص کی مساوات معلوم کرنا جس کا ماسکہ، نقطہ مرتب اور خروج المرکز معلوم ہوں۔	۲۴۷
	مشق ۲۱	۲۵۲
۵،۶	ناقص کے وتر کی مساوات	۲۵۴
۵،۶۱	ناقص پر کے کسی نقطہ سے ناقص کے مماس کی مساوات	۲۵۵
۵،۶۲	عماد کی مساوات	۲۵۷
	مشق ۲۲	۲۵۹
۵،۷	ناقص اور خطِ مستقیم کا تقاطع	۲۶۰
۵،۷۱	ناقص کی مساوات کے لیے متبادل طریقہ	۲۶۳
	مشق ۲۳	۲۶۶
۵،۸	وترِ تماس کی مساوات	۲۶۷
۵،۸۱	قطب اور قطبی	۲۶۸
۵،۸۲	قطبی کی مساوات	۲۶۹
۵،۸۳	قطب کے محدد	۲۷۰
	ناقص پر متفرق سوالات	۲۷۲
	چھٹا باب : قطع زائد	
۶،۱	زائد کی تعریف	۲۷۶
۶،۱۱	زائد کی مساوات	″

مضامین		صفحات
۶٫۱۲	زائد کی شکل	۲۸۰
۶٫۲	مرکز سے ماسکہ اور مرتب کے فاصلے	۲۸۲
۶٫۲۱	دوسرا ماسکہ اور دوسرا مرتب	۲۸۳
۶٫۳	زائد پر کے کسی نقطہ سے ماسکی فاصلوں کا فرق مستقل ہوتا ہے ۔	۲۸۵
۶٫۳۱	زائد کا وتر خاص	۲۸۷
	مشق ۲۴	۲۸۸
۶٫۴	ناقص اور زائد کی مساواتوں کا فرق	۲۹۱
۶٫۵	متقارب	۲۹۳
۶٫۵۱	متقاربوں کی مساواتیں	〃
۶٫۶	قائم زائد	۲۹۵
۶٫۶۱	قائم زائد کی مساوات متقاربوں کو محور مان کر	۲۹۶
۶٫۶۲	زائد کی مساوات متقاربوں کو محور مان کر	۲۹۸
	زائد پر متفرق مشقیں	۳۰۳

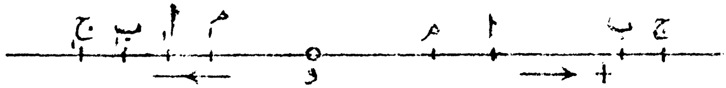
بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

محدّدوں کا ہندسہ

پہلا باب

محدّد اور خطِ مستقیم

۱،۱ - محدّد — ذیل کی شکل میں ایک خطِ مستقیم ہے جو دونوں طرف لا محدود ہے۔ اس خط پر بے شمار نقطے ہیں' ان کا مقام معیّن کرنا مقصود ہے۔ اس غرض سے اس خط پر ایک نقطہ و لیا گیا ہے جس کے



لحاظ سے باقی تمام نقطوں کے مقام معیّن کیے جائینگے۔ و کے دائیں طرف کوئی نقطے ا، ب، ج ...... ہیں اور بائیں جانب اَ، بَ، جَ ......، دائیں جانب کے نقطوں پر پہنچنے کے لیے و سے دائیں جانب جانا پڑتا ہے اور بائیں جانب کے نقطوں تک پہنچنے کے لیے بائیں جانب جانا پڑتا ہے' اس "جانے کی جانب" یا فاصلہ کی سمت کو مثبت اور منفی علامات کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے' یہاں یہ قرار داد اختیار کی جاتی ہے کہ دائیں طرف کے طے کردہ فاصلوں کو ⟶ مثبت مانا جائیگا اور بائیں جانب کے طے کردہ فاصلوں کو ⟵ منفی - یہ محض اختیاری ہے'

بائیں جانب کے طے کردہ فاصلوں کو مثبت اور دائیں طرف کے فاصلوں کو منفی قرار دیا جا سکتا ہے۔ اب اگر ا و سے ۱۵۰ میل کے فاصلہ پر واقع ہو اور تمام خط پر کے فاصلوں کا پیمانہ یہ لیا جائے اً = ۱۰۰ میل تو و سے دائیں جانب ا کا فاصلہ خط پر ۵ء۱ اً رکھنا چاہیے۔ پس و ا = ۵ء۱ اً یا اگر اکائی یعنی انچ ہمارے ذہن میں رہے تو و ا = + ۵ء۱ مثبت علامت کیونکہ فاصلہ و کے دائیں جانب ناپا گیا ہے دیکھو شکل۔ عدد (+ ۵ء۱) سے نقطہ ا کی حدبندی یا تعیین ہوتی ہے اس عدد (+ ۵ء۱) کو نقطہ ا کا محدد کہتے ہیں۔ واضح ہو کہ و سے دائیں جانب فاصلہ ۵ء۱ جانے سے ہم خط کے صرف نقطہ ا پر پہنچتے ہیں گویا عدد (+ ۵ء۱) کے جواب میں نقطہ ا ہے اور نقطہ ا کے جواب میں صرف عدد (+ ۵ء۱) حاصل ہوتا ہے۔ پس اس ترکیب تعیین یا حوالہ کے فریم کے مطابق ہندسی نقطہ ا اور حقیقی عدد (+ ۵ء۱) میں یگانہ تعلق ہے۔ اسی طور پر نقطہ ا, کا محدد (- ۵ء۱) ہے منفی علامت اس لیے دی گئی ہے کہ نقطہ ا, شکل میں و کے بائیں جانب واقع ہے۔ پیمائش سے واضح ہوگا کہ اور نقطوں کے محدد کیا ہیں، مثلاً نقطہ م (+ ۱) ہے، ب (+ ۲)، ج (۳ء۲)، م, (- ۱)، ب, (- ۳ $\frac{1}{2}$)، ج, (- $\frac{11}{2}$)، .... وغیرہ۔

ظاہر ہے کہ و کے دائیں جانب کے تمام نقطے ۰ تا ∞ تک کے تمام حقیقی اعداد سے اور و کے بائیں جانب کے تمام نقطے ۰ تا -∞ تک کے تمام حقیقی اعداد سے تعبیر ہوتے ہیں جن میں صحیح عدد، کسری اور متباین اعداد سب شامل ہیں۔

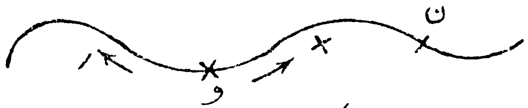
اب اگر کوئی ہندسی نقطہ ط خط پر کہیں واقع ہو تو ط کا محدد جبریہ عدد (ا) سے تعبیر ہو سکتا ہے، پس ط (+ ا)، ق (- ب)، یا بالعموم نقطہ ن (لا)۔ نقطہ ن کا محدد لا ہے اور لا کی مختلف عددی قیمتوں کے لیے جو مثبت منفی ہو سکتی ہیں یہ نقطہ ن خط پر کہیں واقع ہو سکتا ہے۔ اگر کوئی نقطہ خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو اس کے محدد کو بھی اکثر لا سے تعبیر کرتے ہیں۔ پس خطِ مستقیم پر کا کوئی نقطہ، ایک فاصلہ، ایک پیمائش، ایک عدد سے تعبیر ہو سکتا ہے مثلاً (۳)، (- ۵ء۲)، (ا)، (لا)، وغیرہ۔

واضح ہو کہ اس ترکیب سے ہندسی نقطہ کا نام ایک عدد سے رکھا گیا۔

اور عدد کے پہلے مثبت منفی علامت لگانے سے مبدا و کے دائیں بائیں جانب کے سب نقطے اس طور پر نامزد ہوجاتے ہیں۔

خطِ مستقیم افقی ہونے کی بجائے انتصابی ہوسکتا ہے اس پر مناسب مبداء و مقرر کیا گیا و سے اوپر جانے کی سمت کو ↑ مثبت مانا جاتا ہے اور نیچے جانے کی سمت ↓ کو منفی، پہلے کی طرح خط پر کے تمام نقطے ‎-∞‎ سے ‎+∞‎ تک کے تمام حقیقی اعداد سے تعبیر ہوسکتے ہیں۔ مثلاً ا (+ا)، ط (+ل)، ق (- ب) نقطہ ن (ما) ہے۔

خط مستقیم ہونے کی بجائے منحنی ہوسکتا ہے۔



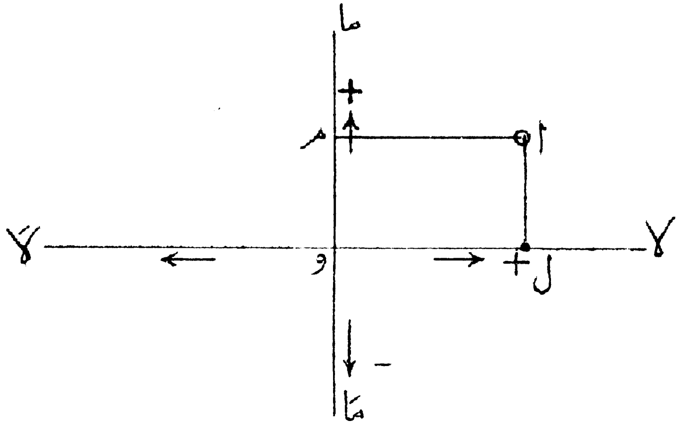
اس پر مناسب مبدأ و لے کر، ایک طرف کی سمت کو مثبت اور دوسرے طرف کی سمت کو منفی لیا جاسکتا ہے - اگر اس کی قوس کا طول س سے تعبیر ہو تو نقطہ ن (س) سے تعبیر ہوگا جہاں س، مثبت، منفی ہونے سے ن تمام اعداد پر منطبق ہوسکتا ہے۔

پس خط پر کے کسی نقطہ کا محدد "لا" ہے۔ یا اگر متحرک نقطہ خط پر حرکت کرنے کے لیے مجبور ہو تو بھی اس کا محدد "لا" ہوگا جہاں لا بدلیگا یا مختلف عددی قیمتیں اختیار کریگا جیسے نقطہ خط پر حرکت کریگا۔

۱ ا ۱ - اب تک نقطہ ایک خط پر رہنے یا حرکت کرنے کے لیے مقید تھا، اب فرض کرو کہ نقطہ ایک مستوی سطح پر واقع ہے یا مستوی سطح میں رہنے یا حرکت کرنے کے لیے مجبور ہے اور اس کا مقام متعین کرنا مقصود ہے۔

اس مستوی میں دو خط علی القوائم لا و لا اور ما و ما لو ایک افقی اور دوسرا انتصابی۔ یہ نقطہ و پر قطع کرتے ہیں، و کو پیمائشوں کا مبدأ مانو - نیز

یہ قرارداد ہم اختیار کرتے ہیں، تمام اُفقی فاصلے جو و لا کی سمت میں



ناپے جائینگے وہ مثبت ہونگے اور و لَا کی سمت میں منفی۔ نیز انتصابی سمت میں جو فاصلے و ما کی سمت میں ناپے جائینگے وہ مثبت ہونگے اور و مَا کی سمت میں منفی۔ ثابت خط لَا و لا کو محور لا کہتے ہیں اور مَا و ما کو محور ما۔ پس ایک مستوی میں نقطوں کی تعیین کے لیے ذیل کی ترکیب یا آلہ ہم نے اختیار کیا ہے "دو خط اور ان کا نقطۂ تقاطع مبدا، مع فاصلوں کے متعلق قراردادوں کے"۔

اب مستوی سطح میں کے کسی نقطۂ ا کا مقام معین کرنا مقصود ہے۔ ا سے ان ثابت خطوں پر عمود ال، ام کھینچو، ان دو عمودوں یا ان کی پیمائشوں کے ذریعے نقطہ ا کا مقام معین ہو سکتا ہے۔ یعنی ما، اور ل ا نقطہ کے لیے ا کا مقام متعین کرتے ہیں اور ا کے محدّد قرار دیے جا سکتے ہیں یا اسے یوں بھی دیکھ سکتے ہیں، مستوی سطح میں کے نقطہ ا تک پہنچنے کے لیے مبدا سے فاصلہ و ل خط و لا پر اور ل ا محور ما کے متوازی جانا پڑتا ہے۔

چونکہ م ا = و ل اس لیے دونوں صورتوں میں نقطہ ا کی تعیین و ل اور ل ا سے ہوتی ہے یعنی نقطہ ا کے محدّد (و ل، ل ا) ہیں، اوپر کی شکل کو دیکھیے

ظاہر ہے کہ ول اور ل ا دونوں ثبت ہیں ۔ اگر دونوں محوروں کے متوازی فاصلوں کی اکائی ایک ہی لی جائے مثلاً اَ = ۱۰ تو ول = ۹ اور ل ا = ۶ یعنی نقطۂ ا کے محدد ہیں (۹، ۶)۔ مختلف محوروں پر مختلف اکائیاں استعمال ہو سکتی ہیں ۔

یاد رہے کہ اس تعیین میں محور لا پر یا محور لا کے متوازی فاصلہ کو پہلے لکھا گیا ہے، اسے فصلہ کہتے ہیں اور محور ما کے متوازی فاصلہ کو بعد میں لکھا گیا ہے اسے نقطہ کا "معیّن" کہتے ہیں۔ مثلاً ول فصلہ ہے اور ل ا معیّن ۔ پس ہر نقطہ اس طرح تعبیر ہوگا (فصلہ، معین)، (ول، ل ا)، (۹، ۶)۔ گویا سطح مستوی میں کا کوئی نقطہ دو پیمائشوں یا دو عددوں سے تعبیر ہوگا۔

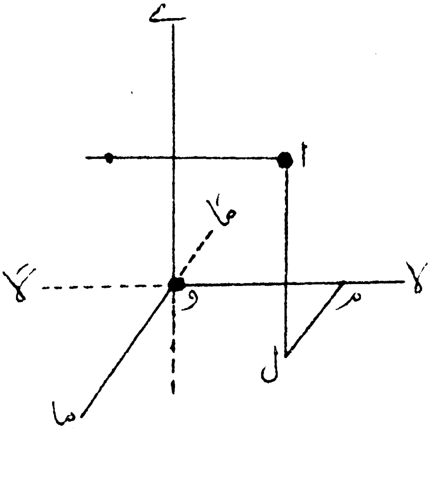
محاور لا اور ما مستوی مذکور یا دو ابعاد کی فضا کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں، لا و ما، ما و لا، لا و ما، ما و لا یہ حصّے بالترتیب رُبع اول، دوم، سوم، چہارم کے نام سے موسوم ہوتے ہیں ۔ پہلے ربع لا و ما میں کے کسی ایک نقطہ تک پہنچنے کے لیے ولا پر کچھ فاصلہ مثبت سمت میں اور و ما کے متوازی کچھ فاصلہ مثبت سمت میں طے کرنا پڑتا ہے، ظاہر ہے کہ اس رُبع کے تمام نقطوں کے لیے فصلہ اور معین دونوں مثبت ہونگے گویا کسی نقطہ کے محدد ہونگے (+، +)، دوسرے ربع میں کے کسی نقطہ کے لیے ولا کی سمت میں کچھ فاصلہ اور و ما کی سمت میں کچھ فاصلہ طے کرنا ہوگا ۔ اس رُبع کے نقطوں کے لیے محدد ہونگے (−، +)، تیسرے ربع کے نقطوں کے لیے محدد ہونگے (−، −) اور چوتھے ربع کے نقطوں کے لیے (+، −) ۔ اوپر کا نقطہ ا (۹، ۶) ہے، ان دو اعداد ۹، ۶ کے پہلے مثبت منفی علامات لگانے سے باقی تین رُبعات میں تین نقاط (−۹، ۶)، (−۹، −۶)، (+۹، −۶) حاصل ہوتے ہیں ۔ اور پہلے ربع کے تمام نقطوں کے مماثل جن کے محدو دو **مثبت** عددوں سے تعبیر ہوتے ہیں اس طور پر مثبت منفی علامات استعمال کرنے سے باقی تین رُبعات کے تمام نقطے حاصل ہو سکتے ہیں، گویا دو ابعاد کی فضا کے تمام نقطے اس طور پر، دو محددوں کے ذریعہ جبریہ علامات استعمال کرنے سے حاصل ہو جاتے ہیں ۔ پس مستوی سطح میں کا نقطہ اس طرح کا ہوگا (−۲، ۲ء۳) یا زیادہ عام طور پر (ا، ب) یا (لا، ما)۔

جب نقطہ کے محددوں کی جبریہ شکل ہو تو مثلاً لا، ما کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے مستوی کے تمام نقطے اس سے تعبیر ہو سکتے ہیں۔

نیز جب نقطہ متحرک ہو یعنی مثلاً ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کرے تو اس کے محدد لا، ما سے تعبیر ہو سکتے ہیں جہاں لا، ما متغیر ہونگے۔ پس دو العاد کی فضا میں کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہے۔

ہم آگے دیکھینگے کہ ہر منحنی جو بالتمام دو العاد کی فضا میں واقع ہو سکتا ہے جیسے خط مستقیم دائرہ قطع مکافی وغیرہ اس پر کے نقطے ایک رشتہ پورا کرتے ہیں جو (لا، ما) کی رقوم میں بیان ہو سکیگا۔

۱۲۱۱۔ محدد تین العاد میں نقطہ اب فرض کرو ایک سطح مستوی میں رہنے کے لیے مقید نہیں ہے بلکہ تین العاد کی فضا میں کہیں ہیں واقع ہو سکتا ہے۔ اس کے مقام کی تعیین مقصود ہے۔ اس صورت میں حوالہ کا فریم یہ اختیار کیا جاتا ہے۔



کوئی متاسب علی القوائم تین مستوی ما و ے، ے و لا، لا و ما فضا میں لو۔ یہ فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر حصہ کو ثمن کہا جائیگا۔ یہ حوالہ کے مستوی قرار دیے جائینگے۔

یہ مستوی نقطہ و پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ و پیمائش کا مبدا ہے۔ ان میں سے دو دو مستوی تین خطوطِ مستقیم ولا، وما، وے پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ یہ خط محور قرار دیے جائینگے۔ محور لا کی سمت وَلا مثبت اور ولاَ منفی ہوگی، اسی طرح مَا و ما مثبت اور ما و مَا منفی اور ےَ و ے مثبت اور ے و ےَ منفی ہوگی۔

اب نقطہ ا پر پہنچنے کے لیے مبدا و سے فاصلہ و م (۴) محور لا پر اور م ل (۵ء۱) محور ما کے متوازی اور ل ا (۳) محور ے کے متوازی جانا پڑتا ہے، پس ا کے محدد (۲، ۵ء۱، ۳) ہیں۔ اسی طرح ا کے مماثل باقی سات ثمنوں میں نقطے ہونگے (-۲، ۵ء۱، ۳)، (-۲، -۵ء۱، ۳)، (۲، -۵ء۱، ۳)، (۲، ۵ء۱، -۳)، (-۲، ۵ء۱، -۳)، (-۲، -۵ء۱، -۳)، (۲، -۵ء۱، -۳)

گویا تین مثبت عددوں کے سامنے مثبت منفی علامتیں لگانے سے ایسے (۲^۳) آٹھ عدد حاصل ہوتے ہیں جو فضا کے مختلف ثمنوں میں واقع ہیں۔ زیادہ عام صورت میں نقطہ ن کے محدد (ا، ب، ج) ہونگے یا (لا، ما، ی)۔ نقطہ ن (لا، ما، ی) محدّدوں لا، ما، ی کی مختلف عددی قیمتوں کے لیے فضا میں کے تمام نقطوں پر منطبق ہو سکتا ہے۔ پس فضا میں کے کسی نقطہ کی تعیین کے لیے تین پیمائشوں تین محددوں مثلاً (۲، -۳، ۵)، (ا، ب، ج) یا (لا، ما، ی) کی ضرورت ہوگی۔

مشق ۱

(۱) حقیقی اعداد -∞ تا +∞ کو ایک خطِ مستقیم پر ترتیب دو، کسور اور متباین اعداد کی تعیین بھی کرو۔

(۲) خط ا ب کا وسطی نقطہ و ہے اور خط پر کوئی اور نقطہ ج ہے، و کو محدّدوں کا مبدا مان کر ثابت کرو کہ

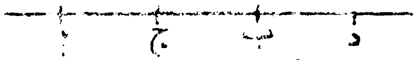
ا ج + ج ب = ۲ و ب

ا ج - ج ب = ۲ و ج

(۳) ایک خطِ مستقیم پر دو نقطے ا، ب ہیں، ان کی اندرونی اور بیرونی تقسیم ایک ہی نسبت میں نقاط ج، د سے ہوتی ہے، محدّد درج کرنے سے ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{اب} = \frac{۱}{اج} + \frac{۱}{اد}$$

(۴)



ایک خطِ مستقیم پر چار نقطے ا، ب، ج، د کسی ترتیب میں ہیں، ہر نقطہ کے لیے محدّد فرض کرنے سے ثابت کرو کہ

ب ج × ا د + ج ا × ب د + اب × ج د = ۰

(۵) دو ابعاد کی فضا میں مناسب پیمانہ پر

(ا) نقاط (۱، ۰)، (-۲$\frac{۱}{۲}$، ۰)، ($\sqrt{۳}$، ۰) کی شکل میں نشاندہی کرو
واضح ہوگا کہ یہ سب نقطے محور لا پر واقع ہیں ان سب کا ما = ۰

(ب) نقاط (۰، [illegible])، (۰، ۵ء۳)، (۰، -$\sqrt{۳}$) کی شکل میں نشاندہی کرو
واضح ہوگا کہ یہ سب نقطے محور ما پر واقع ہیں، ان سب کا لا = ۰

(ج) نقاط (۱، ۱)، (۵ء۲، ۵ء۲)، (۴، ۴)، (-۵ء، -۵ء)
(-۲، -۲) کی شکل میں نشاندہی کرو -
واضح ہوگا کہ یہ سب نقطے محاور ولا، وما کے درمیانی زاویہ کے منصف پر واقع ہیں، ان سب کے لیے لا = ما

(د) نقاط (۵ء۱، -۵ء۱)، (۳، -۳)، (-۲، ۲)، (-۴، ۴) کی شکل میں نشاندہی کرو۔
واضح ہوگا کہ یہ نقطے وما اور ولاَ کے درمیانی زاویہ کے منصف پر واقع ہیں، ان سب کے لیے لا = - ما

(۶) سکیل $\frac{۱}{۲}$" = ۱ کے موافق، مربع دار کاغذ پر

(ا) ان نقطوں (-۷، ۲)، (-۱۴، ۱)، (۰، ۵)، (۷، ۸)، (۱۱، ۱۴) کو مرتسم کرو، اور ان میں سے خطِ مستقیم کھینچو -

(ب) ان نقطوں (−۵، ۳)، (−۱۱، −۳)، (−۵، −۹)، (۱، −۳) کو مرتسم کرو اور دکھاؤ کہ یہ ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہیں جس کا مرکز (−۵، −۳) ہے اور نصف قطر ۶۔

(ج) ان نقطوں (−۲، −۴)، (۳، ۶)، (۳، −۱۴)، (۱۸، ۱۲)، (۱۸، −۱۶) کو مرتسم کرو، اور ایک ایسا مکافی ان میں سے کھینچو جس کا راس (−۲، −۴) ہے اور جس کا وتر خاص ۲۰ ہے۔

(د) نقاط (۰، −۴)، (−۲۰، ۴)، (−۱۰، ۱) کو مرتسم کرو اور ان نقاط میں سے ایک قطع ناقص کھینچو اور دکھاؤ کہ اس کا مرکز تقریباً (−۱۰، ۴) ہے اور اس کے نیم محور ۱۰ اور ۵ ہیں۔

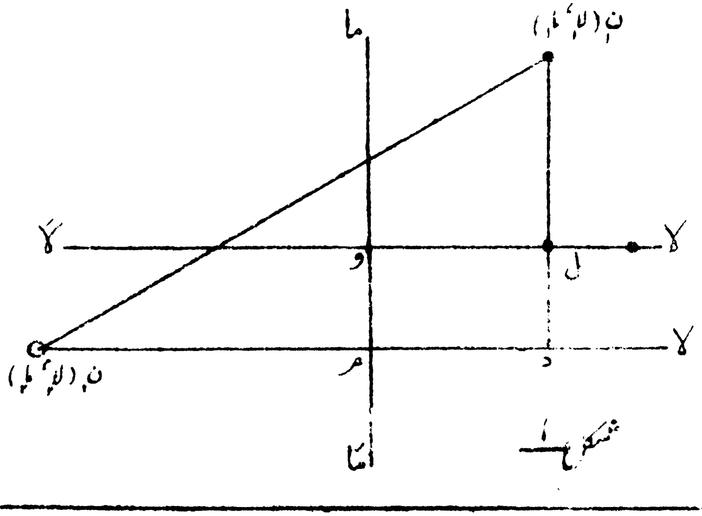
۱٫۳ - اوپر ہم نے دیکھا ہے کہ ایک ابعاد میں کسی نقطہ کا محدد "لا" ہوگا، دو ابعاد کی فضا میں نقطہ کے محدد (لا، ما) ہونگے اور تین ابعاد کی فضا میں (لا، ما، ی)۔ انہیں **کارٹیزی محدّد** کہتے ہیں۔

نقطہ کو اس طور پر عددوں کے ذریعہ تعبیر کرنے کا طریقہ، فرانسیسی فلاسفر ڈی کارٹ (Des Cartes) نے ایجاد کیا، اسی کے نام کے ساتھ یہ محدّد منسوب ہیں۔ جدید ریاضی کی بنیاد ڈالنے والوں میں سے ڈی کارٹ کا نام شمار کیا جاتا ہے۔

ہندسہ کے عناصر، خطوط، اشکال، مجسمات وغیرہ تمام بے شمار نقطوں سے بنے ہوئے خیال کیے جاسکتے ہیں، ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اب ہر نقطہ عددوں کے ذریعہ بیان ہوسکتا ہے اور ہم آگے دیکھینگے کہ ہندسی نقطوں کے درمیان کا کوئی رشتہ ان عددوں کے باہمی رشتہ کے ذریعہ بیان ہوسکیگا۔ اب نقطوں کے اکثر ایسے گروہ ہوتے ہیں جن کے تمام افراد میں ایک مشترک خاصیت پائی جاتی ہے مثلاً ایک دائرہ کے محیط پر کے بیشمار نقطے یہ مشترک خاصیت رکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک نقطہ مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہو۔ اب اگر محیط پر کے بے شمار نقطوں میں سے کسی ایک نقطہ کو (لا، ما) فرض کیا جائے جو عام نقطہ یا نمایندہ نقطہ

خیال کیا جا سکتا ہے اور مختلف عددی قیمتیں اختیار کرنے سے یہ محیط پر کے بے شمار نقطوں میں سے کسی ایک پر منطبق ہو سکتا ہے اور دیے ہوئے مرکز کے محدد (اُ، ب) ہوں اور دائرہ کا دیا ہوا نصف قطر ر ہو تو اس ہندسی امر کو ہمیں ریاضی کی علاماتی زبان میں بیان کر دینا ہے کہ نقاط (لا، ما) اور (اُ، ب) کا فاصلہ ر کے مساوی ہے۔ جس سے ایک جبریہ رشتہ لا، ما، اُ، ب، ر میں ملیگا۔ اسی طور پر تین ابعاد میں ایک کُرہ کی سطح پر کے نقطے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں، نمایندہ نقطہ اگر (لا، ما، ی) ہو اور دیا ہوا مرکز (اُ، بُ، ج) اور نصف قطر ر تو اس ہندسی امر کو بیان کرنے سے ہمیں (لا، ما، ی، اُ، بُ، ج، ر) میں ایک جبریہ رشتہ ملیگا جو لا، ما، ی کی تمام ممکنہ قیمتوں کے لیے جو کرہ کی سطح پر واقع ہو سکتی ہیں درست ہوگا۔ اب دو اور تین ابعاد کی فضاء میں کسی دو نقطوں کا باہمی فاصلہ ان کے محددوں کی رقوم میں معلوم کیا جائیگا جس کی مدد سے اوپر کے جبریہ تعلقات معین شکل میں حاصل ہو سکینگے۔

۱ء۳۔ دو ابعاد کی فضاء میں کسی دو نقطوں ن۱، ن۲ کے محدد (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) معلوم ہیں، ان کے درمیان کے فاصلہ کو ان محددوں کی رقوم میں معلوم کرو۔ محور علی القوائم ہیں۔



شکل ۱

فرض کرو کہ نقطہ $\text{ن}_۱$ کے محدد $(\text{لا}_۱، \text{ما}_۱)$ ہیں اور $\text{ن}_۲$ کے $(\text{لا}_۲، \text{ما}_۲)$۔ شکل دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ $\text{لا}_۲، \text{ما}_۲$ دونوں منفی مقداریں ہیں اور منفی علامت ان کے اندر چھپی ہوئی ہے۔

$\text{ن}_۱ \text{ن}_۲$ کا مطلق طول مطلوب ہے سروں کے محددوں $(\text{لا}_۱، \text{ما}_۱)$ اور $(\text{لا}_۲، \text{ما}_۲)$ کی رقوم میں۔

$\text{ن}_۱$ ل د، محور ما کے متوازی یعنی لاَ و لا پر عمود وار کھینچو۔
نیز $\text{ن}_۲$ م د، محور لا کے متوازی یعنی محور ما پر عمود وار کھینچو۔

تب $\text{و ل} = \text{لا}_۱$، $\text{ل ن}_۱ = \text{ما}_۱$ اور $\text{م ن}_۲ = \text{لا}_۲$، $\text{و م} = \text{ما}_۲$

اب $\text{ن}_۱\text{ن}_۲^۲ = \text{ن}_۲\text{د}^۲ + \text{د ن}_۱^۲$ جہاں خطوط کے مطلق فاصلے زیر بحث ہیں۔

$\text{ن}_۲\text{د} = \text{ن}_۲\text{م} + \text{م د} = -\text{لا}_۲ + \text{لا}_۱$ واضح ہو کہ $\text{لا}_۲$ منفی مقدار ہے، اسے مثبت بنانے کے لیے اس کے ماقبل منفی علامت رکھنا چاہیے تاکہ مطلق طول حاصل ہو۔

اور $\text{د ن}_۱ = \text{د ل} + \text{ل ن}_۱ = -\text{ما}_۲ + \text{ما}_۱$

پس $\text{ن}_۱\text{ن}_۲^۲ = (\text{لا}_۱ - \text{لا}_۲)^۲ + (\text{ما}_۱ - \text{ما}_۲)^۲$ .... (۱)

یعنی مطلق فاصلہ $\text{ن}_۱\text{ن}_۲ = +\sqrt{(\text{لا}_۱ - \text{لا}_۲)^۲ + (\text{ما}_۱ - \text{ما}_۲)^۲}$

مثال - (-۲، ۳) اور (-۳، -۲) کا درمیانی فاصلہ

$$= \sqrt{\{-۲ - (-۳)\}^۲ + \{۳ - (-۲)\}^۲}$$

$$= \sqrt{۱^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۲۶} = ۵٫۰۹...$$

واضح ہو کہ صرف اُن خطوں کے لیے جو محوروں کے متوازی ہیں، مثبت منفی فاصلوں کا دستور قائم کیا گیا ہے لیکن کسی اَور سمت کے فاصلوں

کے لیے فی الحال کوئی قرارداد اختیار نہیں کی گئی اس لیے ن۱ ن۲ کو یا ن۲ ن۱ کو مثبت خیال کیا جا سکتا ہے۔

تین ابعاد میں ن۱ (لا۱، ما۱، ی۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲، ی۲) کے درمیان کا فاصلہ = $\sqrt{}$ [(لا۱ - لا۲)^{۲} + (ما۱ - ما۲)^{۲} + (ی۱ - ی۲)^{۲}]، محور علی القوائم ہیں۔

نیز واضح ہو کہ اگر نقطے ن۱، ن۲ محور لا پر ہوں تو ان کے درمیان فاصلہ = فصلہ ن۲ - فصلہ ن۱ = لا۲ - لا۱، اسی طرح اگر یہ محور ما پر ہوں تو ان کے درمیان فاصلہ = ما۲ - ما۱

ایک دائرہ کا مرکز (-۲، ۳) ہے اور نصف قطر ۴، اس کے محیط پر کے نقطوں کے لیے مشترک جبریہ رشتہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ محیط پر کا کوئی نقطہ (لا، ما) سے تعبیر ہوتا ہے، اس نقطہ کا مرکز سے فاصلہ، نصف قطر کے مساوی ہے

[لا - (-۲)]^{۲} + (ما - ۳)^{۲} = ۴^{۲}

یعنی (لا + ۲)^{۲} + (ما - ۳)^{۲} = ۱۶

یعنی لا^{۲} + ما^{۲} + ۴لا - ۶ما - ۳ = ۰ (دائرہ کی مساوات)

یہ رشتہ محیط پر کے کسی نقطہ کے لیے درست ہے۔ اسے دائرہ کی مساوات کہتے ہیں۔ واضح ہو کہ یہ مساوات صرف اس دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ کے محددوں سے پوری ہو گی، کسی اور نقطہ کے محدد اسے پورا نہیں کر سکتے۔

اسی طرح دائرہ کی مساوات، جس کا مرکز (لا۱، ما۱) اور نصف قطر ر ہے یہ ہوگی

(لا - لا۱)^{۲} + (ما - ما۱)^{۲} = ر^{۲}

مشق ۲

۱- نقاطِ ذیل کا باہمی فاصلہ دریافت کرو:-

(ا) (-۵، ۳)، (۷، -۲) کے درمیان۔ جواب۔ (ا) ۱۳
(ب) (۱، ۲) اور (-۲، -۳) کے درمیان۔ " (ب) ۵٫۸
(ج) (۲، ۰)، (۰، ۳) کے درمیان " (ج) ۳٫۶
(د) (۱، $\frac{۱}{۲}$) اور (-۱، $\frac{۵}{۲}$) کے درمیان۔ " (د) ۸٫۵
(ع) (ا، ۰) اور (۰، ب) کے درمیان " (ع) $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$

۲- (ا) ثابت کرو کہ (۰، ۵) نقاط (-۲، ۰) اور (۲، ۰) سے مساوی فاصلوں پر ہے۔ نیز ثابت کرو کہ محور ما پر کے تمام نقطے، نقاط (-۲، ۰) اور (۲، ۰) سے مساوی فاصلوں پر واقع ہیں۔ اس لیے ایسے نقاط کا طریق معلوم کرو جو نقاط (-۲، ۰) اور (۲، ۰) سے مساوی فاصلوں پر ہوں۔ جواب [لا=۰]

(ب) اسی طرح ثابت کرو کہ نقطہ (+۳، -۳) نقاط (۱، ۰) اور (۰، -۱) سے مساوی فاصلہ پر ہے، اور زاویہ لا و ما کے منصف پر کے سب نقطے، نقاط (۱، ۰)، (۰، -۱) سے مساوی فاصلوں پر ہیں، پس ایسے نقاط کا طریق دریافت کرو جو (۱، ۰) اور (۰، -۱) سے مساوی فاصلوں پر ہوں۔ جواب۔ لا + ما = ۰

(ج) ثابت کرو کہ (۴، ۸) نقاط (۲، -۱) اور (-۳، ۲) سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔ نیز ایسے نقاط کا طریق دریافت کرو جو نقاط (۲، -۱)، (-۳، ۲) سے مساوی فاصلہ پر ہوں۔ جواب۔ ۵لا - ۳ما + ۴ = ۰

۳- (ا) ایک مثلث کے راس (۴، ۱)، (-۲، ۳)، (۱، -۲) ہیں اس کے اضلاع کے طول دریافت کرو۔ جواب۔ ۸٫۵، ۲٫۴، ۳٫۶

(ب) ثابت کرو کہ چار نقاط (-۱، ۲)، (۳، ۵)، (۲، ۰)، (-۲، -۳) ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

(ج) ثابت کرو کہ یہ چار نقطے (-۱، ۰)، (۰، ۱)، (۲، -۱)، (۱، -۲) ایک مستطیل کے راس ہیں۔

(د) ثابت کرو کہ نقطے (۱، ۰)، (۰، $\sqrt{۳}$) اور (۰، -۱) ایک متساوی الاضلاع مثلث کے سرے ہیں۔

۴- (ا) ثابت کرو کہ (۱، -۲) ذیل کے نقاط سے مساوی فاصلہ پر واقع

ہے (۱، -۱)، (۱، -۳)، (۲، -۲)، (۰، -۲)

(ب) ثابت کرو کہ (۱،۱، -۹،۰) نقاط (۱، ۳)، (۲، -۱)، (-۱، ۱)
سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

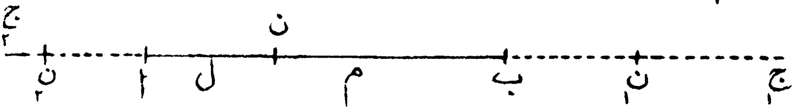
۵۔ ذیل کے دائروں کی مساواتیں لکھو:۔

(ا) مرکز مبداء اور نصف قطر ۲، نصف قطر ر۔ جواب۔ (ا) لا² + ما² = ۴، لا² + ما² = ر²

(ب) مرکز (-۲، ۱)، نصف قطر ۳ " (ب) (لا + ۲)² + (ما - ۱)² = ۹

(ج) مرکز (۲، -۳) نصف قطر ۴ " (ج) (لا - ۲)² + (ما + ۳)² = ۱۶

۱۴۔ اب خط مستقیم ہے اور اس پر نقطہ ن، اسے نسبت ل : م میں تقسیم کرتا ہے، نسبت ل : م کی مختلف قیمتیں ہو سکتی ہیں



اب $\frac{\text{ان}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$

اگر نقطہ ن، ا کے قریب دائیں جانب واقع ہو تو اس نسبت کی قیمت صفر کے قریب ہوگی، اگر نقطہ ن، اب پر حرکت کرتا متصور کیا جائے تو جب یہ اب کے وسطی نقطہ پر ہوگا تو اس نسبت $\frac{\text{ان}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی قیمت ۱ ہوگی اور ا سے وسطی نقطہ تک جانے میں یہ نسبت، صفر سے ۱ تک کی تمام کسری قیمتوں میں سے گذریگی۔ وسطی نقطہ سے ب تک جانے میں یہ ایک سے $+\infty$ تک کی تمام قیمتوں میں سے گذریگی، گویا جب نقطہ ن، ا کے عین دائیں جانب سے شروع ہو کر ب کے عین بائیں جانب تک سفر کریگا تو یہ نسبت $\frac{\text{ان}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$، صفر سے $+\infty$ تک کی تمام قیمتوں میں سے گذر جائیگی۔ ب کے عین دائیں جانب اس نسبت کی قیمت $-\infty$ ہوگی اور جب نقطہ ن، ب سے دائیں جانب لا انتہا فاصلہ پر چلا جائیگا تو یہ نسبت $-\infty$ سے -۱ تک کی

تمام منفی قیمتوں میں سے گذریگی۔ اب خط پر بائیں جانب لا انتہا فاصلہ پر جو نقطہ ہوگا اس کے لیے بھی نسبت $\frac{\text{ان}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی قیمت -۱ ہوگی اور جب نقطہ ن، بائیں طرف کے لا انتہا فاصلہ سے ا کے عین بائیں طرف تک سفر کریگا تو یہ نسبت -۱ سے صفر تک کی منفی قیمتیں اختیار کریگی پس واضح ہے کہ نسبت کی قیمتوں ۰ سے ∞ تک کے لیے اب پر نقطے ہیں، ∞ سے -۱ تک کے لیے ب ج پر نقطے ہیں جہاں ج خط پر دائیں جانب لا تناہی پر کا نقطہ ہے اور -۱ سے ۰ تک کے لیے ج۲ ا پر نقطے ہیں جہاں ج۲ خط پر بائیں جانب لا تناہی پر کا نقطہ ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ -∞ سے +∞ تک نسبت کی ہر قیمت کے لیے خط پر ایک نقطہ ہے سوائے قیمت -۱ کے لیے جس کے لیے لا تناہی پر کے دو نقطے دائیں اور بائیں جانب ج۱ اور ج۲ ہیں، تسلسل اور یکسانیت کو قائم رکھنے کے لیے ریاضی داں یہ فرض کرتے ہیں کہ ج۱ اور ج۲ دونوں ایک ہی نقطہ کو تعبیر کرتے ہیں جہاں پر خط کی لا تناہیاں آکے ملتی ہیں۔ اس کو لا تناہی پر کا نقطہ کہتے ہیں۔ پس $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی ہر قیمت کے لیے خط پر ایک اور صرف ایک نقطہ ملتا ہے۔

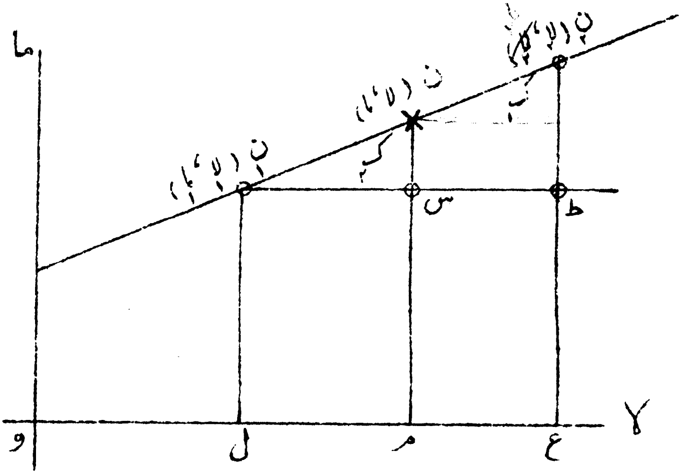
اب ہم دیکھینگے کہ اگر ایک خط کے سروں کے نقطوں کے محدد دیے گئے ہوں تو اس خط کو کسی معلومہ نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محدد، سروں کے محددوں اور معلومہ نسبت کی رقوم میں کیونکر معلوم ہو سکتے ہیں۔

۱۵۔ ایک خطِ مستقیم پر کے دو نقاط ن۱ (لا۱، ما۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲) دیے گئے ہیں، خط پر کوئی اور نقطہ ن ن۱ ن۲ کو نسبت ک۱ : ک۲ سے تقسیم کرتا ہے، اس نقطہ کے محدد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ ن، خط ن۱ ن۲ کو نسبت ک۱ : ک۲ سے تقسیم کرتا ہے، اور ن کے محدد (لا، ما) مطلوب ہیں۔

ان نقاط ہیں سے خطوط محوروں کے متوازی کھینچو جیسے

شکل میں -



اب $\frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1} = \frac{\text{ن}_1\text{ن}}{\text{ن}\text{ن}_2} = \frac{\text{ن}_1\text{س}}{\text{س}\text{ط}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}}$

پس $\text{ک}_1(\text{لا} - \text{لا}_1) = \text{ک}_2(\text{لا}_2 - \text{لا})$

یعنی $\text{لا}(\text{ک}_1 + \text{ک}_2) = \text{ک}_1\text{لا}_1 + \text{ک}_2\text{لا}_2$

پس $\text{لا} = \frac{\text{ک}_1\text{لا}_1 + \text{ک}_2\text{لا}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}$

اسی طرح متشابہ مثلثوں سے

$$\frac{\text{ن}_1\text{ن}}{\text{ن}_1\text{ن}_2} = \frac{\text{ن}\text{س}}{\text{ن}_2\text{ط}}$$

یعنی $\frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$

یعنی $(\text{ک}_1 + \text{ک}_2)(\text{ما} - \text{ما}_1) = \text{ک}_2(\text{ما}_2 - \text{ما}_1)$

یعنی $\text{ما}(\text{ک}_1 + \text{ک}_2) = \text{ک}_1\text{ما}_1 + \text{ک}_2\text{ما}_2$

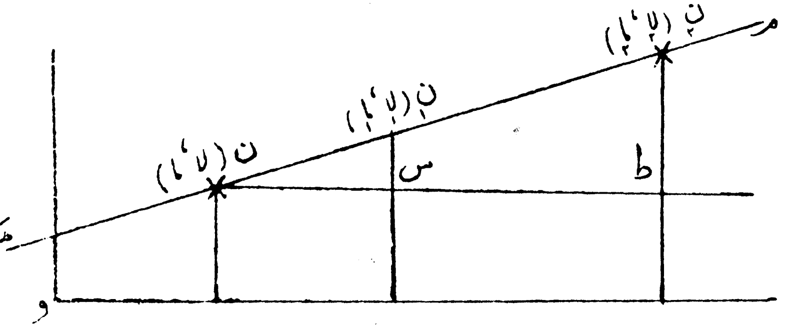
پس $\text{ما} = \dfrac{\text{ک}_۲\,\text{ما}_۱ + \text{ک}_۱\,\text{ما}_۲}{\text{ک}_۱ + \text{ک}_۲}$

پس نقطہ ن کے محدد $\left(\dfrac{\text{ک}_۲\,\text{لا}_۱ + \text{ک}_۱\,\text{لا}_۲}{\text{ک}_۱ + \text{ک}_۲} ، \dfrac{\text{ک}_۲\,\text{ما}_۱ + \text{ک}_۱\,\text{ما}_۲}{\text{ک}_۱ + \text{ک}_۲} \right)$ ہیں۔

$\text{ن}_۱\,\text{ن}_۲$ کے وسطی نقطہ کے محدد $\left(\dfrac{\text{لا}_۱ + \text{لا}_۲}{۲} ، \dfrac{\text{ما}_۱ + \text{ما}_۲}{۲} \right)$ ہیں۔

نسبت $\dfrac{\text{ک}_۲}{\text{ک}_۱} = \dfrac{\text{ن}_۱\,\text{ن}}{\text{ن}\,\text{ن}_۲}$ کو مختلف قیمتیں ۰ سے $+\infty$ تک دینے سے خط $\text{ن}_۱\,\text{ن}_۲$ پر کے تمام نقطے مل سکتے ہیں۔ بالخصوص جب $\text{ک}_۲ = ۰$ تو ن، $\text{ن}_۱$ پر منطبق ہوتا ہے اور اس کے محدد ہمیں $(\text{لا}_۱ ، \text{ما}_۱)$ ملتے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے، اور جب ن، $\text{ن}_۲$ پر منطبق ہوتا ہے تو $\text{ک}_۱ = ۰$، محدد $(\text{لا}_۲ ، \text{ما}_۲)$ ملتے ہیں۔

خارجی تقسیم — اگر $\text{ن}_۱\,\text{ن}_۲$ کی خارجی تقسیم ن پر نسبت $-\dfrac{\text{ک}_۲}{\text{ک}_۱}$ سے ہوئی ہو جہاں $\text{ک}_۲$، $\text{ک}_۱$ مثبت صحیح عدد ہیں، تو ن کے محدد بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔



$\dfrac{\text{ن}_۱\,\text{ن}}{\text{ن}\,\text{ن}_۲} = -\dfrac{\text{ک}_۲}{\text{ک}_۱}$ واضح ہوگا کہ نقطہ ن خط پر دائیں جانب (ھر) کی طرف واقع ہوگا

اگر $\text{ک}_2 > \text{ک}_1$ اور بائیں جانب ھ کی طرف اگر $\text{ک}_2 < \text{ک}_1$ -
خط محوروں کے متوازی کھینچو جیسے شکل میں، متشابہ مثلثوں سے

$$\frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1} = \frac{\text{ن}\,\text{ت}_1}{\text{ن}\,\text{ن}_2} = \frac{\text{ن س}}{\text{ن ط}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا} - \text{لا}_2}$$

پس $\text{ک}_1(\text{لا} - \text{لا}_1) = \text{ک}_2(\text{لا} - \text{لا}_2)$ یعنی $\text{لا}(\text{ک}_2 - \text{ک}_1) = \text{ک}_2\text{لا}_2 - \text{ک}_1\text{لا}_1$

$$\text{لا} = \frac{\text{ک}_2\text{لا}_2 - \text{ک}_1\text{لا}_1}{\text{ک}_2 - \text{ک}_1} = \frac{\text{ک}_1\text{لا}_1 - \text{ک}_2\text{لا}_2}{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}$$ $\text{ک}_2 > \text{ک}_1$ شکل میں

اسی طرح $\dfrac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1} = \dfrac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما} - \text{ما}_2}$، یعنی $\text{ک}_2(\text{ما} - \text{ما}_2) = \text{ک}_1(\text{ما} - \text{ما}_1)$

$$\text{ما}(\text{ک}_1 - \text{ک}_2) = \text{ک}_1\text{ما}_1 - \text{ک}_2\text{ما}_2$$

یعنی $$\text{ما} = \frac{\text{ک}_1\text{ما}_1 - \text{ک}_2\text{ما}_2}{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}$$

واضح ہو کہ تین ابعاد میں، دو نقطوں $\text{ن}_1(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1)$ اور $\text{ن}_2(\text{لا}_2، \text{ما}_2، \text{ی}_2)$ کے ملانے والے خط کو جو نقطہ نسبت $\text{ک}_1 : \text{ک}_2$ سے تقسیم کرتا ہے اس کے محدّد ہوں گے

$$\left(\frac{\text{ک}_1\text{لا}_2 + \text{ک}_2\text{لا}_1}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}، \frac{\text{ک}_1\text{ما}_2 + \text{ک}_2\text{ما}_1}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}، \frac{\text{ک}_1\text{ی}_2 + \text{ک}_2\text{ی}_1}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}\right) -$$

مثال (۱) ایک نقطہ نقاط (-۵، ۳) اور (-۴، -۲) کے ملانے والے خط کو نسبت ۷ : ۵ میں داخلاً تقسیم کرتا ہے، اس کے محدّد دریافت کرو، نسبت کے اعداد نقطوں کے ساتھ بالترتیب متعلق ہیں -

$$\text{لا} = \frac{7 \times (-4) + 5(-5)}{7 + 5} = -\frac{53}{12}$$

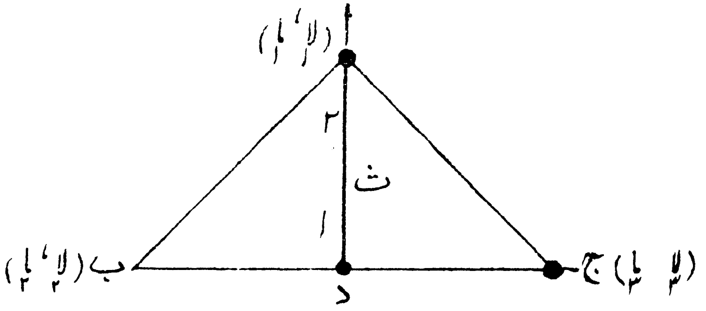
$$\text{ما} = \frac{7 \times (-2) + 5(3)}{7 + 5} = \frac{1}{12}$$

مثال (۲) ایک نقطہ، نقاط (۶، ۳) اور (−۷، ۲) کے ملانے والے خط کو خارجاً نسبت ۱ : ۵ سے تقسیم کرتا ہے، اس کے محدّد دریافت کرو۔

$$\text{لا} = \frac{۵ \times ۶ - ۱ \times (-۷)}{۵ - ۱} = \frac{۳۷}{۴}$$

$$\text{ما} = \frac{۵ \times ۳ - ۱ \times ۲}{۵ - ۱} = \frac{۱۳}{۴}$$

مثال (۳) ایک مثلث، اور چار سطحی کے رأسوں کے محدّد دیے ہوئے ہیں، ہندسی مرکز کے محدّد معلوم کرو۔



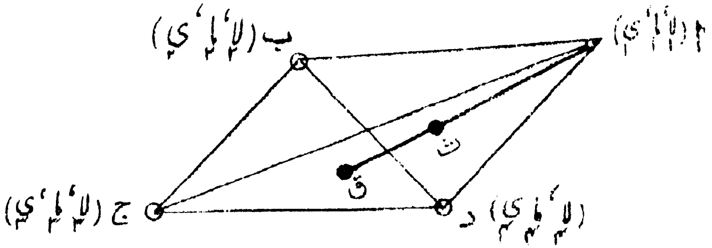
مثلث کا مرکزِ ثقل خط ا د پر ہے اور ا کی جانب سے ا د کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے،

د کے محدّد ہیں $\left(\frac{\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳}{۲} ، \frac{\text{ما}_۲ + \text{ما}_۳}{۲} \right)$

ث کے محدّد ہیں $\frac{۲ \times \frac{\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳}{۲} + ۱ \times \text{لا}_۱}{۲ + ۱} = \frac{\text{لا}_۱ + \text{لا}_۲ + \text{لا}_۳}{۳}$ اور $\frac{\text{ما}_۱ + \text{ما}_۲ + \text{ما}_۳}{۳}$

چار سطحی کے رأسوں کے محدّد

$(\text{لا}_۱، \text{ما}_۱، \text{ی}_۱)$، $(\text{لا}_۲، \text{ما}_۲، \text{ی}_۲)$، $(\text{لا}_۳، \text{ما}_۳، \text{ی}_۳)$، $(\text{لا}_۴، \text{ما}_۴، \text{ی}_۴)$



پس چار سطحی کا مرکز ثقل ث پر ہے جہاں $\frac{ا ث}{ث ق} = \frac{۳}{۱}$

ق مثلث ب ج د کا مرکز ثقل ہے اور ق کے محدد ہیں

$$\frac{لا_۲ + لا_۳ + لا_۴}{۳}، \quad \frac{ما_۲ + ما_۳ + ما_۴}{۳}، \quad \frac{ی_۲ + ی_۳ + ی_۴}{۳}$$

ث کے محدد ہیں $\frac{۳ \times \frac{لا_۲ + لا_۳ + لا_۴}{۳} + ۱ \times لا_۱}{۳ + ۱} = \frac{لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + لا_۴}{۴}$

اور $\frac{ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ + ما_۴}{۴}$، $\frac{ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + ی_۴}{۴}$ وغیرہ ۔

مشق ۳

(۱) نقاط (–۳، ۵) اور (–۷، –۶) کے ملانے والے خط کو جو نقطہ داخلاً نسبت ۷ : ۵ میں تقسیم کرتا ہے اس کے محدد معلوم کرو ۔

جواب $\left(-\frac{۱۶}{۳}، -\frac{۱۷}{۱۲}\right)$

(۲) اس نقطہ کے محدد معلوم کرو جو (۴، –۳) اور (–۳، +۵) کی نسبت ۲ : ۷ سے تقسیم کرتا ہے ۔

جواب $\left(\frac{۲۲}{۹}، -\frac{۱۱}{۹}\right)$

(۳) نقاط (۵، ۴)، (–۲، –۲) کے ملانے والے خط کو جو نقطہ خارجاً

نسبت ۱ : ۴ سے تقسیم کرتا ہے اس کے محدّد دریافت کرو۔

جواب (۹، ۶)

(۴) اُس نقطہ کے محدّد دریافت کرو جو نقاط (۲، ۳) اور (۴، -۷) کے ملانے والے خط کو خارجاً نسبت ۲ : -۳ سے تقسیم کرتا ہے۔

جواب (-۲، ۱۲/۵)

(۵) معلوم کرو کہ محور لا نقاط (۳، ۴) اور (-۲، -۵) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔

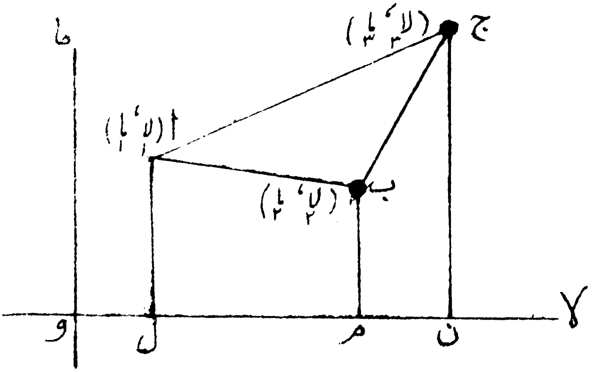
جواب ۴/۵

(۶) اُس مثلث کا مرکزِ ہندسی دریافت کرو جس کے راسوں کے محدّد (-۳، ۷)، (۲، ۴)، (۳، ۵) ہوں۔

جواب ۲/۳، ۱۶/۳

۱۷۔ ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ جب دو نقطوں کے محدّد دیئے گئے ہوں تو اُن کے ملانے والے خط کا فاصلہ ان محدّدوں کی رقوم میں حاصل ہو سکتا ہے اب ہم دیکھینگے کہ جب ایک مثلث کے راسوں کے محدّد دیے گئے ہوں تو اس کا رقبہ ان محدّدوں کی رقوم میں کیونکر معلوم ہو سکتا ہے۔

ایک مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج کے محدّد بالترتیب (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$)، (لا$_3$، ما$_3$) ہیں، اس کا رقبہ دریافت کرو۔



△ اب ج = ال ن ج - ال م ب - ب م ن ج

منحرف ال ن ج = △ ال ن + △ ا ن ج

$$= \tfrac{1}{2}(\text{لا}_3-\text{لا}_1)\,\text{ما}_1 + \tfrac{1}{2}(\text{لا}_3-\text{لا}_1)\,\text{ما}_3$$

$$= \tfrac{1}{2}(\text{ما}_1+\text{ما}_3)(\text{لا}_3-\text{لا}_1)$$ = اوسط متوازی اضلاع × درمیانی عمودی فاصلہ

منحرف ال م ب $= \tfrac{1}{2}(\text{ما}_1+\text{ما}_2)(\text{لا}_2-\text{لا}_1)$

منحرف ب م ن ج $= \tfrac{1}{2}(\text{ما}_2+\text{ما}_3)(\text{لا}_3-\text{لا}_2)$

اس لیے رقبہ △ اب ج $= \tfrac{1}{2}\left\{(\text{ما}_1+\text{ما}_3)(\text{لا}_3-\text{لا}_1)-(\text{ما}_1+\text{ما}_2)(\text{لا}_2-\text{لا}_1)-(\text{ما}_2+\text{ما}_3)(\text{لا}_3-\text{لا}_2)\right\}$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\text{لا}_1\text{ما}_2-\text{لا}_2\text{ما}_1+\text{لا}_2\text{ما}_3-\text{لا}_3\text{ما}_2+\text{لا}_3\text{ما}_1-\text{لا}_1\text{ما}_3\right\}$$

اس جملہ کو ایک مقطعہ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے یہ محض اوپر کے جملہ کو لکھنے کا ایک طریقِ کتابت ہے جو آسانی سے یاد رہ سکتا ہے۔

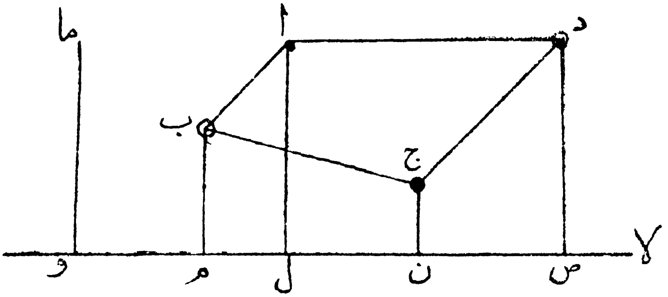
$$= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}\text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3\\ \text{ما}_1 & \text{ما}_2 & \text{ما}_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

یاد رہے کہ مثلث ا ب ج کا رقبہ حاصل کرنے میں، مثلث کے راسوں کو مخالف سمتِ ساعت لیا گیا ہے، یا رقبہ کے گرد جانے میں رقبہ ہمیشہ بائیں ہاتھ کو رہتا ہے۔ جب کبھی راسوں کو اس ترتیب میں لیا جائیگا تو رقبہ مثبت حاصل ہوگا اور راسوں کو موافق سمتِ ساعت لینے سے رقبہ منفی حاصل ہوگا۔

رقبہ △ د ا ب $= \tfrac{1}{2}(\text{لا}_1\text{ما}_2-\text{لا}_2\text{ما}_1) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}\text{لا}_1 & \text{ما}_1\\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2\end{vmatrix}$

مثال (۱)۔ ایک چار ضلعی (ذو اربعۃ الاضلاع) ا، ب، ج، د کے

محدّد مخالف سمتِ ساعت (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳)، (لا۴، ما۴) ہیں، اس کا رقبہ دریافت کرو، محور قائم ہیں۔



چارضلعی ا ب ج د = ا ب م ل + ا ل ص د - ب م ن ج
- ج ن ص د

$$= \frac{1}{2}\left\{(\text{ما}_1+\text{ما}_2)(\text{لا}_1-\text{لا}_2)+(\text{ما}_1+\text{ما}_4)(\text{لا}_4-\text{لا}_1)-(\text{ما}_2+\text{ما}_3)(\text{لا}_3-\text{لا}_2)-(\text{ما}_3+\text{ما}_4)(\text{لا}_4-\text{لا}_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{لا}_1\text{ما}_2-\text{لا}_2\text{ما}_1+\text{لا}_2\text{ما}_3-\text{لا}_3\text{ما}_2+\text{لا}_3\text{ما}_4-\text{لا}_4\text{ما}_3+\text{لا}_4\text{ما}_1-\text{لا}_1\text{ما}_4\right\}$$

مشق ۴

(ا) نقاطِ ذیل کو ملانے سے جو مثلث بنتے ہیں اُن کے رقبے دریافت کرو۔

(ا) (۲، ۰)، (-۳، ۴)، (-۱، -۲)

(ب) (۱، ۲)، (-۳، ۲)، (۲، -۴)

(ج) (۱، ۲)، (۲، -۴)، (-۳، ۲)

واضح ہو کہ (ج) میں راسوں کی ترتیب موافق سمتِ ساعت لی گئی ہے۔ نقطوں کو (ب) اور (ج) کی صورت میں مرتسم کرکے دیکھا جائے۔

(د) (۲، ۳)، (۳، ۴)، (۶، ۲)
موافق سمتِ ساعت

(ع) (۴، -۵)، (۳، -۴)، (۲، ۲)
موافق سمتِ ساعت

جواب - (ا) ۱۱ (ب) ۱۲ (ج) -۱۳ (د) - ۱ (ع) - ۳

(۲) ایک مثلث ا ب ج کے راسوں کے محدد (-۲، ۴)، (۳، ۲)، (۶، ۷) ہیں اور د، ع، ف اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقطے ہیں۔

ثابت کرو کہ △ ا ب ج = ۴ △ د ع ف

(۳) ذیل کی چار ضلعی اشکال کے رقبے دریافت کرو، ان کے راسوں کے محدد حسبِ ذیل ہیں :—

(ا) (۱، ۲)، (۵، ۳)، (۴، ۵)، (۳، ۴)

(ب) (۲، ۳)، (-۲، ۴)، (-۳، -۲)، (۱، -۲)

(ج) (۲، ۳)، (۱، -۲)، (-۳، -۲)، (-۲، ۴)
موافق سمتِ ساعت

(د) (۲، ۳)، (-۳، -۲)، (۱، -۲)، (-۲، ۴)

ان نقاط کو مرتسم کر کے دیکھا جائے، آڑے نقطوں کو ملانے سے دو مثلث بنتے ہیں، محصلہ رقبہ ان مثلثوں کے رقبوں کا فرق ہے۔

جواب - (ا) $\frac{۹}{۲}$ (ب) $\frac{۴۵}{۲}$ (ج) - $\frac{۴۵}{۲}$ (د) - $\frac{۱}{۲}$

۷ء۱ - قطبی محدّد - دو ابعاد میں کوئی نقطہ ن ہے، جس کا مقام معین کرنا مقصود ہے، کارٹیزی محددوں میں ضروری ہے کہ

ایک مبداء ہو اور اس میں سے گذرنے والے دو علی القوائم خط، اور نقطہ میں سے ان محوروں کے متوازی خط کھینچے جائیں وغیرہ وغیرہ - یہاں صرف مبداء و کو جسے قطب کہتے ہیں اور و لا ابتدائی خط مقرر کرو - و سے سیدھا فاصلہ، ن کا

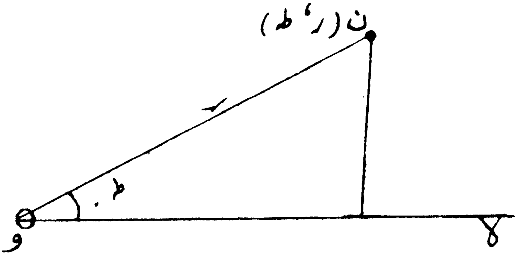
و ن = ۲ انچ یا ۲ یا عام طور پر ر،

اور خط و ن کس سمت میں کھینچا گیا ہے اس کے تعین کے لیے، ابتدائی یا حوالہ کے خط کے ساتھ و ن کا زاویہ = ۳۰° یا ط - ہم یہ قرارداد اختیار کرتے ہیں کہ ط کو مخالف سمتِ ساعت ناپینگے - پس ن کا مقام دو محددوں (ر، ط) سے معین ہوسکتا ہے - پس نقطہ کے قطبی محدد ایسے ہونگے،

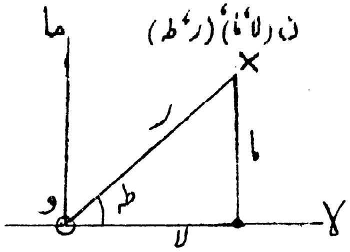
(۳، π/۴)، (۲، ۳۰°)، (۲، ۳π/۴)، (اُ، ع)، (ر، ط)، (ر، ط)، انہیں مرتسم کرو -

ظاہر ہے کہ مساوات ر = اُ سے ایسے نقطے ملینگے جن کا فاصلہ مبداء سے اُ ہو، ط خواہ کچھ ہی ہوا کرے - پس ر = ۲ ایسے دائرہ کی قطبی مساوات ہے جس کا مرکز مبداء اور نصف قطر ۲ ہے، ر = اُ دائرہ کی قطبی مساوات ہے جس کا مرکز مبداء اور نصف قطر اُ ہے -

نیز ط = ۳۰° یا ع سے ایسے خط پر کے نقطے ملتے ہیں جو مبداء میں سے گزرتا ہے - اور ابتدائی خط و لا کے ساتھ ۳۰° کا یا زاویہ ع بناتا ہے - پس ط = ع مبداء میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے



جس کا پہلا ن ابتدائی خط کے ساتھ دیا ہوا زاویہ عہ ہے۔
کارٹیزی اور قطبی محددوں میں تعلق بآسانی حاصل ہوسکتا ہے۔



نقطہ ن کے دو نام ہیں کارٹیزی (لا، ما) اور قطبی (ر، ط)، نقطہ وہی ہے اس لیے محددوں میں تعلق ہونا چاہیے۔ صریحاً

$$\left.\begin{array}{l} \text{لا} = \text{ر جم ط} \\ \text{ما} = \text{ر جب ط} \end{array}\right\} \quad (۱)$$

جس سے

$$\left.\begin{array}{l} \text{ر} = \pm\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} \\ \text{ط} = \text{مس}^{-1}\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}} \end{array}\right\} \quad (۲)$$

پس اگر کسی نقطہ کے قطبی محدد معلوم ہوں تو (۱) سے کارٹیزی حاصل ہوسکتے ہیں اور اگر کارٹیزی معلوم ہوں تو قطبی حاصل ہوسکتے ہیں۔ علامات کا بآسانی فیصلہ ہوسکتا ہے۔

مثال ۱- (ا) ایک نقطہ کے قطبی محدد $\left(+\sqrt{2}\,,\ \frac{\pi}{4}\right)$ ہیں اس کے کارٹیزی محدد معلوم کرو۔

$$\text{لا} = +\sqrt{2}\ \text{جم}\ \frac{\pi}{4} = +\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = +1$$

$$\text{ما} = +\sqrt{2}\ \text{جب}\ \frac{\pi}{4} = +\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = +1$$

(ب) ایک نقطہ کے کارٹیزی محدد ($\frac{1}{2}\sqrt{3}$، $-\frac{3}{2}$) ہیں، اس کے قطبی محدد معلوم کرو۔

لا = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$، ما = $-\frac{3}{2}$، یہ نقطہ چوتھے رُبع میں ہے۔

لا = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ = رجم طہ

ما = $-\frac{3}{2}$ = رجب طہ

$ر^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$، $ر = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ہم طے کرتے ہیں کہ ر کی علامت خواہ کسی ربع میں ہو مثبت لی جائیگی $ر = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

مس طہ = $-\frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

پس طہ = 120° یا 300°

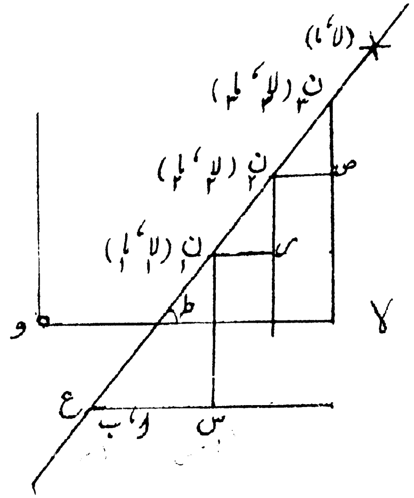
اب نقطہ چونکہ چوتھے رُبع میں ہے اس لیے طہ = $\frac{5\pi}{3}$

اس چھوٹی سی کتاب میں قطبی محدّدوں کا استعمال مقصود نہیں ہے، ہمیشہ کارٹیزی محدد استعمال کیے جائینگے۔ تاہم طالب علم کو محض تعریفات سے مانوس کر دینا مناسب خیال کیا گیا۔

۱۸- اکثر منحنیات کی تعیین ان کے ہندسی خواص سے ہوتی ہے یعنی ان پر کے تمام نقطوں میں ایک مشترک ہندسی تعلق پایا جاتا ہے جس کی بنا پر ان کی تعریف کی جاتی ہے۔ مثلاً خطِ مستقیم پر کے تمام نقطے ایک ہی سیدھ میں ہوتے ہیں۔

اس امر کو جبریہ رقوم میں بیان کرنے سے ہمیں جبریہ رشتہ ملیگا جس کو خط پر کے تمام نقطے پورا کرینگے۔ مثلاً فرض کرو کہ خط محور و لا سے زاویہ طہ بناتا ہے اور نقطہ (ا، ب) میں سے گزرتا ہے اور اس پر نقطے (لا، ما)، (لا، ما)، ..... واقع ہیں۔ بسبب نقطے ایک سیدھ میں ہیں، اس امر کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ

$$\frac{ن_1 س}{ع س} = \frac{ن_2 ر}{ن_1 ر} = \frac{ن_3 ص}{ن_2 ص} \cdots\cdots\cdots = \text{مس طہ}$$



پس محددوں کی رقوم میں $\frac{\text{ما}_1 - \text{ب}}{\text{لا}_1 - \text{ا}} = \frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما}_3 - \text{ما}_2}{\text{لا}_3 - \text{لا}_2} = \ldots\ldots = \text{مس ط}$

اگر کوئی نقطہ (لا، ما) اس خط پر بطور نمایندہ نقطہ کے لیا جائے۔

تو $\frac{\text{ما} - \text{ب}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_2}{\text{لا} - \text{لا}_2} = \ldots\ldots = \text{مس ط}$

یہ سب رشتے ایک ہی ہیں، ان میں سے کوئی ایک

$$\text{ما} - \text{ب} = \text{مس ط}\ (\text{لا} - \text{ا}) \quad \ldots\ldots \quad (۱)$$

خطِ مستقیم کی مساوات ہے، خطِ مستقیم پر کے تمام نقطوں کے محدد اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ برعکس اس کے مساوات (۱) کے کئی حل ہیں، یعنی لا، ما کی قیمتوں کے بے شمار جوڑے ہیں جو مساوات (۱) سے حاصل ہوتے ہیں۔ ان سب کو اگر مرتسم کیا جائے تو ان سب جوڑوں سے نقطے ملینگے جو اس خط پر واقع ہونگے، اور کہیں اور واقع نہیں ہو سکتے۔ خطِ مستقیم مساوات کا طریق یا لوکس کہلاتا ہے۔

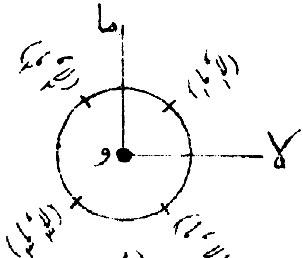
اسی طرح دائرہ کے محیط پر کے سب نقطوں کی مشترک خاصیت یہ ہے کہ

ان نقطوں کا فاصلہ اس کے مرکز سے مستقل ہوتا ہے۔

اگر مبدا مرکز ہو اور نصف قطر ۲، اور محیط پر نقطے $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3, \text{ما}_3)$..... ہوں تو اس ہندسی خاصیت کو یوں بیان کر سکتے ہیں $(\text{لا}_1 - 0)^2 + (\text{ما}_1 - 0)^2 = 4$

$$(\text{لا}_2 - 0)^2 + (\text{ما}_2 - 0)^2 = 4$$

— — — — —



(ا)

اگر ان سب نقطوں کا نمایندہ نقطہ (لا، ما) محیط پر کہیں واقع ہو تو حاصل ہوگا

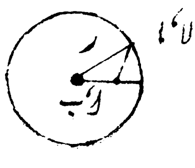
$$(\text{لا} - 0)^2 + (\text{ما} - 0)^2 = 4$$

یعنی $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 4$

جو دائرہ کی مساوات ہے، اس مساوات کے حل کرنے سے (لا، ما) کی قیمتوں کے بیشمار جوڑے ملینگے، مرتسم کرنے سے وہ سب اس دائرہ کے محیط پر واقع ہونگے پس دائرہ اس مساوات کا طریق ہے۔

اسی طرح دائرہ، مرکز (ا، ب) اور نصف قطر ر حسب ذیل ہوگا جبکہ (لا، ما) کوئی نمایندہ نقطہ اس کے محیط پر ہو

$$(\text{لا} - \text{ا})^2 + (\text{ما} - \text{ب})^2 = \text{ر}^2 \quad ....(1)$$

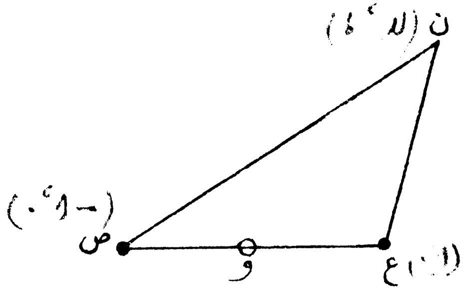


(ب)

پس (۱) دائرہ کی مساوات ہے اور مساوات (۱) کا طریق دائرہ (ب) ہے

نیز فرض کرو ایک منحنی کی ہندسی تعریف یہ ہے کہ اس پر کے کسی نقطہ کے فاصلوں کا مجموعہ دو ثابت نقطوں سے مستقل رہتا ہے، اس کی مساوات مطلوب ہے۔ دو ثابت نقطے فرض کرو ع ص ہیں، مبداء و ان کا نقطہ وسطی لو۔

اس کی ہندسی تعریف ع ن + ص ن = مستقل ہے، فرض کرو کہ



ع کے محدد (ا، ۰)، ص کے (−ا، ۰) اور ن کے (لا، ما) ہیں، اوپر کے تعلق کو ان محددوں کی رقوم میں بیان کرنے سے

$$\sqrt{(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2}+\sqrt{(\text{لا}-\text{ا})^2+\text{ما}^2}=\text{مستقل}=2\,\text{ج}\quad(\text{فرض کرو})$$

$$(\text{لا}-\text{ا})^2+\text{ما}^2=4\,\text{ج}^2+(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2-4\,\text{ج}\sqrt{(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2}$$

$$-4\,\text{لا}\,\text{ا}-4\,\text{ج}^2=-4\,\text{ج}\sqrt{(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2}$$

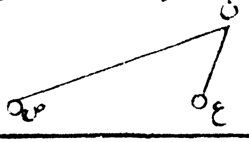
$$(\text{لا}\,\text{ا}+\text{ج}^2)^2=\text{ج}^2\left[(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2\right]$$

$$\text{لا}^2(\text{ا}^2-\text{ج}^2)-\text{ج}^2\text{ما}^2=\text{ج}^2\text{ا}^2-\text{ج}^4=\text{ج}^2(\text{ا}^2-\text{ج}^2)$$

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ج}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ج}^2-\text{ا}^2}=1$$

یہ منحنی کی مساوات ہے، ہم آگے دیکھینگے کہ یہ قطع ناقص ہے جس کا مرکز مبدا، نیم محورِ اعظم ج اور نیم محورِ اصغر $\sqrt{\text{ج}^2-\text{ا}^2}$ ہے۔

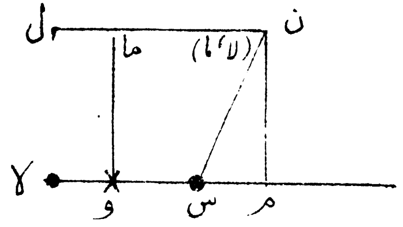
اسی طرح طالب علم معلوم کرلے کہ اس منحنی کی مساوات کیا ہے جس پر کے ہر نقطہ کی ہندسی خاصیت یہ ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا فرق مستقل رہتا ہے، یعنی



ص ن − ع ن = مستقل

ہم جانتے ہیں کہ قطع مکافی پر کے ہر نقطہ ن کی ہندسی خاصیت یہ ہے کہ ایک ثابت نقطہ (س) سے اس کا فاصلہ، ایک ثابت خط (لا ل) سے اس کے عمودی فاصلہ کے مساوی ہوتا ہے یعنی

س ن = ن ل



مبدا ہمیشہ موزوں مقام پر لینا چاہیے اور محور بھی ایسے ہر سوال میں لینا چاہییں کہ اس مبدا اور محددوں کے لحاظ سے مساوات سادہ سے سادہ شکل میں آئے

س لا ثابت خط لا ل پر عمود ہے، مبدا و، س لا کے وسطی نقطہ پر لو اور و س کو محور لا او علی القوائم و ما لو۔ س لا ثابت فاصلہ ہے فرض کرو کہ و س = لا و = مستقل = ا ۔

نقطہ ن (لا، ما) ہے، س (ا، ۰)۔

اب　س ن = ن ل = لا م

س ن^2 = لا م^2

(لا - ا)^2 + (ما - ۰)^2 = (لا و + و م)^2 = (ا + لا)^2

پس لا^2 - ۲ لا ا + ا^2 + ما^2 = ا^2 + ۲ ا لا + لا^2

پس　ما^2 = ۴ ا لا　مکافی کی مساوات حاصل ہوتی ہے

اسی طرح کی اَور بے شمار مثالیں پڑھائی جا سکتی ہیں۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ جب کسی منحنی پر کے تمام نقطوں میں ایک مشترک ہندسی خاصیت پائی جاتی ہے تو اس پر کے کسی نقطہ (لا، ما) کی رقوم میں ہمیں اس کے مماثل ایک جبریہ مساوات ملتی ہے۔ ہم نے صرف ایسے منحنیات پر غور کیا ہے جو دو ابعاد کی سطح میں واقع ہوتے ہیں، دو ابعاد میں نقطہ کے دو محدد ہونگے (لا، ما)، اس لیے دو ابعاد والے منحنی کی مساوات دو محددوں لا، ما میں حاصل ہوگی۔

ہم نے دیکھا ہے کہ خطِ مستقیم کی مساوات دو ابعاد (لا، ما) میں درجۂ اول کی ہے، دائرہ، قطع ناقص، مکافی کی (لا، ما) میں درجۂ دوم کی ہے، اسی طرح اعلیٰ درجہ کے منحنیات کے لیے۔ بالعموم دو ابعاد میں کوئی منحنی ہو تو اس کی مساوات ف (لا، ما) = ۰ کی شکل کی ہوگی جہاں ف تفاعلی علامت ہے۔

مشق ۵

(۱) ایک نقطہ ایسے حرکت کرتا ہے کہ اس کے فاصلے دو نقطوں (۳، ۲)، اور (۵، -۲) سے مساوی ہیں، طریق کی مساوات دریافت کرو۔

جواب لا - ۲ ما - ۴ = ۰

(۲) ایک نقطہ (ن) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطہ (۲، ۰) سے اس کا فاصلہ ہمیشہ دو چند رہتا ہے نقطہ (۰، ۲) سے اس کے فاصلہ کے۔ ن کا طریق دریافت کرو۔

جواب۔ لا^2 + ما^2 + ۱۰ لا + ۴ = ۰

(۳) ایک نقطہ کا فاصلہ محور لا سے مساوی رہتا ہے نقطہ (۱، -۱) سے اس کے فاصلہ کے۔ نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

جواب لا^2 - ۲ لا + ۲ ما + ۲ = ۰

(۴) (ا) ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات مطلوب ہے محوروں سے جس کے فاصلوں کا مجموعہ ۵ ہے۔ جواب لا + ما = ۵

(ب) نقطہ کا طریق مطلوب ہے جس کا فاصلہ محور ما سے، مساوی ہے نقطہ (۱، ۲) سے

اس کے فاصلہ کے۔

جواب (ا) لا + ما = ۵ (ب) ما^{2} - ۲ لا - ۴ ما + ۵ = ۰

(۵) (ا) ایک نقطہ مبداء سے فاصلہ ۵ پر رہتا ہے اس کے طریق کی مساوات مطلوب ہے۔

(ب) نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جس کا فاصلہ نقطہ (۲، ۳) سے ہمیشہ ۴ کے مساوی ہوتا ہے۔

جواب۔ (ا) ر = ۵ (ب) لا^{2} + ما^{2} - ۴ لا - ۶ ما - ۳ = ۰

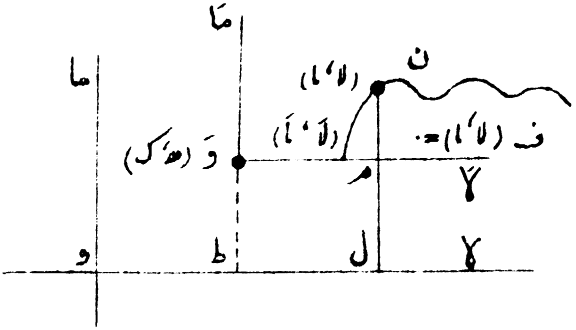
(۶) نقطہ کا فاصلہ (۳، ۰) سے مساوی ہوتا ہے محور ما سے اس کے فاصلہ کے۔ نقطہ کے طریق کی مساوات مطلوب ہے۔

جواب ما^{2} - ۶ لا + ۹ = ۰

۱٫۹ - محدّدوں کی تبدیلی

- کسی مبداء اور محوروں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے محدّدوں کا تعین کیا جاتا ہے، اگر مبداء کو یا محوروں کو یا مبداء اور محور دونوں کو بدل دیا جائے تو اسی نقطہ کے محدّد بدل جائینگے - محور قائم فرض کیے جائینگے۔

(ا) مبداء کی تبدیلی - فرض کرو کہ نقطہ ن کے محدّد



بلحاظ مبداء و اور محاور ولا، وما (لا، ما) ہیں، مبداء کو وَ (ھ، ک) پر

لے جاتے ہیں اور نئے محور وَ لاَ ، وَ ماَ پُرانے محوروں کے متوازی رہتے ہیں یعنی ان کی سمت وہی رہتی ہے - ن کے محدد نئے محوروں کے لحاظ سے (لاَ ماَ) ہیں

ن سے عمود ن مر ل نکالو۔

لا = ول = وط + وَم = ھ + لاَ

ما = ل ن = ل م + م ن = ک + ماَ

پس پُرانے اور نئے محددوں میں یہ رشتہ ہوگا لا = ھ + لاَ

ما = ک + ماَ

یعنی پُرانے لا کی بجائے مبداء کا فصلہ + نیا لا

اور پُرانے ما کی بجائے مبداء کا معین + نیا ما

رکھنا چاہیے۔

اور اگر پُرانے محوروں کے لحاظ سے کوئی مساوات ف (لا، ما) = ۰ دی گئی ہو جس کے طریق پر نقطہ ن (لا، ما) واقع ہوتا ہے تو یہی مساوات نئے محوروں کے لحاظ سے ف (ھ + لاَ، ک + ماَ) = ۰ ہو جائیگی یعنی نئی مساوات پُرانی مساوات میں لا کی بجائے ھ + لاَ اور ما کی بجائے ک + ماَ رکھنے سے ملیگی۔

مثال - دائرہ کی مساوات لا۲ + ما۲ = ۱ کیا ہو جائیگی جبکہ مبداء کو (-۱، -۳) پر لے جائیں۔

لا = ھ + لاَ = -۱ + لاَ

ما = ک + ماَ = -۳ + ماَ

پس لا۲ + ما۲ = (-۱ + لاَ)۲ + (-۳ + ماَ)۲ = ۱

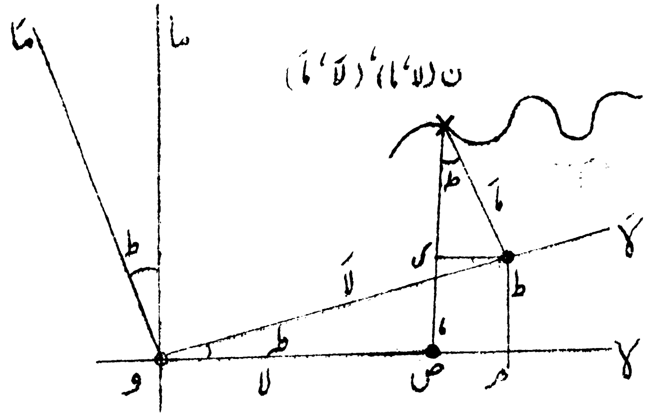
یعنی لاَ۲ + ماَ۲ - ۲ لاَ - ۶ ماَ + ۹ = ۰ (۱)

اگر یہ ذہن میں رہے کہ اب مساوات نئے محوروں کے لحاظ سے ہے اور زبر حذف کر دیے جائیں تو مساوات ہوگی

لا۲ + ما۲ - ۲ لا - ۶ ما + ۹ = ۰ (۲)

نئے مبدا (وَ) کے محدد بلحاظ پرانے مبدا و کے (-۱، -۳) ہیں اور پرانے مبدا (و) کے محدد بلحاظ نئے مبدا (وَ) کے (۱، ۳) ہونگے، اس لیے مساوات کو واپس پرانے مبدا پر لے جانے کے لیے مساوات (۱) میں لَا کی بجائے ۱ + لا اور مَا کی بجائے ۳ + ما رکھنا ہوگا، اس اندراج سے وہی پہلی مساوات لا^{2} + ما^{2} = ۱ حاصل ہوگی۔

(ب) **محوروں کی تبدیلی** - فرض کرو کہ مبدا وہی رہتا ہے مگر محوروں کو زاویہ طہ میں سے گھما دیا جاتا ہے، ایک ہی نقطہ کے محدد ہر دو نظام کے لحاظ سے مختلف ہونگے۔



دونوں صورتوں میں مبدا و وہی ہے، پرانے محور ولا وما ہیں اور نئے محور ولَا، ومَا زاویہ طہ پرانے محوروں کے ساتھ بناتے ہیں۔ کسی نقطہ ن کے محدد پرانے محوروں کے لحاظ سے (لا، ما) ہیں اور نئے محوروں کے لحاظ سے (لَا، مَا)۔

لا = وص = وم − ص م = وم − ی ط = لَا جم طہ − مَا جب طہ

ما = ص ن = ص ی + ی ن = م ط + ی ن = لَا جب طہ + مَا جم طہ

اس لیے اگر پُرانے محوروں (یعنی حوالہ کے نظام) کے لحاظ سے کسی منحنی کی مساوات
ف (لا، ما) = ۰ ہو تو نئے محوروں کے لحاظ سے یہ مساوات بدل کر ہو جائیگی۔
ف (لاَ جم طہ ۔ ماَ جب طہ، لاَ جب طہ + ماَ جم طہ) = ۰
اگر یہ امر ذہن میں رہے کہ اب نئے محدّدوں کی رقوم میں مساوات ہے
تو زیروں کو حذف کیا جا سکتا ہے یعنی مساوات ہو جائیگی ۔

ف (لا جم طہ ۔ ما جب طہ، لا جب طہ + ما جم طہ) = ۰

اب فرض کرو کہ کوئی مساوات نئے محدّدوں لاَ، ماَ کی رقوم میں دی ہوئی
ہے اور اس کو پُرانے محددوں کی رقوم میں تبدیل کرنا مقصود ہے، تو ضروری ہے
کہ لاَ، ماَ کو لا، ما کی رقوم میں بیان کیا جائے ۔ اب واضح ہے کہ پُرانے محور
نئے محوروں کو، زاویہ (۔ طہ) میں سے گھمانے سے حاصل ہوتے ہیں اس لیے

لاَ = لا جم (۔ طہ) ۔ ما جب (۔ طہ) = لا جم طہ + ما جب طہ

ماَ = لا جب (۔طہ) + ما جم (۔ طہ) = ۔لا جب طہ + ما جم طہ

اور کوئی مساوات فا (لاَ، ماَ) = ۰ تبدیل ہو کر فا (لا جم طہ + ما جب طہ، ۔ لا جب طہ + ما جم طہ) = ۰
ہو جائیگی ۔

مثال ۱ ۔ ایک منحنی کی مساوات لاَ^{2} ۔ ماَ^{2} = ۱ ہے، محوروں کو مبدا کے
گرد (۔ $\frac{\pi}{4}$) میں سے پھرا دیا گیا ہے، معلوم کرو کہ بدل کر مساوات کیا ہو جاتی ہے ۔

$$\text{لا} = \text{لاَ جم}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \text{ماَ جب}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{لاَ} + \text{ماَ}}{\sqrt{2}}$$

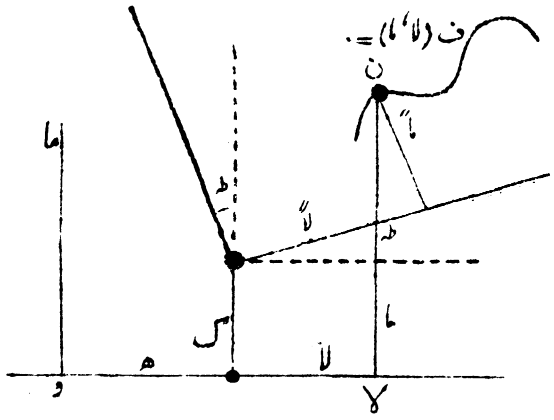
$$\text{ما} = \text{لاَ جب}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \text{ماَ جم}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\text{لاَ} + \text{ماَ}}{\sqrt{2}}$$

لاَ^{2} ۔ ماَ^{2} = ۱ ہو جاتی ہے نئے محددوں کی رقوم میں $\left(\frac{\text{لاَ}+\text{ماَ}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{-\text{لاَ}+\text{ماَ}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

یعنی $\frac{\text{لا ما} + ۲}{۲}$ = ۱، یعنی لاَ ماَ = $\frac{۱}{۲}$

پس نئے محدودوں کی رقوم میں منحنی کی مساوات ہے لا ما = $\frac{۱}{۲}$

(ج)۔ اگر مبدا کو (ھ، ک) پر لے جائیں اور محوروں کو زاویہ طہ میں سے گھمادیں تو پرانے اور نئے محدودوں میں یہ رشتہ ہوگا۔



لا = ھ + لاً = ھ + لاً جم طہ ۔ ماً جب طہ

ما = ک + ماً = ک + لاً جب طہ + ماً جم طہ

پرانی مساوات ف (لا، ما) = ۰ بدل کر ہوجائیگی

ف (ھ + لا جم طہ ۔ ما جب طہ، ک + لا جب طہ + ما جم طہ) = ۰

جس میں نئے محدود استعمال کیے گئے ہیں۔

مثال۔ بتاؤ کہ مساوات ۳ لا^{۲} + ۲ لا ما + ۳ ما^{۲} ۔ ۲ لا + ۱۰ ما + ۱۰ = ۰

کیا ہو جاتی ہے جبکہ مبدا کو نقطہ (۱، ۔ ۲) پر لے جائیں اور محوروں کو

زاویہ ۴۵° میں سے پھرا دیا جائے۔

پہلے مبدا کو (۱، -۲) پر لے جاؤ اور اس میں کے نئے محوروں کو پرانے محوروں کے متوازی رکھو، اس طرح

لا = ۱ + لاَ ، ما = -۲ + ماَ

مساوات میں درج کرنے سے

۳ (۱ + لاَ)^{۲} + ۲ (۱ + لاَ)(-۲ + ماَ) + ۳ (-۲ + ماَ)^{۲} - ۲ (۱ + لاَ)

+ ۱۰ (-۲ + ماَ) + ۱۰ = ۰

۳ لاَ^{۲} + ۲ لاَ ماَ + ۳ ماَ^{۲} - ۱ = ۰

اب محوروں کو ۴۵° میں سے پھرانے سے، لاَ کی بجائے $\frac{\text{لاً - ماً}}{\sqrt{۲}}$ اور ماَ کی بجائے $\frac{\text{لاً + ماً}}{\sqrt{۲}}$ رکھنے سے مساوات ہو جاتی ہے

۳ $\left(\frac{\text{لاً - ماً}}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}$ + ۲ $\left(\frac{\text{لاً - ماً}}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{\text{لاً + ماً}}{\sqrt{۲}}\right)$ + ۳ $\left(\frac{\text{لاً + ماً}}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}$ = ۱

جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے ۴ لاً^{۲} + ۲ ماً^{۲} = ۱

یعنی زبر حذف کرنے سے ۴ لا^{۲} + ۲ ما^{۲} = ۱

مشق ۶

(۱) ۔ مبدا کو (-۱، ۲) پر لے جانے سے، جبکہ محوروں کی سمتیں وہی رہیں، بتاؤ کہ مساوات لا^{۲} + ما^{۲} = ۳ بدل کر کیا ہو جاتی ہے۔

جواب لاَ^{۲} + ماَ^{۲} - ۲ لا + ۴ ما + ۲ = ۰

(۲) اگر محدوں کی سمتیں وہی رہیں تو بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جاتی ہیں —

(۱) ما^{۲} = ۴ لا، جبکہ مبدا کو (-۱، ۰) پر لے جائیں۔

(ب) ۳ لا^2 + ۴ ما^2 = ۱ جبکہ مبدا کو (-۱، ۱) پر لے جائیں۔
(ج) ۲ لا^2 - ما^2 = ۱ " " (-۲، ۱) پر لے جائیں۔
(د) ۲ لا - ۷ ما + ۱ = ۰ " " (۱، -۳) پر لے جائیں۔

جواب۔ (ا) ما^2 = ۴ ل (لا - ل)
" (ب) ۳ لا^2 + ۴ ما^2 - ۶ لا + ۸ ما + ۴ = ۰
" (ج) ۲ لا^2 - ما^2 - ۸ لا - ۲ ما + ۶ = ۰
" (د) ۲ لا - ۷ ما + ۲۴ = ۰

(۳) محدّدوں کو ذیل کے زاویوں میں سے گھمانے کے ضابطے لکھو:
(ا) ۳۰° (ب) ۲۲۵° (ج) مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$
آخری صورت میں نئے محدّدوں کو پرانے محدّدوں کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب۔ (ا) لا = $\frac{1}{2}$ (لاَ - √۳ ماَ)
ما = $\frac{1}{2}$ (لاَ √۳ + ماَ)

" (ب) لا = - (لاَ - ماَ) / √۲
ما = (لاَ + ماَ) / √۲

" (ج) لا = (۲ لاَ - ماَ) / √۵
ما = (لاَ + ۲ ماَ) / √۵

اور لاَ = (۲ لا + ما) / √۵
ماَ = (- لا + ۲ ما) / √۵

(۴) بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جاتی ہیں جبکہ مبداء وہی رہے اور محوروں کو اُن زاویوں میں سے گھما دیا جائے جن کی سوال میں نشان دہی کی گئی ہے۔
(ا) لا^2 + ما^2 = ۱، زاویہ ۴۵° میں سے

(ب) $۷\,\text{لا}^{۲} + ۴\sqrt{۳}\,\text{لا ما} + ۳\,\text{ما}^{۲} = \text{ا}$، زاویہ ۳۰° میں سے

(ج) $\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا ما} + \text{ما}^{۲} = \text{ا}$، زاویہ ۴۵° میں سے

جواب (ا) $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۱$

" (ب) $۹\,\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۱$

" (ج) $۵\,\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = ۲$

(۵) بتاؤ کہ ذیل کی مساوات کیا ہو جاتی ہے جبکہ مبدا کو (۲، ۳) پر لے جائیں اور محوروں کو زاویہ ۴۵° میں سے پھرا دیا جائے

$$\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا ما} + \text{ما}^{۲} - ۱۳\,\text{لا} - ۱۲\,\text{ما} + ۳۰ = ۰$$

جواب $۵\,\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = ۲$

(۶) مبدا کو نقطہ (لا₁، ما₁) پر لے جانے سے مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب}\,\text{ما}^{۲} + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$$

کو بدلو اور (لا₁، ما₁) کی قیمتیں معلوم کرو کہ تبدیل شدہ مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہوں۔

نیز اس کے لیے شرط دریافت کرو کہ تبدیل شدہ مساوات میں لا، ما کے سر صفر ہوں اور مستقل رقم بھی صفر ہو۔

جواب $\text{لا}_{۱} = \frac{\text{ھ ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^{۲}}$، $\text{ما}_{۱} = \frac{\text{گ ھ} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^{۲}}$

$$\text{ا ب ج} + ۲\,\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^{۲} - \text{ب گ}^{۲} - \text{ج ھ}^{۲} = ۰$$

(۷) محوروں کو زاویہ طہ میں گھمانے سے مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب}\,\text{ما}^{۲} = ۱$$

کو بدلو اور زاویہ طہ کی قیمت دریافت کرو کہ تبدیل شدہ مساوات میں لا ما والی رقم کا سر صفر ہو۔

جواب۔ $\text{طہ} = \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\,\text{ھ}}{\text{ا} - \text{ب}}$

دوسرا باب

خطِ مستقیم

۱ ر ۲ - سطح مستوی میں خطِ مستقیم کا تعیّن کئی طرح سے ہو سکتا ہے، مثلاً اگر ذیل کے اجزار دیے گئے ہیں تو خطِ مستقیم کا محل، دو ابعاد کی فضا میں معیّن ہو جاتا ہے۔

(ا) خط پر کا ایک نقطہ دیا گیا ہے، نیز خط، ایک ثابت سمت کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے وہ معلوم ہے۔

(ب) خط پر کے کوئی دو نقطے معلوم ہیں۔

(ج) خط محوروں پر جو مقطوعے بناتا ہے وہ معلوم ہیں۔

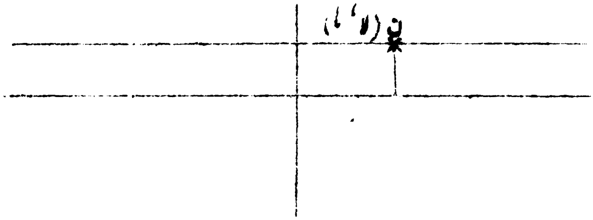
(د) مبدا سے خط پر جو عمود کھینچ سکتا ہے وہ معلوم ہے، یہ عمود ایک ثابت سمت مثلاً محور لا کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے وہ بھی معلوم ہے۔

(ع) خط کسی ایک محور کے متوازی ہے، یا ایک نقطہ میں سے گذرتا اور ایک دوسرے خط کے متوازی یا علی القوائم ہے وغیرہ کئی اور صورتیں ہو سکتی ہیں۔

واضح ہو کہ ہر صورت میں، دو شرطیں دی گئی ہیں اور خط کا مقام اِن دو شرطوں کے تابع مستوی میں معیّن ہو جاتا ہے۔ ہمارا مقصد ہے کہ خط پر کے کسی نقطہ (لا، ما) اور ان دی ہوئی شرطوں کے درمیان، جبری رشتہ

معلوم کریں جو خطِ مستقیم کی مساوات ہوگی۔

۲،۱۱- (ا) خطِ مستقیم کسی ایک محور کے متوازی ہے۔

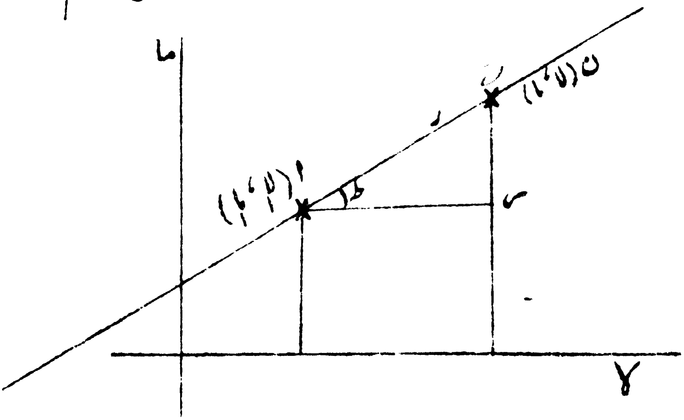


مثلاً ایسے خط پر، جو محور لا سے فاصلہ ۲ پر ہو، کوئی نقطہ ن (لا، ما) لو۔ جیسا ہم نے پہلے دیکھا ہے، اس خط پر کے تمام نقطوں کی مشترک خاصیت یہ ہے کہ ما = ۲، خود محور لا کے لیے ما = ۰، اور خط محور لا کے متوازی یہ ہو سکتے ہیں:

ما = ۵، ۱، ما = ۲، ما = -۱، ما = -۳، ۲ اور بالعموم ما = ب

پس محور لا کے متوازی کسی خط کی مساوات ما = ب یا ما - ب = ۰ ہے
اسی طرح محور ما کے متوازی خطوط کی مساوات لا = ا ہے اور خود محور ما کی مساوات لا = ۰ ہے۔

(ب) خط ایک دیے ہوئے نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے۔ محور علی القوائم ہیں۔



خط ا ن ہے، یہ دونوں طرف غیر محدود ہے، اس پر کا ایک نقطہ ا (لا، ما) دیا ہوا ہے اور زاویہ ر ا ن = طہ بھی دیا ہوا ہے جسے مخالف سمتِ ساعت ناپا گیا ہے۔ اس لاتناہی خط پر کوئی نقطہ، کہیں پر ن (لا، ما) لو۔ مقصود یہ ہے کہ (لا، ما) اور دی ہوئی چیزوں، لا، ما، طہ میں جبریہ رشتہ معلوم کیا جائے جو اس خط پر کے کسی نقطہ (لا، ما) کے لیے پورا ہوگا اور کسی ایسے نقطہ کے لیے پورا نہیں ہوگا جو اس خط پر واقع نہ ہو۔

ہندسی ربط جو خط پر کے نقطوں سے پورا ہوتا ہے (یعنی تمام اس خط پر کے نقطے ایک سیدھ میں واقع ہوتے ہیں (یعنی ایک طرح کا سیدھاپن ان میں پایا جاتا ہے) اُسے اس طرح بیان کرتے ہیں:

$$\frac{ر ن}{ا ر} = مس\ طہ$$

جس کی جبریہ شکل یہ ہے $ما - ما_1 = مس\ طہ\ (لا - لا_1)$ .... (۱)

اس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں $\frac{لا - لا_1}{جم\ طہ} = \frac{ما - ما_1}{جب\ طہ}$

یا $\frac{لا - لا_1}{جم\ طہ} = \frac{ما - ما_1}{جم\ (۹۰^\circ - طہ)}$

واضح ہو کہ محور لا کے ساتھ خط کا زاویہ طہ ہے اور محور ما کے ساتھ (۹۰° - طہ)

اس خط پر کا کوئی نقطہ (لا، ما) یا تمام نقطے اس رشتہ (۱) کو پورا کرتے ہیں، پس یہ خطِ مستقیم ا ن کی مساوات ہے۔

مثال - خط (-۱، ۲) میں سے گزرتا اور محور لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے، مساوات ہے $ما - ۲ = مس\ ۶۰^\circ\ (لا + ۱)$ یا $ما - ۲ = \sqrt{۳}\ (لا + ۱)$

یعنی $ما - \sqrt{۳}\ لا - ۲ - \sqrt{۳} = ۰$ خط کی مساوات ہے

مساوات $ما - ما_1 = مس\ طہ\ (لا - لا_1)$ کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں

ما - ما۱ = م (لا - لا۱) .... (۲)

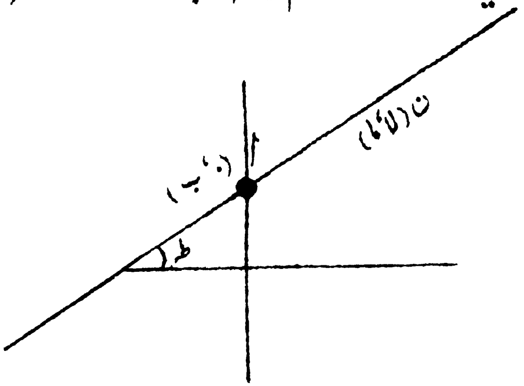
جہاں م = مس طہ، یعنی طہ = مس۱ م

(ج) اگر خط محور ما کو مبداء سے فاصلہ ب پر کاٹے یعنی نقطہ (لا۱، ما۱) اس صورت میں (۰، ب) ہو تو خط کی مساوات ہوگی

ما - ب = مس طہ (لا - ۰)

یعنی ما = مس طہ لا + ب

یا ما = م لا + ب .... (۳)

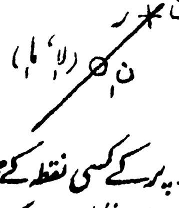


جہاں طہ = مس۱ ام ۔ خطِ مستقیم کی اس صورت کو حماسی صورت کہتے ہیں۔ اگر خط مبداء میں سے گزرے اور محور لا سے زاویہ طہ بنائے تو مساوات ہوگی۔

ما = مس طہ لا

یا ما = م لا .... (۴)

نوٹ:۔ ایک خط ن۱ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا اور محور لا سے زاویہ طہ بناتا ہے اس خط پر کے کسی نقطہ کے محدد جو ن۱ سے فاصلہ ر پر ہو ہونگے۔



(لا۱ + ر جم طہ، ما۱ + ر جب طہ)

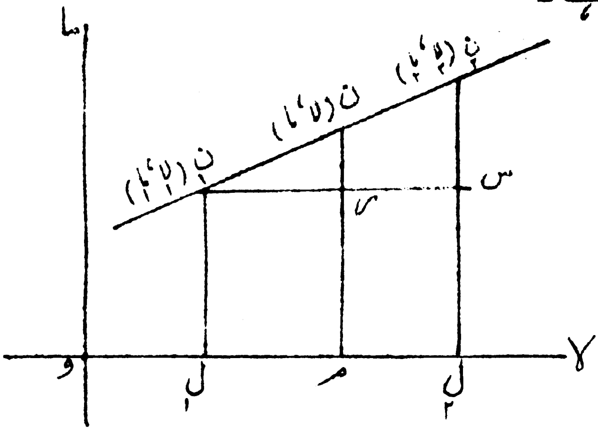
ر کو مختلف مثبت یا منفی قیمتیں دینے سے اس خط پر کے کسی نقطہ کے محدد لکھے جا سکتے ہیں۔

مثال۔ خطِ مستقیم ۲لا - ۲ما + ۷ = ۰ کو حماسی شکل میں رکھا جا سکتا ہے۔

$۲\,\text{ما} = ۲\,\text{لا} + ۷$ یعنی $\text{ما} = \text{لا} + \frac{۷}{۲}$

مس طہ = ا، ب = $\frac{۷}{۲}$، یعنی خط محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اور نقطہ $(۰، \frac{۷}{۲})$ میں سے گذرتا ہے۔

(د) خط دو دیے ہوئے نقطوں ن_1 $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور ن_2 $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ میں سے گذرتا ہے۔



فرض کرو کہ ن_1 $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور ن_2 $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ خط پر دیے ہوئے نقاط ہیں اور کوئی اور نقطہ خط پر ن (لا، ما) ہے۔ نقاط ن_1، ن، ن_2 میں سے معین $\text{ن}_1\text{ل}_1$، ن م، $\text{ن}_2\text{ل}_2$ کھینچو اور محور و لا کے متوازی ن_1 ر س کھینچو جو ن م اور $\text{ن}_2\text{ل}_2$ سے ر اور س پر ملے۔

متشابہ مثلثوں سے $\frac{\text{ن}_1\text{ر}}{\text{ن}_1\text{س}} = \frac{\text{ر ن}}{\text{س ن}_2}$

اس کی جبریہ شکل ہوگی $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$ ......(۵)

یا $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا} - \text{لا}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما} - \text{ما}_2}$ ......(۵َ)

مثال۔ خط کی مساوات جو نقاط (−۲، ۳) اور (۱، −۴) میں سے

گزرتا ہے یہ ہوگی: (لا + ۲) / (-۲ - ۱) = (ما - ۳) / (۳ - (-۳))

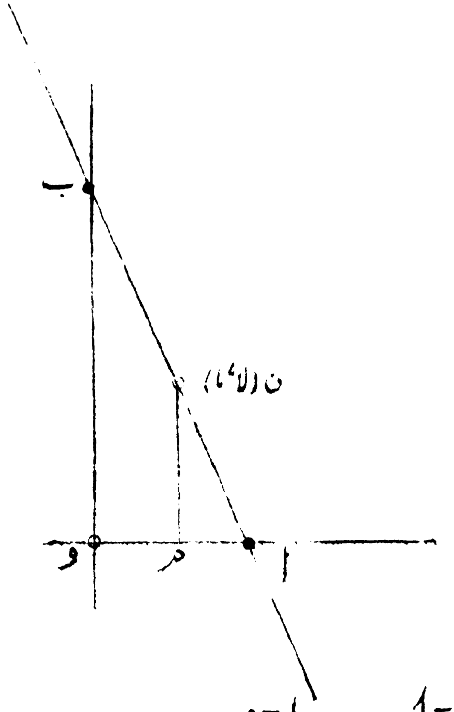
یعنی ۲ (لا + ۲) + ۳ (ما - ۳) = ۰، یعنی ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰

(ر) محوروں پر خط کے مقطوعے (ا، ب) معلوم ہیں، خط کی مساوات مطلوب ہے۔

خط کے مقطوعے وا = ا، وب = ب،

خط پر کہیں کوئی نقطہ ن (لا، ما) لو۔

خط دو نقطوں (ا، ۰) اور (۰، ب) میں سے گزرتا ہے۔



اس لیے (لا - ا) / (ا - ۰) = (ما - ۰) / (۰ - ب)

یعنی ب (لا - ا) + ا ما = ۰

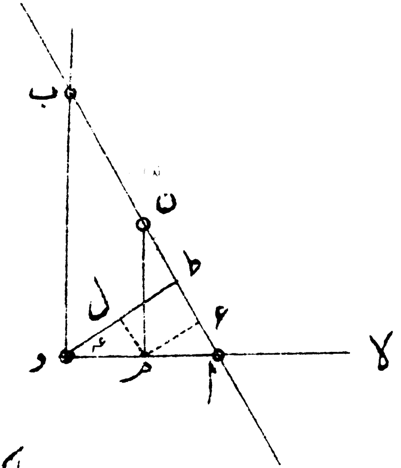
ب لا + ا ما = ا ب

اب پر تقسیم کرنے سے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱ \ldots\ldots (۶)$

مثال - خط جو محوروں پر مقطوعے -۱، ۳ بناتا ہے اس کی مساوات ہوگی

$\frac{\text{لا}}{-۱} + \frac{\text{ما}}{۳} = ۱$ یعنی $۳\text{لا} - \text{ما} + ۳ = ۰$

(س) مبدا سے خط پر کے عمود ما کا طول ع دیا گیا ہے، نیز عمود محور لا سے جو زاویہ (عہ) (مخالف سمت ساعت) بناتا ہے معلوم ہے خط کی مساوات مطلوب ہے - یہ عمودی شکل کہلاتی ہے -



خط اب ہے جو محوروں سے ا اور ب پر ملتا ہے لیکن دونوں جانب غیر محدود ہے - خط پر عمود وط = ع اور ∠ اوط = عہ

خط پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) کہیں واقع ہے - اب لا، ما، ع، عہ میں رشتہ مطلوب ہے - معین ن ھ کھینچو، پھر ھ سے وط پر عمود ھل اور اب پر عمود ھع کھینچو -

اب وط = ول + ھع = وھ جم اوط + ھن جب ھن ع

= لا جم عہ + ما جب عہ، کیونکہ

∠ م ن ع = ∠ و ب ا = ∠ ا و ط = عہ

پس خط کی مساوات ہے   لا جم عہ + ما جب عہ = ع ۔۔۔۔۔ (۷)

واضح ہو کہ اس مساوات میں عمود کو ہمیشہ مثبت لیا جائیگا۔

عمودی شکل کی مساوات   لا جم عہ + ما جب عہ = ع   میں یہ یاد رہے کہ ع (مبدا سے خطِ مستقیم پر ڈالے ہوئے عمود کا مطلق طول ہے) اور اسی شکل میں لا اور ما کے سر بالترتیب جم عہ اور جب عہ ہیں، جن کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے (جم² عہ + جب² عہ = ۱)۔

مثال۔ (۱) $\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}\ \text{لا}}{۲} = ۳$ ، ایسا خط ہے جس پر مبدا سے عمود ۳ ہے اور یہ عمود محور لا سے ۳۰° زاویہ بناتا ہے۔

(۲)   ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰، اس مساوات کو عمودی شکل لا جم عہ + ما جب عہ = ع میں رکھ سکتے ہیں۔

چونکہ ع مثبت ہے، اس لیے دی ہوئی مساوات میں بھی، بائیں جانب کی مستقل رقم کو مثبت بنانے کے لیے تمام مساوات کی علامت بدل دینی چاہیے۔ پس

لا جم عہ + ما جب عہ = ع

- ۲ لا - ۳ ما = ۵

اگر یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہوں یعنی ایک ہی خط کو تعبیر کریں تو

$$\frac{\text{جم عہ}}{-۲} = \frac{\text{جب عہ}}{-۳} = \frac{\text{ع}}{۵} = \frac{\sqrt{\text{جم}^۲\text{عہ} + \text{جب}^۲\text{عہ}}}{\sqrt{(-۲)^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$$

یعنی جم عہ = $\frac{-۲}{\sqrt{۱۳}}$ اور جب عہ = $\frac{-۳}{\sqrt{۱۳}}$ اور ع = $\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$

پس دی ہوئی مساوات عمودی شکل میں آجائیگی اگر تمام مساوات کو لا، ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر $\sqrt{(-۲)^۲ + (-۳)^۲}$ پر تقسیم کر دیا جائے یعنی مساوات کی عمودی شکل ہے $\frac{-۲}{\sqrt{۱۳}}\ \text{لا} - \frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\ \text{ما} = \frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$

مبدا سے خط پر عمود ۵/√۱۳۴ ہے اور یہ عمود محور لا سے زاویہ جم^-۱ (-۲/√۱۳۴) بناتا ہے، اور جدولوں سے یہ زاویہ ہے

۱۸۰° - جم^-۱ ۲/√۱۳۴ = ۱۸۰° - جم^-۱ (۰٫۵۵) = ۱۸۰° - ۵۶° تقریباً
= ۱۲۴°

۱۲٫۲۔ خطِ مستقیم کی مساوات کی عام شکل، کارتیزی محددوں میں

اوپر ہم نے خطِ مستقیم کی مساوات کی مختلف شکلیں حاصل کی ہیں:

ما - ما۱ = م (لا - لا۱) ......(۱)

ما = م لا + ب ......(۲)

(لا - لا۱) / (لا۱ - لا۲) = (ما - ما۱) / (ما۱ - ما۲) ......(۳)

لا/ا + ما/ب = ۱ ......(۴)

لا جم عہ + ما جب عہ = ع، وغیرہ ......(۵)

ہم دیکھتے ہیں کہ خطِ مستقیم کی یہ سب مساواتیں، دو مجہول متغیروں لا، ما میں، درجۂ اول کی مساواتیں ہیں۔ درجۂ اول کی عام سے عام مساوات لا، ما میں یہ ہے

ا لا + ب ما + ج = ۰

ہم ثابت کریں گے کہ یہ ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ بظاہر اس میں تین مستقل ہیں، کسی ایک مستقل مثلاً ج پر تقسیم کرنے سے صرف دو مستقل رہ جاتے ہیں (ا/ج) لا + (ب/ج) ما + ۱ = ۰ یا جیسے اس شکل

ل لا + م ما + ۱ = ۰ ......(۶)

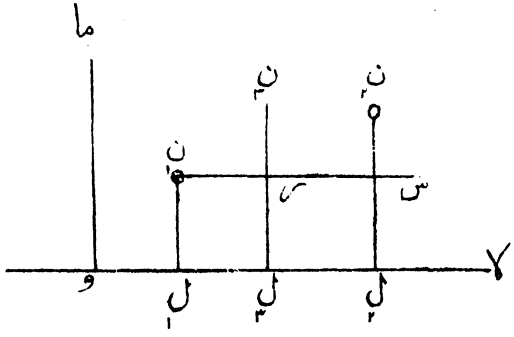
میں لکھا جا سکتا ہے۔ خطِ مستقیم کی عام سے عام مساوات میں فی الحقیقت دو غیر تابع مستقل ہیں، ان دو کے معلوم ہونے سے خط کا مقام سطح مستوی میں متعین ہو جاتا ہے۔ اوپر ہم نے دیکھا ہے کہ خطِ مستقیم پر دو شرائط عائد کیے جائیں تو ہندسی طور پر اس کا مقام معین ہو جاتا ہے، مثلاً خط دو نقطوں میں سے گزارا جا سکتا ہے، مبدا سے خط پر کے عمود کا طول دیا گیا ہے۔ نیز عمود کا میلان محور لا کے ساتھ معلوم ہے، وغیرہ، یہ سب دو ہندسی شرائط کے مساوی ہیں۔ ہر شرط کے مماثل ایک جبریہ رشتہ یا مساوات حاصل ہوتی ہے، دو شرطوں سے دو مساواتیں حاصل ہونگی جو خطِ مستقیم میں کے مستقل معلوم کرنے کے لیے کافی ہونگی۔

اب ثابت کیا جائیگا کہ لا، ما میں درجۂ اول کی عام سے عام مساوات

ا لا + ب ما + ج = ۰ (آ)

خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

فرض کرو کہ (آ) جس ہندسی لوکس یا طریق کو بھی تعبیر کرے اُس پر دو نقطے ن۱ (لا۱، ما۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲) منتخب کر لیے گئے ہیں۔ یعنی کوئی اور تیسرا نقطہ ن۳ (لا۳، ما۳) اسی لوکس پر واقع ہے۔



ن۱ل۱، ن۲ل۲، ن۳ل۳ معین کھینچو اور ن۱ سے محور لا کے متوازی خط کھینچو

جو $ن_1 ل_1$، $ن_2 ل_2$ سے س ر پر ملے، نقاط $ن_1$، $ن_2$، $ن_3$ کے محدد مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے

$$ا\,لا_1 + ب\,ما_1 + ج = ۰$$

$$ا\,لا_2 + ب\,ما_2 + ج = ۰$$

$$ا\,لا_3 + ب\,ما_3 + ج = ۰$$

تفریق کرنے سے

$$ا\,(لا_2 - لا_1) + ب\,(ما_2 - ما_1) = ۰$$

$$ا\,(لا_3 - لا_1) + ب\,(ما_3 - ما_1) = ۰$$

اس لیے

$$\frac{ما_3 - ما_1}{ما_2 - ما_1} = \frac{لا_3 - لا_1}{لا_2 - لا_1}$$

یعنی

$$\frac{ن_3 ر}{ن_2 س} = \frac{ن_1 ر}{ن_1 س}$$

اور یہ تب ہی ممکن ہے کہ $ن_3$، نقاط $ن_1$، $ن_2$ کو ملانے والے خط پر واقع ہو۔ پس $ن_3$ یا کوئی اور نقطہ جس کے محدد $ا\,لا + ب\,ما + ج = ۰$ کو پورا کرتے ہیں (اور ایسے نقطے بے شمار ہیں) ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتا ہے۔ پس لا، ما میں درجۂ اول کی عام مساوات $ا\,لا + ب\,ما + ج = ۰$ ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

۲٫۱۴ ۔ (ا) خطِ مستقیم کی عام مساوات $ا\,لا + ب\,ما + ج = ۰$ ہے، ما کے ضرب پر تقسیم کرنے اور باقی رقموں کو دوسری طرف لے جانے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$ما = - \frac{ا}{ب}\,لا - \frac{ج}{ب} \qquad (ز)$$

ظاہر ہے کہ مساوات کو اگر کسی مستقل سے ضرب دے دیا جائے یا اسے کسی مستقل پر تقسیم کر دیا جائے تو مساوات نہیں بدلتی، یعنی لا، ما میں اس کی اصلیں وہی رہتی ہیں اور چونکہ لا، ما کی قیمتیں مرتسم کرنے سے مساوات کا طریق پیدا ہوتا ہے اس لیے معلوم ہوا کہ مستقل سے ضرب یا تقسیم کرنے سے مساوات جس ہندسی طریق کو تعبیر کرتی ہے وہ وہی رہتا ہے۔ یعنی ہندسی طریق میں فرق نہیں آتا۔

مساوات (ا) کی مماسی شکل ما = م لا + ب کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ اگر محور علی القوائم ہوں تو م = $-\frac{ا}{ب}$ یعنی مساوات الا + ب ما + ج = ۰ کا ہندسی طریق محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس $-\frac{ا}{ب}$ ہے۔ نیز یہ لکس محور ما کو مبدا سے $-\frac{ج}{ب}$ فاصلہ پر کاٹتا ہے۔

(ب) نیز الا + ب ما + ج = ۰ کو شکل

$$\frac{لا}{-\frac{ج}{ا}} + \frac{ما}{-\frac{ج}{ب}} = ۱$$

میں لکھنے سے ظاہر ہے کہ خط کے مقطوعے محوروں لا اور ما پر بالترتیب

$-\frac{ج}{ا}$، $-\frac{ج}{ب}$ ہیں۔

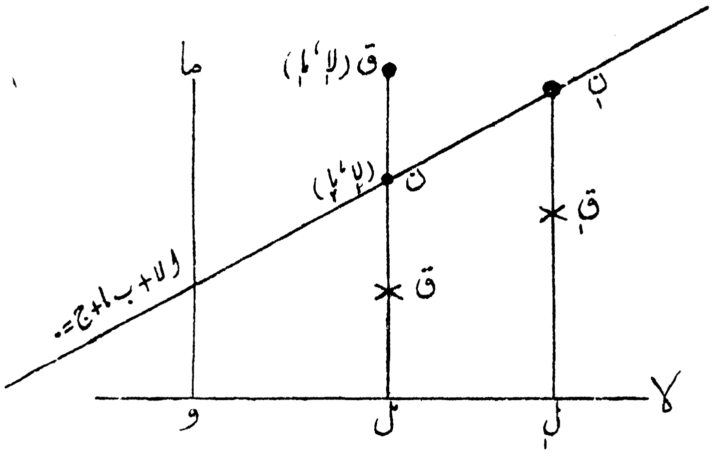
(ج) نیز جس نقطہ پر خط الا + ب ما + ج = ۰ محور لا کو کاٹتا ہے اس نقطہ کے محددوں کے لیے، خط کی اور محور لا دونوں کی مساواتیں ایک ساتھ پوری ہوتی ہیں، یعنی

الا + ب ما + ج = ۰
ما = ۰

کو بطور دو ہمزاد مساواتوں کے حل کرنا چاہیے، پس نقطۂ تقاطع کے محدد ($-\frac{ج}{ا}$، ۰) ہیں، اسی طرح جہاں خط محور ما کو کاٹتا ہے وہاں پر خط اور محور ما کی مساوات

الا + ب ما + ج = ۰
لا = ۰، دونوں پوری ہونا چاہئیں یعنی
لا = ۰

ان کو ایک ساتھ حل کرنے سے خط کا نقطۂ تقاطع محور ما کے ساتھ حاصل ہوتا ہے $\left(0 ،\ - \frac{\text{ج}}{\text{ب}}\right)$ ۔



(د) فرض کرو کہ خط ن ن$_1$ ا لا + ب ما + ج = ۰ سے تعبیر ہوتا ہے، اور محوروں کے مستوی میں کوئی نقطہ ق (لا$_1$، ما$_1$) ہے جو خط کے کسی ایک جانب واقع ہوتا ہے۔ ق میں سے معیّن کھینچو جو خط سے ن (لا$_1$، ما$_2$) پر اور محور لا سے ل پر ملے۔ واضح ہو کہ ن کا فصلہ (لا$_1$) وہی ہے جو ق کا، لیکن معین مختلف ہے۔

اب اگر نقطۂ ق کے محدّدوں (لا$_1$، ما$_1$) کو خط کی مساوات کے دائیں رکن میں مندرج کریں تو حاصل ہوتا ہے ا لا$_1$ + ب ما$_1$ + ج
= ا لا$_1$ + ب ما$_1$ + ج − (ا لا$_1$ + ب ما$_2$ + ج)
کیونکہ (لا$_1$، ما$_2$) خط پر واقع ہونے کے باعث ا لا$_1$ + ب ما$_2$ + ج = ۰
= ب (ما$_1$ − ما$_2$)

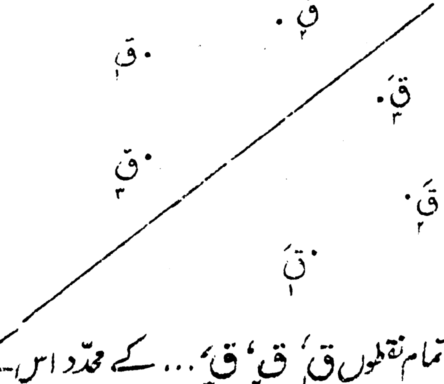
اگر ب مثبت ہو تو یہ جملہ مثبت ہوگا اگر ما$_1$ > ما$_2$ یعنی نقطہ ق$_1$، ن کے اوپر ہو اور یہ نتیجہ درست ہے اوپر کی جانب کے تمام نقطوں کے لیے۔ یعنی اگر اُوپر کی جانب کے کسی نقطہ کے محدّد مساوات کے دائیں رُکن ا لا + ب ما + ج یہاں درج کر دیے جائیں تو تمام صورتوں میں نتیجہ مثبت حاصل ہوگا اور بخلاف اس کے تمام نیچے کے نقطوں کے محدّد درج کرنے سے نتیجہ منفی حاصل ہوگا اور خط پر کے تمام نقطوں کے لیے رکن ا لا + ب ما + ج صفر کے مساوی ہوگا۔ اگر مساوات اس طرح - ا لا - ب ما - ج = ۰ لکھی ہوئی ہوتی تو ظاہر ہے کہ

- ا لا$_1$ - ب ما$_1$ - ج - (- ا لا$_1$ - ب ما$_2$ - ج)

= - ب (ما$_1$ - ما$_2$) جو منفی مقدار ہوگی کیونکہ ب مثبت ہے اور شکل سے ما$_1$ - ما$_2$ مثبت ہے۔

اسی طرح خط کے نیچے کے نقطوں کے محدّد اگر درج کیے جائیں تو - ب (ما$_1$ - ما$_2$) مثبت ہوگا کیونکہ ما$_1$ - ما$_2$ منفی ہے۔

اب خط کی مساوات دونوں طرح سے ا لا + ب ما + ج = ۰ یا - ا لا - ب ما - ج = ۰ لکھی جا سکتی ہے اور ا، ب، ج میں سے کوئی مثبت منفی ہو سکتے ہیں، پس اُوپر کے عمل سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں۔ خطِ مستقیم محوروں کے مستوی کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے



اگر ایک جانب کے تمام نقطوں ق$_1$، ق$_2$، ق$_3$ ... کے محدّد اس کے دائیں رکن ا لا + ب ما + ج میں درج کیے جائیں تو ہر ایسے اندراج سے ایک عدد ملیگا، اب ایک طرف کے نقطوں کے متعلق اندراج سے جو تمام بے شمار عدد ملینگے

ان کی ایک ہی علامت ہوگی خواہ مثبت ہو یا منفی اور یہ علامت دوسری جانب سکنہ نقطوں ق، ق، ..... کے محددوں کے اندراج سے جو عدد ملینگے ان کی علامت سے مختلف ہوگی یعنی اگر ایک طرف کے اندراج سے مثبت عدد ملتے ہیں تو دوسری طرف کے اندراج سے منفی عدد ملینگے۔ بعض اوقات جس جانب کے اندراج سے مثبت عدد ملیں اُسے مثبت جانب کہتے ہیں اور دوسری جانب کو منفی۔ ظاہر ہے کہ خط پر کے تمام نقاط مساوات کو پورا کرینگے اور ایسے ہر نقطہ کے محدد ا لا + ب ما + ج میں درج کرنے سے یہ رکن صفر کے مساوی ہوگا۔

مثال (۱) خط ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰ کو (ا) مماسی شکل میں لکھو اور اس کا زاویہ میلان محور لا کے ساتھ معلوم کرو (ب) اس کے منقطعے محوروں پر معلوم کرو۔ (ج) بتاؤ کہ یہ خط محور لا اور ما کو کن نقطوں پر کاٹتا ہے۔ (د) بتاؤ کہ نقطہ (۲، ۱) اس کے کس جانب واقع ہے؟ کیا یہ نقطہ مبدا والی جانب واقع ہے؟

(ا) ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰

مماسی شکل ما = $-\frac{۲}{۳}$ لا $-\frac{۵}{۳}$، اگر محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ طہ بنتا ہے

تو مس طہ = $-\frac{۲}{۳}$، طہ = مس$^{-۱}$ $\left(-\frac{۲}{۳}\right)$ = مس$^{-۱}$ (-۶۶۶....)

جدولوں سے وہ زاویہ جس کا مماس ۶۶. ہے ۳۵° ہے، اس لیے طہ = ۱۸۰° - ۳۵°

= ۱۴۵°

نیز یہ خط محور ما کو مبدا سے نیچے فاصلہ $\frac{۵}{۳}$ پر ملتا ہے۔

(ب) خط اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے $\frac{لا}{-\frac{۵}{۲}} + \frac{ما}{-\frac{۵}{۳}} = ۱$،

محوروں پر منقطعے $-\frac{۵}{۲}$، $-\frac{۵}{۳}$ ہیں۔

(ج) جہاں خط محور لا سے ملتا ہے وہاں ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰، ما = ۰ دونوں مساواتیں ایک ساتھ پوری ہونگی

یعنی (لا = $-\frac{۵}{۲}$، ما = ۰) نقطہ ($-\frac{۵}{۲}$، ۰) حاصل ہوا۔

جہاں خط محور ما سے ملتا ہے وہ نقطہ ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰ کو اکٹھا حل کرنے سے حاصل ہوگا
لا = ۰
نقطہ ہے (۰، - $\frac{۵}{۳}$)

(د) نقطہ (۱، ۲) کے محدّد ۲ لا + ۳ ما + ۵ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے ۲ (۱) + ۳ (۲) + ۵ = + ۱۳ یعنی نقطہ مثبت جانب واقع ہے، مبدا کے محدد (۰، ۰) درج کرنے سے + ۵ حاصل ہوتا ہے، پس نقطہ مبدا والی جانب واقع ہے۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ نقطے (۱، -۱) اور (۲، ۴) خط ۲ لا - ۳ ما + ۴ = ۰ کی مختلف جانبوں میں واقع ہیں، خط کو مرتسم کرو اور نقطوں کا مقام شکل میں دکھاؤ۔

مثال (۳) خط ۴ لا + ۵ ما - ۱۰ = ۰ کے مقطوعے محوروں پر دریافت کرو، خط کو مرتسم کرو اور دکھاؤ کہ نقطے (-۳، + ۵) (۲، ۷) خط کے ایک طرف واقع ہیں (مثبت جانب) اور نقطے (+ ۱، - ۲) اور (۲، -۳) خط کے دوسری طرف واقع ہیں (منفی جانب) اور نقطے (۱، ۵، ۳) (۲، ۵) (۴، ۸) خط پر واقع ہیں۔ تمام نقطوں کا مقام خط کے لحاظ سے مرتسم کرو۔

مثال (۴) ثابت کرو کہ چار نقاط (۵، ۲) (-۲، ۶) (-۵، ۲) (-۲، -۴) ایک ایک کرکے اُن چار حصّوں میں واقع ہیں جو دو خطوطِ مستقیم ۳ لا + ما + ۱ = ۰ اور ۳ لا - ۲ ما + ۴ = ۰ کے درمیان بنتے ہیں۔ خطوں کو مرتسم کرکے نقطوں کا محل شکل میں دکھاؤ۔

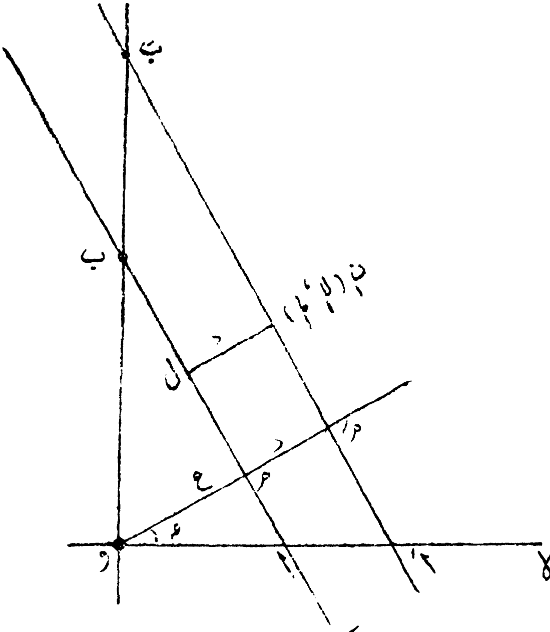
۱۴ا۲ - کسی نقطہ ن (لاَ، ماَ) کا عمودی فاصلہ خطِ مستقیم

لا جم عہ + ما جب عہ = ع سے یا بالعموم خط ا لا + ب ما + ج = ۰ سے دریافت کرو۔ محور علی القوائم ہیں۔

فرض کرو کہ خط ا ب کی مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع ہے اور دیا ہوا نقطہ ن (لاَ، ماَ) ہے۔

ن سے ا ب پر عمود ن ل کھینچا گیا ہے جس کا طول دی ہوئی مقدار و لاَ، ماَ اور خط کے دیے ہوئے مستقلوں عہ اور ع کی رقوم میں حاصل کرنا مقصود ہے۔ واضح ہو کہ مبدا خط کی منفی جانب میں واقع ہے اور نقطہ ن،

مقابل کی یعنی مثبت جانب میں واقع ہے جو خط کو شکل لاجم عہ + ماجب عہ - ع = ۰
میں لکھنے پر اور مبداء کے محدّد درج کرنے سے ظاہر ہے۔ پس نٖ سے جو عمود
کا طول حاصل ہوگا وہ مثبت ہوگا۔



نٖ میں سے خط آبَ کھینچو جو اب کے متوازی ہو اور محوروں سے
آبَ پر ملے۔ مبداء و سے خطوط اب اور آبَ پر عمود و م مَ کھینچو
جو اب سے م پر اور آبَ سے مَ پر ملتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ نٖ سے
خط اب پر کے عمود کا طول نٖ ل = د، یہ طول مطلوب ہے۔
اب دیے ہوئے خط پر مبداء سے عمود ع ہے اور عمود کا زاویہ محور لا
سے عہ ہے، اس کی دی ہوئی مساوات لاجم عہ + ماجب عہ = ع ہے،
اب خط آبَ، خط اب کے متوازی ہے، مبداء سے اس پر عمود و مَ = ع + د
اور محور لا سے اس عمود کا زاویہ وہی عہ ہے، اس لیے خط آبَ کی مساوات ہوگی۔

لاجم عہ + ماجب عہ = ع + د

اب یہ خط اَبَ نقطہ ن (لا، ما) میں سے گذرتا ہے، اس لیے یہ مساوات (لا، ما) سے پوری ہوتی ہے

لا جم عہ + ما جب عہ = ع + د   (۱)

یعنی عمود ن ل کا طول = د = لا جم عہ + ما جب عہ − ع

خط لا جم عہ + ما جب عہ − ع = ۰ سے نقطہ (لا، ما) کا عمودی فاصلہ صرف نقطہ کے محدد خط میں درج کردینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال۔ نقطہ (۲، −۱) کا عمودی فاصلہ خط

لا − √۳ ما + ۶ = ۰ سے حاصل کرو۔

مبدا اور نقطہ خط کے ایک ہی جانب ہیں (مثبت جانب)۔ سب سے پہلے خط کو عمودی شکل میں لکھا جائے۔ لا اور ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر √(۱^۲ + (−√۳)^۲) سے تمام مساوات کو تقسیم کرنے سے

لا/۲ − (√۳/۲) ما + ۳ = ۰، لا جم ۵۱۳° + ما جب ۵۱۳° + ۳ = ۰

پس عمود کا طول محض نقطہ کے محدد (۲، −۱) خط کی مساوات میں درج کرنے سے ملتا ہے

۲ (۱/۲) − (√۳/۲) (−۱) + ۳ = ۴ + √۳/۲

اگر (لا، ما) کا عمودی فاصلہ ا لا + ب ما + ج = ۰ سے مطلوب ہو تو پہلے مساوات کو عمودی شکل لا جم عہ + ما جب عہ − غ = ۰ میں لکھا جائے، پھر صرف محدد لا، ما مساوات کے بائیں رکن میں درج کرنے سے عمود کا طول ملیگا۔

ا لا + ب ما + ج = ۰ کی عمودی شکل حاصل کرنے کے لیے، کوئی زاویہ عہ ایسا ملنا چاہیے کہ

جم عہ / ا = جب عہ / ب = ۱ / √(ا^۲ + ب^۲)، یعنی جم عہ = ا / √(ا^۲ + ب^۲) اور

جب عہ = ب / √(ا^۲ + ب^۲)، پس مطلوبہ شکل حاصل ہوگی اگر مساوات کو √(ا^۲ + ب^۲) پر

تقسیم کر دیا جائے - اس طرح حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\text{ما} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} = ۰$

یعنی لا جم عہ + ما جب عہ + $\frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} = ۰$ جہاں $-\text{ع} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$

یعنی مبدا سے خط ا لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود کا طول $\text{ع} = \frac{-\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$ ہے جو مثبت ہوگا اگر ج منفی ہے، اور منفی ہوگا اگر ج مثبت ہے -

پس خط ا لا + ب ما + ج = ۰ کی عمودی صورت $\frac{\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{+\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} = ۰$ ہے اور (لا'، ما') کا عمودی فاصلہ خط ا لا + ب ما + ج = ۰ سے محض محدد درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا لا}' + \text{ب ما}' + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$$

عمود کی علامت اور سمت

- عددی مثال کے ذریعہ توضیح زیادہ مناسب ہوگی - نقطہ (۱، -۲) کا عمودی فاصلہ جو خط ۲ لا - ۳ ما - ۷ = ۰ کی عمودی صورت میں محدد درج کرنے سے حاصل ہوگا اس کی علامت معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ (۱، -۲) خط کے مثبت جانب واقع ہے - اس لیے محدد درج کرنے سے عمود کی مثبت علامت حاصل ہوگی یعنی عمود $= \frac{۲ \times ۱ - ۳(-۲) - ۷}{+\sqrt{۲^2 + (-۳)^2}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$، مبدا منفی جانب واقع ہے، اس لیے نقطہ اور مبدا سے عمود خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہونگے -

خط کی مساوات کو -۱ سے ضرب دے کر اس شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے

-۲ لا + ۳ ما + ۷ = ۰، خط وہی رہا، نقطوں کے مقام وہی ہیں مگر اب مبدا مثبت جانب واقع ہے اور نقطہ کے محدد (۱، -۲) خط کے دائیں رکن میں

درج کرکے دیکھتے ہیں $-۲(۱)+۳(-۲)+۷=-۱$ یعنی نقطہ منفی جانب واقع ہے ۔ پس محدّد درج کرنے سے منفی عمود حاصل ہوگا

$$\text{عمود} = \frac{-۲(۱)+۳(-۲)+۷}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۱۳}}$$

پس (لا، ما) سے خط $\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ج}=۰$ پر کے عمودی فاصلہ کے لیے جو جملہ اندراج سے حاصل ہوتا ہے اس کی علامت مثبت یا منفی دونوں ہوسکتی ہے اور یہ اس امر پر منحصر ہے کہ نقطہ خط کے مثبت یا منفی جانب واقع ہے ۔ نیز خط کی شکل کے دائیں رُکن میں مبداء اور نقطہ کے محدّد لا، ما درج کرنے سے معلوم ہوسکتا ہے کہ نقطہ سے عمود اُسی سمت میں کھینچا گیا ہے جس سمت میں کہ مبداء ہے یا مقابل جانب میں ۔

مثال (۱) نقاط (۱، ـ ۵)، (۲، ۳)، اور مبداء کے عمودی فاصلے خط $۴\,\text{لا}+۳\,\text{ما}+۱۰=۰$ سے حاصل کرو اور بتاؤ کہ بلحاظ مبداء سے ڈالے ہوئے عمود کے، ان نقطوں سے عمود کس سمت میں کھینچے گئے ہیں ۔

$$(۱،-۵)\ \text{سے عمود} = \frac{۴(۱)+۳(-۵)+۱۰}{+\sqrt{۴^۲+۳^۲}} = \frac{-۱}{۵}$$

$$(۲،۳)\ \text{〃}\ \text{〃} = \frac{۸+۹+۱۰}{۵} = +\frac{۲۷}{۵}$$

$$\text{مبداء}\ \text{〃}\ \text{〃} \quad \frac{۱۰}{۵} = +۲$$

پس پہلے نقطہ سے متقابل جانب میں اور دوسرے سے مبداء والے عمود کی جانب میں عمود کھینچے گئے ہیں ۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ مبداء $۳\,\text{لا}-۴\,\text{ما}-۱۰=۰$، $۱۲\,\text{لا}-۵\,\text{ما}+۲۶=۰$ اور $۲۴\,\text{لا}+۷\,\text{ما}-۵۰=۰$ سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے ۔

مثال (۳) نقطہ (ا، ب) کا عمودی فاصلہ خط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}=۱$ سے

دریافت کرو۔ نیز (ب، ا) کا فاصلہ خط $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۲$ سے

جواب $\frac{اب}{\sqrt{ا^۲+ب^۲}}$ ، $\frac{(ا-ب)^۲}{\sqrt{ا^۲+ب^۲}}$

مشق ۷

(۱) مبداء میں سے گذرنے والے خطوں کی مساواتیں لکھو جو محور لا کے ساتھ زاویہ (ا) ۰° (ب) ۳۰° (ج) ۴۵° (د) ۶۰° (ع) ۱۲۰° (ف) ۱۵۰° (گ) $\frac{\pi}{۲}$ (ط) π بنائیں۔ شکل میں ان کے مقام دکھاؤ۔

اگر یہ خط مبداء میں سے گزرنے کی بجائے، نقطہ (۰، ۲) میں سے یا (۰، -۱) میں سے یا بالعموم محور ما پر کے کسی نقطہ (۰، ب) میں گذریں اور اگر سمتیں ان کی وہی رہیں جو اوپر دی گئی ہیں تو ان کی مساواتیں کیا ہونگی۔

جواب۔ (ا) ما = ۰ (ب) $\sqrt{۳}$ ما - لا = ۰ (ج) ما = لا (د) ما - $\sqrt{۳}$ لا = ۰

(ع) ما + $\sqrt{۳}$ لا = ۰ (ف) $\sqrt{۳}$ ما - لا = ۰ (گ) لا = ۰، (ط) ما = ۰

نقطہ (۰، ۲) میں سے گزرنے والے خط (ا) ما - ۲ = ۰ (ب) ما = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا + ۲

(ج) ما = لا + ۲ (د) ما = $\sqrt{۳}$ لا + ۲ (ع) ما = - $\sqrt{۳}$ لا + ۲ (ف) ما = - $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا + ۲

(گ) لا = ۰ (ط) ما = ۲

اسی طرح نقطہ (۰، -۱) میں سے گزرنے والے خط ہونگے (ب) ما = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا - ۱ وغیرہ

بالعموم نقطہ (۰، ب) میں سے گزرنے والے خط (ب) ما = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا + ب (د) ما = $\sqrt{۳}$ لا + ب وغیرہ

(۲) (ا) ایک خط نقطہ (۲، -۳) میں سے گزرتا اور محور لا کے ساتھ زاویہ ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° بناتا ہے، ہر صورت میں خط کی مساوات دریافت کرو۔

(ب) ایک خط نقطہ (-۲، -۱) میں سے گزرتا اور محور لا کے ساتھ زاویہ ۱۲۰°، ۱۵۰° بناتا، ہر صورت میں خط کی مساوات دریافت کرو۔

جواب (ا) لا - $\sqrt{۳}$ ما - ۲ - ۳$\sqrt{۳}$ = ۰

لا - ما - ۵ = ۰

$\sqrt{۳}$ لا - ما - ۳ - ۲$\sqrt{۳}$ = ۰

جواب (ب) √۳ لا + ما + ۲√۳ + ۱ = ۰
لا + √۳ ما + √۳ + ۲ = ۰

(۳) (ا) ایک خط نقطہ ا (-۲، ۱) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتا ہے، خط پر نقطہ ا سے فاصلہ ۵ پر جو نقطہ ہے اس کے محدّد دریافت کرو۔

(ب) نقطہ م (-۲، -۳) میں سے گزرنے والا خط محور لا کے ساتھ زاویہ ۶۰° بناتا ہے، م سے فاصلہ -۳ پر نقطہ ن لیا گیا ہے اس کے محدّد دریافت کرو۔

جواب۔ نقطہ ا کے محدّد $\left(\frac{-۴+۵\sqrt{۳}}{۲}،\ \frac{۱}{۲}\right)$ نقطہ ب کے محدّد $\left(-\frac{۷}{۲}،\ -\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۲}\right)$

(۴) ذیل کے نقطوں کے جوڑوں میں سے گزرنے والے خطوں کی مساواتیں دریافت کرو:

(ا) (۰، ۲)، (-۱، -۳) (ب) (۲، ۱)، (-۳، ۱)
(ج) (۲، -۱)، (-۳، ۴)

جواب (ا) ۵لا - ما + ۲ = ۰ (ب) ما - ۱ = ۰ (ج) لا + ما - ۱ = ۰

(۵) خطوں کی مساواتیں معلوم کرو، محوروں پر مقطوعے حسبِ ذیل دیے گئے ہیں:-

(ا) -۲، ۳ (ب) +۱.۵، -۶

جواب (ا) ۳لا - ۲ما + ۶ = ۰ (ب) ۴لا - ما - ۶ = ۰

(۶) خط کی مساوات معلوم کرو، مبدا سے خط پر کے عمود کا طول دیا گیا ہے نیز عمود محور لا کے ساتھ جو زاویہ طہ بناتا ہے وہ بھی معلوم ہے۔

(ا) عمود = ۳، طہ = ۳۰°

(ب) عمود = ۱، طہ = ۱۲۰°

جواب (ا) √۳ لا + ما - ۶ = ۰، (ب) لا - √۳ ما + ۲ = ۰

(۷) (ا) ثابت کرو کہ نقطے (۰، -۱)، (۲، ۳) خط ۳لا - ۷ما + ۲ = ۰ کی مقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

(ب) نیز نقطے (−۳، ۱)، (۱، ۲) خط ۲لا − ۳ما + ۱ = ۰ کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔

(ج) نقطے (۰، −۷)، (۲، −۱)، (۴، ۵)، (−۱، −۱۰) ایک ہی خطِ مستقیم پر واقع ہیں۔

(۸) جن خطوں کی مساواتیں حسب ذیل ہیں انہیں مرتسم کرو، ان کے ڈھال اور محوروں پر مقطوعے معلوم کرو، نیز مبدا سے ان پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے طول دریافت کرو۔

(ا) لا + ما = ۳ (ب) ۴لا − ۳ما = ۱۲

(ج) ۲لا − ۳ما + ۱ = ۰ (د) ۲لا + ۳ما + ۷ = ۰

جواب۔ ڈھال (ا) −۱ (ب) ۴/۳ (ج) ۲/۳ (د) −۲/۳

مقطوعے (ا) ۳، ۳ (ب) ۳، −۴ (ج) −۱/۲، ۱/۳ (د) −۷/۲، −۷/۳

مبدا سے عمود (ا) ۳/√۲، (ب) ۱۲/۵ (ج) ۱/√۱۳ (د) ۷/√۱۳

(۹) (ا) ایک خط نقاط (۱، ۳) اور (−۳، −۵) کے نقطۂ تنصیف میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

(ب) اس خط کی مساوات معلوم کرو جو (−۳، ۱) میں سے گزرتا اور محوروں پر مساوی مقطوعے کاٹتا ہے۔

جواب۔ (ا) لا − ما = ۰ (ب) لا + ما + ۲ = ۰

(۱۰) اس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور

(ا) خط ۳لا − ۵ما + ۱ = ۰ کے متوازی ہے۔

(ب) خط ما = √۳ لا + ۴ کے متوازی ہے۔

(ج) (۱، ۳) اور (۲، −۵) کے ملانے والے خط کے متوازی ہے۔

جواب۔ (ا) ۳لا − ۵ما + ۱۳ = ۰

(ب) √۳ لا − ما + ۵ − ۴√۳ = ۰

(ج) ۸لا + ما − ۳۷ = ۰

(۱۱) ایک دائرہ کا نصف قطر ۲ ہے، اس کے مرکز میں سے ایک قطر گذرتا ہے جو محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے، جن نقطوں پر یہ دائرہ سے ملتا ہے وہاں پر دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں، مرکز میں سے جو قطر ان مماسوں کے متوازی ہے اس کی مساوات حاصل کرو۔ نیز ان مماسوں کی مساواتیں لکھو۔

جواب۔ قطر ما + لا = ۰، مماس لا + ما ∓ ۲ ۲√ = ۰

(۱۲) (أ) ایک مثلث کے نقاط راس (۰، ۰)، (۲+، ۳+)، (۴-، ۲+) ہیں، ان کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو۔

(ب) ایک مثلث کے نقاط راس (۱، ۲)، (۲-، ۳)، (۳-، ۴-) ہیں، اس کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (أ) اضلاع ۳ لا - ۲ ما = ۰، لا - ۶ ما + ۱۶ = ۰، لا + ۲ ما = ۰

(ب) لا + ۳ ما - ۷ = ۰، ۷ لا - ما + ۱۷ = ۰، ۲ لا - ۲ ما + ۱ = ۰

(۱۳) مثلث (۲، ۳)، (۲-، ۵)، (۳، ۴-) کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو، نیز اس کے وسطانیوں کی مساواتیں حاصل کرو۔

جواب۔ اضلاع لا + ۲ ما - ۸ = ۰، ۹ لا + ۵ ما - ۷ = ۰، ۷ لا + ما - ۱۷ = ۰

وسطانئے۔ ۵ لا - ۳ ما - ۱ = ۰، ۱۱ لا + ۹ ما - ۲۳ = ۰، ۸ لا + ۳ ما - ۱۲ = ۰

(۱۴) (أ) بتاؤ کہ خط ۲ لا + ۳ ما = ۰، نقاط (۳، ۴)، (۲، ۵-) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔ جواب۔ نسبت $\frac{۱۸}{۱۱}$

(ب) بتاؤ کہ نقاط (۵، ۲) اور (۱-، ۱) کو ملانے والا خط نقطوں (۱، ۴) اور (۳-، ۲-) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔

جواب۔ تنصیف کرتا ہے۔

(۱۵) (أ) نقاط (۲، ۴)، (۴-، ۱)، (۵+، ۳-) سے جو مثلث بنتا ہے اس کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو، مبدا سے اضلاع پر جو عمود کھنچ سکتے ہیں ان کے طول دریافت کرو۔ نیز مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر جو عمود کھینچے جا سکتے ہیں ان کے طول دریافت کرو۔

جواب۔ اضلاع ۴ لا + ۹ ما + ۷ = ۰، ۷ لا + ۲ ما - ۲۶ = ۰، ۳ لا - ۷ ما + ۱۹ = ۰

مبدا سے عمود $\frac{۷\sqrt{۹۷}}{۹۷}$ ، $\frac{۲۹\sqrt{۵۳}}{۵۳}$ ، $\frac{۱۹\sqrt{۵۸}}{۵۸}$

راسوں سے عمودوں کے طول $\frac{۵۵}{۹۷}\sqrt{۹۷}$ ، $\frac{۵۵}{۵۳}\sqrt{۵۳}$ ، $\frac{۴۵}{۵۸}\sqrt{۵۸}$

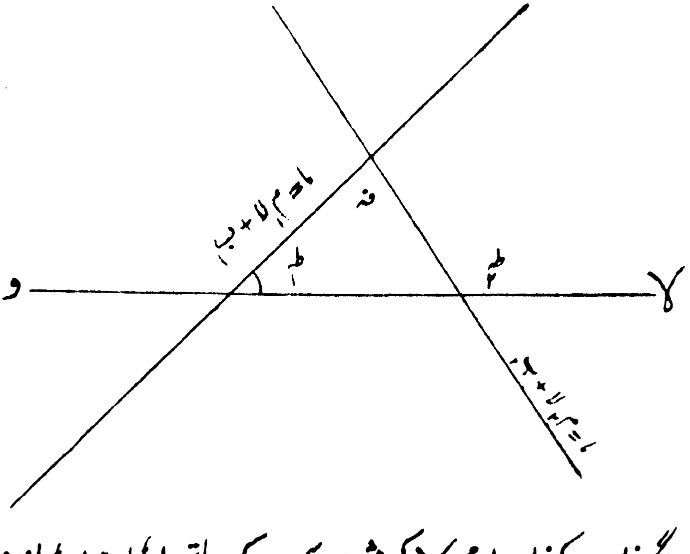
(۱۶) اُن خطوں کی مساواتیں دریافت کرو جو نقاط (۲، ۱) اور (-۲، -۳) میں سے گزرتے ہیں اور خط ۳لا + ۵ما + ۱ = ۰ کے متوازی ہیں، اور ان کے درمیان عمودی فاصلہ دریافت کرو۔

جواب۔ مساواتیں ۳لا + ۵ما - ۱۱ = ۰، ۳لا + ۵ما + ۲۱ = ۰

عمودی فاصلہ $\frac{۱۶}{۱۷}\sqrt{۳۴}$

۲،۲۱۔ دو خطوں کے درمیان زاویہ۔

اب تک ایک خط اور اس کی مساوات کے متعلق بحث تھی۔ اب فرض کرو کہ
(۱) دو خطوں کی مساواتیں ما = $م_۱$لا + $ب_۱$ اور ما = $م_۲$لا + $ب_۲$ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ مطلوب ہے۔



اگر خطوں کے زاویے محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ $طہ_۱$، $طہ_۲$ ہوں، اور درمیانی

زاویہ فہ ہو

$$\text{مس}\ \text{ط}_1 = \text{م}_1 ،\quad \text{مس}\ \text{ط}_2 = \text{م}_2$$

$$\text{فہ} = \text{ط}_2 - \text{ط}_1$$

$$\text{مس}\ \text{فہ} = \text{مس}\ (\text{ط}_2 - \text{ط}_1)$$

$$= \frac{\text{مس}\ \text{ط}_2 - \text{مس}\ \text{ط}_1}{1 + \text{مس}\ \text{ط}_1\ \text{مس}\ \text{ط}_2} = \frac{\text{م}_2 - \text{م}_1}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2}$$

پس $\text{فہ} = \text{مس}^{-1} \frac{\text{م}_2 - \text{م}_1}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2}$ اور دوسرا درمیانی زاویہ $\pi - \text{فہ}$ ہوگا اور

$\text{مس}\ (\pi - \text{فہ}) = -\text{مس}\ \text{فہ} = -\frac{\text{م}_2 - \text{م}_1}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2}$ یعنی حادہ کی علامت بدل جائیگی۔

خط باہم متوازی ہونگے اگر $\text{م}_1 = \text{م}_2$ اور باہم عمود وار ہونگے اگر $\text{م}_1 \text{م}_2 + 1 = 0$؛

یعنی $\text{م}_1 = -\frac{1}{\text{م}_2}$

(ب) اگر خطوں کی مساواتیں $\text{ا}_1 \text{لا} + \text{ب}_1 \text{ما} + \text{ج}_1 = 0$

اور $\text{ا}_2 \text{لا} + \text{ب}_2 \text{ما} + \text{ج}_2 = 0$

ہوں تو $\text{مس}\ \text{ط}_1 = \text{م}_1 = -\frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1}$، $\text{مس}\ \text{ط}_2 = \text{م}_2 = -\frac{\text{ا}_2}{\text{ب}_2}$

پس $\text{مس}\ \text{فہ} = \frac{\text{م}_2 - \text{م}_1}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2} = \frac{-\frac{\text{ا}_2}{\text{ب}_2} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1}}{1 + \frac{\text{ا}_1 \text{ا}_2}{\text{ب}_1 \text{ب}_2}} = \frac{\text{ا}_1 \text{ب}_2 - \text{ا}_2 \text{ب}_1}{\text{ا}_1 \text{ا}_2 + \text{ب}_1 \text{ب}_2}$

خط متوازی ہونگے اگر $\text{ا}_1 \text{ب}_2 - \text{ا}_2 \text{ب}_1 = 0$ یعنی اگر $\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2}$

اور باہم عمود وار ہونگے اگر $\text{ا}_1 \text{ا}_2 + \text{ب}_1 \text{ب}_2 = 0$

یاد رہے کہ خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنے کے لیے صرف م۱، م۲ اور دوسری صورت میں صرف لا، ما کے سر شریک ہوتے ہیں مستقل رقوم شریک نہیں ہوتیں کیونکہ مستقل رقم کا اثر خط کے میلان یعنی سمت پر نہیں پڑتا، بلکہ صرف خط کے محل کی تبدیلی ہو جاتی ہے۔

دو خط ۳لا − ۷ما + ۱۱ = ۰، ۳لا − ۷ما + ۲۰ = ۰ باہم متوازی ہیں۔
اور دو خط ۳لا − ۷ما + ۱۱ = ۰ اور ۷لا + ۳ما + ۳۱ = ۰
ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔ واضح ہو کہ متوازی ہونے کے لیے خطوں کے "م" وہی ہونا چاہئیں اور علی القوائم ہونے کے لیے لا، ما کے سر باہم بدل جاسکتے ہیں اور کسی ایک کی علامت بھی تبدیل ہو جاتی ہے۔

ہم بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گزرنے والا خط جو الا + ب ما + ج = ۰ پر علی القوائم ہے مساوات $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ا}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ب}}$ (ع) سے تعبیر ہوتا ہے یہ ضروری شکل ہے۔ اس خط کا م $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ہے اور دیے ہوئے خط کا $-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$، حاصل ضرب −۱ ہے۔

مثال (۱) خطوں ۳لا − ۴ما + ۷ = ۰ اور لا − ۲ما + ۱۱ = ۰ کے درمیان زاویہ معلوم کرو۔

$$\text{م}_1 = \frac{3}{4}\text{، م}_2 = \frac{1}{2}\text{، مس فہ} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + 1} = \frac{-\frac{2}{8}}{\frac{11}{8}}$$

$$= \frac{2}{11} = \text{٫۱۸۱۸ ئ}$$

جدولوں سے فہ = ۱۰° ۱۲َ تقریباً

مثال (۲) خطوط ۳لا + ۴ما + ۷ = ۰ اور لا − ما + ۹ = ۰ کے درمیان حادہ زاویہ دریافت کرو۔

$$\text{م}_1 = 1\text{، م}_2 = -\frac{3}{4}\text{، مس فہ} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{7}{1}\text{، فہ} = \text{مس}^{-1}\,7$$

مثال (۳) اس خط کی مساوات دریافت کرو جو مبدا میں سے

گزرتا ہے اور نقاط (۳، ۴) اور (-۶، ۵) کے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔
نقاط (۳، ۴) اور (-۶، ۵) کے ملانے والے خط کی مساوات یہ ہے

(لا - ۳)/(۳ + ۶) = (ما - ۴)/(۴ - ۵) یعنی (لا - ۳) + ۹ (ما - ۴) = ۰

یعنی لا + ۹ ما - ۳۹ = ۰

کوئی خط جو اس پر علی القوائم ہوگا اس کی مساوات یہ ہوگی
۹ لا - ما + ا = ۰ جہاں ا کوئی مستقل ہے۔ خط پر ایک اور شرط عائد کی جا سکتی ہے، اس سے ا کی قیمت معلوم ہو جائیگی۔
خط مبداء میں سے گزرتا ہے اس لیے ا = ۰، اور خط مطلوبہ ہے

۹ لا - ما = ۰

مثال (۴) نقطہ (۳، -۲) میں سے گزرنے والے ان دو خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو خط ۲ لا - ۳ ما - ۶ = ۰ کے ساتھ ۴۵° کے زاویے بنائیں
خط ۲ لا - ۳ ما - ۶ = ۰ کا مس طہ = ۲/۳ ہے، فرض کرو کہ جو خطِ مستقیم اس خط کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اُس کا ڈھال م ہے۔ تب

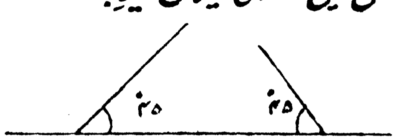
۱ = مس ۴۵° = (م - ۲/۳)/(۱ + م × ۲/۳) یعنی ۱ + ۲/۳ م = م - ۲/۳

یعنی م (۱ - ۲/۳) = ۱ + ۲/۳، م/۳ = ۵/۳ یعنی م = ۵

اگر ۱ = مس ۴۵° = (۲/۳ - م)/(۱ + م × ۲/۳) تو ۱ + ۲/۳ م = ۲/۳ - م

یعنی ۵/۳ م = -۱/۳، پس م = -۱/۵

یہ دونوں قیمتیں ممکن ہیں۔ یعنی میلان زیرِ بحث کے لیے دو سمتیں ہیں۔



پس خطوں کی مساواتیں یہ ہو سکتی ہیں:

ما = ۵ لا + ل

ما = - ۱/۵ لا + ب

خط نقطہ (-۲، ۳) میں سے گزرتے ہیں، اس لیے

۳ = ۵ (-۲) + ل، یعنی ل = ۱۳

اور ۳ = - ۱/۵ (-۲) + ب، یعنی ب = ۳ - ۲/۵ = ۱۳/۵

پس خط ہیں ما = ۵ لا + ۱۳

اور ما = - ۱/۵ لا + ۱۳/۵ یعنی لا + ۵ ما - ۱۳ = ۰

اور یہ ظاہر ہے کہ خط علی القوائم ہیں کیونکہ ڈھالوں کا حاصل ضرب ۵ (- ۱/۵) = -۱
طالب علم خطوں کو مرتسم کر کے جملہ امور کی تصدیق کر لے۔

مثال (۵)۔ اِن خطوں کے جوڑوں کے درمیان زاویے دریافت کرو۔
(ا) ما - ۲ لا + ۳ = ۰ اور ۳ لا + ما + ۵ = ۰ (ب) ۳ لا - ۵ ما + ۱۱ = ۰، ۵ لا + ۳ ما + ۹ = ۰ (ج) ۲√۳ لا - ۲ ما + ۷ = ۰ اور لا - √۳ ما + ۱۱ = ۰
(د) لا + ۲ ما + ۱ = ۰ اور ۲ لا - ۳ ما + ۷ = ۰

جواب (ا) ۴۵° (ب) ۹۰° (ج) π/۶ (د) مس۱ (۵٫۱۲۵) = ۱۲ ۹° تقریباً

مثال (۶) خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو (۱، -۱)، (-۲، -۳)، (۳، -۵) میں سے گزرتے ہیں اور خطوط (ا) ۳ لا - ۴ ما + ۷ = ۰ (ب) ۲ لا + ما + ۳ = ۰ کے متوازی ہیں۔

جواب (ا) ۳ لا - ۴ ما - ۷ = ۰، ۳ لا - ۴ ما - ۶ = ۰، ۳ لا - ۴ ما - ۲۹ = ۰

(ب) ۲ لا + ما - ۱ = ۰، ۲ لا + ما + ۷ = ۰، ۲ لا + ما - ۱ = ۰

مثال (۷) خط نقاط (-۱، +۱)، (-۳، ۲)، (-۱، -۳) میں سے گزرے اور بالترتیب خطوں (ا) لا + ۲ ما + ۱ = ۰ (ب) ۳ لا - ۷ ما + ۱ = ۰ پر علی القوائم ہیں ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) ۲ لا - ما + ۳ = ۰، ۲ لا - ما + ۸ = ۰، ۲ لا - ما - ۱ = ۰

جواب (ب) ، لا + ۳ ما + ۴ = ۰ ، لا + ۳ ما + ۱۵ = ۰ ، لا + ۳ ما + ۱۶ = ۰

۲،۳۔ (ا) دو خطوں کا نقطۂ تقاطع ۔ فرض کرو کہ خطوں کی

مساواتیں

ا$_۱$ لا + ب$_۱$ ما + ج$_۱$ = ۰ اور ا$_۲$ لا + ب$_۲$ ما + ج$_۲$ = ۰ ہیں، نقطۂ تقاطع (لا$_۱$، ما$_۱$) دونوں خطوں پر واقع ہے، یہ دونوں مساواتیں پوری کریگا یعنی

ا$_۱$ لا$_۱$ + ب$_۱$ ما$_۱$ + ج$_۱$ = ۰

ا$_۲$ لا$_۱$ + ب$_۲$ ما$_۱$ + ج$_۲$ = ۰

پس انہیں بطور ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے پر نقطۂ تقاطع کے محدد حاصل ہوتے ہیں ۔ پس

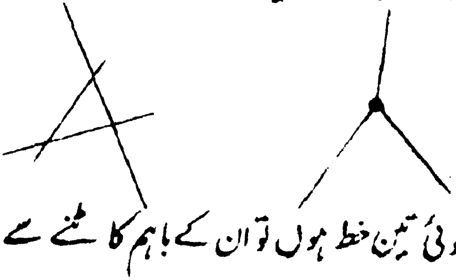
$$\text{لا}_۱ = \frac{\text{ب}_۱\text{ج}_۲ - \text{ب}_۲\text{ج}_۱}{\text{ا}_۱\text{ب}_۲ - \text{ا}_۲\text{ب}_۱} \quad ، \quad \text{ما}_۱ = \frac{\text{ج}_۱\text{ا}_۲ - \text{ج}_۲\text{ا}_۱}{\text{ا}_۱\text{ب}_۲ - \text{ا}_۲\text{ب}_۱}$$

مثال ۔ خطوں ۳ لا − ۲ ما − ۷ = ۰ اور ۵ لا + ۴ ما − ۱۹ = ۰ کے نقطۂ تقاطع کے محدد دریافت کرو

	۴	۵	۳ لا − ۲ ما − ۷ = ۰
پہلی مساوات کو ۵ ، دوسری کو −۳ سے ضرب دینے جانے سے	۲	−۳	۵ لا + ۴ ما − ۱۹ = ۰

− ۲۲ ما + ۲۲ = ۰ ، ما = ۱ ، اسی طرح ۲۲ لا − ۶۶ = ۰ ، لا = ۳ ، نقطۂ تقاطع (۳، ۱) جو دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے، اور یہ ہندسی خطوط اس نقطہ پر کاٹتے ہیں جس کے محدد (۳، ۱) ہیں

(ب) تین خطوں کے ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے کے لیے شرط ۔



ایک مستوی میں اگر کوئی تین خط ہوں تو ان کے باہم کاٹنے سے مثلث بنیگا،

اگر تین خط ایک ہی نقطہ میں سے گزریں تو یہ کوئی عام خط نہیں ہو سکتے یعنی خطوں کے مستقل ا، ب، ج، وغیرہ جن سے خطوں کا محل معین ہوتا ہے ایک دوسرے سے غیر متعلق نہیں ہونگے، ان میں ایک رشتہ ہوگا یعنی ایک شرط ہو گی جسے ہم معلوم کرتے ہیں۔

نقطۂ تقاطع تینوں خطوں کی مساواتیں پوری کریگا :

$$ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 = 0$$
$$ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2 = 0$$
$$ا_3 لا + ب_3 ما + ج_3 = 0$$

آخری دو مساواتوں سے

$$لا = \frac{ب_2 ج_3 - ب_3 ج_2}{ا_2 ب_3 - ا_3 ب_2} ، \quad ما = \frac{ج_2 ا_3 - ج_3 ا_2}{ا_2 ب_3 - ا_3 ب_2}$$

یہ لا، ما کی قیمتیں پہلی مساوات کو پورا کرتی ہیں، ان کو درج کرنے سے

$$ا_1 (ب_2 ج_3 - ب_3 ج_2) + ب_1 (ج_2 ا_3 - ج_3 ا_2) + ج_1 (ا_2 ب_3 - ا_3 ب_2) = 0$$

جو مطلوبہ شرط ہے۔

طالب علم جو مقطعات کے نظریہ سے واقف ہے دیکھیگا کہ اوپر کی تین مساواتیں لا، ما کی ایک ہی قیمتوں کے لیے پوری ہوتی ہیں لا، ما کو ساقط کرنے سے

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} = 0$$

، اس مقطعہ کو پھیلانے سے اوپر کی شرط حاصل ہوتی ہے۔

طالب علم کئی صورتوں سے واقف ہے جن میں تین خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، مثلاً مثلث کے وسطانیے تین خط ہیں جو ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، اسی طرح مثلث کے مُنصّف، راسوں سے مقابل کے اضلاع پر گرائے ہوئے

عمود، وغیرہ سب ایسی مثالیں ہیں جن میں تین خط ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں،
ہر صورت میں تین خطوں کی مساواتوں میں جو مستقل ہیں وہ اوپر کی شرط کو پورا
کرینگے۔

مثال۔ ایک مثلث کے راس (۲، ۳)، (-۴، ۱)، (۳، -۷) ہیں،
اس کے وسطانیوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہ ایک ہی نقطہ
میں سے گزرتے ہیں۔

ایک وسطانیہ نقطہ (۲، ۳) کو نقاط (-۴، ۱) اور (۳، -۷) کے وسطی نقطہ
(-۱/۲، -۳) کے ساتھ ملاتا ہے، اس کی مساوات

(لا - ۲) / (۲ + ۱/۲) = (ما - ۳) / (۳ + ۳)　یعنی　۱۲لا - ۵ما - ۹ = ۰

اسی طرح باقی دو وسطانیے ہیں ۶لا + ۱۳ما + ۱۱ = ۰ اور ۹لا + ۴ما + ۱ = ۰
اگر یہ تینوں ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں تو تینوں مساواتیں

۱	۱۲ لا - ۵ ما - ۹ = ۰
۱	۶ لا + ۱۳ ما + ۱۱ = ۰
-۲	۹ لا + ۴ ما + ۱ = ۰

ایک ساتھ پوری ہونگی۔ اور ان مساواتوں کے مستقلات سے اوپر کی شرط پوری
ہونا چاہیے۔

۱۲ (۱۳×۱ - ۴×۱۱) - ۵ (۱۱×۹ - ۱×۶) - ۹ (۱۳×۹ - ۴×۶)

= ۱۲ × (-۳۱) - ۵ (۹۳) - ۹ (-۹۳) = -۳۷۲ - ۴۶۵ + ۸۳۷

= -۸۳۷ + ۸۳۷ = ۰

یہ شرط پوری ہوتی ہے۔

یا پہلی دو مساواتوں سے لا = ۱/۳، ما = -۱، تیسری مساوات میں درج کرنے سے

۹ (۱/۳) + ۴ (-۱) + ۱ = ۰

یعنی تینوں مساواتیں نقطہ (۱/۳، -۱) کے لیے پوری ہوتی ہیں۔

نوٹ ۔ ان مساواتوں کے دائیں رُکنوں کو بالترتیب ۱، ۱، -۲ سے ضرب دینے سے

۱ (۱۲ لا - ۵ ما - ۹) + ۱ (۶ لا + ۱۳ ما + ۱۱) -۲ (۹ لا + ۴ ما + ۱)

= (۱۲ + ۶ - ۱۸) لا + (-۵ + ۱۳ - ۸) ما - ۹ + ۱۱ - ۲

= ۰ × لا + ۰ × ما + ۰ = ۰

اور یہ لا، ما کی تمام قیمتوں کے لیے صفر ہوگا ۔ ایک نقطہ میں سے گزرنے والے تین خطوں کے رُکنوں کو مناسب مستقل مقداروں سے ضرب دے کر، ایک جملہ مرتب کرنا ممکن ہے جو متماثلاً صفر ہوگا ۔

۳۱،۲ ۔ (ا) ایسے خط کی مساوات جو دو خطوط کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے ۔

فرض کرو کہ دو معلومہ خط ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰ اور ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ ہیں ۔

ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ + لہ (ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲) = ۰ جہاں لہ کوئی اختیاری مستقل ہے، ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے کیونکہ یہ لا، ما میں درجۂ اول کی مساوات ہے ۔ نیز چونکہ خطوں ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰ اور ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ کا نقطۂ تقاطع اِن دو خطوں کی مساواتوں کو پورا کرتا ہے، اس لیے اس کے محدد مساوات

ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ + لہ (ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲) = ۰ (ا)

کو بھی پورا کرتے ہیں، کیونکہ ان نقطوں کے درج کرنے سے اس مساوات کے رُکن الگ الگ صفر ہوتے ہیں ۔ پس (ا) ایسے خط کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے ۔

اب نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے بے شمار خط ہو سکتے ہیں ۔ مستقل لہ کو مناسب قیمت دینے سے، خط (ا) سے کوئی دوسری شرط پوری کرائی جاسکتی ہے ۔

مثال (۱) اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو ۳ لا + ۵ ما + ۲ = ۰ اور ۲ لا - ۳ ما + ۴ = ۰ کے نقطۂ تقاطع کو مبدا سے ملاتا ہے ۔

۳ لا + ۵ ما + ۲ + لہ (۲ لا - ۳ ما + ۴) = ۰

ایسے کسی خط کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے جہاں لہ کوئی مستقل ہے - اب یہ خط مبداء میں سے گزرتا ہے، اس لیے مبدار کے محدد (۰، ۰) اس میں درج کرنے سے

$$\text{۲ + ۴ لہ = ۰،}\quad \text{لہ} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

پس مطلوبہ خط ہے $\text{۳ لا + ۵ ما + ۲} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ (۲ لا - ۳ ما + ۴) = ۰}$

یعنی ۴ لا + ۱۳ ما = ۰

واضح ہو کہ پہلے خطوں کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کیے جا سکتے ہیں اور اس نقطہ کو مبدار سے ملانے والے خط کی مساوات بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے -

مثلاً نقطۂ تقاطع ہے $\left(-\frac{\text{۱۳}}{\text{۸}}\text{، }\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)$ اور اس نقطہ کو مبدار سے ملانے والے خط کی مساوات

ہے $$\frac{\text{لا}}{-\frac{\text{۱۳}}{\text{۸}}} = \frac{\text{ما}}{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$$ یعنی وہی ۴ لا + ۱۳ ما = ۰

مثال (۳) خطوط ۲ لا - ۷ ما + ۳ = ۰، ۳ لا + ۲ ما + ۴ = ۰ کے نقطۂ تقاطع میں سے ایک خط گزرتا ہے اور یہ (ا) محور لا کے متوازی ہے (ب) محور ما کے متوازی ہے (ج) مبداء میں سے گزرتا ہے - ہر صورت میں اس کی مساوات دریافت کرو -

جواب (ا) ۲۵ ما - ۱ = ۰ (ب) ۲۵ لا + ۳۴ = ۰ (ج) لا + ۳۴ ما = ۰

(۲) گذشتہ دفعہ میں تین خطوں کے ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے کے لیے شرط (ا) دریافت کی گئی تھی جو ایک مقطعہ کی شکل میں بھی لکھی جا سکتی ہے - اب ہم دیکھینگے کہ یہی شرط ایک اور طرح بھی بیان ہو سکتی ہے - تین خط

$$\text{ا}_1\text{ لا} + \text{ب}_1\text{ ما} + \text{ج}_1 = ۰،\quad \text{ا}_2\text{ لا} + \text{ب}_2\text{ ما} + \text{ج}_2 = ۰،\quad \text{ا}_3\text{ لا} + \text{ب}_3\text{ ما} + \text{ج}_3 = ۰$$

ایک ہی نقطہ میں سے گزرینگے اگر ذیل کے جملہ میں، مستقلات ل، م، ن کے لیے

ایسی مناسب قیمتیں معلوم ہو سکیں کہ جملہ

ل (ا$_1$ لا + ب$_1$ ما + ج$_1$) + م (ا$_2$ لا + ب$_2$ ما + ج$_2$) + ن (ا$_3$ لا + ب$_3$ ما + ج$_3$) ۔۔ (ص)

متماثلاً صفر کے مساوی ہو [یعنی لا، ما کی سب قیمتوں کے لیے صفر ہو]

اگر پہلے دو خط لاَ، ماَ میں سے گزریں تو

ا$_1$ لاَ + ب$_1$ ماَ + ج$_1$ = ۰ اور ا$_2$ لاَ + ب$_2$ ماَ + ج$_2$ = ۰

اب چونکہ جملہ (ص) لا، ما کی سب قیمتوں کے لیے صفر ہوتا ہے اس لیے

یہ لاَ، ماَ کے لیے بھی صفر ہوگا، اس لیے ا$_3$ لاَ + ب$_3$ ماَ + ج$_3$ = ۰

یعنی لاَ، ماَ خط ا$_3$ لا + ب$_3$ ما + ج$_3$ = ۰ پر بھی واقع ہے۔

پس اگر ل، م، ن کی مناسب قیمتیں معلوم ہو سکیں جن کے لیے (ص) متماثلاً صفر ہو جائے تو تینوں خط ہم نقطہ ہونگے۔

یہ شرط فی الحقیقت وہی ہے جو پہلے معلوم ہوئی، کیونکہ متماثلاً صفر ہونے کے لیے ضروری ہے کہ لا کا سر، ما کا سر اور مستقل رقم صفر ہوں یعنی

ا$_1$ ل + ا$_2$ م + ا$_3$ ن = ۰

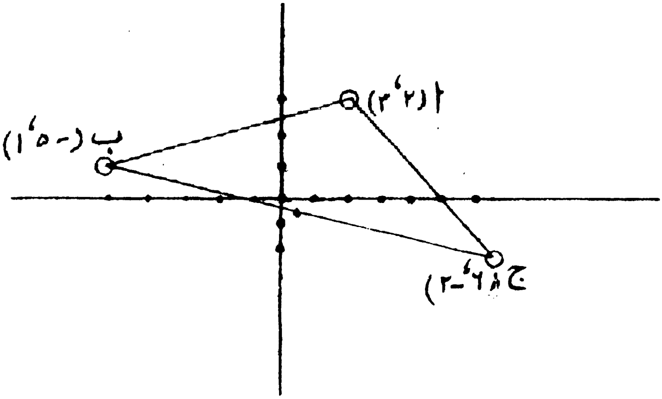
ب$_1$ ل + ب$_2$ م + ب$_3$ ن = ۰

ج$_1$ ل + ج$_2$ م + ج$_3$ ن = ۰

ل، م، ن کو ان تین مساواتوں سے ساقط کرنے سے وہ مقطعہ حاصل ہوتا ہے جو پہلے ملا۔ یا پہلی دو مساواتوں کو ل، م، ن کے لیے حل کرکے تیسری مساوات میں درج کریں تو گذشتہ دفعہ کی شرط (ک) حاصل ہوگی۔

مثال - ایک مثلث کے اضلاع ۳ لا + ۱۱ ما + ۴ = ۰، ۵ لا + ۴ ما - ۲۲ = ۰، ۲ لا - ۷ ما + ۱۷ = ۰ ہیں؛ اس کے اضلاع کے وسطی نقاط سے اضلاع پر عمود کھینچے گئے ہیں؛ ثابت کرو کہ یہ تین عمود ایک ہی

نقطہ میں سے گزرتے ہیں ۔



اضلاع کے تقاطع سے نقاطِ راس حاصل ہوتے ہیں ا (۲، ۳)، ب (-۵، ۱)، ج (۶، -۲)

ب ج کا وسطی نقطہ ہے $(\frac{۱}{۲}، -\frac{۱}{۲})$

ب ج کے وسطی نقطے $(\frac{۱}{۲}، -\frac{۱}{۲})$ میں سے عمود خط ۳ لا + ۱۱ ما + ۴ = ۰ پر ہے

$$\frac{\text{لا} - \frac{۱}{۲}}{۳} = \frac{\text{ما} + \frac{۱}{۲}}{۱۱}$$

یعنی ۱۱ لا - ۳ ما - ۷ = ۰

ج ا کے وسطی نقطہ $(۴، \frac{۱}{۲})$ میں سے خط ۵ لا + ۴ ما - ۲۲ = ۰ پر عمود

$$\frac{\text{لا} - ۴}{۵} = \frac{\text{ما} - \frac{۱}{۲}}{۴}$$ یعنی ۸ لا - ۱۰ ما - ۲۷ = ۰

ا ب کے نقطہ وسطی $(-\frac{۳}{۲}، ۲)$ میں سے خط ۲ لا - ۷ ما + ۱۷ = ۰ پر عمود ہے

$$\frac{\text{لا} + \frac{۳}{۲}}{۲} = \frac{\text{ما} - ۲}{-۷}$$ یعنی ۱۴ لا + ۴ ما + ۱۳ = ۰

اب جملہ (ص) ل (۱۱ لا - ۳ ما - ۷) + م (۸ لا - ۱۰ ما - ۲۷) + ن (۱۴ لا + ۴ ما + ۱۳)
میں اگر ل، م، ن مستقلات -۲، ۱، ۱ کے متناسب لیے جائیں تو یہ جملہ

لا کی تمام قیمتوں کے لیے صفر ہوتا ہے کیونکہ لا، ما کے سر اور مستقل رقم الگ الگ صفر ہو جاتے ہیں ۔ پس یہ تینوں خط یعنی مثلث کے وسطی نقاط سے اضلاع کے عمود ایک نقطہ میں ملتے ہیں ۔

(۳) اس کے لیے شرط بہ آسانی معلوم ہو سکتی ہے کہ تین نقطے $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3, \text{ما}_3)$ ایک ہی خط پر واقع ہوں ۔

فرض کرو کہ یہ تینوں نقطے خط $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ پر واقع ہوتے ہیں

تب

$$\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = 0$$
$$\text{ا}\,\text{لا}_2 + \text{ب}\,\text{ما}_2 + \text{ج} = 0$$
$$\text{ا}\,\text{لا}_3 + \text{ب}\,\text{ما}_3 + \text{ج} = 0$$

پہلی دو مساواتوں سے $\dfrac{\text{ا}}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2} = \dfrac{\text{ب}}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \dfrac{\text{ج}}{\text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1}$

تیسری مساوات میں درج کرنے سے

$$\text{لا}_3(\text{ما}_1 - \text{ما}_2) + \text{ما}_3(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) + \text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1 = 0$$

یعنی $\text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1 + \text{لا}_2\text{ما}_3 - \text{لا}_3\text{ما}_2 + \text{لا}_3\text{ما}_1 - \text{لا}_1\text{ما}_3 = 0$ ...... (ط)

یہ شرط ہے کہ تین نقطے ہم خط ہوں ۔

اوپر کی تین مساواتوں سے ا، ب، ج ساقط کر کے نتیجہ مقطعہ کی شکل میں

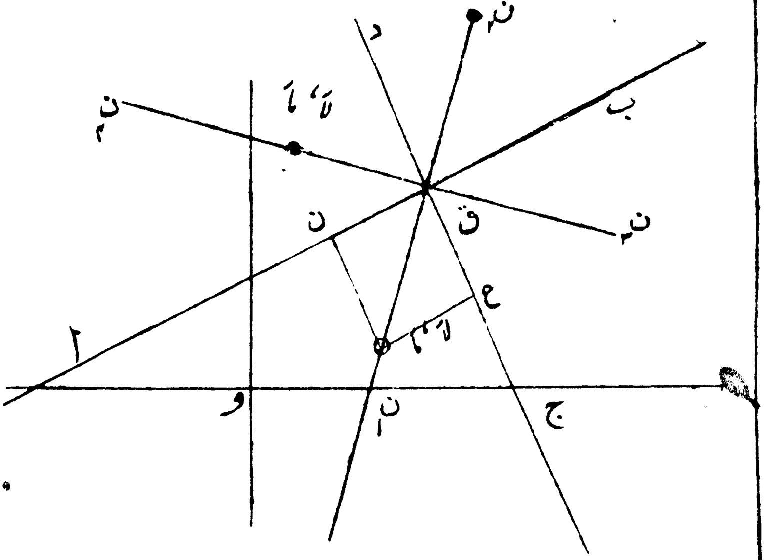
لکھا جا سکتا ہے $\begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ، اس مساوات کا ہندسی مفہوم یہ ہے

کہ تین نقطے اگر ہم خط ہیں تو ان سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ صفر ہے ۔

۲۴ ۔ دو خطوں کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساواتیں دریافت کرنا ۔

(ا) خطوں کی مساواتیں $\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ}_1 + \text{ما}\,\text{جب}\,\text{عہ}_1 - \text{ع}_1 = 0$ اور

لاجم عہ$_2$ + ماجب عہ$_2$ - ع$_2$ = ہیں' ان کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساواتیں مطلوب ہیں۔



اب اور ج د دیے ہوئے خط ہیں' اور ن ن$_2$' ن$_2$ ن$_2$ منصف ہیں۔

اگر ان منصفوں پر کہیں نقطہ (لَ، مَ) لیا جائے اور اس سے خطوط پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کے طول مساوی ہونگے' عمودوں کے طول مساوات کی عمودی شکل میں محض محدد درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں' پس

لَاجم عہ$_1$ + مَاجب عہ$_1$ - ع$_1$ = مثبت یا منفی دوسرے خط پر کا عمود

= ± (لَاجم عہ$_2$ + مَاجب عہ$_2$ - ع$_2$)

یہ نقطہ (لَ، مَ) دونوں منصفوں پر کہیں واقع ہو سکتا ہے' زبر نکال دینے سے منصفوں کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

لاجم عہ$_1$ + ماجب عہ$_1$ - ع$_1$ = ± (لاجم عہ$_2$ + ماجب عہ$_2$ - ع$_2$) ..... (س)

واضح ہو کہ یہ منصّف ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں کیونکہ

(جم عه₁ - جم عه₂) (جم عه₁ + جم عه₂) + (جب عه₁ - جب عه₂) (جب عه₁ + جب عه₂)

= جم² عه₁ - جم² عه₂ + جب² عه₁ - جب² عه₂ = ۱ - ۱ = ۰

اب (س) سے جو دو منصّف تعبیر ہوتے ہیں ان میں تمیز کرنا چاہیے کہ ان میں سے ایک مساوات کس منصّف کو تعبیر کرتی ہے اور دوسری کس کو -

خط اب اور ج د مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں، ایک حصہ ج ق ا میں مبداء واقع ہے - دو منصّفوں میں سے ایک ن ن₁ اُس حصّہ میں سے گزرتا ہے جس میں مبداء واقع ہے - اس منصّف پر کا نقطہ (لَا، مَا) دونوں خطوں کے اُسی جانب واقع ہے جس جانب مبداء ہے - اب مبداء سے خطوں پر عمود ہیں ع₁ اور ع₂ جو ان جملوں

-(لا جم عه₁ + ما جب عه₁ - ع₁) اور -(لا جم عه₂ + ما جم عه₂ - ع₂)

میں مبداء کے محدد درج کرنے سے ملینگے -

پس ن، ن₁ پر کے نقطہ (لَا، مَا) سے عمود انہی جملوں میں محدد درج کرنے سے حاصل ہونگے - پس مبداء والے حصّہ میں سے گزرنے والے منصّف کی مساوات

لا جم عه₁ + ما جب عه₁ - ع₁ = + (لا جم عه₂ + ما جب عه₂ - ع₂)

اور دوسرے منصّف کی مساوات ہے

لا جم عه₁ + ما جب عه₁ - ع₁ = - (لا جم عه₂ + ما جب عه₂ - ع₂)

(ب) خطوں کی مساواتیں ا₁لا + ب₁ ما + ج₁ = ۰ اور ا₂لا + ب₂ ما + ج₂ = ۰ ہیں، ان کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساواتیں مطلوب ہیں - (محور علی القوائم) -

خطوں کو عمودی شکل میں لکھ کر اوپر کے استدلال کے بموجب منصّفوں کی

مساواتیں ہیں:

(ا₁لا + ب₁ما + ج₁) / √(ا₁² + ب₁²) = ± (ا₂لا + ب₂ما + ج₂) / √(ا₂² + ب₂²) (ق)

جس علامت کو لینے سے دونوں جانب مستقل رقموں کی علامات وہی ہو جائیں اس کو اختیار کرنے سے، وہ مُنصّف حاصل ہوگا جو مبدار والے رُبع میں سے گزرتا ہے۔

مثال (۱) ۴لا + ۳ما + ۲ = ۰ اور ۵لا - ۱۲ما + ۱۳ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے مُنصّفوں کی مساواتیں حاصل کرو اور بتاؤ کہ کونسا مُنصّف مبدار والے حصّہ میں سے گزرتا ہے۔

مُنصّف ہیں (۴لا + ۳ما + ۲) / ۵ = ± (۵لا - ۱۲ما + ۱۳) / ۱۳

یا ۱۳ (۴لا + ۳ما + ۲) = ± ۵ (۵لا - ۱۲ما + ۱۳)

مبدار والے حصہ میں سے گزرنے والا منصّف ہے

۱۳ (۴لا + ۳ما + ۲) = + ۵ (۵لا - ۱۲ما + ۱۳)

یعنی ۲۷لا + ۹۹ما - ۳۹ = ۰

دوسرا مُنصّف ۱۳ (۴لا + ۳ما + ۲) = - ۵ (۵لا - ۱۲ما + ۱۳) = ۰

یا ۷۷لا - ۲۱ما + ۹۱ = ۰

یہ دونوں علی القوائم ہیں ۲۷ × ۷۷ + ۹۹ × (-۲۱) = ۲۰۷۹ - ۲۰۷۹ = ۰

مشق ۸

(۱) ذیل کی صورتوں میں خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو:-

دو خطوں ۴لا - ۳ما + ۱۲ = ۰ اور لا + ما - ۱۰ = ۰ کے نقطۂ تقاطع میں سے خط گزرتا ہے اور (ا) محور لا کے متوازی ہے (ب) محور ما کے متوازی ہے

(ج) مبداء میں سے گزرتا ہے (د) نقطہ (۳، ۱) میں سے گزرتا ہے
(ع) خط ۲ لا + ۳ ما + ۱۱ = ۰ کے متوازی ہے (ف) خط ۲ لا + ۴ ما + ۷ = ۰
پر علی القوائم ہے۔

جواب۔ (ا) ما = ۵۲/۷ (ب) لا = ۱۶/۷ (ج) ۲۶ لا - ۱۹ ما = ۰
(د) ۳ لا - ۱۰ ما - ۸۲ = ۰ (ع) ۱۴ لا + ۲۱ ما - ۱۸۰ = ۰
(ف) ۱۴ لا - ۷ ما + ۱۶ = ۰

(۲) تین خطوط لا + ۸ ما + ۱۱ = ۰، ۵ لا + ما - ۲۳ = ۰، ۴ لا - ۷ ما + ۵ = ۰ سے جو مثلث بنتا ہے اس کے (ا) راسوں کے محدّد معلوم کرو (ب) مثلث کے زاویے معلوم کرو (ج) مثلث کے راسوں میں سے مقابل کے اضلاع کے متوازی خطوں کی مساواتیں دریافت کرو۔ (د) مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر جو عمود کھنچ سکتے ہیں اُن کی مساواتیں حاصل کرو۔ اور ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں (ع) مثلث کے منصفوں کی مساواتیں حاصل کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

جواب۔ (ا) محدّد ہیں (۴، ۳)، (-۳، -۱)، (۵، -۲)
" (ب) ۷۱° ۳۴'، ۳۶° ۵۲'، ۷۱° ۳۴' تقریباً
" (ج) لا + ۸ ما - ۲۸ = ۰، ۵ لا + ما + ۱۶ = ۰، ۴ لا - ۷ ما - ۳۴ = ۰
" (د) راسوں سے عمودوں کی مساواتیں ۸ لا - ما - ۲۹ = ۰
لا - ۵ ما - ۲ = ۰، ۷ لا + ۴ ما - ۲۷ = ۰

(۸ لا - ما - ۲۹) - (لا - ۵ ما - ۲) - (۷ لا + ۴ ما - ۲۷) ≡ ۰

" (ع) مثلث کے اندر مبداء ہے، مبداء والے حصہ میں سے گزرنے والے منصف ہیں

(۵ لا + ما - ۲۳) / √۲۶ = (۴ لا - ۷ ما + ۵) / √۶۵ ، (۴ لا - ۷ ما + ۵) / √۶۵ = (لا + ۸ ما + ۱۱) / √۶۵ (sign)

اور (۵ لا + ما - ۲۳) / √۲۶ = (لا + ۸ ما + ۱۱) / √۶۵ ، سب کو ایک طرف

سے جا کر جمع کرنے سے متماثلاً صفر ۔

(۳) ایک مثلث کے راس (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ہیں (ا) اس کے زاویوں کی قیمتیں دریافت کرو (ب) اس کے وسطانیوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں (ج) اس کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمودوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں (د) اس کے منصفوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں ۔

(۴) ذیل کی صورتوں میں خطوں کی مساواتیں لکھو (۱) (۳، -۱) میں سے خط گزرتا ہے اور ۳ لا - ۷ ما - ۱۱ = ۰ پر علی القوائم ہے ۔ (۲) (۰، -۱) میں سے خط گزرتا ہے اور ۵ لا + ۲ ما + ۷ = ۰ پر علی القوائم ہے ۔ (۳) خط (-۲، -۳) میں سے گزرتا ہے اور ۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰ پر علی القوائم ہے ۔

جواب (ا) ۷ لا + ۳ ما - ۱۸ = ۰ ۔ (ب) ۲ لا - ۵ ما - ۵ = ۰ ۔
(ج) ۳ لا - ۲ ما = ۰ ۔

(۵) مبدا سے خطوں ۲ لا - ۳ ما + ۱ = ۰ اور ۳ لا + ۴ ما - ۵ = ۰ پر عمود کھینچے گئے ہیں، جہاں پر یہ خطوں سے ملتے ہیں ان نقطوں کے محدد دریافت کرو اور ان نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات دریافت کرو ۔

جواب (-۲/۱۳، ۳/۱۳)، (۳/۵، ۴/۵)، ۴۸۱ لا - ۶۳۷ ما + ۲۲۱ = ۰

(۶) ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو بالترتیب نقاط (۱، ۲) اور (-۳، -۲) میں سے گزرتے ہیں اور خط ۳ لا + ۴ ما - ۷ = ۰ کے متوازی ہیں، ان خطوں کے درمیان عمودی فاصلہ دریافت کرو ۔

جواب ۳ لا + ۴ ما - ۱۱ = ۰، ۳ لا + ۴ ما + ۱۷ = ۰، ۲۸/۵

(۷) اس مستطیل کے قطروں کی مساواتیں معلوم کرو جو ذیل کے خطوط سے بنتا ہے لا + ۲ ما - ۸ = ۰، لا + ۲ ما - ۱۴ = ۰، ۲ لا - ما + ۳ = ۰، ۲ لا - ما - ۵ = ۰ ۔

اور ان کا نقطۂ تقاطع دریافت کرو۔

(جواب) قطروں کی مساواتیں ۲لا - ۱۱ما + ۱۴ = ۰، ۱۰لا + ۵ما - ۷۴ = ۰

اور ان کا نقطۂ تقاطع $\left(\frac{۱۳}{۵}، \frac{۲۱}{۵}\right)$

۵،۲۵۔ لا، ما میں متجانس مساوات۔ ہم جانتے ہیں کہ ما - م لا = ۰، ۲لا + ۳ما = ۰، ا لا + ب ما = ۰، مبداء میں سے گزرنے والے خطوں کی مساواتیں ہیں جن کے ڈھال بالترتیب م، $-\frac{۲}{۳}$، $-\frac{ا}{ب}$ ہیں۔ ایسی دو یا زیادہ مساواتوں کے رُکنوں کو باہم ضرب دینے سے متجانس مساواتیں پیدا ہوتی ہیں، مثلاً

$$(ما - م_۱ لا)(ما - م_۲ لا) = ما^۲ - (م_۱ + م_۲) لا ما + م_۱ م_۲ لا^۲ = ۰$$

$$(۲لا + ۳ما)(۳لا - ما)(لا + ۴ما) = ۶لا^۳ + ۳۱لا^۲ ما + ۲۵ لا ما^۲ - ۱۲ما^۳ = ۰$$

اسی طرح مبداء میں سے گزرنے والے ن خطوں کی مساواتوں کے رُکنوں کو ضرب دینے سے لا، ما میں ن ویں درجہ کی متجانس مساوات پیدا ہوگی۔ برعکس اس کے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ لا، ما میں دوسرے، تیسرے، .... ن ویں درجہ کی متجانس مساوات بالترتیب مبداء میں سے گزرنے والے دو، تین .... ن خطوں کو تعبیر کریگی اور ان خطوں کی مساواتیں، مساواتوں کے اجزائے ضربی کو الگ الگ صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہونگی۔ مثلاً دوسرے رُتبہ کی مساوات ہے

$$ا لا^۲ + ۲ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ \quad .... (ا)$$

لا² پر تقسیم کرنے اور ب کو مشترک نکالنے سے $ب\left\{\left(\frac{ما}{لا}\right)^۲ + \frac{۲ھ}{ب}\left(\frac{ما}{لا}\right) + \frac{ا}{ب}\right\} = ۰$

جس سے
$$\frac{ما}{لا} = \frac{-\frac{۲ھ}{ب} \pm \sqrt{\frac{۴ھ^۲}{ب^۲} - \frac{۴ا}{ب}}}{۲} = \frac{-ھ \pm \sqrt{ھ^۲ - اب}}{ب}$$

یعنی
$$ما - \frac{-ھ + \sqrt{ھ^۲ - اب}}{ب} لا = ۰$$

اور
$$ما - \frac{-ھ - \sqrt{ھ^۲ - اب}}{ب} لا = ۰$$

جو مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوں کی مساواتیں ہیں، متجانس مساوات درجۂ دوم (ا) کا طریق، یہ خطوط مستقیم ہیں یعنی مساوات (ا) کے تمام حل،

(لا، ما میں) مرتسم ہونے پر ان خطوں پر واقع ہوتے ہیں اور ان خطوں پر کے سب نقطوں کے محدّد مساوات (ا) کو پورا کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ یہ خط حقیقی ہونگے اگر $ھ^{۲} > ا ب$، منطبق ہونگے اگر $ھ^{۲} = ا ب$ اور خیالی ہونگے اگر $ھ^{۲} < ا ب$۔

یاد رہے کہ ھ، لا ما والی رقم کا سر نہیں ہے بلکہ نصف سر ہے۔

مثال (۱) (ا) مساوات $۶ لا^{۲} - لا ما - ۳۵ ما^{۲} = ۰$

یعنی $(۳ لا + ۷ ما)(۲ لا - ۵ ما) = ۰$ دو خطوطِ مستقیم $۳ لا + ۷ ما = ۰$ اور $۲ لا - ۵ ما = ۰$ کو تعبیر کرتی ہے۔ جو حقیقی اور مختلف ہیں۔

(ب) $۲ لا^{۲} + ۶ لا ما + ۳ ما^{۲} = ۰$

$$۳ \left(ما^{۲} + ۲ لا ما + \frac{۲}{۳} لا^{۲}\right) = ۰ ،\quad \frac{ما}{لا} = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ - \frac{۸}{۳}}}{۲} = \frac{-۲ \pm \sqrt{\frac{۴}{۳}}}{۲} = -۱ \pm \sqrt{\frac{۱}{۳}}$$

$$پس\ ۳ \left(ما^{۲} + ۲ لا ما + \frac{۲}{۳} لا^{۲}\right) = ۳ \left[ما - \left(-۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) لا\right]\left[ما - \left(-۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) لا\right] = ۰$$

جن سے خطوں کی الگ الگ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(ج) $۳ لا^{۲} + ۲ لا ما + ۵ ما^{۲} = ۰$

$$یا\ ۵ \left(ما^{۲} + \frac{۲}{۵} لا ما + \frac{۳}{۵} لا^{۲}\right) = ۰$$

$$\frac{ما}{لا} = \frac{-\frac{۲}{۵} \pm \sqrt{\frac{۴}{۲۵} - \frac{۱۲}{۵}}}{۲} = \frac{-\frac{۲}{۵} \pm \sqrt{-\frac{۵۶}{۲۵}}}{۲} = \frac{-۱ \pm \sqrt{-۱۴}}{۵}$$

$$پس\ ۵ \left(ما^{۲} + \frac{۲}{۵} لا ما + \frac{۳}{۵} لا^{۲}\right) = ۵ \left(ما - \frac{-۱ + \sqrt{-۱۴}}{۵} لا\right)\left(ما - \frac{-۱ - \sqrt{-۱۴}}{۵} لا\right)$$

خطوں کی الگ الگ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں خط خیالی ہیں۔

مثال (۲) ذیل کی مساواتوں کو خطی مساواتوں میں تحلیل کرو:-

(ا) $۲ لا^{۲} + ۷ لا ما - ۱۵ ما^{۲} = ۰$

(ب) $لا^{۲} - ۵ لا ما + ۲ ما^{۲} = ۰$

(ج) $۲ لا^{۲} - ۳ لا ما + ۵ ما^{۲} = ۰$

جواب (ا) $(\text{۲لا} - \text{۳ما})(\text{لا} + \text{۵ما}) = ۰$

(ب) $\text{۲}\left(\text{ما} - \frac{\text{۵} + \sqrt{\text{۱۷}}}{\text{۴}}\,\text{لا}\right)\left(\text{ما} - \frac{\text{۵} - \sqrt{\text{۱۷}}}{\text{۴}}\,\text{لا}\right) = ۰$

(ج) $\text{۵}\left(\text{ما} - \frac{\text{۳} + \sqrt{-\text{۳۱}}}{\text{۱۰}}\,\text{لا}\right)\left(\text{ما} - \frac{\text{۳} - \sqrt{-\text{۳۱}}}{\text{۱۰}}\,\text{لا}\right) = ۰$

۲،۱۵۔ مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{۲ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = ۰$ سے جو دو مبداء میں سے گزرنے والے خط تعبیر ہوتے ہیں اُن کے درمیان زاویہ دریافت کرو۔ محور علی القوائم ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات سے جو خط تعبیر ہوتے ہیں وہ $\text{ما} - \text{م}_1\text{لا} = ۰$، $\text{ما} - \text{م}_2\text{لا} = ۰$ ہیں۔

تب $\text{ب}\left(\text{ما}^2 + \frac{\text{۲ھ}}{\text{ب}}\,\text{لا}\,\text{ما} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{لا}^2\right) = \text{ب}(\text{ما} - \text{م}_1\text{لا})(\text{ما} - \text{م}_2\text{لا})$

جس سے $\text{م}_1 + \text{م}_2 = -\frac{\text{۲ھ}}{\text{ب}}$ ، $\text{م}_1\text{م}_2 = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

$$\text{م}_1 - \text{م}_2 = \pm\sqrt{\frac{\text{۴ھ}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{۴ا}}{\text{ب}}} = \pm\frac{\text{۲}\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{اب}}}{\text{ب}}$$

اگر خطوں کے درمیان زاویہ فہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{\text{۱} + \text{م}_1\text{م}_2} = \frac{\pm\,\text{۲}\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{اب}}\,/\,\text{ب}}{\text{۱} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}}} = \frac{\pm\,\text{۲}\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{اب}}}{\text{ا} + \text{ب}}$$

$$\text{مس فہ} = \frac{\pm\,\text{۲}\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{اب}}}{\text{ا} + \text{ب}} \qquad \ldots\ldots \quad (\text{ا})$$

دوہری علامت اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ خطوں کے درمیان زاویہ فہ یا اس کا تکملہ لیا جا سکتا ہے۔

خط منطبق ہونگے اگر $\text{ھ}^2 = \text{اب}$ یعنی جملہ $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{۲ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2$ مربع کامل ہو۔

خط علی القوائم ہونگے اگر ا + ب = ۰

مثال ۔ لا۲ - ۳ لا ما + ما۲ = ۰ مبداء میں سے گزرنے والے دو خط ہیں جن کے درمیان زاویہ فہ اس طرح ملتا ہے

مس فہ = ۲ √(ھ۲ - ا ب) / (ا + ب) = ۲ √((-۳/۲)۲ - ۱) / (۱ + ۱) = √۵ / ۲

= ۲٫۲۳۶ / ۲ = ۱٫۱۱۸ ، فہ = ۴۸° ۱۲' تقریباً

لا۲ - ۳ لا ما - ما۲ = ۰ خط علی القوائم ہیں ۔

لا۲ + ۲ لا ما + ما۲ = ۰ ھ۲ - ا ب = ۱ - ۱ = ۰ ، خط منطبق ہیں ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن مربع کامل ہے (لا + ما)۲ = ۰ لا + ما = ۰ دو مرتبہ

مثال (۲) ۔ (۱) خطوط ۲ لا۲ - ۳ لا ما + ما۲ = ۰ کے درمیان زاویہ دریافت کرو ۔

(۲) 〃 لا۲ + ۳ لا ما + ۲ ما۲ = ۰ 〃 〃 〃

(۳) 〃 لا۲ + ۵ لا ما - ۶ ما۲ = ۰ 〃 〃 〃

(۴) 〃 لا۲ - لا ما - ۶ ما۲ = ۰ 〃 〃 〃

جواب (۱) مس^-۱ ۱/۳ (۲) مس^-۱ ۱/۳ (۳) مس^-۱ ۷/۵ (۴) ۴۵°

۲٫۵۴ ۔ خطوں کے جوڑے ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساوات دریافت کرو۔ محور علی القوائم ہیں ۔

دی ہوئی مساوات ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ = ۰ ، مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوں کو تعبیر کرتی ہے ، فرض کرو کہ یہ خط ما - م۱ لا = ۰ اور ما - م۲ لا = ۰ ہیں ۔ ان خطوں کے درمیان کے زاویوں کے دو منصف ہونگے ، کسی منصف پر کے کسی نقطہ (لا ، ما) سے اگر خطوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان کے طول مساوی ہونگے پس

$$\frac{\text{ما} - \text{م}_1\,\text{لا}}{\sqrt{1+\text{م}_1^2}} = \pm\,\frac{\text{ما} - \text{م}_2\,\text{لا}}{\sqrt{1+\text{م}_2^2}}$$

جہاں دو علامتوں کے مماثل دو منقیف ہیں۔ مشترک مساوات حاصل کرنے کے لیے دونوں مساواتوں کو باہم ضرب دینے سے

$$(۱+م_۲^۲)(ما-م_۱لا)^۲-(۱+م_۱^۲)(ما-م_۲لا)^۲=۰$$

جس سے $لا^۲\{م_۱^۲(۱+م_۲^۲)-م_۲^۲(۱+م_۱^۲)\}-۲لاما\{م_۱(۱+م_۲^۲)-م_۲(۱+م_۱^۲)\}$

$$+ما^۲\{(۱+م_۲^۲)-(۱+م_۱^۲)\}=۰$$

یا $لا^۲(م_۱^۲-م_۲^۲)-۲لاما\{(م_۱-م_۲)(۱-م_۱م_۲)\}+ما^۲(م_۲^۲-م_۱^۲)=۰$

یا $(لا^۲-ما^۲)(م_۱+م_۲)=۲لاما(۱-م_۱م_۲)$ (۱) کیونکہ $م_۱-م_۲\neq۰$

اب $ما^۲+\frac{۲ھ}{ب}لاما+\frac{ا}{ب}لا^۲=(ما-م_۱لا)(ما-م_۲لا)$

جس سے $م_۱+م_۲=-\frac{۲ھ}{ب}$، $م_۱م_۲=\frac{ا}{ب}$، پس یہ قیمتیں درج کرنے سے منصِّفوں کی مساوات ہو جاتی ہے:

$$(لا^۲-ما^۲)\left(-\frac{۲ھ}{ب}\right)=۲لاما\left(۱-\frac{ا}{ب}\right)$$

یعنی $(لا^۲-ما^۲)ھ=لاما(ا-ب)$

پس منصّفوں کی مساوات ہے

$$\frac{لا^۲-ما^۲}{ا-ب}=\frac{لاما}{ھ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ا)$$

مثال (۱) خطوط $۵لا^۲-۲لاما+۳ما^۲=۰$ کے درمیان کے زاویوں کے منصِّفوں کی مساوات دریافت کرو، اور محصلہ مساوات سے ثابت کرو کہ یہ علی القوائم ہیں۔

منصِّفوں کی مساوات ہے $\frac{لا^۲-ما^۲}{۵-۳}=\frac{لاما}{-۱}$

یعنی لا^{2} + ۲ لا ما − ما^{2} = ۰

ظاہر ہے کہ ا + ب = ۱ − ۱ = ۰ یعنی منصّف علی القوائم ہیں۔

مثال (۲) ذیل کے خطوں کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساواتیں لکھو اور دکھاؤ کہ وہ علی القوائم ہیں۔

(ا) ۷ لا^{2} − ۲ لا ما + ۵ ما^{2} = ۰

(ب) ۳ لا^{2} + لا ما − ۲ ما^{2} = ۰

(ج) ۱۱ لا^{2} + ۵ لا ما + ۷ ما^{2} = ۰

(د) ۲ لا^{2} − ۳ لا ما + ۳ ما^{2} = ۰

جواب (ا) لا^{2} − ۲ لا ما − ما^{2} = ۰

(ب) لا^{2} − ۱۰ لا ما − ما^{2} = ۰

(ج) ۵ لا^{2} − ۸ لا ما − ۵ ما^{2} = ۰

(د) ۳ لا^{2} − ۲ لا ما − ۳ ما^{2} = ۰

۲۶ - جن نقطوں پر خط ل لا + م ما + ن = ۰، منحنی

ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کو کاٹتا ہے

اُن کو مبدا سے ملانے والے خطوں کی مساوات دریافت کرو۔

مبدا میں سے گزرنے والے خطوں کی مساوات متجانس ہوگی اور نقاطِ تقاطع کے لیے دونوں مساواتیں ایک ساتھ پوری ہونا چاہییں، اس لیے خطِ مستقیم کی مساوات کی مدد سے منحنی کی مساوات کو ہم متجانس بناتے ہیں

ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + (۲ گ لا + ۲ ف ما) (− (ل لا + م ما) / ن) + ج (− (ل لا + م ما) / ن)^{2} = ۰ .... (ا)

کیونکہ خطِ مستقیم کی مساوات سے − (ل لا + م ما) / ن = ۱

مساوات (ا)، لا، ما میں دوسرے درجہ کی متجانس مساوات ہے اس لیے یہ مبدا میں سے گزرنے والے دو خطوں کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز اگر خط اور منحنی کا

نقطۂ تقاطع (لا، ما) ہو تو وہ (۱) کو پورا کرتا ہے کیونکہ وہ الگ الگ خطِ مستقیم اور منحنی کی مساواتوں کو پورا کرتا ہے۔ پس (۱) مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال (۱) خط ۲لا + ۳ما + ۱ = ۰، منحنی لا^{۲} + ۳لاما + ما^{۲} + ۲لا + ۵ما + ۱ = ۰ سے جن نقاط پر ملتا ہے ان کو مبدا سے ملانے والے خطوط کی مساوات دریافت کرو اور ان خطوط کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

خط کی مساوات -(۲لا + ۳ما) = اکائی عدد سے منحنی کی مساوات کو متجانس بنانے سے

لا^{۲} + ۳لاما + ما^{۲} - (۲لا + ۳ما)(۲لا + ۵ما) + (۲لا + ۳ما)^{۲} = ۰

یعنی لا^{۲} - لاما - ۵ما^{۲} = ۰ جو مبدا کو نقاطِ تقاطع سے ملانے والے خط ہیں۔

ان کا درمیانی زاویہ اگر ف ہو تو مس ف = ± ۲√((-۱/۲)^{۲} + ۵) / (۱ - ۵) = ± √۲۱ / ۴

= ۴٫۵۸۳ / ۴ = ۱٫۱۴۵

جس سے ف = ۴۸° ۵۴′ (تقریباً)۔

مثال (۲) ذیل کے خطوطِ مستقیم اور منحنیات کے نقاطِ تقاطع کو مبدا سے ملانے والے خطوط کی مساوات دریافت کرو اور خطوں کے درمیان کا زاویہ دریافت کرو۔

(ا) خط لا + ما - ۲ = ۰، منحنی ۲لا^{۲} + ۳لاما + ما^{۲} = ۵

(ب) خط لا + ۲ما + ۱ = ۰، منحنی ۲لا^{۲} - ۱۰لاما - ۳۶ما^{۲} + ۲لا - ۵ما + ۳ = ۰

(ج) خط لا + ما + ۱ = ۰، منحنی ۶لا^{۲} - ۲۱لاما - ۲ما^{۲} + ۲لا - ما + ۵ = ۰

(د) خط ۲لا + ۳ما - ۵ = ۰، دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} + ۲لا + ۳ما - ۱۰ = ۰

جواب (ا) ۳لا^{۲} + ۲لاما - ما^{۲} = (۳لا - ما)(لا + ما) = ۰

زاویہ مس$^{-۱}$ ۲

(ب) ۳لا^{۲} + لاما - ۱۴ما^{۲} = (۳لا + ۷ما)(لا - ۲ما)،

زاویہ مس$^{-۱}$ ۱۳/۱۱

(ج) ۹لا^{۲} - ۱۲لاما + ۴ما^{۲} = (۳لا - ۲ما)^{۲}

خط منطبق۔

(د) خط لا^۲ - ۲ لا ما - ۳ ما^۲ = ۰؛ زاویہ مس^{-۱} (۴√۱۰ / ۳)

۲۶۷۔ (ا) اس کے لیے شرط دریافت کرو کہ لا، ما میں درجۂ دوم کی عام مساوات ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰　(ا_۱)
دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔

فرض کرو کہ یہ مساوات (ا_۱) دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، اس صورت میں دائیں جانب کا جملہ دو خطی جملوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا یعنی ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج ≡ (ل لا + م ما + ن) (لَ لا + مَ ما + نَ) = ۰
اگر پہلا جملہ دوسرے کے مطابقاً مساوی ہو جسے علامت ≡ سے تعبیر کیا گیا ہے تو

ا = ل لَ، ب = م مَ، ج = ن نَ،

۲ ف = م نَ + مَ ن، ۲ گ = ن لَ + نَ ل، ۲ ھ = ل مَ + لَ م

آخری تین کو ضرب دینے سے

۸ ف گ ھ = (م نَ + مَ ن) (ن لَ + نَ ل) (ل مَ + لَ م)

= (م نَ + مَ ن) (ن لَ ل مَ + ن لَ^۲ م + نَ ل^۲ مَ + نَ ل لَ م)

= ۲ ل م ن لَ مَ نَ + ل لَ (م^۲ نَ^۲ + مَ^۲ ن^۲) + م مَ (ن^۲ لَ^۲ + نَ^۲ ل^۲)

+ ن نَ (ل^۲ مَ^۲ + لَ^۲ م^۲)

جس میں

= ۲ ا ب ج + ا (۴ ف^۲ - ۲ ب ج) + ب (۴ گ^۲ - ۲ ج ا)
+ ج (۴ ھ^۲ - ۲ ا ب)

= + ۴ (ا ف^۲ + ب گ^۲ + ج ھ^۲ - ا ب ج)

پس مطلوبہ شرط ہے ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^۲ - ب گ^۲ - ج ھ^۲ = ۰　(ب_۱)
اس شرط کو مقطعہ کی شکل میں بھی رکھا جا سکتا ہے

$$\begin{vmatrix} ا & ھ & گ \\ ھ & ب & ف \\ گ & ف & ج \end{vmatrix} = ۰ \quad \ldots\ldots (ب_۱)$$

پس ہم نے یہ ضروری نتیجہ حاصل کیا کہ دو مجہول مقداروں لا، ما میں درجہ دوم کی عام سے عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کریگی اگر مساوات کے مستقل سروں ا، ب، ج، ف، گ، ھ میں رشتہ (ب$_۱$) پایا جائے۔

مثال۔ ثابت کرو کہ مساوات ۶لا^۲ + ۱۱لا ما - ۱۰ما^۲ - ۴لا + ۹ما - ۲ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، ان خطوں کی مساواتیں حاصل کرو اور ان کے درمیان زاویہ دریافت کرو۔

قیمتیں درج کرنے سے ا ب ج + ۲ف گ ھ - ا ف^۲ - ب گ^۲ - ج ھ^۲

= (۶)(-۱۰)(-۲) + ۲(۹/۲)(-۲)(۱۱/۲) - (۶)(۹/۲)^۲ - (-۱۰)(-۲)^۲ - (-۲)(۱۱/۲)^۲

= ۱۲۰ - ۹۹ - ۲۴۳/۲ + ۴۰ + ۱۲۱/۲

= ۲۲۰ ½ - ۲۲۰ ½ = ۰

شرط پوری ہوتی ہے۔ یعنی درجہ دوم کی اوپر کی مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ درجہ دوم کی رقموں کے اجزائے ضربی (۲لا + ۵ما)(۳لا - ۲ما) ہیں اور آزمائش سے پوری مساوات کے دائیں رکن کے اجزائے ضربی ہیں

(۲لا + ۵ما - ۲)(۳لا - ۲ما + ۱)

پس خطوں کی جداگانہ مساواتیں یہ ہیں:

۲لا + ۵ما - ۲ = ۰ اور

۳لا - ۲ما + ۱ = ۰

ان کے درمیان زاویہ مس فہ $= \dfrac{(\frac{۲}{۵}) - (-\frac{۳}{۲})}{۱ + (\frac{۲}{۵})(-\frac{۳}{۲})} = \dfrac{۱۹}{۴}$ ، فہ $=$ مس$^{-۱}$ $(\frac{۱۹}{۴})$

(ب) یہی شرط مساوات بالا کو لا یا ما میں بطور مساوات درجۂ دوم کے حل کرنے سے بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے بشرطیکہ لا^۲ اور ما^۲ دونوں کے سر صفر نہ ہوں۔

فرض کرو کہ ا صفر نہیں ہے اور مساوات کو لا کی رقوم میں ترتیب دینے سے

ا لا^۲ + ۲ لا (ہ ما + گ) + ب ما^۲ + ۲ف ما + ج = ۰

جسے لا میں حل کرنے سے

لا $= \dfrac{-۲(\text{ہ ما + گ}) \pm \sqrt{۴(\text{ہ ما + گ})^۲ - ۴\text{ا}(\text{ب ما}^۲ + \text{۲ف ما + ج})}}{۲\text{ا}}$

یعنی ا لا + ہ ما + گ $= \pm \sqrt{(\text{ہ ما + گ})^۲ - \text{ا}(\text{ب ما}^۲ + \text{۲ف ما + ج})}$

منطق اجزائے ضربی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ جذر کے اندر کی رقم مربع کامل ہو

یعنی (ہ ما + گ)^۲ - ا(ب ما^۲ + ۲ف ما + ج) مربع کامل ہو

یعنی ما^۲(ہ^۲ - اب) + ۲ما (ہ گ - اف) + گ^۲ - اج مربع کامل ہو

جس کے لیے شرط ہے ۴(ہ گ - اف)^۲ - ۴(ہ^۲ - اب)(گ^۲ - اج) = ۰

یعنی -۲ہ گ اف + ا^{۲}ف^۲ + اج ہ^۲ + اب گ^۲ - ا^{۲}ب ج = ۰

یعنی اب ج + ۲ف گ ہ - اف^۲ - ب گ^۲ - ج ہ^۲ = ۰

یہی شرط جو پہلے حاصل کی تھی۔

مثال - ثابت کرو کہ مساوات

۲لا^۲ - لا ما - ۶ما^۲ + ۷لا + ۷ما + ۳ = ۰ .... (ب$_۱$)

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ ان خطوں کی جُداگانہ مساواتیں حاصل کرو اور ثابت کرو کہ (ب) سے جو خط حاصل ہوتے ہیں وہ اُن خطوں کے متوازی ہیں جو صرف درجہ دوم کی رقموں $\text{۲ لا}^{۲} - \text{لا ما} - \text{۶ ما}^{۲} = ۰$ کو لینے سے حاصل ہوتے ہیں جو مبدا میں سے گزرنے والے دو خط ہیں۔ پس خطوں کے جوڑے (ب) کے درمیان کا زاویہ $\text{۲ لا}^{۲} - \text{لا ما} - \text{۶ ما}^{۲} = ۰$ کے درمیان کے زاویے کے مساوی ہے۔

مساوات کو لا کے لحاظ سے ترتیب دینے سے

$$\text{۲ لا}^{۲} - \text{لا}(\text{ما} - ۷) - \text{۶ ما}^{۲} + \text{۷ ما} + ۳ = ۰$$

$$\text{لا} = \frac{\pm(\text{ما} - ۷) \pm \sqrt{(\text{ما} - ۷)^{۲} - ۴ \times ۲(-\text{۶ ما}^{۲} + \text{۷ ما} + ۳)}}{۴}$$

جذر کے اندر کا جملہ ہے $\text{۴۹ ما}^{۲} - \text{۷۰ ما} + ۲۵ = (\text{۷ ما} - ۵)^{۲}$ جو مربع کامل ہے۔ خطوں کی جداگانہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$(\text{۲ لا} + \text{۳ ما} + ۱)(\text{لا} - \text{۲ ما} + ۳) = ۰$$

یعنی $\text{۲ لا} + \text{۳ ما} + ۱ = ۰$ اور $\text{لا} - \text{۲ ما} + ۳ = ۰$ جو مبدا میں سے گزرنے والے خطوط $\text{۲ لا} + \text{۳ ما} = ۰$ اور $\text{لا} - \text{۲ ما} = ۰$ کے بالترتیب متوازی ہیں اور $(\text{۲ لا} + \text{۳ ما})(\text{لا} - \text{۲ ما}) = \text{۲ لا}^{۲} - \text{لا ما} - \text{۶ ما}^{۲}$ جو مساوات کی درجۂ دوم کی رقمیں ہیں۔ پس خطوں کے درمیان زاویہ وہی ہے جو خطوط $\text{۲ لا}^{۲} - \text{لا ما} - \text{۶ ما}^{۲} = ۰$ کے درمیان ہے اور یہ زاویہ

$$\text{ف} = \text{مس}^{-۱} \frac{۲\sqrt{(-\frac{۱}{۲})^{۲} + ۱۲}}{-۴} = \text{مس}^{-۱} \frac{۲\sqrt{\frac{۴۹}{۴}}}{-۴}$$

$= \text{مس}^{-۱}\left(-\frac{۷}{۴}\right)$ پس زاویہ $\text{مس}^{-۱}\frac{۷}{۴}$ ہے یا اس کا مکمل۔

(ج) اسی عمل کو ایک اور طرح بھی دیکھا جا سکتا ہے مبدا بدلنے کے عمل کی یہ اچھی مثال ہے۔

اگر $\text{ا لا}^{۲} + \text{۲ ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} + \text{۲ گ لا} + \text{۲ ف ما} + \text{ج} = ۰$

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے تو فرض کرو کہ ان کا نقطۂ تقاطع (لا۱، ما۱) ہے،
اگر مبدا کو (لا۱، ما۱) پر لے جائیں اور محوروں کی سمتیں وہی رہیں تو دفعہ ۱۱۹
سے ہم جانتے ہیں کہ مساوات کو نئے مبدا اور محوروں کے لحاظ سے تبدیل
کرنے کے لیے ہمیں رکھنا چاہیے

لا = لا۱ + لاَ (جہاں لاَ نیا فصلہ ہے)

اور ما = ما۱ + ماَ (” ماَ نیا معین ہے)

مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ل (لاَ + لا۱)۲ + ۲ھ (لاَ + لا۱)(ماَ + ما۱) + ب (ماَ + ما۱)۲ + ۲گ (لاَ + لا۱)

+ ۲ف (ماَ + ما۱) + ج = ۰

یعنی ل لاَ۲ + ۲ھ لاَ ماَ + ب ماَ۲ + ۲لاَ (ل لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ۲ماَ (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف)

+ ل لا۱۲ + ۲ھ لا۱ ما۱ + ب ما۱۲ + ۲گ لا۱ + ۲ف ما۱ + ج = ۰ ..... (ط)

اب چونکہ نقطہ (لا۱، ما۱) مبدا ہے اس کے لحاظ سے خطوں کی مساوات
نئے محددوں لاَ، ماَ میں درجہ دوم کی متجانس مساوات ہونا چاہیے، پس
لاَ، ماَ کے سر اور مستقل رقم سب صفر ہونا چاہییں، پس

ل لا۱ + ھ ما۱ + گ = ۰ (ل)

ھ لا۱ + ب ما۱ + ف = ۰ (ب)

اور ل لا۱۲ + ۲ھ لا۱ ما۱ + ب ما۱۲ + ۲گ لا۱ + ۲ف ما۱ + ج = ۰ (ج)

آخری مساوات (ج) کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے:

لا۱ (ل لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ما۱ (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰

جو (ل) اور (ب) کی مدد سے لکھی جا سکتی ہے۔

گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰ (جَ)

پس (ل)، (ب)، (جَ) سے لا۱، ما۱ ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

= ۰ یعنی پہلے کی طرح شرط حاصل ہوتی ہے۔

ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^{۲} - ب گ^{۲} - ج ھ^{۲} = ۰ (۱ب)

اور تحویل شدہ مساوات بلحاظ نئے مبداء کے ہوگی ا لاَ^{۲} + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^{۲} = ۰
یا اگر یہ ہمارے ذہن میں رہے کہ اب محدد نئے ہیں تو اول سے ہی زیریں نکال دی جاسکتی ہیں۔ پس تحویل شدہ مساوات ہوگی ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = ۰
یعنے اصل مساوات کی درجۂ دوم کی رقمیں باقی رہتی ہیں مگر محدد نئے ہیں۔

نیز واضح ہو کہ اگر درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات دو خطوں کو تعبیر کرے تو ان کا نقطۂ تقاطع مساواتوں (ا) اور (ب) سے ملیگا

یعنی لاَ = (ھ ف - ب گ) / (ا ب - ھ^{۲}) اور ماَ = (گ ھ - ا ف) / (ا ب - ھ^{۲}) جو
محدود فاصلے پر ہوگا بشرطیکہ ا ب ≠ ھ^{۲}

مثال۔ مساوات ۲ لا^{۲} + لا ما - ۶ ما^{۲} + ۷ لا + ۷ ما + ۵ = ۰
دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، ان کا نقطۂ تقاطع دریافت کرو اور تحویل شدہ مساوات کی شکل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نقطۂ تقاطع (لاَ، ماَ) ہے، اس کو مبداء لینے اور محوروں کو متوازی رکھنے سے مساوات میں رکھو

لا = لاَ + لا (یہ نیا فصلہ ہے، زبر حذف کر دیا گیا ہے)
اور ما = ماَ + ما (یہ نیا معین ہے، 〃 〃)
پس تبدیل شدہ مساوات ہو جاتی ہے:

۲(لا + لاَ)^{۲} + (لا + لاَ)(ما + ماَ) - ۶(ما + ماَ)^{۲} + ۷(لا + لاَ) + ۷(ما + ماَ) + ۵ = ۰

یعنی ۲ لا² + لا ما - ۶ ما² + لا (۴ لا + ما + ۷) + ما (لا - ۱۲ ما + ۷)
+ ۲ لا² + لا ما - ۶ ما² + ۷ لا + ۷ ما + ۵ = ۰ .... (ط)

(لا، ما) مبدا ہے اور خطوں کا نقطۂ تقاطع ہے، اس لیے تبدیل شدہ مساوات (ط) درجۂ دوم کی متجانس مساوات ہونا چاہیے، اس لیے

۴ لا + ما + ۷ = ۰
لا + ۱۲ ما + ۷ = ۰ } جس سے لا = -۱۳/۷ ، ما = ۳/۷ ..... (ص)

مستقل رقم اس طرح لکھی جا سکتی ہے:

لا (۲ لا + ½ ما + ۷/۲) + ما (½ لا - ۶ ما + ۷/۲)
+ ۷/۲ لا + ۷/۲ ما + ۵ = ۰

یعنی لا (۴ لا + ما + ۷) + ما (لا - ۱۲ ما + ۷) + ۷ لا + ۷ ما + ۱۰ = ۰

اب لا اور ما کے سر (ص) کی رو سے صفر ہیں اور

۷ لا + ۷ ما + ۱۰ = ۷ (-۱۳/۷) + ۷ (۳/۷) + ۱۰ = -۱۳ + ۳ + ۱۰ = ۰

پس تحویل شدہ مساوات ۲ لا² + لا ما - ۶ ما² = ۰ ہے جس میں لا، ما نئے محدد ہیں بلحاظ نقطۂ تقاطع کے۔

(د) درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ .... (ب)

ہے۔ فرض کرو کہ یہ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر نہیں کرتی، کسی اور لوکس یا طریق کو تعبیر کرتی ہے۔ تاہم کسی اختیاری نقطہ (لا، ما) پر ہم مبدا لے جانے سے مساوات کو حسب بالا تحویل کرتے ہیں یعنی

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + لا (ا لا + ھ ما + گ) + ما (ھ لا + ب ما + ف)
+ ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ..... (ط)

جس میں لا، ما نئے محدد ہیں بلحاظ نقطہ لا، ما کے ان کے زیروں کو حذف کر دیا گیا ہے۔

نقطہ (لا، ہا) ابتک اختیاری ہے، اسے ہم ایسا نقطہ لیتے ہیں جو ذیل کی مساواتوں کو پورا کرے

$$\left.\begin{array}{l} \text{ا لا} + \text{ھ ہا} + \text{گ} = ۰ \\ \text{ھ لا} + \text{ب ہا} + \text{ف} = ۰ \end{array}\right\} \quad ......\quad (\text{ص})$$

جن سے $\text{لا} = \dfrac{\text{ھ ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^۲}$ ، $\text{ہا} = \dfrac{\text{گ ھ} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^۲}$

اور یہ نقطہ محدود فاصلہ پر ہوگا اگر ا ب ـ ھ^۲ صفر کے مساوی نہ ہو یعنی اصلی مساوات میں درجۂ دوم کی رقمیں مربع کامل نہ بنائیں ۔

فرض کرو کہ $\text{ا ب} - \text{ھ}^۲ \neq ۰$ ، تو لا، ہا کی قیمت بالا لینے سے تحویل شدہ مساوات میں لا اور ما سر دونوں صفر ہو جاتے ہیں ۔

اب جیسا ہم نے اوپر دیکھا ہے، مستقل رقم

$$\text{ا لا}^۲ + ۲\text{ھ لا ہا} + \text{ب ہا}^۲ + ۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ہا} + \text{ج}$$

اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\text{لا}(\text{ا لا} + \text{ھ ہا} + \text{گ}) + \text{ہا}(\text{ھ لا} + \text{ب ہا} + \text{ف}) + \text{گ لا} + \text{ف ہا} + \text{ج}$$

$= \text{گ لا} + \text{ف ہا} + \text{ج}$ کیونکہ پہلی دو رقمیں (ص) کی رُو سے صفر ہو جاتی ہیں

$$= \text{گ}\left(\frac{\text{ھ ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^۲}\right) + \text{ف}\left(\frac{\text{گ ھ} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^۲}\right) + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{ا ب ج} + ۲\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^۲ - \text{ب گ}^۲ - \text{ج ھ}^۲}{\text{ا ب} - \text{ھ}^۲}$$

پس تحویل شدہ مساوات کی حسبِ ذیل شکل حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ا لا}^۲ + ۲\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^۲ + \frac{\text{ا ب ج} + ۲\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^۲ - \text{ب گ}^۲ - \text{ج ھ}^۲}{\text{ا ب} - \text{ھ}^۲} = ۰$$

...... (ع)

پس ہم دیکھتے ہیں کہ درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات کو مبدا بدل کر

ایسی مساوات میں تحویل کر سکتے ہیں جس میں لا، ما کے سر صفر ہوں اور تحویل شدہ مساوات کی شکل (ع) ہو۔ واضح ہو کہ اس میں درجۂ دوم کی رقمیں اسی شکل کی ہیں جو اصلی مساوات میں صرف (ع) میں محدّد نئے ہیں۔ اگر درجۂ دوم کی عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے اور نیا مبداء نقطۂ تقاطع ہو تو مساوات کی شکل متجانس ہونی چاہیے۔
یعنی (ع) سے ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^{2} - ب گ^{2} - ج ھ^{2} = ۰

مثال - مساوات درجۂ دوم لا^{2} + ۱۰ لا ما + ما^{2} - ۱۲ لا - ۱۲ ما + ۶ = ۰
کو مبداء بدلنے سے ایسی شکل میں تحویل کرو کہ لا، ما والی رقموں کے سر صفر ہو جائیں اور دیکھو کہ یہ مساوات دو خطوط کو تعبیر کرتی ہے یا نہیں۔
مبداء کو (لا$_{1}$، ما$_{1}$) پر لے جانے سے عام مساوات ہو جاتی ہے
ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + لا (ا لا$_{1}$ + ھ ما$_{1}$ + گ) + ما (ھ لا$_{1}$ + ب ما$_{1}$ + ف)
+ گ لا$_{1}$ + ف ما$_{1}$ + ج = ۰
لا، ما والی رقموں کے سر صفر ہونگے اگر ا لا$_{1}$ + ھ ما$_{1}$ + گ = ۰
ھ لا$_{1}$ + ب ما$_{1}$ + ف = ۰

ساوات سے قیمتیں درج کرنے پر
لا$_{1}$ + ۵ ما$_{1}$ - ۶ = ۰
۵ لا$_{1}$ + ما$_{1}$ - ۶ = ۰
لا$_{1}$ = ۱، ما$_{1}$ = ۱

اور مستقل رقم گ لا$_{1}$ + ف ما$_{1}$ + ج = (-۶) (۱) + (-۶) (۱) + ۶
= - ۶
پس تحویل شدہ مساوات ہو جاتی ہے
لا^{2} + ۱۰ لا ما + ما^{2} - ۶ = ۰ جو خطوطِ مستقیم کو تعبیر نہیں کرتی کیونکہ مستقل رقم صفر نہیں ہے۔

متفرق مثالیں اور سوالات ۹

۱- ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ

(ا) ن ا^{2} + ن ب^{2} = مستقل

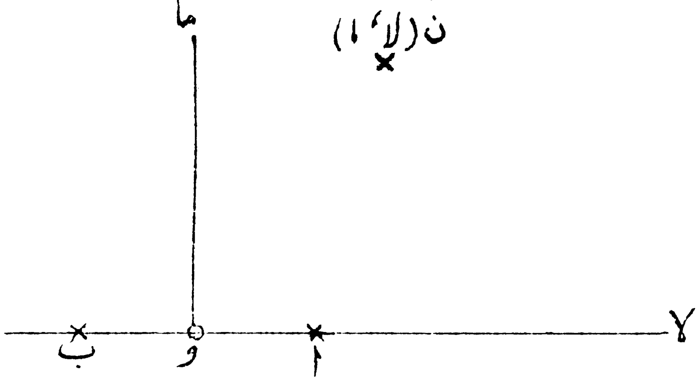
(ب) ن ا / ن ب = مستقل

(ج) ن ا × ن ب = مستقل

(د) ن ا + ن ب = مستقل

(ع) ن ا − ن ب = مستقل

ہر صورت میں ن کا طریق (لوکس) دریافت کرو۔



ا، ب ثابت نقطے ہیں، ان کے نقطۂ تنصیف و کو مبداء مانو اور ب و ا محور لا اور اس کے علی القوائم ما کا محور و ما لو۔

فرض کرو کہ ب و = و ا = د، تب ا کے محدد (د، ۰) ہیں اور ب کے محدّد (−د، ۰) اور نقطہ ن کے محدّد ان محوروں اور مبداء کے لحاظ سے لا، ما ہیں۔

صورت (ا) ن ا^{2} + ن ب^{2} = مستقل = ۲ ج^{2}

یعنی (لا − د)^{2} + ما^{2} + (لا + د)^{2} + ما^{2} = ۲ ج^{2}

لا^{2} + ما^{2} = ج^{2} − د^{2} جو دائرہ ہے جس کا مرکز مبداء و ہے

اور نصف قطر $\sqrt{\;}$ ج^{2} − د^{2}

$$\text{(ب)}\quad \frac{\text{ن ا}}{\text{ن ب}} = \text{م} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{ن ا}^{\text{۲}}}{\text{ن ب}^{\text{۲}}} = \text{م}^{\text{۲}}$$

$$\text{م}^{\text{۲}} \left\{ (\text{لا} + \text{ل})^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} \right\} = (\text{لا} - \text{ل})^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}$$

$$\text{لا}^{\text{۲}}(\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}) + \text{ما}^{\text{۲}}(\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}) - \text{۲ لا ل}\left[\text{۱} + \text{م}^{\text{۲}}\right] + \text{ل}^{\text{۲}}(\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}) = \text{۰}$$

$$\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} - \text{۲ لا ل}\,\frac{\text{۱} + \text{م}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}} + \text{ل}^{\text{۲}} = \text{۰}$$

$$\left[\text{لا} - \text{ل}\,\frac{\text{۱} + \text{م}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}}\right]^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} = -\text{ل}^{\text{۲}} + \text{ل}^{\text{۲}}\left(\frac{\text{۱} + \text{م}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}}\right)^{\text{۲}} = \frac{\text{۴م}^{\text{۲}}}{(\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}})^{\text{۲}}}$$

مبداء کو نقطہ $\left(\text{ل}\,\frac{\text{۱} + \text{م}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}}\text{، ۰}\right)$ پر لے جانے سے مساوات ہو جاتی ہے

$\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} = \frac{\text{۴م}^{\text{۲}}}{(\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}})^{\text{۲}}}$ پس طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز $\left(\text{ل}\,\frac{\text{۱} + \text{م}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}}\text{، ۰}\right)$ ہے اور نیم قطر $\frac{\text{۲م}}{\text{۱} - \text{م}^{\text{۲}}}$ ۔

$$\text{(ج)}\quad \text{ن ا} \times \text{ن ب} = \text{ج}^{\text{۲}}$$

$$\left\{(\text{لا} - \text{ل})^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}\right\}\left\{(\text{لا} + \text{ل})^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}\right\} = \text{ج}^{\text{۴}}$$

$$(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} + \text{ل}^{\text{۲}} - \text{۲ لا ل})(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} + \text{ل}^{\text{۲}} + \text{۲ لا ل}) = \text{ج}^{\text{۴}}$$

$$(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} + \text{ل}^{\text{۲}})^{\text{۲}} - \text{۴ لا}^{\text{۲}}\text{ل}^{\text{۲}} = \text{ج}^{\text{۴}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(ع)}$$

$$\text{لا}^{\text{۴}} + \text{ما}^{\text{۴}} + \text{ل}^{\text{۴}} + \text{۲ لا}^{\text{۲}}\text{ما}^{\text{۲}} - \text{۲ لا}^{\text{۲}}\text{ل}^{\text{۲}} + \text{۲ ما}^{\text{۲}}\text{ل}^{\text{۲}} - \text{ج}^{\text{۴}} = \text{۰}$$

پس لا، ما کا طریق یہ چوتھے رتبہ کا منحنی ہے۔ اسے کیسنی کا بیضہ کہا جاتا ہے۔ اگر اس مساوات کو بدل کر قطبی محدّدوں میں لے جائیں تو رکھنا ہوگا

$$\text{لا} = \text{ر جم طہ}\text{،}\quad \text{ما} = \text{ر جب طہ}$$

ع میں درج کرنے سے $(\text{ر}^{\text{۲}} + \text{ل}^{\text{۲}})^{\text{۲}} - \text{۴ ل}^{\text{۲}}\text{ر}^{\text{۲}}\text{ جم}^{\text{۲}}\text{ طہ} = \text{ج}^{\text{۴}}$

یعنی $\text{ر}^{4} + \text{ا}^{4} + 2\text{ر}^{2}\text{ا}^{2} - 2\text{ا}^{2}\text{ر}^{2}(1 + \text{جم}\,2\,\text{طہ}) = \text{ج}^{4}$

یعنی $\text{ر}^{4} + \text{ا}^{4} - 2\text{ر}^{2}\text{ا}^{2}\,\text{جم}\,2\,\text{طہ} = \text{ج}^{4}$ .... (ا)

اگر رکھیں $\text{ج} = \text{ا} = \frac{\text{ص}}{2}$ تو

$$\text{ر}^{4} + \frac{\text{ص}^{4}}{4} - 2\text{ر}^{2} \times \frac{\text{ص}^{2}}{2}\,\text{جم}\,2\,\text{طہ} = \frac{\text{ص}^{4}}{4}$$

$\text{ر}^{2} = \text{ص}^{2}\,\text{جم}\,2\,\text{طہ}$ .... (ب)

یہ کیسنی کے بیضوں کی خاص صورت ہے جو اٹیرن کی شکل سے مشابہت رکھتی ہے، اسے برنولی کے نام سے منسوب کرتے ہیں۔ اشکال (د)، (ع) پہلے دی جا چکی ہیں۔

مثال (۲) (ا) ایک خطِ مستقیم ایک ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے گزرتا ہے اور دو ثابت علی القوائم خطوں کو جو و پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں نقاط ا، ب پر کاٹتا ہے، مستطیل و ا ر ب بنایا گیا ہے، ر کا طریق دریافت کرو۔

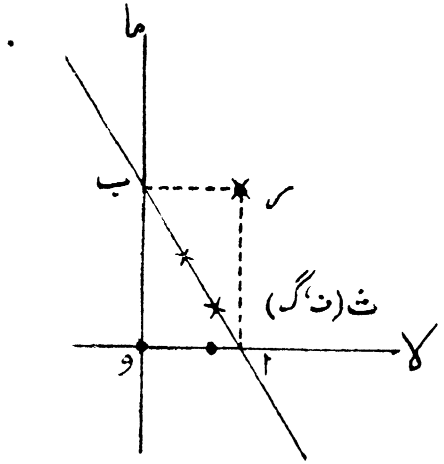
(ب) ایک خط، ایک ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے گزرتا ہے، علی القوائم محوروں کے درمیان یہ جو حصّہ کاٹتا ہے اس کے نقطۂ تنصیف کا طریق دریافت کرو۔

(ج) نقطہ (لا، ہا) ایک خط کے مقطوعہ کا نقطۂ تنصیف ہے جو علی القوائم محوروں کے درمیان کٹتا ہے، خط کی مساوات دریافت کرو۔

(د) مبدا میں سے ایک خط گذرتا ہے جو دونوں محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے، اس خط پر کوئی ایک نقطہ لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے گذرنے والے سب خطوط کے جو مقطوعے محوروں پر کٹتے ہیں ان کے متکافیوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

(ع) ایک خط علی القوائم محوروں کے ساتھ جو مثلث کاٹتا ہے اُس کا رقبہ مستقل ہے، خط کے وسطی نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

حل حصہ (ا) خط ثابت نقطہ ث (ف، گ) میں سے گزرتا ہے، فرض کرو کہ ر کے محدد (عہ، بہ) ہیں جن میں رشتہ مطلوب ہے۔ اب و ا = عہ، و ب = بہ



پس خط ا ب کی مساوات $\frac{لا}{عہ} + \frac{ما}{بہ} = ۱$ ہے اور چونکہ خط (ف، گ) میں سے گزرتا ہے اس لیے

$$\frac{ف}{عہ} + \frac{گ}{بہ} = ۱،$$

پس یہ (عہ، بہ) کا طریق ہے، اگر (عہ، بہ) کی بجائے عام نقطہ (لا، ما) رکھ دیا جائے تو طریق اس شکل میں لکھا جا سکیگا۔

$$\frac{ف}{لا} + \frac{گ}{ما} = ۱ \quad \cdots\cdots\cdots \quad (۱)$$

(ب) ثابت نقطہ (ف، گ) ہے۔ وسطی نقطہ (عہ، بہ) کا طریق مطلوب ہے۔

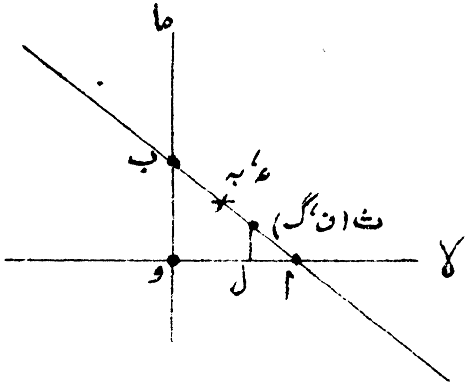
و ا = ۲ عہ، و ب = ۲ بہ

متشابہ مثلثوں سے $\frac{ث ل}{ل ا} = \frac{و ب}{و ا}$

یعنی گ/(۲عہ − ف) = ۲بہ/۲عہ یعنی گ/(۲عہ − ف) = بہ/عہ

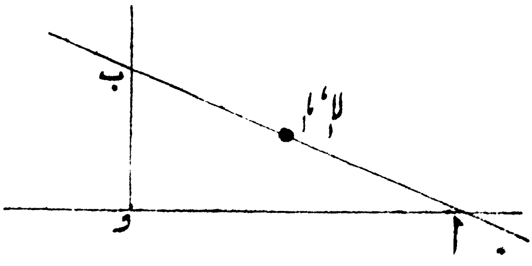
پس عہ گ = (۲عہ − ف) بہ یا عہ گ + ف بہ = ۲عہ بہ

عہ بہ پر تقسیم کرنے سے ف/عہ + گ/بہ = ۲ جو عہ، بہ کا طریق ہے۔



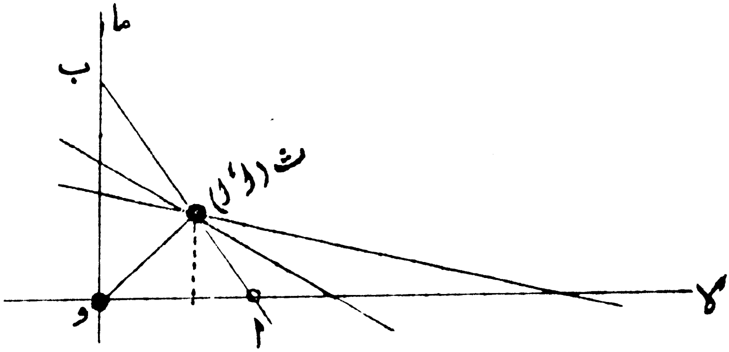
عہ، بہ کی بجائے لا، ما رکھنے سے ف/لا + گ/ما = ۲ جو حسب معمول ترقیم میں طریق کی مساوات ہے۔

(ج) اب کا نقطہ تنصیف (لا، ما) دیا ہوا ہے، خط کی مساوات مطلوب ہے۔



و ا = ۲ لا، و ب = ۲ ما، خط کی مساوات ہے $\frac{لا}{۲لا} + \frac{ما}{۲ما} = ۱$

(د) خط و ث محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے اس پر کوئی ثابت نقطہ (ل، ل) ہوگا جہاں ل معلومہ مقدار ہے۔

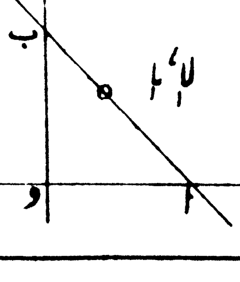


فرض کرو (ل، ل) میں سے گزرنے والے کسی خط کے مقطوعے محوروں پر عہ، بہ ہیں، تب ا ب کی مساوات $\frac{لا}{عہ} + \frac{ما}{بہ} = ۱$ ہے۔

اب چونکہ خط (ل، ل) میں سے گزرتا ہے اس لیے $\frac{ل}{عہ} + \frac{ل}{بہ} = ۱$ یعنی

$\frac{۱}{عہ} + \frac{۱}{بہ} = \frac{۱}{ل}$ (مستقل مقدار)، یہی مطلوب تھا۔

(ع) مثلث و ا ب کا رقبہ مستقل ہے۔ (لا، ما) ا ب کا وسطی نقطہ ہے،



اس لیے و ا = ۲ لا، و ب = ۲ ما

پس رقبہ = ۲ لا ما = مستقل، پس (لا، ما) کا طریق لا ما = مستقل (ج۲) ہے،

مثال (۳) (ا) خطوط ما = م۱ لا + ب۱ اور ما = م۲ لا + ب۲ اور لا = ۰ کے درمیان جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

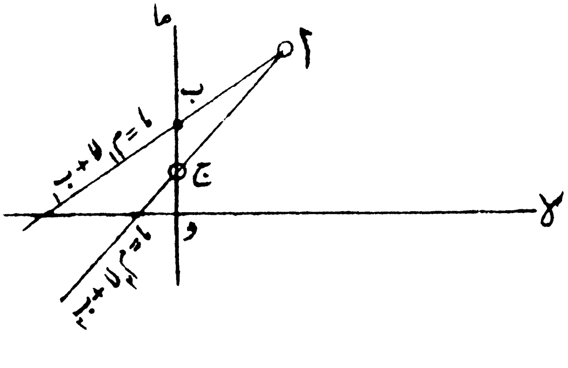
(ب) خطوط ما = م۱ لا + ب۱، ما = م۲ لا + ب۲، ما = م۳ لا + ب۳ کے درمیان جو مثلث بنتا ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(ج) خطوط ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰، ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰، ا۳ لا + ب۳ ما + ج۳ = ۰ کے درمیان جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(د) خطوط ما = م۱ لا، ما = م۲ لا اور ا لا + ب ما + ج = ۰ کے درمیان جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

حل۔ (ا) نقطہ ا کے لیے م۱ لا + ب۱ = م۲ لا + ب۲

(م۲ − م۱) لا = ب۱ − ب۲



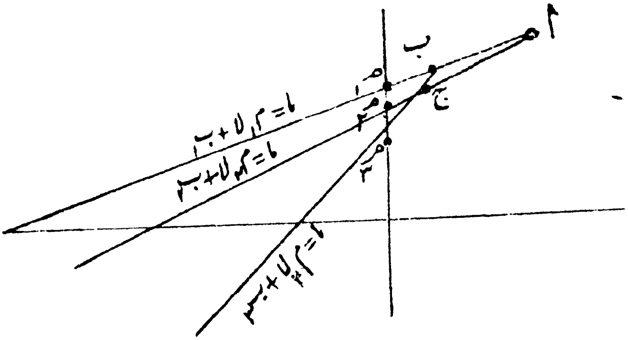
یعنی لا = (ب۱ − ب۲)/(م۲ − م۱) اور ج ب = ب۱ − ب۲

پس رقبہ ج ا ب = ۱/۲ (ب۱ − ب۲)۲/(م۲ − م۱)

(ب) Δ ا ب ج = Δ ا م₁ م₂ + Δ م₂ م₃ ج − Δ ا م₃ ب

$= \frac{1}{2}\frac{(ب_1 - ب_2)^2}{م_2 - م_1} + \frac{1}{2}\frac{(ب_2 - ب_3)^2}{م_3 - م_2} - \frac{1}{2}\frac{(ب_3 - ب_1)^2}{م_3 - م_1}$

$= \frac{1}{2}\frac{(ب_2 - ب_3)^2}{م_3 - م_2} + \frac{1}{2}\frac{(ب_3 - ب_1)^2}{م_1 - م_3} + \frac{1}{2}\frac{(ب_1 - ب_2)^2}{م_2 - م_1}$



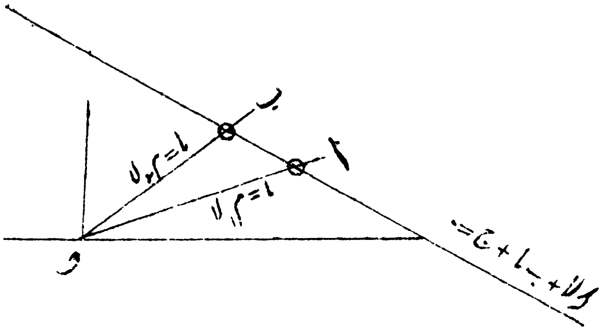
(ج) مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{ج_2}{ب_2} + \frac{ج_3}{ب_3}\right)^2}{\left(-\frac{ا_3}{ب_3} + \frac{ا_2}{ب_2}\right)} + \quad + \quad +$

$= \frac{(ب_2 ج_3 - ب_3 ج_2)^2}{ب_2 ب_3 (ا_2 ب_3 - ا_3 ب_2)} + \frac{(ب_3 ج_1 - ب_1 ج_3)^2}{ب_3 ب_1 (ا_3 ب_1 - ا_1 ب_3)}$
$+ \frac{(ب_1 ج_2 - ب_2 ج_1)^2}{ب_1 ب_2 (ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1)}$

(د) نقطہ ا کے لیے ا لا + ب م₁ لا + ج = ۰
لا (ا + ب م₁) + ج = ۰

$لا = -\frac{ج}{ا + ب م_1}$ اور ا کا ما محدد $= -\frac{م_1 ج}{ا + ب م_1}$

نقطہ ب کے محدد $\left(-\frac{ج}{ا + ب م_2}، -\frac{م_2 ج}{ا + ب م_2}\right)$



$$\Delta\ \text{و ا ب} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \frac{\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب م}_1} & \frac{-\text{م}_1\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب م}_1} & 1 \\ \frac{\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب م}_2} & \frac{-\text{م}_2\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب م}_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\frac{1}{2}\text{ج}^2(\text{م}_2 \sim \text{م}_1)}{(\text{ا}+\text{ب م}_1)(\text{ا}+\text{ب م}_2)}$$

بموجب اس کے کہ $\text{م}_2 \gtrless \text{م}_1$

مثال ۴ ۔ (ا) مبداء میں سے گزرنے والے دو خط ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ سے تعبیر ہوتے ہیں، ان خطوں پر مبداء میں سے گذرنے والے علی القوائم دو خط ہونگے ان کی مشترک مساوات حاصل کرو۔

(ب) نقطہ (لا، ما) سے خطوں ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ پر جو دو عمود کھینچ سکتے ہیں اُن کا حاصل ضرب دریافت کرو۔

(ج) اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ میں کا ایک خط اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 = ۰ میں کے ایک خط پر منطبق ہو۔

(د) اس کے لیے شرط دریافت کرو کہ ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ میں کا ایک خط اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 = ۰ میں کے ایک خط پر علی القوائم ہو۔

حل (ا) فرض کرو کہ $\text{ب}\left(\text{ما}^2 + \frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}\,\text{لا ما} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{لا}^2\right)$

$= \text{ب}\,(\text{ما} - \text{م}_1\,\text{لا})\,(\text{ما} - \text{م}_2\,\text{لا})$

جس سے $\text{م}_1 + \text{م}_2 = -\frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}$ ، $\text{م}_1\,\text{م}_2 = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

اب دیے ہوئے خطوں پر علی القوائم خط ہونگے $\text{ما} - \text{مَ}_1\,\text{لا} = 0$ ، $\text{ما} - \text{مَ}_2\,\text{لا} = 0$

جہاں $\text{م}_1\,\text{مَ}_1 = -1$ ، $\text{م}_2\,\text{مَ}_2 = -1$

پس علی القوائم خط ہونگے $\left(\text{ما} + \frac{1}{\text{م}_1}\,\text{لا}\right)\left(\text{ما} + \frac{1}{\text{م}_2}\,\text{لا}\right) = 0$

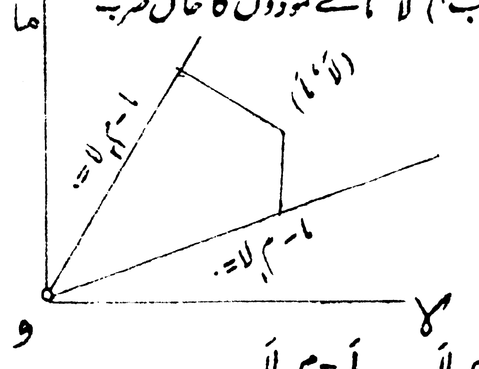
یعنی $\text{ما}^2 + \text{لا ما}\left(\frac{1}{\text{م}_1} + \frac{1}{\text{م}_2}\right) + \frac{1}{\text{م}_1\,\text{م}_2}\,\text{لا}^2 = 0$

یعنی $\text{ما}^2 + \text{لا ما}\left(\frac{-\frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}\right) + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا}^2 = 0$

یعنی $\underline{\text{ا}\,\text{ما}^2 - 2\text{ھ}\,\text{لا ما} + \text{ب}\,\text{لا}^2 = 0}$

پس علی القوائم خطوں کا جوڑا ہے $\text{ب}\,\text{لا}^2 - 2\text{ھ}\,\text{لا ما} + \text{ا}\,\text{ما}^2 = 0$

(ب) لاَ، ماَ سے عمودوں کا حاصل ضرب



$$= \frac{\text{ماَ} - \text{م}_1\,\text{لاَ}}{\sqrt{1+\text{م}_1^2}} \times \frac{\text{ماَ} - \text{م}_2\,\text{لاَ}}{\sqrt{1+\text{م}_2^2}}$$

= (ما² - (م₁ + م₂) لا ما + م₁ م₂ لا²) / √(۱ + (م₁² + م₂²) + م₁² م₂²) = (ما² - لا ما (- ۲ھ/ب) + ا/ب لا²) / √(۱ + (۴ھ²/ب² - ۲ا/ب) + ا²/ب²)

= (ا لا² - ۲ ھ لا ما + ب ما²) / √(ا² + ب² + (۴ ھ² - ۲ ا ب)) = (ا لا² - ۲ ھ لا ما + ب ما²) / √((ا - ب)² + ۴ ھ²)

(ج) فرض کرو ما - م لا = ۰ خطوں کے جوڑوں ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰

اور اَ لا² + ۲ ھَ لا ما + بَ ما² = ۰ میں مشترک ہے یعنی خط ما/لا = م مشترک ہے۔ پس ما/لا کی رقوم میں مساواتوں کو لکھنے سے واضح ہے کہ ما/لا کی ایک ہی قیمت م کے لیے دونوں مساواتیں پوری ہوتی ہیں۔ پس

ب م² + ۲ ھ م + ا = ۰

بَ م² + ۲ ھَ م + اَ = ۰

جس سے م² / (۲ ھ اَ - ۲ ھَ ا) = م / (ا بَ - اَ ب) = ۱ / (۲ ھَ ب - ۲ ھ بَ)

پس شرط مطلوبہ ہے

(ا بَ - اَ ب)² = ۴ (ھ اَ - ھَ ا) (ھَ ب - ھ بَ)

(د) (ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما²) = ب (ما - م لا) (ما - مَ لا)

(اَ لا² + ۲ ھَ لا ما + بَ ما²) = بَ (ما + ۱/م لا) (ما - مَ لا)

جہاں ایک جوڑے میں ما - م لا = ۰ اور دوسرے جوڑے میں ما + ۱/م لا = ۰ باہم علی القوائم ہیں۔

پہلے جوڑے میں ما/لا کی بجائے م رکھنے سے ب م² + ۲ ھ م + ا = ۰

دوسرے جوڑے میں ما/لا 〃 〃 - ۱/م 〃 〃 بَ (- ۱/م)² + ۲ ھَ (- ۱/م) + اَ = ۰

یعنی بَ - ۲ ھَ م + اَ م² = ۰

پس ب م² + ۲ھ م + ل = ۰

اور لَ م² − ۲ ھَ م + بَ = ۰

سے م ساقط کرنے سے شرط حاصل ہوتی ہے ۔

م² / (۲ ھ بَ + ۲ ھَ ل) = م / (ل لَ − ب بَ) = ۱ / (−۲ ھَ ب − ۲ ھ لَ)

پس شرط مطلوبہ ہے

(ل لَ − ب بَ)² + ۴ (ھ بَ + ھَ ل) (ھَ ب + ھ لَ) = ۰

مثال ۵ ۔ ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج کے محدّد بالترتیب (۲، ۱۵)، (۱۶، ۱) اور (۱۹، ۲۲) ہیں؛ مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدّد معلوم کرو ۔

حل (ب ج)² = (۱۹ − ۱۶)² + (۲۲ − ۱)² = ۹ + ۴۴۱ = ۴۵۰

یعنی ب ج = ۱۵ √۲

اس طرح سے ج ا = ۱۳ √۲ اور ا ب = ۱۴ √۲

اگر مثلث کے زاویہ ا کا داخلی منصّف مقابل کے ضلع ب ج سے نقطہ د پر ملے تو د پر ب ج کی داخلی تقسیم ا ب : ا ج یعنی ۱۴ : ۱۳ کی نسبت میں ہوگی ۔

اس لیے د کا فصلہ = ((۱۶ × ۱۳) + (۱۹ × ۱۴)) / (۱۳ + ۱۴) = ۱۵۸ / ۹

اور د کا معین = ((۱ × ۱۳) + (۲۲ × ۱۴)) / (۱۳ + ۱۴) = ۱۰۷ / ۹

اس لیے زاویہ ا کے داخلی منصّف ا د کی مساوات ہوگی

(ما − ۱۵) / (لا − ۲) = (۱۰۷/۹ − ۱۵) / (۱۵۸/۹ − ۲) = − ۱/۵

یعنی لا + ۵ ما - ۷۷ = ۰ .... (۱)

اسی طرح سے زاویہ ب کے داخلی منصّف ب ع کی مساوات ہوگی

۳لا + ما - ۴۹ = ۰ .... (۲)

خطوط (۱) اور (۲) کا نقطۂ تقاطع مثلث ا ب ج کا اندرونی مرکز ہے اور اندرونی مرکز کے محدّد ہیں (۱۲، ۱۳)۔

مشق (۱) سوال بالا میں مثلث ا ب ج کے راس ا کے مقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز معلوم کرو۔

اشارہ۔ مطلوبہ مرکز زاویہ ا کے داخلی منصّف اور زاویہ ب کے خارجی منصّف کا نقطۂ تقاطع ہے۔ زاویہ ب کے خارجی منصّف کی مساوات ہوگی

لا - ۳ ما - ۱۳ = ۰ اس لیے مطلوبہ نقطہ کے محدّد ہیں (۵۰٫۵، ۱۲٫۵)

مشق (۲) ایک مثلث کے راسوں کے محدّد (۱، ۲) (۲۵، ۸) اور (۹، ۲۱) ہیں۔ مثلث کے اندرونی مرکز کے محدّد معلوم کرو۔

[جواب (۱۱٫۵، ۱۱)]

باب دوم پر متفرق مشقی سوالات

(۱) ثابت کرو کہ نقاط (۰، ۳)، (۳، ۷)، (۷، ۴) اور (۴، ۰) ایک مربع کے راس ہیں۔

(۲) ایک مثلث کے راسوں کے محدّد (۰، ۴)، (-۲، ۰)، (۰، -۱) ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مثلث قائم الزاویہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس مثلث کے وسطانیے ہم نقطہ ہیں۔

(۳) ایک قائم الزاویہ مثلث کے دو راسوں کے محدّد (۱، ۰)، (۰، ب) ہیں۔ اس کے وتر کے وسطی نقطہ کے محدّد معلوم کرو۔

جواب $(\frac{۱}{۲}، \frac{ب}{۲})$

(۴) دریافت کرو کہ ذیل کے ہر حصّہ میں جو تین خط دیے گئے ہیں وہ ہم نقطہ ہیں یا نہیں؟

(ا) لا − ۲ما + ۱ = ۰؛ ۳لا − ۷ما + ۴ = ۰، لا = ۱

(ب) ۴لا − ۳ما + ۲ = ۰، ۳لا + ۴ما − ۱ = ۰، لا + ما + ۲ = ۰

(ج) ۷لا − ۵ما = ۷، لا + ۲ما = ۱، ۵لا − ۳ما − ۵ = ۰

(د) ما − ۴لا = ۵، ما − ۳لا = ۴، ما − ۲لا = ۳

(۵) ایک مثلث کے راسوں کے محدد (۰، ۴)، (۳، ۰)، (−۱، ۰) ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے راسی زاویوں کے اندرونی منصّف ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ خطوط لا² − ۴ما² + ۵لا + ۲ما + ۶ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مشترکہ مساوات ۸لاما − ۲لا + ۲۰ما − ۵ = ۰ ہے۔

(۷) ایک چار ضلعی شکل کے اضلاع مساواتوں

لا² − ۶لاما + ۹ما² − ۷لا + ۲۱ما + ۱۰ = ۰، اور ۹لا² + ۶لاما + ما² − ۳لا − ما − ۱۲ = ۰

سے تعبیر ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ شکل ایک مستطیل ہے۔

(۸) اُس خط کی مساوات معلوم کرو جس پر مبدا سے گرائے ہوئے عمود کا میلان ۴۵° ہو اور (ا) جس کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ۷۲ ہو (ب) جو نقطہ (۴، −۳) میں سے گزرے (ج) نقطہ (−۲، −۴) سے خط کا فاصلہ ۲√۲ ہو۔

جواب:۔ (ا) لا − ما = ۶√۲؛ (ب) ما − لا = ۶√۲

(ج) لا − ما = ۶

(۹) اُس خط کی مساوات دریافت کرو جو ۳لا + ۴ما = ۱۰ کے متوازی ہو اور جو خطوط ۳لا + ۴ما = ۱۰ اور ۳لا + ۴ما = ۳۰ کے درمیانی فاصلہ کو ۳ : ۱ کی نسبت میں تقسیم کرے۔

جواب ۳لا + ۴ما = ۲۵

(۱۰) ایک مثلث کے اضلاع مساواتوں لا = ۰، ما = ۰ اور ۲لا + ما − ۴ = ۰ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ نقطہ (۳، ۱) سے ان اضلاع پر عمود ڈالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے پائیں ایک ہی خطِ مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

(۱۱) ان خطوط کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۶) میں سے گزرتے ہیں اور اس نقطے سے ۵ فاصلہ پر خط لا + ما - ۲ = ۰ کو قطع کرتے ہیں -

جواب: ۴ لا - ۳ ما + ۶ = ۰، ۳ لا - ۴ ما + ۱۵ = ۰

(۱۲) ک کی کس قیمت کے لیے مساوات لا² - لا ما - ۶ ما² + ۲ لا - ما + ک = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کریگی - ان خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو -

جواب: ک = ۱، درمیانی زاویہ = ۴۵°

(۱۳) دریافت کرو کہ ل کی کس قیمت کے لیے مساوات لا - ل ما - ۶ = ۰ اور مساوات ل لا - ۹ ا + ۱۸ = ۰ ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کرینگے -

جواب: ل = -۳

(۱۴) دو خطوطِ مستقیم ل۱ اور ل۲ نقطہ (-۳، -۲) پر قطع کرتے ہیں، ل۱ کا مقطوعہ محور ا پر -۶ ہے اور دونوں خطوں کا درمیانی زاویہ مس⁻¹ ۲/۳ ہے دونوں خطوں کی مساواتیں معلوم کرو -

جواب: ۴ لا + ۳ ما + ۱۸ = ۰، لا - ۱۸ ما - ۵۲ = ۰

(۱۵) ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں

لا + ۳ ما - ۴ = ۰، ۳ لا - ا + ۶ = ۰ اور ۴ لا - ۵ ا - ۴ ۲ = ۰

ہیں - تحلیلی طریقہ پر تصدیق کرو کہ ا پر کا خارجی زاویہ ب اور ج پر کے داخلی زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہے -

(۱۶) ک کی قیمت معلوم کرو جبکہ مساوات ۲ لا² + ک لا ما - ۲ ما² - ۸ لا + ۴ ما = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے - ان خطوں کی جداگانہ مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ خطوط باہم علی القوائم ہیں:-

جواب: ک = ۳، ما = ۲ لا، لا + ۲ ما = ۴

(۱۷) ایک مثلث کے تین اضلاع کی مساواتیں

لا - ۴ ما = ۴، ۲ لا + ما = ۱۲، ما - لا = ۲

ہیں - اس مثلث کے اندرونی زاویے معلوم کرو -

جواب: ۷۱°، ۳۱°، ۷۷° تقریباً -

(۱۸) درجۂ دوم کی دو مساواتوں ۳لا^2 + ۱۳لاما − ۵۶ما^2 − ۲۰لا + ۲۳۷ما − ۲۴۷ = ۰
اور ۲لا^2 − لاما − ما^2 − ۲۹لا + ۱۴ما + ۹۵ = ۰ سے چار خط حاصل ہوتے ہیں جو ایک چار ضلعی شکل بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوں کے نقاطِ وسطی کو ملانے سے ایک متوازی الاضلاع حاصل ہوتا ہے۔

(۱۹) ایک مثلث کے راس (۰، ۳)، (۴، −۳)، (۳، ۵) ہیں۔ اس مثلث کے اندرونی زاویے معلوم کرو:۔

جواب: ۹۰°، ۲۶° ۳۰′، ۶۳° ۳۰′

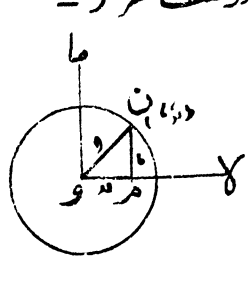
(۲۰) اگر ایک متوازی الاضلاع کے وتر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یہ ایک مستطیل ہوگی۔

تیسرا باب

دائرہ

۳،۱۔ **تعریف**۔ اگر ایک نقطہ اس طرح حرکت کرے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ہمیشہ مستقل رہے تو اس نقطہ کے طریق کو "دائرہ" ثابت نقطہ کو "مرکز" اور مستقل فاصلہ کو "نصف قطر" کہتے ہیں۔

۳،۲۔ **دائرہ کی مساوات** (مرکز کو مبدا مان کر)۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے اور نصف قطر ا۔



فرض کرو کہ ولا اور وما حوالہ کے علی القوائم محور ہیں اور ن دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ہے جس کے محدد (لا،ما) ہیں۔ ولا پر عمود ن م ڈالو اور

ون کو ملاؤ تو

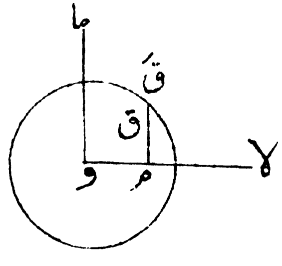
$$\text{وم}^2 + \text{من}^2 = \text{ون}^2$$

لیکن ون = اَ ، وم = لا ، من = ما اس لیے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{اَ}^2 \quad ..... \quad (1)$$

دائرہ کی مطلوبہ مساوات یہی ہے اور یہ سادہ ترین شکل میں ہے۔ اس کو دائرہ کی "معیاری مساوات" بھی کہتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے لیکن متجانس نہیں ہے۔

۲۱ د ۳ - ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ اگر ایک نقطہ ق دائرہ کے محیط پر واقع نہ ہو بلکہ اس کے اندر یا باہر کہیں واقع ہو تو محددوں میں کیا رشتہ ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ نقطہ ق دائرہ کے اندر واقع ہے اور اس کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں۔



نقطہ ق سے ولا پر عمود ق م ڈالو اور م ق کو خارج کرو کہ دائرہ کے محیط سے نقطہ قَ پر ملے۔

فرض کرو کہ م قَ = ما ، لیکن وم = لاَ ، مق = ماَ۔
تو چونکہ نقطہ قَ دائرہ کے محیط پر ہے اس لیے

$$\text{لاَ}^2 + \text{ما}^2 = \text{اَ}^2$$

لیکن مق < مقَ یعنی ماَ < ما اس لیے

$$\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 < \text{اَ}^2 \quad \text{یعنی} \quad \text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 - \text{اَ}^2 < 0$$

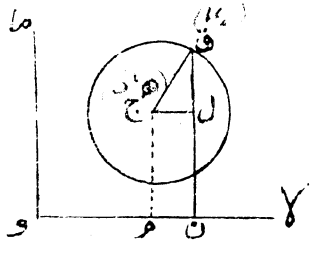
اسی طرح شکل بنا کر آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر نقطہ ق (لاَ، ماَ) دائرہ کے باہر واقع ہے تو

لاَ^{2} + ماَ^{2} > ا^2 یعنی لاَ^{2} + ماَ^{2} − ا^2 > ۰

پس کسی نقطہ (لاَ، ماَ) کے متعلق یہ معلوم کرنا ہو کہ وہ دائرہ لا^2 + ما^2 = ا^2 کے لحاظ سے کہاں واقع ہے تو جملہ لاَ^{2} + ماَ^{2} − ا^2 کی قیمت دریافت کرنی چاہیے۔ اگر یہ قیمت مثبت ہو تو نقطہ دائرہ کے باہر واقع ہے، اگر قیمت صفر ہو تو نقطہ دائرہ کے محیط پر واقع ہے اور اگر قیمت منفی ہو تو نقطہ دائرہ کے اندر واقع ہے۔

۳۲، ۳ - کسی قائم محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی مساوات

فرض کرو کہ ولا اور وما دو قائم محور ہیں۔
فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے جس کے محدد (ھ، ک) ہیں اور نصف قطر ا ہے۔



دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ق لو اور فرض کرو کہ اس کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں۔ محور ولا پر عمود ج م اور ق ن ڈالو۔
ن ق پر عمود ج ل ڈالو۔ اب

ج ل = م ن = و ن − و م = لاَ − ھ

اور

ل ق = ن ق - ن ل = ن ق - م ج = ما - ک

پس چونکہ

ج ل^2 + ل ق^2 = ج ق^2

اس لیے

(لا - ھ)^2 + (ما - ک)^2 = ر^2 .... (۱)

جو مطلوبہ مساوات ہے ۔ اس کو پھیلا کر یوں لکھ سکتے ہیں

لا^2 + ما^2 - ۲ ھ لا - ۲ ک ما + ھ^2 + ک^2 - ر^2 = ۰ ..... (۲)

یہ دائرہ کی عام مساوات ہے ۔ اس کے دیکھنے سے فوراً معلوم ہوتا ہے کہ یہ مساوات درجہ دوم کی غیر متجانس ہے جس میں لا^2 اور ما^2 کے سر مساوی ہیں اور لا ما والی رقم موجود نہیں ہے یعنی لا ما کا سر صفر ہے ۔

اس کے برعکس ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ کوئی دوسرے درجہ کی مساوات جس میں یہ خاصتیں پائی جائیں یعنے جس میں لا^2 اور ما^2 کے سر مساوی ہوں اور لا ما والی رقم موجود نہ ہو ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے ۔ اس طرح کی عام سے عام مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی :-

لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ .... (۳)

اس کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں :-

(لا + گ)^2 + (ما + ف)^2 = گ^2 + ف^2 - ج .... (۴)

مساوات (۴) کا مساوات (۱) کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ یہ ایک دائرہ کی مساوات ہے جس کا مرکز نقطہ (-گ، -ف) ہے اور جس کا نصف قطر √(گ^2 + ف^2 - ج) کے مساوی ہے ۔

۲۳ء۳ :-

جس طرح دائرہ کی معیاری شکل کے لیے دفعہ ۲۱ء۳ میں ہم نے شرط معلوم کی تھی کہ ایک نقطہ ن (لاَ ، ماَ) دیے ہوئے دائرہ لا^2 + ما^2 = ر^2 کے اندر یا باہر کب واقع ہوتا ہے اسی طرح دائرہ کی عام مساوات

لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ...... (۱)

کے لیے بھی ہم اسی طرح کی شرط معلوم کر سکتے ہیں۔ گذشتہ دفعہ کی مساوات (۴) کی رُو سے (۱) کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں :-

(لا + گ)^2 + (ما + ف)^2 = گ^2 + ف^2 − ج (۲)

اب مبدا کو دائرہ کے مرکز (−گ ، −ف) پر منتقل کرو اور محوروں کو پرانے محوروں کے متوازی رکھو۔ اس لیے دفعہ ۱۹ء۱ (۱) کے بموجب نئے محدّدوں (لٔا ، مٔا) اور پرانے محدّدوں (لا ، ما) میں ذیل کا رشتہ ہوتا ہے :-

لٔا = لا + گ ، مٔا = ما + ف ...... (۳)

اسی طرح دیے ہوئے نقطہ ن (لاَ ، ماَ) کے محدّد بدل کر (لٔاَ ، مٔاَ) ہو جائیں گے جہاں

لٔاَ = لاَ + گ ، مٔاَ = ماَ + ف ...... (۴)

دائرہ کی مساوات (۲) میں (۳) درج کرنے پر نئے محدّدوں میں مساوات ہو جاتی ہے

لٔا^2 + مٔا^2 = گ^2 + ف^2 − ج ...... (۵)

اب یہ معلوم کرنے کے لیے کہ دیا ہوا نقطہ ن (لٔاَ ، مٔاَ) دائرہ (۵) کے اندر

یا باہر واقع ہے ہم دفعہ ۲۱ (۳) کے نتیجہ کو استعمال کرسکتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے کہ نقطہ ن دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہے بموجب اس کے کہ

$$لا^۲ + ما^۲ - (گ^۲ + ف^۲ - ج) \gtrless ۰$$

یعنے (۴) سے لا، ما کی قیمتیں درج کرنے پر ملتا ہے کہ ن دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہے بموجب اس کے کہ

$$(لا + گ)^۲ + (ما + ف)^۲ - (گ^۲ + ف^۲ - ج) \gtrless ۰$$

یعنے بموجب اس کے کہ

$$لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج \gtrless ۰ \qquad (۶)$$

غرض کہ اگر نقطہ (لا، ما) دائرہ کے اندر واقع ہو تو

$لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج$ کو منفی ہونا چاہیے اور اگر نقطہ (لا، ما) دائرہ کے باہر واقع ہو تو۔

$لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج$ کو مثبت ہونا چاہیے۔

اس طرح دائرہ کی مساوات میں صرف نقطہ کے محدد درج کرنے پر ہمیں معلوم ہوجاتا ہے کہ نقطہ دائرہ کے اندر یا باہر یا محیط پر واقع ہے

مثال (۱) اُس دائرہ کی مساوات دریافت کرو جس کا نصف قطر ۳ ہے اور جس کا مرکز نقطہ (-۱، ۲) ہے۔

اس کے لیے ہم مساوات (۱) استعمال کرتے ہیں جس میں ہ = -۱، ک = ۲ اور ق = ۳

{لا − (−۱)}^{2} + {ما − ۲}^{2} = (۳)^2

یعنی (لا + ۱)^2 + (ما − ۲)^2 = ۹

یعنی لا^2 + ما^2 + ۲لا − ۴ما − ۴ = ۰

مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال (۲) مساوات لا^2 + ما^2 + ۱۰لا + ۱۲ما − ۳۹ = ۰ سے تعبیر ہونے والے دائرہ کے مرکز کے محدّد اور نصف قطر کا طول معلوم کرو۔

دی ہوئی مساوات کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

(لا + ۵)^2 + (ما + ۶)^2 = ۳۹ + ۲۵ + ۳۶

= ۱۰۰ = (۱۰)^2

اب مساوات (۱) سے مقابلہ کرنے پر ظاہر ہے کہ مرکز کے محدّد (−۵، −۶) ہیں اور نصف قطر کا طول ۱۰ ہے۔

مثال (۳) اُس دائرہ کی مساوات دریافت کرو جو تین نقطوں (۱، ۲)، (۳، −۴) اور (۵، −۶) میں سے گذرتا ہے۔

فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ کی مساوات

لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہے۔ اب چونکہ یہ دائرہ دیے ہوئے تین نقطوں میں سے گزرتا ہے اس لیے تینوں نقطوں کے محدّد اس مساوات کو پورا کرینگے جس سے گ، ف اور ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم کو تین ہمزاد مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:—

۲گ + ۴ف + ج = −۵

۶گ − ۸ف + ج = −۲۵

۱۰گ − ۱۲ف + ج = −۶۱

معمولی طریقہ سے ان مساواتوں کو حل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

گ = -۱۱، ف = -۲، ج = ۲۵.

اور اس لیے مطلوبہ دائرہ کی مساوات ہے

لا^{2} + ما^{2} - ۲۲ لا - ۴ ما + ۲۵ = ۰

مثال (۴) اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقاط ا (۱، ۲)، ب (-۳، ۵) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا جائے۔

فرض کرو کہ دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہے تو چونکہ زاویہ ب ن ا قائمہ ہے اس لیے ظاہر ہے کہ

ب ن^{2} + ا ن^{2} = ب ا^{2}

یعنی [{لا-(-۳)}^{2} + {ما-۵}^{2}] + [{لا-۱}^{2} + {ما-۲}^{2}] = {۱-(-۳)}^{2} + {۲-۵}^{2}

یعنی لا^{2} + ۶ لا + ۹ + ما^{2} - ۱۰ ما + ۲۵ + لا^{2} - ۲ لا + ۱ + ما^{2} - ۴ ما + ۴ = ۴^{2} + ۳^{2}

یعنی ۲ لا^{2} + ۲ ما^{2} + ۴ لا - ۱۴ ما + ۱۴ = ۰

یعنی لا^{2} + ما^{2} + ۲ لا - ۷ ما + ۷ = ۰

یعنی (لا + ۱)^{2} + (ما - ۷/۲)^{2} = ۱ + ۴۹/۴ - ۷ = ۲۵/۴

اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ دائرہ کا مرکز (-۱، ۷/۲) اور نصف قطر ۵/۲ ہے۔

مشق ۱۰

(۱) اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو:-

(ا) جس کا نصف قطر ا اور مرکز (۰، -۱) ہے۔

(ب) نصف قطر ۷/۲، مرکز (-۳، ۳/۲)

(ج) نصف قطر ۳/۲، مرکز (-۱/۲، ۱)

(د) جس کا نصف قطر ا + ب اور مرکز (ا، - ب) ہے

جواب (ا) لا^۲ + ما^۲ + ۲ما = ۰

(ب) لا^۲ + ما^۲ + ۶لا - ۳ما - ۱ = ۰

(ج) لا^۲ + ما^۲ + لا - ۲ما - ۱ = ۰

(د) لا^۲ + ما^۲ - ۲الا + ۲ب ما - ۲اب = ۰

(۲) ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے دائروں کے نصف قطر اور مرکزوں کے محدد معلوم کرو:—

(ا) لا^۲ + ما^۲ - ۸لا + ۱۰ما + ۵ = ۰

(ب) ۳لا^۲ = ما(۷ - ۳ما)

(ج) (لا - ۲)(لا - ۴) + (ما - ۳)(ما - ۵) = ۰

(د) ۷لا^۲ + ۳ما^۲ - ۴ما = (۱ - ۲لا)^۲؛

(ھ) ۴لا^۲ + ۴ما^۲ - ۴لا - ۵ما + ۱ = ۰

(و) (لا - ما + ا)^۲ + (لا + ما - ا)^۲ = ۲ا^۲

جواب (ا) ۶، (۴، -۵)؛

(ب) ۷/۶، (۰، ۷/۶)؛

(ج) ۲√، (۳، ۴)؛

(د) ۱۱√/۳، (-۲/۳، ۲/۳)؛

(ھ) ۵/۸، (۱/۲، ۵/۸)؛

(و) ا، (۰، ا)؛

(۳) اُن دائروں کی مساواتیں معلوم کرو جو ذیل کے نقطوں میں سے گزرتے ہیں:

(ا) (۱، ۱)، (۲، -۱)، اور (۳، ۲) ۔

(ب) (۰، ۰)، (۲، ۰)، (۰، -۳) ۔

(ج) (۱، ۶)، (۳، ۲) اور (۲، ۳) ۔

(د) (۰، ۱)، (۱، ۰) اور (۲، ۱) ۔

جواب (ا) لا^2 + ما^2 - ۵لا - ما + ۴ = ۰

(ب) لا^2 + ما^2 - ۲لا + ۳ما = ۰

(ج) لا^2 + ما^2 - ۱۲لا - ۱۲ما + ۴۷ = ۰

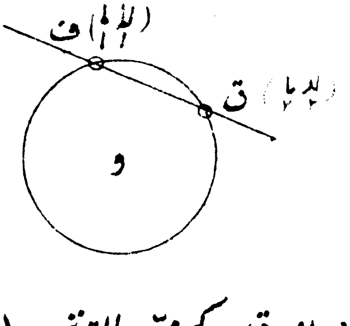
(د) لا^2 + ما^2 - ۲لا - ۲ما + ۱ = ۰

(۴) اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مبدا ءسے گزرتا ہے اور محوروں پر جس کے مقطوعے ۳ اور ۴ ہیں ۔

جواب لا^2 + ما^2 - ۳لا - ۴ما = ۰

۳،۳ ۔ دائرہ کے وتر کی مساوات :-

فرض کرو کہ ایک دائرہ پر ف اور ق دو نقطے ہیں ۔ دائرہ کی مساوات کو ہم معیاری شکل میں لیتے ہیں یعنی لا^2 + ما^2 = ر^2 ..... (۱)



اب اگر ف اور ق کے محدد بالترتیب (لا$_1$، ما$_1$) اور (لا$_2$، ما$_2$) ہیں تو یہ دونوں دائرہ کی مساوات کو پورا کرینگے یعنی

لا$_1^2$ + ما$_1^2$ = ر^2

لا$_2^2$ + ما$_2^2$ = ر^2 .... (۲)

اس لیے تفریق کرنے پر

$$(\text{لا}_2^2 - \text{لا}_1^2) + (\text{ما}_2^2 - \text{ما}_1^2) = 0$$

یعنی

$$(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)(\text{لا}_2 + \text{لا}_1) = -(\text{ما}_2 - \text{ما}_1)(\text{ما}_2 + \text{ما}_1)$$

یعنی

$$\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} = -\frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ہم کو معلوم ہے کہ دو نقطوں ف اور ق کو ملانے والے خط کی مساوات حسب ذیل ہوتی ہے۔

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$$

یعنی

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = \frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مساوات (۴) کسی دو نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات ہے، چاہے وہ کہیں واقع ہوں۔ لیکن زیر بحث صورت میں نقطے ف اور ق خاص طرح کے ہیں۔ یعنی دائرہ کے محیط پر واقع ہیں۔ پس وتر ف ق کی مساوات دریافت کرتے وقت ہم کو یہ امر بھی ملحوظ رکھنا چاہیے۔ اس کے لیے ہم مساوات (۳) کو استعمال کرتے ہیں اور اس میں سے $\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$ کی قیمت مساوات (۴) میں بھرتی کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = -\frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1} \quad \ldots\ldots (۵)$$

جلیپی ضرب دینے اور سب رقموں کو سیدھی طرف لے جانے پر ملتا ہے

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2) = 0 \quad \ldots\ldots (۶)$$

یہ دائرہ کے وتر کی مساوات ہے جو ایک متشاکل صورت میں ہے۔

مثال۔ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲۵$ پر دو نقطے ا (−۳، ۴) اور ب (۴، ۳) ہیں

ان کو ملانے والے وتر کی مساوات دریافت کرو۔

نقاط ا اور ب کو ملانے والے خط کی مساوات حسب ذیل ہے:-

$$\frac{\text{لا} - (-۳)}{-۳ - ۴} = \frac{\text{ما} - ۴}{۲ - ۴}$$ یعنے (لا+۳)(۲-۴) + (ما-۴)(۴+۳) = ۰

یعنے لا + ۳ = - ۷ (ما - ۴)　یعنے (لا + ۳) + ۷ (ما - ۴) = ۰

یعنے لا + ۷ما = ۲۵

یہ وتر ا ب کی مطلوبہ مساوات ہے جو مساوات (۶) سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے

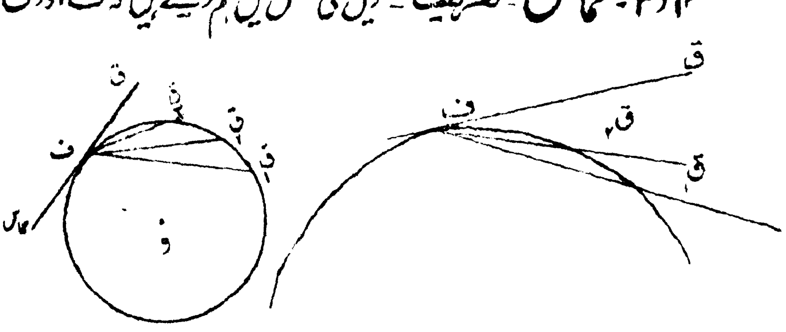
مشاہدہ: وتر کی مساوات کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں:

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا} - \text{لا}_2) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما} - \text{ما}_2) = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2 \quad \ldots (۷)$$

اس مساوات میں دونوں طرف سے لا^2 اور ما^2 کے سرکٹ جاتے ہیں اس لیے در اصل یہ صرف پہلے درجہ کی مساوات ہے اور مساواتوں (۲) سے ظاہر ہے کہ نقاط ف اور ق کے محدد $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$ مساوات (۷) کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ خط نقاط ف اور ق میں سے گزرتا ہے یعنے مطلوبہ وتر ہے۔

وتر کی مساوات کو لکھنے کا یہ طریقہ عام ہے اور ہر دوسرے درجہ کے منحنی کے لیے یعنے ہر مخروطی کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

۳،۴ - مماس - تعریف - ذیل کی شکل میں ہم دیکھتے ہیں کہ ف اور ق



دائرہ یا کسی منحنی پر کے دو نقطے ہیں اور ان کو ملانے والا خط دائرہ یا منحنی کا وتر ہے۔ اب چاہے ق کہیں واقع ہو یہ خط دائرہ یا منحنی کا وتر ہوگا۔ فرض کرو کہ ق کو ہم دائرہ یا منحنی کے محیط پر ف کے قریب بتدریج لاتے ہیں۔ جس وقت ق نقطہ ف کے اس قدر نزدیک آجائے کہ اس پر عین منطبق ہونے کو ہو تو اس انتہائی صورت میں جو خط حاصل ہوتا ہے اس کو دائرہ یا منحنی کا مماس کہتے ہیں۔
شکل بالا سے اس کی کافی وضاحت ہوتی ہے۔ مماس کا مفہوم بہت اہم ہے اور طالب علم کو اسے نہایت غور و احتیاط کے ساتھ سمجھنا چاہیے۔ اس کا بنیادی اصول دراصل ایک تفاعل کی انتہا کے مفہوم پر منحصر ہے جو تفرقی احصاء میں تفصیل کے ساتھ بتایا جاتا ہے۔

۱۴،۳۔ دائرہ کے مماس کی مساوات :۔

اس مساوات کو اوپر کی تعریف کے بموجب ہم وتر کی مساوات سے اخذ کرسکتے ہیں۔
دفعہ (۳،۳) کی مساوات (۶) میں ہم نے وتر ف ق کی مساوات شکل ذیل میں حاصل کی تھی:

(لا - لا۱) (لا۱ + لا۲) + (ما - ما۱) (ما۱ + ما۲) = ۰ ...... (۱)

اب ظاہر ہے کہ جب نقطہ ق نقطہ ف پر عین منطبق ہونے کو ہوگا تو لا۲ کی قیمت لا۱ کے قریب اور ما۲ کی قیمت ما۱ کے قریب آئیگی۔
پس مساوات (۱) میں لا۲ کی بجائے لا۱ اور ما۲ کی بجائے ما۱ رکھنے پر وہ ہوجاتی ہے:

(لا - لا۱) (۲ لا۱) + (ما - ما۱) (۲ ما۱) = ۰

یعنے

لا۱ (لا - لا۱) + ما۱ (ما - ما۱) = ۰ ...... (۲)

یہ مماس کی مساوات ہے لیکن ابھی یہ مطلوبہ شکل میں نہیں ہے۔ مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 - \text{لا}_1^2 - \text{ما}_1^2 = 0$$

یعنی

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

لیکن (لا۱، ما۱) نقطہ ف کے محدد ہیں جو دائرہ پر واقع ہے اس لیے یہ دائرہ کی مساوات کو پورا کرتے ہیں یعنی

$$\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots \quad (۴)$$

اس قیمت (۴) کو مساوات (۳) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots \quad (۵)$$

یہی مماس کی مطلوبہ مساوات ہے۔ اس کو یاد رکھنے کے لیے ہم ذیل کی ترکیب اختیار کر سکتے ہیں:—

دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ کو پھیلا کر اس شکل میں لکھو

$$\text{لا} \times \text{لا} + \text{ما} \times \text{ما} = \text{ر}^2$$

پھر اس میں سے ہر طرف ایک لا کی بجائے لا۱ اور ایک ما کی بجائے ما۱ رکھو تو

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ر}^2$$

حاصل ہو جاتا ہے۔ یہ قاعدہ عام ہے اور آگے چل کر ہم دیکھیں گے کہ تمام مخروطیوں کے مماس کی مساوات اس طرح اخذ کی جا سکتی ہے۔

مماس کی یہی مساوات وتر کی مساوات (۷) (دفعہ ۲، ۳) سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے:—

چونکہ لا کی قیمت لا۱ کے قریب اور ما کی قیمت ما۱ کے قریب آتی ہے اس لیے مماس کی مساوات حسب ذیل ہے

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا} - \text{لا}_1) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما} - \text{ما}_1) = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ر}^2$$

یعنے $$-2\,\text{لا}\,\text{لا}_1 - 2\,\text{ما}\,\text{ما}_1 + \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = -\text{ر}^2$$

مگر چونکہ $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = +\text{ر}^2$ کیونکہ نقطہ (لا۱، ما۱) دائرہ پر واقع ہے

نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات حسب سابق

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ر}^2$$

ہے۔

مثال۔ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲۵$ کے نقطہ ن (۴، −۳) پر کے مماس کی مساوات دریافت کرو۔

فرض کرو کہ دائرہ پر ایک اور نقطہ نَ (۴ + ھ، −۳ + ک) واقع ہے جو نقطہ ن کے بہت قریب ہے یعنے ھ اور ک بہت چھوٹے عدد ہیں ملانے والے خط (وتر ن نَ) کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{لا} - ۴}{۴ + \text{ھ} - ۴} = \frac{\text{ما} + ۳}{-۳ + \text{ک} + ۳} \quad \text{یعنے} \quad \frac{\text{لا} - ۴}{\text{ھ}} = \frac{\text{ما} + ۳}{\text{ک}} \qquad (۶)$$

ن پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے نقطہ نَ کو ن کے عین منطبق ہونے تک قریب لانا چاہیے یعنے ھ اور ک کو اس قدر چھوٹا کرنا چاہیے کہ وہ عین صفر ہونے کو ہوں لیکن بالکل صفر نہ ہوں۔ مگر چونکہ نقطہ نَ بہر حال دائرہ پر واقع ہے اس لیے

$$(۴ + \text{ھ})^2 + (-۳ + \text{ک})^2 = ۲۵$$

یعنے $$۸\,\text{ھ} - ۶\,\text{ک} + \text{ھ}^2 + \text{ک}^2 = ۰$$

لیکن چونکہ ھ اور ک جس قدر چاہیں چھوٹے ہو سکتے ہیں اس لیے ھ² اور ک² کو

نظر انداز کیا جا سکتا ہے پس

$$\text{۸ ھ} - \text{۶ ک} = \text{۰} \quad \text{یعنے} \quad \text{ھ} = \frac{\text{۶}}{\text{۸}}\text{ک} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\text{ک} \quad \ldots \text{(۷)}$$

پس مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ھ اور ک میں یہ رشتہ مساوات (۶) میں درج کرنا چاہیے

$$\frac{\text{لا} - \text{۴}}{\frac{\text{۳}}{\text{۴}}\text{ک}} = \frac{\text{ما} + \text{۳}}{\text{ک}} \quad \text{یعنے} \quad \text{۴ لا} - \text{۳ ما} = \text{۲۵}$$

ضابطہ (۵) میں $\text{لا}_1 = \text{۴}$ اور $\text{ما}_1 = -\text{۳}$، $\text{ر}^2 = \text{۲۵}$ رکھنے پر بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۴۳ء۳ - مماس کی مساوات معلوم کرنے کے مذکورۂ بالا طریقہ کو واضح کرنے کے لیے ہم عام شکل میں یہ مساوات دریافت کرینگے تاکہ یہ طریقہ طالب علم کے ذہن نشین ہو جائے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{۲گ لا} + \text{۲ف ما} + \text{ج} = \text{۰} \quad \ldots\ldots \text{(۱)}$$

ہے اور اس کے محیط پر کوئی دو نقطے ف اور ق ہیں جن کے محدد بالترتیب $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ ہیں۔ چونکہ یہ دونوں نقطے دائرہ کی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے

$$\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 + \text{۲گ لا}_2 + \text{۲ف ما}_2 + \text{ج} = \text{۰}$$

$$\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{۲گ لا}_1 + \text{۲ف ما}_1 + \text{ج} = \text{۰}$$

پس تفریق کرنے پر

$$(\text{لا}_2^2 - \text{لا}_1^2) + (\text{ما}_2^2 - \text{ما}_1^2) + \text{۲گ}\,(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) + \text{۲ف}\,(\text{ما}_2 - \text{ما}_1) = \text{۰}$$

یعنے

$$(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)(\text{لا}_2 + \text{لا}_1 + \text{۲گ}) + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)(\text{ما}_2 + \text{ما}_1 + \text{۲ف}) = \text{۰}$$

یعنے

$$\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} = -\frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1 + \text{۲ف}}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1 + \text{۲گ}} \quad \ldots\ldots \text{(۲)}$$

لیکن جیسا کہ گذشتہ دفعہ کی مساوات (۴) سے ظاہر ہے کسی دو نقطوں ف اور ق کو ملانے والے خط کی مساوات حسب ذیل ہوتی ہے:

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = \frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

پس وتر ف ق کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) سے $\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$ کی قیمت مساوات (۳) میں بھرتی کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = -\frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1 + ۲\text{ف}}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1 + ۲\text{گ}}$$

یعنی

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_2 + \text{لا}_1 + ۲\text{گ}) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_2 + \text{ما}_1 + ۲\text{ف}) = ۰ \quad (۴)$$

یہی اس عام صورت میں دائرہ کے وتر کی مساوات ہے۔

وتر کی اس مساوات سے مماس کی مساوات اخذ کرنے کے لیے ہم وہی استدلال کرتے ہیں جو اوپر معیاری صورت کے لیے کیا گیا تھا۔ یعنی نقطۂ ق کو بتدریج نقطۂ ف کے قریب لاتے ہیں اور انتہا میں جب نقطۂ ق نقطۂ ف پر عین منطبق ہونے کو ہو تو وتر کی مساوات میں $\text{لا}_2 = \text{لا}_1$ اور $\text{ما}_2 = \text{ما}_1$ رکھتے ہیں۔ اس لیے مساوات (۴) سے حاصل ہوگا

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(۲\text{لا}_1 + ۲\text{گ}) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(۲\text{ما}_1 + ۲\text{ف}) = ۰ \quad \ldots\ldots (۵)$$

مساوات کو (۲) پر تقسیم کرنے اور پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 + \text{گ}\,\text{لا} + \text{ف}\,\text{ما} - (\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1) = ۰ \quad \ldots (۶)$$

لیکن چونکہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ دائرہ پر واقع ہے اس لیے

$$\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + ۲\text{گ}\,\text{لا}_1 + ۲\text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = ۰$$

یعنی

$$\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1 = -(\text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج}) \quad \ldots\ldots (۷)$$

مساواتوں (۶) اور (۷) سے ملتا ہے:

لا لا۱ + ما ما۱ + گ لا + ف ما + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰

یعنی

لا لا۱ + ما ما۱ + گ (لا + لا۱) + ف (ما + ما۱) + ج = ۰ (۸)

اور یہی نقطہ ف پر کے مماس کی مطلوبہ مساوات ہے۔

اس عام صورت میں بھی ہم دفعہ ۳۲ کی مساوات (۷) کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ دائرہ پر کے نقاط ف (لا۱، ما۱) اور ق (لا۲، ما۲) میں سے گزرنے والے وتر کی مساوات حسب ذیل ہے:

(لا - لا۱) (لا - لا۲) + (ما - ما۱) (ما - ما۲) = لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج (۹)

یہ ایک پہلے درجہ کی مساوات ہے اور نقاط ف، ق کے محدد اس کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ وتر ف ق کی مساوات ہے۔

مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں لا۲ = لا۱، ما۲ = ما۱ رکھنے پر ملتا ہے

(لا - لا۱)² + (ما - ما۱)² = لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج

یعنی

-۲ لا لا۱ - ۲ ما ما۱ + لا۱² + ما۱² = ۲گ لا + ۲ف ما + ج

لیکن چونکہ (لا۱، ما۱) دائرہ پر واقع ہے اس لیے

لا۱² + ما۱² + ۲گ لا۱ + ۲ف ما۱ + ج = ۰ یعنی لا۱² + ما۱² = -۲گ لا۱ - ۲ف ما۱ - ج

پس نقطۂ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:-

-۲ لا لا۱ - ۲ ما ما۱ - ۲گ (لا + لا۱) - ۲ف (ما + ما۱) - ۲ج = ۰

یعنی

لا لا۱ + ما ما۱ + گ (لا + لا۱) + ف (ما + ما۱) + ج = ۰

مثال ۔ دائرہ لا² + ما² - ۵لا - ما + ۴ = ۰ کے نقطۂ ن (۲، -۱) پر کے مماس کی مساوات دریافت کرو:۔

فرض کرو کہ دائرہ پر ایک اور نقطہ نَ (۲ + ھ، -۱ + ک) واقع ہے جو پہلے نقطہ کے بہت قریب ہے۔ پس

$$(۲ + ھ)^{۲} + (-۱ + ک)^{۲} - ۵ (۲ + ھ) - (-۱ + ک) + ۴ = ۰$$

یعنی $-ھ - ۳ک + ھ^{۲} + ک^{۲} = ۰$ (۱۰)

لیکن ن نَ کو ملانے والے خط کی مساوات ہوگی

$$\frac{لا - ۲}{۲ + ھ - ۲} = \frac{ما + ۱}{-۱ + ک + ۱} \quad یعنی \quad \frac{لا - ۲}{ھ} = \frac{ما + ۱}{ک}$$ (۱۱)

ن پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے نَ کو ن کے قریب لانا چاہیے یعنی ھ اور ک کو بہت چھوٹا کرنا چاہیے۔ اس صورت میں مساوات (۱۰) میں $ھ^{۲}$ اور $ک^{۲}$ کو نظر انداز کر سکتے ہیں جس سے وہ مساوات ہو جاتی ہے

$$ھ = -۳ک$$ (۱۲)

مساوات (۱۱) میں یہ قیمت درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{لا - ۲}{-۳ک} = \frac{ما + ۱}{ک} \quad یعنی \quad (لا - ۲) + ۳ (ما + ۱) = ۰$$

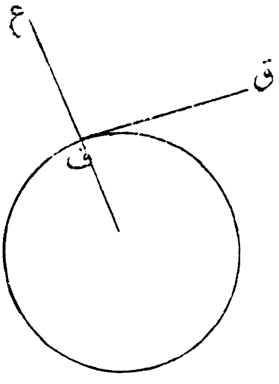
یعنی مماس کی مطلوبہ مساوات $لا + ۳ما + ۱ = ۰$ ہے جو ضابطہ (۸) میں $لا_{۱} = ۲$ اور $ما_{۱} = -۱$ رکھنے پر بھی فوراً حاصل ہو سکتی ہے۔

۳۴،۳: عماد - تعریف :-

دائرہ اور بالعموم کسی منحنی کے عماد کی تعریف حسبِ ذیل کی جاتی ہے:

فرض کرو کہ ف دائرہ پر ایک نقطہ ہے۔ اور ف ق دائرہ کا مماس ہے۔

نقطہ ف میں سے ایک خط ف ع کھینچو جو مماس ف ق پر علی القوائم ہو۔



خط ف ع کو نقطہ ف پر دائرہ کا عماد کہتے ہیں۔

عماد کی مساوات :-

اس تعریف کی بناء پر ہم دائرہ کے عماد کی مساوات آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے اور نقطہ ف کے محدد $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ ہیں۔

مماس ف ق کی مساوات دفعہ (۴۱، ۳) میں ہم نے معلوم کی تھی

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اب ہم کو اس خط کی مساوات معلوم کرنا ہے جو نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ میں سے گزرتا ہے اور خط (۲) پر علی القوائم ہے۔ اگر مطلوبہ خط کا زاویہ محور لا کے

ساتھ معلوم ہو جائے تو ہم اس کی مساوات فوراً لکھ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ طہ ہے۔

دفعہ (۲،۱۴) میں ہم نے دیکھا کہ اگر ایک خط

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$$

کا زاویہ محور لا کے ساتھ عہ ہو تو

$$\text{مس عہ} = -\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

اب اگر خطِ مستقیم (۲) کو لیا جائے تو

$$\text{مس عہ} = -\frac{\text{لا}_۱}{\text{ما}_۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

چونکہ عماد مماس پر علی القوائم ہے اس لیے

$$\text{مس طہ} = -\frac{۱}{\text{مس عہ}}$$

$$= \frac{\text{ما}_۱}{\text{لا}_۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

اب عماد کی مساوات ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} - \text{ما}_۱ = \text{مس طہ}\,(\text{لا} - \text{لا}_۱)$$

$$= \frac{\text{ما}_۱}{\text{لا}_۱}\,(\text{لا} - \text{لا}_۱)$$

$$\text{یعنے}\quad \text{لا}_۱(\text{ما} - \text{ما}_۱) = \text{ما}_۱\,(\text{لا} - \text{لا}_۱)$$

$$\text{یعنے}\quad \text{لا}_۱\,\text{ما} = \text{ما}_۱\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

$$\text{یعنے}\quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}_۱} = \frac{\text{ما}}{\text{ما}_۱}$$

یہی عماد کی مطلوبہ مساوات ہے:- اس مساوات سے پتہ چلتا ہے کہ عماد مرکز میں سے گزرتا ہے کیونکہ مرکز یعنے مبداء کے محدد (۰، ۰) مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

عماد کی یہ خصوصیت ہم کو ابتدائی علم ہندسہ سے بھی معلوم ہے کہ مرکز کو نقطۂ تماس سے ملانے والا نصف قطر مماس پر علی القوائم ہوتا ہے۔

مثال ۷ - ہمیں عماد یعنی ایسے خط کی مساوات مطلوب ہے جو (لا_1، ما_1) میں سے گزرتا ہے اور مماس $\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ر}^2$ پر علی القوائم ہے۔ جیسا باب دوم دفعہ ۲۶ ۲ میں بیان ہوا ایسے خط کی مساوات فوراً لکھی جاسکتی ہے۔

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1\ (\text{یعنی مماس کی مساوات میں لا کا سر})} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1\ (\text{یعنی مماس کی مساوات میں ما کا سر})}$$

یا بالعموم ایسے خط کی مساوات جو (لا_1، ما_1) میں سے گزرے اور $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ پر علی القوائم ہو یہ ہوگی $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ا}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ب}}$ طالب علم تصدیق کرے۔

مشق ۱۱

(۱) مذکورۂ بالا طریقہ سے دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\text{گ}\,\text{لا} + ۲\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ کے عماد کی مساوات دریافت کرو اور تصدیق کرو کہ عماد مرکز کو نقطۂ تماس سے ملانے والا خط ہے۔

جواب: $(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{لا}_1 + \text{گ}) = (\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{ما}_1 + \text{ف})$

(۲) دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲۵$ کے مماس کی مساوات نقطۂ (۳، ۴) پر معلوم کرو۔

جواب: $۳\,\text{لا} + ۴\,\text{ما} = ۲۵$

(۳) دائرۂ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۱۶۹$ کے مماسوں کی مساواتیں نقاط (۵، ۱۲) اور (۱۲، -۵) پر دریافت کرو اور بتاؤ کہ یہ دونوں مماس کس نقطہ پر قطع کرتے ہیں اور ان کا درمیانی

زاویہ کیا ہے۔

جواب: ۵لا + ۱۲ما = ۱۶۹، ۱۲لا − ۵ما = ۱۶۹ مماسوں کا نقطۂ تقاطع (۱۳، ۰)، زاویۂ قائمہ

(۴) مماس وہ خط ہے جو مرکز کو نقطۂ تماس سے ملانے والے نصف قطر پر عمود ہے۔ اس خاصیت کو استعمال کرکے دائرہ کے مماس کی مساوات اخذ کرو۔

(۵) سوال (۳) کے دائرہ کا عماد نقطۂ (۵، ۱۲) پر دریافت کرو۔

جواب: ۱۲لا − ۵ما = ۰

(۶) دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} − ۲لا + ۴ما = ۲۰ کے نقطۂ (−۲، ۲) پر کے مماس اور عماد کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: ۳لا − ۴ما + ۱۴ = ۰، ۴لا + ۳ما + ۲ = ۰

(۷) دائرہ ۲لا^{۲} + ۲ما^{۲} − ۴لا + ۹ما = ۰ کے مبدا پر کے مماس اور عماد کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: ۴لا − ۹ما = ۰، ۹لا + ۴ما = ۰

۵٫۳ : دائرہ اور خطِ مستقیم کا تقاطع :—

علمِ ہندسہ سے ہم کو معلوم ہے کہ ایک خط دائرہ کو بالعموم دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ اب ہم تحلیلی طور پر ان نقاطِ تقاطع کو معلوم کرینگے اور اسی کے ضمن میں یہ بھی دریافت کرینگے کہ دیا ہوا خط کس صورت میں دائرہ کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لا^{۲} + ما^{۲} = ل^{۲} .... (۱)

ہے اور دیا ہوا خطِ مستقیم

ما = م لا + ج .... (۲)

ہے۔ اگر ان کا ایک نقطۂ تقاطع (لاَ، ماَ) ہے تو ظاہر ہے کہ یہ نقطہ دائرہ پر بھی واقع ہوگا اور خطِ مستقیم پر بھی۔ اس لیے اس کے محدّد دائرہ اور خطِ مستقیم دونوں کی مساواتوں کو ایک ساتھ پورا کرینگے۔ اس طرح دو مجہولوں لا اور ما کو

دریافت کرنے کے لیے ہمیں دو ہمزاد مساواتیں ملتی ہیں - ان سے حسب معمول ہم پہلے ایک مجہول کو ساقط کر کے دوسرے کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں - اس لیے مساوات (۲) سے ما کی قیمت کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے :

$$\text{لا}^2 + (\text{م لا} + \text{ج})^2 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

یعنی

$$\text{لا}^2 (۱ + \text{م}^2) + ۲\,\text{م ج لا} + \text{ج}^2 - \text{ر}^2 = ۰ \quad \ldots\ldots \quad (۴)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ لا میں یہ ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے اور اس سے ہم کو بالعموم لا کی دو قیمتیں لا_1 اور لا_2 ملتی ہیں جن کو ہم فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پھر ہم کو ما کی دو قیمتیں ان کے مماثل حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں :-

$$\text{ما}_1 = \text{م}\,\text{لا}_1 + \text{ج}$$

اور

$$\text{ما}_2 = \text{م}\,\text{لا}_2 + \text{ج}$$

اس طرح دو نقاطِ تقاطع $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2 ، \text{ما}_2)$ مل جاتے ہیں -

مشق: دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲$ اور خطِ مستقیم $\text{ما} = ۲\,\text{لا} + ۱$ کے نقاطِ تقاطع کے محدّد دریافت کرو -

جواب: $(-۱ ، -۱)$ اور $(\frac{۱}{۵} ، \frac{۷}{۵})$

اب مساوات (۴) پر ہم پھر غور کرتے ہیں - جبر و مقابلہ سے ہم کو معلوم ہے کہ اس مساوات کی دونوں اصلیں حقیقی ہونگی یا منطبق ہونگی یا خیالی ہونگی بموجب اس کے کہ جملہ

$$(\text{م ج})^2 - (۱ + \text{م}^2)(\text{ج}^2 - \text{ر}^2) \quad \ldots\ldots \quad (۵)$$

کی قیمت مثبت ہو یا صفر ہو یا منفی ہو - پہلی صورت میں خطِ مستقیم دائرہ کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کریگا ' دوسری صورت میں بظاہر صرف ایک ہی نقطہ ملتا ہے لیکن اس کو ہم یوں سمجھ سکتے ہیں کہ یہ در اصل دو نقطے ہیں جو ایک دوسرے کے اس قدر قریب ہیں کہ ان میں امتیاز نہیں ہوسکتا - تیسری صورت میں

خطِ مستقیم دائرہ کو کسی حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا۔ یعنے خط بالکلیہ دائرہ کے باہر واقع ہوتا ہے۔ لیکن جن خیالی نقطوں پر یہ کاٹتا ہے ان کے محدد د ل سکتے ہیں۔

جملہ (۵) کو ہم اور سادہ شکل میں تحویل کرتے ہیں۔ اس کو پھیلانے پر

$$\text{م}^2\text{ج}^2 - \text{ج}^2 - \text{م}^2\text{ج}^2 + \text{ر}^2(1+\text{م}^2)$$

یعنے

$$\text{ر}^2(1+\text{م}^2) - \text{ج}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

حاصل ہوتا ہے۔ تو گویا نقاطِ تقاطع کے حقیقی یا منطبق یا خیالی ہونے کے لیے شرط یہ ہے کہ

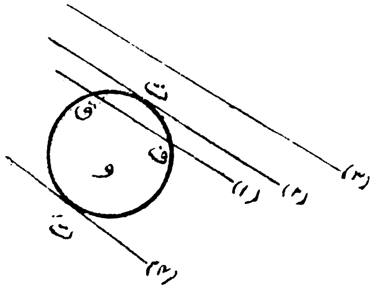
$$\text{ر}^2(1+\text{م}^2) - \text{ج}^2 \gtreqless 0$$

یعنے یہ کہ

$$\text{ج}^2 \lesseqgtr \text{ر}^2(1+\text{م}^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر خطِ مستقیم کی مساوات میں م کی قیمت کو ثابت کردیا جائے یعنے محور لا سے خط کا میلان مستقل رہے تو نقاطِ تقاطع کا حقیقی یا منطبق یا خیالی رہنا در اصل ج کی قیمت پر منحصر ہے۔

بالفاظِ دیگر بے شمار متوازی خطوں میں سے بعض خطِ دائرہ کو دو حقیقی نقطوں پر کاٹینگے بعض دائرہ کے مماس ہونگے اور باقی بالکلیہ دائرہ کے باہر واقع ہونگے۔ اس کی توضیح ذیل کی شکل سے بخوبی ہوتی ہے۔



اس شکل میں چار متوازی خط ہیں جن میں سے (۱) دائرہ کو دو حقیقی نقطوں

ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ (۲) اور (۴) دائرہ کو بالترتیب نقاط ت اور ٹ پر مس کرتے ہیں اور (۳) بالکلیہ دائرہ کے باہر واقع ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی خطوں کے ایک نظام میں سے صرف دو خط دائرہ کو مس کرتے ہیں۔ اِن دونوں مماسوں کے لیے ج کی قیمت شرط (۷) سے حاصل ہوتی ہے یعنے

$$\text{ج}^2 = \text{ر}^2 (1 + \text{م}^2)$$

یا

$$\text{ج} = \pm \text{ر} \sqrt{1 + \text{م}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

اوپر کی بحث میں ہم نے م کی قیمت کی کوئی تخصیص نہیں کی تھی یعنے خط کے میلان کو بالکل اختیاری رکھا تھا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ م کی جا ہے کچھ ہی قیمت ہو اگر ج کو (۸) میں سے کسی ایک قیمت کے مطابق منتخب کیا جائے تو یہ خط ضرور دائرہ کو مس کریگا یعنے خطِ مستقیم

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} \pm \text{ر} \sqrt{1 + \text{م}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

م کی ہر قیمت کے لیے دائرہ کو مس کریگا۔

م کو مختلف قیمتیں دینے سے خطوط (۹) کا ایک قبیل ملتا ہے اور ہمیں معلوم ہے کہ یہ تمام خط دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ کو مس کرتے ہیں یعنے دائرہ ان میں سے ہر ایک خط کو مس کرتا ہے۔ اس خاصیت کی بنا پر اعلیٰ ریاضی میں دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ کو خطوطِ مستقیم کے قبیل (۹) کا "لفاف" کہتے ہیں۔ اس کا تفصیلی بیان طالب علموں کو تفرقی احصاء میں ملیگا۔

۱ ۱۵۱،۳: ایک نقطہ سے دائرہ کے مماس:-

علم ہندسہ سے ہم کو معلوم ہے کہ ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں اور اگر نقطہ خود دائرہ پر واقع ہو تو صرف

ایک ہی مماس کھینچا جا سکتا ہے اور اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو تو کوئی مماس نہیں کھینچا جا سکتا۔ اس کی تصدیق تحلیلی طور پر ہم بآسانی کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہے۔ ہم نے گذشتہ دفعہ میں دیکھا ہے کہ دائرہ کا کوئی مماس شکل

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}^2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

کا ہوگا جہاں ایک خاص مماس حاصل کرنے کے لیے م کی ایک مناسب قیمت اختیار کرنی پڑتی ہے۔ پس کسی نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گزرنے والے مماس کو دریافت کرنے کے لیے سوال یہی رہ جاتا ہے کہ م کی یہ قیمت معلوم کی جائے۔

فرض کرو کہ نقطۂ (لاَ، ماَ) میں سے کھینچا ہوا مماس خطِ مستقیم (۱) ہے تو چونکہ نقطۂ (لاَ، ماَ) اس خط پر واقع ہے اس لیے اس کے محدد مساوات (۱) کو پورا کرینگے یعنی

$$\text{ماَ} = \text{م}\,\text{لاَ} + \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

یا $\text{ماَ} - \text{م}\,\text{لاَ} = \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}^2}$

یا $(\text{ماَ} - \text{م}\,\text{لاَ})^2 = \text{ر}^2\,(1 + \text{م}^2)$

یا م کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دینے پر مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{م}^2\,(\text{لاَ}^2 - \text{ر}^2) - 2\,\text{م}\,\text{لاَ}\,\text{ماَ} + \text{ماَ}^2 - \text{ر}^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

م میں یہ ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے اس سے م کی بالعموم دو قیمتیں ملتی ہیں جس سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ (لاَ، ماَ) میں سے گزرنے والے بالعموم دو مماس ہوتے ہیں۔

اب مساوات (۲) سے م کی جو دو اصلیں حاصل ہوتی ہیں وہ

حقیقی ہونگی یا منطبق یا خیالی بموجب اس کے کہ جملہ

$$(\text{لا}\ \text{ما})^2 - (\text{لا}^2 - \text{ر}^2)(\text{ما}^2 - \text{ر}^2)$$

مثبت ہو یا صفر ہو یا منفی ہو یعنے بموجب اس کے کہ

$$\text{ر}^2(-\text{ر}^2 + \text{لا}^2 + \text{ما}^2)$$

مثبت ہو یا صفر ہو یا منفی ہو یعنے بموجب اس کے کہ

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 \gtreqless \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

اگر $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 > \text{ر}^2$ تو ہم نے دفعہ (۲۱ء۳) میں دیکھا ہے کہ نقطہ (لا، ما) دائرہ کے باہر واقع ہے اور چونکہ اس صورت میں م کی دونوں اصلیں حقیقی ہیں اس لیے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

اگر $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ تو نقطۂ (لا، ما) دائرہ پر واقع ہے اور چونکہ اس صورت میں م کی دونوں اصلیں منطبق ہیں اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ سے صرف ایک ہی مماس کھینچا جاسکتا ہے۔

اگر $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 < \text{ر}^2$ تو دفعہ (۲۱ء۳) کے بموجب نقطۂ دائرہ کے اندر واقع ہے اور چونکہ اس صورت میں م کی دونوں قیمتیں خیالی ہیں اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ ایک اندرونی نقطہ سے دائرہ کا کوئی مماس نہیں کھینچا جاسکتا۔

مثال (۱) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم $۴\,\text{لا} + ۳\,\text{ما} - ۱۷ = ۰$ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۱۲\,\text{لا} - ۱۲\,\text{ما} + ۴۷ = ۰$ کو مس کرتا ہے۔ نقطۂ تماس کے محدد بھی معلوم کرو۔

خط کی مساوات سے ملتا ہے $\text{ما} = \dfrac{۱۷ - ۴\,\text{لا}}{۳}$

یہ قیمت دائرہ کی مساوات میں درج کرنے سے

لا² + ((۱۷ - ۴لا)/۳)² - ۱۲لا - ۱۲((۱۷ - ۴لا)/۳) + ۴۷ = ۰

یعنے پھیلانے پر اور مختصر کرنے پر حاصل ہوتا ہے

۲۵لا² - ۱۰۰لا + ۱۰۰ = ۰ یعنے (۵لا - ۱۰)² = ۰، لا = ۲، ۲

اس مساوات کی دونوں اصلیں منطبق ہیں اس لیے معلوم ہوا کہ دیا ہوا خط دائرہ کو دو منطبق نقطوں پر کاٹتا ہے، یعنے دائرہ کا مماس ہے۔

اب چونکہ ما = (۱۷ - ۴لا)/۳ = (۱۷ - ۴×۲)/۳ = ۹/۳ = ۳

پس خط دائرہ کو نقطہ (۲، ۳) پر مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ دائرہ لا² + ما² - ۵لا - ما + ۴ = ۰ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا سے زاویہ طہ بناتے ہیں جہاں مس طہ = ۳۔ نیز نقاط تماس کے محدّد بھی معلوم کرو۔

محور لا سے زاویہ طہ بنانے والے عام خط کی مساوات

ما = مس طہ . لا + ک = ۳لا + ک ہوگی

اب ک کی ایسی قیمت معلوم کرنی چاہیے کہ یہ خط دائرہ کو مس کرے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ مساوات

لا² + (۳لا + ک)² - ۵لا - (۳لا + ک) + ۴ = ۰

سے حاصل ہونے والی لا کی دونوں اصلیں منطبق ہونی چاہییں۔ مساوات کو پھیلا کر مختصر کرنے سے

۱۰لا² + ۲لا(۳ک - ۴) + (ک² - ک + ۴) = ۰

ملتا ہے۔ اگر اس مساوات کی دونوں اصلیں منطبق ہوں تو

۱۰(ک² - ک + ۴) - (۳ک - ۴)² = ۰

یعنی ک۲ + ۱۴ ک + ۲۴ = ۰

پس ک = -۲ یا ک = -۱۲

اس لیے دائرہ کے مطلوبہ مماسوں کی مساواتیں ہونگی

ما = ۳ لا - ۲ ، ما = ۳ لا - ۱۲

اب فرض کرو کہ مماس ما = ۳ لا - ۲ دائرہ کو نقطہ (ھ، ک) پر مس کرتا ہے۔ نقطہ (ھ، ک) پر دائرہ کے مماس کی مساوات ہوگی

$$\text{لا ھ + ما ک} - \frac{۵}{۲}\,(\text{لا + ھ}) - \frac{۱}{۲}\,(\text{ما + ک}) + ۴ = ۰$$

یعنی

لا (۲ھ - ۵) + ما (۲ک - ۱) - ۵ھ - ک + ۸ = ۰

چونکہ بموجب فرض یہ مساوات اسی مماس کو تعبیر کرتی ہے جو مساوات ما = ۳لا - ۲ سے تعبیر ہوتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{۲ھ - ۵}}{۳} = \frac{\text{۲ک - ۱}}{-۱} = \frac{\text{-۵ھ - ک + ۸}}{-۲}$$

ان ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے ھ = ۱، ک = ۱ حاصل ہوتا ہے۔

پس مماس ما = ۳ لا - ۲ دیے ہوئے دائرہ کو نقطۂ (۱، ۱) پر مس کرتا ہے۔

اسی طرح دوسرے مماس ما = ۳ لا - ۱۲ کے نقطۂ تماس کو معلوم کرنے کے لیے ہمیں ذیل کی ہمزاد مساواتیں حل کرنی پڑینگی:

$$\frac{\text{۲ھ - ۵}}{۳} = \frac{\text{۲ک - ۱}}{-۱} = \frac{\text{-۵ھ - ک + ۸}}{-۱۲}$$

جن کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے ھ = ۴، ک = ۰

یعنی مماس ما = ۳ لا - ۱۲ دیے ہوئے دائرہ کو نقطۂ (۴، ۰) پر مس کرتا ہے۔

مشق ۱۲

(۱) دفعہ (۳۵،۵) کے طریقہ پر ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے معلوم کرو کہ کس صورت میں خطِ مستقیم ما = م لا + ب دائرۂ

لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کو مس کریگا۔

جواب: م^۲(ف^۲ − ج^۲) + ۲م گ (ب + ف) + گ^۲ = ب^۲ + ۲ف ب + ج

(۲) دائرۂ لا^۲ + ما^۲ = ۴۹ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا سے ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔

جواب: ما = لا + ۱۴ اور ما = لا − ۱۴

(۳) دائرۂ لا^۲ + ما^۲ = ۲۵ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو خط ۳ لا + ۴ ما = ۰ کے متوازی ہیں۔

جواب: ۳ لا + ۴ ما + ۲۵ = ۰ ، ۳ لا + ۴ ما − ۲۵ = ۰

(۴) دائرۂ لا^۲ + ما^۲ = ۱۶ کے اُن مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو خط ما − لا = ۰ پر علی القوائم ہوں۔

جواب: لا + ما + ۴ $\sqrt{۲}$ = ۰ اور لا + ما − ۴ $\sqrt{۲}$ = ۰

(۵) ثابت کرو کہ اگر خط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ دائرۂ لا^۲ + ما^۲ = ج^۲ کو مس کرے تو

$$\frac{۱}{\text{ا}^۲} + \frac{۱}{\text{ب}^۲} = \frac{۱}{\text{ج}^۲}$$

(۶) ثابت کرو کہ خط ۳ لا − ۲ ما = ۰ دائرہ لا^۲ + ما^۲ − ۳ لا + ۲ ما = ۰

کو مس کرتا ہے۔

(۷) ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقاط (ا، ۰)، (-ا، ۰) سے اس خط پر کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ثابت کرو کہ یہ خط ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

[فرض کرو کہ خطِ مستقیم لا جم عہ + ما جب عہ = + ع ہے۔ نقطہ (ا، ۰) سے اس پر کا عمود ا جم عہ - ع اور نقطہ (-ا، ۰) سے اس پر کا عمود -ا جم عہ - ع ہے، فرض کرو کہ ان دونوں کا مجموعہ -۲ک مستقل ہے۔

پس ا جم عہ - ع - ا جم عہ - ع = -۲ک

یعنی ع = ک مستقل،

اب چاہے عہ کوئی زاویہ ہو مبداء کو مرکز مان کر نصف قطر ک کی دُوری پر کھینچا ہوا دائرہ خطِ مستقیم کو مس کرےگا]۔

(۸) خطِ مستقیم ما = م لا + ج سے دائرہ $لا^2 + ما^2 = ا^2$ کا جو وتر حاصل ہوتا ہے اس کا طول دریافت کرو

جواب: $۲\sqrt{\frac{ا^2 + ا^2م^2 - ج^2}{۱ + م^2}}$

(۹) ثابت کرو کہ ذیل کے خطوط اور دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، اور نیز نقاطِ تماس کے محدد معلوم کرو:

(ا) ۳ لا + ۲ ما = ۰ اور $لا^2 + ما^2 + ۳ لا + ۲ ما = ۰$

(ب) ۳ لا - ۴ ما = ۱۰ اور $لا^2 + ما^2 + ۲ لا - ۶ ما = ۱۵$

(ج) ۵ لا - ۱۲ ما = ۴۵ اور $لا^2 + ما^2 + ۱۶ لا - ۱۴ ما = ۵۶$

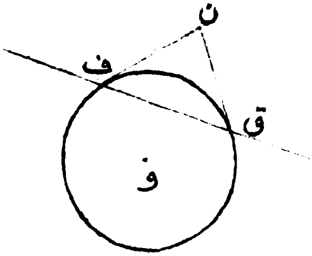
جواب: (ا) مبداء (ب) (۲، -۱) (ج) (-۳، -۵)

۳،۶ - وترِ تماس۔

فرض کرو کہ کوئی نقطہ ن دائرہ کے باہر واقع ہے۔گذشتہ

دفعہ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ ہر بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ مماس دائرہ کو بالترتیب نقاط ف اور ق پر ملتے ہیں۔ ان دو نقطوں ف اور ق کو ملانے والا خط ف ق وترِ تماس کہلاتا ہے۔

اب ہم اس وتر کی مساوات دریافت کرینگے۔



فرض کرو کہ ن کے محدد (لا۱، ما۱)، ف کے محدد (لاَ، ماَ) اور ق کے محدد (لاً، ماً) ہیں اور دائرہ کی مساوات لا۲ + ما۲ = ر۲ ہے

نقطہ ف پر کے مماس ف ن کی مساوات

لا لاَ + ما ماَ = ر۲ . (۱)

اور نقطۂ ق پر کے مماس ق ن کی مساوات

لا لاً + ما ماً = ر۲ .... (۲)

مگر چونکہ یہ دونوں مماس نقطۂ ن میں سے گذرتے ہیں اس لیے محدد (لا۱، ما۱) مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتے ہیں یعنے

لا۱ لاَ + ما۱ ماَ = ر۲ .... (۳)

لا۱ لاً + ما۱ ماً = ر۲ .... (۴)

اب مساوات

لالا + ماما = ل² .... (۵)

پر غور کرو۔ یہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اس لیے ضرور ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اس کے علاوہ مساواتوں (۳) اور (۴) سے ظاہر ہے کہ خطِ مستقیم (۵) نقطوں ف (لاَ ، ماَ) اور ق (لاً ، ماً) میں سے گذرتا ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ وترِ تماس ف ق کی مطلوبہ مساوات (۵) ہے۔

نتیجۂ صریح۔ مبداء و کو نقطہ ن سے ملانے والے خط کی مساوات

$$\frac{لا}{لا_1} = \frac{ما}{ما_1}$$

ہے۔ اس خط کا "م" یعنے محورِ لا سے میلان کا مماس $\frac{ما_1}{لا_1}$ ہے۔

خطِ مستقیم (۵) کا "م" $-\frac{لا_1}{ما_1}$ ہے اور اسی لیے معلوم ہوتا ہے کہ وترِ تماس ف ق خطِ مستقیم و ن پر علی القوائم ہے۔

مثال۔ نقطۂ (-۱ ، -۷) سے دائرہ لا² + ما² = ۲۵ کے وترِ تماس کی مساوات معلوم کرو۔ نیز نقاطِ تماس کے محدّد بھی دریافت کرو اور اس طرح مماسوں کی مساوات بھی لکھو۔

چونکہ (-۱)² + (-۷)² > ۲۵ اس لیے دیا ہوا نقطہ دائرہ کے باہر واقع ہے۔ پس وترِ تماس کی مساوات ضابطۂ (۵) میں لا۱ = -۱، ما۱ = -۷ درج کرنے پر ملتی ہے۔

-لا - ۷ما = ۲۵ یعنے لا + ۷ما + ۲۵ = ۰

نقاطِ تماس وہ نقطے ہیں جہاں پر یہ وترِ تماس دائرہ کو قطع کرتا ہے پس

$$ما = -\frac{لا + ۲۵}{۷}$$ کو دائرہ کی مساوات میں درج کر کے حاصل شدہ مساوات کو حل کرنا چاہیے۔

یعنی لا^۲ + ((لا + ۲۵) / ۷)^۲ = ۲۵

جس کو پھیلانے اور مختصر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۵۰ لا^۲ + ۵۰ لا − ۶۰۰ = ۰ یعنی لا^۲ + لا − ۱۲ = ۰

اس مساوات کے دو حل لا = ۳، اور لا = −۴ ہیں۔

اور ما = − (۳ + ۲۵) / ۷ = −۴، ما = − (−۴ + ۲۵) / ۷ = −۳

پس نقاطِ تماس (۳، −۴) اور (−۴، −۳) ہیں۔

نقطۂ (۳، −۴) پر کے مماس کی مساوات

۳ لا − ۴ ما − ۲۵ = ۰ ہے

اور نقطۂ (−۴، −۳) پر کے مماس کی مساوات

−۴ لا − ۳ ما − ۲۵ = ۰

نقطۂ (−۱، −۷) سے جو دو مماس کھنچ سکتے ہیں اُن کی مشترکہ مساوات ہوگی

(۳ لا − ۴ ما − ۲۵) (−۴ لا − ۳ ما − ۲۵) = ۰

یعنی

۱۲ لا^۲ − ۷ لا ما − ۱۲ ما^۲ − ۲۵ لا − ۱۷۵ ما + ۶۲۵ = ۰

۷ء۳ : قطب اور قطبی۔

تعریف :- اگر دائرہ کے اندرونی یا بیرونی نقطہ ن سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا جائے جو دائرہ کو نقطوں ف اور ق پر قطع کرے تو ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق "ن کا قطبی بلحاظ دائرہ" کہلاتا ہے۔ نقطۂ ن کو "قطب" کہتے ہیں۔

آیندہ دفعہ میں ہم ثابت کرینگے کہ یہ قطبی ایک خطِ مستقیم ہے اور نیز اس کی مساوات بھی دریافت کرینگے۔

۱۷ء۳ : قطبی کی مساوات ۔ فرض کرو کہ ن کے محدّد (لا، ما) ہیں اور دائرہ کی مساوات

لا۲ + ما۲ = ر۲ ہے۔

فرض کرو کہ ف ق دائرہ کا کوئی وتر ہے جو نقطہ ن میں سے کھینچا گیا ہے۔ اور فرض کرو کہ ف اور ق پر کے مماس نقطہ س پر قطع کرتے ہیں جس کے محدّد (ھ، ک) ہیں۔

پس خط ف ق وترِ تماس ہے نقطہ س میں سے کھینچے ہوئے مماسوں کا اور اس لیے ف ق کی مساوات گذشتہ دفعہ کے بموجب

لا ھ + ما ک = ر۲ .... (۱)

ہے۔ لیکن خط ف ق نقطہ ن (لا، ما) میں سے گزرتا ہے اس لیے ن کے محدّد (لا، ما) مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں، پس

لاھ + ماک = ر۲ .... (۲)

مساوات (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ (ھ، ک) جو ایک متغیر نقطہ ہے ہمیشہ مساوات

لا لا + ما ما = ر۲ .... (۳)

کو پورا کرتا ہے۔ یعنے س کا طریق ایک خطِ مستقیم (۳) ہے ۔ اور یہی نقطہ ن کے قطبی کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مشاهده ۔ مساوات (۳) وہی ہے جو دفعہ گذشتہ میں وترِ تماس (۵) کے لیے حاصل کی گئی تھی۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر نقطۂ ن (لا، ما) دائرہ کے باہر واقع ہو تو اس کا قطبی وہی خط ہے جو نقطۂ ن سے کھینچے ہوئے دائرہ کے مماسوں کا وترِ تماس ہے۔

اگر نقطہ ن (لا، ما) دائرہ کے محیط پر واقع ہو تو اس کا قطبی اس پر کے مماس کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔

اگر نقطہ ن دائرہ کے اندر واقع ہے تو بھی مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ قطبی خط حقیقی ہے، دفعہ (۱۵ء۳) میں ہم نے دیکھا کہ اس نقطہ میں سے

کھینچے ہوئے دائرہ کے دونوں مماس خیالی ہونگے اور اس لیے ان کے نقاطِ تماس بھی خیالی ہو نگے ۔ لیکن دفعہ (۶، ۳) کے موافق عمل کرنے سے ہم دیکھینگے کہ اندرونی نقطہ کے لیے بھی آخر میں جو مساوات وترِ تماس کی حاصل ہوتی ہے وہ حقیقی ہے اور یہ مساوات وہی ہے جو اوپر قطبی کے لیے حاصل کی گئی۔ طالب علم کے لیے اچھی مشق ہوگی کہ اندرونی نقطہ سے مماسوں کے خیالی نقاطِ تماس معلوم کرے اور ان کو ملانے والے خط کی مساوات حاصل کرے ۔ ایسا کرنے سے معلوم ہوگا کہ اگرچہ نقاطِ تماس خیالی ہیں مگر وترِ تماس کی مساوات حقیقی ہے غرض کہ نقطہ ن کے اندر واقع ہونے کی صورت میں بھی وترِ تماس کی مساوات

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ا}^2$$

ہوگی اور یہی ن کے قطبی کی مساوات ہے۔

پس ہر صورت میں ہم قطبی کی تعریف اس طرح بھی کرسکتے ہیں :۔

ایک دیے ہوئے نقطہ کا قطبی وہ خطِ مستقیم ہے جو اس دیے ہوئے نقطہ سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس کو ملائے ۔

نیز ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کا قطب وہ نقطہ ہے جو اس خطِ مستقیم اور دائرہ کے (حقیقی یا خیالی) نقاطِ تقاطع میں سے کھینچے ہوئے مماسوں کے قطع کرنے سے پیدا ہوتا ہے ۔

مثال ۔ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۱۶$ کے لحاظ سے نقطہ (-۱، ۲) کا قطبی معلوم کرو :۔

نقطہ (-۱، ۲) دائرہ کے اندر ہے کیونکہ $(-۱)^2 + (۲)^2 < ۱۶$

ضابطہ (۳) میں لا = -۱، ما = ۲ رکھنے سے قطبی کی مساوات فوراً حاصل ہوتی ہے

$$-\text{لا} + ۲\,\text{ما} = ۱۶ \quad \text{یعنے} \quad \text{لا} - ۲\,\text{ما} + ۱۶ = ۰$$

۷۲، ۳ : اب ہم عام صورت میں جبکہ مبداء کو دائرہ کے مرکز پر نہ لیا جائے قطبی کی مساوات دریافت کرینگے ۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لاٗ + ماٗ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہے اور دائرہ کے باہر کسی نقطہ ن کے محدّد (لاٖ، ماٖ) اور اس سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس ف اور ق کے محدّد بالترتیب (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) ہیں (دیکھو پچھلی دفعہ کی شکل)

نقطۂ ف پر کے مماس ف ن کی مساوات

لا لاَ + ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰ (۱)

اور نقطۂ ق پر کے مماس ق ن کی مساوات

لا لاً + ما ماً + گ (لا + لاً) + ف (ما + ماً) + ج = ۰ (۲)

ہے۔ مگر چونکہ یہ دونوں مماس نقطۂ ن میں سے گزرتے ہیں اس لیے محدّد (لاٖ، ماٖ) مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتے ہیں یعنی

لاٖ لاَ + ماٖ ماَ + گ (لاٖ + لاَ) + ف (ماٖ + ماَ) + ج = ۰
لاٖ لاً + ماٖ ماً + گ (لاٖ + لاً) + ف (ماٖ + ماً) + ج = ۰ } ... (۳)

اب مساوات

لا لاٖ + ما ماٖ + گ (لا + لاٖ) + ف (ما + ماٖ) + ج = ۰ (۴)

پر غور کرو۔ یہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اس لیے ضرور ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اس کے علاوہ مساواتوں (۳) سے ظاہر ہے کہ خطِ مستقیم (۴) نقطوں ف اور ق میں سے گزرتا ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ وترِ تماس ف ق کی مساوات (۴) ہے۔

اب قطبی کی مساوات دریافت کرنے کے لیے ہم دفعہ (۲،۷) میں دی ہوئی تعریف کو استعمال کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ کے اندر یا باہر کوئی نقطہ ن ہے جس کے محدّد (لاٖ، ماٖ) ہیں۔ اور نقطہ ن میں سے ایک وتر ف ق کھینچا گیا ہے۔ نقاط ف اور ق پر دائرہ کے مماس کھینچو جو ضرور آپس میں دائرہ کے باہر ایک نقطہ ر پر

قطع کرینگے۔ فرض کرو کہ نقطہ س کے محدّد (ھ، ک) ہیں۔
پس خط ف ق وترِ تماس ہے نقطہ س میں سے کھینچے ہوئے مماسوں کا اور اس لیے ف ق کی مساوات (۴) کے بموجب

لا ھ + ما ک + گ (لا + ھ) + ف (ما + ک) + ج = ۰ (۵)

ہے۔ لیکن خط ف ق نقطہ ن میں سے گزرتا ہے جس کے محدد (لا۱، ما۱) ہیں اس لیے

لا۱ ھ + ما۱ ک + گ (لا۱ + ھ) + ف (ما۱ + ک) + ج = ۰ (۶)

مساوات (۶) سے ظاہر ہے کہ نقطہ (ھ، ک) جو ایک متغیر نقطہ ہے ہمیشہ مساوات

لا لا۱ + ما ما۱ + گ (لا + لا۱) + ف (ما + ما۱) + ج = ۰ (۷)

کو پورا کرتا ہے یعنے س (ھ، ک) کا طریق خطِ مستقیم (۷) ہے اور اس لیے تعریف کے بموجب دائرہ کے لحاظ سے ن کے قطبی کی مطلوبہ مساوات (۷) ہے۔

مثال۔ دائرہ لا² + ما² - ۵ لا - ما + ۴ = ۰ کے لحاظ سے نقطہ ن (½، -½) کا قطبی دریافت کرو۔ نقطہ ن کے محدّد دائرہ کی مساوات میں درج کرنے پر معلوم ہوتا ہے کہ یہ نقطہ دائرہ کے باہر واقع ہے۔ پس نقطہ ن کا قطبی یعنے وترِ تماس دائرہ کو حقیقی نقطوں ف اور ق پر قطع کریگا۔
ن کے قطبی کی مساوات ضابطہ (۷) میں لا۱ = ½، ما۱ = -½ درج کرنے پر حاصل ہوتی ہے:

½ لا - ½ ما - ۵/۲ (لا + ½) - ½ (ما - ½) + ۴ = ۰

جس کو مختصر کرنے پر ملتا ہے

۲ لا + ما - ۳ = ۰

یہی قطبی کی مطلوبہ مساوات ہے۔ اب نقاط ف اور ق کے محدّد معلوم کرنے کے لیے اس مساوات کو دائرہ کی مساوات کے ساتھ حل کرنا چاہیے۔

خط کی مساوات سے ملتا ہے: ما = ۳ − ۲ لا

دائرہ کی مساوات میں درج کرنے پر

لا^2 + (۳ − ۲ لا)^2 − ۵ لا − (۳ − ۲ لا) + ۴ = ۰

یعنی

۵ لا^2 − ۱۵ لا + ۱۰ = ۰

جس کی اصلیں ہیں لا = ۱، لا = ۲

اس کے مقابل حاصل ہوتا ہے ما = ۱، ما = −۱

پس دائرہ اور قطبی کے نقاطِ تقاطع (۱، ۱) اور (۲، −۱) ہیں

نقطہ (۱، ۱) پر دائرہ کے مماس کی مساوات

لا + ما − $\frac{5}{2}$ (لا + ۱) − $\frac{1}{2}$ (ما + ۱) + ۴ = ۰

یعنی ۳ لا − ما − ۲ = ۰

نقطہ (۲، −۱) پر دائرہ کے مماس کی مساوات

۲ لا − ما − $\frac{5}{2}$ (لا + ۲) − $\frac{1}{2}$ (ما − ۱) + ۴ = ۰

یعنی لا + ۳ ما + ۱ = ۰

ان مماسوں کی مساواتوں سے ظاہر ہے کہ یہ ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔

۳۷،۳۶: قطب کے محدّد —

فرض کرو کہ دیے ہوئے خطِ مستقیم کی مساوات

ا لا + ب ما + ج = ۰ .... (۱)

اور دائرہ کی مساوات

لا^2 + ما^2 = ر^2 .... (۲)

ہے۔ اور فرض کرو کہ مطلوبہ قطب کے محدّد (لا'، ما') ہیں۔

تب مساوات (۱) نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات ہے یعنی مساوات (۱) اُس خط کو تعبیر کرتی ہے جو مساوات

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ر}^2 \quad \text{.........} \quad (۳)$$

سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس لیے مساواتوں (۱) اور (۳) میں لا کا سر، ما کا سر اور مستقل رقمیں متناسب ہونی چاہییں، یعنی

$$\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} = \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} = \frac{-\text{ر}^2}{\text{ج}}$$

یعنی

$$\text{لا}_1 = -\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\,\text{ر}^2 ، \quad \text{ما}_1 = -\frac{\text{ب}}{\text{ج}}\,\text{ر}^2 \quad \text{.......} \quad (۴)$$

مثال - خطِ مستقیم ۳لا + ۵ما - ۴ = ۰ کا قطب بلحاظ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۱۶$ معلوم کرو

فرض کرو کہ مطلوبہ قطب کے محدد (لا₁، ما₁) ہیں تو قطب کی مساوات

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = ۱۶$$

ہو گی۔ یہ مساوات اور دی ہوئی مساوات دونوں ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں اس لیے

$$\frac{\text{لا}_1}{۳} = \frac{\text{ما}_1}{۵} = \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

$$\therefore \quad \text{لا}_1 = ۱۲ ، \quad \text{ما}_1 = ۲۰ ،$$

یعنی قطب کے محدد (۱۲، ۲۰) ہیں۔

۳،۴۷ - اس دفعہ میں ہم قطبی خطوں سے متعلق ایک اہم خاصیت ثابت کرینگے جو تحلیلی طریقہ سے ہندسی طریقہ کی نسبت جلد اور آسانی کے ساتھ ثابت ہوتی ہے۔

مسئلہ - اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطہ ف کا

قطبی ایک دوسرے دیے ہوئے نقطہ ق میں سے گزرے تو اسی دائرہ کے لحاظ سے ق کا قطبی نقطۂ ف میں سے گذریگا۔

فرض کرو کہ ف کے محدّد (لا، ما) اور ق کے محدّد (لا٬، ما٬) ہیں۔ اور دائرہ کی مساوات لا² + ما² = ر² ہے۔

نقطۂ ف کے قطبی کی مساوات

لا لا + ما ما = ر² ہے ....(۱)

اور چونکہ یہ قطبی نقطۂ ق میں سے گزرتا ہے اس لیے محدّد (لا٬، ما٬) مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں یعنے

لا٬ لا + ما٬ ما = ر² ....(۲)

اب نقطۂ ق کے قطبی مساوات

لا لا٬ + ما ما٬ = ر² ....(۳)

ہے اور ثابت کرنا ہے کہ نقطۂ ف کے محدّد (لا، ما) اس مساوات کو پورا کرینگے۔ مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ درحقیقت ف کے محدّد مساوات (۳) کو پورا کرتے ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ ق کا قطبی نقطہ ف میں سے گذرتا ہے۔ ایسے دو نقطوں ف اور ق کو دائرہ کے لحاظ سے مزدوج نقطے کہتے ہیں۔

مثال۔ فرض کرو کہ ایک دائرہ

لا² + ما² - ۴لا + ۶ما - ۲۳ = ۰ ....(۱)

اور دو نقطے ا (۱، -۴) اور ب (-۱۵، -۲۲) دیے ہوئے ہیں۔ ہم ثابت کرینگے کہ یہ دونوں نقطے دائرہ (۱) کے لحاظ سے مزدوج ہیں۔

نقطہ ا (۱، -۴) کا قطبی بلحاظ دائرہ (۱) حسب ذیل ہے

لا - ۴ما - ۲(لا + ۱) + ۳(ما - ۴) - ۲۳ = ۰

یعنی

لا + ما + ۳۷ = ۰ ....(۲)

اب چونکہ -۱۵ -۲۲ + ۳۷ = ۰ اس لیے معلوم ہوا کہ نقطۂ ا کا قطبی (۲)

نقطۂ ب میں سے گزرتا ہے۔ اس طرح نقطۂ ب (- ۱۵، - ۲۲) کا قطبی بلحاظ دائرہ (۱) حسب ذیل ہے :

-۱۵ لا - ۲۲ ما - ۲ (لا - ۱۵) + ۳ (ما - ۲۲) - ۲۳ = ۰

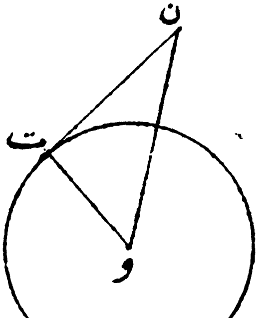
یعنی ۱۷ لا + ۱۹ ما + ۵۹ = ۰ (۳)

اور چونکہ ۱۷ (۱) + ۱۹ (-۴) + ۵۹ = ۰ اس لیے نقطۂ ب کا قطبی (۳) نقطۂ ا میں سے گذرتا ہے۔

پس نقاط ا اور ب مزدوج نقطے ہیں۔

۸ء۳ : بیرونی نقطہ سے دائرہ کے مماس کا طول۔

(ا) فرض کرو کہ ن ایک بیرونی نقطہ ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں اور دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ل}^2$ ہے۔



فرض کرو کہ ن سے دائرہ کا ایک مماس ن ت ہے جس کا طول دریافت کرنا ہے۔

چونکہ زاویہ و ت ن قائمہ ہے، اس لیے

ن ت^2 = و ن^2 − و ت^2 .... (۱)

لیکن و ن^2 = لا$_1^2$ + ما$_1^2$ .... (۲)

و ت^2 = ر^2 .... (۳)

اس لیے ن ت^2 = لا$_1^2$ + ما$_1^2$ − ر^2 .... (۴)

(ب) دوسری صورت میں فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات عام سے عام ہے جبکہ محور علی القوائم ہوں

لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہے، اگر لا^2 اور ما^2 کا سر اکائی نہ ہو بلکہ ا ہو تو مساوات کو ا پر تقسیم کر کے اسے اس شکل میں لے آنا چاہیے۔ اس صورت میں مرکز کے محدّد (۰،۰) نہیں بلکہ (−گ، −ف) ہیں۔

پس و ن^2 = (لا$_1$ + گ)^2 + (ما$_1$ + ف)^2 ..... (۵)

اور و ت^2 = (نصف قطر)^2 = گ^2 + ف^2 − ج ...... (۶)

پس ن ت^2 = و ن^2 − و ت^2

= (لا$_1$ + گ)^2 + (ما$_1$ + ف)^2 − (گ^2 + ف^2 − ج)

= لا$_1^2$ + ما$_1^2$ + ۲گ لا$_1$ + ۲ف ما$_1$ + ج ..... (۷)

دونوں صورتوں میں ہم دیکھتے ہیں کہ مماس کے طول کا مربع دائرہ کی مساوات میں نقطہ کے محدّد درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مشق ۱۳

۱۔ نقطہ (-۱، ۲) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۹ معلوم کرو۔

جواب: لا - ۲ما + ۹ = ۰

۲۔ خط لا + ۲ما - ۱۸ = ۰ کا قطب بلحاظ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۳۶ معلوم کرو۔

جواب: (۲، ۴)

۳۔ نقطہ (۳، ۴) سے دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۱۶ کے مماس کا طول معلوم کرو۔

جواب ۳

۴۔ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۳ کے وہ مماس دریافت کرو جو محور لا سے (ا) ۶۰° کے اور (ب) ۴۵° کے زاویے بناتے ہیں۔

جواب: (ا) ما = $\sqrt{۳}$ لا ± ۲ $\sqrt{۳}$ (ب) ما = لا ± $\sqrt{۶}$

۵۔ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۸ کے لحاظ سے خط ۳لا - ما = ۱ کا قطب معلوم کرو۔ جواب (۲۴، -۸)

۶۔ دائرہ ۴لا^{۲} + ۴ما^{۲} + ۱۲لا - ۱۴ما + ۱۵ = ۰ کے لحاظ سے نقطہ (-۱، ۳) کا قطبی معلوم کرو اور ثابت کرو کہ نقطہ (-۴، ۴) اس کا ایک مزدوج نقطہ ہے۔

۷۔ ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع کی مساواتیں
۲لا - ۳ما - ۲۵ = ۰، لا - ما - ۵ = ۰، ۲لا + ۳ما + ۵ = ۰ ہیں۔
دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۲۵ دیا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کا ہر راس بقیہ دو راسوں کا مزدوج نقطہ ہے۔

۳،۹: توضیحی مثالیں۔

۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق

ایک دائرہ ہے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف۱، ف۲، ف۳، .... ، فن ہیں جن کے محدد بالترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳)، .... (لان، مان) ہیں۔ اور فرض کرو کہ ایک متحرک نقطہ ق ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں۔ اب

$$(\text{ق ف}_1)^2 = (\text{لا}-\text{لا}_1)^2 + (\text{ما}-\text{ما}_1)^2$$

$$(\text{ق ف}_2)^2 = (\text{لا}-\text{لا}_2)^2 + (\text{ما}-\text{ما}_2)^2$$

$$(\text{ق ف}_{\text{ن}})^2 = (\text{لا}-\text{لا}_{\text{ن}})^2 + (\text{ما}-\text{ما}_{\text{ن}})^2$$

پس دی ہوئی شرط کے مطابق

$$\left\{(\text{لا}-\text{لا}_1)^2 + (\text{ما}-\text{ما}_1)^2\right\} + \left\{(\text{لا}-\text{لا}_2)^2 + (\text{ما}-\text{ما}_2)^2\right\} + \cdots + \left\{(\text{لا}-\text{لا}_{\text{ن}})^2 + (\text{ما}-\text{ما}_{\text{ن}})^2\right\} = \text{مستقل} = \text{م}$$

یعنی پھیلانے پر

$$\text{ن}(\text{لا}^2+\text{ما}^2) - 2\,\text{لا}(\text{لا}_1+\text{لا}_2+\cdots+\text{لا}_{\text{ن}}) - 2\,\text{ما}(\text{ما}_1+\text{ما}_2+\cdots+\text{ما}_{\text{ن}})$$
$$+\left\{(\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2)+(\text{لا}_2^2+\text{ما}_2^2)+\cdots+(\text{لا}_{\text{ن}}^2+\text{ما}_{\text{ن}}^2)-\text{م}\right\} = 0 \qquad (1)$$

فرض کرو کہ

$$-\frac{\text{لا}_1+\text{لا}_2+\cdots+\text{لا}_{\text{ن}}}{\text{ن}} = \text{گ}$$

$$-\frac{\text{ما}_1+\text{ما}_2+\cdots+\text{ما}_{\text{ن}}}{\text{ن}} = \text{ف} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\text{ن}}\left\{(\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2)+(\text{لا}_2^2+\text{ما}_2^2)+\cdots+(\text{لا}_{\text{ن}}^2+\text{ما}_{\text{ن}}^2)-\text{م}\right\} = \text{ج}$$

تو مساوات (۱) کی شکل حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ لا} + 2\,\text{ف ما} + \text{ج} = 0$$

اس سے ظاہر ہے کہ مساوات (۱) دائرہ کو تعبیر کرتی ہے یعنی نقطہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔ اس دائرہ کا مرکز (−گ، −ف) یعنی $\left(\frac{\sum \text{لا}_1}{\text{ن}}, \frac{\sum \text{ما}_1}{\text{ن}}\right)$ ہے

اور نصف قطر سا ہو تو

سا^2 = گ^2 + ف^2 − ج = $\frac{1}{\text{ن}^2}$ {(Σ لا$_1$)^2 + (Σ ما$_1$)^2} − $\frac{1}{\text{ن}}$ {Σ (لا$_1^2$ + ما$_1^2$) − م}

۲۔ خطِ مستقیم ا لا + ب ما + ج = ۰

اور دائرہ لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + س = ۰

کے نقاطِ تقاطع کو مبدا ر سے ملانے والے خطوطِ مستقیم کی مساوات دریافت کرو۔

ہم کو معلوم ہے کہ مبدا ر میں سے گزرنے والے دو خطوطِ مستقیم کی مساوات دوسرے درجہ کی متجانس ہوتی ہے۔ اس لیے ہم کوشش کرینگے کہ درجۂ دوم کی ایک ایسی متجانس مساوات دریافت کریں جس کو خطِ مستقیم اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع کے محدّد پورا کریں۔

فرض کرو کہ خطِ مستقیم دائرہ کو نقاط (لا$_1$، ما$_1$) اور (لا$_2$، ما$_2$) پر قطع کرتا ہے۔ تو

ا لا$_1$ + ب ما$_1$ + ج = ۰
لا$_1^2$ + ما$_1^2$ + ۲گ لا$_1$ + ۲ف ما$_1$ + س = ۰ } ۔۔۔ (۱)

اور

ا لا$_2$ + ب ما$_2$ + ج = ۰
لا$_2^2$ + ما$_2^2$ + ۲گ لا$_2$ + ۲ف ما$_2$ + س = ۰ } ۔۔۔ (۲)

اب ہم دائرہ کی مساوات کو خطِ مستقیم کی مساوات کی مدد سے متجانس بنائینگے۔ خطِ مستقیم کی مساوات سے ظاہر ہے کہ

ا لا + ب ما = − ج

اور اس لیے (ا لا + ب ما)^2 = − ج (ا لا + ب ما) = ج^2 ۔۔۔ (۳)

اب دائرہ کی مساوات میں دوسرے درجے کی رقموں کو ج^2 سے، پہلے درجہ کی رقموں کو {− ج (ا لا + ب ما)} سے اور مستقل رقم کو (ا لا + ب ما)^2 سے ضرب دیں تو

ظاہر ہے کہ اس سے مساوات میں کوئی فرق نہیں آئیگا اور تیز سب رقمیں دوسرے درجہ کی ہوجائینگی۔ یعنے مساوات ہوجائیگی

ج² (لا² + ما²) - ۲ج (گ لا + ف ما) (ا لا + ب ما) + س (ا لا + ب ما)² = ۰ (۴)

مساوات (۴) درجۂ دوم کی اور متجانس ہے اور اس لیے مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر اس میں (لا، ما) بھرتی کریں تو مساواتوں (۱) کی بنا پر معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۴) پوری ہوتی ہے۔ اسی طرح (لا، ما) بھرتی کریں تو مساواتوں (۲) کی بنا پر معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۴) پوری ہوتی ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ مساوات (۴) نقاطِ تقاطع کو مبداء سے ملانے والے خطوطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات ہے۔

اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

لا² {ج² - ۲ا ج گ + ا² س} - ۲ لا ما {ب ج گ + ا ج ف}

+ ما² {ج² - ۲ب ج ف + ب² س} = ۰ ... (۵)

یعنے

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰ .... (۶)

اگر ان دونوں خطوط کا درمیانی زاویہ فہ ہو تو دفعہ ۲۵ ر ۲ سے ہم کو معلوم ہے کہ

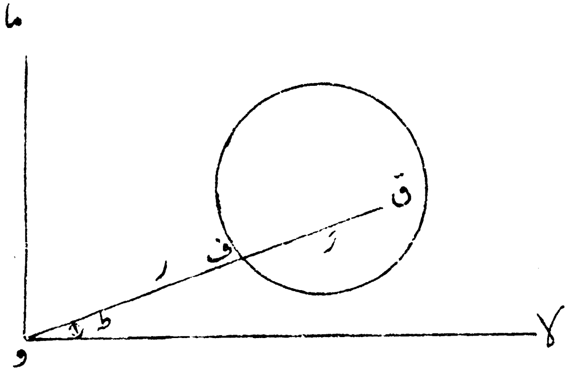
مس فہ = ۲ √(ھ² - ا ب) / (ا + ب)

۳۔ ایک ثابت نقطہ و سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو نقطۂ ف پر ملتا ہے۔ خط و ف پر ایک نقطہ ق ایسا لیا گیا ہے کہ و ف × و ق ہمیشہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ و کو ہم مبداء لیتے ہیں اور اس میں سے کسی قائم محوروں کے لحاظ سے دیے ہوئے دائرہ کی مساوات

لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ . . . . (۱)

ہے ۔ و میں سے محور لا کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہوا کوئی خط کھینچتے ہیں جو دائرہ سے نقطۂ ف پر ملتا ہے۔



فرض کرو کہ نقطۂ ف کے محدد (لا، ما) ہیں اور فاصلہ و ف = ر تو ظاہر ہے کہ

لا = ر جم ط، ما = ر جب ط

اور چونکہ نقطۂ ف دائرہ پر واقع ہے اس لیے

لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

یعنے

ر^{۲} جم^{۲} ط + ر^{۲} جب^{۲} ط + ۲گ ر جم ط + ۲ف ر جب ط + ج = ۰

یعنے

ر^{۲} + ۲گ ر جم ط + ۲ف ر جب ط + ج = ۰ . . . . . (۲)

اب فرض کرو کہ ق کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں اور و ق = رَ

اس لیے لاَ = رَ جم طَ، ماَ = رَ جب طَ . . . . (۳)

یعنی

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ر}^{2} \quad \dots\dots \quad (۴)$$

لیکن سوال میں دیا ہوا ہے کہ وف × وق مستقل ہے، پس

رر′ = مستقل = ک (فرض کرو)

اس لیے

$$\text{ر} = \frac{\text{ک}}{\text{ر}'} \quad \dots\dots \quad (۵)$$

پس مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\text{جم ط} = \frac{\text{لا}}{\text{ر}} = \frac{\text{ر}'}{\text{ک}}\,\text{لا}$$

$$\text{جب ط} = \frac{\text{ما}}{\text{ر}} = \frac{\text{ر}'}{\text{ک}}\,\text{ما} \quad (۶)$$

جم ط اور جب ط کی یہ قیمتیں مساوات (۲) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ر}'^{2} + ۲\text{گ}\,\text{ر}.\frac{\text{ر}'}{\text{ک}}\,\text{لا} + ۲\text{ف}\,\text{ر}.\frac{\text{ر}'}{\text{ک}}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$$

یعنی

$$\text{ر}'^{2}\left\{۱ + ۲\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\,\text{لا} + \frac{۲\text{ف}}{\text{ک}}\,\text{ما}\right\} + \text{ج} = ۰ \quad \dots \quad (۷)$$

لیکن مساوات (۴) سے

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ر}^{2} = \frac{\text{ک}^{2}}{\text{ر}'^{2}}$$

اس لیے

$$\text{ر}'^{2} = \frac{\text{ک}^{2}}{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}} \quad \dots\dots \quad (۸)$$

ر′² کی یہ قیمت مساوات (۷) میں رکھنے سے

$$\frac{\text{ک}^{2}}{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}}\left\{۱ + ۲\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\,\text{لا} + \frac{۲\text{ف}}{\text{ک}}\,\text{ما}\right\} + \text{ج} = ۰$$

یعنی (لا² + ما²) سے ضرب دینے پر اور پھیلانے پر حاصل ہوتا ہے:

$\text{ج}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) + 2\,\text{گ}\,\text{ک}\,\text{لا} + 2\,\text{ف}\,\text{ک}\,\text{ما} + \text{ک}^2 = 0$ ...... (۹)

جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطۂ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۔ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلے ان عمودوں کے طول کے متناسب ہوتے ہیں جو ایک نقطہ سے دوسرے کے قطبی خط پر ڈالے جائیں۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے اور و کو مبداء مان کر دائرہ کی مساوات ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2 \quad \text{.........} \quad (1)$$

نیز فرض کرو کہ کوئی دو نقطے ن_1 اور ن_2 ہیں جن کے محدد بالترتیب $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ ہیں۔

ن_1 کا قطبی بلحاظ دائرہ (۱) کے

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ر}^2 \quad \text{.........} \quad (2)$$

اور ن_2 کا قطبی بلحاظ دائرہ کے

$$\text{لا}\,\text{لا}_2 + \text{ما}\,\text{ما}_2 = \text{ر}^2 \quad \text{.........} \quad (3)$$

ہے۔ فرض کرو کہ نقطۂ ن_1 سے ن_2 کے قطبی (۳) پر ڈالے ہوئے عمود کا طول ع_1 اور نقطۂ ن_2 سے ن_1 کے قطبی (۲) پر ڈالے ہوئے عمود کا طول ع_2 ہے تو

$$\text{ع}_1 = \frac{\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ر}^2}{\sqrt{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2}} \quad \text{.........} \quad (4)$$

$$\text{ع}_2 = \frac{\text{لا}_2\text{لا}_1 + \text{ما}_2\text{ما}_1 - \text{ر}^2}{\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}} \quad \text{.........} \quad (5)$$

اب فرض کرو کہ دائرہ کے مرکز و سے نقطۂ ن_1 کا فاصلہ ر_1 اور ن_2 کا فاصلہ ر_2 ہے تو

$$\text{ر}_1 = \sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}\ ،\ \text{ر}_2 = \sqrt{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2} \quad (6)$$

پس

$$\frac{\text{ر}_1}{\text{ع}_1} = \frac{\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}\cdot\sqrt{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2}}{\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ر}^2} = \frac{\text{ر}_2}{\text{ع}_2} \quad (7)$$

یعنے ع۱ : ع۲ = ل۱ : ل۲ (۸)

یعنے عمودوں کے طول نقطوں کے فاصلوں کے متناسب ہوتے ہیں -

سوال ۵ - خطِ مستقیم ا لا + ب ما + ج = ۰ کا قطب دائرہ

لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + س = ۰ ..... (۱)

کے لحاظ سے دریافت کرو -

فرض کرو کہ مطلوبہ قطب نقطہ (لاٖ، ماٖ) ہے جہاں لاٖ، ماٖ کی قیمتیں ہمیں دریافت کرنی ہیں - ہم نے دفعہ (۲، ۲، ۳) میں معلوم کیا ہے کہ نقطۂ (لاٖ، ماٖ) کا قطبی بلحاظ دائرہ (۱) کے حسبِ ذیل ہوتا ہے :

لا لاٖ + ما ماٖ + گ (لا + لاٖ) + ف (ما + ماٖ) + س = ۰ (۲)

اب چونکہ ہر خط ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ایک اور صرف ایک ہی نقطہ کا قطبی ہوتا ہے اور اس کے برعکس کسی دیے ہوئے نقطہ کا ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ایک اور صرف ایک ہی قطبی خط ہوتا ہے اس لیے دی ہوئی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ اور مساوات (۲) دونوں ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کرتے ہیں - مساوات (۲) کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں :

لا (لاٖ + گ) + ما (ماٖ + ف) + گ لاٖ + ف ماٖ + س = ۰ ... (۳)

مساوات (۳) اور دی ہوئی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ میں لا اور ما کے سر اور مستقل رقمیں متناسب ہونی چاہییں - یعنے

$$\frac{\text{لاٖ + گ}}{\text{ا}} = \frac{\text{ماٖ + ف}}{\text{ب}} = \frac{\text{گ لاٖ + ف ماٖ + س}}{\text{ج}} \quad \text{..... (۴)}$$

لاٖ اور ماٖ کو دریافت کرنے کے لیے یہ دو مساواتیں ہیں جن سے حسبِ ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں :

$$\text{لاٖ} = \frac{\text{ا س + ب گ ف - ا ف}^2\text{ - ج گ}}{\text{ج - ا گ - ب ف}} ، \quad \text{ماٖ} = \frac{\text{ب س + ا گ ف - ب گ}^2\text{ - ج ف}}{\text{ج - ا گ - ب ف}}$$

۶ - ایک دائرہ س اور دو ثابت نقطے ف اور ق دیے ہوئے ہیں -

دائرہ س کے لحاظ سے ف اور ق کے قطبی خط ایک دوسرے کو نقطہ سا پر قطع کرتے ہیں۔ تو ثابت کرنا ہے کہ سا کا قطبی نقطوں ف اور ق میں سے گزرنے والا خط ہوگا۔

قطبی خطوں سے متعلق دفعہ ۴۷، ۳ میں دی ہوئی خاصیت استعمال کی جائے تو ثبوت فوراً مل جاتا ہے۔ یعنے چونکہ ف کا قطبی سا میں سے گزرتا ہے۔ اس لیے سا کا قطبی ف میں سے گزریگا۔ اسی طرح ق کا قطبی چونکہ سا میں سے گزرتا ہے اس لیے سا کا قطبی ق میں سے بھی گزریگا۔ پس سا کا قطبی خط ف ق ہے۔

لیکن دفعہ ۴۷، ۳ کے مسئلہ کو استعمال کیے بغیر بھی اس مسئلہ کو بالراست ثابت کرسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$، ف کے محدد $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ اور ق کے محدد $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ف اور ق کے قطبیوں کے نقطۂ تقاطع سا کے محدد $(\text{لا}', \text{ما}')$ ہیں۔

ظاہر ہے کہ $(\text{لا}', \text{ما}')$ ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہونگے:

$$\text{لا}'\,\text{لا}_1 + \text{ما}'\,\text{ما}_1 - \text{ر}^2 = 0$$

$$\text{لا}'\,\text{لا}_2 + \text{ما}'\,\text{ما}_2 - \text{ر}^2 = 0$$

جس سے ملتا ہے کہ $$\text{لا}' = \frac{\text{ر}^2(\text{ما}_2 - \text{ما}_1)}{\text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1}, \quad \text{ما}' = \frac{\text{ر}^2(\text{لا}_1 - \text{لا}_2)}{\text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1} \quad (1)$$

اب دائرہ س کے لحاظ سے نقطۂ سا $(\text{لا}', \text{ما}')$ کے قطبی کی مساوات ہوگی

$$\text{لا}\,\text{لا}' + \text{ما}\,\text{ما}' = \text{ر}^2 \quad \text{یعنے} \quad \frac{\text{لا}\,\text{ر}^2(\text{ما}_2 - \text{ما}_1)}{\text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1} + \frac{\text{ما}\,\text{ر}^2(\text{لا}_1 - \text{لا}_2)}{\text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1} = \text{ر}^2$$

یعنے

$$\text{لا}(\text{ما}_2 - \text{ما}_1) + \text{ما}(\text{لا}_1 - \text{لا}_2) = (\text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1)$$

$$= \text{لا}_1(\text{ما}_2 - \text{ما}_1) + \text{ما}_1(\text{لا}_1 - \text{لا}_2)$$

یعنی

$$(\text{لا}-\text{لا}_1)(\text{ما}_2-\text{ما}_1) = (\text{ما}-\text{ما}_1)(\text{لا}_2-\text{لا}_1)$$

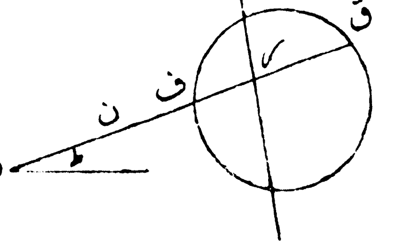
یعنی

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{لا}_2-\text{لا}_1} = \frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{ما}_2-\text{ما}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۲) ایک ایسے خط کی مساوات ہے جو $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ میں سے گزرتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطۂ ر کا قطبی نقطوں ف اور ق میں سے گزرتا ہے یعنی خط ف ق ہے۔

(۷)۔ ایک دائرہ س اور ایک ثابت نقطہ و دیا ہوا ہے۔ و میں سے ایک خط کسی سمت میں کھینچا جاتا ہے جو دائرہ کو نقاط ف اور ق پر ملتا ہے۔ دائرہ س کے لحاظ سے و کا قطبی خط ف ق کو نقطۂ ر پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ و ف، و ر اور و ق موسیقی سلسلہ میں ہونگے یعنی بالفاظِ دیگر و اور ر خط ف ق کی موسیقی تقسیم کرینگے۔

دیے ہوئے ثابت نقطہ و کو مبداء اور اس میں سے گزرنے والے کوئی قائم محور لو۔ فرض کرو کہ دائرہ س کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}\,\text{لا} + 2\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ ہے۔ خط و ف ق کا زاویہ محور لا سے ط، نقاط ف، ر، ق کے کارٹیزی محدّد بالترتیب $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$، $(\text{لا}'، \text{ما}')$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ اور قطبی محدد $(\text{ر}_1، \text{ط})$، $(\text{ر}'، \text{ط})$ اور $(\text{ر}_2، \text{ط})$ ہیں۔



فرض کرو کہ خط ف ق پر کوئی نقطہ ن ہے جس کے کارٹیزی محدد (لا، ما)

اور قطبی محدّد (رَ، طہ) ہیں تو ہم جانتے ہیں کہ لا = رجم طہ، ما = رجب طہ
اب اگر نقطہ ن دائرہ پر واقع ہو تو (رجم طہ، رجب طہ) دائرہ س کی مساوات پورا کریںگے، پس

$$\text{ر}^2 (\text{جم}^2 \text{طہ} + \text{جب}^2 \text{طہ}) + 2\text{ر} (\text{گ جم طہ} + \text{ف جب طہ}) + \text{ج} = 0$$

یعنی

$$\text{ر}^2 + 2\text{ر} (\text{گ جم طہ} + \text{ف جب طہ}) + \text{ج} = 0 \quad \ldots\ (1)$$

ر_1، ر_2 اس مساوات کی دو اصلیں ہیں اور مساواتوں کے نظریہ سے ہم کو معلوم ہے کہ

$$\text{ر}_1 + \text{ر}_2 = -2 (\text{گ جم طہ} + \text{ف جب طہ}) \quad \ldots\ (2)$$

اور

$$\text{ر}_1 \text{ر}_2 = \text{ج} \quad (3)$$

نیز دائرہ س کے لحاظ سے نقطہ و (۰، ۰) کی قطبی مساوات ہوگی

$$\text{لا} (0) + \text{ما} (0) + \text{گ} (\text{لا} + 0) + \text{ف} (\text{ما} + 0) + \text{ج} = 0$$

یعنی

$$\text{گ لا} + \text{ف ما} + \text{ج} = 0 \quad (4)$$

چونکہ نقطہ س (رَ، طہ) اس قطبی (۴) پر واقع ہے اس لیے

$$\text{گ} (\text{رَ جم طہ}) + \text{ف} (\text{رَ جب طہ}) + \text{ج} = 0$$

یعنی

$$\text{رَ} (\text{گ جم طہ} + \text{ف جب طہ}) + \text{ج} = 0،$$

$$\text{رَ} = -\frac{\text{ج}}{\text{گ جم طہ} + \text{ف جب طہ}} \quad (5)$$

اب مساواتوں (۲) اور (۳) سے قیمتیں درج کرنے پر ملتا ہے کہ

$$\frac{1}{\text{ر}_1} + \frac{1}{\text{ر}_2} = \frac{\text{ر}_1 + \text{ر}_2}{\text{ر}_1 \text{ر}_2} = -2 \frac{\text{گ جم طہ} + \text{ف جب طہ}}{\text{ج}} \quad (6)$$

اور مساوات (۵) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{۲}{\text{ر}} = -۲\,\frac{\text{گ جم طہ} + \text{ف جب طہ}}{\text{ج}} \qquad (۷)$$

پس (۶) اور (۷) کی بناء پر معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{۲}{\text{ر}} = \frac{۱}{\text{ر}_۱} + \frac{۱}{\text{ر}_۲} \qquad (۸)$$

اور یہی شرط ہے کہ ر۱، ر، ر۲ موسیقی سلسلہ میں ہوں۔ پس ثابت ہوگیا کہ نقاط و، س نقاط ف، ق کے موسیقی مزدوج نقطے ہیں۔

اعلیٰ ریاضی میں دائرہ اور بالعموم کسی دوسرے درجہ کے منحنی س کے لحاظ سے نقطہ و کے قطبی کی تعریف اسی خاصیت کی بناء پر کی جاتی ہے کہ اگر و میں سے کسی سمت میں خطِ مستقیم کھینچا جائے جو منحنی کو نقاط ف اور ق پر ملے اور پھر خط ف ق پر ایک نقطہ س ایسا معلوم کیا جائے کہ و، س خط ف ق کو موسیقی نسبت میں تقسیم کریں تو س کے طریق کو منحنی س کے لحاظ سے و کا قطبی کہتے ہیں۔

مشاہدہ۔ مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ مساوات (۱) کی دونوں اصلوں ر۱، ر۲ کا حاصلِ ضرب مستقل ہے یعنے زاویہ طہ کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔ یہ نتیجہ ہم کو علمِ ہندسہ سے بھی معلوم ہے کہ اگر ایک ثابت نقطہ و میں سے کسی سمت میں دائرہ کا قاطع و ف ق کھینچا جائے تو وف × وق کی قیمت مستقل ہوتی ہے اور و سے کھینچے ہوئے مماس کے طول کے مربع کے مساوی ہوتی ہے۔

مشق ۱۴

دائرہ پر متفرق سوالات

۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایک ثابت خطِ مستقیم پر اس نقطہ سے عمود کے طول کے متناسب ہے

ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق دائرہ ہے۔

۲۔ خطِ مستقیم لا + ۲ ما − ۳ = ۰ اور دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۲\,\text{لا} - ۲\,\text{ما} = ۰$ کے نقاطِ تقاطع کو مبدا سے ملانے والے خطوطِ مستقیم کی مساوات دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہ دونوں خط باہم علی القوائم ہیں۔

جواب: $\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا ما} - \text{ما}^{۲} = ۰$

۳۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کی مساوات جس کا قطر نقاط $(\text{لا}_{۱}، \text{ما}_{۱})$ اور $(\text{لا}_{۲}، \text{ما}_{۲})$ کو ملانے والا خط ہے $(\text{لا} - \text{لا}_{۱})(\text{لا} - \text{لا}_{۲}) + (\text{ما} - \text{ما}_{۱})(\text{ما} - \text{ما}_{۲}) = ۰$ ہے۔

۴۔ دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۴$ کے اس مماس کی مساوات دریافت کرو جو خط لا + ۲ما + ۳ = ۰ کے متوازی ہے :-

جواب: $\text{لا} + ۲\,\text{ما} + ۲\sqrt{۵} = ۰$ ، $\text{لا} + ۲\,\text{ما} - ۲\sqrt{۵} = ۰$

۵۔ ثابت کرو کہ خط $\text{ما} = \text{لا} + \text{ج}\sqrt{۲}$ دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ج}^{۲}$ کو مس کرتا ہے۔ نیز اس کا نقطۂ تماس معلوم کرو:-

جواب: $\left(-\frac{\text{ج}}{\sqrt{۲}} ، \frac{\text{ج}}{\sqrt{۲}}\right)$

۶۔ دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ر}^{۲}$ کا وہ مماس دریافت کرو جو خط ما = م لا پر عمود ہو :-

جواب: $\text{لا} + \text{م ما} - \text{ر}\sqrt{۱+\text{م}^{۲}} = ۰$ ، $\text{لا} + \text{م ما} + \text{ر}\sqrt{۱+\text{م}^{۲}} = ۰$

۷۔ خط $\frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ر}^{۲}$ کو جن نقطوں پر ملتا ہے اُن کو ملانے والے وتر کا طول دریافت کرو۔

جواب: $۲\sqrt{\text{ر}^{۲} - \frac{\text{و}^{۲}\text{ب}^{۲}}{\text{و}^{۲}+\text{ب}^{۲}}}$

۸۔ اُس دائرہ کی مساوات دریافت کرو جس کا مرکز نقطۂ (۱، ۴) پر واقع ہو اور جو خطِ مستقیم ۵لا + ۱۲ ما = ۱ کو مس کرے۔

جواب: $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۲\,\text{لا} - ۸\,\text{ما} + ۱ = ۰$

۹۔ اس دائرہ کی مساوات دریافت کرو جو محوروں کو فاصلوں ۳ اور ۵ پر

قطع کرے اور مبدا میں سے گذرے۔

جواب: لا^{2} + ما^{2} + ۳لا − ۵ما = ۰

۱۰۔ نقطۂ (−۲، ۳) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا^{2} + ما^{2} − ۴لا − ۶ما + ۵ = ۰ کے معلوم کرو۔

جواب: محور ما

۱۱۔ خطِ مستقیم ۲لا + ما + ۱۲ = ۰ کا قطب بلحاظ دائرہ لا^{2} + ما^{2} − ۴لا + ۳ما − ۱ = ۰ کے معلوم کرو۔

جواب: (۱، −۲)

۱۲۔ نقطۂ (۶، −۷) سے دائرۂ ۳لا^{2} + ۳ما^{2} − ۷لا − ۶ما = ۱۲ کے مماس کا طول معلوم کرو۔

جواب: ۹√۳

۱۳۔ ثابت کرو کہ ع کی تمام قیمتوں کے لیے خطوطِ مستقیم

لا جم ع + ما جب ع = ا، لا جم ع − ما جب ع = ب

کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۴۔ تین نقطوں (۱، ۰)، (۲، ۳)، (۳، −۱) میں سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات معلوم کرو اور مرکز کو مبدا مان کر اس مساوات کی تحویل کرو۔

جواب: ۷لا^{2} + ۷ما^{2} − ۳۹لا − ۱۵ما + ۳۲ = ۰

۱۵۔ ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مبدا میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر حصے ا، ب کاٹتا ہے۔

جواب: لا^{2} + ما^{2} − ا لا − ب ما = ۰

۱۶۔ دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ۱۳^{2} پر کے نقطہ (۵، ۱۲) پر عاد کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۱۲لا − ۵ما = ۰

۱۷۔ دائرۂ لا^{2} + ما^{2} + ۲لا = ۰ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائیں۔

جواب: ما = لا + $\frac{۱}{۱-۲ط}$ ، ما = لا - $\frac{۱}{۱+۲ط}$

۱۸۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ر^۲ کے دو نقاط (لا$_۱$، ما$_۱$) اور (لا$_۲$، ما$_۲$) کے درمیانی فاصلہ کا مربع ۲ (ر^۲ - لا$_۱$ لا$_۲$ - ما$_۱$ ما$_۲$) ہے۔

۱۹۔ اگر ایک نقطہ سے دو ہم مرکز دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے مربعوں کا فرق نقطۂ مذکورہ کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۲۰۔ ایک خطِ مستقیم کا قطب بلحاظ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ر^۲ کے خطِ مستقیم الا + ب ما = ۱ پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات لا - ا ر^۲ = ج (ما - ب ر^۲) ہے جہاں ج کوئی مستقل ہے۔

۲۱۔ نقطہ و میں سے ایک خط کسی سمت میں کھینچا گیا ہے اور یہ ایک ثابت خطِ مستقیم کے نقطہ ن پر ملتا ہے۔ اگر و ن پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ سطح و ن × و ق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۲۲۔ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۴ کے لحاظ سے نقاط (۱، ۳)، (۲، ۱)، (۳، -۱) کے قطبی خطوط معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ تینوں خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

جواب: لا + ۳ما = ۴، ۲لا + ما = ۴، ۳لا - ما = ۴

۲۳۔ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۲۵ اور خطِ مستقیم لا - ۷ما + ۲۵ = ۰ کے نقاطِ تقاطع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ان نقاطِ تقاطع پر دائرہ کے مماسوں کی مشترکہ مساوات (لا - ۷ما + ۲۵)^۲ = ۲۵ (لا^۲ + ما^۲ - ۲۵) ہے۔

جواب: (-۴، ۳)؛ (۳، ۴)

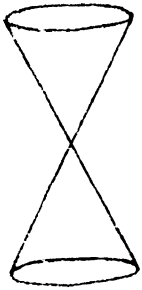
۲۴۔ خطِ مستقیم ۲لا - ما = ۳ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۴ کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان سے دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ یہ مماس ایک دوسرے کو نقطۂ ن پر قطع کرتے ہیں۔ ن کے محدد معلوم کرو۔

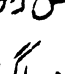
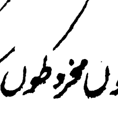
جواب : ($\frac{۸}{۳}$ ، $\frac{-۴}{۳}$)

۲۵ ۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۱ ، ۳) کا قطبی دونوں دائروں
لا^{2} + ما^{2} − ۱۰ لا + ۱۰ ما + ۱۰ = ۰ اور لا^{2} + ما^{2} − ۸ لا + ۶ ما + ۱۰ = ۰ کے
لحاظ سے ایک ہی ہے۔

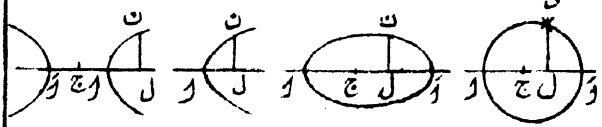
۲۶ ۔ ثابت کرو کہ مساوات (ما − لا + ۳)^{2} + ۲ (لا − ۲) (ما + ۲) = ۰
ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ خطوط لا = ۲ اور ما + ۲ = ۰ اس
دائرہ کے مماس ہیں۔

چوتھا باب
قطع مکافی



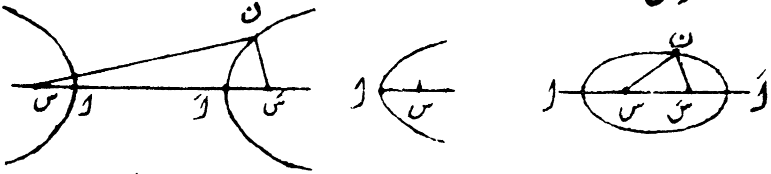
۱۸۴ - مخروطی تراشیں۔ طالب علم مخروط کی شکل سے واقف ہے مثلاً ساتھ کی شکل میں ایک دوہرا مخروط دکھایا گیا ہے۔ کہتے ہیں کہ جب یونانیوں نے مستقیم خطوط اور دائروں سے بنی ہوئی اشکال کے خواص زیادہ حد تک معلوم کر لیے تو مخروط کی طرف اُنھوں نے اپنی توجہ مبذول کی۔ قایم مستدیر مخروط کو اگر مستوی سطحوں سے تراشا جائے تو مستوی منحنی پیدا ہوتے ہیں ، یعنے ایسے منحنی جن پر کے تمام نقطے ایک مستوی ہیں (کاغذ یا بورڈ کی سطح میں) آسکتے ہیں۔ واضح ہو کہ اگر قایم مستدیر مخروط کو ایک مستوی سے محور کے علی القوایم کاٹا جائے تو دائرہ پیدا ہوتا ہے ،  ، اگر مستوی تراش محور کے ساتھ مائل ہو تو ناقص ، اگر تراش مخروط کے کھون کے متوازی ہو تو مکافی  اور اگر تراش کا میلان محور کے ساتھ اور کم ہو جائے اور تراش دونوں مخروطوں کو کاٹے تو دو شاخیں ایک ہی منحنی کی دو مخروطوں پر پیدا ہوتی ہیں جسے قطع زائد کہتے ہیں۔

اپولونیس (Apollonious ۲۶۰ تا ۲۰۰ قبل مسیح) نے ان تین مخروطی تراشوں پر ایک مبسوط رسالہ لکھا جو سولھویں صدی عیسوی تک بطور درسی کتاب کے استعمال میں رہا۔

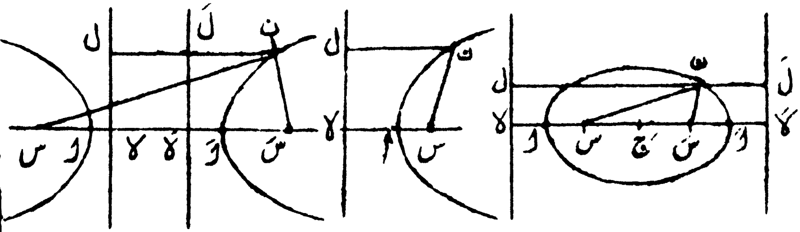


اس نے مخروط کی وہی مجسم شکل استعمال کر کے مخروطی تراشوں کے لیے یہ مشترک خاصیت حاصل کی کہ $\frac{\text{ن ل}^2}{\text{ا ل} \times \text{ل اَ}}$ = مستقل (ناقص (دائرہ) اور زائد کے لیے)

اور $\frac{\text{ن ل}^2}{\text{ا ل}}$ = مستقل مکافی کے لیے۔ اس نے مخروطی تراشوں کے ماسکے



اور ان کے بعض مشہور خواص معلوم کیے، اسے یہ بھی معلوم تھا کہ ناقص کی صورت میں س ن + سَ ن = مستقل = ا اَ اور زائد کی صورت میں س ن - سَ ن = مستقل = ا اَ - اس کے پانچ سو سال بعد پیپس (اسکندریہ) نے مرتبوں



لا ل اور لا لَ کو دریافت کیا اور یہ معلوم کیا کہ ہر مرتب، ساتھ کے ماسکہ سے متعلق ہے۔ اور تینوں مخروطی تراشوں کے لیے "ماسکہ مرتب" خاصیت یا تعریف حاصل کی۔ یعنی یہ کہ ہر مخروطی تراش میں $\frac{س ن}{ن ل}$ = مستقل (ز) منحنی پر ن کے تمام مقامات کے لیے اور یہ نسبت

اگر کم ہو ایک سے یعنی $ز < ۱$ تو منحنی قطع ناقص

اگر برابر ایک سے ،، $ز = ۱$ تو منحنی ،، مکافی

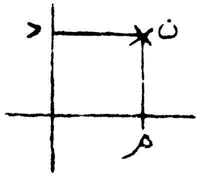
اگر بڑی ایک سے ،، $ز > ۱$ تو منحنی ،، زائد ہوگا۔

پس ان ہندسی تعریفوں سے ہم مخروطی تراشوں کی مساواتیں اور ان سے انکے تمام خواص حاصل کرینگے۔

۲،۴۔ قطع مکافی ایک مخروطی تراش ہے، اس کی تعریف یہ ہے :-

تعریف ۱۔ کسی مستوی سطح میں، ایک ثابت نقطہ (س) ہے اور ایک ثابت خط (ص ل)، ایک نقطہ (ن) اُسی مستوی میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ، ہمیشہ مساوی رہتا ہے ثابت خط سے اس کے عمودی فاصلہ کے (س ن = ن ل)، ن کے طریق کو قطع مکافی کہتے ہیں۔

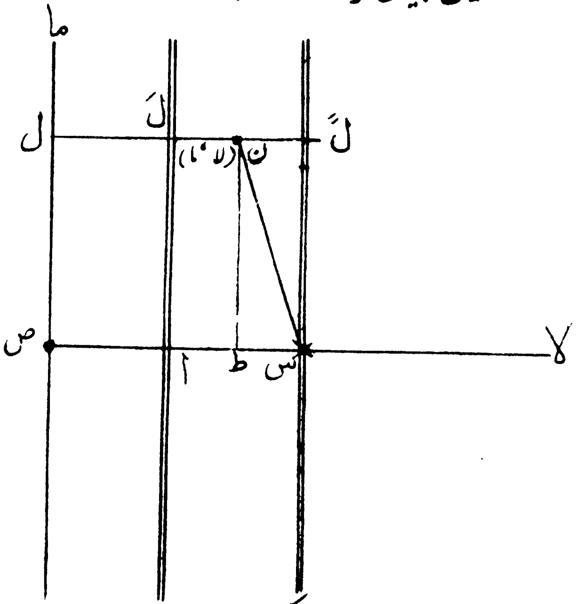
تعریف ۲۔ ایک مستوی میں دو ثابت علی القوائم خط ہیں، ایک نقطہ ن خطوں کے مستوی میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک خط سے اس کے عمودی فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے دوسرے خط سے اس کا عمودی فاصلہ ($\frac{ن م^2}{ن د}$ = مستقل)



نقطہ ن کا طریق قطع مکافی کہلاتا ہے ۔
ہم دیکھینگے کہ ان دونوں تعریفوں سے ایک ہی قطع مکافی ملتا ہے، فی الحقیقت یہ دونوں تعریفیں ایک ہی ہیں ۔
تعریف ۱ کے بموجب متحرک نقطہ ن اس ہندسی ربط کو پورا کرتا ہے

س ن = ن ل

جہاں س ثابت نقطہ ہے اور ص ل ثابت خط ہے، اس ہندسی ربط کو الجبرا کے اعداد میں بیان کرنا مقصود ہے ۔



س سے ثابت خط پر عمود س ص کھینچو ۔ ص ثابت نقطہ حاصل ہوگا اور ص س ثابت خط ہوگا ۔
نیز س ص ثابت فاصلہ ملیگا ۔ فرض کرو کہ س ص = ۲ ا، اگر ص س کی نقطہ ا پر تنصیف کی جائے تو فاصلہ ص ا = ا س = ا جہاں ا مستقل مقدار ہے ۔
اب ہم دو ثابت خطوں ص ل اور ص س کو بالترتیب محاور ما اور لا

لیتے ہیں - اور ان کے نقطۂ تقاطع ص کو مبدا - واضح ہو نقاط ص، ۱، س تینوں ثابت نقطے ہیں، ان میں سے گزرنے والے ص ل کے متوازی خط، ثابت خط ہونگے، نقاط ص، ۱، س میں سے کسی کو مبدا لیا جا سکتا ہے اور خط ص س کو محور لا اور ان نقطوں میں سے ص ل کے متوازی خط کو محور ما۔

سب سے پہلے ہم مبدا نقطۂ ص پر لیتے ہیں اور ص س کو محور لا اور ص ل کو محور ما۔

نقطہ س کے محدد ہیں (۲ ا، ۰) اور متحرک نقطہ ن کے (لا، ما)۔

اب ہندسی رشتہ، ن کے طریق کے لیے ہے　　س ن = ن ل

یعنی　　س ن^2 = ن ل^2

(لا - ۲ ا)^2 + ما^2 = لا^2　　کیونکہ ن ل = ط ص = لا

- ۴ ا لا + ۴ ا^2 + ما^2 = ۰

یعنی　ما^2 = ۴ ا (لا - ا) .... (۱)

یہ ن کے طریق یعنی قطع مکافی کی مساوات ہے مبدا ص اور محوروں ص س، ص ل کے لحاظ سے - اب مبدا کو نقطہ ۱ پر لو اور محور لا خط ۱ س اور محور ما خط ۱ل، جو ص ل کے متوازی ہے (دیکھو شکل بالا)۔

واضح ہو کہ مبدا کو ہم ص سے ہٹا کر ۱ پر لیجانا چاہتے ہیں اور نئے محوروں کو پرانے محوروں کے متوازی (محور لا وہی رہتا ہے) رکھتے ہیں۔ نئے مبدا ۱ کے محدد بلحاظ پرانے مبدا اور محوروں کے (ا، ۰) ہیں پس نئے اور پرانے محددوں میں رشتہ ہوگا۔

(پرانا) لا = (نیا) لاَ + ا　｝پس مساوات (۱) کے لا، ما کی بجائے
(〃) ما = (〃) ماَ + ۰　｝بالترتیب لاَ + ا اور ماَ رکھ دینا چاہیے

جہاں لاَ، ماَ نئے محدد ہیں۔ (۱) میں اس اندراج سے نئی مساوات حاصل ہوتی ہے

ماَ^{2} = ۴ ا (لاَ + ا - ا)

یعنی $\bar{ما}^2 = ۴ ل \bar{لا}$

یا اگر یہ ہمارے ذہن میں رہے کہ اب محدّد نئے ہیں تو زبر حذف کر دیے جا سکتے ہیں، پس نئی مساوات ہے

$$ما^2 = ۴ ل لا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\bar{ا})$$

جو سادہ ترین شکل میں ہے، جسے معیاری صورت کہتے ہیں، یاد رہے یہ مساوات بلحاظ ا مبدا اور محاور اس اور ا لَ کے ہے۔ ان محوروں کو اصلی محور کہتے ہیں۔

اگر س کو مبدا لیا جائے اور ص ا س لا کو محور لا اور س میں سے ص ل کے متوازی خط س لَ مخروجہ کو محور ما تو چونکہ نئے مبدا س کے محدّد بلحاظ ل کے (ل، ۰) ہیں۔ اس لیے بلحاظ اس حوالہ کے نظام کے منحنی کی مساوات اِس تحویل سے حاصل ہوگی۔

$$لا = \bar{لا} + ل$$

$$ما = \bar{ما} + ۰$$

(ا) میں اس اندراج سے مساوات حاصل ہوگی

$$\bar{ما}^2 = ۴ ل (\bar{لا} + ل)$$

یا اگر یہ ذہن میں ہے کہ مبدا س ہے اور محور س لا اور س لَ ہیں تو زبر نکال دینے سے مساوات حاصل ہوتی ہے

$$ما^2 = ۴ ل (لا + ل) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\bar{\bar{ا}})$$

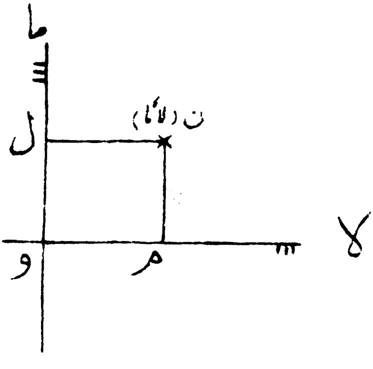
اسی طرح کوئی اَور نقطہ مبدا لیا جا سکتا ہے اور اس میں سے گزرنے والے پُرانے محوروں کے متوازی خط نئے محور لیے جا سکتے ہیں اور منحنی کی مساوات کو نئے محوروں کے لحاظ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ منحنی وہی ہے منحنی نہیں بدلتا مگر اِس کا جبریہ نام یا مساوات بدل جاتی ہے جیسے مبدا،

اور محوروں کو بدلا جائے۔

مساواتوں (۱)، (اَ)، (اً) سے ہم دیکھتے ہیں کہ مکافی کی مساوات درجۂ دوم کی ہے، درجۂ دوم کی رقم ما^2 ہے جو مربع کامل ہے۔

واضح ہو کہ مکافی کی سادہ سے سادہ مساوات ما^2 = ۴ ا لا ہے، اس مساوات سے ہم اس کی شکل کا اندازہ لگاتے ہیں۔ نیز ہم دیکھینگے کہ مکافی کے تمام خواص اس مساوات میں مضمر ہیں انھیں ہم حاصل کرنے کی کوشش کرینگے۔

تعریف ۲ سے



مستوی میں دو ثابت خط و م لا اور و ل ما ہیں، اور (ن م^2 / ل ن) = مستقل

خطوں کے تقاطع کو مبدا، و لو اور جس خط پر عمود کا مربع لیا جاتا ہے اس کو محور لا اور دوسرے کو محور ما۔ اب

چونکہ ن م = ما، ل ن = و م = لا پس ن کے طریق کی مساوات حاصل ہوتی ہے (ما^2 / لا) = مستقل = (۴ ا)

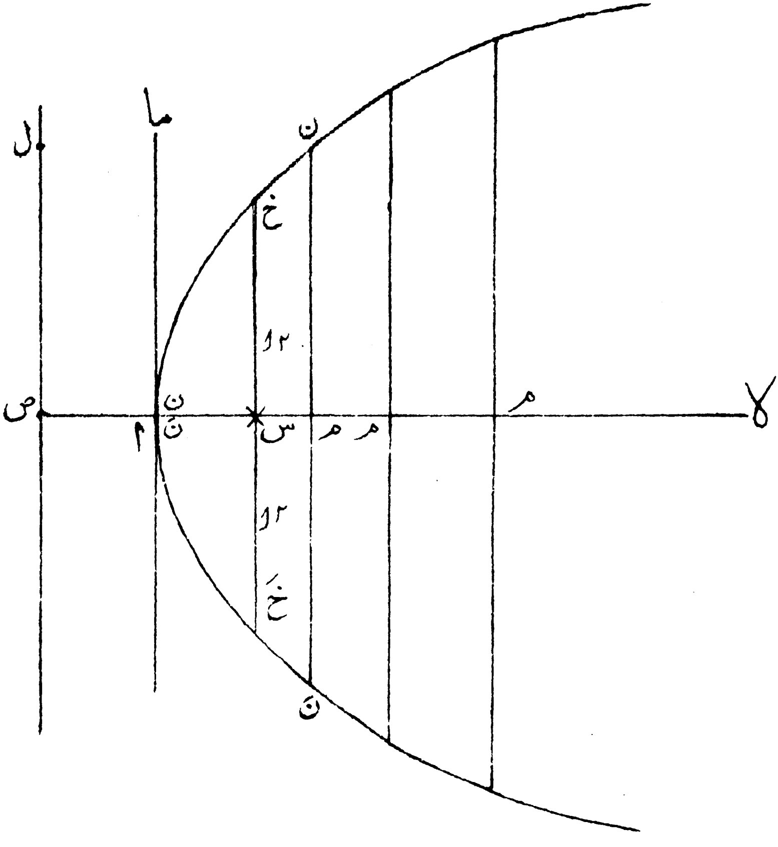
تو مساوات ملتی ہے ما^2 = ۴ ا لا جو وہی مساوات ہے جو پہلے حاصل ہوئی۔

و لا (یعنی ما = ۰) کو مکافی کا محور کہتے ہیں اور و ما کو راس پر کا مماس۔ ہم ابھی دیکھینگے کہ ان ناموں کی کیا وجہ ہے۔

۳،۴ — مکافی کی شکل،

اگر ا مبدا، ا لا محور لا، ا ما محور ما، ہو تو منحنی کی مساوات ما^2 = ۴ ا لا ہے،

جہاں ا س = ص ا = ا ۔



(۱) ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا ا (۰، ۰) منحنی پر واقع ہے کیونکہ مساوات $ما^{۲} = ۴ ا لا$ میں (۰، ۰) مندرج کریں تو مساوات پوری ہوتی ہے۔

(۲) مساوات $ما^{۲} = ۴ ا لا$ سے $ما = \pm ۲ \sqrt{ا لا}$

اگر ا کو مثبت مقدار مانا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی کسی مثبت قیمت کے لیے، ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں،

یعنی ا کے دائیں جانب، خط ا س لا پر لا کی کسی قیمت کے مماثل اوپر نیچے مساوی فاصلوں پر منحنی پر نقطے واقع ہیں، اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ منحنی (مکافی) محور لا، ا س لا کے گرد متشاکل ہے، یعنی اس خط سے اوپر منحنی کا جو حصہ ہے وہ نچلے حصہ کی عین تصویر ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا منفی ہو تو ما = ± ۲ √(ا لا) سے ما کی حقیقی قیمتیں نہیں ملتیں، یعنی منحنی پر کے نقطے خیالی ہیں، یعنی ا کے بائیں جانب منحنی کا کوئی حصہ واقع نہیں ہوتا۔ پس منحنی بالتمام ا کے دائیں جانب واقع ہوتا ہے اور خط ا س لا کے گرد متشاکل ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر خط ا لا پر کے کسی نقطہ ھ سے عمود یا معین کھینچا جائے تو اس پر کے نقطے ن اور نَ مکافی پر واقع ہونگے۔

اگر س ن = ل ن = ص ھ اور یہ ص ھ معین کے پایہ کا فاصلہ ہے مرتب سے، پس ن، نَ حاصل کرنے کے لیے، س کو مرکز مان کر ھ ص کی دوری پر ایک قوس کھینچو جو معین کو ن اور نَ پر کاٹے، پس ن، نَ دو نقطے محور ا لا سے مساوی عمودی فاصلہ پر مل گئے۔ اس طرح بے شمار نقطوں کے جوڑے حاصل ہو سکتے ہیں۔ جب ھ، س پر ہو تو س ص = ۲ ا، س میں کے معین پر نقاط ن، نَ فاصلہ ۲ ا پر واقع ہونگے ان کو اگر خ اور خَ سے تعبیر کیا جائے تو س خ = خَ س = ۲ ا نیز ہم جانتے ہیں ا س = ا، خ س خَ کو وترِ خاص کہتے ہیں۔ جب ھ، ا کے پاس ہو تو مرتب سے اس کا فاصلہ تقریباً ا ص کے مساوی ہوگا اور س سے ا ص کی دوری پر نقطہ ا کے پاس دائیں جانب اوپر اور نیچے ایک دوسرے کے نہایت قریب دو نقطے ن، نَ ملینگے، گویا ا ما ان دو نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوگا یعنی ا ما منحنی کا نقطہ ا پر مماس ہوگا۔ جیسے ھ دائیں جانب حرکت کریگا، ھ ص بڑھتا جائیگا اور س ن جو ھ ص کے مساوی ہوتا ہے وہ بھی بڑھتا جائیگا۔ گویا دائیں جانب منحنی لا انتہا فاصلہ تک پھیلتا ہے۔

مثال ۲ - اوپر ہم نے دیکھا ہے کہ ا ما نقطہ ا پر مکافی کا مماس ہے، اسے ہم یوں بھی دیکھ سکتے ہیں۔ ا ما کی مساوات لا = ۰ ہے، خط ا ما جہاں پر منحنی ما۲ = ۴ ا لا کو کاٹتا ہے وہاں پر دونوں مساواتیں ما۲ = ۴ ا لا اور لا = ۰ پوری ہوتی ہیں پس نقاطِ تقاطع کے لیے ما۲ = ۰ یعنی ما = ۰، ۰، اس کے مماثل لا کی قیمتیں صفر اور صفر حاصل ہوتی ہیں، یعنی نقاطِ تقاطع مبدا، اور مبدا، ہیں۔ پس خط ا ما، ا پر کا مماس ہے

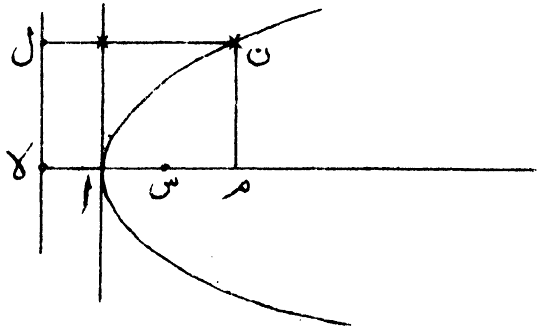
ا س لا کو مکافی کا محور کہتے ہیں، ہم نے دیکھا ہے کہ اس خط کے گرد منحنی متشاکل ہے، اوپر اور نیچے کے حصے، گویا اس خط میں، ایک دوسرے کے عکس ہیں۔ اس کو محور لا لیا گیا ہے۔

نقطہ ا مکافی کا راس کہلاتا ہے۔ معیاری صورت حاصل کرنے کے لیے اس کو مبدا، مانا گیا ہے۔

خط ا ما راس پر کا مماس ہے، اس کو محور ما مانا گیا ہے۔

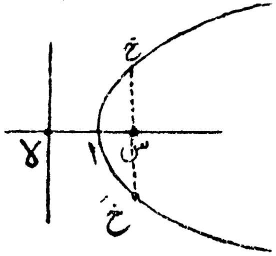
ن م معین ہے اور ن مَ دوہرا معین کہلاتا ہے۔ خ خَ وتر خاص کا طول = ۴ ا - یا $\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}}$ = ۴ ا

واضح ہو کہ مساوات ما۲ = ۴ ا لا ہندسی خطوط کی رقوم میں حسب ذیل ہوگی:-



$\frac{\text{ن م}^2}{\text{ل ن}}$ = وتر خاص کا طول = خ خَ، یا ن م۲ = خ خَ × ل ن

مثال ۱ - منحنی ما۲ = ۲ لا میں وترِ خاص کا طول ۴ ا = ۲،



یعنی ا = ½ اس = ½،

س خ = خَ س = ۱،

اَ خ خَ میں سے منحنی کھینچا گیا ہے دیکھو شکل، منحنی پر اور نقطے لیے جا سکتے ہیں، مثلاً جب، لا یعنی ۱م = ۱،

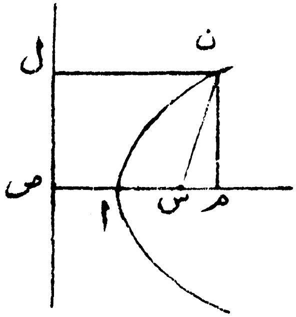
تو ما^۲ = ۲ یعنی ما = ± √۲ = ± ...... ۱٫۴۱۴۲

جب، لا = ۲، تو ما = ۲ وغیرہ

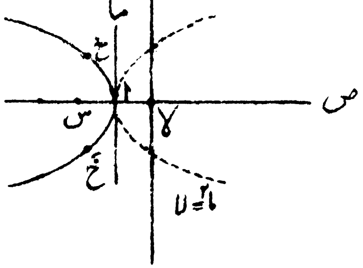
مثال ۲ ۔ فاصلہ س ن معلوم کرو، نقطہ ن (لا، ما) ہے، اور مکافی کا متبدل ا ہے،

س ن = ل ن = ۱م + ص ۱ = لا + ا

پس س ن = ل ن = ص م = لا + ا



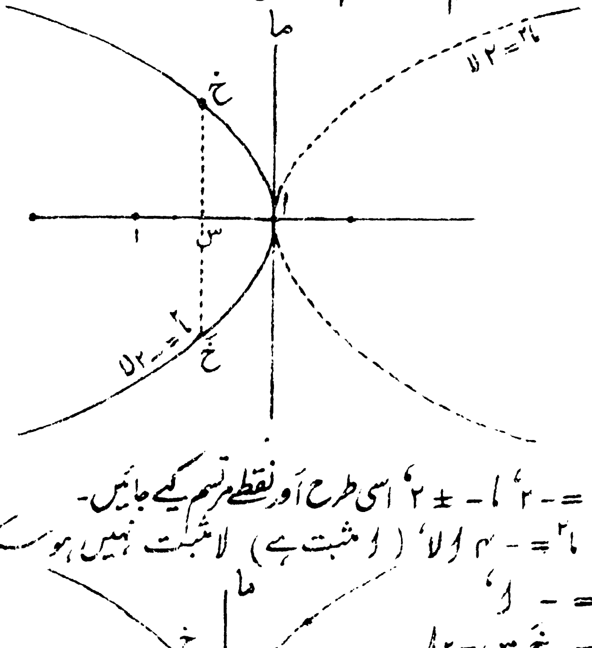
مثال ۳ ما^۲ = ـ لا، ما^۲ = ـ ۲ لا، ما^۲ = ـ ۴ ا لا کی ترسیمیں بناؤ ـ



پہلی صورت میں لا جب مثبت ہے تو ما خیالی ہوتا ہے اس لیے منحنی ا ما کے دائیں جانب واقع نہیں ہوتا۔ لا جب منفی ہے تو ما کی دو حقیقی قیمتیں ہوتی ہیں۔ خ خَ = ا اور س خ = ۲ س ا = س خَ جس سے منحنی کی شکل کا اندازہ ملتا ہے پوری صحت کے لیے اور نقطے مرتسم کیے جائیں۔

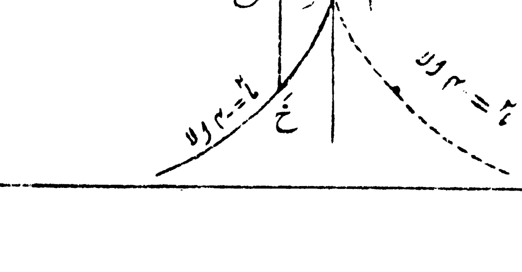
ما۲ = - ۲ لا، لا مثبت نہیں ہو سکتا، تمام منحنی و ما کے بائیں جانب واقع ہے،

ر = ا س = - ۲/۴ = - ۱/۲ مطلق قیمت، س خ = س خَ = ا



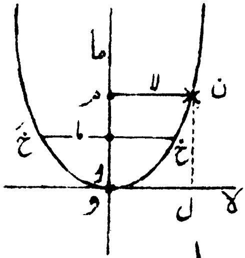
جب لا = - ۲، ما = ± ۲، اسی طرح اور نقطے مرتسم کیے جائیں۔

ما۲ = - ۴ ر لا، (ر مثبت ہے) لا مثبت نہیں ہو سکتا۔



ا س = - ر،
س خ = خَ س = ۲ ر
(مطلق قیمت) اس شکل میں
ا ما کے بائیں جانب
ما۲ = - ۴ ر لا کی
ترسیم ہے اور دائیں جانب
ما۲ = ۴ ر لا کی۔

مثال ۴ - ذیل کے منحنیوں کی ترسیم بناؤ لا۲ = ۴ ا ما، لا۲ = -۴ ا ما
اور ایک ہی شکل میں لا۲ = ± ۴ ا ما، ما۲ = ± ۴ و لا کی ترسیم بناؤ -



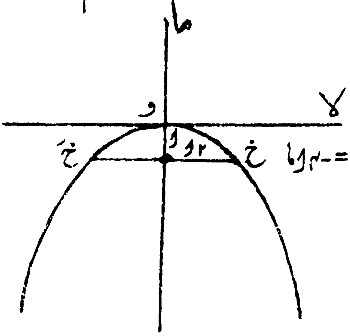
لا۲ = ۴ ا ما

مساوات سے و ل۲ = ۴ ا × ل ن

یا م ن۲ = ۴ ا × و م

یا م ن۲ / و م = ۴ ا (مستقل)

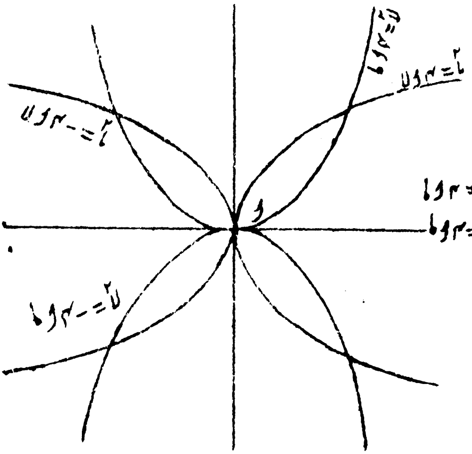
پس ن کا طریق مکافی ہے، جس کا محور، محور ما ہے اور راس و کا مماس محور لا اور وتر خاص خ خَ = ۴ ا



لا۲ = -۴ ا ما

ما کی قیمت مثبت نہیں ہوسکتی کیونکہ لا کی قیمت خیالی ہوگی -

ما کی ہر منفی قیمت کے لیے لا کی دو قیمتیں ہیں، منحنی محور ما کے گرد متشاکل ہے اور محور لا سے بالتمام نیچے واقع ہوتا ہے -



ما۲ = ± ۴ ا لا، محور لا کے گرد متشاکل، ایک منحنی محور ما کے دائیں جانب واقع ہے دوسرا بائیں جانب -

لا۲ = ± ۴ ا ما، منحنی محور ما کے گرد متشاکل ہیں، ایک منحنی محور لا سے اوپر واقع ہے دوسرا نیچے -

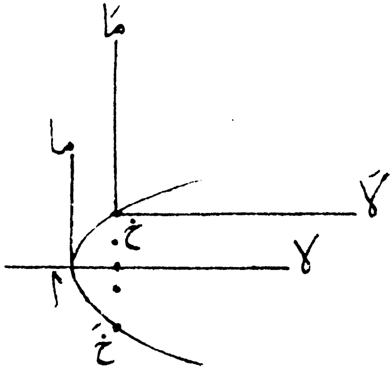
مثال ۵۔ مکافی ما^2 = ۴ ا لا میں مرتب، محور، راس پر کے مماس، وترِ خاص کی مساواتیں لکھو (مرتب کی مساوات لا = - ا، مکافی کا محور ما = ۰، راس پر کا مماس لا = ۰، وترِ خاص لا = ا)

مثال ۶۔ ان منحنیوں کو مرتسم کرو

ما^2 = ۳ لا، لا^2 = ۲ ما، ما^2 = - ۲ لا، ما^2 = - ۷ لا

۱۳۱ء۴ - مکافی کی مساوات جبکہ اس کے مستوی میں مبداء کہیں لیا جائے اور حوالہ کے محور مکافی کے محور اور راس پر کے مماس کے متوازی ہوں۔

مکافی کی سادہ سے سادہ شکل میں مساوات ہے ما^2 = ۴ ا لا



فرض کرو کہ وترِ خاص کے سرے خ کو ہم نیا مبداء مانتے ہیں اور نئے محور، نقطہ خ میں سے پرانے محوروں یعنی مکافی کے محور اور راس پر کے مماس کے بالترتیب متوازی ہیں۔ خ کے محدد ہیں (ا، ۲ ا) اور پرانے اور نئے محددوں میں رشتے ہونگے۔

لا = لاَ + ا
ما = ماَ + ۲ ا } اور مساوات ما^2 = ۴ ا لا بدل کر ہو جائیگی۔

(ماَ + ۲ ا)^2 = ۴ ا (لاَ + ا)

یعنی مَا^۲ + ۴ ا رمَا - ۴ ا لَا = ۰

یا زبریں حذف کرنے سے نئی مساوات حاصل ہوتی ہے

ما^۲ + ۴ ا ر ما - ۴ ا لا = ۰ .... (۱)

ہم دیکھتے ہیں کہ درجہ دوم کی رقمیں مربع کامل بناتی ہیں، مستقل رقم نئی مساوات میں بھی موجود نہیں کیونکہ نقطہ خ منحنی پر واقع ہے -

فرض کرو کہ مبدا کو کسی نقطہ (ھ، ک) پر لے جاتے ہیں تو ما^۲ = ۴ ا لا ہوجائیگی -

(ما + ک)^۲ = ۴ ا (لا + ھ)

ما^۲ + ۲ک ما - ۴ ا لا + ک^۲ - ۴ ا ھ = ۰،

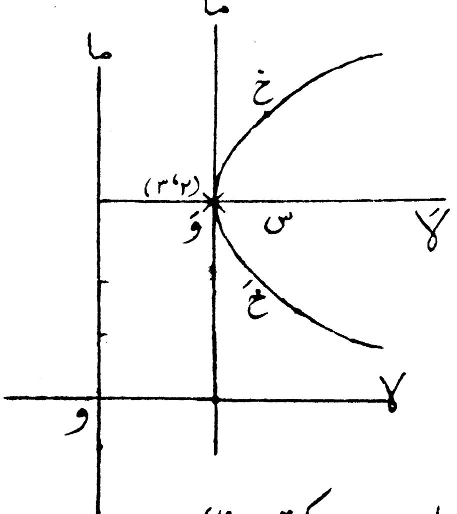
پس اگر مستوی میں کے کسی نقطہ کو مبدا مانا جائے اور نئے حوالہ کے محور پرانے محوروں کے متوازی رہیں تو تبدیل شدہ مساوات کی یہ شکل ہوتی ہے
ما^۲ + ا لا + ب ما + ج = ۰

مثال ۱- منحنی ما^۲ - ۲ لا - ۶ ما + ۱۱ = ۰ کو مرتسم کرو -

ما والی رقموں کو ایک ساتھ لے کر مربع کامل بنانے سے

(ما - ۳)^۲ = ۲ لا - ۲ = ۲ (لا - ۱)

مبدا کو (۲، ۳) پر لے جانے سے مساوات ہوجاتی ہے ما^۲ = ۲ لاَ، جو قطع مکافی ہے اور جس کا وترِ خاص ۲ ہے - اس کی ترسیم یہ ہوگی -

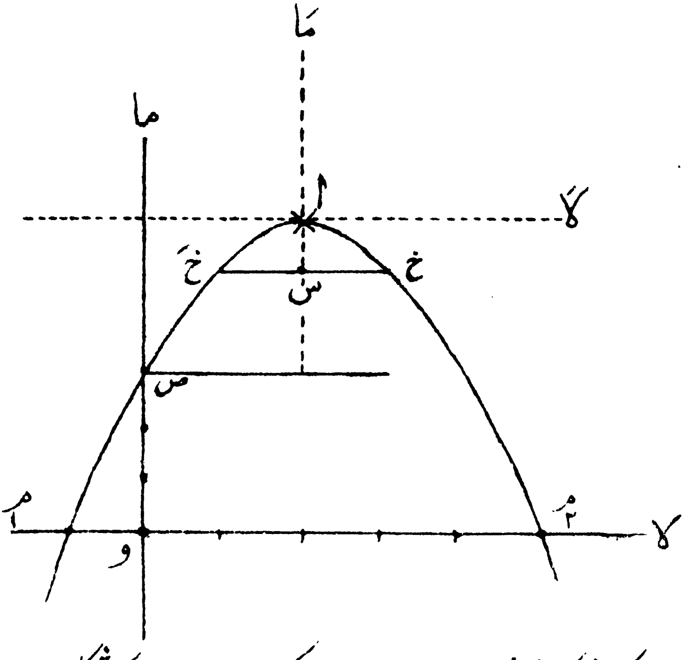


مثال ۲ لا^۲ - ۴ لا + ۲ ما - ۵ = ۰ کی ترسیم بناؤ -

اس سوال میں لا² مساوات میں شریک ہوتا ہے، اور ما² شریک نہیں ہوتا اس لیے لا والی رقموں کو ایک ساتھ لے کر مربع کامل بنانے سے

$$(لا - ۲)^۲ = - ۲ ما + ۹ = - ۲ (ما - \frac{۹}{۲})$$

مبدا کو $(۲، \frac{۹}{۲})$ پر لے جانے سے $لا'^۲ = -۲ ما'$



اس مکافی کا وترِ خاص ۲ ہے۔ اس کی ترسیم اوپر کی شکل میں دی گئی ہے اس میں نیا محور لا' رأس پر کا مماس ہے اور نئے محور ما' کا منفی حصہ مکافی کا محور ہے۔

منحنی پرانے محور لا کو کاٹتا ہے جہاں اصلی مساوات میں ما = ۰ رکھنے سے لا² - ۴ لا - ۵ = ۰ یعنی لا = ۵ یا -۱ (نقاط م۱، م۲)

منحنی پرانے محور ما کو کاٹتا ہے جہاں اصلی مساوات میں لا = ۰ رکھنے سے ملتا ہے ما = $\frac{۵}{۲}$ (نقطہ ص)

مثال ۳- ان منحنیوں کو مرتسم کرو، راس کے محدّد، وترِ خاص کا طول اور اس کی مساوات، مرتب اور محور کی مساواتیں دریافت کرو۔

(ا) ۲ ما² - لا - ۱۲ ما + ۱۸ = ۰

(ب) لا² - ۶ لا - ۴ ما + ۵ = ۰

(ج) ۲ ما² - ۲ لا - ۱۲ ما + ۷ = ۰

جواب (ا) راس (۰، ۳)، وترِ خاص کا طول ۱/۲، مساوات ۸ لا - ۱ = ۰،
مرتب کی مساوات ۸ لا + ۱ = ۰، محور کی مساوات ما - ۳ = ۰۔

(ب) راس (۳، -۱)، وترِ خاص کا طول ۴، اس کی مساوات ما = ۰۔
مرتب کی مساوات ما + ۲ = ۰، محور کی مساوات لا - ۳ = ۰۔

(ج) راس (-۱۱/۲، ۳)، وترِ خاص ۱، مساوات ۴ لا + ۲۱ = ۰،
مرتب کی مساوات ۴ لا + ۲۳ = ۰، محور کی مساوات ما - ۳ = ۰۔

مثال ۴ - ذیل کے منحنیوں کے راس، ماسکے، وترِ خاص معلوم کرو اور وترِ خاص، راس پر کے مماس، مرتب کی مساواتیں دریافت کرو۔

(ا) (ما - ۳)² = ۲ (لا - ۱)

(ب) (لا - ۲)² = ۴ (ما - ۱)

(ج) ۲ لا² + ۳ ما + ۸ لا - ۶ = ۰

(د) (ما - ا)² = ب (لا - ج)

جواب (ا) راس (۱، ۳)، ماسکہ (۳/۲، ۳)، وترِ خاص طول ۲،
وترِ خاص مساوات ۲ لا - ۳ = ۰۔ راس پر کا مماس مساوات لا - ۱ = ۰، مرتب ۲ لا - ۱ = ۰۔

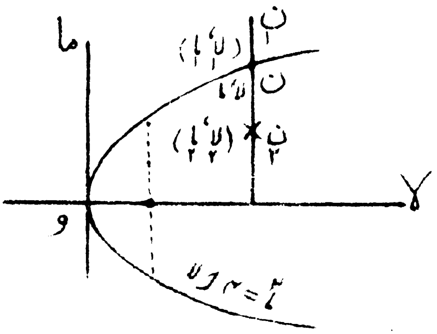
(ب) راس (۲، ۱)، ماسکہ (۲، ۲)، وترِ خاص طول ۴،
وترِ خاص مساوات ما - ۲ = ۰۔ راس پر کا مماس مساوات لا - ۱ = ۰،
مرتب ما = ۰۔

(ج) راس (-۲، ۲)، ماسکہ (-۲، ۱۳/۸)، وترِ خاص ۳/۲،
وترِ خاص مساوات ۸ ما - ۱۳ = ۰، راس پر کا مماس مساوات ما - ۲ = ۰۔

مرتب مساوات ۸ ما - ۱۹ = ۰

(د) راس (ا، ج) ماسکہ (ا + ب/۴، ج) وترِ خاص
طول ب، مساوات لا = ا + ب/۴ راس پر کا مماس
مساوات لا = ا، مرتب لا = ا - ب/۴

۴۳۲ - (ا) نقطہ (لا، ما) مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے اندر، اوپر یا باہر واقع ہوگا اگر ما^2 - ۴ ا لا ⋛ صفر۔



ساتھ کی شکل میں، مکافی ما^2 = ۴ ا لا کا کوئی معین کھینچا گیا ہے، اور اس معین پر مکافی کے باہر کوئی نقطہ ن$_1$ (لا$_1$، ما$_1$) ہے، مکافی پر نقطہ ن (لا، ما) ہے اور مکافی کے اندر نقطہ ن$_2$ (لا$_2$، ما$_2$) ہے۔ واضح ہو کہ تینوں نقطوں کے فصلے مساوی ہیں یعنی لا$_1$ = لا = لا$_2$۔

اب ما$_1$ > ما > ما$_2$

یعنی ما$_1^2$ > ما^2 > ما$_2^2$

یعنی ما$_1^2$ > ۴ ا لا > ما$_2^2$ کیونکہ ما^2 = ۴ ا لا، (لا، ما) مکافی پر ہے۔

پس $\text{ما}_۱^۲ - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_۱ >$ صفر یعنی $\text{ما}_۱^۲ - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_۱$ مثبت ہے باہر کے نقطہ $(\text{لا}_۱،\ \text{ما}_۱)$ کے لیے، کیونکہ $\text{لا} = \text{لا}_۱$

اور $\text{ما}_۲^۲ - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_۲ <$ صفر یعنی $\text{ما}_۲^۲ - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_۲$ منفی ہے اندر کے نقطہ $(\text{لا}_۲،\ \text{ما}_۲)$ کے لیے، کیونکہ $\text{لا} = \text{لا}_۲$

اسی طرح کسی باہر اور اندر کے نقطوں کے لیے مسئلہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(ب) ہم جانتے ہیں کہ اگر مکافی کے مستوی میں، مبدا کو کہیں پر لے جائیں اور حوالہ کے محور، مکافی کے محور اور رائس پر کے مماس کے متوازی رہیں تو مکافی کی مساوات اس شکل کی ہو جاتی ہے

$$\text{ما}^۲ + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$$

اسے یوں لکھ سکتے ہیں:

$$\left(\text{ما} + \frac{\text{ب}}{۲}\right)^۲ = -\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{ج} + \frac{\text{ب}^۲}{۴} = -\,\text{ا}\left(\text{لا} + \frac{۴\text{ج} - \text{ب}^۲}{۴\,\text{ا}}\right)$$

مبدا کو $\left(-\frac{۴\text{ج} - \text{ب}^۲}{۴\,\text{ا}}،\ -\frac{\text{ب}}{۲}\right)$ پر لے جاؤ اور محور پرانے محوروں کے متوازی رہیں۔

تب مکافی کی مساوات ہو جائیگی $\text{مَا}^۲ = -\,\text{ا}\,\text{لَا}$ ...... (۱)

جہاں $(\text{لَا}،\ \text{مَا})$ نئے محدد ہیں $(\text{لا}،\ \text{ما})$ کے مماثل اور ان میں یہ رشتے ہیں

$$\text{لَا} = \frac{۴\text{ج} - \text{ب}^۲}{۴\,\text{ا}} + \text{لا} \quad \text{اور} \quad \text{مَا} = \text{ما} + \frac{\text{ب}}{۲}$$

اب اگر کوئی نقطہ مکافی کے باہر واقع ہو اور اس کے محدد بلحاظ پرانے محوروں کے $(\text{لا}_۱،\ \text{ما}_۱)$ ہوں اور بلحاظ نئے محوروں کے $(\text{لَا}_۱،\ \text{مَا}_۱)$ تو

اسی دفعہ میں اوپر ہم نے ثابت کیا ہے کہ جب مساوات معیاری شکل میں ہو جیسے (۱) ہے تو محض نقطہ کے محدّد درج کرنے سے جو جملہ $\text{ما}'^2 + \text{۴ا}\,\text{لا}'$ پیدا ہوگا وہ مثبت ہوگا۔

اب $\text{ما}'^2 + \text{۴ا}\,\text{لا}'$ مثبت ہے، واضح ہو کہ یہ رشتہ نقطہ کے محدّدوں $(\text{لا}', \text{ما}')$ میں ہے جو بلحاظ نئے محوروں کے ہیں۔ اسی رشتہ کو نقطہ کے حامل پرانے محددوں میں بیان کرنے کے لیے رکھنا ہوگا $\text{لا}' = \text{لا}_1 + \dfrac{\text{۴ج} - \text{ب}^2}{\text{۴ا}}$ اور $\text{ما}' = \text{ما}_1 + \dfrac{\text{ب}}{۲}$، پس رشتہ پرانے محدّدوں کی رقوم میں ہو جاتا ہے کہ اگر $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ مکافی کے باہر ہو تو

$$\left(\text{ما}_1 + \frac{\text{ب}}{۲}\right)^2 + \text{۴ا}\left(\text{لا}_1 + \frac{\text{۴ج} - \text{ب}^2}{\text{۴ا}}\right)$$ مثبت ہوتا ہے

یعنی $\text{ما}_1^2 + \text{۴ا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج}$ مثبت ہوتا ہے اور اسی طرح کے عمل سے ہم حاصل کرسکتے ہیں کہ جب نقطہ $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$ مکافی کے اندر ہو تو $\text{ما}_2^2 + \text{۴ا}\,\text{لا}_2 + \text{ب}\,\text{ما}_2 + \text{ج}$ منفی ہوگا اور ظاہر ہے کہ جب نقطہ $(\text{لا}_3, \text{ما}_3)$ مکافی کے اوپر ہو تو $\text{ما}_3^2 + \text{۴ا}\,\text{لا}_3 + \text{ب}\,\text{ما}_3 + \text{ج} = ۰$

پس یہ نتیجہ حاصل ہوا کہ خواہ مکافی کی مساوات، زیادہ عام شکل $\text{ما}^2 + \text{۴ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ کی کیوں نہ ہو،

$\text{ما}_1^2 + \text{۴ا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج} \gtreqless$ صفر بموجب اس کے کہ $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ مکافی کے باہر واقع ہو یا اوپر یا اندر۔

مثال ۱۔ اس کا معائنہ کرو کہ نقاط $(۲, ۳)$، $(-۵, ۱)$، $(۳, ۷)$ $(۲, ۲)$، $(۱, +۵)$ مکافی $\text{ما}^2 = ۲\,\text{لا}$ کے لحاظ سے کہاں واقع ہیں۔
$\text{ما}^2 - ۲\,\text{لا} = ۰$، $(۲, ۳)$ مساوات میں درج کرنے سے $۹ - ۴ = +۵$،

مکافی کے باہر واقع ہے

(-۵، ۱) مساوات میں درج کرنے سے ۱ + ۱۰ = + ۱۱ مکافی کے باہر واقع ہے۔
(۷، ۳) " " " " ۹ - ۱۴ = - ۵ مکافی کے اندر واقع ہے۔
(۲، ۲) " " " " ۴ - ۴ = ۰ مکافی پر واقع ہے۔
(۵، ۱) " " " " ۱ - ۱۰ = - ۹ مکافی کے اندر واقع ہے۔

مثال ۲۔ اس کا معائنہ کرو کہ نقاط (۱، ۱)، (۱، -۲)، (۰، -۱) مکافی ۲ ما۲ - ۳ لا + ۷ ما + ۵ = ۰ پر واقع ہیں یا اس کے باہر یا اندر۔

نقطہ (۱، ۱)، مساوات کے دائیں رکن میں اندراج سے ۲ (۱)۲ - ۳ (۱) + ۷ (۱) + ۵ مثبت ہے، نقطہ مکافی کے باہر واقع ہے۔ نقطہ (۱، -۲)، اندراج سے ۲ (-۲)۲ - ۳ (۱) + ۷ (-۲) + ۵ منفی ہے، نقطہ مکافی کے اندر واقع ہے، نقطہ (۰، -۱)، اندراج سے ۲ (-۱)۲ - ۳ (۰) + ۷ (-۱) + ۵ = ۰ نقطہ مکافی پر واقع ہے۔

مثال ۳۔ (ل) ۲ لا۲ = ۳ ما، ۳ ما۲ = ۲ لا، لا۲ = -۲ ما مکافیوں کی مساواتیں ہیں، بتاؤ کہ نقاط (۰، ۰)، (۱، -۲)، (۳، ۶)، (۲، ۲) ان مکافیوں پر واقع ہیں یا باہر یا اندر۔

(ب) بتاؤ کہ نقاط (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۲، ۱)، (۳، -۱) مکافیوں ما۲ + ۳ لا - ۲ ما - ۵ = ۰ اور ۲ لا۲ - ۳ ما + ۲ لا - ۱ = ۰ پر واقع ہیں یا ان کے باہر یا اندر۔

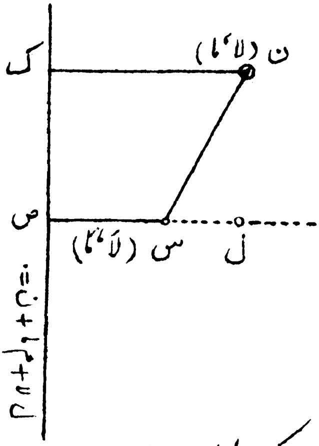
سہ و سہ۔ مکافی کا ماسکہ س (لاَ، ماَ) ہے اور مرتب ل لا + م ما + ن = ۰، مکافی کی مساوات دریافت کرو اور ثابت کرو کہ مساوات میں درجۂ دوم کی رقمیں مربع کامل بناتی ہیں (محور علی التوائم ہیں)

س (لاَ، ماَ) ہے، مرتب ص ک ≡ ل لا + م ما + ن = ۰

اور مکافی پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہے، اب س ن² = ن ک²

(لا - لاَ)² + (ما - ماَ)² = (ل لا + م ما + ن)² / (ل² + م²) جو ن سے خط ص ن

یعنی ل لا + م ما + ن = ۰ پر عمود کا طول ہے۔



یہ لا، ما میں دوسرے درجہ کی مساوات ہے۔

پھیلانے سے (ل² + م²) [(لا - لاَ)² + (ما - ماَ)²] = ل² لا² + م² ما² + ن² + ۲ ل م لا ما

+ ۲ ل ن لا + ۲ م ن ما

لا² [(ل² + م²) - ل²] + ما² [(ل² + م²) - م²] - ۲ ل م لا ما - ۲ لا [ن ل + لاَ (ل² + م²)]

- ۲ ما [م ن + ماَ (ل² + م²)] + (ل² + م²) (لاَ² + ماَ²) = ۰

م² لا² + ل² ما² - ۲ ل م لا ما - ۲ لا [ن ل + لاَ (ل² + م²)] - ۲ ما [م ن + ماَ (ل² + م²)]

+ (ل² + م²) (لاَ² + ماَ²) = ۰

یعنی (م لا - ل ما)² - ۲ لا [ن ل + لاَ (ل² + م²)]

۰ = (لا^۲ + ما^۲) (ل^۲ + م^۲) + [(ل^۲ + م^۲) ا + من] ما۲ -

یعنی لا، ما میں درجۂ دوم والی رقمیں مربع کامل بناتی ہیں۔

لا، ما میں درجہ دوم کی عام سے عام مساوات

ا لا^۲ + ۲ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

اگر یہ قطع مکافی کو تعبیر کرے تو درجۂ دوم کی رقمیں مربع کامل بنائینگی جس کے لیے شرط یہ ہے کہ اب = ھ^۲۔ اس کا عکس بھی درست ہے یعنی اگر درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات میں، درجہ دوم کی رقمیں مربع کامل بنائیں تو مساوات سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے وہ قطع مکافی ہوگا۔

مثال ۱۔ مکافی کا ماسکہ (۱، -۱) ہے اور اس کا مرتب ۲ لا - ۳ ما + ۱ = ۰ اس کی مساوات دریافت کرو۔

منحنی پر نقطہ (لا، ما) فرض کرو۔ نقطے (لا، ما) کا فاصلہ (۱، -۱) سے مساوی ہوگا اس کے عمودی فاصلہ کے خط ۲ لا - ۳ ما + ۱ = ۰ سے۔

√ ((لا - ۱)^۲ + (ما + ۱)^۲) = ± (۲ لا - ۳ ما + ۱) / √ ۱۳

یعنی ۱۳ { (لا - ۱)^۲ + (ما + ۱)^۲ } = (۲ لا - ۳ ما + ۱)^۲

یعنی ۹ لا^۲ + ۴ ما^۲ + ۱۲ لا ما - ۳۰ لا + ۳۲ ما + ۱۳ = ۰

یعنی (۳ لا + ۲ ما)^۲ - ۳۰ لا + ۳۲ ما + ۱۳ = ۰

ہم دیکھتے ہیں کہ درجۂ دوم کی رقمیں مربع کامل ہیں۔

اور وترِ خاص کا طول، ماسکہ سے مرتب پر کے دوچند فاصلہ کے مساوی ہے

وترِ خاص = ۲ × (۲×۱ - ۳(-۱) + ۱) / √ ۱۳ = ۱۲ / √ ۱۳ = ۱۲ √ ۱۳ / ۱۳

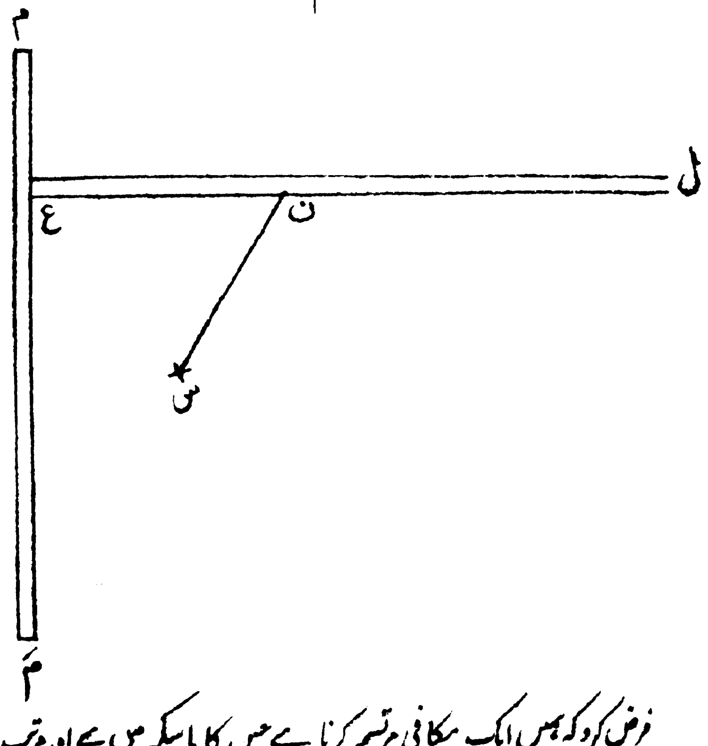
مثال ۲ - (ا) اُس مکافی کی مساوات دریافت کرو جس کا ماسکہ (ا، ۰) ہے اور مرتب لا + ا = ۰، اس کے وترِ خاص کا طول بھی دریافت کرو -

جواب $ما^{2}$ = ۴ ا لا   وترخاص ۴ ا

(ب) اُس مکافی کی مساوات مطلوب ہے جس کا ماسکہ (۲، -۳) ہے اور مرتب لا - ما + ۱ = ۰

جواب $(لا + ما)^{2}$ - ۱۰ لا + ۱۴ ما + ۱۵ = ۰   وترخاص طول $۶\sqrt{۲}$

۱۴ر۴ - مکافی کو مرتسم کرنے کا حیلی طریقہ -



فرض کرو کہ ہمیں ایک مکافی مرتسم کرنا ہے جس کا ماسکہ س ہے اور مرتب م مَ -
م مَ پر ایک پٹڑی کا کنارہ رکھو -

اور ایک اور پٹری ل ن ع کو پٹری م مَ پر عمود وار رکھو۔
ایک بے لچک ڈوری لو جس کا طول پٹری ل ع کے طول کے مساوی ہوا اور ڈوری کا ایک سرا پٹری ل ع کے سرے ل پر اور دوسرا سرا ثابت نقطہ س پر باندھو۔ اب پنسل کی نوک کے ذریعہ ڈوری کو اس طرح تنا کر پکڑو کہ پنسل کی نوک ن پٹری ل ع پر رہے اور ڈوری کے دونوں حصے ل ن اور ن س تنے رہیں۔ اگر ان شرائط کے ماتحت پٹری ل ع کو اس طرح ہٹایا جائے کہ ل ع عمود وار رہے م مَ پر تو پنسل کی نوک ن ایک مکافی مرتسم کریگی۔ جس کا ماسکہ س ہے اور مرتب م مَ ہے۔

چونکہ ڈوری کا طول پٹری ل ن ع کے طول کے مساوی ہے

اس لیے ل ن + ن س = ل ع = ل ن + ن ع

اس لیے ن س = ن ع

یعنی متحرک نقطہ ن سے ثابت نقطہ س کا فاصلہ ثابت خط م مَ سے نقطہ ن کے عمودی فاصلہ ن ع کے مساوی ہے۔

اس لیے مکافی کی ماسکہ مرتب تعریف کی رُو سے متحرک نقطہ ن کا طریق ایک مکافی ہوگا جس کا ماسکہ س ہے اور مرتب م مَ ہے۔

سوال:- ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے اور ایک ثابت خط کو مس کرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۵ ۔ ۴ - مکافی کی مساوات $ما^2 = ۴ \, ارلا$ ہے (ا) اس پر کے دو نقطوں $(لا_1، ما_1)$ $(لا_2، ما_2)$ کے ملانے والے وتر کی مساوات دریافت کرو (ب) اس پر کے نقطہ $(لا_1، ما_1)$ پر مماس کی مساوات دریافت کرو۔ (ج) اس پر کے نقطہ $(لا_1، ما_1)$ پر عماد کی مساوات دریافت کرو۔ محور علی القوائم ہیں۔

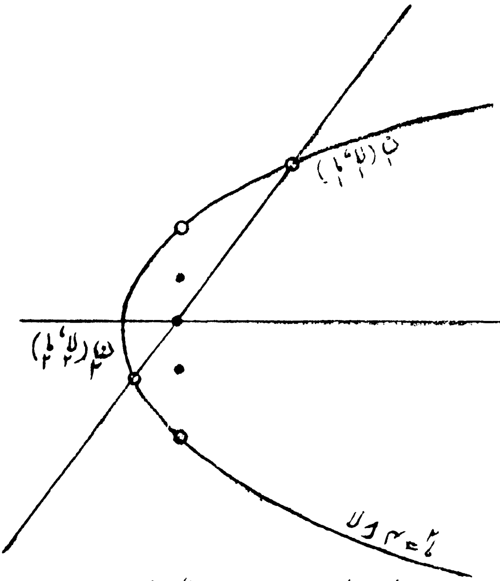
(ا) مستوی میں کے کسی دو نقطوں $ن_1 (لا_1، ما_1)$ اور $ن_2 (لا_2، ما_2)$

کے ملانے والے خط کی مساوات (ابھی تک یہ ضروری نہیں کہ وہ مکافی پر واقع ہیں)

$$\frac{لا - لا_۱}{لا_۱ - لا_۲} = \frac{ما - ما_۱}{ما_۱ - ما_۲}$$

یعنی

$$ما - ما_۱ = \frac{ما_۱ - ما_۲}{لا_۱ - لا_۲}\,(لا - لا_۱)$$



محور قائم ہوں تو خط کا ڈھال $\frac{ما_۱ - ما_۲}{لا_۱ - لا_۲}$ ہے۔ اب اگر نقطے $ن_۱$، $ن_۲$ مکافی پر واقع ہوں تو

$$ما_۱^۲ = ۴\,ار\,لا_۱،\quad ما_۲^۲ = ۴\,ار\,لا_۲ \quad یعنی \quad ما_۱^۲ - ما_۲^۲ = ۴\,ار\,(لا_۱ - لا_۲)$$

یعنی

$$\frac{ما_۱ - ما_۲}{لا_۱ - لا_۲} = \frac{۴\,ار}{ما_۱ + ما_۲}$$

پس خط کی مساوات میں ڈھال کی یہ قیمت درج کرنے سے مکافی کے وتر کی یہ مساوات حاصل ہوتی ہے $ما - ما_۱ = \frac{۴\,ار}{ما_۱ + ما_۲}\,(لا - لا_۱)$

(ب) نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں وتر کی مساوات کی انتہائی شکل معلوم کرنا ہے جبکہ نقطہ (لا۲، ما۲) مکافی پر حرکت کر کے نقطہ (لا۱، ما۱) کے بے حد قریب آجائے ۔ اس لیے مطلوبہ مماس کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} = \text{نہا}_{\text{ما}_2 \to \text{ما}_1}\left(\frac{\text{۴ا}}{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}\right) = \frac{\text{۴ا}}{\text{۲ما}_1} = \frac{\text{۲ا}}{\text{ما}_1}$$

یعنی $\text{ما ما}_1 - \text{ما}_1^2 = \text{۲ا لا} - \text{۲ا لا}_1$

یعنی $\text{ما ما}_1 - \text{۲ا لا} = \text{ما}_1^2 - \text{۲ا لا}_1 = \text{۲ا لا}_1$　　کیونکہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ مکافی $\text{ما}^2 = \text{۴ا لا}$ پر کا نقطہ ہے

یعنی $\text{ما ما}_1 = \text{۲ا}(\text{لا} + \text{لا}_1)$

نوٹ:۔ مماس کی اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں مکافی کی مساوات میں ما^2 کی بجائے ما ما_1 اور ۲ لا کی بجائے $(\text{لا} + \text{لا}_1)$ درج کرنا چاہیے۔ اسی کے مماثل قاعدے ناقص اور زائد کی صورت میں بھی درست پائے جائیں گے۔

(ج) نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کا ڈھال ہے $\frac{\text{۲ا}}{\text{ما}_1}$

چونکہ مطلوبہ عماد نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس پر عمود وار ہے، اس لیے عماد کا ڈھال $= \frac{-\text{ما}_1}{\text{۲ا}}$　اس لیے (لا۱، ما۱) پر کے عماد کی مساوات ہے ۔

$$\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} = -\frac{\text{ما}_1}{\text{۲ا}}$$

یعنی $\text{ما}_1(\text{لا} - \text{لا}_1) + \text{۲ا}(\text{ما} - \text{ما}_1) = ۰$

مثال (۱) مکافی $\text{ما}^2 = \text{۸ لا}$ کے نقطہ ن (۲، ۴) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرو۔

اولاً ہم دیے ہوئے نقطہ ن (۲، ۴) کو محدد مکافی کی مساوات میں درج کر کے تصدیق کرتے ہیں کہ نقطہ ن (۲، ۴) مکافی $\text{ما}^2 = \text{۸ لا}$ پر ہے

کیونکہ $(\text{۴})^{\text{۲}} = \text{۸}\,(\text{۲})$

فرض کرو کہ نَ (لاَ، ماَ) مکافی پر کا ایک اور نقطہ ہے۔

تب $\text{ماَ}^{\text{۲}} = \text{۸ لاَ}$

نیز $(\text{۴})^{\text{۲}} = \text{۸}\,(\text{۲})$

$\therefore\ \text{ماَ}^{\text{۲}} - (\text{۴})^{\text{۲}} = \text{۸}\,(\text{لاَ} - \text{۲})$

یعنی $(\text{ماَ} - \text{۴})\,(\text{ماَ} + \text{۴}) = \text{۸}\,(\text{لاَ} - \text{۲})$

یعنی $\dfrac{\text{ماَ} - \text{۴}}{\text{لاَ} - \text{۲}} = \dfrac{\text{۸}}{\text{ماَ} + \text{۴}}$ .... (۱)

نقاط ن (۲، ۴) اور نَ (لاَ، ماَ) میں سے گزرنے والے خط کا ڈھال

$= \dfrac{\text{ماَ} - \text{۴}}{\text{لاَ} - \text{۲}} = \dfrac{\text{۸}}{\text{ماَ} + \text{۴}}$ بموجب (۱)

اس لیے نقاط ن (۲، ۴) اور نَ (لاَ، ماَ) میں سے گزرنے والے وتر کی مساوات ہوگی

$\dfrac{\text{ما} - \text{۴}}{\text{لا} - \text{۲}} = \dfrac{\text{۸}}{\text{ماَ} + \text{۴}}$ .... (۲)

اب وتر کی مساوات (۲) کی انتہائی شکل جبکہ نَ (لاَ، ماَ) مکافی پر حرکت کرکے نقطہ ن (۲، ۴) کے بے حد قریب آجاتا ہے اور بالآخر ن (۲، ۴) پر منطبق ہوتا ہے مکافی کے نقطہ ن (۲، ۴) پر کے مماس کی مساوات ہوتی ہے۔

اس لیے مکافی $\text{ما}^{\text{۲}} = \text{۸ لا}$ کے نقطہ ن (۲، ۴) پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ما} - \text{۴}}{\text{لا} - \text{۲}} = \underset{\text{ماَ} \to \text{۴}}{\text{نہا}} \frac{\text{۸}}{\text{ماَ} + \text{۴}} = \frac{\text{۸}}{\text{۴} + \text{۴}} = \text{۱}$$

یعنی $\text{ما} - \text{۴} = \text{لا} - \text{۲}$

یعنی لا - ما + ۲ = ۰

نوٹ :- اگر ہم مماس کی مساوات لکھنے کے لیے دفعہ گذشتہ کے نتیجہ (ب) کو استعمال کریں تو مساوات حسب ذیل ہوگی ما (۴) = ۴ (لا + ۲)

یعنی ما = لا + ۲

یعنی لا - ما + ۲ = ۰

یہ وہی مساوات ہے جو اوپر کی مثال میں ہم نے ابتدائی اصول سے حاصل کی ہے -

مشقی سوالات ۱۵

(۱) مکافی ما۲ = - ۱۲ لا کے نقطہ (- ۳، ۶) پر کے مماس کی مساوات ابتدائی اصول سے حاصل کرو -

[جواب لا + ما - ۳ = ۰]

(۲) مکافی لا۲ + ۴ ما = ۰ کے نقطہ (۲، -۱) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرو -

[جواب لا + ما - ۱ = ۰]

مثال ۲- مکافی ما۲ - ۴ لا - ۲ ما + ۹ = ۰ کے نقطہ ن (۶، ۵) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں حاصل کرو - عددی مثالوں میں سب سے پہلے ہمیں اس بات کی تصدیق کرنا چاہیے کہ دیا ہوا نقطہ دی ہوئی ترسیم پر ہے یا نہیں -

اس مثال میں (۵)۲ - ۴(۶) - ۲(۵) + ۹ = ۲۵ - ۲۴ - ۱۰ + ۹ = ۳۴ - ۳۴ = ۰

اس لیے دیا ہوا نقطہ (۶، ۵) دیے ہوئے مکافی پر ہے -

(یہ جانچ اس لیے ضروری ہے کہ اگر دیا ہوا نقطہ دیے ہوئے مکافی پر نہ ہو تو اس نقطہ پر کے مماس کے کوئی معنی نہیں ہوتے) -

فرض کرو کہ ن (۶، ۵) کے قریب مکافی پر کا ایک اور نقطہ نَ (لاَ، ماَ) ہے۔
چونکہ نقاط ن (۶، ۵) اور نَ (لاَ، ماَ) مکافی $\text{ما}^{۲} - ۴\text{لا} - ۲\text{ما} + ۹ = ۰$ پر ہیں

اس لیے $(۵)^{۲} - ۴(۶) - ۲(۵) + ۹ = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$

$\text{ماَ}^{۲} - ۴\text{لاَ} - ۲\text{ماَ} + ۹ = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$

اس لیے تفریق سے حاصل ہوتا ہے:

$$\left[\text{ماَ}^{۲} - (۵)^{۲}\right] - ۴(\text{لاَ} - ۶) - ۲(\text{ماَ} - ۵) = ۰$$

یعنی $(\text{ماَ} - ۵)(\text{ماَ} + ۵ - ۲) = ۴(\text{لاَ} - ۶)$

یعنی $$\frac{\text{ماَ} - ۵}{\text{لاَ} - ۶} = \frac{۴}{\text{ماَ} + ۳} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اب نقاط ن (۶، ۵) اور نَ (لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والے وتر کی مساوات ہے:

$$\frac{\text{ما} - ۵}{\text{لا} - ۶} = \frac{\text{ماَ} - ۵}{\text{لاَ} - ۶}$$

بموجب رشتہ (۳) اِس وتر کی مساوات ہو جاتی ہے:

$$\frac{\text{ما} - ۵}{\text{لا} - ۶} = \frac{۴}{\text{ماَ} + ۳} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اب نقطہ ن (۶، ۵) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں وتر ن نَ کی مساوات (۴) کی انتہائی شکل معلوم کرنا ہے جبکہ نَ (لاَ، ماَ) مکافی پر حرکت کر کے ن (۶، ۵) کے بے حد قریب آجائے اور بالآخر نقطۂ ن پر منطبق ہو جائے۔

اس لیے مکافی کے نقطۂ ن (۶، ۵) پر کے مماس کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{ما} - ۵}{\text{لا} - ۶} = \underset{\text{ماَ} \to ۵}{\text{نہا}} \frac{۴}{\text{ماَ} + ۳} = \frac{۴}{۵ + ۳} = \frac{۱}{۲}$$

یعنی $۲\text{ما} - ۱۰ = \text{لا} - ۶$

یعنی لا - ۲ ما + ۴ = ۰

پس معلوم ہوا کہ مکافی ما^{۲} - ۴ لا - ۲ ما + ۹ = ۰ کے نقطہ ن (۶، ۵) پر کے مماس کی مساوات لا - ۲ ما + ۴ = ۰ ہے۔

مماس کی اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ مکافی کے نقطہ ن (۶، ۵) پر کے مماس کا میلان = $\frac{۱}{۲}$

اس لیے اسی نقطہ پر کے عماد کا میلان = -۲

اس لیے مکافی کے نقطہ (۶، ۵) پر کے عماد کی مساوات حسبِ ذیل ہوگی:-

$$\frac{\text{ما} - ۵}{\text{لا} - ۶} = -۲$$

یعنی ما - ۵ = -۲ لا + ۱۲

یعنی ۲ لا + ما - ۱۷ = ۰

مشقی سوالات ۱۶

(۱) مکافی ما^{۲} = ۴ لا کے نقطہ (۹، ۶) پر کے عماد کی مساوات حاصل کرو اور اس عماد اور حوالہ کے محدّدوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کرو۔

[جواب - عماد کی مساوات ہے ۳ لا + ما - ۳۳ = ۰

مثلث کا رقبہ ہے (۱۸۱$\frac{۱}{۲}$) مربع اکائی۔

(۲) مکافی ما^{۲} = ۱۶ لا کے وترِ خاص کے سروں کے محدّد معلوم کرو۔ نیز وترِ خاص کے سروں پر کے مماسات اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ نیز ان چار خطوط سے بننے والے مربع کا رقبہ معلوم کرو۔

[جواب - نقاط (۴، ۸)، (۴، -۸) وترِ خاص کے سرے ہیں۔ ان نقطوں پر کے مماسات ہیں لا - ما + ۴ = ۰ اور لا + ما + ۴ = ۰ اور عماد ہیں لا + ما - ۱۲ = ۰ اور لا - ما - ۱۲ = ۰ مربع کا رقبہ ۱۲۸ مربع اکائی ہے۔

(۳) مکافی ما^2 − ۲لا + ۴ما + ۲ = ۰ کے نقطہ (۷، ۲) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔

[جواب لا − ۴ما + ۱ = ۰
۴لا + ما − ۳۰ = ۰]

(۴) مکافی لا^2 − ۴لا − ۴ما = ۰ کو مرتسم کرو۔ مکافی کے نقطہ (۶، ۳) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔ نیز اس نقطہ پر کے مماس، عماد اور مکافی کے محور سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کرو۔

[جواب ۲لا − ما − ۹ = ۰
لا + ۲ما − ۱۲ = ۰
△ کا رقبہ = ۲۰ مربع اکائی]

(۵) مکافی ما^2 = ۸لا کے نقطہ ن (۲، ۴) پر کا عماد مکافی کے محور سے گ پر ملتا ہے اور ن سے محور پر عمود ن ع نکالا گیا ہے۔ تصدیق کرو کہ ع گ کا طول مکافی کے نیم وترِ خاص کے مساوی ہے۔

(۶) تصدیق کرو کہ مکافی ما^2 = ۴لا کے وترِ خاص کے سروں پر کے مماسات ایک دوسرے کو زاویۂ قائمہ پر مکافی کے محور اور مرتب کے نقطۂ تقاطع پر قطع کرتے ہیں۔

(۷) مکافی ما^2 = ۴ الا کے نقطہ ن (ات^2، ۲ات) پر کا مماس اور عماد مکافی کے محور سے بالترتیب ت اور گ پر ملتے ہیں اور ن سے محور پر عمود ن ع نکالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زیرِ مماس یعنی ت ع کا وسطی نقطہ مکافی کے راس ا پر ہے اور زیرِ عماد یعنی ع گ کا طول مکافی کے نیم وترِ خاص کے مساوی ہے۔

[نوٹ۔ اولاً تصدیق کرو کہ ت کی ہر قیمت کے لیے نقطہ ن (ات^2، ۲ات) مکافی ما^2 = ۴ الا پر واقع ہوتا ہے]۔

۹ و ۴۔ مکافی ما^2 = ۴ الا اور خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے نقاطِ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

دیے ہوئے مکافی اور دیے ہوئے خطِ مستقیم کا مشترک نقطہ یا نقطے معلوم کرنے کے لیے ہم مکافی اور خطِ مستقیم کی مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرتے ہیں - اس غرض سے ان دو مساواتوں میں سے ایک نا معلوم مقدار مثلاً ما کو ساقط کرتے ہیں -

ما کو ساقط کرنے کے لیے مکافی کی مساوات میں ما کی بجائے (م لا + ج) درج کرو - حاصل ہوگا (م لا + ج)^2 = ۴ ا لا

یعنی م^2 لا^2 + ۲ لا (م ج - ۲ ا) + ج^2 = ۰ .... (۱)

یہ لا میں درجۂ دوم کی مساوات ہے - اس کی دو اصلیں ہونگی جو (۱) حقیقی اور مختلف یا (۲) حقیقی اور منطبق یا (۳) خیالی ہو سکتی ہیں -

اور یہ اصلیں مکافی ما^2 = ۴ ا لا اور خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے نقاطِ تقاطع کے فصلوں کو تعبیر کرتی ہیں -

فرض کرو کہ لا میں درجۂ دوم کی مساوات (۱) کی اصلیں لا$_1$ اور لا$_2$ ہیں - یعنی مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے فصلے لا$_1$ اور لا$_2$ ہیں - ان کے جواب میں معینوں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہم خطِ مستقیم کی مساوات ما = م لا + ج میں لا کی بجائے علی الترتیب لا$_1$ اور لا$_2$ درج کرتے ہیں اور اس طرح سے ترتیب وار نقاطِ تقاطع کے معین ما$_1$ اور ما$_2$ حاصل کرتے ہیں -

لا$_1$ کے جواب میں حاصل ہوتا ہے ما$_1$ = م لا$_1$ + ج

اور لا$_2$ کے جواب میں حاصل ہوتا ہے ما$_2$ = م لا$_2$ + ج

اس طرح سے معلوم ہوتا ہے کہ مکافی ما^2 = ۴ ا لا اور خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے نقاطِ تقاطع (لا$_1$، م لا$_1$ + ج) اور (لا$_2$، م لا$_2$ + ج) ہیں جہاں لا$_1$ اور لا$_2$ درجۂ دوم کی مساوات (۱) کی اصلیں ہیں -

مثال:- مکافی ما^2 = ۶۴ لا اور خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ۶ کے نقاطِ تقاطع معلوم کرو -

مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے فصلے معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی دو مساواتوں میں سے ما کو ساقط کرکے لا میں ایک مساوات

حاصل کرو۔

اس غرض سے مکافی کی مساوات میں ما کی بجائے ۲ لا + ۶ درج کرو۔

حاصل ہوگا (۲ لا + ۶)^2 = ۶۴ لا

یعنی ۴ لا^2 − ۴۰ لا + ۳۶ = ۰

یعنی لا^2 − ۱۰ لا + ۹ = ۰

یعنی (لا − ۱) (لا − ۹) = ۰

اس مساوات کی اصلیں ہیں ۱ اور ۹

پس معلوم ہوا کہ مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے فصلے ۱ اور ۹ ہیں ۔ فصلوں کی ان قیمتوں کے جواب میں نقاطِ تقاطع کے معینوں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہم خطِ مستقیم کی مساوات میں لا کی بجائے ترتیب وار ۱ اور ۹ درج کرتے ہیں۔ ما کی متناظر قیمتیں ہیں ۸ اور ۲۴

پس معلوم ہوا کہ مکافی ما^2 = ۶۴ لا اور خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ۶ کے نقاطِ تقاطع (۱، ۸) اور (۹، ۲۴) ہیں۔

مشقی سوالات ۱۷

(۱) مکافی ما^2 = ۴ لا اور خطِ مستقیم ۲ ما = لا + ۴ کے نقاطِ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

[جواب (۴، ۴) پر دو منطبق نقطے]

(۲) بتاؤ کہ خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ۱ مکافی ما^2 = ۸ لا کو مس کرتا ہے یعنی دو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

[جواب نقطۂ تماس (½، ۲) ہے]

(۳) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ما = لا + ۹ مکافی ما^2 = ۱۶ لا کو دو خیالی نقطوں

پر قطع کرتا ہے۔

(۴) مکافی ما۲ = ۲لا + ۱ اور خطِ مستقیم لا - ۲ما + ۲ = ۰ کے نقاطِ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

اشارہ:- دیئے ہوئے خط کی مساوات کو شکل ما = (لا + ۲)/۲ میں لکھو اور مکافی کی مساوات میں ما کی بجائے (لا + ۲)/۲ درج کرو۔

[جواب (۴، ۳) اور (۰، ۱)]

(۵) مکافی لا۲ - ۴لا - ۴ما = ۰ اور خطِ مستقیم ما = لا - ۳ کے نقاطِ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

اشارہ:- خط کی مساوات شکل لا = ما + ۳ میں لکھو اور مکافی کی مساوات میں لا کی بجائے ما + ۳ درج کرو۔ اس طرح سے ما میں درجۂ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوگی جس کی اصلیں دیے ہوئے مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے معینوں کو تعبیر کریں گی۔ نقاطِ تقاطع کے معینوں کی ان قیمتوں کے جواب میں خطِ مستقیم کی مساوات کی مدد سے نقاطِ تقاطع کے فصلوں کی قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

[جواب (۲، -۱) (۶، ۳)]

(۶) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ۲لا - ما = ۰ مکافی ما۲ - ۴لا - ۲ما + ۴ = ۰ کو مس کرتا ہے۔ نیز نقطۂ تماس کے محدد معلوم کرو۔

[جواب (۱، ۲)]

۶۱،۴ - تماس کی شرط

خطِ مستقیم ما = م لا + ج مکافی ما۲ = ۴ الا کو مس کریگا اگر اس خط اور مکافی کے نقاطِ تقاطع منطبق ہوں۔ اس صورت میں دفعہ ۶ر۴ کی مساوات (۱)، یعنی م۲لا۲ + ۲لا (م ج - ۲ ا) + ج۲ = ۰ کی اصلیں مساوی ہونگی۔ اس درجۂ دوم کی مساوات کی اصلیں مساوی ہونگی

اگر (م ج - ۲ ا)۲ = م۲ج۲

یعنی اگر ۴ ا^{2} - ۴ ا م ج = ۰

یعنی اگر ج = $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$

پس معلوم ہوا کہ خط مستقیم ما = م لا + ج مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کو مس کریگا اگر ج = $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$

یعنی م کی ہر قیمت کے لیے خط مستقیم ما = م لا + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کو مس کریگا۔ نقطۂ تماس کے محدد معلوم کرنے کے لیے ہم مکافی ما^{2} = ۴ ا لا اور خط ما = م لا + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرکے ان کے نقاطِ تقاطع (جو ایک دوسرے پر منطبق ہیں) کے محدد معلوم کرتے ہیں۔

مکافی کی مساوات ما^{2} = ۴ ا لا اور مماس کی مساوات ما = م لا + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ میں سے ما کو ساقط کرنے سے لا میں ذیل کی درجۂ دوم کی مساوات حاصل ہوتی ہے:

(م لا + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$)^{2} = ۴ ا لا

یعنی م^{2} لا^{2} + ۲ ا لا - ۴ ا لا + $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{م}^{2}}$ = ۰

یعنی م^{2} لا^{2} - ۲ ا لا + $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{م}^{2}}$ = ۰

یعنی (م لا - $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$)^{2} = ۰

اس مساوات کی دونوں اصلیں مساوی ہیں اور ہر ایک اصل کی قیمت $\frac{\text{ا}}{\text{م}^{2}}$ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ خط ما = م لا + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کو جس نقطہ پر مس کرتا ہے اس کا فصلہ $\frac{\text{ا}}{\text{م}^{2}}$ ہے۔ نقطۂ تماس کا معین معلوم کرنے کے لیے مماس کی مساوات میں لا کی بجائے $\frac{\text{ا}}{\text{م}^{2}}$ درج کرو۔ حاصل ہوگا ما = $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ = $\frac{۲\text{ا}}{\text{م}}$

پس معلوم ہوا کہ خط ما = م لا + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کو مس کرتا ہے اور نقطۂ تماس کے محدد ($\frac{\text{ا}}{\text{م}^{2}}$ ، $\frac{۲\text{ا}}{\text{م}}$) ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ م کی ہر قیمت کے لیے خطِ مستقیم ما = م لا + ا/م مکافی ما^{۲} = ۴ ا لا کو نقطہ (ا/م^{۲} ، ۲ا/م) پر مس کرتا ہے۔

۶۲،۴۔ مکافی کی متبدلی تعبیر

مکافی کے مماس ما = م لا + ا/م کا میلان م ہے اور مماس کے میلان م کی رقوم میں مماس کے نقطۂ تماس کے محدّد شکل (ا/م^{۲} ، ۲ا/م) میں حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ہم ۱/م = ت لکھیں تو نقطۂ تماس کے محدّد ہونگے (ات^{۲} ، ۲ات) اور مماس کا میلان م = ۱/ت

چونکہ ت کی ہر قیمت کے لیے نقطہ (ات^{۲} ، ۲ات) مکافی ما^{۲} = ۴ا لا پر واقع ہوتا ہے اس لئے لا = ات^{۲}، ما = ۲ات مکافی ما^{۲} = ۴ا لا کی متبدلی تعبیر ہے۔ اس میں ت متبدل ہے اور متبدل ت کی قیمت اور نقطہ زیرِ بحث پر کے مماس کے میلان م میں ذیل کا رشتہ درست ہے

م = ۱/ت

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مکافی ما^{۲} = ۴ا لا پر کے کسی نقطہ کے محدّد ایک متبدل کی رقوم میں معلوم ہوں تو متبدل کی رقوم میں اس نقطہ پر کے مماس کا میلان معلوم ہو سکتا ہے اور مماس کی مساوات بھی فوراً لکھی جا سکتی ہے۔

۷،۴۔ عماد کی مساوات

مکافی ما^{۲} = ۴ا لا کے نقطہ ن (ات^{۲} ، ۲ات) پر کے مماس کا میلان = ۱/ت

اس لیے اس نقطہ پر کے عماد کا میلان = − ت

اس لیے نقطہ (ات^{۲} ، ۲ات) پر کا عماد وہ خطِ مستقیم ہے جو

نقطہ (ا ت² ، ۲ ا ت) میں سے گزرتا ہے اور جس کا میلان = - ت
اس لیے نقطہ (ا ت² ، ۲ ا ت) پر کے عماد کی مساوات ہوگی

(ما - ۲ ا ت) = - ت (لا - ا ت²)

یعنی ما + ت لا = ۲ ا ت + ا ت³ . . . . (۱)

مشق :- مکافی ما² = ۸ لا کے نقطہ (۲ ، ۴) پر کے عماد کی مساوات اوپر کے ضابطہ کی مدد سے لکھو۔

مکافی کی دی ہوئی مساوات کا مقابلہ معیاری مساوات ما² = ۴ ا لا سے کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ا = ۲

اگر دیے ہوئے نقطہ (۲ ، ۴) پر متبدل کی قیمت ت ہو تو نقطہ کے محدد ہونگے (ا ت² ، ۲ ا ت) یعنی (۲ ت² ، ۴ ت)

لیکن دیے ہوئے نقطہ کے محدد (۲ ، ۴) ہیں -

اس لیے ۲ ت² = ۲

اور ۴ ت = ۴

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ ت = ۱

اس لیے عماد کی مندرجہ بالا مساوات (۱) کی مدد سے دیے ہوئے مکافی کے نقطہ (۲ ، ۴) پر کے عماد کی مساوات ذیل کی شکل میں حاصل ہوتی ہے

ما + (۱) لا = ۲ × ۲ × ۱ + ۲ (۱)³

یعنی لا + ما = ۶

نوٹ - عماد کی یہ مساوات دفعہ ۵ ، ۴ (ج) کے طریقہ سے بھی حاصل ہوسکتی ہے -

۸ ، ۴ - منحنی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع اور تماس کی شرط - اگر کسی منحنی اور خطِ مستقیم کی مساواتیں دی گئی ہوں تو منحنی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے محدد معلوم کرنے کے لیے ہم منحنی اور خطِ مستقیم کی مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرتے ہیں۔

اگر منحنی کی مساوات درجۂ دوم کی ہو تو منحنی اور خطِ مستقیم کے دو نقاطِ تقاطع ہونگے جو (۱) حقیقی اور مختلف یا (۲) حقیقی اور منطبق یا (۳) خیالی ہو سکتے ہیں۔

اگر یہ دونوں نقاطِ تقاطع منطبق ہوں تو دیا ہوا خطِ مستقیم دیے ہوئے منحنی کو مس کرتا ہے یعنی خطِ مستقیم منحنی کا مماس ہے۔

مندرجۂ بالا اصول کو استعمال کرکے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ کس شرط کے پورا ہونے پر ایک دیا ہوا خط ایک دیے ہوئے منحنی کو مس کرتا ہے۔ یعنی تماس کی شرط معلوم کر سکتے ہیں۔

مثلاً دفعہ ۷،۴ میں یہ ثابت کیا گیا کہ خطِ مستقیم ما = م لا + ج مکافی

ما^{۲} = ۴ لا کو مس کریگا اگر ج = $\frac{۱}{م}$

یعنی مکافی ما^{۲} = ۴ لا اور خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے تماس کی شرط ج = $\frac{۱}{م}$ ہے۔

مثال:- معلوم کرو کہ ج کی کس قیمت کے لیے خطِ مستقیم لا − ۲ ما + ج = ۰ مکافی ما^{۲} − ۴ لا − ۲ ما + ۹ = ۰ کو مس کرتا ہے۔ نیز ج کی اس قیمت کے لیے نقطۂ تماس کے محدد معلوم کرو۔

دیے ہوئے خط کی مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے:

$$ما = \frac{لا + ج}{۲}$$

اس لیے مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے فصلے ذیل کی مساوات کی اصلیں ہیں:-

$$\left(\frac{لا+ج}{۲}\right)^{۲} - ۴لا - (لا + ج) + ۹ = ۰$$

یعنی $(لا + ج)^{۲} - ۱۶لا - ۴(لا + ج) + ۳۶ = ۰$

یعنی $لا^{۲} + ۲لا(ج - ۱۰) + (۳۶ - ۴ج + ج^{۲}) = ۰$ ... (۱)

دیا ہوا خطِ مستقیم مکافی کو مس کریگا اگر اس مساوات کی اصلیں مساوی ہوں۔

یعنی اگر (ج - ۱۰)^۲ = (۳۶ - ۴ ج + ج^۲)

یعنی اگر ۱۶ ج = ۶۴

یعنی اگر ج = ۴

پس معلوم ہوا کہ خطِ مستقیم لا - ۲ ما + ۴ = ۰ مکافی ما^۲ - ۴ لا - ۲ ما + ۹ = ۰ کو مس کرتا ہے۔

اگر ج = ۴ تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے

لا^۲ - ۱۲ لا + ۳۶ = ۰

یعنی لا = ۶ یعنی نقطۂ تماس کا فصلہ ۶ ہے۔

فصلہ کی اس قیمت کو مماس کی مساوات لا - ۲ ما + ۴ = ۰ میں درج کرنے سے نقطۂ تماس کے معیّن کی قیمت ۵ حاصل ہوتی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ اگر تماس کی شرط پوری ہو تو نقطۂ تماس کے محدد (۶، ۵) ہیں۔

مشقی سوالات ۱۸

(۱) کس شرط کے پورا ہونے پر خطِ مستقیم ما = م لا + ج مکافی لا^۲ = ۴ ب ما کو مس کریگا؟

[جواب۔ ب م^۲ + ج = ۰]

(۲) اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خط لا جم ھ + ما جم ھ = ع مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کو مس کرے۔

[جواب۔ ع جم ھ + ا جب^۲ ھ = ۰]

× (۳) اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ مکافی $ما^2$ = ۴ ا لا کو مس کرے۔

[جواب ا $م^2$ = ن ل]

(۴) کس شرط کے پورا ہونے پر خطِ مستقیم ما = م لا + لہ مکافی $ما^2$ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ کو مس کریگا؟

[جواب (م لہ + گ + م ف$)^2$ = $م^2$ ($لہ^2$ + ۲ف لہ + ج)]

(۵) مکافی $ما^2$ = ۸ لا کے اُس مماس کی مساوات معلوم کرو جو لا - محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔

[جواب ما = لا + ۲]

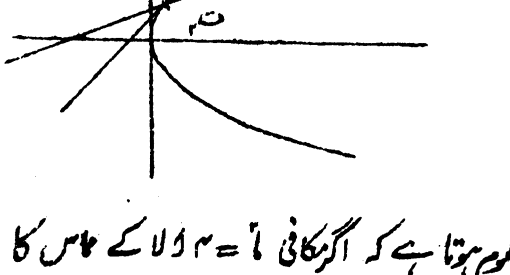
(۶) مکافی $ما^2$ - ۲ لا + ۴ ما + ۱ = ۰ کے اُس مماس کی مساوات حاصل کرو جو خطِ مستقیم لا - ۳ما + ۴ = ۰ کے متوازی ہے۔

[جواب لا - ۳ما = ۰]

(۷) مکافی $ما^2$ - ۴ لا - ۲ ما + ۴ = ۰ کے اُس مماس کی مساوات معلوم کرو جو خطِ مستقیم لا + ۲ ما + ۴ = ۰ پر عمود وار ہے۔

[جواب ۲ لا - ما = ۰]

۹،۴ - وترِ تماس کی مساوات۔



دفعہ ۱۶،۴ کی رو سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مکافی $ما^2$ = ۴ ا لا کے مماس کا

میلان م دیا جائے تو مماس کی مساوات بالکل معین ہو جاتی ہے اس لیے مکافی کی صورت میں ایک ہی میلان والے دو مماس نہیں کھینچے جا سکتے ہیں۔

اس لیے اگر مکافی کے نقاط ت۱ اور ت۲ پر مماس کھینچے جائیں تو یہ مماسات ایک دوسرے کو قطع کرینگے۔ فرض کرو کہ ان مماسات کا نقطہ تقاطع ن۱ ہے۔

اس مطلب کو ہم اس طرح بھی ادا کر سکتے ہیں کہ نقطہ ن۱ سے مکافی تک کھینچے ہوئے مماسات ن۱ ت۱ اور ن۱ ت۲ ہیں۔ یعنی معلوم ہوتا ہے کہ ایک نقطہ سے مکافی کے دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔

اور نقاط تماس ت۱ اور ت۲ میں سے گذرنے والا خط مستقیم نقطہ ن۱ سے مکافی تک کھینچے ہوئے مماسات کا وتر تماس کہلاتا ہے۔

اب ہم نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) سے مکافی ما۲ = ۴ الا تک کھینچے ہوئے مماسات کے وتر تماس کی مساوات معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نقاط تماس ت۱ (لاَ، ماَ) اور ت۲ (لاً، ماً) ہیں۔

ت۱ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات ہے

ما ماَ = ۲ ا (لا + لاَ)

چونکہ یہ مماس نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے

اس لیے ما۱ ماَ = ۲ ا (لا۱ + لاَ)

یعنی ماَ ما۱ = ۲ ا (لاَ + لا۱) .... (۱)

اسی طرح سے چونکہ نقطہ ت۲ (لاً، ماً) پر کا مماس بھی نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے اس لیے ماً ما۱ = ۲ ا (لاً + لا۱) ...... (۲)

اب درجۂ اول کی مساوات

ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱) .... (۳) پر غور کرو۔

چونکہ مساوات (۳) درجہ اول کی ہے اس لیے ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

رشتہ (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ خط (۳) نقطہ ت۱ (لاَ، ماَ) میں سے

گذرتا ہے - اور رشتہ (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ خط (۳) نقطہ ت۲ (لاَ٬ ماَ) میں سے بھی گزرتا ہے - پس معلوم ہوا کہ مساوات (۳) اُس خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو نقاطِ تماس ت۱ اور ت۲ میں سے گذرتا ہے -

یعنی ثابت ہوا کہ نقطہ ن۱ (لا۱٬ ما۱) سے مکافی ما۲ = ۴ ا لا تک کھنچے ہوئے مماسات کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خط یعنی وترِ تماس کی مساوات

ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱) ہے .... (۴)

نوٹ (۱) اس مساوات کی شکل بالکل وہی ہے جو نقطہ (لا۱٬ ما۱) پر کے مماس کے لیے لکھی جاتی ہے - البتہ فرق یہ ہے کہ مماس کی صورت میں ضروری ہے کہ نقطہ (لا۱٬ ما۱) مکافی پر واقع ہو - وترِ تماس کی صورت میں ایسی کوئی شرط نہیں لگائی جاتی ہے -

نوٹ (۲) اگر نقطہ (لا۱٬ ما۱) مکافی کے باہر ہو تو مماسات حقیقی ہونگے - اس لیے نقاطِ تماس بھی حقیقی ہونگے اور ان نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے وترِ تماس کی مساوات اوپر کی شکل (۴) سے حاصل ہوگی - اگر نقطہ (لا۱٬ ما۱) مکافی کے اوپر ہو تو دونوں مماسات نقطہ (لا۱٬ ما۱) پر کے مماس پر منطبق ہونگے اور وترِ مماس وہی خط ہوگا جو (لا۱٬ ما۱) پر کا مماس ہے - اگر (لا۱٬ ما۱) مکافی کے اندر ہو تو مماسات خیالی ہونگے اور وترِ تماس اِن خیالی نقاطِ تماس میں سے گزرنے والا خط ہوگا - چونکہ وترِ تماس کی مساوات حقیقی ہے - اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ اِن خیالی نقاطِ تماس میں سے گزرنے والا خط حقیقی ہے -

۱۹۴ - قطبی اور قطب - دائرہ کے بیان میں دفعہ ۲٫۷ میں دائرہ کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطہ کے قطبی کی جو تعریف اختیار کی گئی اُسی کے مماثل تعریف مکافی کی صورت میں بھی اختیار کی جاتی ہے - یعنی مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن۱ کا قطبی وہ خطِ مستقیم ہے جو ن۱ سے مکافی تک کھنچے ہوئے مماسات کے نقاطِ تماس میں سے گزرتا ہے -

اس لیے مکافی ما۲ = ۴ ا لا کے لحاظ سے نقطہ ن۱ (لا۱٬ ما۱) کے قطبی کی مساوات ہے -

ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱)

نوٹ :- ن، (لا، ما،) کا قطبی فی الحقیقت وہی خط ہے جو دفعہ ۹۲ء۲ میں وترِ تماس کے نام سے موسوم کیا گیا۔

اگر مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن، کا قطبی خطِ مستقیم ل، ہو تو نقطہ ن، مکافی کے لحاظ سے خطِ مستقیم ل، کا قطب کہلاتا ہے۔

۹۲ء۴ - مکافی ما² = ۴ ا لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے قطب کے محدد معلوم کرو۔ فرض کرو کہ مطلوبہ قطب کے محدد (لا، ما،) ہیں۔ تب مکافی ما² = ۴ ا لا کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما،) کے قطبی کی مساوات ہوگی

ما ما، = ۲ ا (لا + لا،)

لیکن اسی خط کی مساوات ما = م لا + ج ہے۔

چونکہ یہ دونوں خطی مساواتیں ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں اس لیے ان میں نظیر کی رقموں کے سر متناسب ہونگے۔

یعنی $\frac{\text{ما،}}{\text{۱}} = \frac{\text{۲ ا}}{\text{م}} = \frac{\text{۲ ا لا،}}{\text{ج}}$

یعنی لا، = $\frac{\text{ج}}{\text{م}}$ اور ما، = $\frac{\text{۲ ا}}{\text{م}}$

پس معلوم ہوا کہ مکافی ما² = ۴ ا لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم ما = م لا + ج کا قطب نقطہ ($\frac{\text{ج}}{\text{م}}$ ، $\frac{\text{۲ ا}}{\text{م}}$) ہے۔

مثال :- مکافی ما² = ۸ لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم لا - ما + ۱ = ۰ کے قطب کے محدد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ (لا، ما،) مطلوبہ قطب ہے۔

تب مکافی ما² = ۸ لا کے لحاظ سے (لا، ما،) کے قطبی کی مساوات ہوگی

ما ما، = ۴ (لا + لا،)

لیکن اسی خط کی مساوات لا - ما + ۱ = ۰ ہے یعنی ما = لا + ۱ ہے۔
چونکہ یہ دونوں خطی مساواتیں ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں اس لیے
ان میں نظیر کی رقموں کے سر تناسب ہونگے

اس لیے $\frac{ما_۱}{۱} = \frac{۲}{۱} = \frac{۲ لا_۱}{۱}$

یعنی لا₁ = ۱ اور ما₁ = ۲

پس مطلوبہ قطب کے محدد (۱، ۲) ہیں۔

نوٹ :- مکافی کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کا قطب مکافی اور دیے ہوئے خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع ہے۔

مشقی سوالات ۱۹

(۱) مکافی ما² = ۱۲ لا کے لحاظ سے نقطہ (۱، -۳) کے قطبی کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب ۲ لا + ما + ۲ = ۰]

(۲) مکافی لا² = ۸ ما کے لحاظ سے نقطہ (۱، ۵) کے قطبی کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب لا - ۴ ما - ۲۰ = ۰]

(۳) مکافی ما² + ۴ لا = ۰ کے لحاظ سے نقطہ (۳، -۱) کے قطبی کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب ۲ لا - ما + ۶ = ۰]

(۴) ثابت کرو کہ مکافی ما² = ۴ ل لا کے لحاظ سے ماسکہ س (ل، ۰) کا قطبی مکافی کا مرتب ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مکافی کے لحاظ سے مکافی کے کسی مماس کا قطب اس

مماس کا نقطۂ تماس ہوتا ہے۔

(۶) مکافی ما^2 = ۴ لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ۴ کا قطب معلوم کرو۔

[جواب (۲، ۱)]

(۷) مکافی لا^2 + ۴ ما = ۰ کے لحاظ سے خطِ مستقیم لا + ما + ۱ = ۰ کا قطب معلوم کرو۔

[جواب (۲، ۱)]

(۸) خطِ مستقیم لا + ما + ۱ = ۰ اور مکافی ما^2 + ۶ لا = ۰ کے نقاطِ تقاطع پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع معلوم کرو۔

[جواب (۱، ۳)]

(۹) دائرہ لا^2 + ما^2 = ۲۵ کے کسی مماس کا قطب مکافی ما^2 = ۴ لا کے لحاظ سے لیا گیا۔ قطب کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

[جواب ۴ لا^2 - ۲۵ ما^2 = ۱۰۰]

(۱۰) مکافی ما^2 = ۲۴ لا کے لحاظ سے مکافی کے اُس ماسکی وتر کا قطب معلوم کرو جو محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔

[جواب (-۶، ۱۲)]

مکافی پر متفرق سوالات ۲۰

(۱) مکافی کا رأس مبدا پر ہے اور محورِ تشاکل لا۔ محدد پر اور مرتب خط لا = ۶ پر۔ مکافی کی مساوات معلوم کرو۔ نیز وترِ خاص کا طول اور وترِ خاص کے سروں کے محدد معلوم کرو۔

[جواب۔ مکافی کی مساوات ہے ما^2 + ۲۴ لا = ۰ وترِ خاص کے سرے
(–۶، ۱۲)، (–۶، –۱۲) ہیں]

(۲) مکافی کا راس نقطہ (۳، ۴) پر ہے اور مرتب ما۔ محور کے متوازی ہے۔ نیز مکافی نقطہ (۷، ۸) میں سے گزرتا ہے۔ مکافی کی مساوات معلوم کرو۔ نیز مکافی کے وترِ خاص کا طول، ماسکہ کے محدد اور مرتب کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب۔ مکافی کی مساوات ہے (ما–۴)^2 = ۴ (لا–۳) وترِ خاص کا طول = ۴ ماسکہ نقطہ
(۴، ۴) ہے مرتب کی مساوات لا = ۲ ہے۔

(۳) مکافی کا راس نقطہ (۲، ۳) پر ہے، اور ماسکہ (۵، ۳) پر ہے۔ مکافی کی مساوات معلوم کرو۔

[جواب (ما – ۳)^2 = ۱۲ (لا – ۲)]

(۴) مکافی کا راسی نقطہ (۴، ۲) پر ہے اور مرتب خطِ مستقیم لا = ۱ ہے۔ مکافی کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب (ما – ۲)^2 = ۱۲ (لا – ۴)]

(۵) مکافی کا رأس نقطہ (۶، ۳) پر ہے، محورِ تشاکل ما۔ محور کے متوازی ہے۔ اور مکافی نقطہ (۱۰، ۷) میں سے گزرتا ہے۔ مکافی کی مساوات معلوم کرو۔

[جواب (لا – ۶)^2 = ۴ (ما – ۳)]

(۶) مکافی ما^2 = ۴ لا پر دو نقاط ن$_1$ اور ن$_2$ اس طرح لیے گئے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک مکافی کے ماسکہ سے فاصلہ (۱۰) پر واقع ہے۔ نقاط ن$_1$ اور ن$_2$ کے

محدّد معلوم کرو۔

[جواب (۹، ۶)، (۹، -۶)]

(۷) مکافی ما² = ۸ لا کے اندر ایک مثلث مساوی الاضلاع بنایا گیا ہے جس کا ایک راس مکافی کے راس پر ہے۔ مثلث کے دوسرے دو راسوں کے محدّد اور مثلث کے ضلع کا طول معلوم کرو۔

[جواب (۲۴، ± ۸ $\sqrt{3}$)، ضلع کا طول = ۱۶ $\sqrt{3}$]

(۸) مکافی ما² = ۱۲ لا کے کسی نقطہ ن سے مکافی کے محور پر عمود ن ع نکالا گیا ہے۔ ع ن کے وسطی نقطہ کے طریق کی مساوات حاصل کرو، اور ثابت کرو کہ یہ طریق بھی ایک مکافی ہے۔

[جواب ما² = ۳ لا]

(۹) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے خط کے متوازی مکافی کا ایک اور صرف ایک مماس کھنچ سکتا ہے۔

(۱۰) مکافی ما² = ۴ لا کے اُن مماسات کی مساواتیں علٰحدہ علٰحدہ معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے گزرتے ہیں۔ نیز ان مماسات کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

[جواب۔ مماسات ہیں ما = لا + ۱ اور ۲ ما = لا + ۴
اور ان مماسات کا درمیانی زاویہ = مس⁻¹ ($\frac{1}{3}$)]

(۱۱) مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس راس پر کے مماس سے ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ س ما نقطہ ن پر کے مماس پر عمود وار ہے جہاں س مکافی کا ماسکہ ہے۔

(۱۲) مکافی ما² = ۴ لا کے نقطہ (۹، ۶) کے جواب میں زیر مماس اور زیر عماد کے طول معلوم کرو۔

[جواب۔ زیر مماس ۱۸، زیر عماد = ۲]

(۱۳) مکافی کا ماسکہ س ہے۔ مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مکافی کے محور سے ت پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ س ن = س ت۔

(۱۴) نور کی شعاعوں کے پنسل کی ہر شعاع مکافی کے محور کے متوازی ہے

ثابت کرو کہ مکافی کے مقعر حصّہ پر منعکس ہونے کے بعد یہ شعاعیں مکافی کے ماسکہ میں سے گزرتی ہیں۔

(۱۵) مکافی ما^۲ = ۸ لا اور خطِ مستقیم ۲ لا - ۳ ما - ۵ = ۰ کے نقاطِ تقاطع پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع معلوم کرو۔

[جواب (- $\frac{۵}{۲}$، ۶)]

(۱۶) اگر مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کے لحاظ سے نقطہ ن$_۱$ کا قطبی نقطہ ن$_۲$ میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ نقطۂ ن$_۲$ کا قطبی نقطہ ن$_۱$ میں سے گزریگا۔

نوٹ :- ایسے دو نقطے مکافی کے لحاظ سے مزدوج نقطے کہلاتے ہیں)۔

(۱۷) مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ کے قطب کے محدد معلوم کرو۔

[جواب ($\frac{ن}{ل}$، $\frac{-۲ ا م}{ل}$)]

(۱۸) دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۴ کے کسی مماس کا قطب مکافی ما^۲ = ۴ لا کے لحاظ سے لیا گیا ہے۔ قطب کے طریق کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب (لا^۲ - ما^۲ - ۴ = ۰)]

(۱۹) مکافی ما^۲ = ۲ لا کے وتر لا - ما = ۰ کے وسطی نقطہ کے محدّد معلوم کرو۔

[جواب (۱، ۱)]

(۲۰) مکافی ما^۲ = ۱۲ لا کے وتر ۲ لا - ما - ۵ = ۰ کے وسطی نقطہ کے محدّد معلوم کرو۔

[جواب (۱، ا)]

(۲۱) مکافی ما^۲ = ۱۲ لا کے اُن عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۹، ۰) میں سے گزرتے ہیں۔

[جواب لا + ما - ۹ = ۰ اور لا - ما - ۹ = ۰]

(۲۲) ثابت کرو کہ مکافی کے مرتب پر کے کسی نقطہ کا قطبی جو مکافی کے لحاظ سے

لیا گیا ہے مکافی کے اسکہ میں سے گزرتا ہے۔

(۲۳) مکافی کے مرتب پر کے کسی نقطہ سے مکافی کے مماسات کا جوڑا کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ یہ مماسات ایک دوسرے پر عمود وار ہیں۔

(۲۴) ثابت کرو کہ مکافی کے دو علی القوائم مماسات کا نقطۂ تقاطع مکافی کے مرتب پر ہوتا ہے۔

(۲۵) مکافی ما^2 = ۴ لا اور دائرہ لا^2 + ما^2 = ۵ کا زاویۂ تقاطع معلوم کرو۔

نوٹ :۔ دو منحنیوں کے زاویۂ تقاطع سے مُراد اِن کے نقطۂ تقاطع پر اِن کے مماسات کا درمیانی زاویہ ہے۔

[جواب ۔ دائرہ مکافی کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کرتا ہے ۔ اور ان نقطوں پہ مکافی اور دائرہ ایک دوسرے کو ایک ہی زاویہ پہ قطع کرتے ہیں ۔ یہ زاویہ [illegible]]

پانچواں باب

قطع ناقص

۱،۵ - قطع ناقص کی تعریف — ایک ثابت خطِ مستقیم وَکَ اور ایک ثابت نقطہ سَ دیے ہوئے ہیں۔ ایک متغیر نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر ن سے وَکَ پر عمود ن مَ ڈالا جائے تو

سَ ن = ز × ن مَ .... (۱)

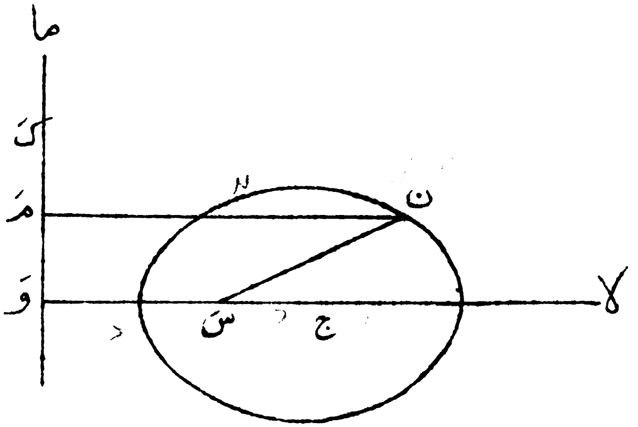
جہاں ز ایک کسر واجب ہے جو ایک سے کم ہے۔ متحرک نقطہ ن کے طریق کو "ناقص" کہتے ہیں۔ ثابت نقطہ سَ کو "ماسکہ" اور ثابت خط وَکَ کو "مرتب" اور کسر ز کو خروج المرکز کہتے ہیں۔

۱۱،۵ - ناقص کی مساوات (معیاری شکل) :-

فرض کرو کہ ماسکہ سَ سے مرتب وَکَ پر عمود سَ وَ ڈالا گیا ہے اور فاصلہ

سَ وَ = د .... (۲)

وَ کو مبدا، خط وَ سَ کو محور لا اور خط وَ کَ کو محور ما لیتے ہیں ۔



فرض کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ ن کے محدّد (لا، ما) ہیں۔ توچونکہ

ن سَ = ز × ن مَ

اس لیے (سَ ن)^۲ = ز^۲ (ن مَ)^۲

یعنی (لا - د)^۲ + ما^۲ = ز^۲ لا^۲

یعنی لا^۲ (۱ - ز^۲) - ۲ لا د + ما^۲ = - د^۲

یعنی (۱ - ز^۲) { لا^۲ - (۲ لا د)/(۱ - ز^۲) } + ما^۲ = - د^۲

اس آخری مساوات میں سیدھے طرف بڑے قوسین کے اندر کے جملہ کو ہم کامل مربع بنانتے ہیں اور اسی قدر رقم کا بائیں طرف اضافہ کرتے ہیں تاکہ مساوات میں فرق نہ آسکے :-

(۱ - ز^۲) { لا^۲ - (۲ لا د)/(۱ - ز^۲) + د^۲/(۱ - ز^۲)^۲ } + ما^۲ = - د^۲ + د^۲/(۱ - ز^۲)

یعنی

$$\left(\text{۱}-\text{ز}^{2}\right)\left\{\text{لا}-\frac{\text{د}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}\right\}^{2}+\text{ما}^{2}=\frac{\text{د}^{2}\,\text{ز}^{2}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}$$

یعنی

$$\left(\text{لا}-\frac{\text{د}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}\right)^{2}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}=\frac{\text{د}^{2}\,\text{ز}^{2}}{\left(\text{۱}-\text{ز}^{2}\right)^{2}} \quad \cdots\cdots (\text{۳})$$

مساوات (۳) ناقص کی ایک مساوات ہے لیکن ابھی یہ معیاری شکل میں نہیں ہے ۔ سادہ سے سادہ شکل میں مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں مبدا کو سیدھی طرف نقطۂ ج پر منتقل کرنا چاہیے جو خط وَسَ پر واقع ہے اور جس کا فاصلہ وَ سے $\frac{\text{د}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}$ ہے ۔ اب چونکہ ز < ۱ اس لیے

$$\frac{\text{د}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}} > \text{د}$$

یعنی

$$\text{وَج} > \text{وَسَ} \quad \cdots\cdots (\text{۴})$$

اس لیے معلوم ہوا کہ نیا مبدا ، ج نقطۂ سَ کی سیدھی طرف واقع ہے ۔ نقطۂ ج میں سے نئے محوروں (لاَ ، ماَ) کو ہم پرانے محوروں کے متوازی لیتے ہیں تو نئے محدد پرانے محددوں کی رقوم میں حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں

$$\left.\begin{aligned}\text{لاَ} &= \text{لا}-\frac{\text{د}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}\\ \text{ماَ} &= \text{ما}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (\text{۵})$$

مساوات (۳) میں (۵) کو درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{لاَ}^{2}+\frac{\text{ماَ}^{2}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}=\frac{\text{د}^{2}\,\text{ز}^{2}}{\left(\text{۱}-\text{ز}^{2}\right)^{2}} \quad \cdots\cdots (\text{۶})$$

اب ہم اس مساوات میں سے زبروں کو نکال دیتے ہیں لیکن یہ یاد رکھتے ہیں کہ یہ مساوات نقطۂ ج کو مبدا لینے پر حاصل ہوتی ہے اور

مساوات (۳) نقطۂ وَ کو مبدا لینے پر حاصل ہوئی تھی۔ زبریں نکال دینے سے مساوات ہوجاتی ہے:

$$\text{لا}^2 + \frac{\text{ما}^2}{1-\text{ز}^2} = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(1-\text{ز}^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

اب ہم لکھتے ہیں

$$\text{ر}^2 = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(1-\text{ز}^2)^2}$$

یعنی

$$\text{ر} = \frac{\text{د}\,\text{ز}}{1-\text{ز}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

تو مساوات (۷) ہوجاتی ہے

$$\text{لا}^2 + \frac{\text{ما}^2}{1-\text{ز}^2} = \text{ر}^2$$

اور دونوں طرف ر^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ر}^2(1-\text{ز}^2)} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

پھر ہم لکھتے ہیں

$$\text{ب}^2 = \text{ر}^2(1-\text{ز}^2) \;\text{ یعنی }\; \text{ب} = \text{ر}\sqrt{1-\text{ز}^2} \quad \ldots\ldots (10)$$

تو مساوات (۹) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

ناقص کی یہ مساوات (۱۱) سادہ ترین شکل میں ہے اور اسی کو معیاری مساوات کہتے ہیں۔ ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ نقطۂ ج (جس کو ناقص کا "مرکز" کہتے ہیں) کو مبدا لینے، مرتب کے متوازی خط کو محور ما اور ماسکہ سے مرتب پر علی القوائم خط کو محور لا لینے سے یہ معیاری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۱۲ر۵ - ناقص کی شکل -

یہ دریافت کرنے کے لیے کہ محور لا ناقص کو کہاں قطع کرتا ہے ہم گذشتہ دفعہ کی مساوات (۱۱) میں ما = ۰ رکھتے ہیں جس سے ملتا ہے

لا² = ا² یعنے لا = + ا یا لا = - ا

فرض کرو کہ لا = ا کے جواب میں ناقص پر نقطۂ ا اور لا = - ا کے جواب میں نقطۂ اَ ملتے ہیں - اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ا اَ کا طول ۲ ا ہے یعنی

ا اَ = ۲ ا . . . . (۱)

پھر یہ دریافت کرنے کے لیے کہ محور ما ناقص کو کہاں قطع کرتا ہے ناقص کی مساوات میں ہم لا = ۰ رکھتے ہیں تو ملتا ہے

ما² = ب² یعنے ما = + ب یا ما = - ب

فرض کرو کہ ما = ب کے جواب میں ناقص پر نقطہ ب اور ما = - ب کے جواب میں ناقص پر نقطۂ بَ ملتا ہے، تب ظاہر ہے کہ ب بَ کا طول ۲ ب ہے یعنی

ب بَ = ۲ ب . . . . (۲)

اس کے علاوہ ناقص کی مساوات کو ذیل کی شکلوں میں سے کسی شکل میں لکھ سکتے ہیں:

ما = ± ب √(۱ - لا²/ا²) . . . . (۳)

لا = ± ا √(۱ - ما²/ب²) . . . . (۴)

مساوات (۳) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا² > ا² یعنی اگر لا > ا یا > - ا تو ما کی قیمت حقیقی حاصل نہیں ہوتی - اس لیے ظاہر ہے کہ منحنی کا کوئی حصہ نقطۂ ا کی سیدھی طرف یا نقطۂ اَ کی بائیں طرف واقع نہیں ہے -

اسی طرح مساوات (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ما^2 > ب^2 یعنے اگر ما > ب یا <- ب تو لا کی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی اس لیے ظاہر ہے کہ منحنی کا کوئی حصہ نقطۂ ب کے اوپر یا نقطۂ بَ کے نیچے واقع نہیں ہے -

اگر لا کی قیمت -ا اور +ا کے درمیان واقع ہو تو مساوات (۳) سے ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں جس سے معلوم ہوتا ہے کہ منحنی محور لا کے گرد "متشاکل" ہے -

اسی طرح اگر ما کی قیمت -ب اور +ب کے درمیان واقع ہو مساوات (۴) سے لا کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں جس سے ظاہر ہے کہ منحنی محور ما کے گرد متشاکل ہے -

گذشتہ دفعہ کی مساوات (۱۰) میں ہم نے دیکھا تھا کہ

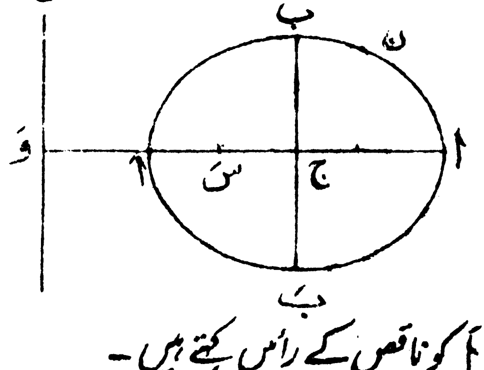
$$ب^2 = ا^2 (۱ - ز^2)$$

لیکن چونکہ ز < ۱ اس لیے ۱ - ز^2 < ۱ اور اس لیے

$$\therefore ب^2 < ا^2 \quad \text{یعنے} \quad ب < ا \quad \ldots\ldots (۵)$$

اس سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ خط ب بَ چھوٹا ہے خط اَا سے -
اِسی لیے اَا کو "محور اعظم" اور ب بَ کو "محور اصغر" کہتے ہیں -

ذیل میں ناقص کی شکل دی گئی ہے جس میں مذکورۂ بالا نقطوں اور خطوں کو ظاہر کیا گیا ہے -



نقاط ا اور اَ کو ناقص کے رأس کہتے ہیں -

۲ ، ۵ ۔ اس دفعہ میں ہم ج سَ کا فاصلہ دریافت کرینگے اور اس کو ﻟ اور ز کی رقوم میں بیان کرینگے ۔ دفعہ (۱۱ ، ۵) کی مساواتوں (۲)، (۵) اور (۸) کی بنا پر معلوم ہے کہ

$$\text{وَسَ} = \text{د}$$

$$\text{وَج} = \frac{\text{د}}{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}}$$

$$\text{اَج} = \text{ﻟ} = \frac{\text{د ز}}{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}}$$

اس لیے

$$\text{سَ ج} = \text{وَج} - \text{وَسَ}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}} - \text{د} = \frac{\text{د ز}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}}$$

$$= \text{ز} \times \text{اَج} = \text{ﻟ ز} \quad \ldots\ldots (\text{۱})$$

اسی طرح

$$\text{وَج} = \text{اَج} \times \frac{\text{۱}}{\text{ز}}$$

$$= \frac{\text{ﻟ}}{\text{ز}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

مساواتیں (۱) اور (۲) مرکز سے بالترتیب ماسکہ اور مرتب کے فاصلہ کو ظاہر کرتی ہیں ۔

۳ ، ۵ ۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ ناقص کا ایک دوسرا ماسکہ اور اس کے جواب میں ایک دوسرا مرتب ہوتا ہے ۔

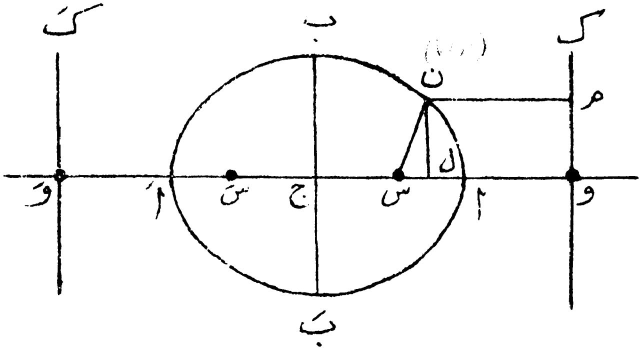
مرکز ج سے سیدھی طرف محورِ اعظم پر ایک نقطہ س اس طرح لو کہ

$$\text{ج س} = \text{سَ ج} = \text{ﻟ ز} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

اور اسی طرح محورِ اعظم ممدودہ پر سیدھی طرف ایک نقطہ و

ایسا لو کہ

$$ج\,و = وَ\,ج = \frac{ا}{ز} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$



نقطۂ و سے وک خط ووَ پر عمود کھینچو۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ نقطۂ سَ ناقص کا دوسرا ماسکہ اور خط وَکَ دوسرا مرتب ہے۔

ناقص پر کوئی نقطہ ن لو جس کے محدد (لا، ما) ہیں۔ ن س کو ملاؤ اور ن سے خط وک پر عمود ن م اور خط ج و پر عمود ن ل ڈالو۔ تب

$$ن\,م = ل\,و$$

$$= ج\,و - ج\,ل$$

$$= \frac{ا}{ز} - لا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور

$$ن\,س^2 = س\,ل^2 + ن\,ل^2 = (ج\,ل - ج\,س)^2 + ن\,ل^2 = (لا - ا\,ز)^2 + ما^2 \ldots (۴)$$

اب چونکہ نقطۂ ن کے محدد ناقص کی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$$

یعنی

$$\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ا^{۲}(ا - ز^{۲})} = ا$$

یعنی

$$لا^{۲}(ا - ز^{۲}) + ما^{۲} = ا^{۲}(ا - ز^{۲})$$

اس مساوات کو پھیلانے اور مختلف ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا^{۲} + ا^{۲}ز^{۲} + ما^{۲} = ز^{۲}لا^{۲} + ا^{۲}$$

پھر دونوں طرف ۲ ا ز لا تفریق کرنے سے ملتا ہے

$$لا^{۲} - ۲ازلا + ا^{۲}ز^{۲} + ما^{۲} = ز^{۲}لا^{۲} - ۲ازلا + ا^{۲}$$

$$= ز^{۲}\left(لا^{۲} - \frac{۲الا}{ز} + \frac{ا^{۲}}{ز^{۲}}\right)$$

پس

$$(لا - از)^{۲} + ما^{۲} = ز^{۲}\left(لا - \frac{ا}{ز}\right)^{۲} \ldots\ldots (۵)$$

مساواتوں (۳)، (۴) اور (۵) سے ظاہر ہے کہ

$$ن س^{۲} = ز^{۲} \times ن م^{۲}$$

یعنی

$$ن س = ز \times ن م \ldots\ldots\ldots (۶)$$

مساوات (۶) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطۂ س سے اس کا فاصلہ متناسب ہے ایک ثابت خطِ مستقیم وک پر ن سے عمود کے۔

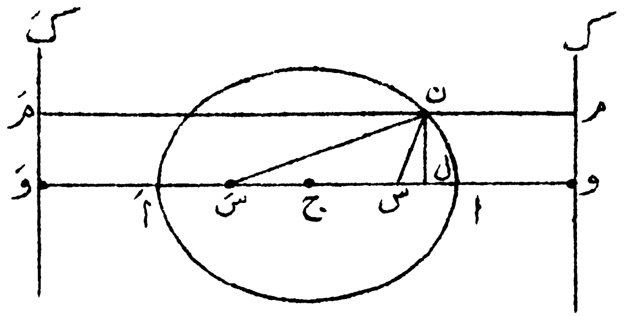
پس نقطۂ س ناقص کا ماسکہ اور خط وک ناقص کا مرتب ہے۔

۱۳۵ - اس دفعہ میں ہم ناقص کی ایک بہت زیادہ مشہور اور اہم خاصیت ثابت کرینگے۔

ناقص پر کوئی نقطہ ن لو اور اس کو دونوں ماسکوں س اور سَ سے ملاؤ۔ ہم ثابت کرینگے کہ خواہ نقطۂ ن کہیں واقع ہو ن س اور ن سَ کا مجموعہ

مستقل ہوگا اور ۲ ا کے برابر ہوگا یعنے ہم ثابت کرینگے کہ

ن س + نَ سَ = مستقل = ۲ ا .... (۱)



اس مسئلہ کا ثبوت ہم پہلے بالکل تحلیلی طریقہ پر دینگے -

ن س^{۲} = س ل^{۲} + ل ن^{۲}

= (ج ل - ج س)^{۲} + ل ن^{۲}

= (لا - ا ز)^{۲} + ما^{۲} .... (۲)

لیکن ناقص کی مساوات

لا^{۲} / ا^{۲} + ما^{۲} / ا^{۲}(۱ - ز^{۲}) = ۱

سے حاصل ہوتا ہے

ما^{۲} = ا^{۲} (۱ - ز^{۲}) - لا^{۲} (۱ - ز^{۲})

= ا^{۲} - ا^{۲} ز^{۲} - لا^{۲} + لا^{۲} ز^{۲} .... (۳)

اس قیمت کو مساوات (۲) میں رکھنے سے ملتا ہے:

ن س^{2} = (لا - ا ز)^{2} + ا^{2} - ا^{2} ز^{2} - لا^{2} + لا^{2} ز^{2}

= لا^{2} - ۲ ا ز لا + ا^{2} ز^{2} + ا^{2} - ا^{2} ز^{2} - لا^{2} + لا^{2} ز^{2}

= ا^{2} - ۲ ا ز لا + لا^{2} ز^{2}

= (ا - ز لا)^{2}

پس

ن س = ا - ز لا . . . . (۴)

اسی طرح

ن سَ^{2} = سَ لَ^{2} + ل ن^{2}

= (سَ ج + ج ل)^{2} + ل ن^{2}

= (ا ز + لا)^{2} + ما^{2}

= (ا ز + لا)^{2} + (ا^{2} - ا^{2} ز^{2} - لا^{2} + لا^{2} ز^{2})

= ا^{2} ز^{2} + ۲ ا ز لا + لا^{2} + ا^{2} - ا^{2} ز^{2} - لا^{2} + لا^{2} ز^{2}

= ا^{2} + ۲ ا ز لا + ز^{2} لا^{2}

یعنے

ن سَ = ا + ز لا . . . . (۵)

اس لیے مساواتوں (۴) اور (۵) سے

ن س + ن سَ = (ا - ز لا) + (ا + ز لا)

= ۲ ا . . . . (۶)

جس سے ہمارا مسئلہ ثابت ہوجاتا ہے۔

متبادل ثبوت : اسی مسئلہ کا ایک نہایت مختصر ہندسی ثبوت بھی دیا جا سکتا ہے۔

ناقص کی تعریف کے بموجب ہمیں معلوم ہے کہ

ن س = ز × ن م

اور

ن سَ = ز × ن مَ

پس

ن س + ن سَ = ز (ن م + ن مَ)

= ز × مَ م

= ز × وَ و

= ز × ۲ ج و

= ز × ۲ ا/ز　　(کیونکہ ج و = ا/ز)

= ۲ ا

اسی طرح ن س اور ن سَ کی قیمتیں علٰحدہ علٰحدہ حسبِ ذیل طریقہ پر بھی معلوم کی جا سکتی ہیں :-

ن س = ز × ن م = ز × ل و

= ز (ج و − ج ل)

= ز (ا/ز − لا)

= ا − ز لا

اور

ن سَ = ز × مَ ن = ز (وَ ل)

= ز (وَج + ج ل)

= ز (ل/ز + لا)

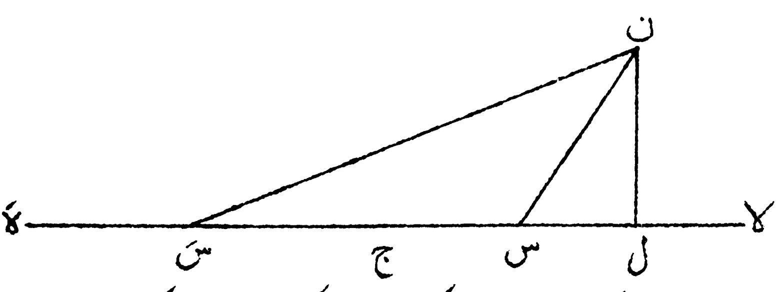
= ل + ز لا

غرض اس مسئلہ سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ محورِ اعظم کے برابر ہوتا ہے۔

نوٹ۔ ہم نے اس مسئلہ کے دو ثبوت عمداً دیے ہیں۔ اس کتاب میں اب تک طالبِ علم کو علمِ ہندسہ کے مشہور مسائل سے سابقہ پڑا ہوگا جن کے ثبوت تحلیلی طریقہ پر نہایت آسانی سے حاصل ہو جاتے ہیں۔ لیکن یہ تصویر کا صرف ایک پہلو ہے۔

بعض دفعہ ایسا بھی ہوتا ہے کہ ایک مسئلہ کا اقلیدسی ثبوت تحلیلی ثبوت کی بہ نسبت زیادہ مختصر اور آسان ہوتا ہے۔ زیرِ بحث مسئلہ سے یہ امر کافی طور پر واضح ہے۔ تاہم یہ یاد رہنا چاہیے کہ تحلیلی طریقہ ہندسی طریقہ کی نسبت بہت زیادہ وسیع اور طاقتور ہے اور ہر مسئلہ پر اس کا استعمال ہو سکتا ہے۔

۳۲ ر ۵ ۔ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ گذشتہ مسئلہ کا عکس بھی صحیح ہے یعنی یہ کہ اگر کوئی نقطہ ن ایک مستوی میں اس طرح حرکت کرے کہ دو ثابت نقطوں، س اور سَ سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو تو اس نقطہ ن کا طریق ایک ناقص ہوگا۔



خط س سَ کے نقطۂ تنصیف ج کو مبداء فرض کرو اور اس خط کو محور لا لو۔

فرض کرو کہ

$$ن س + ن سَ = ۲ ا \quad \cdots\cdots (۱)$$

تو ظاہر ہے کہ ج س اور ج سَ میں سے ہر ایک ا سے کم ہے۔
فرض کرو کہ

$$ج س = ز ا \quad \cdots\cdots (۲)$$

جہاں ز ایک کسر واجب ہے یعنی اکائی سے کم ہے۔
اب فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں تو

$$ن س^{۲} = (ج ل - ج س)^{۲} + ن ل^{۲}$$

$$= (لا - ا ز)^{۲} + ما^{۲} \quad \cdots\cdots (۳)$$

اور اسی طرح

$$ن سَ^{۲} = (ج ل + سَ ج)^{۲} + ن ل^{۲}$$

$$= (لا + ا ز)^{۲} + ما^{۲} \quad \cdots\cdots (۴)$$

پس ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھنے پر

$$\sqrt{(لا - ا ز)^{۲} + ما^{۲}} + \sqrt{(لا + ا ز)^{۲} + ما^{۲}} = ۲ ا$$

یعنی

$$\sqrt{(لا - ا ز)^{۲} + ما^{۲}} = ۲ ا - \sqrt{(لا + ا ز)^{۲} + ما^{۲}}$$

دونوں طرف مربع لینے سے ملتا ہے

$$(لا - ا ز)^{۲} + ما^{۲} = ۴ ا^{۲} - ۴ ا \sqrt{(لا + ا ز)^{۲} + ما^{۲}} + (لا + ا ز)^{۲} + ما^{۲}$$

مختصر کرنے اور ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{۴}\,\text{ا}\sqrt{(\text{لا}+\text{ا}\,\text{ز})^{2}+\text{ما}^{2}} = (\text{لا}+\text{ا}\,\text{ز})^{2}-(\text{لا}-\text{ا}\,\text{ز})^{2}+\text{۴}\,\text{ا}^{2}$$

$$= \text{۴}\,\text{ا}\,\text{ز}\,\text{لا}+\text{۴}\,\text{ا}^{2}$$

یعنی

$$\sqrt{(\text{لا}+\text{ا}\,\text{ز})^{2}+\text{ما}^{2}} = \text{ز}\,\text{لا}+\text{ا}$$

پھر دوبارہ مربع لینے پر ملتا ہے

$$(\text{لا}+\text{ا}\,\text{ز})^{2}+\text{ما}^{2} = (\text{ا}+\text{ز}\,\text{لا})^{2}$$

یعنی پھیلانے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^{2}+\text{۲}\,\text{ا}\,\text{ز}\,\text{لا}+\text{ا}^{2}\text{ز}^{2}+\text{ما}^{2} = \text{ا}^{2}+\text{۲}\,\text{ا}\,\text{ز}\,\text{لا}+\text{ز}^{2}\,\text{لا}^{2}$$

اس کو مختصر کرنے اور ترتیب دینے پر ملتا ہے

$$\text{لا}^{2}(\text{۱}-\text{ز}^{2})+\text{ما}^{2} = \text{ا}^{2}(\text{۱}-\text{ز}^{2})$$

اس مساوات کو دونوں طرف $\text{ا}^{2}(\text{۱}-\text{ز}^{2})$ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ا}^{2}(\text{۱}-\text{ز}^{2})} = \text{۱}$$

اور بالآخر اگر $\text{ا}^{2}(\text{۱}-\text{ز}^{2})$ کو جو ایک مستقل ہے ب^{2} سے تعبیر کریں تو مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = \text{۱}$$

جو ایک ناقص کی مساوات ہے۔ پس معلوم ہوا کہ ن کا طریق ایک ناقص ہے۔

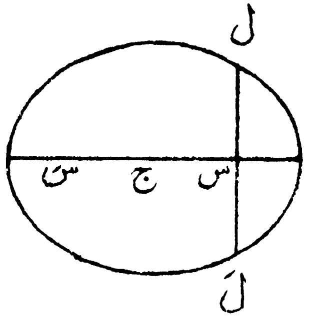
۵٫۳۳ - ناقص کو ترسیم کرنے کا حیلی طریقہ -

ناقص کی مذکورہ بالا خاصیت کی بنا پر ہمیں اس منحنی کو ترسیم کرنے کا ایک حیلی طریقہ ہاتھ آتا ہے -

دھاگہ کا ایک ٹکڑا لو جس کا طول مطلوبہ ناقص کے محورِ اعظم کے برابر ہو۔ اور اس کے سروں کو دو ثابت نقطوں س اور سَ پر باندھ دو۔ یہ نقطے ناقص کے ماسکے ہیں۔

ایک پنسل کی نوک کو کاغذ پر اس طرح حرکت دو کہ نوک ہمیشہ دھاگہ کو مس کرتی رہے اور اس کے علاوہ پنسل اور ثابت نقطوں کے درمیانی دونوں حصے ہمیشہ بالکل تنے ہوئے رہیں - اگر پنسل کی نوک ان شرائط کے ساتھ ایک پورا چکر کرے تو اس سے ایک ناقص مرتسم ہوگا - کیونکہ پنسل کی نوک ہمیشہ ایسے مقام پر ہوگی کہ س اور سَ سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ دھاگہ کے طول یعنے محورِ اعظم کے برابر ہوگا -

۵٫۳۴ - ناقص کا وترِ خاص -



تعریف - ماسکہ س میں سے محورِ اعظم پر علی القوایم ایک خط کھینچو جو منحنی کو دونوں طرف نقطوں ل اور لَ پر ملے - خط ل لَ کو ناقص کا

"وترِ خاص" کہتے ہیں اور س ل کو "نصف وترِ خاص"۔

ہم نصف وترِ خاص س ل کا طول معلوم کرینگے۔ فرض کرو کہ یہ طول ل ہے تو نقطۂ ل کے محدد (ج س، س ل) یعنے (ا ز، ل) ہونگے اور چونکہ نقطۂ ل ناقص پر واقع ہے اس لیے یہ محدد ناقص کی مساوات کو پورا کرینگے۔ پس

$$\frac{(ا ز)^۲}{ا^۲} + \frac{ل^۲}{ب^۲} = ۱$$

یعنے

$$ل^۲ = ب^۲ (۱ - ز^۲) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

لیکن چونکہ

$$ب^۲ = ا^۲ (۱ - ز^۲)$$

اس لیے

$$۱ - ز^۲ = \frac{ب^۲}{ا^۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے ملتا ہے۔

$$ل^۲ = \frac{ب^۴}{ا^۲}$$

اس لیے

$$ل = \frac{ب^۲}{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

پس　وترِ خاص $= ۲ل = ۲ \frac{ب^۲}{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$

۳۵ ، ۵ - اب ہم خروج المرکز (ز) کی قیمت محوروں کی رقوم میں معلوم کرینگے۔

گذشتہ دفعہ کی مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ - ز^۲ = \frac{ب^۲}{ا^۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

پس
$$ز^{۲} = ۱ - \frac{ب^{۲}}{ا^{۲}}$$
$$= \frac{۱}{ا^{۲}}\left(ا^{۲} - ب^{۲}\right)$$

اور
$$ز = \sqrt{۱ - \frac{ب^{۲}}{ا^{۲}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$
$$= \frac{۱}{ا}\sqrt{ا^{۲} - ب^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

مثال۔ ناقص $\frac{لا^{۲}}{۶۲۵} + \frac{ما^{۲}}{۴۰۰} = ۱$ کا خروج المرکز اور وترِ خاص کا طول معلوم کرو۔

یہاں $ا = ۲۵$، $ب = ۲۰$ اس لیے

$$ز = \frac{\sqrt{ا^{۲} - ب^{۲}}}{ا} = \frac{\sqrt{۶۲۵ - ۴۰۰}}{۲۵} = \frac{\sqrt{۲۲۵}}{۲۵} = \frac{۱۵}{۲۵} = \frac{۳}{۵}$$

اور
$$ل = \frac{ب^{۲}}{ا} = \frac{۴۰۰}{۲۵} = ۱۶$$

پس وترِ خاص $= ۲ل = ۳۲$

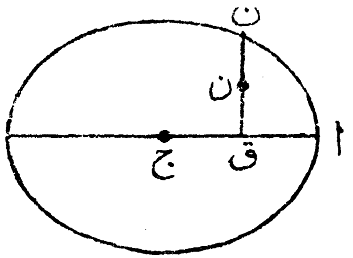
نیز چونکہ $ب^{۲} = ا^{۲}(۱ - ز^{۲})$

اس لیے
$$ل = \frac{ب^{۲}}{ا} = \frac{ا^{۲}(۱ - ز^{۲})}{ا} = ا(۱ - ز^{۲})$$
$$= ۲۵\left(۱ - \frac{۹}{۲۵}\right) = ۱۶$$

اس طرح سے بھی وترِ خاص کی قیمت وہی ۳۲ حاصل ہوتی ہے۔

۵۴ - اب ہم یہ دریافت کرینگے کہ اگر نقطہ ن ناقص پر واقع نہ ہو بلکہ اس کے اندر یا باہر کہیں واقع ہو تو محددوں میں کیا رشتہ ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ ن ناقص کے اندر واقع ہے اور اس کے محدد (لَ، مَ) ہیں۔ نقطہ ن سے محورِ اعظم ج ا پر عمود ن ق ڈالو اور ق ن کو اوپر اس قدر



بڑھاؤ کہ ناقص کے منحنی سے نقطہ نَ پر ملے۔ فرض کرو کہ ق نَ = م_1

لیکن ج ق = لَ اور ق ن = مَ۔

اب چونکہ نقطہ نَ ناقص پر واقع ہے اس لیے اس کے محدد (لَ، م_1) ناقص کی مساوات کو پورا کرتے ہیں یعنی

$$\frac{\text{لَ}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{م}_1^2}{\text{ب}^2} = 1$$

لیکن ق ن < ق نَ یعنی مَ < م_1 اس لیے

$$\frac{\text{لَ}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{مَ}^2}{\text{ب}^2} < \frac{\text{لَ}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{م}_1^2}{\text{ب}^2}$$

پس معلوم ہوا کہ

$$\frac{\text{لَ}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{مَ}^2}{\text{ب}^2} < 1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اسی طرح اگر نقطہ ن (لَ، مَ) ناقص کے باہر واقع ہو تو شکل بنا کر آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} > ۱ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

پس کسی نقطہ (لا ، ما) کے متعلق یہ معلوم کرنا ہو کہ وہ ناقص $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کے لحاظ سے کہاں واقع ہے تو جملہ $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}}$ کی قیمت دریافت کرنی چاہیے۔ اگر یہ قیمت اکائی سے کم ہے تو نقطۂ ناقص کے اندر واقع ہے۔ اگر قیمت اکائی کے برابر ہے تو نقطۂ ناقص کے منحنی پر واقع ہے اور اگر قیمت اکائی سے بڑی ہے تو نقطۂ ناقص کے باہر واقع ہے۔

مثال - ایک ناقص کی مساوات $\frac{لا^{۲}}{۲۵} + \frac{ما^{۲}}{۱۶} = ۱$ ہے۔ دریافت کرو کہ نقاط ا (۳ ، -۲) ، ب (-۵ ، ۰) ، ج (-۴ ، -۳) اس ناقص کے لحاظ سے کہاں واقع ہوتے ہیں۔

نقطوں کے محدد ناقص کی مساوات کے دائیں رکن میں درج کرتے ہیں۔

$\frac{(۳)^{۲}}{۲۵} + \frac{(-۲)^{۲}}{۱۶} = \frac{۹}{۲۵} + \frac{۴}{۱۶} < ۱$ اس لیے نقطۂ ا ناقص کے اندر واقع ہے۔

$\frac{(-۵)^{۲}}{۲۵} + \frac{(۰)^{۲}}{۱۶} = \frac{۲۵}{۲۵} + ۰ = ۱$ اس لیے نقطۂ ب ناقص پر واقع ہے۔

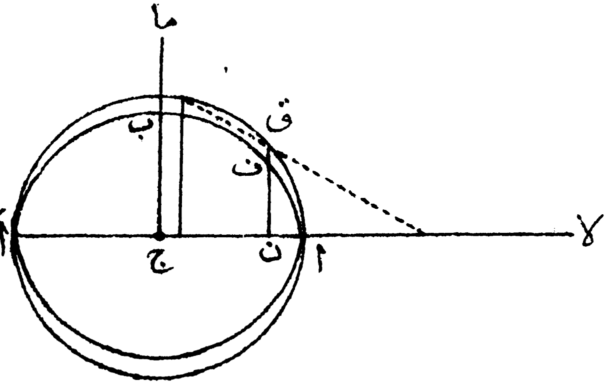
$\frac{(-۴)^{۲}}{۲۵} + \frac{(-۳)^{۲}}{۱۶} = \frac{۱۶}{۲۵} + \frac{۹}{۱۶} > ۱$ اس لیے نقطۂ ج ناقص کے باہر واقع ہے۔

۵،۵ - امدادی دائرہ -

تعریف - اگر محورِ اعظم ا اَ کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو اس دائرہ کو ناقص کا "امدادی دائرہ" کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ناقص پر کوئی نقطہ ف ہے اور ف ن اس نقطہ کا معین ہے۔ خط ن ف کو اوپر کی طرف خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ سے

نقطۂ ق پر ملے ۔



فرض کرو کہ

$$\text{ج ن} = \text{لاَ} ،\ \text{ن ف} = \text{ماَ} ،\ \text{ن ق} = \text{ما} \quad \ldots\ldots (۱)$$

نو ف کے محدّد (لاَ ، ماَ) اور ق کے محدّد (لاَ ، ما) ہونگے ۔
اب چونکہ نقطہ ف ناقص پر واقع ہے اس لیے

$$\frac{\text{لاَ}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ماَ}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \quad \ldots\ldots (۲)$$

اور چونکہ نقطہ ق دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲}$ پر واقع ہے اس لیے

$$\text{لاَ}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲} \quad \ldots\ldots (۳)$$

پس مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ماَ}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ - \frac{\text{لاَ}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}$$

یعنے $\text{ماَ}^{۲} = \text{ب}^{۲}\left(۱ - \frac{\text{لاَ}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\right) \quad \ldots\ldots (۴)$

اور مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲} - \text{لاَ}^{۲} = \text{ا}^{۲}\left(۱ - \frac{\text{لاَ}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\right) \quad \ldots\ldots (۵)$$

مساواتوں (۴) اور (۵) سے ملتا ہے کہ

$$\frac{ما^2}{ما^2} = \frac{ب^2}{ا^2}$$

یعنے

$$\frac{ما}{ما} = \frac{ب}{ا} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٦)$$

پس

$$\frac{ف ن}{ق ن} = \frac{ب ج}{ا ج} = \frac{ب}{ا} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٧)$$

امدادی دائرہ پر کے نقطۂ ق کو ناقص پر کے نقطۂ ف کا "متناظر" نقطہ کہتے ہیں۔

مساوات (۷) کو الفاظ میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کے معین کو امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطہ کے معین سے وہی نسبت ہے جو ب کو ا سے ہے یعنے جو ناقص کے محورِ اصغر کو محورِ اعظم سے ہے۔

اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ ناقص کی تعریف حسب ذیل طریقہ پر بھی کی جا سکتی ہے:-

ایک دائرہ لو اور اس کا کوئی قطر ا ا کھینچو۔ دائرہ پر کے کسی نقطہ ق سے خط ا ا پر عمود ق ن ڈالو۔ عمود ق ن پر ایک نقطہ ف ایسا لو جو اس کو ایک مستقل دی ہوئی نسبت سے تقسیم کرے۔ تب نقطۂ ف کا طریق ایک ناقص ہوگا۔

۱۵ر۵- خارج المرکز زاویہ-

تعریف- فرض کرو کہ ناقص پر کوئی نقطہ ف ہے۔ ف کا معیّن ف ن کھینچو اور امدادی دائرہ پر ف کا متناظر نقطہ ق لو۔ ق کو مرکز ج سے ملاؤ۔

تو زاویۂ ن ج^ ق کو ناقص پر کے نقطۂ ف کا "خارج المرکز زاویہ" کہتے ہیں اور اس کو ی سے تعبیر کرتے ہیں۔

نقطۂ ف کے محددوں کو زاویۂ فہ کی رقوم میں حسب ذیل طریقہ پر بیان کر سکتے ہیں :-

ج ن = ج ق جم فہ = ا جم فہ .... (۱)

اور

ن ق = ج ق جب فہ = ا جب فہ

لیکن گذشتہ دفعہ کی رُو سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ن ف} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{ن ق}$$

اس لیے

$$\text{ن ف} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{ا جب فہ} = \text{ب جب فہ} \quad \ldots\ldots (۲)$$

پس نقطۂ ف کے محددوں کو (لا، ما) کی بجائے (ا جم فہ، ب جب فہ) سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

۵٫۵۲ - مثال (۱) - اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ س نقطہ (لا، ما)، مرتب خط ا لا + ب ما + ج = ۰ اور خروج المرکز (ز) ہے۔

فرض کرو کہ ناقص پر کا کوئی نقطہ ن (لاَ، ماَ) ہے۔ تو

$$\text{ن س} = \left\{ (\text{لاَ} - \text{لا}_۱)^۲ + (\text{ماَ} - \text{ما}_۱)^۲ \right\}^{\frac{۱}{۲}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

نقطۂ ن سے مرتب ا لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود ن ک ڈالو تو

$$\text{ن ک} = \frac{\text{ا لاَ} + \text{ب ماَ} + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اب ناقص کی تعریف کے بموجب

$$\text{ن س} = \text{ز} \times \text{ن ک}$$

یعنی

$$\left\{ (\text{لاَ} - \text{لا}_{۱})^{۲} + (\text{ماَ} - \text{ما}_{۱})^{۲} \right\}^{\frac{۱}{۲}} = \text{ز}\ \frac{\text{ا لاَ} + \text{ب ماَ} + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}$$

جذروں کو دور کرنے کے لیے مربع لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{لاَ} - \text{لا}_{۱})^{۲} + (\text{ماَ} - \text{ما}_{۱})^{۲} = \text{ز}^{۲}\ \frac{(\text{ا لاَ} + \text{ب ماَ} + \text{ج})^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}} \quad \text{.....} \quad (۳)$$

مساوات (۳) سے نقطہ (لاَ، ماَ) کا طریق حسب ذیل ہوتا ہے:

$$(\text{لا} - \text{لا}_{۱})^{۲} + (\text{ما} - \text{ما}_{۱})^{۲} = \text{ز}^{۲} \times \frac{(\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج})^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}} \quad \text{----} \quad (۴)$$

جو ناقص کی مطلوبہ مساوات ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات درجۂ دوم کی ہے لیکن متجانس نہیں ہے۔ اس مساوات کو پھیلا کر اور ترتیب دے کر اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\text{لا}^{۲}\left(\frac{\text{ا}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}} - ۱\right) + ۲\,\text{لا ما}\left(\frac{\text{ا ب ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}\right) + \text{ما}^{۲}\left(\frac{\text{ب}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}} - ۱\right)$$

$$+ \text{پہلے درجہ کی رقمیں} + \text{مستقل رقم} = ۰ \quad \text{..} \quad (۵)$$

اب

$$\left(\frac{\text{ا}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}} - ۱\right)\left(\frac{\text{ب}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}} - ۱\right) - \left(\frac{\text{ا ب ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}\right)^{۲}$$

$$= \frac{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}\text{ز}^{۴}}{(\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲})^{۲}} - \frac{\text{ا}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}} - \frac{\text{ب}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}} + ۱ - \frac{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}\text{ز}^{۴}}{(\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲})^{۲}}$$

$$= ۱ - \text{ز}^{۲}$$

$$> ۰$$ (کیونکہ ز ناقص کے لیے اکائی سے کم ہے)

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ناقص کی مساوات (۵) میں

$$(\text{لا}^{۲} \text{ کا سر}) \times (\text{ما}^{۲} \text{ کا سر}) - (۲\,\text{لا ما کا سر})^{۲}$$

مثبت ہے۔ ناقص کی ہر مساوات میں یہ خاصیت ضرور پائی جاتی ہے چنانچہ

معیاری مساوات پر بھی اس کی تصدیق بآسانی ہوسکتی ہے۔ آگے چل کر طالب علم کو معلوم ہوگا کہ اگر کسی دوسرے درجہ کی مساوات میں یہ خاصیت پائی جائے تو وہ مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے۔

مثال (۲) مساوات

$$\text{۱۶ لا}^{2} + \text{۲۵ ما}^{2} - \text{۳۲ لا} - \text{۱۵۰ ما} - \text{۱۱۱} = \text{۰}$$

سے جو ناقص تعبیر ہوتا ہے اس کا مرکز، ماسکے، مرتب، خروج المرکز اور محوروں کے طول معلوم کرو۔

مساوات یا لا کو ہم اس طرح ترتیب دیتے ہیں:

$$(\text{۱۶ لا}^{2} - \text{۳۲ لا}) + (\text{۲۵ ما}^{2} - \text{۱۵۰ ما}) = \text{۱۱۱}$$

یعنی

$$\text{۱۶}(\text{لا}^{2} - \text{۲ لا}) + \text{۲۵}(\text{ما}^{2} - \text{۶ ما}) = \text{۱۱۱}$$

یعنی قوسین کے اندر والے جملوں کو کامل مربع بنانے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{۱۶}(\text{لا}^{2} - \text{۲ لا} + \text{۴}) + \text{۲۵}(\text{ما}^{2} - \text{۶ ما} + \text{۹}) = \text{۱۱۱} + \text{۶۴} + \text{۲۲۵}$$

یعنی

$$\text{۱۶}(\text{لا} - \text{۲})^{2} + \text{۲۵}(\text{ما} - \text{۳})^{2} = \text{۴۰۰}$$

اب طرفین کو ۴۰۰ پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{(\text{لا} - \text{۲})^{2}}{\text{۲۵}} + \frac{(\text{ما} - \text{۳})^{2}}{\text{۱۶}} = \text{۱}$$

مبداء کو نقطۂ (۲، ۳) پر منتقل کرنے سے آخری مساوات تبدیل ہو کر

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{۲۵}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{۱۶}} = \text{۱}$$

حاصل ہوتا ہے جو ناقص کی معیاری مساوات ہے۔ چونکہ نقطۂ (۲، ۳) کو مبداء لینے پر یہ مساوات حاصل ہوتی ہے اس لیے معلوم ہوا کہ ناقص کا مرکز ج یہی نقطہ یعنی (۲، ۳) ہے اور نیز محورِ اعظم $\text{ا} = \text{۵}$ اور محورِ اصغر $\text{ب} = \text{۴}$۔ اب خروج المرکز ز معلوم کرنے کے لیے ہم دفعہ (۵، ۳، ۵) کی

مساوات (۳) میں دیا ہوا رشتہ استعمال کرتے ہیں

$$ز = \frac{۱}{ا}\sqrt{ا^{۲} - ب^{۲}} = \frac{۱}{۵}\sqrt{۲۵ - ۱۶}$$

یعنی

$$ز = \frac{۳}{۵}$$

پھر ہم جانتے ہیں کہ ماسکے س اور سَ محورِ اعظم پر مرکز سے فاصلہ + ا ز اور − ا ز پر واقع ہوتے ہیں۔ اس لیے س کے محدد (۲ + ا ز ، ۳) اور سَ کے محدد (۲ − ا ز ، ۳) ہیں یعنی س کے محدد (۵ ، ۳) اور سَ کے محدد (− ۳ ، ۳) ہیں۔

چونکہ مرتب محورِ اعظم پر علی القوائم ہوتے ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ وہ محورِ ا کے متوازی ہونگے۔ اور نیز اگر مرکز سے مرتبوں پر عمودوں کے پائین و اور وَ ہوں تو ہمیں معلوم ہے کہ

$$ج و = \frac{ا}{ز} = \frac{۲۵}{۳} ، \quad ج وَ = -\frac{۲۵}{۳}$$

اس لیے ایک مرتب $لا = ۲ + \frac{۲۵}{۳} = ۱۰\frac{۱}{۳}$

اور دوسرا مرتب $لا = ۲ - \frac{۲۵}{۳} = -۶\frac{۱}{۳}$

ہے۔

نیم وترِ خاص $ل = \frac{ب^{۲}}{ا} = \frac{۱۶}{۵} = ۳\frac{۱}{۵}$

مثال (۳) ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کسی دو علی القوائم قطروں کے معکوس مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

[دائرہ کی طرح ناقص کے قطر سے مراد بھی وہ وتر ہے جو مرکز میں سے گزرتا ہے]۔

فرض کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ ن کے قطبی محدد ($ر_{۱}$ ، $ط_{۱}$) ہیں یعنی

$$ج ن_{۱} = ر_{۱} ، \quad زاویۂ\ ا ج ن_{۱} = ط_{۱}$$

اگر ن کے کارٹیزی محدد لا_1، یا_1 ہوں تو ہم کو معلوم ہے کہ

$$\text{لا}_1 = \text{ر}_1 \text{ جم } \text{ط}_1 \quad ، \quad \text{یا}_1 = \text{ر}_1 \text{ جب } \text{ط}_1$$

ناقص کی مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ر}_1^2 \text{ جم}^2 \text{ط}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ر}_1^2 \text{ جب}^2 \text{ط}_1}{\text{ب}^2} = 1$$

یعنی

$$\frac{1}{\text{ر}_1^2} = \frac{\text{جم}^2 \text{ط}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2 \text{ط}_1}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اب ناقص پر ایک دوسرا نقطہ ن_2 ایسا لیتے ہیں کہ زاویۂ $\text{ن}_1 \text{ ج } \text{ن}_2$ قائمہ ہو۔

فرض کرو کہ ن_2 کے کارٹیزی محدد (لا_2، یا_2) کے جواب میں قطبی محدد (ر_2، ط_2) حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\text{ج ن}_2 = \text{ر}_2 \quad ، \quad \text{زاویۂ ا ج ن}_2 = \text{ط}_2$$

اس لیے $\text{ط}_2 = \text{زاویۂ ا ج ن}_2 = \text{زاویۂ ا ج ن}_1 + \text{زاویۂ ن}_1 \text{ ج ن}_2$

یعنی

$$\text{ط}_2 = \text{ط}_1 + \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اب مساوات (۱) کی طرح ناقص کی مساوات میں ن_2 کے قطبی محدد بھرتی کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}_2^2} = \frac{\text{جم}^2 \text{ط}_2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2 \text{ط}_2}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۳) میں مساوات (۲) درج کرنے سے ملتا ہے کہ

$$\frac{1}{\text{ر}_2^2} = \frac{\text{جم}^2 (\text{ط}_1 + \frac{\pi}{2})}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2 (\text{ط}_1 + \frac{\pi}{2})}{\text{ب}^2}$$

$$= \frac{\text{جب}^2 \text{ط}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جم}^2 \text{ط}_1}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مساواتوں (۱) اور (۴) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}_1^2}+\frac{1}{\text{ر}_2^2}=\frac{1}{\text{ا}^2}\left(\text{جم}^2\text{ط}_1+\text{جب}^2\text{ط}_1\right)+\frac{1}{\text{ب}^2}\left(\text{جب}^2\text{ط}_1+\text{جم}^2\text{ط}_1\right)$$

$$=\frac{1}{\text{ا}^2}+\frac{1}{\text{ب}^2}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(5)$$

مساوات (۵) میں طرفین کو ۴ پر تقسیم کرنے سے ملتا ہے

$$\frac{1}{(2\text{ر}_1)^2}+\frac{1}{(2\text{ر}_2)^2}=\frac{1}{(2\text{ا})^2}+\frac{1}{(2\text{ب})^2}\quad\cdots\cdots\quad(6)$$

جس سے مطلوبہ مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

مشق ۲۱

(۱) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز مبدا پر محورِ اعظم محور لا کی سمت میں محورِ اصغر محور ما کی سمت میں واقع ہو اور جو نقطوں (۲، ۲) اور (۳، ۱) میں سے گزرے۔

جواب $\text{۳ لا}^2+\text{۵ ما}^2=\text{۳۲}$

(۲) اُس ناقص کی مساوات دریافت کرو جس کا ماسکہ نقطہ (۳، ۲) مرتب خط ۴لا + ۳ما − ۱ = ۰ اور خروج المرکز $\frac{5}{6}$ ہے۔

جواب $\text{۲۰ لا}^2-\text{۲۴ لاما}+\text{۲۷ ما}^2-\text{۲۰۸ لا}-\text{۱۳۸ ما}+\text{۴۶۷}=0$

(۳) اس ناقص کی مساوات دریافت کرو جس کا مرکز مبدا پر، وترِ خاص کا طول ۸ اور خروج المرکز $\frac{3}{5}$ ہے۔

جواب $\text{۱۶ لا}^2+\text{۲۵ ما}^2=\text{۶۲۵}$

(۴) اُس ناقص کی مساوات دریافت کرو جس کے ماسکے نقاط (۴، ۰) اور (−۴، ۰) ہیں اور جس کا خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے۔

جواب $\frac{\text{لا}^2}{144}+\frac{\text{ما}^2}{128}=1$

(۵) مساوات ۹ لا^{۲} + ۵ ما^{۲} − ۳۰ ما = ۰ سے تعبیر ہونے والے ناقص کا وترِ خاص، خروج المرکز اور ماسکوں کے محدد معلوم کرو۔

جواب ل = $\frac{۱۰}{۳}$، ز = $\frac{۲}{۳}$، س (۰، ۱)، سَ (۰، ۵)

(۶) مساوات ۲۵ لا^{۲} + ۱۶۹ ما^{۲} + ۵۰ لا − ۱۳۵۲ ما − ۱۴۹۶ = ۰ سے تعبیر ہونے والے ناقص کے محوروں کا طول، خروج المرکز اور ماسکوں کے محدد معلوم کرو۔

جواب ا = ۱۳، ب = ۵، ز = $\frac{۱۲}{۱۳}$، س (۱۱، ۴)، سَ (−۱۳، ۴)

(۷) ناقص پر کے نقطۂ ف کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہے۔ نقطۂ ف سے خط ق ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو محورِ اعظم سے نقطۂ ل پر اور محورِ اصغر سے نقطۂ م پر ملتا ہے ثابت کرو کہ

ف ل = ب، ف م = ا

[اشارہ: ف سے محورِ اعظم پر عمود ف ن ڈالو اور خارج المرکز زاویۂ فہ کی رقوم میں ف کے محددوں کے لیے جو جملے دفعہ (۱۵۵) میں حاصل کیے گئے ہیں اُن کو استعمال کرو۔]

(۸) ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے ناقصوں کے ماسکوں کے محدد معلوم کرو:

(ا) ۴ لا^{۲} + ۷ ما^{۲} − ۱۲ = ۰؛ (ب) ۱۶ لا^{۲} + ۲۵ ما^{۲} = ۴۰۰

(ج) ۴ لا^{۲} + ۲۵ ما^{۲} − ۱۰۰ = ۰

جواب (ا) ($\frac{۳}{\sqrt{۷}}$، ۰)، (−$\frac{۳}{\sqrt{۷}}$، ۰) (ب) (۳، ۰)، (−۳، ۰)

(ج) ($\sqrt{۲۱}$، ۰)، (−$\sqrt{۲۱}$، ۰)

(۹) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکوں کے محدد (۰، ۰) اور (۳، ۰) ہیں، اور جس کے محورِ اعظم کا طول ۱۲ ہے۔

جواب ۶۰ لا^{۲} + ۶۴ ما^{۲} − ۱۸۰ لا − ۲۰۲۵ = ۰

(۱۰) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکوں کے محدد (−۱، ۲) اور (۳، ۵) ہیں اور جس کے محورِ اعظم کا طول ۷ ہے۔ جواب $\frac{(لا - ۱)^{۲}}{۴۹} + \frac{(ما - \frac{۷}{۲})^{۲}}{۲۴} = ۱$

(۱۱) ناقص $\text{لا}^2 + ۹\,\text{ما}^2 = ۹$ کے وترِ خاص کا طول معلوم کرو۔

جواب $\frac{۲}{۳}$

(۱۲) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا راُس (۰، ۳) اور ماسکہ (۰، ۲) ہے۔

جواب $۹\,\text{لا}^2 + ۵\,\text{ما}^2 = ۴۵$

(۱۳) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المرکز $\frac{۱}{۲}$ اور راُس (۶، ۰) ہے۔

جواب $۲۷\,\text{لا}^2 + ۳۶\,\text{ما}^2 = ۹۷۲$

(۱۴) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا وترِ خاص ۱۰ اور خروج المرکز $\frac{۲}{۳}$ ہے۔

جواب $۴۵\,\text{لا}^2 + ۸۱\,\text{ما}^2 = ۳۶۴۵$

(۱۵) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز (۱، ۲) محورِ اعظم کا طول ۱۰ اور محورِ اصغر کا طول ۶ ہے۔

جواب $\frac{(\text{لا} - ۱)^2}{۱۰۰} + \frac{(\text{ما} - ۲)^2}{۳۶} = ۱$

۶؛۵ - ناقص کے وتر کی مساوات

فرض کرو کہ ناقص پر کوئی دو نقطے ف اور ق ہیں جن کے محدّد بالترتیب $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ ہیں۔ چونکہ یہ دونوں نقطے ناقص پر واقع ہیں اس لیے

$$\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2} = ۱$$

$$\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} = ۱$$

دوسری مساوات کو پہلی میں سے تفریق کرنے بعد حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ا}^2}\left(\text{لا}_2^2 - \text{لا}_1^2\right) = -\frac{1}{\text{ب}^2}\left(\text{ما}_2^2 - \text{ما}_1^2\right)$$

اس لیے

$$\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} = -\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}\,\frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اب ہم کو معلوم ہے کہ کسی دو نقطوں $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ کو ملانے والے خط کی مساوات حسب ذیل ہوتی ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$$

یعنی

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = \frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} \quad \ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) سے $\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$ کی قیمت مساوات (۲) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = -\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}\,\frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1} \quad \ldots\ldots (۳)$$

یا

$$\text{ب}^2(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_2 + \text{لا}_1) + \text{ا}^2(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_2 + \text{ما}_1) = ۰ \quad \ldots (۴)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) میں سے کسی ایک کو ہم ناقص کے وتر ف ق کی مساوات لے سکتے ہیں۔

۶۱ ر ۵۔ ناقص پر کے کسی نقطہ سے ناقص کے مماس کی مساوات۔

وتر ف ق کے لیے گذشتہ دفعہ میں جو مساوات حاصل کی گئی ہے اُس سے ہم حسب معمول فوراً مماس کی مساوات حاصل کرسکتے ہیں۔

وتر ف ق کی مساوات (۴) دفعہ (۶، ۵) صحیح ہے خواہ نقاط ف اور ق ناقص پر کہیں واقع ہوں۔ فرض کرو کہ نقطۂ ف ثابت رہتا ہے اور نقطۂ ق ناقص پر حرکت کرتے ہوئے نقطۂ ف کے قریب آتا ہے۔ انتہا میں جبکہ نقطۂ ق نقطۂ ف پر عین منطبق ہونے کو ہو ہمیں نقطۂ ف پر کا مماس حاصل ہوگا اور ظاہر ہے کہ اس وقت مساوات (۴) دفعہ (۶، ۵) میں

$$\text{لا}_{۲} = \text{لا}_{۱} \quad \text{اور} \quad \text{ما}_{۲} = \text{ما}_{۱}$$

رکھنا چاہیے۔ پس نقطۂ ف پر کے مماس کی مساوات حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:-

$$\text{ب}^{۲}(\text{لا} - \text{لا}_{۱})(۲\,\text{لا}_{۱}) + \text{ا}^{۲}(\text{ما} - \text{ما}_{۱})(۲\,\text{ما}_{۱}) = ۰$$

یا ۲ $\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}$ پر تقسیم کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا}_{۱}(\text{لا} - \text{لا}_{۱})}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}_{۱}(\text{ما} - \text{ما}_{۱})}{\text{ب}^{۲}} = ۰$$

یا مختلف ترتیب دینے سے ملتا ہے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_{۱}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_{۱}}{\text{ب}^{۲}} = \frac{\text{لا}_{۱}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}_{۱}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

لیکن چونکہ نقطۂ ف ناقص پر واقع ہے اس لیے اس کے محدد $(\text{لا}_{۱}، \text{ما}_{۱})$ ناقص کی مساوات کو پورا کرینگے

$$\frac{\text{لا}_{۱}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}_{۱}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۲) کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_{۱}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_{۱}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

یہی ناقص کے مماس کی مطلوبہ مساوات ہے جو معیاری شکل میں ہے۔
ہم دیکھتے ہیں کہ مماس کی مساوات ناقص کی مساوات سے اِسی

قاعدہ کی بناء پر لکھی جا سکتی ہے کہ لا^2 کی بجائے $\text{لا}\,\text{لا}_1$، ما^2 کی بجائے $\text{ما}\,\text{ما}_1$، ۲ لا کی بجائے $\text{لا} + \text{لا}_1$ اور ۲ ما کی بجائے $\text{ما} + \text{ما}_1$ رکھ دیا جائے۔ یہ قاعدہ مماس کی مساوات کو یاد رکھنے کے لیے بہت مفید ہے اور دوسرے درجہ کی ہر مساوات کے لیے صحیح ہے۔

۵٫۶۲ - عماد کی مساوات -

مماس کی مساوات حاصل ہو جانے کے بعد عماد کی مساوات حاصل کرنے میں کوئی دشواری نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم نقطۂ ف پر جس کے محدد (لا_1، ما_1) ہیں عماد کی مساوات دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ نقطۂ ف پر کا عماد محور لا سے زاویۂ طہ اور نقطۂ ف پر کا مماس محور لا سے زاویۂ طہَ بناتا ہے۔ گزشتہ دفعہ میں حاصل کی ہوئی مماس کی مساوات (۳) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\text{ما} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ما}_1}\left(1 - \frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2}\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

خط مستقیم کے بیان سے ہم کو معلوم ہے کہ اگر خط (۱) محور لا سے زاویۂ طہَ بنائے تو

$$\text{مس طہَ} = -\frac{\text{ب}^2\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2\,\text{ما}_1} \quad \ldots\ldots (2)$$

لیکن چونکہ عماد مماس پر علی القوائم ہوتا ہے اس لیے

$$\text{مس طہ} = -\frac{1}{\text{مس طہَ}} = \frac{\text{ا}^2\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2\,\text{لا}_1} \quad \ldots\ldots (3)$$

اب عماد چونکہ نقطۂ (لا_1، ما_1) میں سے گزرتا ہے اس لیے اس کی مساوات فوراً حاصل ہوتی ہے

$$\text{ما} - \text{ما}_1 = \text{مس طہ}\,(\text{لا} - \text{لا}_1) = \frac{\text{ا}^2\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2\,\text{لا}_1}\,(\text{لا} - \text{لا}_1)$$

یعنے

$$ب^2 لا_1 (ما - ما_1) = ا^2 ما_1 (لا - لا_1) \quad ...... (۴)$$

یا

$$\frac{لا - لا_1}{\frac{لا_1}{ا^2}} = \frac{ما - ما_1}{\frac{ما_1}{ب^2}}$$

جو عماد کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال (۱) مساوات $ا لا^2 + ب ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰$ ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے۔ اس پر کے کسی نقطہ ف $(لا_1، ما_1)$ پر کے مماس کی مساوات دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ناقص پر ایک اور نقطہ ق $(لا_2، ما_2)$ ہے۔ تو

$$ا لا_2^2 + ب ما_2^2 + ۲گ لا_2 + ۲ف ما_2 + ج = ۰$$

$$ا لا_1^2 + ب ما_1^2 + ۲گ لا_1 + ۲ف ما_1 + ج = ۰$$

تفریق کرنے سے

$$ا (لا_2^2 - لا_1^2) + ب (ما_2^2 - ما_1^2) + ۲گ (لا_2 - لا_1) + ۲ف (ما_2 - ما_1) = ۰$$

یعنے

$$(لا_2 - لا_1)\{ا (لا_2 + لا_1) + ۲گ\} + (ما_2 - ما_1)\{ب (ما_2 + ما_1) + ۲ف\} = ۰$$

یعنے

$$\frac{لا_2 - لا_1}{ما_2 - ما_1} = - \frac{ب (ما_2 + ما_1) + ۲ف}{ا (لا_2 + لا_1) + ۲گ} \quad ...... (۱)$$

پس وتر ف ق کی مساوات ہوگی

$$\frac{لا - لا_1}{ما - ما_1} = \frac{لا_2 - لا_1}{ما_2 - ما_1} = - \frac{ب (ما_2 + ما_1) + ۲ف}{ا (لا_2 + لا_1) + ۲گ} \quad .... (۲)$$

نقطۂ ف پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے مساوات (۲) میں

$لا_2 = لا_1$ اور $ما_2 = ما_1$ رکھنا چاہیے جس سے حاصل ہوتا ہے

(لا - لا۱) / (ما - ما۱) = - (۲ ب ما۱ + ۲ ف) / (۲ ا لا۱ + ۲ گ) = - (ب ما۱ + ف) / (ا لا۱ + گ)

یعنی (ا لا۱ + گ) (لا - لا۱) + (ب ما۱ + ف) (ما - ما۱) = ۰

یعنی پھیلانے اور منتقل کرنے پر ملتا ہے کہ

ا لا لا۱ + ب ما ما۱ + گ لا + ف ما = ا لا۱² + ب ما۱² + گ لا۱ + ف ما۱ .... (۳)

لیکن چونکہ نقطۂ (لا۱، ما۱) ناقص پر واقع ہے اس لیے

ا لا۱² + ب ما۱² + ۲گ لا۱ + ۲ف ما۱ + ج = ۰

یعنی

ا لا۱² + ب ما۱² + گ لا۱ + ف ما۱ = - (گ لا۱ + ف ما۱ + ج) ... (۴)

مساواتوں (۳) اور (۴) سے ملتا ہے

ا لا لا۱ + ب ما ما۱ + گ لا + ف ما = - (گ لا۱ + ف ما۱ + ج)

یعنی منتقل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

ا لا لا۱ + ب ما ما۱ + گ (لا + لا۱) + ف (ما + ما۱) + ج = ۰

جو نقطۂ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات ہے اور دفعہ (۶۱، ۵) میں بیان کیے ہوئے قاعدہ کے موافق ہے۔

مشق ۲۲

(۱) ثابت کرو کہ ناقص کے کسی قطر پر کے سروں پر کے مماس متوازی ہوتے ہیں۔

(۲) ناقص لا² + ۱۶ ما² = ۱۶ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا سے ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔

جواب ما = √۳ لا + √۱۳ ، ما = √۳ لا - √۱۳

(۳) ثابت کرو کہ ان تمام ناقصوں کے، جن کے محورِ اعظم ایک ہی ہوں، اُن نقطوں پر کے مماس جن کا فصلہ دیا ہوا ہو محور لا کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ اس طرح سے معلوم کرو کہ ایک دائرہ کے مماس کی مدد سے ایک ناقص کا مماس کس طرح کھینچا جا سکتا ہے بشرطیکہ نقطۂ تماس ن دیا ہوا ہو۔

[نصف محورِ اعظم کے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو اور دائرہ پر وہ نقطہ دریافت کرو جس کا فصلہ نقطۂ تماس ن کے فصلہ کے مساوی ہو۔ اس نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچو جو فرض کرو کہ محور لا سے ت پر ملتا ہے۔ ت ن ناقص کا مطلوبہ مماس ہوگا]۔

(۴) ناقص ۹ لا^2 + ۲۵ ما^2 + ۵۴ لا - ۲۰۰ ما - ۸۷۳ = ۰ کے نقطۂ (۶، ۹) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔

جواب مماس ۸۱ لا + ۱۲۵ ما - ۱۶۱۱ = ۰؛ عماد ۱۲۵ لا - ۸۱ ما - ۲۱ = ۰

(۵) ناقص ۹ لا^2 + ۱۶ ما^2 + ۳۶ لا - ۱۲۸ ما + ۱۴۸ = ۰ کے نقطوں (ا) (-۲، ۷)، (ب) (۲، ۴)، (ج) (-۲، ۱) اور (د) (-۶، ۴) پر کے مماسوں اور عمادوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) ما - ۷ = ۰؛ لا + ۲ = ۰۔ (ب) لا - ۲ = ۰؛ ما - ۴ = ۰۔ (ج) ما - ۱ = ۰؛ لا + ۲ = ۰؛ (د) لا + ۶ = ۰؛ ما - ۴ = ۰

(۶) ناقص ۱۶ لا^2 + ۲۵ ما^2 - ۹۶ لا - ۲۰۰ ما + ۱۴۴ = ۰ کے نقطوں (ا) (-۲، ۴) اور (ب) (۳، ۰) پر کے مماسوں اور عمادوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) لا + ۲ = ۰؛ ما - ۴ = ۰؛ (ب) ما = ۰؛ لا - ۳ = ۰

(۷) ناقص ۲ لا^2 + ما^2 - ۱۶ لا - ۴ ما = ۰ کے نقطہ (۸، ۴) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب ۴ لا + ما - ۳۶ = ۰؛ لا - ۴ ما + ۸ = ۰

۵ء۵ - ناقص اور خطِ مستقیم کا تقاطع۔

فرض کرو کہ ناقص کی مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے اور دیا ہوا خطِ مستقیم

$$ما = م\,لا + ج \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

سے تعبیر ہوتا ہے۔ ہم اوپر اکثر بیان کر چکے ہیں کہ کسی دو منحنیوں کے نقاطِ تقاطع کو دریافت کرنے کے لیے دونوں کی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کر کے لا اور ما کی قیمتوں کو حاصل کرنا چاہیے۔ پس (۲) سے ما کی قیمت (۱) میں درج کرنے پر ملتا ہے:

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{(م\,لا + ج)^2}{ب^2} = ۱$$

یعنی پھیلانے اور ترتیب دینے پر

$$ب^2 لا^2 + ا^2 (م\,لا + ج)^2 - ا^2 ب^2 = ۰$$

یعنی

$$لا^2 (ا^2 م^2 + ب^2) + ۲ ا^2 م\,ج\,لا + ا^2 (ج^2 - ب^2) = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$$

لا میں یہ ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے اور اس سے ہم کو عام طور پر لا کی دو قیمتیں $لا_1$ اور $لا_2$ ملتی ہیں جن کو ہم چاہیں تو فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پھر ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں حسبِ ذیل حاصل ہوتی ہیں:

$$ما_1 = م\,لا_1 + ج$$

اور

$$ما_2 = م\,لا_2 + ج$$

اس طرح دو نقاطِ تقاطع $(لا_1، ما_1)$ اور $(لا_2، ما_2)$ مل جاتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خطِ مستقیم ایک ناقص کو دو اور صرف دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

اب جبر و مقابلہ سے ہم کو معلوم ہے کہ مساوات (۳) کی دونوں اصلیں حقیقی ہونگی، یا منطبق ہونگی یا خیالی ہونگی بموجب اس کے کہ جذر

$$(۲\, اُ^۲\, م\, ج)^۲ - ۴\,(ب^۲ + اُ^۲\, م^۲) \times اُ^۲\,(ج^۲ - ب^۲) \quad \ldots\ldots (۵)$$

کی قیمت مثبت ہو یا صفر ہو یا منفی ہو۔ پہلی صورت میں خطِ مستقیم ناقص کا وتر ہوگا، دوسری صورت میں خط ناقص کا مماس ہوگا اور تیسری صورت میں وہ ناقص کے بالکل باہر واقع ہوگا۔

جملہ (۵) کو ۴ پر تقسیم کرنے اور پھیلا کر سادہ شکل میں تحویل کرنے پر

$$ب^۲\,(ب^۲ + اُ^۲\, م^۲) - ب^۲\, ج^۲$$

ملتا ہے اور پھر اس جملہ کو $ب^۲$ پر تقسیم کریں تو

$$ب^۲ + اُ^۲\, م^۲ - ج^۲ \quad \ldots\ldots (۶)$$

حاصل ہوتا ہے۔ تو گویا نقاطِ تقاطع کا حقیقی، منطبق یا خیالی ہونا اس پر منحصر ہے کہ جملہ (۶) کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو یعنے اس پر منحصر ہے کہ

$$ج^۲ \lesseqgtr ب^۲ + اُ^۲\, م^۲ \quad \ldots\ldots (۷)$$

اب اگر م کو مستقل کر دیا جائے یعنے خط ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا جائے تو یہ ناقص کو اُس وقت مس کریگا جبکہ

$$ج^۲ = ب^۲ + اُ^۲\, م^۲ \quad \ldots\ldots (۸)$$

یعنے

$$ج = + \sqrt{ب^۲ + اُ^۲\, م^۲} \;\; یا \;\; - \sqrt{ب^۲ + اُ^۲\, م^۲} \quad \ldots\ldots (۹)$$

اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک دی ہوئی سمت طہ میں کھینچے ہوئے بے شمار متوازی خطوں میں سے صرف دو خط، ناقص کو مس کرتے ہیں جن کی مساواتیں حسبِ ذیل ہیں :-

$$ا = لا\, مس\, طہ + \sqrt{اُ^۲\, مس^۲\, طہ + ب^۲} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اور

$$\text{ما} = \text{لا}\ \text{مس}\ \text{ط} - \sqrt{\text{ا}^2\ \text{مس}^2\ \text{ط} + \text{ب}^2} \quad \ldots\ldots \ (۱۱)$$

جہاں $\text{مس}\ \text{ط} = \text{م}$

اس میں زاویہ ط کی قیمت کے متعلق ہم نے کوئی تخصیص نہیں کی ہے اور خواہ ط کی قیمت کچھ ہی لی جائے خطوط (۱۰) اور (۱۱) ناقص کو ضرور مس کرینگے ۔

۱۷۵ ۔ اوپر کی دفعہ میں ناقص کے مماس کے لیے جو مساوات شکل

$$\text{ما} = \text{م}\ \text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2\ \text{م}^2 + \text{ب}^2}$$

میں ملی ہے اس کو ہم دفعہ (۱۶۱۵) کی مساوات کی مدد سے بھی حاصل کر سکتے ہیں اس میں یہ فائدہ ہے کہ اس سے نقطۂ تماس کے محدد بھی بآسانی مل جاتے ہیں ۔

ہم کو معلوم ہے کہ ناقص پر کے نقطۂ (لاَ ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات حسب ذیل ہے :-

$$\frac{\text{لا}\ \text{لاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\ \text{ماَ}}{\text{ب}^2} = ۱$$

یعنی اس کو دوسری طرح ترتیب دینے سے نقطۂ (لاَ ، ماَ) پر کی مساوات ملتی ہے

$$\text{ما} = -\frac{\text{ب}^2\ \text{لاَ}}{\text{ا}^2\ \text{ماَ}}\ \text{لا} + \frac{\text{ب}^2}{\text{ماَ}} \quad \ldots\ldots \ (۱)$$

فرض کرو کہ

$$-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\ \frac{\text{لاَ}}{\text{ماَ}} = \text{م} \quad \ldots\ldots \ (۲)$$

اب ہمیں مساوات (۱) میں کی مستقل رقم $\frac{\text{ب}^2}{\text{ماَ}}$ کی قیمت م کی رقوم میں معلوم کرنا ہے ۔

مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب}^2}{\text{ماَ}} = -\frac{\text{م}\ \text{ا}^2}{\text{لاَ}}$$

یعنے

$$\frac{\text{ب}^{4}}{\text{ما}'^{2}} = \frac{\text{م}^{2}\,\text{ا}^{4}}{\text{لا}'^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

لیکن چونکہ نقطۂ (لاَ ، ماَ) ناقص پر واقع ہے اس لیے

$$\frac{\text{لا}'^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}'^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$$

یعنے

$$\frac{\text{لا}'^{2}}{\text{ا}^{2}} = 1 - \frac{\text{ما}'^{2}}{\text{ب}^{2}} = \frac{\text{ب}^{2} - \text{ما}'^{2}}{\text{ب}^{2}}$$

پس

$$\frac{1}{\text{لا}'^{2}} = \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}\,(\text{ب}^{2} - \text{ما}'^{2})} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

مساوات (۴) سے $\frac{1}{\text{لا}'^{2}}$ کی قیمت مساوات (۳) میں رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب}^{4}}{\text{ما}'^{2}} = \text{م}^{2}\,\text{ا}^{4} \cdot \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}\,(\text{ب}^{2} - \text{ما}'^{2})} = \frac{\text{ا}^{2}\,\text{م}^{2}\,\text{ب}^{2}}{\text{ب}^{2} - \text{ما}'^{2}}$$

ضرب چلیپائی دینے اور مختلف ترتیب دینے سے ملتا ہے

$$\text{ما}'^{2}\,(\text{ا}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}) = \text{ب}^{4}$$

یعنے

$$\frac{\text{ب}^{4}}{\text{ما}'^{2}} = \text{ا}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}$$

اس لیے

$$\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ما}'} = \pm \sqrt{\text{ا}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

مماس کی مساوات (۱) میں قیمتیں (۲) اور (۵) رکھنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} \pm \sqrt{\text{ا}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}}$$

جو مطلوبہ مساوات ہے ۔ مساوات (۵) سے ملتا ہے

$$\text{ما}' = \pm \frac{\text{ب}^{2}}{\sqrt{\text{ا}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۶})$$

اور پھر مساوات (۲) میں یہ قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لاَ} = -\frac{\text{م}\,\text{ا}^2}{\text{ب}^2}\,\text{ماَ}$$

$$= \mp \frac{\text{م}\,\text{ا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

پس معلوم ہوا کہ مماس $\text{ما} = \text{م لا} + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}$ کا نقطۂ تماس

$$\left(\frac{-\text{م}\,\text{ا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}} ،\ \frac{\text{ب}^2}{\sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}} \right) \ldots\ldots (۸)$$

ہے اور مماس $\text{ما} = \text{م لا} - \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}$ کا نقطۂ تماس

$$\left(\frac{\text{م}\,\text{ا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}} ،\ \frac{-\text{ب}^2}{\sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}} \right) \ldots\ldots (۹)$$

مثال (۱) ثابت کرو کہ خط

$$\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} = \text{ع} \quad \ldots\ldots (۱)$$

ناقص کو مس کرتا ہے اگر $\text{ع}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}$

خطِ مستقیم کی مساوات (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = \frac{\text{ع} - \text{لا جم عہ}}{\text{جب عہ}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

ما کی قیمت (۲) کو ناقص کی مساوات میں درج کرنے پر ملتا ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ع} - \text{لا جم عہ})^2}{\text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}} = ۱$$

یعنی

$$\text{لا}^2\,\text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ} + \text{ا}^2(\text{ع} - \text{لا جم عہ})^2 - \text{ا}^2\text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ} = ۰$$

یعنی

$$\text{لا}^2(\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}) - ۲\,\text{ع}\,\text{ا}^2\,\text{جم عہ لا} + \text{ا}^2(\text{ع}^2 - \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}) = ۰ \quad (۳)$$

خطِ مستقیم (۱) ناقص کا مماس ہوگا اگر مساوات (۳) میں لا کی دونوں قیمتیں مساوی ہوں
یعنی اگر

ا^{2} (ا^{2} جم^{2} عہ + ب^{2} جب^{2} عہ) (ع^{2} - ب^{2} جب^{2} عہ) = ع^{2} ا^{4} جم^{2} عہ

یعنے اگر - ا^{2} ب^{2} جم^{2} عہ جب^{2} عہ + ا^{2} ب^{2} جب^{2} عہ . ع^{2} - ا^{2} ب^{4} جب^{4} عہ = ۰

یعنے اگر ع^{2} = ا^{2} جم^{2} عہ + ب^{2} جب^{2} عہ .... (۴)

مثال (۲) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم

ل لا + م ما = ن .... (۵)

ناقص کو مس کریگا اگر ا^{2} ل^{2} + ب^{2} م^{2} = ن^{2}

مساوات (۱) سے ملتا ہے

ما = (ن - ل لا) / م .... (۶)

مساوات (۶) سے ما کی قیمت کو ناقص کی مساوات میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

لا^{2} / ا^{2} + (ن - ل لا)^{2} / ب^{2} م^{2} = ۱

یعنے پھیلانے اور ترتیب دینے پر

لا^{2} (ا^{2} ل^{2} + ب^{2} م^{2}) - ۲ ا^{2} ن ل لا + ا^{2} (ن^{2} - ب^{2} م^{2}) = ۰ ... (۷)

دیا ہوا خط (۵) ناقص کو مس کریگا اگر

(ا^{2} ل^{2} + ب^{2} م^{2}) × ا^{2} (ن^{2} - ب^{2} م^{2}) = ا^{4} ن^{2} ل^{2}

اس کو پھیلانے اور مختصر کرنے پر مطلوبہ شرط حاصل ہو جاتی ہے۔

مشق ۲۳

(۱) معلوم کرو کہ نقاط (۰٫۹ ، ۹٫۰) اور (۳٫۱ ، ۴٫۰)

ناقص $۲\,\text{لا}^{2} + ۳\,\text{ما}^{2} = ۴$ کے اندر ہیں یا باہر۔

(۲) معلوم کرو کہ ت کی کن قیمتوں کے لیے خطِ مستقیم لا = ۱ + ت، ما = ۲ت پر کے نقطے ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{۹} + \frac{\text{ما}^{2}}{۴} = ۱$ کے اندر واقع ہوں گے۔

جواب: ت = -۱ سے لے کر ت = $\frac{۴}{۵}$ تک۔

(۳) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ۴ لا + ۳ ما = ۱۱ ناقص $۲\,\text{لا}^{2} + ۳\,\text{ما}^{2} = ۱۱$ کا ایک مماس ہے۔ نقطۂ تماس کے محدّد بھی دریافت کرو۔

جواب: (۲، ۱)

(۴) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱$ کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان پر ناقص کے مماسوں کی مشترکہ مساوات حسبِ ذیل ہے:

$$(\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن})^{2} = \left(\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} - ۱\right)\left(\text{ا}^{2}\text{ل}^{2} + \text{ب}^{2}\text{م}^{2} - \text{ن}^{2}\right)$$

(۵) خطوطِ مستقیم (ا) ۴ لا - ۳ ما + ۱۵۰ = ۰، (ب) ۲ لا + ۳ ما + ۶ = ۰، (ج) ۲ لا - ما + ۱۰ = ۰ ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{۹} + \frac{\text{ما}^{2}}{۴} = ۲۵$ کو جن وتروں میں قطع کرتے ہیں ان کے نقاطِ تنصیف کے محدّد معلوم کرو۔

جواب (ا) (-۳۰، ۱۰)، (ب) ($-\frac{۳}{۲}$، -۶)، (ج) ($-\frac{۹}{۲}$، +۱)

(۶) ناقص $۴\,\text{لا}^{2} + ۵\,\text{ما}^{2} = ۲۰$ کے وتر لا + ۲ ما = ۱ کا نقطۂ وسطی دریافت کرو۔

جواب: ($\frac{۵}{۲۱}$، $\frac{۸}{۲۱}$)

(۷) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱$ کو جس وتر پر قطع کرتا ہے اس کے نقطۂ تنصیف کے محدد $\left(-\frac{\text{ا}^{2}\text{ل ن}}{\text{ا}^{2}\text{ل}^{2} + \text{ب}^{2}\text{م}^{2}}،\ -\frac{\text{ب}^{2}\text{م ن}}{\text{ا}^{2}\text{ل}^{2} + \text{ب}^{2}\text{م}^{2}}\right)$ ہیں۔

۸،۵ - وترِ تماس کی مساوات

فرض کرو کہ کوئی نقطہ ن جس کے محدّد (لا′، ما′) ہیں ناقص کے باہر واقع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ بیرونی نقطہ سے ناقص کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ یہ مماس ناقص کو نقاط ف اور ق پر ملتے ہیں جن کے محدودٗ بالترتیب (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) ہیں -

ہم چاہتے ہیں کہ وترِ ف ق کی مساوات دریافت کریں -

نقطۂ ف (لاَ، ماَ) پر کے مماس ف ن کی مساوات ہے

$$\frac{لا\,لاَ}{ا^{2}} + \frac{ما\,ماَ}{ب^{2}} = 1$$

لیکن چونکہ یہ مماس نقطۂ ن (لا۱، ما۱) میں سے بھی گزرتا ہے اس لیے

$$\frac{لا_1\,لاَ}{ا^{2}} + \frac{ما_1\,ماَ}{ب^{2}} = 1 \quad \ldots\ldots (1)$$

اسی طرح نقطۂ ق (لاً، ماً) پر کے مماس ق ن کی مساوات ہے

$$\frac{لا\,لاً}{ا^{2}} + \frac{ما\,ماً}{ب^{2}} = 1$$

اور چونکہ یہ مماس بھی نقطۂ ن (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے اس لیے

$$\frac{لا_1\,لاً}{ا^{2}} + \frac{ما_1\,ماً}{ب^{2}} = 1 \quad \ldots\ldots (2)$$

اب مساوات

$$\frac{لا_1\,لا}{ا^{2}} + \frac{ما_1\,ما}{ب^{2}} = 1 \quad \ldots\ldots (3)$$

پر غور کرو - یہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے جس کو (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) پورا کرتے ہیں - یعنے خطِ مستقیم (۳) نقطوں ف اور ق میں سے گزرتا ہے جو ن کا وترِ تماس ہے -

پس نقطۂ (لا۱، ما۱) کے وترِ تماس کی مطلوبہ مساوات (۳) ہے -

۱۸ء۵ - قطب اور قطبی :- دائرہ کے بیان دفعہ (۷ء۳) میں ہم قطب اور قطبی کی تعریف بتا چکے ہیں - اس کے

مماثل تعریف کو ہم مکافی، ناقص اور زائد کے لیے اختیار کرتے ہیں گویا ناقص کے لیے قطبی کی تعریف حسب ذیل ہوگی:-

اگر ناقص کے اندرونی یا بیرونی کسی نقطہ ن سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا جائے جو ناقص کو نقطوں ف اور ق پر قطع کرے تو ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق" ن کا قطبی بلحاظِ ناقص" کہلاتا ہے۔ نقطۂ ن کو قطب کہتے ہیں"۔

۵،۸۲ - قطبی کی مساوات

— یہ مساوات بھی بعینہٖ اُسی طریقہ سے حاصل کی جاتی ہے جو دائرہ کی شکل میں اختیار کیا گیا تھا۔

فرض کرو کہ ن کے محدّد (لا، ما) ہیں اور فرض کرو کہ ن میں سے گزرتا ہوا کوئی وتر کھینچا گیا ہے جو ناقص کو نقاط ف اور ق پر ملتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ ف اور ق پر کے مماس بیرونی نقطہ س پر قطع کرتے ہیں جس کے محدّد (ھ، ک) ہیں۔ پس خط ف ق وترِ تماس ہے نقطۂ س میں سے کھینچے ہوئے مماسوں کا اور اس لیے ف ق کی مساوات گذشتہ دفعہ کے بموجب

$$\frac{\text{لا ھ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ک}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots (1)$$

ہے۔ لیکن خط ف ق نقطۂ ن (لا، ما) میں سے گزرتا ہے، اس لیے

$$\frac{\text{لا، ھ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما، ک}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots (2)$$

مساوات (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ (ھ، ک) جو ایک متغیر نقطہ ہے ہمیشہ مساوات

$$\frac{\text{لا، لا}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما، ما}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots (3)$$

کو پورا کرتا ہے۔ یعنے نقطۂ س کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات (۳) ہے۔

پس یہی نقطۂ ن کے قطبی کی مطلوبہ مساوات ہے ۔

نوٹ ۔ اگر نقطہ ن (لا، ما) ناقص پر واقع ہو تو مساوات (۳) بالکل وہی ہے جو نقطۂ ن پر کے مماس کی مساوات ہے ۔ اس سے معلوم ہوا کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کا قطبی اس نقطہ پر کا مماس ہی ہوتا ہے ۔

نیز اگر نقطۂ ن ناقص کے باہر واقع ہو تو مساوات (۳) وہی ہے جو نقطۂ ن کے وترِ تماس کی ہے ۔ یعنے معلوم ہوا کہ ایک بیرونی نقطۂ ن کا قطبی اُس نقطہ کا وترِ تماس ہی ہوتا ہے ۔

۳۸۵ ۔ قطب کے محدد ۔ فرض کرو کہ خطِ مستقیم

$$ا لا + ب ما + ج = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

دیا ہوا ہے اور ہم چاہتے ہیں کہ اس کا قطب بلحاظِ ناقص دریافت کریں یعنے وہ نقطہ دریافت کریں جس کا قطبی دیا ہوا خطِ مستقیم (۱) ہے ۔

فرض کرو کہ قطب کے مطلوبہ محدد $(لا_۱، ما_۱)$ ہیں ۔

ہم گذشتہ دفعہ میں دیکھ چکے ہیں کہ نقطۂ $(لا_۱، ما_۱)$ کے قطبی کی مساوات حسبِ ذیل ہے :

$$\frac{لا لا_۱}{و^۲} + \frac{ما ما_۱}{ب^۲} = ۱ \quad \ldots\ldots (۲)$$

مساواتیں (۱) اور (۲) دونوں $(لا_۱، ما_۱)$ کے قطبی یعنے ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں یعنے یہ دونوں مساواتیں زیادہ سے زیادہ صرف ایک مستقل جزوِ ضربی کے لحاظ سے مختلف ہو سکتی ہیں ۔ پس

$$\frac{\frac{لا_۱}{و^۲}}{ا} = \frac{\frac{ما_۱}{ب^۲}}{ب} = -\frac{۱}{ج}$$

$$\text{یعنے}\quad لا_۱ = -\frac{ا و^۲}{ج}،\quad ما_۱ = -\frac{ب ب^۲}{ج} \quad \ldots\ldots (۳)$$

یعنی خطِ مستقیم (۱) کا قطب نقطہٴ $\left(\frac{-\text{ا ا}^2}{\text{ج}}، \frac{-\text{ب ب}^2}{\text{ج}}\right)$ ہے۔

مثال (۱)۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{۹}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{۴}} = \text{۱}$ کے لحاظ سے نقطہٴ (۱، -۲) کا قطبی معلوم کرو۔

نقطہٴ (۱، -۲) میں سے کوئی خط کھینچو جو ناقص کو نقاط ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ف اور ق پر کے مماس ایک دوسرے کو بیرونی نقطہ (لاَ، ماَ) پر قطع کرتے ہیں تو خط ف ق نقطہٴ س کا وترِ تماس ہوگا اور اس لیے اس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{۹}} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{۴}} = \text{۱}$$ ہوگی۔

لیکن چونکہ خط ف ق دیے ہوئے نقطہ (۱، -۲) میں سے گزرتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{لاَ}}{\text{۹}} - \frac{\text{۲ ماَ}}{\text{۴}} = \text{۱}$$

اس لیے (لاَ، ماَ) کا طریق یعنی دیے ہوئے نقطہ (۱، -۲) کا قطبی حسبِ ذیل خط ہوگا۔

$$\frac{\text{لا}}{\text{۹}} - \frac{\text{ما}}{\text{۲}} = \text{۱} \quad \text{یا} \quad \text{۲ لا} - \text{۹ ما} = \text{۱۸}$$

مثال (۲)۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{۳۶}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{۱۶}} = \text{۱}$ کے لحاظ سے خط ۲ لا - ۵ ما + ۸ = ۰ کا قطب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مطلوبہ قطب (لا₁، ما₁) ہے تو دیے ہوئے ناقص کے لحاظ سے (لا₁، ما₁) کے قطبی کی مساوات

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{۳۶}} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{۱۶}} = \text{۱}$$

ہوگی۔ پس یہ مساوات اسی خط کو تعبیر کرنی چاہیے جو ۲ لا - ۵ ما + ۸ = ۰ سے تعبیر ہوتا ہے

لہذا
$$\frac{\text{لا}_۱}{۲\times۳۶} = -\frac{\text{ما}_۱}{۵\times۱۶} = \frac{-۱}{۸}$$

پس $\text{لا}_۱ = -\frac{۷۲}{۸} = -۹$، $\text{ما}_۱ = -\frac{۸۰}{-۸} = +۱۰$

پس قطب کے محدد $(-۹، ۱۰)$ ہیں -

ناقص پر متفرق سوالات

(۱) - ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے ناقصوں کے محور اعظم اور محورِ اصغر کے طول اور مساواتیں، خروج المرکز اور ماسکوں کے محدد معلوم کرو اور ناقصوں کو مرتسم کرو: —

(ا) $۴\text{لا}^۲ + ۹\text{ما}^۲ + ۱۶\text{لا} - ۱۸\text{ما} - ۱۱ = ۰$

جواب (ا) ۳، ۲؛ $\text{ما} - ۱ = ۰$، $\text{لا} + ۲ = ۰$؛ $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$؛ $(-۲ + \sqrt{۵}، ۱)$، $(-۲ - \sqrt{۵}، ۱)$

(ب) $\text{لا}^۲ + ۴\text{ما}^۲ + ۴\text{لا} = ۰$

جواب (ب) ۲، ۱؛ $\text{ما} = ۰$، $\text{لا} + ۲ = ۰$؛ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$؛ $(-۲ + \sqrt{۳}، ۰)$، $(-۲ - \sqrt{۳}، ۰)$

(ج) $۳\text{لا}^۲ + ۲\text{ما}^۲ + ۱۲\text{ما} + ۱۲\text{لا} = ۰$

جواب (ج) $\sqrt{۱۵}$، $\sqrt{۱۰}$؛ $\text{لا} + ۲ = ۰$، $\text{ما} + ۳ = ۰$؛ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$؛ $(-۲، -۳ + \sqrt{۵})$، $(-۲، -۳ - \sqrt{۵})$

(د) $۹\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + ۲\text{ما} = ۱$

جواب (د) $\sqrt{۲}$، $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$؛ $\text{لا} = ۰$، $\text{ما} + ۱ = ۰$؛ $\frac{\sqrt{۸}}{۳}$؛ $(۰، \frac{۱}{۳})$، $(۰، -\frac{۵}{۳})$

(۲) ایک ناقص کا محورِ اعظم محور لا کے متوازی اور مرکز $(-۱، -۲)$ ہے - محوروں کے طول بالترتیب ۸ اور ۴ ہیں - ناقص کی مساوات دریافت کرو اور ناقص کی

ترسیم بناؤ۔

جواب: $\frac{(\text{لا}+1)^2}{64}+\frac{(\text{ما}+2)^2}{16}=1$

(۳) ایک ناقص کے ماسکوں کے محدد (۳، -۱)، (-۵، -۱) ہیں اور محورِ اعظم کا طول ۸ ہے۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

جواب: $\frac{(\text{لا}+1)^2}{64}+\frac{(\text{ما}+1)^2}{48}=1$

(۴) ایک ناقص کے رأس نقطوں (۲، -۲) اور (۲، ۴) پر ہیں اور خروج المرکز $\frac{1}{3}$ ہے۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

جواب: $\frac{(\text{لا}-2)^2}{9}+\frac{(\text{ما}-1)^2}{8}=1$

(۵) ایک ناقص کا مرکز (۲، ۱)، خروج المرکز $\frac{1}{2}$، محورِ اعظم محور ما کے متوازی اور محورِ اعظم کا طول ۶ ہے۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

جواب: $\frac{(\text{لا}-2)^2}{27}+\frac{(\text{ما}-1)^2}{36}=1$

(۶) ایک ناقص کے رأس نقطوں (۰، ۰) اور (-۵، ۰) پر ہیں اور ایک ماسکہ (-۲، ۰) ہے۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

جواب: $\frac{4(\text{لا}+\frac{5}{2})^2}{25}+\frac{\text{ما}^2}{6}=1$

(۷) ایک ناقص کے محورِ اعظم اور محورِ اصغر دیے گئے ہیں۔ پٹری اور پرکار کی مدد سے ناقص کے دونوں ماسکے دریافت کرو۔

(۸) ایک مثلث کے قاعدہ کا طول ۴ اور باقی دو اضلاع کا مجموعہ ۶ ہے۔ مثلث کے رأس کا طریق معلوم کرو۔

جواب: $\frac{\text{لا}^2}{9}+\frac{\text{ما}^2}{5}=1$ (قاعدہ محور لا اور نقطۂ تنصیف مبدا ہے)

(۹) ثابت کرو کہ ناقص کا محورِ اصغر، اس کے محورِ اعظم اور نیم وترِ خاص کے درمیان وسطِ تناسب ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ماسکی وتروں ن س اور ن س' کے درمیانی خارجی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

[فرض کرو کہ ن کے محدد $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ ہیں۔ ن پر کا مماس محور لا سے ت پر ملتا ہے تو ج ت $= \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}_1}$؛

اب $\text{سَ ت} = \text{سَ ج} + \text{ج ت} = \text{ا ز} + \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}}(\text{ا} + \text{ز لا})$ اور

$\text{س ت} = \text{ج ت} - \text{ج س} = \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}} - \text{ا ز} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}}(\text{ا} - \text{ز لا})$

$$\therefore \frac{\text{سَ ت}}{\text{س ت}} = \frac{\text{ا + ز لا}}{\text{ا - ز لا}} = \frac{\text{ن سَ}}{\text{ن س}} \quad]$$

(۱۱) ایک ناقص کا محورِ اصغر ۲۴ ہے، دونوں ماسکے اور مرکز محورِ اعظم کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: $\frac{\text{لا}^2}{768} + \frac{\text{ما}^2}{576} = 1$

(۱۲) دائرہ کو ایک ناقص مان کر جس میں ا = ب ہو ماسکے، مرتب اور خروج المرکز دریافت کرو۔

جواب: ماسکے مرکز پر منطبق ہیں، خروج المرکز صفر ہے اور مرتب لامتناہی پر واقع ہیں۔

(۱۳) ایک ناقص کا مرکز (۱۰، ۲)، ایک مرتب لا = ۲ اور خروج المرکز $\frac{3}{4}$ ہے۔ ناقص کی مساوات حاصل کرو۔

جواب: $\frac{(\text{لا} - 10)^2}{36} + \frac{4(\text{ما} - 2)^2}{63} = 1$

(۱۴) ایک ناقص کا مرکز (۳، ۴) اور محورِ اعظم محور لا کے متوازی ہے۔ ناقص کے دو نقطے (-۲، ۴) اور (۳، ۰) ہیں۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: $\frac{(\text{لا} - 3)^2}{25} + \frac{(\text{ما} - 4)^2}{16} = 1$

(۱۵) ایک ناقص کا مرکز (۴، ۲)، محورِ اعظم محور ما کے متوازی اور محورِ اصغر کا طول ۱۲ ہے۔ ناقص پر کا ایک نقطہ (۸، ۴) ہے۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: $\frac{(\text{لا} - 4)^2}{144} + \frac{2(\text{ما} - 2)^2}{9} = 1$

(۱۶) زمین کا طریق ایک ناقص ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج واقع ہے۔ طریق کے محورِ اعظم کا طول ۱۸۵۸ لاکھ میل اور خروج المرکز $\frac{۱}{۶۰}$ ہے۔ زمین اور سورج کے درمیان بعید ترین اور قریب ترین فاصلوں کا فرق معلوم کرو۔

جواب ۶۱ء۹۴ لاکھ میل تقریباً۔

(۱۷) ناقص کے کسی نقطۂ ن سے محورِ اعظم پر عمود ن م ہے۔ ماسکہ س میں سے کھینچے ہوئے وترِ خاص س ف کے سرے ف پر کا مماس م ن مخرجہ کو ر پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ م ر = ف ن۔

چھٹا باب

قطع زائد

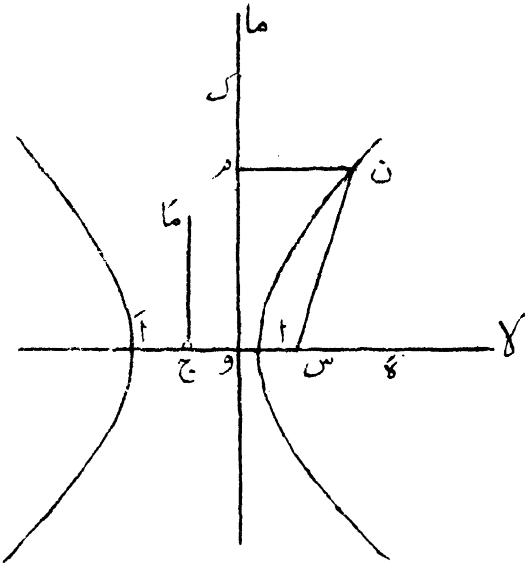
۶،۱ - زائد کی تعریف — ایک ثابت خطِ مستقیم
وک اور ایک ثابت نقطہ س دیے ہوئے ہیں - ایک متغیر نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر ن سے خط وک پر عمود ن م ڈالا جائے تو

س ن = ز × ن م .... (۱)

جہاں ز ایک مستقل عدد ہے جو اکائی سے بڑا ہے۔ متحرک نقطۂ ن کے طریق کو "زائد" کہتے ہیں - ثابت نقطۂ س کو زائد کا "ماسکہ"، ثابت خط وک کو زائد کا مرتب اور عدد ز کو زائد کا "خروج المرکز" کہتے ہیں -

۶،۱۱ - زائد کی مساوات (معیاری شکل)—
فرض کرو کہ ماسکہ س سے مرتب وک پر عمود س و ڈالا گیا ہے اور فاصلہ

س و = د .... (١)



ہم نقطہ و کو مبداء خط و س کو محور لا اور خط و ک کو محور ما لیتے ہیں۔ فرض کرو کہ زائد پر کے کسی نقطہ ن کے محدّد (لا، ما) ہیں - تو چونکہ گذشتہ دفعہ کی رُو سے

ن س = ز × ن م

اس لیے ن س^{2} = ز^{2} × ن م^{2} .... (٢)

یعنی (لا - د)^{2} + ما^{2} = ز^{2} لا^{2}

یعنی پھیلانے اور ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

لا^{2} (ز^{2} - ١) + ٢ لا د - ما^{2} = د^{2}

یعنی (ز^{2} - ١) { لا^{2} + $\frac{\text{٢ لا د}}{\text{ز}^{2} - 1}$ } - ما^{2} = د^{2}

بڑی قوسوں کے اندر کے جملہ کو کامل مربع بنانے پر حاصل ہوتا ہے -

$$(\text{ز}^2 - 1)\left\{\text{لا}^2 + \frac{2\,\text{لا}\,\text{د}}{\text{ز}^2 - 1} + \frac{\text{د}^2}{(\text{ز}^2 - 1)^2}\right\} - \text{ما}^2 = \text{د}^2 + \frac{\text{د}^2}{\text{ز}^2 - 1}$$

یعنی $$(\text{ز}^2 - 1)\left\{\text{لا} + \frac{\text{د}}{\text{ز}^2 - 1}\right\}^2 - \text{ما}^2 = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{\text{ز}^2 - 1}$$

یعنی $(\text{ز}^2 - 1)$ پر تقسیم کرنے کے بعد حاصل ہوتا ہے،

$$\left(\text{لا} + \frac{\text{د}}{\text{ز}^2 - 1}\right)^2 - \frac{\text{ما}^2}{\text{ز}^2 - 1} = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(\text{ز}^2 - 1)^2} \quad \cdots \quad (۳)$$

اب ہم مبداء کو خط وس پر نقطۂ و کے بائیں جانب نقطۂ ج پر منتقل کرتے ہیں جس کا فاصلہ نقطۂ و سے $\frac{\text{د}}{\text{ز}^2 - 1}$ ہے یعنی بالفاظِ دیگر ہم مبداء کو نقطۂ $\left(-\frac{\text{د}}{\text{ز}^2 - 1}،\ 0\right)$ پر منتقل کرتے ہیں۔ نقطۂ ج میں سے نئے محوروں لاَ، ماَ کو ہم پرانے محوروں کے متوازی لیتے ہیں تو محدّدوں کی تبدیلی کے قاعدہ کی رُو سے نئے محدّد پرانے محددوں کی رقوم میں حسبِ ذیل حاصل ہوتے ہیں:

$$\left.\begin{aligned} \text{لاَ} &= \text{لا} + \frac{\text{د}}{\text{ز}^2 - 1} \\ \text{ماَ} &= \text{ما} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (۴)$$

مساوات (۳) میں (۴) کو درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{لاَ}^2 - \frac{\text{ماَ}^2}{\text{ز}^2 - 1} = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(\text{ز}^2 - 1)^2} \quad \cdots\cdots \quad (۵)$$

اب ہم سہولت کی خاطر اس مساوات میں سے زبروں کو نکال دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^2 - \frac{\text{ما}^2}{\text{ز}^2 - 1} = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(\text{ز}^2 - 1)^2} \quad \cdots\cdots (6)$$

لیکن یہ یاد رہنا چاہیے کہ مساوات (۶) میں محدد (لا، ما) نقطۂ ج کو مبدا مان کر لیے گئے ہیں اور مساوات (۳) میں محدد (لا، ما) نقطۂ و کو مبدا مان کر لیے گئے ہیں۔

اب ہم لکھتے ہیں

$$\text{ا} = \frac{\text{د ز}}{\text{ز}^2 - 1} \quad \cdots\cdots (7)$$

تو مساوات (۶) ہو جاتی ہے

$$\text{لا}^2 - \frac{\text{ما}^2}{\text{ز}^2 - 1} = \text{ا}^2$$

اس مساوات کو دونوں طرف ا^2 پر تقسیم کرتے ہیں تو

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2(\text{ز}^2 - 1)} = 1 \quad \cdots\cdots (8)$$

چونکہ زائد کے لیے خروج المرکز کی قیمت ایک سے بڑی ہوتی ہے اس لیے $\text{ا}^2(\text{ز}^2 - 1)$ مثبت ہے۔ پس ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\text{ب}^2 = \text{ا}^2(\text{ز}^2 - 1) \quad \text{یعنے} \quad \text{ب} = \text{ا}\sqrt{\text{ز}^2 - 1} \quad \cdots\cdots (9)$$

اب مساوات (۸) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \cdots\cdots (10)$$

زائد کی اس مساوات (۱۰) کو معیاری مساوات کہتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ نقطۂ ج (جس کو زائد کا "مرکز" کہتے ہیں) کو مبدا، مرتب کے متوازی خط کو محور ما اور ماسکہ سے مرتب پر علی القوائم خط کو محور لا لینے سے یہ معیاری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

ناقص کے بیان میں ہم نے ذکر کیا تھا کہ ناقص کی جو معیاری مساوات اسی طرح کی حاصل ہوتی ہے وہ سادہ ترین مساوات ہے لیکن زائد کے لیے یہ امر صحیح نہیں ہے - آگے چل کر دفعہ ۶٫۶۳ میں ہم زائد کے لیے اس معیاری مساوات سے سادہ تر ایک اور مساوات حاصل کرینگے - بہرحال سوائے ان صورتوں کے جن میں "متقاربوں" کی خاصیت سے بحث ہوتی ہے زائد کے لیے اکثر یہی مساوات (۱۰) استعمال ہوتی ہے -

۶٫۱۲ - زائد کی شکل —— یہ دریافت کرنے کے لیے کہ محور لا زائد کو کہاں قطع کرتا ہے زائد کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (\text{۱})$$

میں ما = ۰ رکھتے ہیں جس سے ملتا ہے

$$\text{لا}^2 = \text{ا}^2 \quad \text{یعنے} \quad \text{لا} = +\text{ا} \quad \text{یا} \quad \text{لا} = -\text{ا}$$

فرض کرو کہ لا = ا کے جواب میں زائد پر نقطہ ا اور لا = − ا کے جواب میں نقطہ اَ ملتے ہیں - جس سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ا اَ} = 2\,\text{ا} \quad \ldots\ldots \quad (\text{۲})$$

نقاط ا اور اَ کو زائد کے "راس" اور خط ا اَ کو زائد کا "قاطع محور" کہتے ہیں کیونکہ یہ خط زائد کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کرتا ہے -

پھر یہ دریافت کرنے کے لیے کہ محور ما زائد کو کہاں قطع کرتا ہے زائد کی مساوات (۱) میں ہم لا = ۰ رکھتے ہیں تو ملتا ہے

$$\text{ما}^2 = -\text{ب}^2 \quad \ldots\ldots \quad (\text{۳})$$

ظاہر ہے کہ مساوات (۳) سے ما کی خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنے محور ما زائد کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا - محور ما کو یعنے مرکز ج میں سے

قاطع محور ا اَ پر علی القوائم خط کو "مزدوج محور" کہتے ہیں ۔
اب ہم زائد کی مساوات (۱) کو ذیل کی شکلوں میں سے کسی ایک شکل میں لکھ سکتے ہیں :

$$\text{ما} = \pm\, \text{ب} \sqrt{\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ل}^{2}} - ۱} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

$$\text{لا} = \pm\, \text{ل} \sqrt{\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} + ۱} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

مساوات (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر $\text{لا}^{2} < \text{ل}^{2}$ یعنے اگر لا کی قیمت + ل اور − ل کے درمیان واقع ہو تو ما کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی یعنے نقاط ا اور اَ کے درمیان منحنی کا کوئی حصّہ واقع نہیں ہوتا ۔
$\text{لا}^{2} > \text{ل}^{2}$ کے لیے یعنے لا کی ان قیمتوں کے لیے جبکہ لا > ل یا لا < − ل ہو مساوات (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ہیں ۔ پس زائد کا منحنی محور لا کے گرد تشاکل ہے ۔ اس کے علاوہ جب لا کی قیمت بڑھتی جاتی ہے تو ما کی قیمت بھی بڑھتی جاتی ہے یہاں تک کہ لا کی بہت بڑی (لا تناہی) قیمت کے لیے ما کی بہت بڑی (لا تناہی) قیمت حاصل ہوتی ہے ۔
مساوات (۵) سے معلوم ہوتا ہے کہ ما کی تمام قیمتوں کے لیے لا کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنے منحنی محور ما کے گرد بھی تشاکل ہے ۔

ان امور کی بناء پر اگر زائد کی ترسیم بنائیں تو دفعہ گذشتہ میں دی ہوئی شکل کا منحنی حاصل ہوتا ہے ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کے دو حصّے ہیں جن میں سے ایک حصّہ پر راس ا واقع ہے اور وہ محور لا کی مثبت سمت میں لا تناہی تک بڑھتا جاتا ہے اور دوسرے حصّہ پر راس اَ واقع ہے اور وہ محور لا کی منفی سمت میں بڑھتا جاتا ہے ۔

۲ ، ٦ ۔ اس دفعہ میں ہم ج س اور ج و کے فاصلوں کو ا اور ز کی رقوم میں بیان کرینگے ۔ دفعہ ۱۱ ، ٦ کی مساواتوں (۱) ، (۴) اور (۷) سے معلوم ہے کہ

$$\text{و س} = \text{د}$$

$$\text{ج و} = \frac{\text{د}}{\text{ز}^{۲} - ۱}$$

$$\text{ج ا} = \text{ا} = \frac{\text{د ز}}{\text{ز}^{۲} - ۱}$$

اس لیے

$$\text{ج س} = \text{ج و} + \text{و س}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{ز}^{۲} - ۱} + \text{د} = \frac{\text{د ز}^{۲}}{\text{ز}^{۲} - ۱}$$

$$= \text{ز} \times \frac{\text{د ز}}{\text{ز}^{۲} - ۱} = \text{ز} \times \text{ج ا} = \text{ا ز}$$

یعنی

$$\text{ج س} = \text{ا ز} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

اسی طرح

$$\text{ج و} = \frac{\text{د}}{\text{ز}^{۲} - ۱}$$

$$= \frac{۱}{\text{ز}} \times \frac{\text{د ز}}{\text{ز}^{۲} - ۱}$$

$$= \frac{۱}{\text{ز}} \times \text{ج ا} = \frac{\text{ا}}{\text{ز}}$$

یعنی

$$\text{ج و} = \frac{\text{ا}}{\text{ز}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

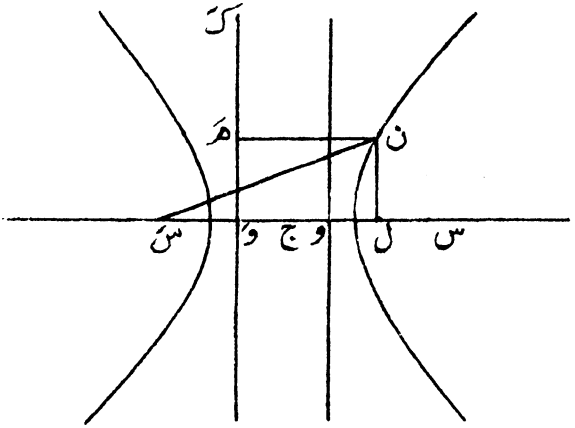
چونکہ زائد کے لیے ز > ۱ اس لیے ہمیں ذیل کے رشتے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{ج س} > \text{ج ا} > \text{ج و} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

یعنی زائد کا مرتب، مرکز اور ماسکہ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

برخلاف اس کے ناقص کے متعلق ہم نے دیکھا ہے کہ ناقص کا ماسکہ مرکز اور مرتب کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۶/۲۱ ۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ ناقص کی طرح زائد کا بھی ایک دوسرا ماسکہ اور دوسرا مرتب دونوں موجود ہیں۔



مرکز ج سے بائیں طرف قاطع محور ممدودہ پر ایک نقطہ سَ اس طرح لو کہ

سَ ج = ج س = ا ز ...... (۱)

اسی طرح قاطع محور پر ج سے بائیں طرف ایک اور نقطہ وَ ایسا لو کہ

وَ ج = ج و = $\frac{ا}{ز}$ .... (۲)

نقطۂ وَ سے خط وَ و پر عمود وَ کَ کھینچو۔

اب ہم ثابت کرینگے نقطۂ سَ زائد کا دوسرا ماسکہ اور خط وَ کَ متناظر مرتب ہے۔

زائد پر کوئی نقطہ ن لو جس کے محدّد (لا، ما) ہیں۔ ن س کو ملاؤ۔ اور ن سے خط وَک پر عمود ن م ڈالو اور نیز ن سے خط و ۆ پر عمود ن ل ڈالو۔ تب

$$\text{م ن} = \text{و ل} = \text{و ج} + \text{ج ل}$$

$$= \frac{\text{ا}}{\text{ز}} + \text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

اور

$$\text{ن س}^2 = \text{س ل}^2 + \text{ل ن}^2$$

$$= (\text{س ج} + \text{ج ل})^2 + \text{ل ن}^2$$

$$= (\text{ا ز} + \text{لا})^2 + \text{ما}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

چونکہ نقطۂ ن کے محدّد زائد کی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$$

یعنی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2(\text{ز}^2-۱)} = ۱$$

یعنی

$$\text{لا}^2(\text{ز}^2-۱) - \text{ما}^2 = \text{ا}^2(\text{ز}^2-۱)$$

اس مساوات کو پھیلانے اور مختلف طور پر ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^2\,\text{ز}^2 + \text{ا}^2 = \text{لا}^2 + \text{ا}^2\,\text{ز}^2 + \text{ما}^2$$

پھر دونوں طرف ۲ ا ز لا جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^2\,\text{ز}^2 + ۲\,\text{ا ز لا} + \text{ا}^2 = \text{لا}^2 + ۲\,\text{ا ز لا} + \text{ا}^2\,\text{ز}^2 + \text{ما}^2$$

یعنی

$$\text{ز}^2\left(\text{لا}^2 + \frac{۲\,\text{ا لا}}{\text{ز}} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ز}^2}\right) = (\text{لا}^2 + ۲\,\text{ا ز لا} + \text{ا}^2\,\text{ز}^2) + \text{ما}^2$$

یعنی

ز^{2} × (لا + ا/ز)^{2} = (لا + ا ز)^{2} + ما^{2} ......(۵)

مساواتوں (۳) اور (۴) کو مساوات (۵) میں درج کرنے پر ملتا ہے

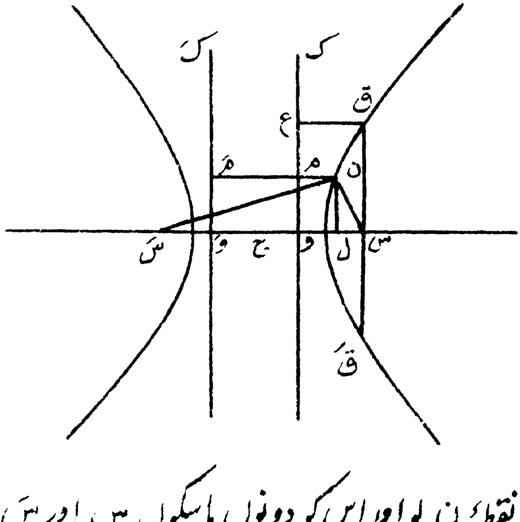
ن سَ^{2} = ز^{2} × ن مَ^{2}

یعنی

ن سَ = ز × ن مَ ....(۶)

مساوات (۶) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطۂ سَ سے اس کا فاصلہ متناسب ہے ایک ثابت خطِ مستقیم وَکَ پر ن سے عمود کے - اور نیز یہ کہ تغیر کا مستقل ز ہے یعنے بڑا ہے ایک سے - پس نقطۂ سَ زائد کا دوسرا ماسکہ اور خط وَکَ متناظر مرتب ہے -

۳ ، ۶ - اب ہم زائد کی وہ خاصیت ثابت کرینگے جو دفعہ ۳۱ ، ۵ میں بیان کی ہوئی ناقص کی خاصیت کے متناظر ہے -



زائد پر کوئی نقطۂ ن لو اور اس کو دونوں ماسکوں س اور سَ سے ملاؤ - ہم ثابت کرینگے کہ خواہ نقطۂ ن کہیں واقع ہو ن سَ اور ن س کا

فرق ہمیشہ مستقل ہوگا اور ۲ ا کے برابر ہوگا یعنے ہم ثابت کرینگے کہ

ن سَ ـــ ن س = ۲ ا . . . . (۱)

نقطہ ن سے مرتب و ک پر عمود ن م اور مرتب وَ کَ پر عمود ن مَ ڈالو تو زائد کی تعریف کے بموجب ہم کو حاصل ہوتا ہے

ن سَ = ز × ن مَ . . . . (۲)

اور

ن س = ز × ن م . . . . (۳)

پس (۳) میں سے (۲) کو تفریق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

ن سَ - ن س = ز (ن مَ - ن م)

= ز × مَ م = ز × وَ و

= ز × ۲ ج و . . . . (۴)

لیکن دفعہ ۲۶۲ کی مساوات (۲) سے ہم کو معلوم ہے کہ

$$ج و = \frac{ا}{ز} \quad . . . . (۵)$$

ج و کی قیمت (۵) کو مساوات (۴) میں درج کرنے پر ملتا ہے

$$ن سَ - ن س = ز \times \frac{۲ ا}{ز} = ۲ ا \quad . . . . . (۶)$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوجاتا ہے۔

اس کے علاوہ ہم دیکھتے ہیں کہ

ن س = ز × ن م = ز × ل و

= ز × (ج ل - ج و)

$$= ز\,(لا - \frac{ا}{ز})$$

= ز لا − ا . . . . (۷)

اور ن سَ = ز × ن مَ = ز × وَ ل

= ز (ج ل + وَ ج)

= ز (لا + ا/ز)

= ز لا + ا . . . . (۸)

مساواتوں (۷) اور (۸) سے ن س اور ن سَ کی قیمتیں مِل جاتی ہیں اور (۸) میں سے (۷) کو تفریق کرنے پر ہمیں مساوات (۶) مِل جاتی ہے۔

۶ر۱۳۔ زائد کا وترِ خاص

زائد کے وترِ خاص کی تعریف بعینہٖ وہی ہے جو ناقص یا مکافی کے لیے ہے۔ ماسکہ س میں سے اگر قاطع محور پر علی القوائم خط کھینچا جائے جو زائد کو دو نقطوں ق اور قَ پر ملے (دیکھو گذشتہ دفعہ کی شکل) تو خطِ مستقیم ق س قَ کو "وترِ خاص" کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نصف وترِ خاص ق س کا طول ل ہے۔ نقطۂ ق سے مرتب و ک پر عمود ق ع ڈالو تو چونکہ نقطۂ ق زائد پر واقع ہے اس لیے تعریف کے بموجب

ق س = ز × ق ع = ز × و س = ز × (ج س − ج و)

یعنی ل = ز (ا ز − ا/ز)

= ا (ز^{2} − ۱) . . . . (۱)

لیکن دفعہ ۱۱ر۶ کی مساوات (۹) کے بموجب

$$ب^2 = ا^2 (ز^2 - ۱)$$

اس لیے

$$ز^2 - ۱ = \frac{ب^2}{ا^2} \quad \ldots\ldots \quad (۲)$$

مساوات (۲) سے ز² - ۱ کی قیمت مساوات (۲) میں درج کرنے پر ملتا ہے

$$ل = ا \times \frac{ب^2}{ا^2} = \frac{ب^2}{ا} \quad \ldots\ldots \quad (۳)$$

یعنے نصف وترِ خاص کی قیمت محوروں کی رقوم میں بعینہٖ اسی شکل کی ہے جو ناقص کے لیے حاصل ہوئی تھی۔

مساوات (۲) سے ہم کو خروج المرکز ز کی قیمت بھی محوروں کی رقوم میں ملتی ہے۔

$$ز^2 = \frac{ب^2}{ا^2} + ۱ = \frac{ا^2 + ب^2}{ا^2}$$

اس لیے

$$ز = \frac{\sqrt{ا^2 + ب^2}}{ا} \quad \ldots\ldots \quad (۴)$$

مشق ۲۴

(۱) دفعہ ۳، ۶ میں بیان کی ہوئی خاصیت کہ ن س - ن سَ = ۲ا کو بالکل تحلیلی طریقہ پر ثابت کرو۔ (مقابلہ کرو دفعہ ۳۱، ۵)

(۲) ثابت کرو کہ اگر نقطہ (لَ، مَ) زائد کے باہر واقع ہو تو $\frac{لَ^2}{ا^2} - \frac{مَ^2}{ب^2} < ۱$ اور اگر نقطہ زائد کے اندر واقع ہو تو $\frac{لَ^2}{ا^2} - \frac{مَ^2}{ب^2} > ۱$۔

(۳) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے قاطع محور کا طول ۴ اور مزدوج محور کا طول ۱۰ ہو: جواب $\frac{لا^2}{۴} - \frac{ما^2}{۱۰۰} = ۱$

(۴) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے مزدوج محور کا طول ۵ اور جس کے دونوں ماسکوں کا درمیانی فاصلہ ۱۳ ہے۔

جواب: $\frac{لا^{۲}}{۱۴۴} - \frac{ما^{۲}}{۲۵} = ۱$

(۵) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جو نقاط (۳، ۰) اور (۰، ۴) میں سے گذرے۔

جواب: $\frac{لا^{۲}}{۹} - \frac{ما^{۲}}{۱۶} = ۱$

(۶) مساوات $۹لا^{۲} - ۱۸لا - ۴ما = ۰$ سے تعبیر ہونے والے زائد کا مرکز اور وترِ خاص معلوم کرو۔

جواب: (۱، ۰)، $\frac{۹}{۲}$

(۷) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے قاطع محور کا طول ۲ل ہے اور جس کا راُس، مرکز اور ماسکہ کے نقطۂ تضیف پر واقع ہے۔

جواب: $۳لا^{۲} - ما^{۲} = ۳ل^{۲}$

(۸) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ س نقطہ (۲، ۱) پر واقع ہے، مرتب خطِ مستقیم $۴لا - ۳ما - ۱ = ۰$ اور خروج المرکز $\frac{۵}{۴}$ ہے۔

فرض کرو کہ زائد پر کے کسی نقطہ ن کے محدّد (لاَ، ماَ) ہیں۔ اور نقطۂ ن سے مرتب پر عمود ن م ڈالا گیا ہے۔ ہم کو معلوم ہے کہ

$$ن م = \frac{۴لاَ - ۳ماَ - ۱}{\sqrt{۴^{۲} + ۳^{۲}}} = \frac{۴لاَ - ۳ماَ - ۱}{۵}$$

چونکہ زائد کی تعریف کے بموجب

$$ن س = ز \times ن لا = \frac{۵}{۴} \times ن م$$

اس لیے $ن س^{۲} = \left(\frac{۵}{۴}\right)^{۲} . ن م^{۲}$

یعنے

$$(لاَ - ۲)^{۲} + (ماَ - ۱)^{۲} = \left(\frac{۵}{۴}\right)^{۲} . \frac{(۴لاَ - ۳ماَ - ۱)^{۲}}{۲۵}$$

پس زائد کی مساوات حاصل ہوتی ہے اگر زبروں کو دور کر دیا جائے

$$(\text{لا} - ۲)^{۲} + (\text{ما} - ۱)^{۲} = \frac{۱}{۱۶}(۴\text{لا} - ۳\text{ما} - ۱)^{۲}$$

یعنی پھیلانے اور ترتیب دینے پر زائد کی مساوات ملتی ہے

$$۷\text{ما}^{۲} + ۲۴\,\text{لاما} - ۵۶\text{لا} - ۳۸\text{ما} + ۷۹ = ۰$$

اس مساوات میں ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(\text{لا}^{۲}\ \text{کا سر}) \times (\text{ما}^{۲}\ \text{کا سر}) - (۲\,\text{لاما کا سر})^{۲} = ۰ \times ۷ - ۱۲^{۲} = -۱۴۴ < ۰$$

یعنی زائد کی مساوات میں $(\text{لا}^{۲}\ \text{کا سر}) \times (\text{ما}^{۲}\ \text{کا سر}) - (۲\,\text{لاما کا سر})^{۲}$ منفی ہوتا ہے۔

عام صورت میں بھی یہ خاصیت بآسانی ثابت کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ماسکہ نقطہ $(\text{لا}_{۱}، \text{ما}_{۱})$ ہے مرتب خط $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ اور خروج المرکز ز ہے۔

اب دفعہ ۵۲، ۵ کی مثال (۱) میں جو عمل ہم نے کیا تھا بعینہ لفظ بہ لفظ وہی عمل یہاں بھی کرنا ہوگا اور زائد کے لیے بھی وہی مساوات (۵) دفعہ ۵۲، ۵ حاصل ہوگی۔ صرف فرق اس قدر ہے کہ زائد کے لیے خروج المرکز ز ایک سے بڑا ہے۔ غرض کہ زائد کی مساوات ہوگی

$$(\text{لا} - \text{لا}_{۱})^{۲} + (\text{ما} - \text{ما}_{۱})^{۲} = \text{ز}^{۲}\,\frac{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج})^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}$$

یعنی پھیلا کر لکھنے اور ترتیب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^{۲}\left(\frac{\text{ا}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}} - ۱\right) + ۲\,\text{لاما}\left(\frac{\text{اب}\,\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}\right) + \text{ما}^{۲}\left(\frac{\text{ب}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}} - ۱\right)$$

$$+ \text{پہلے درجہ کی رقمیں} + \text{مستقل رقم} = ۰$$

یہاں بھی ہم کو اسی طرح حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{لا}^{۲}\ \text{کا سر}) \times (\text{ما}^{۲}\ \text{کا سر}) - (۲\,\text{لاما کا سر})^{۲} = ۱ - \text{ز}^{۲} < ۰$$

کیونکہ ز > ۱ - زائد کی ہر مساوات میں یہ خاصیت ضرور پائی جاتی ہے کہ جملہ { لا۱ کا سر × ما۲ کا سر - (۲ لا ما کا سر)۲ } منفی ہوتا ہے -
آگے چل کر طالب علم کو معلوم ہوگا کہ اگر دوسرے درجہ کی مساوات میں یہ شرط پوری ہو تو وہ مساوات یقیناً زائد کو تعبیر کرتی ہے - اگر دوسرے درجہ کی عام سے عام مساوات دی ہوئی ہو

$$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

اور یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر نہ کرے تو ہمیں حسبِ ذیل نتائج ملتے ہیں :

(۱) ا ب - ھ۲ > ۰ تو مساوات ناقص کو تعبیر کرتی ہے -
(۲) ا ب - ھ۲ < ۰ تو مساوات زائد کو تعبیر کرتی ہے -
(۳) ا ب - ھ۲ = ۰ تو مساوات مکافی کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ اس صورت میں دوسرے درجہ کی رقمیں کامل مربع بناتی ہیں -

۴ ۶۔ چونکہ زائد کی مساوات ناقص کی مساوات سے صرف اس بات میں مختلف ہے کہ زائد کی مساوات میں + ب۲ کی بجائے - ب۲ ہے اس لیے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ زائد کے لیے بہت سے مسائل ناقص کے متعلق متناظر مسائل سے اخذ کیے جا سکتے ہیں بشرطیکہ ب۲ کی علامت بدل دی جائے - ہم یہاں صرف ان مختلف نتیجوں کو بیان کرنے پر اکتفا کرینگے - یہ مساواتیں ناقص کے متعلق متناظر مساواتوں سے صرف ب۲ کی علامت بدل کر لکھ دی گئی ہیں - طالب علم کے لیے یہ اچھی مشق ہوگی اگر وہ ان نتیجوں کو براہِ راست ابتدائی اصول سے اسی طرح تفصیلی عمل کے ساتھ حاصل کرے جیسے کہ ہم نے ناقص کے بیان میں متناظر مسئلوں کو حاصل کیا ہے -

(ا) زائد پر کے کسی دو نقطوں (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کو ملانے والے

وتر کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} \times \frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

(ب) زائد پر کے کسی نقطہ $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(ج) زائد پر کے کسی نقطہ $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ پر کے عماد کی مساوات ہوگی

$$\text{ا}^2\,\text{ما}_1\,(\text{لا} - \text{لا}_1) + \text{ب}^2\,\text{لا}_1\,(\text{ما} - \text{ما}_1) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(د) خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ زائد کو مس کرتا ہے اگر

$$\text{ج} = \pm \sqrt{\text{ا}^2\,\text{م}^2 - \text{ب}^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

(ھ) خطِ مستقیم $\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ھ} + \text{ما}\,\text{جب}\,\text{ھ} = \text{ع}$ زائد کو مس کرتا ہے اگر

$$\text{ع}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{ھ} - \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{ھ} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

(و) کسی بیرونی نقطہ ن $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ کے وترِ تماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

(ز) زائد کے لحاظ سے کسی نقطہ ن $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ کے قطبی کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

(ط) زائد کے لحاظ سے کسی خطِ مستقیم $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ کے قطب کے محدد ہیں

$$\left(\frac{-\text{ا}\,\text{ا}^2}{\text{ج}} ,\ \frac{\text{ب}\,\text{ب}^2}{\text{ج}} \right)$$

(ی) زائد کا امدادی دائرہ وہ دائرہ ہے جس کا مرکز ج اور

نصف قطر ا ہے -

(ل) زائد کا مرتب دائرہ وہ دائرہ ہے جس کا مرکز ج اور نصف قطر $\sqrt{ا^2 - ب^2}$ ہے - یہ دائرہ صرف اُس صورت میں حقیقی اور ممکن ہے جبکہ ا > ب - اگر ا = ب تو صرف ایک نقطہ یعنے مرکز ہی ایسا نقطہ ہے جہاں سے زائد کے دو علی القوائم مماس کھینچے جا سکتے ہیں - اگر ا < ب تو زائد کے کوئی دو علی القوائم مماس نہیں کھینچے جا سکتے -

۶،۵ - متقارب -

تعریف - کسی منحنی کے متقارب سے مراد وہ خطِ مستقیم ہے جو منحنی کو ایسے دو نقطوں پر قطع کرے کہ دونوں نقاطِ تقاطع لا تناہی پر واقع ہوں لیکن خود خطِ مستقیم بالکلیہ لا تناہی پر واقع نہ ہو -

۱ ۵ ر ۶ - اب ہم اس تعریف کے بموجب زائد کے متقاربوں کی مساواتیں دریافت کرینگے اور نیز یہ بھی ثابت کرینگے کہ زائد کے دو اور صرف دو متقارب ہوتے ہیں -

فرض کرو کہ خطِ مستقیم

$$ما = م لا + ج \quad \ldots\ldots (۱)$$

زائد کا متقارب ہے - ظاہر ہے کہ ہر خط زائد کا متقارب نہیں ہو سکتا - اس لیے ہم کو دریافت کرنا چاہیے کہ م اور ج کن شرائط کو پورا کریں کہ خط (۱) متقارب ہو - پہلے ہم خطِ مستقیم (۱) اور زائد

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \quad \ldots\ldots (۲)$$

کے نقاطِ تقاطع معلوم کرتے ہیں - مساوات (۱) سے ما کی قیمت مساوات (۲) میں درج کرو -

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{(م لا + ج)^2}{ب^2} = ۱$$

اِس مساوات کو پھیلانے اور لا کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دینے پر ملتا ہے

$$\text{لا}^{۲}(\text{ب}^{۲} - \text{ل}^{۲}\,\text{م}^{۲}) - ۲\,\text{ل}^{۲}\,\text{م}\,\text{ج}\,\text{لا} - \text{ل}^{۲}(\text{ج}^{۲} + \text{ب}^{۲}) = ۰ \quad \ldots (۳)$$

اگر خطِ مستقیم (۱) زائد کا متقارب ہو تو تعریف کے بموجب دونوں نقاطِ تقاطع لامتناہی پر ہونے چاہئیں یعنے مساوات (۳) کی دونوں اصلیں لامتناہی ہونی چاہئیں۔

جبر و مقابلہ سے ہم کو معلوم ہے کہ مساوات درجۂ دوم کی دونوں اصلیں لامتناہی ہونگی بشرطیکہ $\text{لا}^{۲}$ کا سر اور لا کا سر دونوں صفر ہوں۔ پس حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب}^{۲} - \text{ل}^{۲}\,\text{م}^{۲} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اور

$$\text{ل}^{۲}\,\text{م}\,\text{ج} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

مساوات (۴) سے م کی دو قیمتیں ملتی ہیں

$$\text{م} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

اور چونکہ ل اور م دونوں صفر نہیں ہیں اس لیے مساوات (۵) سے ملتا ہے

$$\text{ج} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

مساواتوں (۶) اور (۷) سے م اور ج کی قیمتوں کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر معلوم ہوتا ہے کہ زائد کے دو متقارب

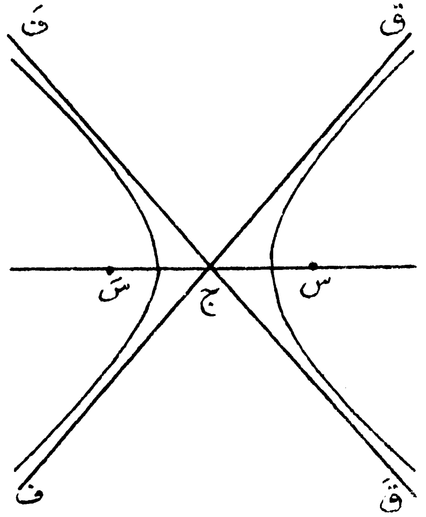
$$\text{ما} = + \frac{\text{ب}}{\text{ل}}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

اور

$$\text{ما} = - \frac{\text{ب}}{\text{ل}}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

ہیں۔ مساواتوں (۸) اور (۹) سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں متقارب مرکز ج میں سے گزرتے ہیں اور محور لا سے زاویے ط اور $(\pi - \text{ط})$

بناتے ہیں جہاں مس ط = $\frac{ب}{ا}$



شکل میں خطوط ق ج ف اور قَ ج فَ متقاربوں کو تعبیر کرتے ہیں۔ اور زاویہ ق ج س = ط = مس$^{-1}$ $\frac{ب}{ا}$ زاویۂ فَ ج س = ۱۸۰° - ط دونوں متقاربوں کی مشترکہ مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۰ \quad ....\quad (۱۰)$$

ہے اور یہ زائد کی مساوات سے صرف بقدر مستقل کے مختلف ہے۔ دونوں متقاربوں کے درمیان زاویہ ۲ ط ہے۔

۶٫۶ - قائم زائد ـــــ اس خاص قسم کے زائد کو جس کے قاطع اور مزدوج محوروں کے طول مساوی ہوں یعنے جس کے لیے

$$ب = ا \quad ....\quad (۱۱)$$

ہو " قائم زائد " کہتے ہیں ۔ پس قائم زائد کی مساوات حسب ذیل ہوتی ہے :

$$\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ل}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

قائم زائد کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ اس کے دونوں متقاربوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہوتا ہے کیونکہ

$$\text{ط} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{ل}} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ل}}{\text{ل}}$$

$$= \text{مس}^{-1}\,۱ = ۴۵^\circ$$

$$\text{یعنی} \quad ۲\,\text{ط} = ۹۰^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

قائم زائد کا خروج المرکز بھی ہم فوراً معلوم کر سکتے ہیں ۔ دفعہ ۳۱، ۶ کی مساوات (۴) سے ہم کو معلوم ہے کہ کسی زائد کے لیے

$$\text{ز} = \frac{\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ب}^2}}{\text{ل}}$$

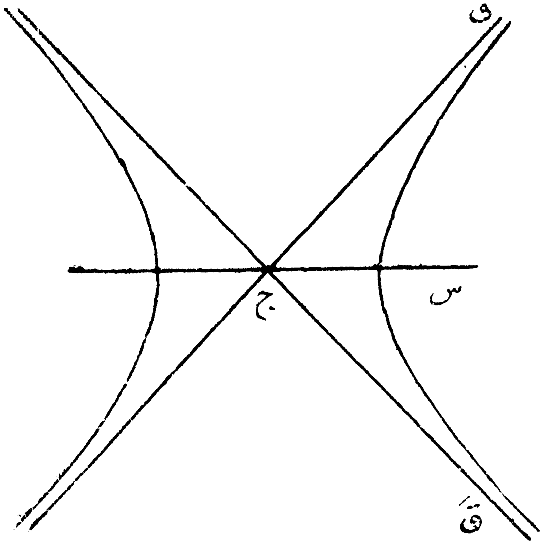
پس قائم زائد کے لیے

$$\text{ز} = \frac{\sqrt{۲\,\text{ل}^2}}{\text{ل}} = \sqrt{۲} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

۶، ۶۱ ۔ قائم زائد کی مساوات متقاربوں کو محور مانکر ۔

دفعہ ۱۱، ۶ میں ہم نے ذکر کیا تھا کہ زائد کی معیاری مساوات سادہ ترین شکل میں نہیں ہے بلکہ اس سے بھی زیادہ سادہ مساوات حاصل کی جا سکتی ہے ۔ پہلے قائم زائد کے لیے ہم یہ سادہ ترین مساوات حاصل کرینگے ۔ اس کے لیے یہ کافی ہے کہ بجائے قاطع محور کو محور لا اور مزدوج محور کو محور ما لینے کے متقاربوں کو محور مان لیں ۔

فرض کرو کہ شکل میں متقارب ج قَ کو ہم محور لاَ اور متقارب ج ق کو



محور ماَ لیتے ہیں۔ یعنے مبداء کو ثابت رکھ کر محوروں کو زاویۂ (– ط) میں سے گھما دیتے ہیں۔ قائم زائد کی پرانی مساوات گذشتہ دفعہ کے بموجب حسبِ ذیل ہے

لا^2 – ما^2 = ا^2 . . . . (۱)

دفعہ ۹۱ (ب) سے ہم کو معلوم ہے کہ اگر محوروں کو زاویۂ ط میں سے گھما دیا جائے تو نئے محددوں (لاَ، ماَ) اور پرانے محددوں (لا، ما) میں حسبِ ذیل رشتہ ہوتا ہے:–

لا = لاَ جم ط – ماَ جب ط

. . . . (۲)

ما = لاَ جب ط + ماَ جم ط

لیکن موجودہ صورت میں ہم نے چونکہ محوروں کو زاویۂ (– ط) میں سے گھمایا ہے اس لیے نئے محددوں اور پرانے محددوں میں رشتے حسبِ ذیل ہونگے:–

لا = لاَ جم (- طہ) - ماَ جب (- طہ) = لاَ جم طہ + ماَ جب طہ
ما = لاَ جب (- طہ) + ماَ جم (- طہ) = - لاَ جب طہ + ماَ جم طہ .... (۳)

نیز چونکہ قائم زائد کے لیے طہ = ۴۵° اس لیے

$$\text{جم طہ} = \text{جب طہ} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad .... \ (۴)$$

مساواتوں (۳) سے لا اور ما کی قیمتوں کو قائم زائد کی مساوات (۱) میں درج کرنے پر ملتا ہے

$$\left(\frac{\text{لاَ}}{\sqrt{۲}} + \frac{\text{ماَ}}{\sqrt{۲}}\right)^۲ - \left(\frac{-\text{لاَ}}{\sqrt{۲}} + \frac{\text{ماَ}}{\sqrt{۲}}\right)^۲ = \text{ا}^۲$$

یعنی

$$\frac{۱}{۲}\left\{(\text{لاَ} + \text{ماَ})^۲ - (\text{ماَ} - \text{لاَ})^۲\right\} = \text{ا}^۲$$

یعنی

$$\frac{۱}{۲} \times ۴ \ \text{لاَ ماَ} = \text{ا}^۲$$

یعنی

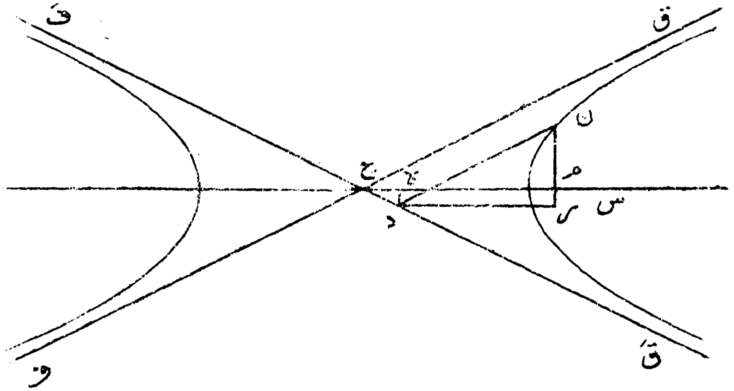
$$\text{لاَ ماَ} = \frac{\text{ا}^۲}{۲} \quad .... \ (۵)$$

سہولت کی خاطر مساوات (۵) میں سے زبروں کو نکال دیں تو قائم زائد کی سادہ ترین مساوات حسب ذیل حاصل ہوتی ہے :-

$$\text{لا ما} = \frac{\text{ا}^۲}{۲} \quad .... \ (۶)$$

یاد رہے کہ یہ مساوات متقاربوں کو محور مان کر حاصل کی گئی ہے۔ اور مساوات (۱) قاطع اور مزدوج محوروں کو محور لا اور ما مان کر حاصل کی گئی تھی۔

۶۲، ۶۳ - زائد کی مساوات متقاربوں کو محور مان کر۔



فرض کرو کہ زائد کی معیاری مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے اور اس پر کوئی نقطہ ن ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں۔ زائد کے دو متقارب قَ ج ف اور قَ ج فَ ہیں۔ ہم محوروں کو تبدیل کرتے ہیں اور ج قَ کو محور لاَ، ج ق کو محور ماَ لیتے ہیں۔

نقطۂ ن سے ق ج کے متوازی خط کھینچو جو قَ ج سے نقطۂ د پر ملے تو ن کے نئے محدد ج د = لاَ اور د ن = ماَ ہونگے۔ نقطۂ د سے ج س پر عمود د ہ ڈالو۔

نیز نقطۂ ن سے ج س پر عمود ن م ڈالو۔ نقطۂ د سے ج س کے متوازی خط کھینچو جو ن م محدودہ سے ر پر ملے۔

فرض کرو کہ زاویۂ ق ج س = طہ تو دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۶) سے معلوم ہے کہ

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ}}$$

یعنے

$$\frac{\text{جب طہ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جم طہ}}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$$

پس $\text{جب طہ} = \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ ، $\text{جم طہ} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ ..... (۲)

اب چونکہ ن د اور د ر بالترتیب ق ج اور ج س کے متوازی ہیں

اس لیے زاویۂ ن د ر = زاویۂ ق ج س = طہ ... (۳)

پس

لا = ج م = ج ہ + ہ م = ج ہ + د ر ..... (۴)

لیکن

ج ہ = ج د جم طہ = لاَ جم طہ

اور

د ر = د ن جم طہ = ماَ جم طہ

پس مساوات (۴) میں یہ قیمتیں رکھنے سے ملتا ہے

ج ہ + د ر = (لاَ + ماَ) جم طہ

یعنی

$\text{لا} = (\text{لاَ} + \text{ماَ}) \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ .... (۵)

اسی طرح

ما = ن م = ن ر - م ر = ن ر - ہ د ..... (۶)

لیکن

ن ر = ن د جب طہ = ماَ جب طہ

ہ د = ج د جب طہ = لاَ جب طہ

پس یہ قیمت مساوات (۶) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

ن ر - ہ د = (ماَ - لاَ) جب طہ

یعنی

$\text{ما} = (\text{ماَ} - \text{لاَ}) \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ .... (۷)

مساواتوں (۵) اور (۷) سے لا اور ما کی قیمتوں کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر ملتا ہے

$$\frac{(\text{لاَ}+\text{مَا})^2}{\text{ا}^2}\cdot\frac{\text{ا}^2}{\text{ا}^2+\text{ب}^2}-\frac{(\text{مَا}-\text{لاَ})^2}{\text{ب}^2}\cdot\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2+\text{ب}^2}=1$$

یعنے

$$(\text{لاَ}+\text{مَا})^2-(\text{مَا}-\text{لاَ})^2=\text{ا}^2+\text{ب}^2$$

یعنے

$$4\,\text{لاَ}\,\text{مَا}=\text{ا}^2+\text{ب}^2$$

یعنے

$$\text{لاَ}\,\text{مَا}=\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2}{4}\qquad\ldots\ldots(8)$$

اس مساوات میں سے سہولت کی خاطر زبروں کو نکال دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}\,\text{ما}=\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2}{4}\qquad\ldots\ldots(9)$$

یہ یاد رہے کہ مساوات (۹) متقاربوں کو حوالہ کے محور لینے پر حاصل ہوتی ہے اور مساوات (۱) قاطع اور مزدوج محوروں کو حوالہ کے محور لینے پر ملتی ہے۔ مساوات (۹) زائد کی سادہ ترین مساوات ہے اور قائم زائد کے لیے جو سادہ ترین مساوات حاصل ہوئی تھی وہ اس مساوات سے ب = ا رکھ کر اخذ کی جاسکتی ہے۔

چونکہ دونوں متقاربوں کا درمیانی زاویہ لازماً قائمہ نہیں ہے اس لیے یہ مساوات "مائل محوروں" کے لحاظ سے ہے۔ سوائے اُن مسائل کے جن میں متقاربوں سے بحث ہوتی ہے طالب کو اس مساوات کا زیادہ استعمال نہیں کرنا چاہیے بلکہ وہی معیاری مساوات استعمال کرنی چاہیئے۔

مثال - زائد $36\,\text{لاَ}^2-25\,\text{ما}^2+216\,\text{لا}+100\,\text{ما}-676=0$ کو معیاری شکل میں تحویل کرو اور اس کے مرکز، راسوں، راسوں کے محددِ قاطع محور اور مزدوج محوروں کے طول، مرتبوں اور متقاربوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

حل - لا اور ما میں مربعوں کو پورا کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

۳۶ (لا² + ۶ لا + ۹) − ۲۵ (ما² − ۴ ما + ۴) = ۶۷۶ + ۳۲۴ − ۱۰۰

یعنے

۳۶ (لا + ۳)² − ۲۵ (ما − ۲)² = ۹۰۰

یعنے

(لا + ۳)² / ۲۵ − (ما − ۲)² / ۳۶ = ۱ .... (۱)

مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اگر مبداء کو نقطہ (− ۳، ۲) پر تبدیل کیا جائے تو مساوات ہوجاتی ہے

لا² / ۲۵ − ما² / ۳۶ = ۱ .... (۲)

پس معلوم ہوا کہ مرکز کے محدد (− ۳، ۲) ہیں۔ اور نصف قاطع محور ا = ۵،
نصف مزدوج محور ب = ۶

اس لیے خروج المرکز ز = √(ا² + ب²) / ا = √(۲۵ + ۳۶) / ۵ = √۶۱ / ۵

مرکز سے ماسکوں کا فاصلہ = ا ز = √۶۱

پس ماسکوں کے محدّد س (− ۳ + √۶۱، ۲)؛ سَ (− ۳ − √۶۱، ۲)

راُس ع کے محدّد (− ۳ + ۵، ۲) یعنے (۲، ۲)

راُس عَ کے محدّد (− ۳ − ۵، ۲) یعنے (− ۸، ۲)

مرکز سے مرتب کا فاصلہ = ا / ز = ۲۵ / √۶۱

پس ایک مرتب کی مساوات = لا = − ۳ + ۲۵ / √۶۱

اور دوسرے مرتب کی مساوات لا = − ۳ − ۲۵ / √۶۱

ایک متقارب کا میلان قاطع محور سے طہ ہو تو مس طہ = + ب / ا = ۶ / ۵

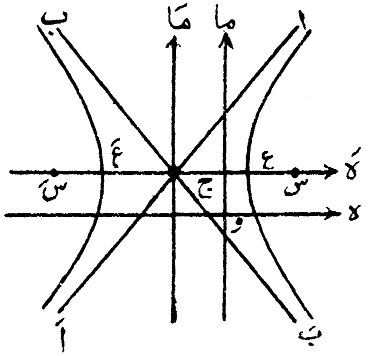
یہ متقارب مرکز یعنے نقطہ (− ۳، ۲) میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے ایک متقارب کی مساوات ما − ۲ = ۶/۵ (لا + ۳) یعنے ۶ لا − ۵ ما + ۲۸ = ۰

دوسرے متقارب کا میلان قاطع محور سے طہَ ہو تو مس طہَ = − ب / ا = − ۶ / ۵

اس لیے دوسرے متقارب کی مساوات $ما - ۲ = - \frac{۶}{۵}(لا + ۳)$ یعنے $۶ لا + ۵ ما + ۸ = ۰$

ذیل کی شکل میں اس زائد کی ترسیم دی گئی ہے:-



زائد پر متفرق مشقیں

(۱) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکے (۵، ۰)، (-۵، ۰) ہیں اور جس کا نصف قاطع محور ۳ ہے۔

جواب $\frac{لا^۲}{۹} - \frac{ما^۲}{۱۶} = ۱$

(۲) ایک زائد کے قاطع محور اور مزدوج محور کے طول دیے گئے ہیں۔ پٹری اور پرکار کی مدد سے ماسکوں کا مقام دریافت کرو۔

(۳) ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے زائدوں کے ماسکوں کے محدد اور مرتبوں کی مساوات اور نیز خروج المرکز معلوم کرو:-

(ا) $\frac{لا^۲}{۹} - \frac{ما^۲}{۴} = ۱$ (ب) $\frac{لا^۲}{۱۶} - \frac{ما^۲}{۹} = ۱$

جواب (و) $(\sqrt{۱۳}،\ ۰)،\ (-\sqrt{۱۳}،\ ۰)،\ لا \pm \frac{۹}{\sqrt{۱۳}} = ۰،\ \frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$

(ب) $(۵،\ ۰)،\ (-۵،\ ۰)،\ لا \pm \frac{۱۶}{۵} = ۰،\ \frac{۵}{۴}$

(۴) ذیل کی مساواتوں کو معیاری شکل میں تحویل کرو اور ان سے تعبیر ہونے والے زائدوں کے مرکز کے محدد، ماسکوں کے محدد، مرتبوں کی مساواتیں، متقاربوں کی مساواتیں اور خروج المرکز معلوم کرو۔

(و) $۹لا^۲ - ۱۶ما^۲ - ۱۸لا + ۶۴ما - ۱۹۹ = ۰$

(ب) $۴لا^۲ - ما^۲ + ۸لا - ۲ما - ۱ = ۰$

(ج) $۲لا^۲ - ۳ما^۲ - ۵ = ۰$

(د) $۸لا^۲ - ۹ما^۲ - ۱۶لا + ۵۴ما - ۱ = ۰$

جواب (و) معیاری شکل $\frac{(لا-۱)^۲}{۱۶} - \frac{(ما-۲)^۲}{۹} = ۱$ مرکز $(۱،\ ۲)$ $ز = \frac{۵}{۴}$،
ماسکے $(۶،\ ۲)،\ (-۴،\ ۲)$

مرتب $لا - \frac{۲۱}{۵} = ۰،\ لا + \frac{۱۱}{۵} = ۰$ اور متقارب $۹(لا-۱)^۲ - ۱۶(ما-۲)^۲ = ۰$

(ب) معیاری شکل $\frac{(لا+۱)^۲}{۱} - \frac{(ما+۱)^۲}{۴} = ۱$ مرکز $(-۱،\ -۱)$ $ز = \sqrt{۵}$،
ماسکے $(-۱ + \sqrt{۵}،\ -۱)\ (-۱ - \sqrt{۵}،\ -۱)$

مرتب $لا + ۱ - \frac{۱}{\sqrt{۵}} = ۰$ اور $لا + ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۵}} = ۰$

متقارب $۴(لا+۱)^۲ - (ما+۱)^۲ = ۰$

(ج) معیاری شکل $\frac{لا^۲}{\frac{۵}{۲}} - \frac{ما^۲}{\frac{۵}{۳}} = ۱$ مرکز کے محدد $(۰،\ ۰)$ $ز = \sqrt{\frac{۵}{۳}}$،
ماسکے $(\frac{۵\sqrt{۶}}{۶}،\ ۰)،\ (\frac{-۵\sqrt{۶}}{۶}،\ ۰)$

مرتب $لا + \sqrt{\frac{۳}{۲}} = ۰$ اور $لا - \sqrt{\frac{۳}{۲}} = ۰$ اور متقارب $۲لا^۲ - ۳ما^۲ = ۰$

(د) $\frac{(ما-۳)^۲}{۸} - \frac{(لا-۱)^۲}{۹} = ۱$ مرکز کے محدد $(۱،\ ۳)$، $ز = \sqrt{\frac{۱۷}{۸}}$

ماسکے $(۱،\ ۳ + \sqrt{۱۷})،\ (۱،\ ۳ - \sqrt{۱۷})$

مرتب $ما = ۳ - \frac{۸}{\sqrt{۱۷}}$ اور $ما = ۳ + \frac{۸}{\sqrt{۱۷}}$

اور متقارب $۹(ما-۳)^۲ - ۸(لا-۱)^۲ = ۰$

(۵) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکے (۳، ۴)، (-۳، ۴) ہیں اور قاطع محور ۴ ہے۔

جواب لا²/۴ - (ما - ۴)²/۵ = ۱ یعنی ۵ لا² - ۴ ما² + ۳۲ ما - ۸۴ = ۰

(۶) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا قاطع محور خط ما = ۲ پر ہے، مزدوج محور کا طول ۶ ہے، خروج المرکز ۵/۴ ہے اور مرکز محور ما پر واقع ہے۔

جواب لا²/۱۶ - (ما - ۲)²/۹ = ۱ یعنی ۹ لا² - ۱۶ ما² + ۶۴ ما - ۲۰۸ = ۰

(۷) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکے (۲، ۱)، (-۴، ۱) ہیں اور مزدوج محور کا طول ۲ ہے۔

جواب (لا + ۱)²/۸ - (ما - ۱)²/۱ = ۱ یعنی لا² + ۲ لا - ۸ ما² + ۱۶ ما - ۱۵ = ۰

(۸) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے مرتبوں کی مساواتیں لا = ۸/۵ اور لا = - ۸/۵ ہیں اور قاطع محور کا طول ۴ ہے۔ مرکز محور لا پر ہے۔

جواب لا²/۴ - ما²/(۹/۴) = ۱ یعنی ۹ لا² - ۱۶ ما² - ۳۶ = ۰

(۹) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا قاطع محور، محور لا ہے، مرکز مبداء پر ہے اور جو نقطوں (۶، ۴) اور (-۳، ۱) میں سے گزرتا ہے۔

جواب ۵ لا²/۳۶ - ما²/۴ = ۱

(۱۰) ایک متغیر نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں (۶، ۰) اور (-۶، ۰) سے اس کے فاصلوں کا فرق ۸ ہے۔ متغیر نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

جواب لا²/۱۶ - ما²/۲۰ = ۱

(۱۱) ایک زائد کا قاطع محور محور لا پر ہے، مرکز مبداء پر ہے اور خروج المرکز

۲ ہے اور زائد نقطہ (۳، ۲) میں سے گزرتا ہے ۔ زائد کی مساوات دریافت کرو ۔

جواب $\frac{۳\,\text{لا}^{۲}}{۲۳} - \frac{\text{ما}^{۲}}{۲۳} = ۱$

(۱۲) متقاربوں کو محور مان کر قائم زائد $\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = ۱۶$ کو تحویل کرو ۔

جواب $\text{لا ما} = ۸$

(۱۳) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز مبداء پر ہے، قاطع محور کا طول ۲۴ اور ماسکوں کا درمیانی فاصلہ ۳۲ ہے ۔

جواب $\frac{\text{لا}^{۲}}{۱۴۴} - \frac{\text{ما}^{۲}}{۱۱۲} = ۱$

(۱۴) ایک زائد کا مرکز مبداء پر اور قاطع محور کا طول ۲۴ اور مزدوج محور کا طول ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کا نصف ہے ۔ زائد کی مساوات دریافت کرو ۔

جواب $\frac{\text{لا}^{۲}}{۱۴۴} - \frac{۳\,\text{ما}^{۲}}{۱۴۴} = ۱$

(۱۵) ذیل کے زائدوں کے متقارب معلوم کرو اور منحنیوں کی ترسیم بھی کرو:-

(ا) $\frac{\text{لا}^{۲}}{۱۸} - \frac{\text{ما}^{۲}}{۱۲} = ۱$ (ب) $\frac{\text{ما}^{۲}}{۲۵} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۱۶} = ۱$

(ج) $۹\,\text{لا}^{۲} - ۱۸\,\text{ما}^{۲} = ۱۶$ (د) $\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = ۱۲$

(ھ) $۹\,\text{لا}^{۲} - ۱۸\,\text{ما}^{۲} = -۱۶$ (و) $\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} + ۱۲ = ۰$

جواب (ا) $\text{لا} = \pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}\,\text{ما}$ (ب) $\text{ما} = \pm\frac{۵}{۴}\,\text{لا}$ (ج) $\text{لا} = \pm\sqrt{۲}\,\text{ما}$

(د) $\text{لا} \pm \text{ما} = ۰$ (ھ) $\text{لا} = \pm\sqrt{۲}\,\text{ما}$ (و) $\text{لا} = \pm\,\text{ما}$

(۱۶) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے راس نقطوں (۴، ۰) اور (−۴، ۰) پر ہیں اور جس کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے ۔

جواب $\frac{\text{لا}^{۲}}{۱۶} - \frac{۳\,\text{ما}^{۲}}{۱۶} = ۱$

(۱۷) ثابت کرو کہ کسی زائد کے ایک ماسکہ سے متقارب تک کا فاصلہ نصف مزدوج محور کے مساوی ہے۔

(۱۸) ایک زائد کے ماسکہ سے متقارب پر عمود ڈالا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس عمود کے پائیں سے مرکز تک کا فاصلہ نصف قاطع محور کے مساوی ہے۔

(۱۹) اگر خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ب زائد $\frac{\text{لا}^2}{۹}$ − $\frac{\text{ما}^2}{۴}$ = ۱ کا مماس ہو تو ب کی قیمت معلوم کرو۔

جواب　ب = ۴ $\sqrt{۲}$

(۲۰) اگر خطِ مستقیم ما = م لا + ۲ زائد $\frac{\text{لا}^2}{۱۶}$ − $\frac{\text{ما}^2}{۹}$ = ۱ کا مماس ہو تو م کی قیمت معلوم کرو۔

جواب　م = ± $\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$

(۲۱) ایک زائد کا مرکز نقطۂ (−۲، ۷) پر ہے اور ایک مرتب خط ما = ۵ اور خروج المرکز $\frac{۵}{۴}$ ہے۔ زائد کی مساوات معلوم کرو۔

جواب　$\frac{(\text{لا} + ۲)^2}{(\frac{۵}{۲})^2}$ − $\frac{(\text{ما} - ۷)^2}{(\frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۴})^2}$ = ۱

(۲۲) ذیل کی مساواتوں کو معیاری شکل میں تحویل کرو اور ان سے تعبیر ہونے والے زائدوں کے مرکز کے محدد، راسوں اور ماسکوں کے محدد، مرتبوں کی مساواتیں اور متقاربوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

(ا) ۹ لا^2 − ۱۶ ما^2 − ۱۰۸ لا + ۹۶ ما + ۳۶ = ۰

(ب) ۱۶ ما^2 − لا^2 − ۶ لا − ۸۰ ما + ۷۵ = ۰

(ج) ۸ لا^2 − ۲۸ ما^2 − ۸ لا − ۲۸ ما − ۹۱ = ۰

(د) ۳ ما^2 − ۴ لا^2 − ۱۶ لا − ۲۴ ما − ۵۲ = ۰

(ھ) ۹ لا^2 − ۲۵ ما^2 + ۵۴ لا + ۱۰۰ ما + ۲۰۶ = ۰

جواب (ا) $\frac{(\text{لا} - ۶)^2}{۱۶}$ − $\frac{(\text{ما} - ۳)^2}{۹}$ = ۱　مرکز کے محدد (۶، ۳)

راس کے محدد ($\frac{۴۶}{۵}$، ۳) ($\frac{۱۴}{۵}$، ۳)

ماسکے (۱۱، ۳) (۱، ۳)،

متقارب ۹ (لا − ۶)^{۲} − ۱۶ (ما − ۳)^{۲} = ۰

مرتبوں کی مساواتیں لا = ۴۶/۵ اور لا = ۱۴/۵

اور ز = √۴۱ / ۴

(ب) (ما − ۵/۲)^{۲}/۱ − (لا + ۳)^{۲}/۱۶ = ۱، مرکز کے محدّد (−۳، ۵/۲) راس کے محدّد (−۳، ۵/۲ + ۱/√۱۷)

(−۳، ۵/۲ − ۱/√۱۷)

ماسکے [−۳، (۵/۲ + √۱۷)]، [−۳، (۵/۲ − √۱۷)]

مرتبوں کی مساواتیں ما = ۵/۲ + ۱/√۱۷

اور ما = ۵/۲ − ۱/√۱۷، ز = √۱۷

متقارب ۱۶ (ما − ۵/۲)^{۲} − (لا + ۳)^{۲} = ۰

(ج) (لا − ۱/۲)^{۲}/۷ − (ما + ۱/۲)^{۲}/۲ = ۱، مرکز کے محدّد (۱/۲، −۱/۲) ز = √(۹/۷) = ۳/√۷

ماسکے (۱/۲ + ۳، −۱/۲) (۱/۲ − ۳، −۱/۲)

راس (۱۷/۹، −۱/۲)، (−۱۱/۶، −۱/۲)

متقارب ۲ (لا − ۱/۲)^{۲} − ۷ (ما + ۱/۲)^{۲} = ۰

(د) (ما − ۴)^{۲}/۲۸ − (لا + ۲)^{۲}/۲۱ = ۱، مرکز (−۲، ۴) ماسکے (−۲، ۱۱) اور (−۲، −۳)

راس (−۲، ۸)، (−۲، ۰)

مرتب کی مساواتیں ما = ۸، ما = ۰

متقارب ۲۱ (ما − ۴)^{۲} − ۲۸ (لا + ۲)^{۲} = ۰

(ھ) (ما − ۲)^{۲}/۹ − (لا + ۳)^{۲}/۲۵ = ۱، مرکز (−۳، ۲) ماسکے (−۳، ۲ + √۳۴)

(−۳، ۲ − √۳۴)،

راس (−۳، ۲ + ۹/√۳۴) (−۳، ۲ − ۹/√۳۴)

مرتب ما = ۲ + ۹/√۳۴ اور ما = ۲ − ۹/√۳۴

متقارب ۲۵ (ما − ۲)^{۲} − ۹ (لا + ۳)^{۲} = ۰

(۳۲) ایک زائد کے محور حوالہ کے محوروں کے متوازی ہیں اور وہ نقطوں (۳، ۴) (−۷، ۴)، (۸، ۴ + ۴√۳) اور (−۱۲، ۴ − ۴√۳) میں سے گزرتا ہے۔

زائد کی مساوات دریافت کرو۔

جواب $\frac{(لا + ۲)^2}{۲۵} - \frac{(ما - ۴)^2}{۱۶} = ۱$

(۲۴) ذیل کی مساواتوں میں محوروں کو دیے ہوئے زاویہ فہ میں سے گھماؤ اور اس طرح تصدیق کرو کہ یہ مساواتیں زائدوں کو تعبیر کرتی ہیں۔ ان زائدوں کے محوروں کا طول، مرکز اور ماسکوں کے محدد اور متقاربوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

(ا) $لا^2 - ۴ لا ما + ما^2 + ۹ = ۰$، فہ = °۴۵

(ب) $لا^2 - ۴ لا ما + ما^2 + ۴ \sqrt{۲} + ۴ - ۲\sqrt{۲} لا - ۲\sqrt{۲} ما + ۱۱ = ۰$، مس فہ = ۱

(ج) $لا^2 + ۲ لا ما - ما^2 + ۸ لا + ۴ ما - ۸ = ۰$، فہ = $۲۲ \frac{۱}{۲}$°۔

(جب فہ = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$، جم فہ = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}$)

(۲۵) زائد $۹ لا^2 - ۱۶ ما^2 + ۴۵ لا + ۱۲۸ ما + ۱۶۰۱ = ۰$ کے نقطہ (۹، ۴ + ۸ $\sqrt{۳}$) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب مماس کی مساوات $۲۷ لا - ۳۲\sqrt{۳} ما + ۵۲۵ + ۱۲۸\sqrt{۳} = ۰$

عماد کی مساوات $۲۷ ما + ۳۲\sqrt{۳} لا = ۱۰۸ + ۵۰۴\sqrt{۳}$

(۲۶) زائد $۱۶ لا^2 - ۲۵ ما^2 + ۶۴ لا + ۲۰۰ ما - ۷۳۶ = ۰$ کے نقطوں (۳، ۴) اور (-۷، ۴) پر کے مماسوں اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

جواب (ا) مماس کی مساوات لا - ۳ = ۰ اور عماد کی مساوات ما - ۴ = ۰

(ب) مماس کی مساوات لا + ۷ = ۰ اور ما = ۴ عماد کی مساوات

(۲۷) زائد $۵ لا^2 - ۹ ما^2 = ۳۶$ کے نقطوں (۶، ۴) اور (-۳، ۱) پر کے مماسوں اور عمادوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) مماس کی مساوات ۵ لا - ۶ ما = ۶

اور عماد کی مساوات ۵ ما + ۶ لا = ۵۶

(ب) مماس کی مساوات ۵ لا + ۳ ما + ۱۲ = ۰

عماد کی مساوات ۵ ما - ۳ لا = ۱۴

(۲۸) زائد لا^{۲} - ۳ ما^{۲} + ۳ = ۰ کے نقطہ (۳، ۲) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب لا - ۲ ما + ۱ = ۰ مماس کی مساوات

ما + ۲ لا = ۸ عماد کی مساوات

اغلاط نامہ

محدّدوں کا ہندسہ

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱	۷	نقطوں کے لیے	نقطوں پر پہنچنے کے لیے	۱۱۳	۷	دریافت	دریافت
۲	۱۴	ج (۲، ۳)	ج (۲، ۳)،	۱۲۰	۱۳	ا^{۲}	ما^{۲}
۳	۱۰	خط	خط،	۱۲۴	۵	+۴۰ = ۰	+۴ = ۰
۶	۸	محدّدتین ابعاد	محدّدتین ابعاد میں	۱۵۳	۸	متغیر نفط	متغیر نقطہ
۳۲	۸	اسس	اسی	۱۵۴	۱۱	۶نقطہ ر	نقطہ ر
۳۹	۲۱	زاویہ ۳۵°	زاویہ ۴۵°	۱۵۶	۱۶	مزدوج	مزدوج
۴۷	۸	اور ≤	اور >	۱۷۲	۲۲	لا^{۲} + ما = ۱۳	لا^{۲} + ما^{۲} = ۱۳^{۲}
۵۱	۷	ک (لا$_{۲}$ − لا$_{۱}$)	ک (لا$_{۳}$ − لا$_{۱}$)	۲۰۰	۳	ما/۲۲	یا
۶۵	۲	عمود	عمودوں	۲۱۵	شکل میں	ن$_{۱}$ (لا$_{۲}$، ما$_{۱}$)	ن$_{۱}$ (لا$_{۱}$، ما$_{۱}$)
۶۹	۱۶	(−۳، −۳)	(−۲، −۳)	۲۴۶	۲۰	نقطہ د	نقطہ د
۷۵	۱۵	ج$_{۲}$ ن = ۰	ج ن$_{۲}$ = ۰	۲۵۳	۱۵	ناقص	ناقصوں
۷۶	۷	میں خط	میں سے خط	۲۵۸	۳	صحیح یا (لا − لا$_{۱}$) / (لا/۲ج) =	(ما − ما$_{۱}$) / (ما/۲ب)
۸۱	۱۲	نقطیہ	نقطہ	〃	۱۳	(لا − لا$_{۱}$) / (ما$_{۲}$ − ما$_{۱}$)	(لا$_{۲}$ − لا$_{۱}$) / (ما$_{۲}$ − ما$_{۱}$)
〃	۱۴	(۵ − X)	(۵ − ۲)	۲۸۵	۸	ایک ہے	ایک سے
۸۲	۲	راس	رأس	۳۰۶	۱۶	(د) لا ± ما	(د) لا ± ما = ۰
۹۶	۱۲	۶ ما^{۱} = ۰	۶ ما^{۲} = ۰	۳۰۸	۱۵	(لا + ۲)^{۲} / ۲۱ = ،	(لا + ۲)^{۲} / ۲۱ = ۱،

آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار
لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی
صورت میں ایک آنہ یومیہ دیرانہ لیا جائیگا۔

25 JAN 1951

11 FEB 1951

11 FEB 1951