Strength of Materials.

by

A. MORLEY.

مضبوطیِ اشیاء (حصہ اول)

ترجمہ

مولوی محمد ضیاء الدین انصاری، ایم اے.، بی۔ ایس سی

(آنرز)۔

سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

مضبوطی اشیا

(حصہ اوّل)

مُصنّفۂ

آرتھر مارلے - ڈی - ایس سی، وغیرہ

مترجمہ

مولوی ضیاء الدین صاحب انصاری ایم - اے (عثمانیہ) بی ایس سی آنرز (مینچسٹر)

اسسٹنٹ انجینیر سررشتۂ تعمیرات سرکارعالی

سنہ ۱۳۵۸ھ م سنہ ۱۳۴۸ف م سنہ ۱۹۳۹ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارعالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز لانگمنس، گرین اینڈ کمپنی کی اجازت
سے اُردو میں ترجمہ کر کے طبع و شایع کی گئی ہے ۔

مضبوطیٔ اشیاء

حصہ اوّل

باب ۱ تا باب ۹

فہرستِ مضامین

مضبوطیٔ اشیاء

حصۂ اول

پہلا باب

دوسرا باب

صفحہ

تیسرا باب

چوتھا باب

پانچواں باب

صفحہ

شہتیروں کے زور۔ ۲۲۱

چھٹا باب

شہتیروں کا انصراف ۲۹۴

ساتواں باب

صفحہ

آٹھواں باب

نواں باب

صفحہ

راست زور اور خماؤ کے زور

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

مضبوطیٔ اشیاء

پہلا باب

لچکدار زور اور فساد

ا۔ اس مضمون میں جو عام طور پر مضبوطیٔ اشیاء کہلاتا ہے اندرونی قوتوں کی تقسیم، اور زور کے عمل کے تحت مشینوں اور تعمیروں کے مختلف حصوں کی قائمیت اور بگاڑ کا مطالعہ شامل ہے۔ یہ مضمون کچھ تو تجربات کے نتائج پر مبنی ہے اور کچھ اُن تجربات سے میکانیات اور ریاضیات کے اصولوں کے ذریعے حاصل شدہ نتائج پر مبنی ہے۔ بہت سادہ صورتوں کو چھوڑ کر اس کی بحث عام طور پر اتنی باقاعدہ نہیں ہوتی جتنی کہ لچک کے ریاضیاتی نظریے میں ہوتی ہے۔ لچک کا ریاضیاتی نظریہ ایک استدلالی علم ہے اور ان عملی مسائل میں سے اکثر کو حل کرنے سے قاصر ہے جو مشینوں اور تعمیروں کی تجویز میں انجینیر کو پیش آتے ہیں۔ اس فن کی نیم آزمایشی نوعیت کی وجہ سے مناسب یہ ہے کہ جہاں کہیں ممکن ہو اس کے ضابطوں کی تجربے سے تصدیق کر لی جائے اور ہر صورت میں وہ حدود اور قیود

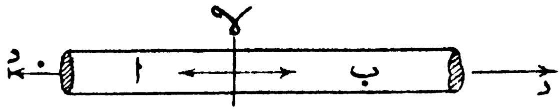
زیر نظر رہیں جن کے اندر اس فن کے مختلف نظریات درست رہتے ہیں۔ مشینوں اور تعمیروں کے اجزا میں تناسب قائم کرتے وقت مضبوطی اور صلابت کے علاوہ بہت سے دیگر لحاظات مثلاً لاگت، تزئین اور پائداری کی اہمیت کا بھی لحاظ رکھنا ہوتا ہے لیکن مضبوطیٔ اشیا کے ضابطے اگر معقول طور پر استعمال کیے جائیں تو مشینوں اور تعمیروں کی علمی تجویز کی بنا کا بڑا اہم حصہ ہوتے ہیں۔

۲ ۔ **زور** ـــــ دو اجسام یا ایک ہی جسم کے ایسے دو حصوں کے درمیان جو قوتوں کو منتقل کریں جو مساوی اور مقابل عمل اور ردِ عمل ہوتے ہیں اُن سے زور پیدا ہوتا ہے۔ اگر ہم ایک جسم کو جو ایک قوت کو منتقل کر رہا ہو ایک خیالی سطح سے دو حصوں میں تقسیم کریں اور اس سطح کے آر پار تعامل ہو تو وہاں کے مادے کو کہا جاتا ہے کہ زور کی حالت میں ہے۔ قوتوں کے اجزائے ترکیبی اور اس طرح خود زور، فاصل سطح پر یا تو یکساں منقسم ہونگے یا کسی اور طریقے پر۔ کسی سطح پر زور کی حدت، جس کو عام طور پر صحتِ بیان کا خیال کیے بغیر صرف زور کہا جاتا ہے، یکساں تقسیم کی صورت میں منتقل شدہ قوت فی اکائی رقبہ سے ناپی جاتی ہے۔ اس کو اکائی زور بھی کہا جاتا ہے۔ اگر تقسیم یکساں نہ ہو تو سطح کے کسی نقطے پر زور کی حدت سے مراد قوت کی اکائیوں اور رقبے کی اکائیوں کی نسبت ہے جب کہ رقبے کو بے حد کم کر دیا جائے۔

۳ ۔ **سادہ زور** ـــــ کسی جسم کے اندر پائے جانے والی زور کی
شکل ۲ حالتوں میں دو حالتیں خاص طور پر بہت سادہ ہیں۔ زیادہ پیچیدہ زوروں کو اُن کے اجزائے ترکیبی میں تقسیم کر لیا جا سکتا ہے۔

(۱) تنشی زور کسی جسم کے دو حصوں کے درمیان اُس وقت پایا جاتا ہے جب کہ ایک دوسرے کو اپنی طرف کھینچے۔ تنشی زور کے زیر عمل آنے والی شے کی سادہ ترین مثال بندھن سلاخ ہے جو ایک کھینچ کو برداشت کرے۔ اگر بندھن سلاخ پر کھینچ د پونڈ ہے، اور ہم سلاخ کے محور کے علی القوائم کسی تراش کلا پر غور کریں جس کا رقبہ ر مربع انچ ہو اور جو سلاخ کو دو حصوں

ا اور ب میں تقسیم کرتی ہو (شکل ۱) تو تراش ٧ پر مادہ تننشی زور کے



شکل ۱

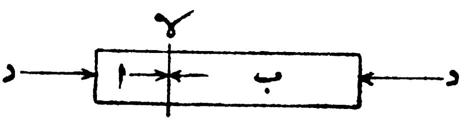
تحت ہوگا۔ حصہ ب، حصہ ا پر ایک کھینچ کا عمل کرتا ہے جو د کو عین توازن میں رکھتا ہے، اور اس طرح د کے مساوی اور مقابل ہے۔ اوسط قوت تراش کے فی مربع انچ

$$د = \frac{د}{ر}$$

اور یہ قیمت د اس تراش پر تننشی زور کی اوسط حدت ہے۔

(۲) فشاری زور کسی جسم کے دو حصوں کے درمیان اُس وقت پایا جاتا ہے جب کہ وہ ایک دوسرے کو ڈھکیلیں۔

اگر ایک سلاخ (شکل ۲) دونوں سروں پر د ٹن کا ایک محوری ڈھکیل



شکل ۲

برداشت کر رہی ہو تو ایک عرضیؔ تراش ٧ پر جس کا رقبہ ر مربع انچ ہو اور جو سلاخ کو دو حصوں ا اور ب میں تقسیم کرے مادّہ فشاری زور کے تحت

ؔ۵ Transverse

ہوگا - حصہ ا حصہ ب کو ایک قوت سے ڈھکیلیگا جو ب کے بعید سرے پر کے دھکیل کے مساوی اور مقابل ہوگی - تراش پر اوسط قوت فی مربع انچ

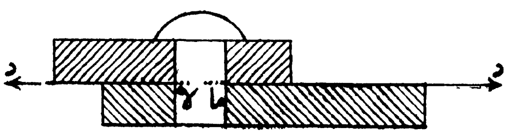
$$د = \frac{د}{ر}$$

ہوگی اور د کی یہ قیمت تراش لا پر رفتاری زور کی اوسط حدت ہے -

جزی زور کسی جسم کے دو متصل حصوں کے درمیان اُس وقت پایا جاتا ہے جب کہ دونوں حصے ایک دوسرے پر جانباًــہ تماسی سطح پر مماسی سمت میں مساوی اور مقابل قوتوں کا عمل کریں - مثلاً (شکل ۳) میں جو کیل یا ریوٹ دکھایا گیا ہے اُس کی تراش لاما پر جزی زور ہوگا جب دونوں تختیاں جو ریوٹ سے جکڑی ہوئی ہیں تراش لاما کے مستوی میں ایک کھینچ د کو برداشت کریں - اگر تراش لاما کا رقبہ ر مربع انچ ہو اور کھینچ د ٹن ہو تو تراش لاما پر نمو ۳
مجموعی جز د ٹن ہوگا، اور اوسط قوت فی مربع انچ

$$ق = \frac{د}{ر}$$

ہوگی - یہ قیمت ق تراش لاما پر جزی زور کی اوسط حدت ہے -



شکل ۳

۴ - **فساد** ــــ فساد شکل وصورت یا ابعاد کا تغیر ہے جو زور سے پیدا ہو-

ــہ Laterally

(۱) تنشی فساد کھنچاؤ ہے اور اکثر ایک کھینچ سے پیدا ہوتا ہے جس سے تنشی زور کی حالت پیدا ہوتی ہے۔ یہ فساد، تنشی زور کی سمت میں ہوتا ہے اور کسری تطول سے ناپا جاتا ہے۔ مثلاً اگر طول ل اکائیاں بڑھ کر ل + مف ل ہوجائے تو فساد

$$\frac{\text{مف ل}}{\text{ل}}$$

ہوگا۔ ظاہر ہے کہ فساد عددی طور پر کھنچاؤ فی اکائی طول کے مساوی ہے۔

(۲) فشاری فساد سکڑاؤ ہے جو عموماً فشاری زور سے پیدا ہوتا ہے اور سکڑاؤ اور ابتدائی طول کی نسبت سے ناپا جاتا ہے۔ اگر طول ل سکڑ کر ل - مف ل ہوجائے تو فشاری فساد

$$\frac{\text{مف ل}}{\text{ل}}$$

ہوگا۔ تنشی زور سے اس کی سمت کے علی القوائم سکڑاؤ پیدا ہوتا ہے اور فشاری زور سے اس کے علی القوائم تطول۔

(۳) مسخ کا فساد یا جزی فساد زاویئی ہٹاؤ ہے جو جزی زور سے پیدا ہوتا ہے۔ اگر کسی شے پر ایک خاص مستوی میں خالص جزی زور عمل کرے تو اس مستوی کے اور ایک خط کے جو ابتداً اس مستوی کے علی القوائم تھا درمیان کے زاویے کی تبدیلی نیم قطری پیمانے میں جزی فساد کا ناپ ہوگی (دیکھو دفعہ ۱۰)۔

۵ - لچک کی حدود —— کسی مادے کے لیے زور کی وہ حدود جن کے اندر زور کے ہٹا لینے پر فساد بالکلیہ رفع ہوجائے لچک کی حدود کہلاتی ہیں۔ اگر لچک کی حد سے زیادہ زور لگایا جائے تو زور کے ہٹا لینے پر فساد کا کچھ حصہ باقی رہتا ہے۔ اس طرح باقی رہ جانے والا فساد مستقل فساد کہلاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ لچک کی حد کی تعیین اس پر منحصر ہوگی کہ خفیف ترین مستقل فساد بھی مشاہدے سے بچ نہ جائے۔ بھدے طریقوں کے مقابلے میں صحت کے آلات سے اس کی قیمت پست تر حاصل ہوتی ہے۔ بعض مادوں میں حاصل شدہ نتیجہ اس پر بھی

صفحہ ۲

منحصر ہوگا کہ فساد کو نشوونما پانے اور غائب ہونے کے لیے کتنا وقت دیا گیا ۔

لچکدار فساد وہ فساد ہے جو لچک کی حدود کے اندر کسی زور سے پیدا ہو۔ لیکن یہی اصطلاح اکثر فساد کے اُس حصے کے لیے استعمال ہوتی ہے جو زور کے ہٹا لینے پر رفع ہوجائے خواہ یہ زور لچک کی حدود کے اندر ہو یا باہر۔

ھوک کا قانون یہ ہے کہ لچک کی حدود کے اندر پیدا شدہ فساد اُس کو پیدا کرنے والے زور کے متناسب ہوتا ہے ۔ یہ قانون ہر قسم کے زور پر حاوی ہے ۔

یہ قانون تمام اشیاء کے لیے پورا پورا صحیح نہیں لیکن بہت سی اشیاء کے لیے تقریباً صحیح ہے ۔ اس سے خفیف انحرافات کے متعلق آیندہ توجہ مبذول کرائی جائیگی ۔

۶ ۔ لچک کا مقیاس ـــــ ھوک کے قانون کی صحت کو تسلیم کرلیا جائے تو لکھا جاسکتا ہے :۔

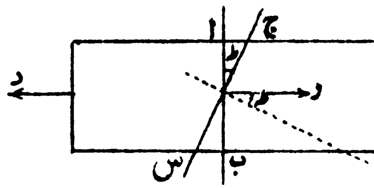
زور کی حدت ∝ فساد

یا   زور کی حدت = فساد × مستقل

اس مساوات کے مستقل کو لچک کا مقیاس یا قدر کہتے ہیں اور اس کی مقدار زور اور فساد کی قسم پر منحصر ہوگی ۔ زور کی ہر ایک قسم کے لیے ایک علیحدہ قسم کا مقیاس ہے ۔ چونکہ فساد صرف ایک عدد ہے اور طول، وقت یا قوت کے لحاظ سے اس کے کوئی ابعاد نہیں، اس لیے یہ مستقل اسی نوعیت کا ہے جو زور کی حدت کی ہے یعنی قوت کی اکائیاں فی اکائی رقبہ مثلاً پونڈ یا ٹن فی مربع انچ ۔ ہم لچک کے مقیاس کی تعریف یہ کرسکتے ہیں کہ اگر لچک کی کوئی حد نہ ہوتی یا اگر مادّہ اس حد کے باہر بھی اُس قانون کی پابندی کرتا جس کی اس حد کے اندر کرتا ہے تو لچک کا مقیاس زور کی وہ حدت ہے جس سے اکائی فساد پیدا ہوتا یا بالفاظِ دیگر زور کی حدت فی اکائی فساد ہے ۔

۷ ۔ ترچھے زوروں کے اجزا ـــــ اگر کسی شے میں

کسی سطح پر زور نہ عمادی ہو اور نہ مماسی تو ہم آسانی کی خاطر اس کو علی القوائم اجزا میں تحلیل کر سکتے ہیں جو اس سطح پر عماد اور مماس ہوں ۔ عمادی زور اپنی سمت کی وجہ سے تنشی یا فشاری ہونگے اور مماسی اجزا ر جزی زور ہونگے ۔



شکل ۲

ایک سادہ مثال سے زور کی تحلیل کا طریقہ واضح ہو جائیگا ۔ اگر عمودی تراش ر مربع انچ کی ایک متوازی سلاخ پر د ٹن کی ایک کھینچ عمل کرے تو تنشی زور کی حدت $د = \frac{د}{ر}$ ہوگی اور سلاخ کے طول کی سمت میں ہوگی یا بالفاظِ دیگر ایک سطح ا ب پر جو کھینچ کے خط کے علی القوائم ہے عمادی ہوگی (شکل ۲)۔

صفحہ فرض کرو کہ سطح ج س پر جو سطح ا ب سے زاویہ ط بناتی ہے زور کی حدتوں کے عمادی اور مماسی اجزا $ف_ع$ اور $ف_م$ ہیں ۔ ساری قوت ف کو ج س کے عماداً تحلیل کرنے سے

$$ف_ع = ف \; جم \; ط$$

اور سطح ج س کا رقبہ = ر قط ط

اس لیے $$ف_ع = \frac{ف \; جم \; ط}{ر \; قط \; ط} = \frac{ف}{ر} \; جم^2 \; ط$$

$$= ف \; جم^2 \; ط$$

اور سطح ج س کے مماساً تحلیل کرنے سے

$$ف_م = ف \text{ جب } ط$$

$$ف_م = \frac{ف \text{ جب } ط}{ر \text{ قط } ط} = \frac{ف}{ر} \text{ جب } ط \text{ جم } ط$$

$$= ف \text{ جب } ط \text{ جم } ط \text{، یا } \frac{ف}{۲} \text{ جب } ۲ط$$

ظاہر ہے کہ $ف_م$ اعظم قیمت $\frac{۱}{۲}$ ف کو پہنچیگا جب کہ ط = ۴۵°، اس طرح وہ تمام سطحیں، منحنی یا مستوی، جو ا ب سے اور اس طرح کھینچ کے محور سے بھی ۴۵° پر ہوں اعظم جزی زور کے تحت ہوتی ہیں۔ اشیاء کا تناؤ یا فشار میں امتحان کرتے وقت یہ اکثر ہوتا ہے کہ شکستگی کھینچ کے محور سے ۹۰° کی سطحوں پر نہیں بلکہ جزی کی وجہ سے مائل سطحوں پر واقع ہوتی ہے۔

مثال ـــــ ایک بندھن سلاخ کے اندر ۵ ٹن فی مربع انچ کا یکساں تنشی زور ہے۔ اس مستوی پر جزی زور کی حدت کیا ہوگی جس کا عماد سلاخ کے محور سے ۳۰° بنائے۔ اس مستوی پر عمادی زور کی حدت اور زور کی حاصل حدت کیا ہے۔

سلاخ کے ایسے حصے پر غور کرو جس کی تراش محور کے علی القوائم ایک مربع انچ ہو تو اس پر کھینچ ۵ ٹن ہے۔ عمودی تراش سے جو سطح ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے اُس کا رقبہ جس پر بوجھ منقسم ہے

(۱ × قط ۳۰°) مربع انچ

ہے اور اس ترچھی سطح کے متوازی قوت کا جزوِ تحلیلی

(۵ × جب ۳۰°) ٹن

ہے۔ اس لیے جزی زور کی حدت

= ۵ جب ۳۰° ÷ قط ۳۰° = ۵ جب ۳۰° جم ۳۰° = ۵ × ۰٫۵ × ۰٫۸۶۶۰ ... = ۵ × ۱۶۴۲۸ × ۰٫۷۶۶۰

= ۲٫۱۶۵ ... ۲۷۴۶۲ ٹن فی مربع انچ

اس ترچھی سطح پر عمادی قوت = ۵ جم ۳۰°

اس لیے عمادی زور کی حدت

= ۵ جم ۴۰° ÷ قطع ۴۰° = ۵ جم^۲ ۴۰° = ۵ × ۰٫۷۶۶۶ × ۰٫۷۶۶۶

= ۲٫۹۳۳ ٹن فی مربع انچ

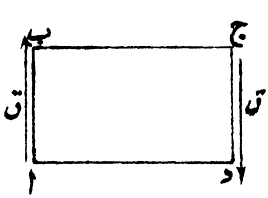
حاصل زور سلاخ کے محور کی سمت میں ہے اور اس کی حدت صفحہ ٦

= ۵ ÷ قطع ۴۰° = ۵ جم ۴۰° = ۳٫۸۳ ٹن فی مربع انچ

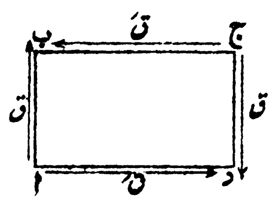
۸ - اتمامی جزی زور۔ سادہ جز کی حالت

ایک دی ہوئی سمت میں جزی زور اُس وقت تک واقع نہیں ہوسکتا جب تک اُس کے ساتھ اس کو متوازن کرنے کے لیے اس کے علی القوائم ایک مساوی حدت کا جز موجود نہ ہو۔

اگر ہم ایک بے انتہا چھوٹے مستطیلی کندے ا ب ج د پر غور کریں[۱] (شکل ۶) جو حدت ق کے جزی زور کے تحت ہو تو ہم صرف متوازی چہروں ا ب اور ج د پر کی مساوی اور مقابل مماسی قوتوں سے تعادل حاصل نہیں کرسکتے۔ ان قوتوں سے ایک جفت پیدا ہوتا ہے اور صرف یہ قوتیں ہوں تو



شکل ۶



شکل ۷

[۱] محدود جسامت کے کندے پر عمادی زور سے جو یکساں نہ ہو ایک جفت پیدا ہوسکتا ہے۔

گھماؤ کا ایک معیار پیدا ہوگا۔ تعادل کی سکونیات سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں تعادل صرف اس طرح ہو سکتا ہے کہ قوتوں کا ایک اَور نظام ہو جو اس جفت کے مساوی اور مخالف جفت کے معادل ہو۔ اس لیے ا د اور ج ب پر بھی مماسی قوتیں ہونی چاہییں جن کا معیار اب اور ج د پر کی قوتوں کے معیار کا توازن کرے اور یہ ہر صورت میں صحیح ہے خواہ کوئی عمادی قوتیں ہوں یا نہ ہوں۔ اگر ا د اور ج ب پر ایک مماسی زور ہو جس کی حدت قَ ہو (شکل ۶) اور کندے اب ج د کی موٹائی شکل کے علی القوائم ل ہو تو اب، ب ج، ج د، د ا پر قوتیں حسب ذیل ہونگی:۔

اب × ل × ق، ب ج × ل × قَ، ج د × ل × ق، د ا × ل × قَ

اور دونوں جفتوں کے معیاروں کو مساوی رکھنے سے

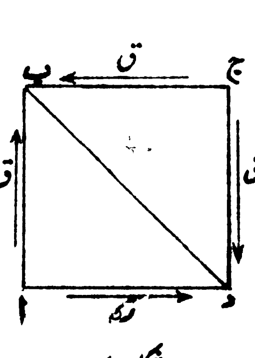
اب × ل × ق × ب ج = ب ج × ل × قَ × اب

یعنی

ق = قَ

یعنی جزی زوروں کی حدتیں دو علی القوائم مستویوں پر مساوی ہیں۔ یہ ہر صورت میں درست ہے خواہ عمادی زور کچھ ہی ہوں یا بالفاظِ دیگر ق اور قَ علی القوائم مستویوں پر زور کے اجزائے ترکیبی ہوں یا حاصل زور ہوں ہر صورت میں درست ہے۔

سادہ جز — شکل ۷ میں زور کی جو کیفیت دکھائی گئی ہے یعنی جہاں صرف جزی زور مساوی حدت ق کے ہوں اس کیفیت کو سادہ جز کہا جاتا ہے۔ دوسری سمتوں میں زور معلوم کرنے کے لیے ایک چھوٹا کندہ اب ج د (شکل ۸) لو۔ مربع چہرے اب ج د کے اضلاع ض ہیں اور کندے کا طول شکل کے علی القوائم ل ہے۔ حصہ ب ج د کے تعادل پر غور کرو قوتوں ق کو وتر ب د کے علی القوائم تحلیل کرو جس سے چہرے ب د پر عمل کرتی ہوئی قوت



شکل ۸

$$۲ \times ق \times ض \times ل \; جم \; ۴۵^\circ = \frac{۲ \, ق \, ض \, ل}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \, ق \, ض \, ل$$

حاصل ہوگی۔

صفحہ ۳

$$ب \, د \; کا \; رقبہ = ب \, د \times ل = \sqrt{۲} \, ض \, ل$$

اس لیے اگر چہرے ب د پر عمادی زور کی حدت $ف_ع$ ہو تو

$$ف_ع \times \sqrt{۲} \, ض \, ل = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \, ق \, ض \, ل$$

یا

$$ف_ع = ق$$

اور $ف_ع$ صریحاً فشاری ہے۔

اسی طرح ظاہر ہے کہ مستوی ا ج پر تنشی زور کی حدت ق ہوگی۔

وتروں ب د اور ا ج کے مماساً تحلیل کرنے سے دونوں پر مماسی زوروں کی حدت صفر آئیگی۔ اس سے معلوم ہوا کہ سادہ جزکی صورت میں خالص جزکے مستویوں سے ۴۵° بنانے والے مستویوں پر خالص تنشی اور فشاری زور پائے جاتے ہیں اور ان دونوں راست زوروں کی حدتیں اس خالص جزی زور کی حدت کے مساوی ہیں۔

۹ - لچک کے تین اہم مستقل

زور کی تین سادہ کیفیتیں ہیں اور ان کے متناظر لچک کے تین مقیاس (دفعہ ۶) ہیں جو اہم ہیں۔

ینگ کا مقیاس جو کھنچاؤ کا یا راست مقیاس بھی کہلاتا ہے

خالص تناؤ کی صورت میں لچک کا مقیاس ہے جب کہ کوئی اور زور عمل نہ کر رہا ہو۔ اکثر اشیا میں فشار کے لیے بھی اس کی یہی قیمت ہوتی ہے۔ اس کو ہمیشہ حرف مے سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ لچک کا یہ راست مقیاس تنشی (یا فشاری) زور فی اکائی طولی فساد کے مساوی ہے (دفعہ ۶)۔ اگر ایک تنشی زور ف ٹن فی مربع انچ سے تنشی فساد س پیدا ہو (دفعہ ۴) تو تنشی زور کی حدت = تنشی فساد × مے

یا ف = س × ے

اس لیے $$\text{ے} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} = \frac{\text{تنشی زور کی حدت}}{\text{تنشی فساد}}$$

اور اس کو ان ہی اکائیوں میں بیان کیا جاتا ہے (یہاں ٹن فی مربع انچ) جو ف کی اکائی ہے۔

فولاد یا پٹوان لوہے کے لیے ے کی قیمت تقریباً ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے۔

مثال ۱ — فولاد کی ایک بندھن سلاخ میں جس کا طول ۱۰ فٹ اور قطر ۱٫۵ انچ ہے ۱۲ ٹن کی کھینچ کے تحت تطول معلوم کرو۔

تراش کا رقبہ = ۱٫۵ × ۱٫۵ × ۰٫۷۸۵۴ = ۱٫۷۶۷ مربع انچ

$$\text{زور کی حدت} = \frac{۱۲}{۱٫۷۶۷} = ۶٫۷۹ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

$$\text{فساد} = \frac{۶٫۷۹}{۱۳۰۰۰}$$

$$\text{تطول} = \frac{۶٫۷۹}{۱۳۰۰۰} \times ۱۰ \times ۱۲ = ۰٫۰۶۲۷ \text{ انچ}$$

مثال ۲ — تانبے کی ایک لمبی سلاخ جس کا قطر ۱ انچ ہے ایک فولادی نل کے اندر جو $\frac{۱}{۸}$ انچ موٹا ہے ڈھیلی پڑی ہوئی ہے اور سلاخ کے دونوں سرے نل کو استوارانہ ثابت ہیں۔ اب اس مرکب سلاخ کو ایک ۱۰ ٹن کی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ دونوں دھاتوں میں زور کی حدت سفیدہ
معلوم کرو (ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ فولاد کے لیے اور ۶۰۰۰ تانبے کے لیے)۔

فرض کرو کہ زور کی حدت فولاد میں $\text{ف}_{۱}$ اور تانبے میں $\text{ف}_{۲}$ ہے۔ چونکہ دونوں میں فساد ایک ہی ہے اس لیے

$$\frac{\text{ف}_{۲}}{۶۰۰۰} = \frac{\text{ف}_{۱}}{۱۳۰۰۰}$$

یا $$\text{ف}_{۱} = \frac{۱۳}{۶}\,\text{ف}_{۲}$$

تانبے کی تراش کا رقبہ ۰٫۷۸۵۴ مربع انچ ہے، اور فولاد کا ۰٫۴۱۴۱۷ مربع انچ۔
اس لیے مجموعی بوجھ

۱۰ ٹن = ۰٫۴۱۴۱۷ ف۱ + ۰٫۷۸۵۴ ف۲

یا
۱۰ = ف۲ (۰٫۴۱۴۱۷ × ۳۰/۱۳ + ۰٫۷۸۵۴)

ف۲ = ۱۰ / ۱٫۷۴۲۴ = ۵٫۷۴ ٹن فی مربع انچ

اور
ف۱ = ۱۳٫۲۴ ٹن فی مربع انچ

۱۰- استواری کا مقیاس — عرضی لچک کا مقیاس،

یا جزی مقیاس وہ مقیاس ہے جو جزی زور کی حدت اور جزی فساد کی مقدار کے ربط کو ظاہر کرتا ہے۔ اس کو حرف س سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر جزی فساد (دفعہ ۴) حدت ق کے جزی زور کی وجہ سے فہ نیم قطری ہو تو

جزی زور = جزی فساد × س

یا
ق = فہ × س

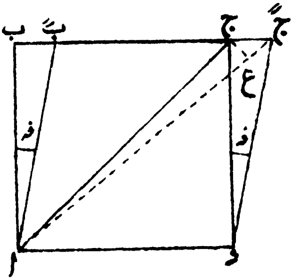
∴ س (ٹن فی مربع انچ) = ق/فہ = جزی زور / جزی فساد

فولاد کے لیے س کی قیمت ے کی تقریباً ۲/۵ ہے۔

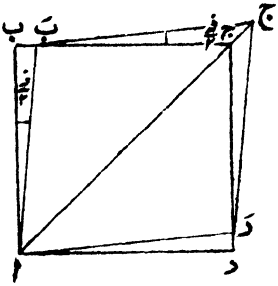
سادہ جزی فساد — ایک شے سادہ جزی زور کے تحت ہو، جیسا کہ دفعہ ۸ میں ہے، تو اس کے ایک مربع چہرے ا ب ج د (شکل ۵) میں جو فساد ہوگا اس کو نئی شکل اَ بَ جَ دَ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ فساد کو بیان کرنے کے لیے اس میں آسانی ہوگی کہ ایک ضلع مثلاً ا د کو ثابت سمجھا جائے اور نئی شکل کے طور پر شکل ۵ میں دکھائی ہوئی شکل ا بً جً د لی جائے۔ فساد بہت خفیف مقدار میں ہیں اس لیے خطِ مستقیم ب بً تقریباً ایک قوس پر منطبق ہوتا ہے جو ا کو مرکز مان کر کھینچی جا سکے۔ اسی طرح اجً پر عمود ج ع کھینچا جائے تو اس کو بھی

صفحہ ۵

ایک قوس سمجھا جا سکتا ہے جس کا مرکز ا ہے - جزی فساد (دفعہ ۳) فہ



شکل ۹



شکل ۸

نیم قطری (شکل ۹) حسب ذیل کے مساوی ہے :

$\frac{ب\,بَ}{ا\,ب}$ یا $\frac{ج\,جً}{ج\,د}$ اور مساوی ہے $\frac{ق}{س}$ کے۔

وتر اج کا تطول ع جً ہے اور خطی فساد

$$\frac{ع\,جً}{ا\,ج} = \frac{ج\,جً \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{ج\,د \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{ج\,جً}{ج\,د}$$

$$= \frac{1}{2}\,فہ \text{ یا } \frac{1}{2}\,\frac{ق}{س}$$

یعنی اس سمت میں فساد عدداً جزی فساد کا نصف ہے - اسی طرح سمت ب د میں فساد $\frac{1}{2}$ فہ ہوگا، لیکن اس سمت میں تطول نہیں بلکہ سکڑاؤ واقع ہوگا - یہ فساد اُن راست زوروں کے متناظر ہیں جو جزی زوروں کی وجہ سے دفعہ ۸ کی رُو سے، وتری مستویوں پر مساوی حدت ق کے پیدا ہوتے ہیں۔ دیکھو اج میں فساد صرف $\frac{فہ}{۲}$ سے نہیں کیونکہ تنشی زور فہ کے علاوہ اس کے

علی القوائم ایک مساوی حدت کا فشاری زور بھی ہے۔

۱۱- حجمی مقیاس وہ ہے جو تین باہم علی القوائم اور مساوی راست زوروں سے پیدا ہونے والے حجمی فساد کے تناظر ہے۔ مثلاً کوئی جسم ایک سیال کے اندر ڈبو دیا جائے جو دباؤ کے تحت ہو تو اس جسم کے حجم میں خفیف سی کمی واقع ہوگی۔ یہ مقیاس عموماً صرف ح سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر مساوی عمادی زوروں کی حدت ف ہو تو

$$\frac{\text{ف}}{\text{ح}} = \text{حجمی فساد} = \frac{\text{حجم کا تغیر}}{\text{ابتدائی حجم}}$$

حجمی فساد اس کے ساتھ کے طولی فساد کا ۳ گنا ہوگا، کیونکہ اگر ہم ضلع ا کے ایک مکعب پر غور کریں جس کا ہر ضلع فساد کے بعد ا ± مف ا ہو جائے جہاں مف ا بہت چھوٹا ہو تو طولی فساد

$$\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}}$$

ہے اور حجمی تغیر $(\text{ا} \pm \text{مف ا})^3 - \text{ا}^3$، یا چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبے تک $\pm$ ۳ ا^2 مف ا ہوگا۔ اس طرح فساد

$$= \frac{3\,\text{ا}^2\,\text{مف ا}}{\text{ا}^3} = 3\,\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}}$$

جو طولی فساد $\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}}$ کا تین گنا ہے۔ یا بالفاظِ دیگر طولی فساد حجمی فساد کا ایک تہائی ہوتا ہے۔

۱۲- پوائسن (Poisson) کی نسبت —— صفحہ ۱۱

راست زور سے خود اس کی سمت میں ایک فساد اور اس کے علی القوائم ہر سمت میں ایک مخالف قسم کا فساد پیدا ہوتا ہے۔ چنانچہ ایک بندھن سلاخ تنشی زور کے تحت

طولاً پھیلیگی اور جانباً سکڑیگی - لچک کی حد کے اندر نسبت

$$\frac{\text{جانبی فساد}}{\text{طولی فساد}}$$

جس کو بالعموم $\frac{1}{م}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے کسی دیئے ہوئے مادے کے لیے مستقل ہوتی ہے - م کی قیمت عموماً ۳ سے ۴ تک ہوتی ہے - نسبت $\frac{1}{م}$ اکثر دھاتوں کے لیے $\frac{1}{۴}$ ہوتی ہے - یہ نسبت جس کو پہلے تمام دھاتوں کے لیے $\frac{1}{۴}$ خیال کیا گیا تھا پوائی سن کی نسبت کہلاتی ہے -

۱۳ - لچک کے مستقلوں کے درمیان روابط

اوپر کی مقداروں ے، س، ح اور م کے درمیان چند روابط آسانی سے اخذ کیے جاسکتے ہیں - کسی شے کے ایک مربع گودے میں جو حدت کے سادہ جزق کے تحت ہو وتر کا فساد دفعہ ۱۰ کی رو سے $\frac{1}{2}\frac{ق}{س}$ ہوگا، جس کو دفعہ ۸ کی رو سے $\frac{1}{2}\frac{ف}{س}$ کے مساوی رکھا جاسکتا ہے جہاں ف وتری مستویوں پر کے مساوی اور مخالف قسم کے راست زوروں کی حدت ہے -

ایک وتر کی سمت میں جو راست زور ف عمل (دفعہ ۸) کررہا ہے اگر وہ اکیلا عمل کرے تو اُس سے اس وتر کی سمت فساد $\frac{ف}{ے}$ پیدا ہوگا اور دوسرے وتر کی سمت میں جو مخالف قسم کا راست زور ف عمل کررہا ہے اگر وہ اکیلا عمل کرے تو اُس سے پہلے وتر کی سمت میں پہلی نوعیت ہی کا فساد $\frac{1}{م}\times\frac{ف}{ے}$ پیدا ہوگا -

اس لیے وتر کا مجموعی فساد

$$=\frac{1}{2}\frac{ف}{س}=\frac{ف}{ے}\left(1+\frac{1}{م}\right)$$

Lateral جانبی Poissons Ratio پوائی سن

یا $\dfrac{۱}{۲\,س} = \dfrac{۱}{ے}\left(۱ + \dfrac{۱}{م}\right)$

یا $ے = ۲\,س\left(۱ + \dfrac{۱}{م}\right)$ .... (۱)

دیکھو اگر م = ۴ تو $\dfrac{ے}{س} = \dfrac{۵}{۲}$

اب کسی شے کے ایک مکعب پر غور کرو جس کے کناروں کے متوازی تینوں علی القوائم سمتوں میں کوئی راست عادی زور مثلاً فشاری زور ف عمل کر رہا ہے (شکل ۱۰) - ہر ایک کنارہ اس کے متوازی قوتوں کے عمل سے سکڑیگا اور اس فساد کی مقدار

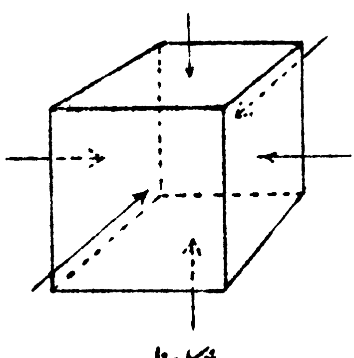
$$\dfrac{ف}{ے}$$

صفحہ ۱۱ ہوگی - لیکن ساتھ ہی ہر کنارے کے علی القوائم جو قوتوں کے دو جوڑے عمل کر رہے ہیں اس سے ہر کنارے کے طول میں اضافہ ہوگا اور اس فساد کی مقدار

$$۲ \times \dfrac{۱}{م} \times \dfrac{ف}{ے}$$

ہوگی - اس طرح ہر کنارے کا مجموعی طولی فساد

$$= \dfrac{ف}{ے}\left(۱ - \dfrac{۲}{م}\right)$$



شکل ۱۰

اس طرح حجمی فساد

$$= ۳ \times \dfrac{ف}{ے}\left(۱ - \dfrac{۲}{م}\right) \quad (\text{دفعہ ۱۱})$$

اور یہ تعریف کی رو سے $= \dfrac{ف}{ح}$

جہاں ح حجمی مقیاس ہے۔

اس لیے $\frac{\text{ف}}{\text{ح}} = \frac{3\,\text{ف}}{\text{ے}}\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)$

یا $\frac{1}{\text{ح}} = \frac{3}{\text{ے}}\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)$

یا $\text{ے} = 3\,\text{ح}\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

اس لیے (۱) اور (۲) سے

$$\text{ے} = 2\,\text{س}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right) = 3\,\text{ح}\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)$$

ے کو ساقط کرنے سے

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{3\,\text{ح} - 2\,\text{س}}{6\,\text{ح} + 2\,\text{س}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

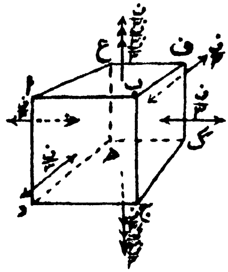
یا م کو ساقط کرنے سے

$$\text{ے} = \frac{9\,\text{ح}\,\text{س}}{\text{س} + 3\,\text{ح}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

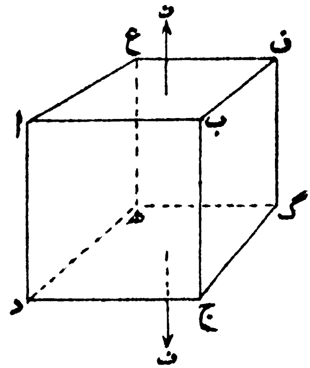
متبادل طریقہ ـــــ ہم ان نتائج کو ایک اور طریقے سے بھی حاصل کر سکتے ہیں جو کسی قدر مصنوعی ہے۔

ایک مکعب ا ب ج .... ھ (شکل ۱۱) کو تصور کرو جس کا ضلع اکائی ہے اور جو ایسی شے کے اندرون میں سے کاٹ لیا گیا ہے جس میں سمت ا د کے متوازی حدت ف کا یکساں تناؤ ہے۔ اب چہروں ا ب ف ع اور د ھ گ ج پر جو قوتیں ف عمل کر رہی ہیں اُن کو تین مساوی حصوں $\frac{\text{ف}}{3}$ میں تقسیم سمجھو اور نیز کعب کے ہر ایک جانبی چہرے پر

مساوی اور مخالف (متوازن) عمادی قوتیں ف/۳ عمل کرتی ہوئی سمجھو۔ یہ قوتیں ہر ایک چہرے پر تعدیل میں ہونگی اور ان کا کوئی اثر نہ ہوگا۔ قوتوں کی کیفیت شکل ۱۲ میں دکھائی گئی ہے۔ اب ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ مکعب کے اوپر صفحہ ۱۲ قوتوں کے تین نظام ایک ساتھ عمل کر رہے ہیں جو اشکال ۱۳ (ا) (ب) اور (ج) میں

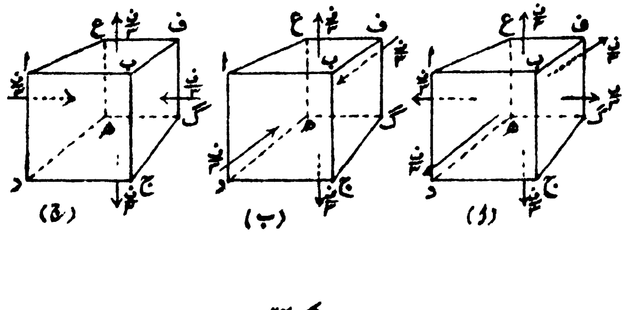


شکل ۱۲



شکل ۱۱

دکھائے گئے ہیں۔ یہ سب مل کر شکل ۱۲ کی قوتوں کے ٹھیک معادل ہیں۔ (ا) زور کی وہ کیفیت ظاہر کرتا ہے جو دفعہ ۱۱ میں بیان کی گئی ہے۔



شکل ۱۳

(ب) اور (ج) سمت ا د سے ۴۵° بنانے والے مستویوں پر خالص جز کو

تعبیر کرتے ہیں جیسا کہ دفعات ۸ اور ۱۰ میں بیان ہوا ہے۔

(و) کے نظام کی وجہ سے تمام کناروں میں تنشی فساد

$$\frac{1}{3}\times\frac{\text{ف}}{3}\div\text{ح}$$

ہوگا۔ (ب) کی وجہ سے ابتدائی تنشی زور کے متوازی کناروں میں تنشی فساد

$$\frac{1}{2}\times\frac{\text{ف}}{2}\div\text{س}$$ (دفعہ ۱۰)

ہوگا۔ اور عرضی[ھ] کناروں اع، ب ف، ج گ، اور د ھ میں فساد

$$\frac{1}{2}\times\frac{\text{ف}}{3}\div\text{س}$$

کا سکڑاؤ پیدا ہوگا۔

صفحہ۱۱ اسی طرح، نظام (ج) کی وجہ سے تمام طولی کناروں کا طول بڑھیگا، اور یہ طولی فساد $\frac{1}{2}\times\frac{\text{ف}}{2}\div\text{س}$ ہوگا۔ اور باقی عرضی کناروں اب، ع ف، د ج اور ھ گ میں فشاری فساد $\frac{1}{2}\times\frac{\text{ف}}{3}\div\text{س}$ ہوگا۔

اس طرح طولی فساد ہر بار ایک تطول ہے جس کی مقدار

$$=\frac{\text{ف}}{9\text{ح}}+\frac{\text{ف}}{6\text{س}}+\frac{\text{ف}}{6\text{س}}=\frac{\text{ف}}{9\text{ح}}+\frac{\text{ف}}{3\text{س}}$$

اور عرضی فشاری فساد

$$=\frac{\text{ف}}{6\text{س}}-\frac{\text{ف}}{9\text{ح}}$$

اس طرح $\frac{1}{\text{م}}=\frac{\text{عرضی فساد}}{\text{طولی فساد}}=\frac{\frac{1}{6\text{س}}-\frac{1}{9\text{ح}}}{\frac{1}{3\text{س}}+\frac{1}{9\text{ح}}}=\frac{3\text{ح}-2\text{س}}{6\text{ح}+2\text{س}}$

ھ Transverse

جو بالکل مساوات (۳) ہے۔

نیز طولی فساد $= \frac{\text{ف}}{\text{ے}}$

اس لیے $\frac{\text{۱}}{\text{ے}} = \frac{\text{۱}}{\text{۹ح}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳س}}$

یا $\text{ے} = \frac{\text{۹ح س}}{\text{س} + \text{۳ح}}$

جو بالکل مساوات (۴) ہے۔

مثال — ایک دیے ہوئے مادّے کے لیے ینگ کا مقیاس ۶۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے اور اُستواری کا مقیاس ۲۳۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ حجمی مقیاس اور ایک گول سلاخ کا عرضی سکڑاؤ معلوم کرو جس کا قطر ایک انچ اور طول ۱۰ فٹ ہو جب کہ اس میں ۰۱ء انچ کا امتداد ہوا ہو۔

مساوات (۱) دفعہ ۱۳ سے

$$\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{م}} = \frac{\text{ے}}{\text{۲س}} = \frac{\text{۶۰۰۰}}{\text{۴۶۰۰}} = \text{۱}\frac{\text{۷}}{\text{۲۳}}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{\text{۲۳}}{\text{۷}}$$

مساوات (۲) دفعہ (۱۳) سے

$$\text{ح} = \frac{\text{ے}}{\text{۳}(\text{۱} - \frac{\text{۲}}{\text{م}})} = \frac{\text{۶۰۰۰}}{\text{۳}(\text{۱} - \frac{\text{۱۴}}{\text{۲۳}})} = \frac{\text{۴۶۰۰۰}}{\text{۹}}$$

$=$ ۵۱۱۱ ٹن فی مربع انچ

عرضی فساد $= \frac{\text{۷}}{\text{۲۳}} \times \frac{\text{۰۱ء}}{\text{۱۰} \times \text{۱۲}}$

عرضی سکڑاؤ $= \frac{\text{۷}}{\text{۲۷۶۰۰}} =$ ۰٫۰۰۰۲۵۴ انچ

Lateral ۵

۱۴۔ مرکب زور —— اگر ایک جسم متعدد قوتوں کے زیرِ عمل ہو نوٹ ۱۲
جن سے چند معلومہ سمتوں کے مستویوں پر خالص عمادی یا خالص مماسی زور پیدا ہو تو ہم دوسرے مستویوں پر زور کی کیفیت اس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ مماسی اور عمادی اجزا کو علیحدہ علیحدہ جبری طور پر جمع کر کے سکونیات کے اصولوں سے حاصل معلوم کیا جائے۔

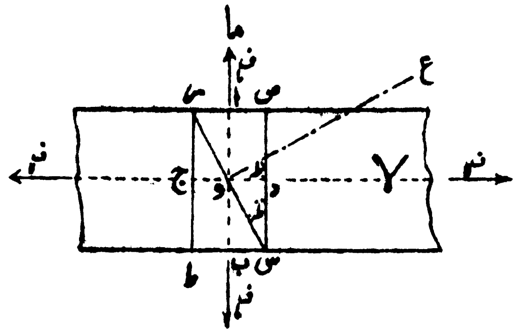
اصلی مستوی —— کسی شے کے اندر کسی نقطے میں سے گزرنے والے وہ مستوی جن پر حاصل زور خالص عمادی ہے اصلی مستوی کہلاتے ہیں، اور ان پر جو عمادی زور ہوتے ہیں وہ اس نقطہ پر کے اصلی زور کہلاتے ہیں۔ اصلی زوروں کی سمتیں زور کے محور کہلاتی ہیں۔

کسی جسم کے اندر کسی نقطے پر زور کی کیفیت کتنی ہی پیچیدہ کیوں نہ ہو تین باہم علی القوائم اصلی مستوی موجود ہونگے اور اس نقطہ پر کے زوروں کو ان مستویوں کے متناظر عمادی زوروں میں تحویل کر لیا جا سکتا ہے۔ نیز ان اصلی مستویوں میں سے ایک پر زور کی حدت اس نقطے پر دوسری تمام سمتوں کی حدتوں سے زیادہ ہوگی اور ایک پر تمام سمتوں سے کم ہوگی۔

اکثر عملی صورتوں میں ایک مستوی ایسا پایا جاتا ہے جس کے علی القوائم زور صفر ہوتا ہے یعنی ایک اصلی زور صفر یا قابلِ نظر اندازی ہوتا ہے۔ ان صورتوں میں زوروں کی تحلیل اور ترکیب دو ابعاد کا سوال رہ جاتا ہے۔ ہم اب چند سادہ صورتوں پر غور کرینگے۔

۱۵۔ دو علی القوائم عمادی زور —— اگر دو باہم علی القوائم مستویوں پر معلومہ عمادی زور ہوں اور ان دونوں پر علی القوائم جو مستوی ہے اس پر زور نہ ہو تو اب کسی ترچھے مستوی پر زور معلوم کرنا ہے جو صفر زور کے مستوی پر علی القوائم ہو۔ فرض کرو کہ زور کی دی ہوئی عمادی حدتیں ف۱ اور ف۲ دو علی القوائم مستویوں پر سمتوں و۱ اور و۲ میں ہیں۔ اگر ف۱ اور ف۲ سمتوں و۱ اور و۲ میں متغیر ہوں تو شے کے ایک بے حد چھوٹے ٹکڑے پر

غور کرو - اگر متغیر نہ ہوں تو شکل کے علی القوائم اکائی موٹائی کا ٹکڑا ر ص س ط لیا جا سکتا ہے (شکل ۱۴) - اب مسئلہ یہ ہے کہ ایک مستوی سطح ر س پر



شکل ۱۴

حاصل زور کی مقدار اور سمت معلوم کی جائے - مستوی ر س اُن تمام مستویوں سے جو محور و لا پر علی القوائم ہیں زاویہ طہ بناتا ہے یعنی اُس کا صفحہ ۱۵
عماد و ع محور و لا سے زاویہ طہ اور محور و ما سے $(\frac{\pi}{2}$ - طہ$)$ بناتا ہے اور شکل کے مستوی کے اندر ہے جس مستوی کے علی القوائم زور صفر ہے - زور ف۱ اور ف۲ یہاں موافق دکھائے گئے ہیں لیکن مخالف زوروں کے لیے مسئلہ کچھ زیادہ مختلف نہیں ہوگا -

چہرہ س ص پر مجموعی عمادی قوت

= فا = ف۱ × س ص

کیونکہ رقبہ = س ص × اکائی

ر ص پر مجموعی عمادی قوت

= فا = ف۲ × ر ص

فرض کرو کہ مستوی ر س پر عمادی اور مماسی زوروں کی حدت فع اور فم ہے۔ جن کی مثبت سمت و ع اور و س ہے۔ تب فانہ ر ص س کے تعادل پر غور کرکے قوتوں کو سمت و ع میں تحلیل کرنے سے

فع × ر س = ف۱ جم ط + ف۲ جم (π/۲ - ط)

= ف۱ × س ص جم ط + ف۲ × ر ص جب ط

ر س سے تقسیم کرنے سے

فع = ف۱ جم۲ ط + ف۲ جب۲ ط .... (۱)

سمت و س میں تحلیل کرنے سے

فم × ر س = ف۱ جب ط - ف۲ جم ط

= ف۱ × س ص جب ط - ف۲ × ر ص جم ط

ر س سے تقسیم کرنے سے

فم = (ف۱ - ف۲) جب ط جم ط = (ف۱ - ف۲)/۲ جب ۲ط ...... (۲)

اگر ط = ۴۵° تو جزی زور کی حدت

فم = (ف۱ - ف۲)/۲

اور یہ اعظم ہوگی۔

اس مستوی پر راست (تنشی) زور کی حدت

= فع = ف۱ جم۲ ۴۵° + ف۲ جب۲ ۴۵° = (ف۱ + ف۲)/۲

(۱) اور (۲) کو مرکب کرنے سے اگر حاصل زور کی حدت ف ہو، تو چونکہ اس حاصل زور کے اجزائے ترکیبی ف۱ اور ف۲ ہیں اس لیے

$$\text{ف} \times \text{سس} = \sqrt{\text{ف}_{\text{لا}}^{2} + \text{ف}_{\text{ہا}}^{2}}$$

$$= \sqrt{(\text{ف}_{\text{لا}} \times \text{س ص})^{2} + (\text{ف}_{\text{ہا}} \times \text{س ص})^{2}}$$

$$= \text{سس}\sqrt{\text{ف}_{\text{لا}}^{2}\,\text{جم}^{2}\text{ط} + \text{ف}_{\text{ہا}}^{2}\,\text{جب}^{2}\text{ط}}$$

$$\therefore\ \text{ف} = \sqrt{\text{ف}_{\text{لا}}^{2}\,\text{جم}^{2}\text{ط} + \text{ف}_{\text{ہا}}^{2}\,\text{جب}^{2}\text{ط}} = \sqrt{\text{ف}_{\text{ع}}^{2} + \text{ف}_{\text{م}}^{2}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

صفحہ ۱۶ اورچونکہ مستوی سس کے اکائی رقبے پر قوت کے اجزائے تحلیلی سمتوں ولا اور وہا میں $\text{ف}_{\text{لا}}$ جم ط اور $\text{ف}_{\text{ہا}}$ جب ط ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ ف سمت ولا سے زاویہ عہ بنائیگا جہاں

$$\text{مس عہ} = \frac{\text{ف}_{\text{ہا}}\ \text{جب ط}}{\text{ف}_{\text{لا}}\ \text{جم ط}} = \frac{\text{ف}_{\text{ہا}}}{\text{ف}_{\text{لا}}}\ \text{مس ط} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اور ف مستوی سس سے جس کے زور کی وحدت ہے زاویہ بہ بنائیگا جہاں

$$\text{مس بہ} = \frac{\text{ف}_{\text{ع}}}{\text{ف}_{\text{م}}}\ \text{یا}\ \frac{\text{ف}_{\text{لا}}\,\text{جم}^{2}\text{ط} + \text{ف}_{\text{ہا}}\,\text{جب}^{2}\text{ط}}{(\text{ف}_{\text{لا}} - \text{ف}_{\text{ہا}})\ \text{جب ط جم ط}} = \text{مم فہ} \quad \ldots\ldots (۵)$$

جہاں فہ وہ زاویہ ہے جو حاصل زور مستوی سس کے عماد سے بناتا ہے۔

مثال — وہ مستوی معلوم کرو جس کے زور کا عماد سے میلان اعظم ہو۔

فرض کرو کہ عماد سے اعظم میلان فہ ہے۔ تب

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{ف}_{\text{م}}}{\text{ف}_{\text{ع}}} = \frac{(\text{ف}_{\text{لا}} - \text{ف}_{\text{ہا}})\ \text{جم ط جب ط}}{\text{ف}_{\text{لا}}\,\text{جم}^{2}\text{ط} + \text{ف}_{\text{ہا}}\,\text{جب}^{2}\text{ط}} \quad \ldots\ldots (ا)$$

فہ اعظم ہو تو مس فہ اعظم ہوگا اور اس صورت میں

$$\frac{\text{فر}(\text{مس فہ})}{\text{فر ط}} = \text{۰}$$

اس لیے، تفرق کرکے مشترک اجزائے ضربی سے تقسیم کر دینے سے

$$(\text{ف}_{\text{لا}}\,\text{جم}^{2}\text{ط} + \text{ف}_{\text{ہا}}\,\text{جب}^{2}\text{ط})\ \text{جم ۲ط} + (\text{ف}_{\text{لا}} - \text{ف}_{\text{ہا}})\ \text{جب ط جم ط} \times \text{جب ۲ط} = \text{۰}$$

یا $ف_ع \text{ جم } ۲ط + ف_م \text{ جب } ۲ط = ۰$

یا $\text{مس } ۲ط = -\frac{ف_ع}{ف_م} = -\text{مم } فہ = \text{مس } (\frac{π}{۲} + فہ)$

یا $۲ط = \frac{π}{۲} + فہ$

یا $ط = \frac{π}{۴} + \frac{فہ}{۲}$ .... (ب)

ط کی اس قیمت کو مساوات (ا) میں مندرج کرنے سے

$$\text{مس } فہ = \frac{(ف_۲ - ف_۱) \text{ جم } فہ}{ف_۱ (۱ - \text{جب } فہ) + ف_۲ (۱ + \text{جب } فہ)}$$

اس لیے $\frac{ف_۲}{ف_۱} = \frac{۱ - \text{جب } فہ}{۱ + \text{جب } فہ}$

یا $\text{جب } فہ = \frac{ف_۱ - ف_۲}{ف_۱ + ف_۲}$ .... (ج)

مساوات (ج) سے عماد سے اعظم میلان معلوم ہوتا ہے اور مساوات (ب) سے عماد کا میلان راست زور $ف_۱$ کے محور سے معلوم ہوتا ہے۔

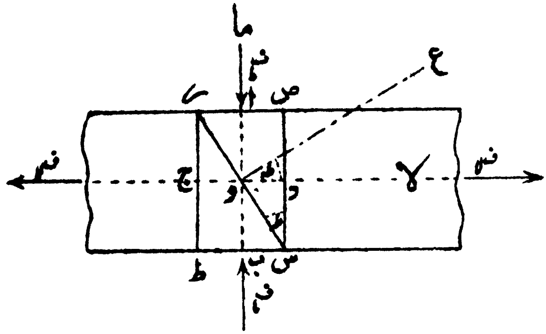
مخالف زور ــــــ اگر دو دیے ہوئے زور $ف_۱$ اور $ف_۲$ مخالف ہوں، مثلاً $ف_۲$ تنشی ہو اور $ف_۱$ فشاری تو ذیل کی ترمیم یافتہ مساواتیں حاصل ہونگی:- صفحہ ۱۷

$ف_ع = ف_۱ \text{ جم}^۲ ط - ف_۲ \text{ جب}^۲ ط$ (تنشی)

$ف_م = (ف_۱ + ف_۲) \text{ جم } ط \text{ جب } ط = \frac{۱}{۲} (ف_۱ + ف_۲) \text{ جب } ۲ط$

یہ نتائج محض $ف_۲$ کی جگہ $-ف_۲$ رکھنے سے حاصل ہوئے لیکن ان کو شکل ۱۵ کے ذریعے راست نکالا جا سکتا ہے۔ اعظم جز اب بھی $ط = ۴۵°$ کے لیے ہوگا، اور اس کی قیمت

$$= \frac{ف_۱ + ف_۲}{۲}$$



شکل ۱۵

مخالف زوروں کی اس خاص صورت میں جب کہ $\text{ف}_{\text{ا}}$ اور $\text{ف}_{\text{ما}}$ عددی طور پر مساوی ہوں طہ = ۴۵° کے لیے حسبِ ذیل قیمتیں حاصل ہونگی:-

$$\text{ف}_{\text{م}} = \frac{\text{ف}_{\text{ہ}} + \text{ف}_{\text{ما}}}{۲} = \text{ف}_{\text{ا}} = \text{ف}$$

$$\text{ف}_{\text{ع}} = ۰$$

یہ دفعہ ۸ کے خالص جزکے بالکل تناظر ہے۔

۱۶- **زور کا ناقص** ——— دفعہ گزشتہ میں ہم نے دو اصلی زوروں $\text{ف}_{\text{ہ}}$ اور $\text{ف}_{\text{ما}}$ کو دیا ہوا، اور تیسرے کو صفر مانا، یعنی اشکال ۱۴ اور ۱۵ کے علی القوائم صفر زور مانا۔ اس صورت کے لیے اوپر ہی کی ترقیم استعمال کرتے ہوئے اور زوروں کو موافق لیتے ہوئے کسی مستوی پر کے حاصل زور کی مقدار اور سمت ترسیماً حسبِ ذیل طریقہ سے آسانی سے معلوم ہوسکتی ہے:-

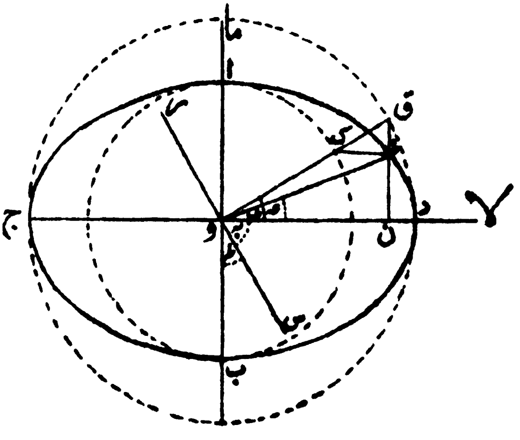
و کو مرکز مان کر (شکل ۱۶) دو دائرے، ج ق د اور ا ک ب کھینچو جن کے نصف قطر علی الترتیب $\text{ف}_{\text{ہ}}$ اور $\text{ف}_{\text{ما}}$ کے متناسب ہوں۔

مائل مستوی س س (دفعہ ۱۵) پر عماد و ق کھینچو جو بڑے دائرے کو ق پر اور چھوٹے کو ک پر ملے۔ و لا پر عمود ق ن اور و ما پر ک ط کھینچو جو ق ن سے ط پر ملے تب و ط حاصل زور ف کو حدت کی مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر کریگا۔ طہ کی مختلف قیمتوں کے لیے ط کا طریق صریحاً ایک ناقص ہوگا کیونکہ محور و لا پر اس کا محدد و ن

= و ق جم طہ = ف جم طہ

مفوضہ ۱ اور و ما پر محدد ط ن

= و ک جب طہ = ف جب طہ



شکل ۱۵ - زور کا ناقص

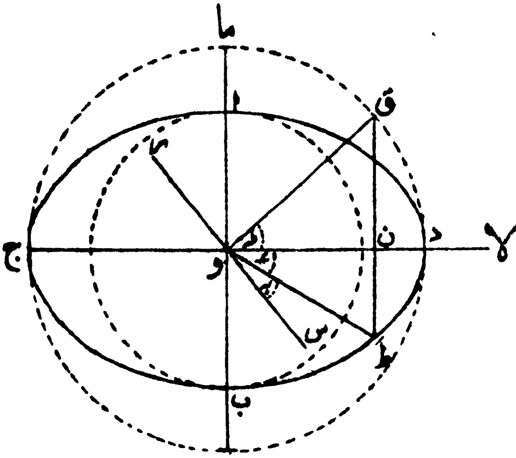
ناقص کے محور زور کے محور ہیں (دفعہ ۱۴)

نیز ربط مس ه = ف جب طہ / ف جم طہ = ف / ف مس طہ

کی صحت شکل سے ظاہر ہے۔

دوسری صورت میں جب کہ ف مثبت ہو اور ف منفی تو زور کی

حدت کی مقدار اور سمت وطَ سے تعبیر ہوگی (شکل ۱۷)۔ یہاں مس مہ



شکل ۱۷

منفی ہوگا اور یہ کی قیمت شکل ۱۶ کے مقابلہ میں کم ہوگی۔

صفحہ ۱۹ خاص صورت میں جب کہ $ف_1$ اور $ف_2$ مقداریں مساوی ہوں ناقص ایک دائرہ ہوگا (مثلاً دیکھو دفعہ ۱۲۱)۔

مثال ——— ایک شے دو علی القوائم تنشی زوروں ۶ ٹن فی مربع انچ اور ۳ ٹن فی مربع انچ کے زیرِ عمل ہے۔ ایک ایسے مستوی پر کے زوروں کو پورے طور پر معلوم کرو جس کا عماد ۶ ٹن والے زور کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتا ہو۔

اِس مستوی پر عمادی زور کی حدّت

$$\text{ف}_{\text{ع}} = ۶ \;\text{جم}^2\, ۳۰^\circ + ۳ \;\text{جب}^2\, ۳۰^\circ$$

$$= ۶ \times \frac{۳}{۴} + ۳ \times \frac{۱}{۴} = ۴\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}$$

$$= ۵\frac{۱}{۴} \;\text{ٹن فی مربع انچ}$$

اور مماسی زور کی حدت

$$\text{ف}_{\text{م}} = ۶ \;\text{جب}\, ۳۰^\circ \;\text{جم}\, ۳۰^\circ - ۳ \;\text{جب}\, ۳۰^\circ \;\text{جم}\, ۳۰^\circ$$

= ۳ × ½ × ۳√۲ / ۲ = ۳√۲ ۳ / ۴

= ۱٫۲۹۹ ٹن فی مربع انچ

اس طرح حاصل زور کی حدت

ف = √(۲۱/۴)² + (۳√۲ ۳ / ۴)² = ½ √۱۴۴ + ۲۷

= ۱۰٫۵۸۲ / ۲ = ۵٫۲۹۱ ٹن فی مربع انچ

اور ۶ ٹن کے زور کی سمت سے زاویہ ع بناتا ہے جہاں

مس ع = ۲ جب ۳۰° / ۶ جم ۳۰° = ⅓ مس ۳۰° = ۰٫۲۸۸

جو ۱۶° ۴' کا مماس ہے۔

یہ زاویہ حاصل زور ۶ ٹن کے زور سے بناتا ہے۔ اپنے مستوی کے عماد سے اس کا زاویہ

= ۳۰° - ۱۶° ۴' = ۱۳° ۵۶'

اس کی صحت کو اس طرح جانچا جا سکتا ہے کہ حاصل زور اور عماد کے درمیان کے زاویہ کا مماس یا حاصل زور اور مستوی کے درمیان کے زاویہ کا مماس

= فع / فم = ۵٫۲۵ / ۱٫۲۹۹ = ۴٫۰۳۵

جو ۷۶° ۴' کا مماس اور ۱۳° ۵۶' کا مماس التمام ہے۔

۱۶- زور کا دائری نقشہ

دفعات ۱۵ اور ۱۶ میں دوالعادی زور کی جو تحلیل دکھائی گئی ہے اُس کے صدر نکات کا خلاصہ ایک سادہ ہندسی ساخت کے ذریعے بیان کیا جا سکتا ہے جس کو بعض اوقات "موہر کا دائرہ یا "زور دائرہ" کہا جاتا ہے۔

شکل ۱۴ پر غور کرو۔ ایسے مستوی پر جس کا عماد محور ولا سے زاویہ طہ بنائے، عمادی زور دفعہ ۱۵ کی مساوات (۱) کی مدد سے ایک دوسری شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے:

فع = ½ (فو + فم) + ½ (فلا - فم) جم ۲ طہ .... (۱)

نیز مساوات (۲) دفعہ ۱۵ سے

فم = ½ (فلا - فم) جب ۲ طہ .... (۲)

دیکھو فم کو اور فع کے اُس حصے کو جو زاویہ طہ کے ساتھ بدلتا ہے ایک ایسے
سمتی نیم قطر کے دو علی القوائم ظِلّوں سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جس کا طول صفحہ ۲۰
½ (ف۲ ـ ف۱) ہو اور جو و لا سے زاویہ ۲ طہ بنائے۔ اس سے فوراً
زیرِ بحث مستوی پر (یعنی اُس مستوی پر جس کا عماد و لا سے زاویہ طہ بنائے)
حاصل زور اور اس کے اجزائے ترکیبی معلوم کرنے کی ایک سادہ ترسیمی ساخت
سوجھتی ہے۔

اگر شکل ۱۰ میں ایک محور و لا پر ایک فاصلہ و ب لیا جائے جو
پیمانے پر ف۱ کی مقدار کو تعبیر کرے اور اسی طرح و ا جو ف۲ کو تعبیر کرے۔
تب اگر ا ب کی نقطہ د پر تنصیف کی جائے تو و د = ½ (ف۱ + ف۲)
اور ا د = د ب = ½ (ف۱ ـ ف۲)۔ اب اگر د کو مرکز اور ا د = د ب کو
نصف قطر مان کر ایک دائرہ ا ج ب کھینچا جائے تو زیرِ بحث مستوی پر کا
زور اس طرح حاصل ہوگا کہ د ب سے یعنی محور و لا سے، زاویہ ۲ طہ پر
سمتی نیم قطر د ج کھینچا جائے۔ اب چونکہ د ع = د ج جم ۲ طہ
= ½ (ف۱ ـ ف۲) جم ۲ طہ، اس لیے

و ع = و د + د ع

= ½ (ف۱ + ف۲) + ½ (ف۱ ـ ف۲) جم ۲ طہ .... (۳)

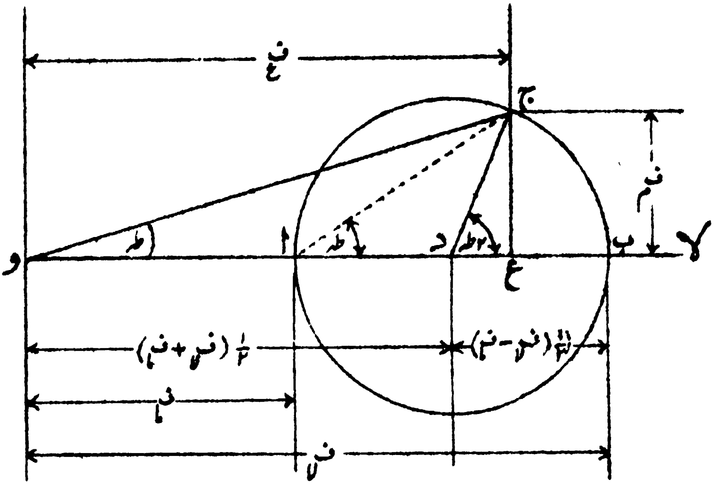
اور اس طرح و ع زور فع کو تعبیر کرتا ہے۔

اور　ع ج = د ج جب ۲ طہ = ½ (ف۱ ـ ف۲) جب ۲ طہ ...... (۴)

اور اس طرح ع ج زور فم کو تعبیر کرتا ہے۔

اس لیے و ج، جو علی القوائم اجزائے ترکیبی و ع اور ع ج کا سمتی مجموعہ
ہے، حاصل زور ف کی مقدار کو تعبیر کریگا اور زاویہ ف یا ج و ع عماد کے ساتھ
حاصل زور کے میلان کو ظاہر کریگا۔

نمونہ ۱۱ دائری زور نقشہ (شکل ۱۱ـ۱) کو دیکھنے سے چند باتیں فوراً واضح



شکل ۱۱ـ۱

ہو جاتی ہیں مثلاً یہ کہ فم کی اعظم قیمت $\frac{1}{2}$ (ف۱ - ف۲) اس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ ۲ ط = ۹۰° یا ۲۷۰° یعنی جب کہ ط = ۴۵° یا ۱۳۵° اور یہ کہ عماد سے حاصل زور کے میلان فہ کی اعظم قیمت اُس وقت ہوتی ہے جب کہ وج زور دائرے کو مَس کرے یعنی جب کہ

$$\text{جب فہ} = \frac{ف_۱ - ف_۲}{ف_۱ + ف_۲} \quad ....(5)$$

جو مساوات (ج) دفعہ ۱۵ کے مطابق ہے۔

شکل ۱۱ـ۱ میں جو دائرہ کھینچا گیا ہے یہ دو موافق زوروں کی صورت کے لیے ہے اور اس میں و دائرے کے باہر واقع ہوتا ہے۔ لیکن ظاہر ہے کہ اگر مثلاً ف۲ گھٹ کر صفر ہو جائے تو نقاط و اور ا ایک دوسرے کے قریب آ کر

منطبق ہو جائینگے اور جب ف۲ کی علامت ف۱ کے مخالف ہو جائے تو و دائرے کے اندر آجائیگا اور ف۱ مقدار میں (بلا لحاظ علامت) ف۲ سے بڑا ہو تو و نقاط ا اور د کے درمیان واقع ہوگا۔

دائری زور نقشے سے بعض ایسے مسائل کا حل آسانی سے نکل آتا ہے جو دوسرے طریقوں کی ریاضیاتی بحث سے مشکل سے نکلتے ہیں۔ اگر کافی معطیات دیے گئے ہوں تو دائرہ آسانی سے حاصل ہو جاتا ہے اور اس کی مدد سے کسی مستوی پر زور معلوم ہو جاتے ہیں۔ مثلاً اگر دو مستویوں پر کے عمادی اور مماسی زور دیے گئے ہوں تو ان زوروں کو محور ولا پر اور اس کے علی القوائم محور ماننے سے دائرے کے دو نقاط حاصل ہو جائینگے۔ اب ان دو نقاط کو ملانے والے وتر کا منصف محور ولا کو جہاں ملے وہ دائرے کا مرکز د ہوگا۔ اب اس دائرے کو کھینچ لیا جا سکتا ہے۔ اس کے بعد صدر زور اور کسی اور مستوی پر کے زور آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔ بعض مسائل کا حل محض خطوط کو پیمانے پر کھینچنے سے یا نقشے سے مثلثی حسابات کے ذریعے حاصل ہو جاتا ہے۔

ایک اہم صورت یہ ہے کہ دو علی القوائم مستویوں کے عمادی اور مماسی زور معلوم ہوں۔ اگر ان مستویوں کے زاویے بڑے صدر زور ف۱ کے مستوی سے ط۱ اور ط۱ + ۹۰° ہوں تو زور دائرے میں ان کے متناظر سمتی نیم قطر ولا سے زاویے ۲ط۱ اور ۲ط۱ + ۱۸۰° بنائینگے (شکل ۱۷-۱) یعنی ایک ہی خطِ مستقیم میں ہونگے اور اس طرح دائرے کا ایک قطر ہونگے۔ نقشے کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ نہ صرف دونوں مستویوں کے مماسی زور فم مساوی ہیں بلکہ ولا پر دونوں سمتی نیم قطروں کے ظل مساوی ہیں اس لیے ایک کا عمادی جزوِ ترکیبی یعنی فع کی ایک قیمت فہ مقدار ½(ف۱ + ف۲) سے اتنی ہی زیادہ ہے جتنی دوسری قیمت فہ اس مقدار سے کم ہے۔ یا بالفاظِ دیگر

فم + فہ = ف۱ + ف۲ .... (۶)

اور یہ ربط طہ = طہ اور طہ + ۹۰ رکھنے سے مساوات (۱) سے ظاہر ہوتا ہے۔

زور دائرے سے دفعہ ۱۸ میں کچھ مزید بحث کی گئی ہے۔[1]

۱۷۔ صدر زور ـــــ جب اجسام چند خاص سمتوں میں معلومہ زوروں کے زیر عمل ہوں اور یہ سب عمادی زور نہ ہوں تو ہم مختلف مستویوں کے زور گزشتہ دو دفعات کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں بشرطیکہ پہلے صدر مستوی اور صدر زور معلوم کرلیں (دیکھو دفعہ ۱۴)۔ ایسی صورتوں میں اکثر صدر زوروں کو معلوم کرنا بجائے خود بھی اہم ہوتا ہے کیونکہ ہم بیان کر چکے ہیں کہ ان میں سے ایک اس شے کے اندر کا اعظم زور ہوتا ہے۔ ہم یہاں چند سادہ دو ابعادی صورتوں میں جہاں شکل کے علی القوائم زور صفر ہے صدر زور اور مستوی معلوم کرینگے۔ صفحہ ۲۷

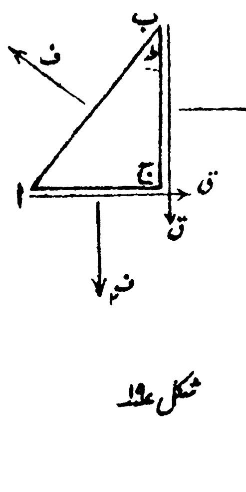
اس کی ایک بہت سادہ مثال دفعہ ۸ کی صورت ہے۔ اس میں یہ دکھایا گیا کہ دو علی القوائم مستویوں پر جو مساوی حدت کے جزی زور ہیں اُن سے اس کے

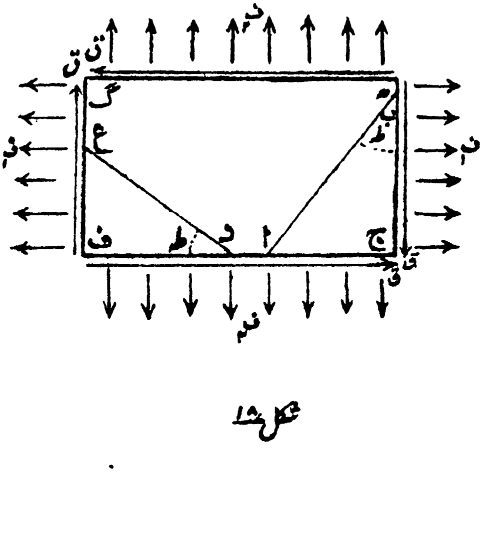
[1] اس سے بحث کا ایک اَور طریقہ اور چند استعمالات ڈاکٹر سُوفٹ Dr. H. W. Swift کے مضمون "زور کی ایک ترسیمی تحلیل"[2] میں ملینگے جو رسالہ "انجینیر" ۲۶ اگست ۱۹۲۷ء میں شایع ہوا ہے۔

[2] A Graphical Analysis of Stress

مساوی حدت کے صدر زور پیدا ہوتے ہیں اور یہ ایسے مستویوں پر ہوتے ہیں جو خالص جز کے مستویوں سے $\frac{\pi}{4}$ کا زاویہ بناتے ہیں۔

ایک دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ دو علی القوائم مستویوں پر مساوی حدت ق کے جزی زوروں کے علاوہ حدت ف۱ اور ف۲ کے عمادی زور بھی ہیں، دیکھو شکل ۱۸ جس میں اس شے کا ایک مستطیلی کندا دکھایا گیا ہے جس کی موٹائی شکل کے مستوی کے علی القوائم اکائی ہے شکل کے مستوی کے متوازی تمام مستویوں پر زور صفر ہے۔ ہم کندے کو اتنا چھوٹا





شکل ۱۹

شکل ۱۸

لے سکتے ہیں کہ اس کی کسی مستوی تراشش پر زور کی حدت کے تغیر کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ زوروں ف۱، ف۲، ق کو سمجھا جا سکتا ہے کہ معلومہ زوریں جو مختلف فسادی اثرات کے تحت پیدا ہو رہے ہیں اور ایک دوسرے پر غیر منحصر ہیں یا یہ کہ ترچھے زوروں کے اجزائے تحلیلی ہیں۔

اب صدر مستوی اور ان پر (عمادی) صدر زوروں کی حدت معلوم کرنا مطلوب ہے۔ شکل ۱۸ میں دیئے ہوئے عمادی زور ننا ؤ

صفحہ ۲۳ دکھائے گئے ہیں ۔ لیکن اگر یہ فشاری ہوں یا ایک فشاری دوسرا تنشی ہو تو بھی عمل یہی رہیگا ۔

فرض کرو کہ ایک صدر مستوی کا میلان چہرہ ب ج سے طہ ہے۔ تب مستوی ا ب ایک صدر مستوی ہوگا اور اُس پر زور ف بالکل عمادی ہوگا۔ اس مستوی سے جو فانہ ا ب ج قطع ہوتا ہے اُس کے تعادل پر غور کرو (اشکال ۱۸، ۱۹)۔

قوتوں کو ا ج کے متوازی تحلیل کرنے سے

ف × اب × جم طہ = ف۱ × ب ج + ق × ا ج

= ف۱ × اب جم طہ + ق × اب جب طہ

∴ (ف - ف۱) جم طہ = ق جب طہ

یا ف - ف۱ = ق مس طہ ....(۱)

ب ج کے متوازی تحلیل کرنے سے

ف × اب × جب طہ = ف۲ × ا ج + ق × ب ج

= ف۲ × اب جب طہ + ق × اب جم طہ

(ف - ف۲) جب طہ = ق جم طہ

یا ف - ف۲ = ق مم طہ ....(۲)

(۲) میں سے (۱) کو تفریق کرنے سے —

ف۱ - ف۲ = ق (مم طہ - مس طہ) = ۲ ق / مس ۲طہ

مس ۲طہ = ۲ ق / (ف۱ - ف۲) ....(۳)

اس سے طہ کی دو قیمتیں حاصل ہونگی جن میں ایک زاویہ قائمہ کا فرق ہوگا۔ یعنی دو صدر مستوی ہونگے جو باہم علی القوائم ہونگے۔

(۱) کو (۲) سے ضرب دینے سے

$$(\text{ف}-\text{ف}_1)(\text{ف}-\text{ف}_2)=\text{ق}^2 \quad \ldots\ldots (۴)$$

$$\text{ف}^2-\text{ف}(\text{ف}_1+\text{ف}_2)-(\text{ق}^2-\text{ف}_1\text{ف}_2)=۰$$

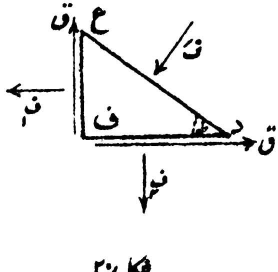
یا

$$\text{ف}=\tfrac{1}{2}(\text{ف}_1+\text{ف}_2)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1+\text{ف}_2)^2+(\text{ق}^2-\text{ف}_1\text{ف}_2)} \quad \ldots\ldots (۵)$$

یا

$$=\tfrac{1}{2}(\text{ف}_1+\text{ف}_2)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1-\text{ف}_2)^2+\text{ق}^2}$$

ف کی یہ دو قیمتیں دونوں صدر مستویوں پر کے (عمادی) زوروں کی حدتیں ہیں۔ علامت اوپر کی لی جائے تو بڑی قیمت حاصل ہوگی اور یہ اس کے متناظر صدر مستوی مستوی ا ب کی طرح کا ہوگا (اشکال ۱۸ٹ، ۱۹ٹ) اور اس پر ف کی علامت وہی ہوگی جو ف۱ اور ف۲ کی ہے۔ چھوٹی قیمت فَ کسی ایسے مستوی ع د پر کا زور ہوگا جو ا ب کے علی القوائم ہے (اشکال ۱۸ٹ، ۲۰ٹ)۔ اس قیمت فَ کی علامت ف۱ اور ف۲ کے مخالف ہوگی اگر ق² بڑا ہو ف۱ ف۲ سے۔



شکل ۲۰ٹ

اعظم جزکے مستوی ان صدر مستویوں سے ۴۵° کا زاویہ بنائینگے اور جزی زور کی اعظم حدت (دفعہ ۱۵)۔

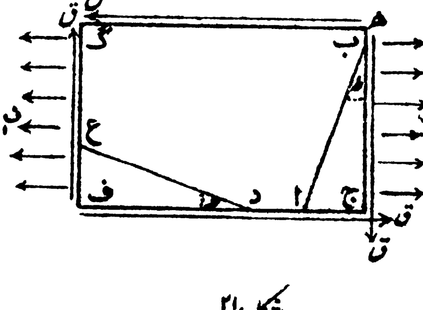
صفحہ

$$=\frac{\text{ف}-\text{فَ}}{2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1+\text{ف}_2)^2+\text{ق}^2-\text{ف}_1\text{ف}_2}$$

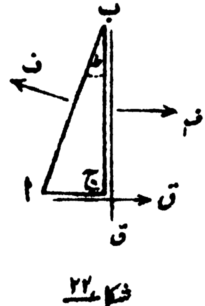
$$=\sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1-\text{ف}_2)^2+\text{ق}^2}$$

اگر ف اور ف میں سے کسی کی علامت منفی ہو تو ظاہر ہے کہ نتائج (۳) اور (۴) میں کیا ترمیم کرنی چاہیے۔ اگر ف صفر ہو تو اس کو مندرج کرنے سے (۳) اور (۴) مختصر ہو جاتے ہیں۔ لیکن یہ صورت خاص اہمیت رکھتی ہے اس لیے عام صورت سے اخذ کرنے کی بجائے ہم اس پر آئندہ دفعہ میں علٰحدہ غور کرینگے۔

۱۸ - صدر مستوی اور زور جب کہ اتمامی جزی زوروں کے ساتھ ایک جزی زور کے مستوی پر عمادی زور ہو۔ شکل ۲۱ میں ایک مستطیلی کنڈے گ ھ ج ف پر عمل کرنے والی قوتیں دکھائی گئی ہیں۔ کنڈے کی موٹائی شکل کے علی القوائم اکائی ہے اور شکل کے متوازی اس کے ابعاد بے انتہا چھوٹے ہیں اِلّا اس کے کہ زور یکساں ہوں۔ فرض کرو کہ ایک صدر مستوی ا ب کا میلان مستوی ب ج سے ، جس پر عمادی زور کی حدت ف ہے اور جزی زور کی حدت ق ہے، ط ہے اور فرض کرو کہ ا ب پر کے بالکل عمادی زور کی حدت ف ہے۔ چہرے ف ج پر صرف جزی زور ہے جس کی حدت ق ہے۔



شکل ۲۱



شکل ۲۲

فانہ ا ب ج کے تعادل پر غور کرو۔ قوتوں کو ا ج کے متوازی تحلیل کرنے سے (اشکال ۲۱ ، ۲۲) —

ف × اب × جم ط = ف$_1$ × ب ج + ق × اج

= ف$_1$ × اب × جم ط + ق × اب × جب ط

(ف − ف$_1$) جم ط = ق جب ط

(ف − ف$_1$) = ق مس ط .... (۱)

ب ج کے متوازی تحلیل کرنے سے ـــــ

ف × اب × جب ط = ق × ب ج = ق × اب × جم ط

مس ط = $\frac{\text{ق}}{\text{ف}}$ .... (۲)

اس کو (۱) میں مس ط کی جگہ مندرج کرنے سے ـــــ

ف − ف$_1$ = $\frac{\text{ق}^2}{\text{ف}}$

ف^2 − ف$_1$ ف − ق^2 = ۰

یا ف = $\frac{1}{2}$ ف$_1$ ± $\frac{1}{2}\sqrt{\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2}$ .... (۳)

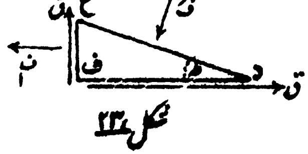
ف کی ان قیمتوں کو (۲) میں مندرج کرنے سے ط کی قیمتیں معلوم ہونگی۔ یہ قیمتیں بقدر ایک قائمہ کے مختلف ہونگی۔ یعنی صدر مستوی باہم علی القوائم ہونگے۔ صفحہ ۲۵

اب (شکل ۲۲) اعظم زور کا صدر مستوی ہے جس کے لیے

ف = $\frac{1}{2}$ ف$_1$ + $\frac{1}{2}\sqrt{\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2}$

اور ع د (شکل ۲۳) دوسرا صدر مستوی ہے جس پر عمادی زور

ث = $\frac{1}{2}$ ف$_1$ − $\frac{1}{2}\sqrt{\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2}$



شکل ۲۳

اس کی علامت ف۱ کے مخالف ہے۔

اعظم جز کے مستوی صدر مستویوں سے ۴۵° کے زاویے پر ہونگے (دفعہ ۱۵) اور ان پر جزی زور کی حدت

$$= \frac{ف - فَ}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{ف_۱^۲ + ق^۲} \quad ....(۴)$$

اگر ایک شے مرکب زور کے تحت ہو اور اس کے ایک نقطے سے ایک طریق کھینچا جائے (مثلاً ایسے مستوی میں جس پر زور صفر ہے اشکال ۱۰۵ تا ۲۲۴) جس کے ہر نقطے پر صدر زور کا محور طریق کا مماس ہو تو صدر زور کا منحنی حاصل ہوگا۔ یہ منحنی صدر زور کے منحنیوں کے ایک اور سلسلے کو علی القوائم قطع کریگا (دیکھو شکل ۱۰۵)۔ یہ زور کا خط عموماً منحنی ہوتا ہے کیونکہ کسی ثابت سمت میں متوازی مستویوں پر عمادی اور مماسی زور نقطہ بہ نقطہ بدلتے ہیں۔ بالفاظ دیگر کسی نقطے سے پاس کے نقطے تک صدر زور عموماً حدت اور سمت میں بدلتے ہیں۔

مثال — کسی شے کے اندر ایک نقطے پر ایک خاص مستوی پر حاصل زور کی حدت ۴ ٹن فی مربع انچ (تنشی) ہے اور اس مستوی کے عماد سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ اس کے علی القوائم مستوی پر زور کے عمادی جزو تحلیلی کی حدت ۲½ ٹن فی مربع انچ تنشی ہے۔ معلوم کرو (۱) دوسرے مستوی پر کا حاصل زور (۲) صدر مستوی اور زور۔

(۱) پہلے مستوی پر مماسی زور

ق = ۴ جب ۳۰° = ۲ ٹن فی مربع انچ

اس لیے دوسرے مستوی پر بھی مماسی زور ۲ ٹن فی مربع انچ ہوگا (دفعہ ۸)۔ اور حاصل زور

$$ف = \sqrt{(۲٫۵)^۲ + ۲^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴۱} = ۳٫۲$$ ٹن فی مربع انچ

(۲) پہلے مستوی پر عمادی زور کی حدت

= ۴ جم ۳۰° = ۳٫۴۶۴ ٹن فی مربع انچ

اس لیے صدر زور حسب ذیل ہونگے (دفعہ ۱۷(۵)):۔

$$ف = \frac{۲٫۵ + ۳٫۴۶۴}{۲} \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{(۲٫۵ - ۳٫۴۶۴)^۲ + ۲^۲}$$

$$= ۲٫۹۸۲ \pm \sqrt{۰٫۲۳ + ۴}$$

صفحہ ۲۶

$$= ۲٫۹۸۲ \pm ۲٫۰۶$$

= ۵٫۰۴۲ ٹن فی مربع انچ تناؤ اور ۰٫۹۲۲ ٹن فی مربع انچ تناؤ.

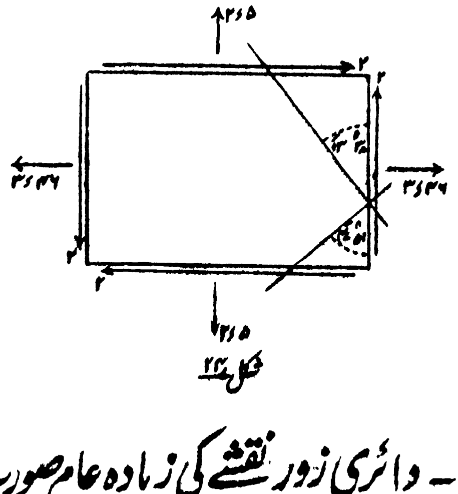
اگر ایک صدر مستوی کا زاویہ پہلے مستوی سے ط ہو تو دفعہ ۱۷(۳) سے

$$مس ۲ط = \frac{۲ \times ۲}{۲٫۵ - ۳٫۴۶۴} = \frac{۴}{۰٫۹۶۴} = ۴٫۱۴۹$$

$$۲ط = ۷۶^\circ ۲۷'$$

$$ط = ۳۸^\circ ۱۳٫۵'$$

اس لیے صدر مستوی اور زور یہ ہوئے کہ ایک صدر مستوی پہلے دیے ہوئے مستوی سے $۳۸^\circ ۱۳٫۵'$ کے زاویے پر ہے اور اس پر تنشی زور ۵٫۰۴۲ ٹن فی مربع انچ ہے اور دوسرا اس کے علی القوائم یا پہلے مستوی سے $۵۱^\circ ۴۶٫۵'$ کے زاویے پر ہے اور اس پر تنشی زور ۰٫۹۲۲ ٹن فی مربع انچ ہے ۔ یہ مستوی شکل ۱۲ میں دکھائے گئے ہیں۔



شکل ۱۲

۱۸ ۲ ـ دائری زور نقشے کی زیادہ عام صورت ـــ چونکہ

بعض طبائع کو ترسیمی طریقے زیادہ مرغوب ہوتے ہیں اس لیے گزشتہ تین دفعات کی تحلیل کا ایک متبادل طریقہ یہاں بتایا جاتا ہے۔ ایک شئے کے اندر جس میں ایک مستوی کے علی القوائم زور صفر ہوں یعنی زور صرف دو ابعادی ہوں کسی سمت میں زوروں کے اجزائے ترکیبی کمعلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ ا ب ج (شکل ۲۲ ا) ایک بے انتہا چھوٹے منشوری ٹکڑے کو تعبیر کرتا ہے جس کے دو علی القوائم چہروں ب ج اور ا ج پر زور کے عمادی اجزائے ترکیبی کی حدت $\text{ف}_{۱}$ اور $\text{ف}_{۲}$ ہیں۔ یہ دونوں چہرے شکل کے مستوی کے علی القوائم ہیں جس کے علی القوائم زور صفر ہے۔ اور فرض کرو کہ ان دونوں چہروں پر جزی زور کی حدت جو دونوں پر مساوی ہوگی ق ہے اور ان کی سمت وہ ہے جو شکل میں دکھائی گئی ہے۔

تب منشور کے چہروں کا طول شکل کے علی القوائم اکائی لینے سے اور چہرہ ا ب کے علی القوائم تحلیل کرنے سے

$$\text{ف}_{ع} \times \text{اب} = \text{ف}_{۱} \times \text{ب ج جم ط} + \text{ف}_{۲} \times \text{اج جب ط}$$
$$+ \text{ق} \times \text{ب ج جب ط} + \text{ق} \times \text{اج جم ط}$$

یا $$\text{ف}_{ع} = \text{ف}_{۱}\,\text{جم}^{۲}\text{ط} + \text{ف}_{۲}\,\text{جب}^{۲}\text{ط} + \text{۲ق جب ط جم ط}$$

یا $$\text{ف}_{ع} = \tfrac{۱}{۲}(\text{ف}_{۱} + \text{ف}_{۲}) + \tfrac{۱}{۲}(\text{ف}_{۱} - \text{ف}_{۲})\,\text{جم ۲ط} + \text{ق جب ۲ط}$$
(۱)..........

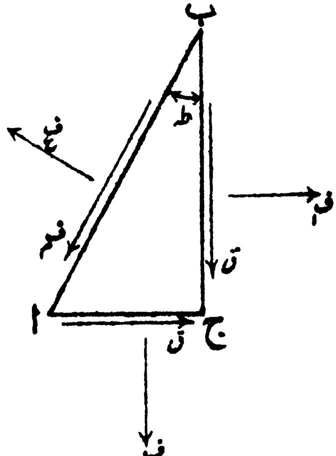
صفحہ ۴۲ اور چہرہ ا ب کے متوازی تحلیل کرنے سے

$$\text{ف}_{م} \times \text{اب} = \text{ف}_{۱} \times \text{ب ج جب ط} - \text{ف}_{۲} \times \text{اج جم ط} + \text{ق} \times \text{اج جب ط}$$
$$- \text{ق} \times \text{ب ج جم ط}$$

یا $$\text{ف}_{م} = \text{ف}_{۱}\,\text{جب ط جم ط} - \text{ف}_{۲}\,\text{جب ط جم ط} + \text{ق}\,(\text{جب}^{۲}\text{ط} - \text{جم}^{۲}\text{ط})$$

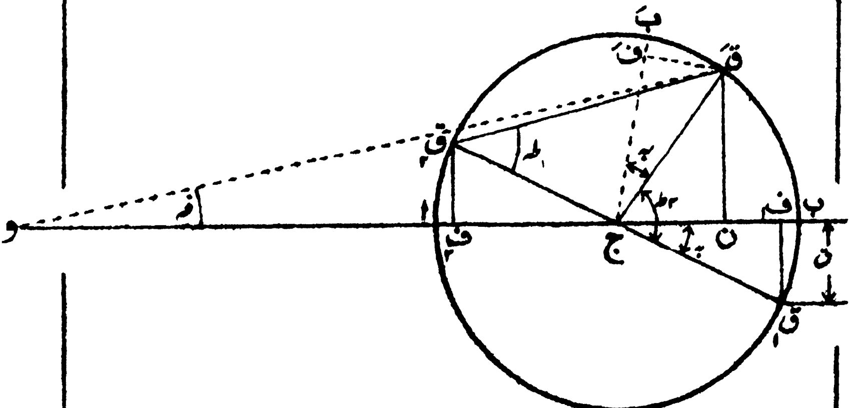
یا $$\text{ف}_{م} = \tfrac{۱}{۲}(\text{ف}_{۱} - \text{ف}_{۲})\,\text{جب ۲ط} - \text{ق جم ۲ط} \quad \text{........(۲)}$$

زور کے ان دونوں اجزائے ترکیبی اور ان کے حاصل کو ایک سادہ نقشے سے



شکل ۱۲۴

تعبیر کیا جاسکتا ہے جس کو دائری زور نقشہ کہا جاتا ہے - اس کو کھینچنے کے لیے و سے (شکل ۱۲۴ ب) ایک اساسی خط و ب پر طول و ف$_1$ جو ف$_1$ کو پیمانے پر تعبیر کرے اور و ف$_2$ جو ف$_2$ کو تعبیر کرے - ف$_1$ سے اساسی خط کے



شکل ۱۲۴ ب

علی القوائم خط ف۱ ق کھینچو جس کا طول منتخبہ پیمانے پر ق کو تعبیر کرے۔ تب اگر ف۱ ف۲ کی ج پر تنصیف کی جائے تو ظاہر ہے کہ و ج مقدار ½ (ف۱ + ف۲) کو اور ج ف۱ = ج ف۲ مقدار ½ (ف۱ - ف۲) کو تعبیر کرینگے۔ شکل ۲۴

اب اگر ج کو مرکز مان کر ق میں سے گزرنے والا دائرہ کھینچا جائے تو یہ زور کا دائرہ ہوگا جس کے ذریعے زیر بحث نقطے میں سے (جس پر دیے ہوئے زور ف۱، ف۲ اور ق عمل کرتے ہیں) شکل کے علی القوائم گزرنے والے کسی مستوی پر کے زور کے اجزائے ترکیبی اور حاصل زور معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

ایک ایسے مستوی پر زور معلوم کرنے کے لیے جو شکل ۲۴ا کے مستوی کے علی القوائم ہو اور اس مستوی سے زاویہ طہ بنائے جس پر عمادی زور ف۱ ہے، ج پر ایک زاویہ ق ج قَ = ۲طہ بناؤ یا قطر ق ج ق۲ کے سرے ق۲ پر زاویہ ج ق۲ قَ = طہ بناؤ۔ اس سے محیط پر نقطہ قَ معین ہوگا۔ تب اگر قَ سے اساسی خط و ب پر عمود قَ ن کھینچا جائے تو طول

و ن = و ج + ج ن

= ½ (ف۱ + ف۲) + ½ (ف۱ - ف۲) جم ۲طہ + ق جب ۲طہ .... (۳)

اور یہ فع کی قیمت ہے جو مساوات (۱) میں دی گئی ہے۔ اور طول

قَ ن = ½ (ف۱ - ف۲) جب ۲طہ - ق جم ۲طہ .... (۴)

اور یہ فم کی قیمت ہے جو (۲) میں دی گئی ہے۔

یہ دو ربط (۳) اور (۴) آسانی سے تصور میں آئینگے[1] اگر یہ تصور کیا

---

[1] یا متبادلاً اس طرح کہ اگر زور دائرے کا نصف قطر س ہو تو مساوات (۱) میں ج ف۱ یا ½ (ف۱ - ف۲) کی بجائے س جم بہ اور ف۱ ق یا ق کی بجائے س جب بہ مندرج کرنے سے

فع = ½ (ف۱ + ف۲) + س جم ۲طہ جم بہ + س جب ۲طہ جب بہ

= و ج + س جم (۲طہ - بہ) = و ج + ج ن = و ن

اور مساوات (۲) سے

فم = س جب ۲طہ جم بہ - س جم ۲طہ جب بہ

= س جب (۲طہ - بہ) = قَ ن

جائے کہ سمتی نیم قطر ج ق زاویہ ۲ط کے بقدر گھمایا گیا ہے اور وہ اپنے ساتھ ج ب اور ف_1 ق_1 کو نئی وضعوں ج بَ اور فَ قَ میں پہنچا دیتا ہے۔ اب ج فَ کو جو $\tfrac{1}{2}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)$ کو تعبیر کرتا ہے اور فَ قَ کو جو ق کو تعبیر کرتا ہے اساسی خط پر اور اس کے علی القوائم تحلیل کیا جائے۔ تب ظاہر ہے کہ و ن اور ن قَ زیر بحث مستوی پر زور کے اجزائے ترکیبی $\text{ف}_{\text{ع}}$ اور $\text{ف}_{\text{م}}$ کو تعبیر کریں گے اور و قَ حاصل زور ف کو تعبیر کریگا۔

شکل ۱۲ ب سے $\text{ف}_{\text{ع}}$، $\text{ف}_{\text{م}}$ اور ف کے تغیرات کا آسانی سے مطالعہ کیا جا سکتا ہے۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے کہ دائرے کا نصف قطر

$$\text{ر} = \sqrt{\text{ج ف}_1^2 + \text{ف}_1\text{ق}_1^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2 + \text{ق}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

یہ ظاہر ہے کہ موجودہ صورت میں جب کہ ف_1 اور ف_2 مثبت ہیں:—

(۱) $\text{ف}_{\text{ع}}$ کی قیمت دو حدوں کے درمیان رہتی ہے۔ بالائی حد

$$= \tfrac{1}{2}(\text{ف}_1 + \text{ف}_2) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2 + \text{ق}^2}$$

اور یہ قیمت اُس وقت ہوتی ہے جب کہ

$$\text{۲ط} = \text{ب} \quad \text{یا مس ۲ط} = \frac{\text{۲ق}}{\text{ف}_1 - \text{ف}_2}$$

یعنی جب کہ قَ نقطہ ب پر منطبق ہو۔ اور نچلی حد
(جب کہ قَ نقطہ ا پر منطبق ہو)

$$= \tfrac{1}{2}(\text{ف}_1 + \text{ف}_2) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2 + \text{ق}^2}$$

اور یہ اس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ

$$\text{۲ط} = \text{ب} + 180^\circ \quad \text{یا} \quad \text{ط} = \tfrac{1}{2}\text{ب} + 90^\circ$$

یعنی اُس مستوی کے علی القوائم مستوی پر جس کے لئے فع بالائی حد کو پہنچتا ہے ۔

(ب) طہ کی ان دو قیمتوں کے لیے جو فع کی حدوں یا فاصل قیمتوں کے متناظر ہیں فم کی قیمت صفر ہوتی ہے ۔ صفحہ ۲۹

(ج) فم کی قیمت دو حدوں کے درمیان رہتی ہے ۔ ایک حد

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2 + \text{ق}^2}$$

جو اس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ

$$2\,\text{طہ} = \text{بہ} + 90^\circ \quad \text{یا} \quad \text{طہ} = \tfrac{1}{2}\,\text{بہ} + 45^\circ$$

اور دوسری حد

$$= -\sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2 + \text{ق}^2}$$

جو اس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ

$$2\,\text{طہ} = \text{بہ} + 270^\circ \quad \text{یا} \quad \text{طہ} = \tfrac{1}{2}\,\text{بہ} + 135^\circ$$

فم کی انتہائی قیمتیں دینے والے مستوی فع کی انتہائی قیمتوں کے مستویوں سے ۴۵° کے زاویے بناتے ہیں ۔

(د) حاصل زور عادی زور فع کے ساتھ اپنی انتہاؤں کو پہنچتا ہے یعنی ۲ طہ = بہ اور ۲ طہ = بہ + ۱۸۰° کے لیے اور اس کی انتہائی قیمت وہی ہوتی ہے جو ان مستویوں پر فع کی ہوتی ہے کیونکہ وہاں فم صفر ہوتا ہے ۔ اس طرح یہ قیمتیں صدر زور ہوئیں اور ان کو لکھا جا سکتا ہے :

$$\text{ف}_1 = \tfrac{1}{2}(\text{ف}_1 + \text{ف}_2) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2 + \text{ق}^2}$$

جو ۲ طہ = بہ کے لیے ہے ۔ اور

$$\text{ف}_2 = \tfrac{1}{2}(\text{ف}_1 + \text{ف}_2) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2 + \text{ق}^2}$$

جو ۲ طہ = بہ + ۱۸۰° کے لیے ہے ۔

(ر) چونکہ مس فہ = $\frac{\text{ف}_{\text{م}}}{\text{ف}_{\text{ع}}}$ اس لیے زاویہ فہ یا قَ وْن سے حاصل زور (ف) کا میلان جس مستوی پر وہ عمل کرتا ہے اُس کے عاد کے ساتھ معلوم ہوگا - اور فہ کی قیمت اعظم اُس وقت ہوتی ہے جب کہ ف کو تعبیر کرنے والا سمتی و قَ زور دائرے کا مماس ہو اور اس وقت

$$\text{جب فہ} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2 + \text{ق}^2}}{(\text{ف}_1 + \text{ف}_2)} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ف}_1 - \text{ف}}{\text{ف}_1 + \text{ف}}$$

اگر زور ف_1 اور ف_2 مختلف العلامت ہوں مثلاً ف_2 منفی ہو تو گزشتہ نتائج میں اس کی علامت کو تبدیل کر دینا کافی ہے - لیکن اگر طلبہ اس صورت کے لیے زور دائرہ علیحدہ کھینچ لیں اور اہم نتائج کا اقتباس کریں تو ان کو مفید ہوگا - ظاہر ہے کہ اس صورت میں نقطہ و دائرے کے اندر نقاط ف_1 اور ف_2 کے درمیان واقع ہوگا اور ذیل کے نتائج اہمیت رکھینگے اور محض زور دائرے کا خاکہ کھینچ لینے سے واضح ہو جائینگے -

(س) دو مستوی ہونگے جن پر عمادی زور صفر ہوگا اور اس طرح یہ خالص جزی زور کے تحت ہونگے (ان مستویوں کے لیے ن ثابت نقطہ و پر منطبق ہوگا) -

(ص) ف_1 کی سمت میں سادہ تناؤ ہونے کی صورت میں ف_2 صفر ہوگا اور و اور ف_2 دونوں قطر ا ب کے سرے (ا) (شکل ۱۲ الف ب) پر منطبق ہونگے - اعظم جزی زور کی مقدار $\frac{1}{2}\text{ف}_1$ ہوگی -

(ط) اگر $\text{ف}_2 = -\text{ف}_1$ اور ق = ۰ یعنی ف_1 اور ف_2 صدر زور ہوں تو و نقطہ ج پر منطبق ہوگا اور اعظم جزی زور کی مقدار دائرے کے نصف قطر ف_1 کے مساوی ہوگی اور یہ اُن مستویوں پر ہوگی جو صدر مستویوں سے ۴۵° کے زاویے بنائیں (۲ طہ = ۹۰°) -

۱۹۔ صدر فساد ـــــ کسی شے کی ایک سلاخ میں کامل لچک کی حدود کے اندر کسی زور (مثلاً تنشی زور) $ف_1$ ہے، اگر شے پر یہی ایک زور ہو اور عرضی سکڑاؤ کی آزادی ہو تو، اس زور کی سمت میں ایک فساد $س_1$ پیدا ہوگا جہاں

$$س_1 = \frac{ف_1}{ے}$$

نوٹ جہاں ے ینگ کا لچک کا مقیاس یا کھنچاؤ کا مقیاس ہے۔ زور $ف_1$ کے محور کے علی القوائم ہر سمت میں سکڑاؤ کا فساد

$$\frac{ف_1}{م ے}$$

ہوگا جہاں $\frac{1}{م}$ پوائی سن (Poisson) کی نسبت ہے۔

متساوی السموت شے میں یعنی ایسی شے میں جس کے ہر سمت میں لچک کے خواص وہی ہوں $ف_1$ کی سمت کے علی القوائم ایک ہی زور $ف_2$ عمل کرے تو اس کے اثر سے خود اس کی سمت میں فساد

$$س_2 = \frac{ف_2}{ے}$$

پیدا ہوگا اور اس کے علی القوائم سمتوں میں جن میں سے ایک سمت فساد $\frac{ف_1}{ے}$ کی بھی ہے، سکڑاؤ کا فساد

$$\frac{ف_2}{م ے}$$

پیدا ہوگا۔ اسی طرح ایک زور $ف_3$ ان دونوں زوروں کے علی القوائم عمل کرے تو وہ اپنی سمت کے طولی فساد کے علاوہ اپنے علی القوائم ہر سمت میں سکڑاؤ کا فساد

$$\frac{ف_3}{م ے}$$

Lateral ؏

پیدا کریگا۔ ان سمتوں میں ایک سمت $ف_1$ کی بھی ہوگی۔

اس طرح اگر ایک متساوی السموت شے میں کسی نقطے پر تین صدر زور حدتوں $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$ کے ہوں تو ہر ایک کا علیحدہ علیحدہ اثر وہی ہوگا جو تنہا عمل کرنے سے ہوتا۔ تینوں زوروں کی ایک ہی علامت لینے سے $ف_1$ کی سمت میں مجموعی فساد

$$س_1 = \frac{ف_1}{ے} - \frac{ف_2 + ف_3}{م\,ے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$ف_2$ کی سمت میں فساد

$$س_2 = \frac{ف_2}{ے} - \frac{ف_1 + ف_3}{م\,ے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اور $ف_3$ کی سمت میں فساد

$$س_3 = \frac{ف_3}{ے} - \frac{ف_1 + ف_2}{م\,ے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اگر اوپر کے زوروں میں سے کوئی مخالف علامت کا ہو یعنی موجودہ صورت میں فشاری ہو تو اوپر کی مساواتوں میں اس کی علامت بدل دینی چاہیے۔

۲۰۔ فساد کا ناقص نما —— گزشتہ دفعہ کے حروف استعمال کریں تو کسی نقطے پر جس پر صدر زور $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$ ہوں ان سمتوں کے علاوہ صفحہ ۳۱ دوسری سمتوں کے فساد حسب ذیل طریقے پر تعبیر کیے جا سکتے ہیں۔

ایک کرہ کا تصور کرو جس کا مرکز زیر بحث نقطہ ہو اور اس کے جو تین باہم علی القوائم قطر تینوں صدر زوروں کی سمتوں میں ہیں اُن میں وہ فساد تصور کرو جو دفعہ ۱۹ کی مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ نیز یہ کہ ہر اُس خط میں جو $ف_1$ کی سمت کے متوازی ہے فساد $س_1$ ہوا ہے۔ ہر اُس خط میں جو $ف_2$ کے متوازی ہے فساد $س_2$ اور $ف_3$ کے متوازی ہر خط میں فساد $س_3$ ہوا ہے۔ ان فسادوں کے زیر اثر کرہ ایک ناقص نما بن جائیگا اور مرکز سے جو سمتی نیم قطر

ناقص نماتک کھینچے جائیں وہ اپنی اپنی سمتوں میں کرہ کے نصف قطر کے اس طول کو تعبیر کرینگے جو فساد کے بعد ہوگیا ہے۔

۲۱ ۔ لچک کے مرممہ مستقل ـــــ ینگ کے مقیاس کی

تعریف حسب ذیل ربط (دفعہ ۹) سے کی گئی تھی

$$ے = \frac{ف_۱}{س_۱}$$

جہاں $س_۱$ وہ فساد ہے جو حدت $ف_۱$ کے تنشی زور سے پیدا ہو جس کے ساتھ اور کوئی زور عمل نہ کر رہا ہو۔ اگر اور کوئی صدر زور عمل کر رہے ہوں تو فساد بدل جائیگا اور اس طرح جو مستقل کہ مساوات

$$مقیاس = \frac{ف_۱}{س_۱}$$

سے حاصل ہوگا وہ معمولی کھنچاؤ کا مقیاس نہیں ہوگا، بلکہ اس کی ایک ترمیم یافتہ شکل ہوگی۔ مختلف حالات کے تحت اس کی مختلف قیمتیں حاصل ہونگی۔

مثال ۱ ۔ اگر ایک سلاخ اس طرح کھینچی جائے کہ تمام عرضی[1] فساد رک جائے تو مقیاس کی کیا قیمت ہوگی؟

ان حالات کے تحت دفعہ ۱۹ کی مساواتیں حسب ذیل ہو جائینگی :۔

$$(۱) \qquad س_۱ = \frac{ف_۱}{ے} - \frac{ف_۲ + ف_۳}{م ے}$$

$$(۲) \qquad س_۲ = ۰ = \frac{ف_۲}{ے} - \frac{ف_۱ + ف_۳}{م ے}$$

$$(۳) \qquad س_۳ = ۰ = \frac{ف_۳}{ے} - \frac{ف_۱ + ف_۲}{م ے}$$

ظاہر ہے کہ $ف_۲ = ف_۳$

[1] Lateral

اور (۲) سے $\frac{\text{ف}_2}{\text{ے}} = \frac{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}{\text{م}\,\text{ے}}$

یا $\text{ف}_2\left(1 - \frac{1}{\text{م}}\right) = \frac{\text{ف}_1}{\text{م}}$

یا $\text{ف}_2 = \frac{\text{ف}_1}{\text{م} - 1}$

اور (۱) سے $\text{س}_1 = \frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_1 - \frac{2}{\text{م}}\,\text{ف}_2\right) = \frac{\text{ف}_1}{\text{ے}}\left(1 - \frac{2}{\text{م}} \times \frac{1}{\text{م} - 1}\right)$

$$= \frac{\text{ف}_1}{\text{ے}}\,\frac{(\text{م} - 2)(\text{م} + 1)}{\text{م}\,(\text{م} - 1)}$$

یا $\text{ف}_1 = \text{س}_1 \times \text{ے}\,\frac{\text{م}\,(\text{م} - 1)}{(\text{م} - 2)(\text{م} + 1)}$

یعنی مقیاس سادہ کھنچاؤ کے مقابلے میں جب کہ عرضی سکڑاؤ کی آزادی ہو $\frac{\text{م}\,(\text{م} - 1)}{(\text{م} - 2)(\text{م} + 1)}$ گنا ہوگیا۔ اگر م = ۴ تو مرمہ مقیاس ۱ء۲ سے ہوگا یعنی اگر عرضی فساد روک دیا جائے صفحہ ۲۳ تو ایک دیے ہوئے طولی فساد کو پیدا کرنے کے لیے عرضی حرکت کی آزادی کے مقابلے میں ۲۰ فی صدی زیادہ قوت کی ضرورت ہوتی ہے۔

مثال ۲ — ایک جوشارہ تختی میں ایک خاص نقطے پر تینوں صدر زوروں کی حدتیں ۴، ۳ اور صفر ٹن فی مربع انچ تناؤ ہیں۔ معلوم کرو کہ ۴ ٹن کے زور کی سمت میں کتنا زور اکیلا عمل کرکے یہی فساد پیدا کریگا۔ ینگ کے مقیاس اور استواری کے مقیاس کی نسبت $\frac{5}{2}$ ہے۔

دفعہ ۱۳ مساوات (۱) سے

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{\text{ے}}{2\,\text{س}} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

Lateral ے

اس لیے ۴ ٹن کے زور کی سمت میں

$$\text{فساد} = \frac{۴}{\text{ے}} - \frac{۱}{۴}\cdot\frac{۳}{\text{ے}} = \frac{۱۳}{۴}\times\frac{۱}{\text{ے}}$$

اگر اکیلے عمل کرکے یہ فساد پیدا کرنے کے لیے زور کی حدت ف درکار ہو تو

$$\frac{\text{ف}}{\text{ے}} = \frac{۱۳}{۴}\times\frac{۱}{\text{ے}}$$

یا $\text{ف} = \frac{۱۳}{۴} = ۳\frac{۱}{۴}$ ٹن فی مربع انچ

سوالات ۱

۱ ۔ نرم فولاد کی ایک گول بندھن سلاخ جس کا طول ۱۸ فٹ اور قطر $۱\frac{۱}{۲}$ انچ ہے ۷ ٹن کے تناؤ کے تحت $\frac{۱}{۱۶}$ انچ کھنچتی ہے۔ سلاخ کے اندر تنشی زور کی حدت، کھنچاؤ کے مقیاس کی قیمت اور کسی مائل تراشش پر جزی زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

۲ ۔ فولاد کی ایک سلاخ پر ۳ ٹن کا تناؤ تراش کے فی مربع انچ عمل کرتا ہے۔ ایک مائل مستوی پر جزی زور کی حدت ۱ ٹن فی مربع انچ ہے۔ اس مستوی کے عماد کا سلاخ کے محور کے ساتھ کیا میلان ہے۔ مستوی پر عمادی اور حاصل زور کی کیا حدت ہے۔ اس کے جو دو حل ممکن ہوں اُن میں سے وہ مستوی لو جس کا عماد محور سے کم سے کم زاویہ بنائے۔

۳ ۔ سوال ۱ میں جو سلاخ ہے اُس میں ایک مائل مستوی پر جزی زور کی حدت ۱٫۵ ٹن فی مربع انچ ہے۔ اس مستوی پر عمادی اور حاصل زور کی کیا حدت ہے۔ مستوی وہ لو جو محور سے زیادہ زاویہ بنائے۔

۴ ۔ ایک ڈھلے لوہے کے کھوکھلے استوانی ستون کا بیرونی قطر ۱۰ انچ، اندرونی قطر ۸ انچ اور طول ۱۰ فٹ ہے۔ ۶۰ ٹن کے بوجھ کے تحت اس کا طول کتنا کم ہوگا۔ ے کی قیمت ۸۰۰۰ ٹن فی مربع انچ لو۔

۵ ۔ فولاد کے ایک نمونے کے لیے لچک کے کھنچاؤ کا مقیاس $۲۸٫۵ \times ۱۰^{۶}$ پونڈ فی مربع انچ پایا گیا اور عرضی[ہ] مقیاس ۱۱×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ پایا گیا۔ اس شے کے لیے حجمی لچک کا مقیاس

ہ ـــ Transverse

کیا ہوگا اور کھنچاؤ سے طولی فساد اس کے ساتھ واقع ہونے والے جانبی[2] فساد کا کتنا گنا ہوگا۔

صفحہ ۳۳ ۶ — ایک جوشارہ تختی میں ایک نقطے پر تنشی (صدر) زور ۰، ۲، ۴ ٹن فی مربع انچ ہیں۔ اس نقطے پر ایسے مستوی پر عمادی اور مماسی زوروں کی حدتیں اور حاصل زور کی حدت اور سمت معلوم کرو جو پہلے صدر مستوی پر علی القوائم ہو اور ۴ ٹن صدر زور والے مستوی سے ۴۰° کا زاویہ بنائے۔

۷ — سوال ۶ کے معطیات لے کر اُس مستوی کے عماد کا زاویہ محور کے ساتھ معلوم کرو جس کا حاصل زور عماد سے ۱۵° کا زاویہ بنائے۔ اس حاصل زور کی حدت کیا ہوگی؟

۸ — ایک زیر فساد شے میں ایک نقطے پر صدر زور صفر اور ۵ ٹن فی مربع انچ تناؤ اور ۳ ٹن فی مربع انچ فشار ہیں۔ اُس مستوی پر حاصل زور کی حدت اور سمت معلوم کرو جو ۵ ٹن کے زور کے محور سے ۶۰° کا زاویہ بنائے اور صفر زور کے مستوی کے علی القوائم ہو۔ جزی زور کی اعظم حدت اس نقطہ پر کیا ہوگی۔

۹ — اگر ایک شے اس طرح فساد میں ہو کہ ایک خاص نقطے پر دو علی القوائم مستویوں پر عمادی زور کی حدتیں ۵ ٹن اور ۳ ٹن فی مربع انچ دونوں تناؤ ہوں اور ان مستویوں پر جزی زور کی حدت ۴ ٹن فی مربع انچ ہو تو اعظم راست زور اور وہ مستوی معلوم کرو جس پر یہ عمادی ہے۔

۱۰ — سوال ۹ کو حل کرو اگر ۳ ٹن فی مربع انچ کا زور فشاری ہو۔

۱۱ — ایک گرڈر کی کسی تراش کے ایک نقطہ پر ۴ ٹن فی مربع انچ کا تنشی زور اس تراش پر عمادی ہے۔ اور اس تراش پر ۲ ٹن فی مربع انچ کا جزی زور ہے۔ صدر مستوی اور زور معلوم کرو۔

۱۲ — ایک دھُرے میں ایک خاص نقطے پر ایک تراش کے مستوی میں ۳ ٹن فی مربع انچ کا جز ہے اور اس مستوی پر عماد ۲ ٹن فی مربع انچ تنشی زور ہے۔ راست زور اور جزی زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

۱۳ — ایک جوشارہ تختی میں خول کے محور کی سمت میں ۲½ ٹن فی مربع انچ کا تنشی زور ہے اور محور میں سے گزرنے والے ایک مستوی کے علی القوائم ۵ ٹن فی مربع انچ کا تنشی زور ہے۔ اگر پوائی سن[1] کی نسبت ¼ ہو تو کس حدت کا تنشی زور اکیلا عمل کر کے یہی اعظم تنشی فساد پیدا کرےگا۔

ا — Poisson ۲ — Latteral

۱۴ ـ دھات کا ایک اُستوانی ٹکڑا محور کی سمت میں فشار میں ہے۔ ایک اچھا بیٹھا ہوا ڈھلا بن جو تقریباً اس کے سارے طول پر ہے جانبی ے پھیلاؤ کو نصف کر دیتا ہے۔ "م" کی رقوم میں اس استوانے کے محوری فساد کی نسبت آزاد اُستوانے کے محوری فساد کے ساتھ معلوم کرو۔ (پوائسن کی نسبت = ۱/م)۔

۱۵ ـ فشار کے لیے ینگ کا جو مقیاس ہے اس میں اور اس مرممہ مقیاس میں نسبت معلوم کرو جو ایک سمت میں جانبی پھیلاؤ کو بالکل روک دینے سے حاصل ہو۔ پوائسن کی نسبت = ۱/م۔

۱۶ ـ اگر ایک فولادی سلاخ لچک کی حدود کے اندر سادہ تناؤ کے تحت اپنے طول کے ۱/۱۰۰۰ کے بقدر کھینچے تو حجم کے تغیر کی کسر معلوم کرو۔ پوائسن کی نسبت = ۱/۴ ۔

۱۷ ـ تین لمبے متوازی تار جو طول میں مساوی ہیں اور ایک ہی انتصابی مستوی میں ہیں ۳۰۰۰ پونڈ کا ایک بوجھ سہارتے ہیں۔ وسطی تار فولاد کا ہے اور باقی دو تار پیتل کے ہیں اور تینوں کی تراش ۱/۴ مربع انچ ہے۔ تاروں کو اس طرح ترتیب دینے کے بعد کہ ہر ایک پر ۱/۳ بوجھ پڑے ۷۰۰۰ پونڈ کا ایک اور بوجھ ڈالا جاتا ہے۔ ہر ایک تار کا زور اور کل زور کی کسر معلوم کرو جو ہر ایک تار برداشت کرے گا۔ ے کی قیمت فولاد کے لیے ۳۰×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ اور پیتل کے لیے ۱۲×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ لو۔

ے Lateral

صفحہ ۳۴

دُوسرا باب

دھاتوں کے میکانی خواص

۲۲ ۔ لچک ۔۔۔ کسی شے کو اُس وقت کامل لچکدار کہا جاتا ہے جب کہ زور ہٹا لینے پر اُس سے پیدا شدہ سارا فساد دُور ہو جائے ۔ خاص حدود کے اندر (دفعہ) بہت سی اشیا تقریباً کامل لچکدار ہوتی ہیں ۔

پیکر پذیری ۔۔۔ کسی شے کو کامل پیکر پذیر اُس وقت کہا جا سکتا ہے جب کہ زور ہٹا لینے پر فساد بجنسہٖ قائم رہے ۔

پیکر پذیر حالت میں، ٹھوس پر مختلف سمتوں میں زور نا مساوی ہوں تو وہ بہت کچھ ایک مائع کی طرح "بہاؤ" کا اظہار کرتا ہے ۔ "بہاؤ" کی اس خاصیت سے سیسے کے نل کے پچکارنے، تار کشی، سکوں پر ٹھپہ مارنے، اور گھڑائی، وغیرہ، میں کام لیا جاتا ہے ۔

تمدد ۔۔۔ کسی شے کی وہ خاصیت ہے جس سے اس کو تناؤ کے تحت کھینچ کر پتلا کیا جا سکتا ہے مثلاً جس طرح دھات کو ایک سوراخ میں سے کھینچ کر اس کا تار بنایا جاتا ہے ۔ تمددی تطویل کے دوران میں لچک اور پیکر پذیری دونوں کا اظہار ہوتا ہے ۔ پھوٹک پن تمدد کی کمی کا نام ہے ۔

اگر کسی شے کو پیٹ کر یا بیل کر اس کی تختیاں بنائی جا سکیں تو اس کو متورِّق کہا جاتا ہے ۔ تورق کی خاصیت تمدد کے مشابہ ہے ۔

۲۳۔ متمدد دھاتوں کا تنشی فساد۔ اگر ایک متمدد دھات پر تناؤ عمل کرے اور یہ تناؤ بتدریج بڑھتا جائے تو دیکھا گیا ہے کہ پیدا ہونے والے فساد طولی اور عرضی دونوں پہلے پہل زور کے تناسب میں بڑھتے ہیں۔ جب لچک کی حد آجائے تو فساد زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے اور بوجھ اور بڑھایا جائے فساد ایک بڑھتی ہوئی شرح سے بڑھتا رہتا ہے۔ لچک کی حد سے ذرا آگے بعض دھاتیں، جن میں نرم لوہے اور فولاد نمایاں ہیں، ایک نمایاں ناکارگی کا اظہار کرتے ہیں یعنی طول پہلے سے ایک دم بہت بڑھ جاتا ہے حالانکہ زور میں بہت کم اضافہ ہوا یا بالکل نہیں ہوا۔ جس زور پر یہ اچانک کھنچاؤ پیدا ہوتا ہے وہ ''نقطۂ مغلوبیت'' کہلاتا ہے۔

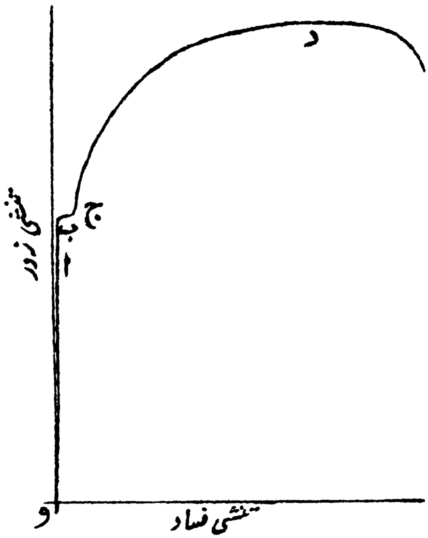
شکل ۲۵ میں ایک ۱۰ انچ طول اور ۱ انچ قطر کی گول فولادی سلاخ کا ''زور فساد'' منحنی دکھایا گیا ہے جس کے معین زور کی حدت کو تعبیر کرتے ہیں اور فصلے متناظر فساد کو۔ لچک کی حد ا پر واقع ہوتی ہے۔ و ا ایک خطِ مستقیم ہے۔ ب ''نقطۂ مغلوبیت'' ہے۔ ا ب کسی قدر منحنی ہے۔ نقطۂ مغلوبیت کا زور واقع ہو تو تمددی پھیلاؤ واقع ہوتا ہے اور زور بڑھے تو فساد اسراع کے ساتھ بڑھتا ہے جیسا کہ ج اور د کے درمیان کے منحنی سے ظاہر ہوتا ہے۔ نقطۂ مغلوبیت کے آگے فساد کی پیدایش اس طور پر نہیں ہوتی جس طور پر لچک کی حد کے اندر ہوتی ہے۔ فساد کا بڑا حصہ بہت جلد واقع ہوتا ہے لیکن اس کے بعد اور بوجھ ڈالے بغیر مزید تطول پیدا ہوتا ہے اور یہ وقت کے ساتھ بڑھتا جاتا ہے اگرچہ گھٹتی ہوئی شرح کے ساتھ۔ ایک برقرار تنشی زور کے تحت فساد کے اس آہستہ آہستہ بڑھنے کو پروفیسر ایونگ[۱] نے ''رینگنے'' کے لفظ سے تعبیر کیا ہے۔ مغلوبیت کو پیدا کرنے کے لیے جو زور درکار ہوتا ہے وہ غالباً اس کو جاری رکھنے کے زور سے زیادہ ہوتا ہے اور جب متمدد دھات پر کا زور کم کر دیا جاتا ہے تو اس خاصی بڑی کمی کے باوجود مغلوبیت جاری رہتی ہے اور

---

[۱] Prof. Ewing.

[۲] Lateral

لچک کی حد کے فساد سے بہت بڑے فساد تک جاری رہتی ہے - کوک[1] اور رابرٹسن[2] صاحبان نے بجائے دو موٹی سلاخوں کے متوازی نرم فولاد کی ایک پتلی سلاخ استعمال کر کے معلوم کیا کہ مغلوبیت کو شروع کرنے کے لیے جو زور درکار ہوتا ہے اُس سے ۲۲ فی صدی کم زور اُس کو جاری رکھ سکتا ہے - چونکہ فساد کا ایک حصہ محض وقت کے ساتھ پیدا ہوتا ہے اس لیے ایک دیئے ہوئے بوجھ سے پیدا شدہ مجموعی فساد اور زور فساد کے منحنی کی شکل کسی حد تک لداؤ کی شرح پر منحصر ہوگی۔ دیرے اعظم بوجھ واقع ہونے سے ذرا پہلے شے تقریباً کامل پیکر پذیر ہوتی ہے کیونکہ بوجھ کے بہت خفیف اضافے سے تنشی فساد بہت بڑھ رہا ہے - اس بات کو ملحوظ رکھو کہ اس نقشے میں زور کی حدت اور فساد دونوں شے کے ابتدائی ابعاد سے محسوب کیے گئے ہیں -



شکل ۲۵

تمددی تطول کے دوران میں تراش کا رقبہ تقریباً اسی تناسب سے گھٹتا ہے جس سے طول بڑھتا ہے یا بالفاظِ دیگر حجم تقریباً مستقل رہتا ہے - تراش کے رقبے کا گھٹاؤ سلاخ کے سارے طول میں تقریباً یکساں ہوتا ہے -

---

[1] Cook
[2] Robertson

[3] دیکھو "نرم فولاد کا لچکدار حالت سے پیکر پذیر حالت کو مرور" روئداد رائل سوسائٹی الف جلد ۸۸ (سنہ ۱۹۱۳ء) صفحات ۴۶۲ تا ۴۷۱ -

اعظم بوجھ واقع ہو جانے کے بعد ایک اچانک مقامی کھنچاؤ واقع ہوتا ہے جو سلاخ کے ایک چھوٹے سے طول میں ہوتا ہے اور اس کی شکل "کمر" کی سی ہو جاتی ہے۔ رقبے کا یہ مقامی گھٹاؤ ایسا ہوتا ہے کہ کمر پر سلاخ کو توڑنے کے لیے جو بوجھ درکار ہوتا ہے وہ اس اعظم بوجھ سے بہت کم ہوتا ہے جو مقامی تطول کے وقوع سے پہلے سلاخ پر ڈالا گیا تھا۔ لیکن شکستی بوجھ کو تراش کے گھٹے ہوئے رقبے سے تقسیم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ "زور کی حقیقی حدت" سابق کی ہر حدت سے زیادہ ہے۔ اگر بوجھ کو تراش کے ابتدائی رقبے سے تقسیم کیا جائے تو "زور کی ظاہری حدت" حاصل ہوتی ہے جو نرم فولاد جیسی ممتد دھاتوں میں شکستی بوجھ پر د پر کے اعظم بوجھ (شکل ۲۵) سے کم ہوتی ہے۔ شکل ۳۱ میں تناؤ کے تحت دیگر اشیا کے نمونوں کے "زور فساد" منحنی دکھائے گئے ہیں۔ ہر صورت میں نمونے گول ہیں اور ۱ انچ قطر اور ۸ انچ طول کے ہیں۔ تجربہ ۳۶
منحنیوں کے زیر لچک حصے علٰحدہ کھینچے گئے ہیں اور ان میں فساد کا پیمانہ پیکر پذیر فساد کا ۲۵۰ گنا رکھا گیا ہے۔

۲۴ - لچک کی حد اور نقطۂ مغلوبیت —— لچک کی حد

(دفعہ ۵) تناؤ میں وہ بڑے سے بڑا زور ہے جس کے ہٹا لینے پر کوئی مستقل تطول باقی نہ رہے۔ تقریباً تمام دھاتوں میں، اور خاص کر نرم اور ممتد دھاتوں میں، اگر نازک آلات استعمال کیے جائیں (دیکھو دفعہ ۱۷۴) تو بہت خفیف سے زوروں سے بھی پایا جائے گا کہ کچھ نہ کچھ مستقل تطول پیدا ہو گیا ہے اور خاص کر ایسی اشیا میں جن پر ایسا تنشی زور اس سے پہلے کبھی نہ لگایا گیا ہو۔ لیکن بہت سی دھاتوں میں اور خاص کر پٹواں لوہے اور فولاد میں اگر ہم ایک خاص مقدار سے مثلاً امتحانی سلاخ کے ایک لاکھویں حصے سے کم مستقل تطول کو (یعنی $\frac{1}{\text{ایک لاکھ}}$ سے کم فساد کو) نظر انداز کر دیں تو اعظم زور کی ایک بڑی کسر تک صرف لچکدار اور متناسب تطول پیدا ہوتے ہیں۔ فساد کا زور کے متناسب ہونا شکل ۲۵ میں و ا کے ایک خطِ مستقیم ہونے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ پٹواں لوہے اور فولاد جیسی دھاتوں میں تناسب پن لچک کی حد تک قائم رہتا ہے۔ یعنی خطِ مستقیم کا سرا ا لچک کی حد کو تعبیر کرتا ہے یا بالفاظِ دیگر جھوک کا

قانون (دفعہ ۵) کافی طور پر صحیح ہے۔ تمام دھاتوں کے لیے یہ بات صحیح نہیں۔ جیسے ایلومینیم کی صورت میں جس پر آہستگی سے اور تسلسل کے ساتھ بوجھ لگایا گیا ہو بہت پست زوروں پر فساد زور کی بہ نسبت تیزی سے بڑھتا ہے لیکن زور ہٹا لینے پر تقریباً تمام فساد دُور بھی ہو جاتا ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ لچک کی حد کو محض "زور فساد" نقشے کے معائنے سے معلوم نہیں کیا جا سکتا۔

لچک کی تجارتی حد ـــــ دھاتوں کے تجارتی امتحانوں میں جن میں نقطۂ مغلوبیت معلوم کیا گیا ہے اکثر مغلوبیت کے زور کو لچک کی حد کہا جاتا ہے۔ یہ عموماً حقیقی لچک کی حد سے کسی قدر زیادہ ہوتا ہے۔

اس طرح زور کی تین نمایاں حدیں ہوئیں۔

(۱) لچک کی حد، جس کی تعریف دفعہ ۵ میں کی گئی ہے۔

(۲) فساد کی زور کے ساتھ متناسبیت کی حد۔

(۳) نقطۂ مغلوبیت کا زور یا لچک کی تجارتی حد۔

پٹواں لوہے اور فولاد میں پہلی دو تقریباً ایک ہی ہیں اور تیسری کسی قدر زیادہ۔

یہ خیال ظاہر کیا گیا ہے کہ نقطۂ مغلوبیت سے ذرا پہلے کامل لچک کا جواب دے دینا اس وجہ سے ہے کہ شے کے چھوٹے چھوٹے حصے پوری کمیت کے مغلوب ہونے سے پہلے مغلوب ہو جاتے ہیں۔ اِس خیال کی اس بات سے بھی تائید ہوتی ہے کہ بہت یکساں نوعیت کی متعدد اشیا میں نقطۂ مغلوبیت انہی اشیا کے ناقص نمونوں کے مقابلے میں بہت زیادہ واضح رہتا ہے۔

مغلوبیت کے لیے جو زور درکار ہے وہ لگایا جائے تو مغلوبیت ساری کمیت میں یقیناً وقتِ واحد میں واقع نہیں ہوتی بلکہ ایک یا زیادہ نقاط پر مقامی طور پر شروع ہوتی ہے (جس کی وجہ غالباً ان مقامات پر بوجھ کا خفیف سا ارتکاز ہے) اور بوجھ کے اضافے کے بغیر باقی کمیت میں پھیلتی ہے۔ مغلوبیت کی حالت کے اس پھیلنے کو مشین نہ کیے ہوئے لوہے اور فولاد میں آنکھ سے دیکھا جا سکتا ہے۔ شے کے مادے کے اندر فساد اتنا زیادہ ہوتا ہے کہ اوپر آکسائیڈ کی جو کھال ہوتی ہے

وہ اس کی برداشت نہیں کر سکتی اور مغلوبیت کے پھیلتے وقت تڑق کر چھوٹے چھوٹے ٹکڑے بن کر اُڑتی ہے ۔ اعلیٰ تکمیل کے کھنچے ہوئے فولاد میں آکسائیڈ اس طرح جھڑتا ہے کہ سلاخ کی سطح پر دلچسپ نشان بن جاتے ہیں ۔ متوازی منحنیوں کے دو نظام بنتے ہیں جو سلاخ کے محور کے ساتھ مساوی اور مخالف سمت میں میلان رکھتے ہیں ۔

شکل ۲۱ اسی طرح کا منظر پالش کی ہوئی دھاتی سطح پر بھی نظر آتا ہے اگر دھات میں لچک کی حد سے زیادہ فساد پیدا کر دیا جائے ۔ یہ مائل منحنی لوڈر کے خطوط[1] کہلاتے ہیں، کیونکہ سب سے پہلے لوڈر نے ان کی طرف توجہ مبذول کرائی ۔ ان سے جز کے تحت لچک کی ناکارگی کا پتہ چلتا ہے ۔

خوردبینی مشاہدات ۔ فلزنگاری —— خردبین سے دھات کی ساخت کا جو پتہ چلتا ہے اُس کی طرف حال میں بہت توجہ کی گئی ہے اور اس سے بہت سے دلچسپ انکشافات ہوئے ہیں ۔ فلزنگاری (Metallography) کا عام مضمون اس کتاب کی وسعت سے باہر ہے[2] لیکن ساخت کے اوپر فساد کا جو اثر ہوتا ہے اُس کا ذکر کیا جائیگا ۔

خوردبینی مشاہدات سے معلوم ہوتا ہے کہ دھاتیں قلمدار دانوں کے ایک مجموعے پر مشتمل ہوتی ہیں جن کے درمیان مختلف ترکیب کے مادّے کے پردے یا نہیں ہوتی ہیں ۔ ظاہر ہے کہ میکانی خواص ان پردوں سے متاثر ہونگے، اور فساد یا شکستگی پردے کی سطح پر بھوٹک پن یا عدم تسلسل کی وجہ سے واقع ہوگی یا قلمدار دانوں کی حقیقی شکستگی ان کے درمیان کے فاصل مستویوں میں یا کمزور ترین مستویوں میں واقع ہوگی ۔

ایونگ[3] اور روزن ھین نے[4] دھات کے ایک نمونے کا بتدریج بڑھتے ہوئے

---

[1] Luder's Lines

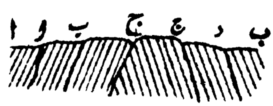
[2] انجینیری کے طلبہ کے لیے "لوہے اور فولاد کا قلماؤ"[5] کا ایک مختصر اور دلچسپ بیان ڈاکٹر میلر نے لکھا ہے ۔

[3] Ewing & Rosenhain

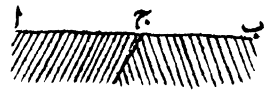
[4] دیکھو روئداد شعبۂ فلسفہ رائل سوسائٹی ۱۸۹۹ء ۔

[5] Crystallization of Iron & Steel by Dr. J. W. Meller.

فساد کے تحت خردبین کے ذریعے امتحان کر کے معلوم کیا کہ نقطۂ مغلوبیت کے بعد بعض قلموں پر خطوط نمودار ہوئے اور فساد کے بڑھنے پر ان کی تعداد بڑھتی گئی ۔ ان خطوط کی، جن کو اُنہوں نے پھسل پٹیاں یا پھسل خطوط کے نام سے موسوم کیا، اُنہوں نے یہ توجیہ کی کہ قلموں کے فاصل مستویوں پر پھسلن واقع ہونے کی وجہ سے سطح پر سیڑھیاں بن گئی ہونگی ۔ مثلاً سطح ا ج ب (شکل ۲۶) کو تیروں کی سمت میں کھینچا جائے تو فاصل مستویوں ا، ب، ج اور د پر پھسلن واقع ہوگی اور اس طرح سطح شکل ۲۷ کی



شکل ۲۷



شکل ۲۶

(ڈاکٹر میلر کے "لوہے اور فولاد کے قلماؤ" کے بیان سے لیا گیا ہے)

مانند ہو جائیگی ۔ ج دو متصل دانوں کا ملاپ ہے ۔ اِن لوگوں کے خیال کی رُو سے پیکر پذیر فساد کے دَوران میں قلموں کے فاصل مستویوں پر پھسلن جاری رہتی ہے اور آخر کار یہ تڑق کی شکل میں نمودار ہوتی ہے اور شکستگی واقع ہوتی ہے جو عموماً حدود پر نہیں ہوتی بلکہ خود قلموں کے دانوں کے درمیان ہوتی ہے ۔ قلمدار ساخت فساد کے تمام مراحل میں باقی رہتی ہے ۔

۲۵ - انتہائی اور لچکدار مضبوطی اور قدرِ سلامتی

— کسی نمونے کو سادہ تناؤ یا جز کے تحت توڑنے کے لیے جو اعظم بوجھ درکار ہوتا ہے اُس کو شکستگی کے مقام کے ابتدائی تراشی رقبے سے تقسیم کرنے سے وہ اعظم ظاہری زور حاصل ہوتا ہے جو شکستگی کے لیے ضروری ہے اور اُس کو اُس خاص قسم کے زور کے تحت زیرِ بحث شے کی انتہائی مضبوطی کہا جاتا ہے ۔ اس کو عموماً پونڈ یا ٹن فی مربع انچ میں محسوب کیا جاتا ہے ۔ تناؤ کی انتہائی مضبوطی کو تنلشی استحکام بھی کہا جاتا ہے ۔ زیادہ سے زیادہ جو محسوبہ زور جو مشین یا تعمیر کے کسی حصے پر

نمبر۱۳۱ پڑتا ہو وہ اس کا کامی زور کہلاتا ہے اور انتہائی مضبوطی اور کامی زور کی باہمی نسبت قدرِ سلامتی کہلاتی ہے۔

ظاہر ہے کہ کامی زور شے کی لچک کی حد کے اندر ہونا چاہیے۔ لیکن یہ کافی نہیں اور جب مجوز ایک دیے ہوئے کامی زور پر اپنی تجویز کی بنا رکھتے ہیں تو وہ اس کے ساتھ زیرِ استعمال شے کے دوسرے خواص کے ساتھ اس کی ایک انتہائی مضبوطی مشخص یا فرض کرتے ہیں جو کامی زور سے ایک معقول قدرِ سلامتی کی نسبت میں بڑی ہوتی ہے۔ قدرِ سلامتی بڑی حد تک زور کی نوعیت پر منحصر ہے یعنی آیا زور مستقل یا متغیر یا متبادل ہے اور آیا سادہ ہے یا مرکب۔ قدرِ سلامتی میں فسادی اثرات کی بھی رعایت رکھی جاتی ہے مثلاً صدمات، جن کا بعض صورتوں میں کوئی قابل اعتماد اندازہ نہیں کیا جا سکتا، تآکل کی وجہ سے تراش کا گھٹاؤ، اور دوسرے اتفاقات۔

لچکدار مضبوطی —— اگر کامی زوروں کو ایسی حدود کے اندر رکھنا مطلوب ہو کہ لچک کی حد کے خاصا اندر رہیں تو یہ جاننا ضروری ہو جاتا ہے کہ ایک ہی شے میں لچک کی حد صدر زوروں کی باہمی نسبت کے ساتھ کس طرح بدلتی ہے۔ مثلاً یہ بات ایک عرصے سے تسلیم کی جا چکی ہے کہ لچک کی حد جزی زور کے لیے (یعنی مساوی اور مخالف قسم کے صدر زوروں کی صورت میں) سادہ تناؤ کے مقابلے میں کم ہے۔ بہت سے مفروضے وقتاً فوقتاً پیش کیے گئے ہیں جن میں یہاں چار بیان کیے جاتے ہیں۔ اِن مفروضات کا بیان یہ ہے کہ مخلوط زور کے تحت کامل لچک اُس وقت جواب دیتی ہے اور پیکر پذیر بہاؤ شروع ہوتا ہے جب حسبِ ذیل مقداروں کی خاص خاص انتہائی قیمتیں واقع ہوں:-

(۱) تینوں صدر زوروں میں سب میں بڑا زور،

(۲) تینوں صدر فسادوں میں سب میں بڑا فساد،

(۳) کسی مستوی پر کا جزی زور،

(۴) توانائی (یا بازگشتگی، دیکھو دفعہ ۱۴۲) جو دھات کے کسی حجم مثلاً اکائی حجم میں لچکدار طور پر جمع ہوئی ہو۔

ان چار مفروضات کا اُن تجربات سے مقابلہ کیا گیا ہے جو گیسٹ[۱]، میسن[۲]

[۱] Guest [۲] Mason

اور دوسروں نے کیے ہیں [i]۔
کوک[1] اور رابرٹسن[2] نے [ii] اندرونی دباؤ رکھنے والے موٹے نلوں پر جو قابلِ ذکر تجربات کیے ہیں اُن سے یہ نتیجہ نکالا جاسکتا ہے کہ (۱) پہلا مفروضہ ڈھلے لوہے اور شاید عام طور پر پھوٹک اشیا کے لیے صحیح معلوم ہوتا ہے (۲) پہلے اور دوسرے مفروضوں میں ایسی اشیا کے لیے جو بہت متمدد ہوں حقیقی لچکدار مضبوطی کو بیش انداز کردیا گیا ہے اور تیسرا مفروضہ اس کو بقدر تقریباً ۲۵ فی صدی کے زیر انداز کرتا ہے۔ پروفیسر بی پی ہے[3] [iii] نے دکھایا ہے کہ چوتھا مفروضہ کوک اور رابرٹسن کے امتحانات کے، اور دیگر ذرائع سے جو کثیر مواد حاصل ہوا ہے اس کے بہت مطابق ہے۔ چوتھے مفروضے کو متمدد اشیا کے لیے حقیقت کا قریب ترین تقرب سمجھا جاسکتا ہے اگرچہ تیسرا مفروضہ زیادہ عام طور پر مستعمل ہے کیونکہ اس کا استعمال آسان ہے۔ سب مفروضے اختیاری نوعیت کے ہیں: ایک پھوٹک دھاتوں کے لیے حقیقت کے قریب ترین ہے تو دوسرا متمدد دھاتوں کے لیے۔ تمدد کے درمیانی خواص رکھنے والی دھاتوں کے لیے ہر انفرادی صورت میں ایک درمیانی اختیاری ضابطہ وضع کرلیا جاسکتا ہے۔

صفحہ ۶۱ اس بارے میں جو تجرباتی شہادت میسر ہے اس میں سے اکثر بوجھ کے ساکن عمل سے متعلق ہے متبادل زور کی کیفیت سے متعلق نہیں حالانکہ مشینری میں یہی زیادہ عام ہے۔ تکراری زوروں کے لیے زور کا کلیہ دفعہ ۴۹ میں بیان کیا گیا ہے اور یہ مسئلہ کہ انتہائی مضبوطی کن چیزوں سے قرار پاتی ہے دفعہ ۲۷ میں بیان کیا گیا ہے۔

i - "انجینیری کی اشیا میں زور کی تقسیم پر رپورٹ" میں جو برٹش ایسوسی ایشن سکشن گ کی ایک کمیٹی نے ۱۹۱۳ء اور بعد کی رپورٹوں میں مرتب کی ہے بہت تفصیلی معلومات اور مزید حوالے درج ہیں۔

ii - رسالہ انجینیرنگ ۱۵ دسمبر ۱۹۱۹ء۔ نیز تجرباتی نتائج دفعہ ۱۲۲ اور شکل ۱۶۱ ب۔

iii - برٹش ایسوسی ایشن کی رپورٹ سکشن گ ۱۹۱۹ء میں "فسادی توانائی کا تفاعل اور لچک کی حد" اور انجینیرنگ ۳۰ جنوری ۱۹۲۳ء۔

[1] Cook [2] Robertson [3] Prof B.P.Haigh

انگلستان اور امریکہ میں ایک عام دستور یہ ہے کہ مضبوطی کا اندازہ اعظم صدر زور سے کیا جائے۔ اس کے ساتھ ایسی قدرِ سلامتی انتخاب کرنی چاہیے جو انتہائی مضبوطی پر مبنی ہو لچکدار مضبوطی پر نہ ہو اور حالات کے لحاظ سے بدلے اور اس پر بھی منحصر ہو کہ دوسرے صدر زور موجود ہیں یا معدوم۔ لیکن بہتر غالباً یہی ہے کہ مضبوطی کا اندازہ اعظم جزی زور سے کیا جائے۔

پہلے تین نظریوں سے جو مختلف نتائج حاصل ہوتے ہیں اُن کو ایک مشترک صورت لے کر اچھی طرح واضح کیا جاسکتا ہے اور وہ صورت یہ کہ ایک راست زور ف_1 اور اس کے ساتھ اسی مستوی پر جزی زور ق جیسا کہ دفعہ ۱۸ میں ہے۔

پہلے مفروضے سے اعظم صدر زور

$$\text{ف} = \tfrac{1}{2}\,\text{ف}_1 + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

دوسرے مفروضے سے اعظم صدر فساد (دیکھو دفعہ ۱۹)

$$\text{س}_1 = \frac{\text{ف}}{\text{ے}} - \frac{\text{فَ}}{\text{م ے}} = \frac{1}{\text{ے}}\Big[\tfrac{1}{2}\,\text{ف}_1 + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2}$$
$$- \frac{1}{\text{م}}\Big\{\tfrac{1}{2}\,\text{ف}_1 - \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2}\Big\}\Big]$$

یا

$$\text{ے}\,\text{س}_1 = \tfrac{1}{2}\,\text{ف}_1\Big(1 - \frac{1}{\text{م}}\Big) + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2}\,\Big(1 + \frac{1}{\text{م}}\Big)$$

جہاں $\frac{1}{\text{م}}$ پوائسن[1] کی نسبت ہے (دفعہ ۱۲)

اگر م = ۴ تو معادل مفرد زور

$$\text{ے}\,\text{س}_1 = \tfrac{3}{8}\,\text{ف}_1 + \tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

تیسرے مفروضے سے اعظم جزی زور (دیکھو مساوات (۴) دفعہ ۱۸)

$$\frac{\text{ف} - \text{فَ}}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ف}_1^2 + \text{ق}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

---

[1] Poisson

مخلوط زور کی اُس خاص صورت کے لیے جو معادل مفرد زور جو تھے مفروضے کے تحت حاصل ہوتا ہے وہ دفعہ ۱۴۲ میں دیا گیا ہے اور ان نظریوں سے نتائج میں جو اختلاف پیدا ہوتا ہے اُس کا بعد کے ابواب میں اکثر ذکر کیا گیا ہے (دیکھو دفعات ۱۱۳، ۱۲۲، ۱۲۲(ا)، ۱۲۶، ۱۲۷ اور ۱۴۹ تا ۱۵۴)۔

۲۶ - تمدد کی اہمیت ـــــ دستور یہ ہے کہ مشین یا تعمیر میں ہر حصے کی تراش ایسی رکھی جائے کہ زور، لچک کی حد تک نہ پہنچے۔ لیکن ساخت میں ترمیم کرکے یا مختلف عمل استعمال کرکے لچک کی حد کو بڑھایا جاسکتا ہے اور عام طور پر اس طرح کے عمل سے تمدد گھٹ جاتا ہے اور پھوٹک پن اور ارتعاش یا صدمے سے شکستگی کا احتمال بڑھ جاتا ہے۔ متمدد اشیا پھوٹک نہیں ہوتیں اور زیادہ تمدد کے ساتھ عموماً لچک کی حد پست پائی جائیگی۔ کوئی شے متمدد ہو تو یہ ہوگا کہ اگر ناقص کاریگری یا اور کسی وجہ سے ایک شدید مقامی زور پیدا ہوا ہو تو اس مقام پر ایک مقامی تمددی مغلوبیت واقع ہوگی جس سے زور لچک کی حد کے اندر آجائیگا اور یہ بات غیر بیکر پذیر شے میں نہ ہوتی۔ اس طرح بہت سی صورتوں میں تمدد کی خاصیت مضبوطی سے کم اہم نہیں ہوتی۔

بعض انجینیروں کا دستور یہ ہے کہ یہ تخصیص کر دیتے ہیں کہ کسی تعمیر میں استعمال ہونے والے فولاد کی انتہائی تنشی مضبوطی دی ہوئی حدود کے اندر ہو۔ بالائی حد عائد کرنے کی وجہ یہ ہے کہ اعلیٰ تنشی مضبوطی کے ساتھ تمدد کی اور صدمے کے اثرات کی مزاحمت کی طاقت کی کمی پائی جائیگی۔ صفحہ ۱۰۳

کسی دھات کے تمدد کا معیار عام طور پر یہ ہے کہ ایک امتحانی ٹکڑے کو تناؤ کے تحت توڑ کر تطول اور تراشی رقبے کے سکڑاؤ کا فی صد دیکھا جائے۔ غالباً فی صدی تطول بہتر معیار ہے کیونکہ بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ تطول تھوڑا ہوتا ہے اور رقبے کا سکڑاؤ زیادہ ہوتا ہے۔

۲۷ - فی صدی تطول ـــــ دفعہ ۲۳ میں بیان کیا گیا ہے کہ

نرم فولاد کے ایک ٹکڑے کو تناؤ کے تحت توڑنے میں اعظم بوجھ سے پہلے تقریباً یکساں تطول پیدا ہوتا ہے، اور اس کے بعد شکستگی کی تراش کے پاس ایک مستزاد مقامی تطول پیدا ہوتا ہے (دیکھو شکل ۲۸)۔ ایسی ایک صورت میں ایک انچ ابتدائی قطر اور ۱۰ انچ ابتدائی طول کی ایک سلاخ کے ہر ایک انچ کے فساد حسبِ ذیل پائے گئے :۔

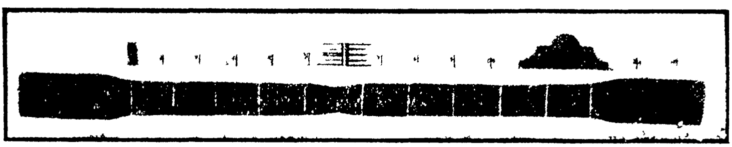
انچ	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تطول (انچوں میں)	٫۲۰	٫۲۱	٫۲۲	٫۲۵	٫۳۰	٫۵۲	٫۵۲	٫۲۸	٫۲۷	٫۲۳

شکستگی ایک سرے سے تقریباً ۶ انچ کے فاصلے پر واقع ہوتی ہے۔ شکستگی کے پاس کے ۲ انچوں کا تطول لیا جائے جس میں مقامی تطول کا ایک بڑا حصہ شامل ہے تو تطول ۱٫۰۴ انچ یا ۵۲ فی صدی حاصل ہوتا ہے۔ اس سے بڑا طول لیا جائے تو مقامی تطول کا اثر اتنا زیادہ نہیں ہوگا اور فی صدی تطول اس سے کم ہوگا۔ اس طرح شکستگی کو وسط کے ممکنہ قریب لینے سے مختلف طولوں کے تطول حسبِ ذیل ہونگے :۔

طول (انچوں میں)	۲	۴	۶	۸	۱۰
تطول فی صدی	۵۲	۴۰٫۵	۳۵٫۷	۳۳٫۶	۳۱٫۰

اگر طول ل بڑھ کر لَ ہو جائے تو تطول بطور ابتدائی طول کے فی صد کے

$$= \frac{لَ - ل}{ل} \times ۱۰۰$$



شکل ۲۸ ۔ تنشی امتحانی ٹکڑے کا تطول

اوپر کے اعداد سے ظاہر ہے کہ جب کبھی فی صدی تطول بیان کیا جائے اس کے ساتھ یہ صراحت ضروری ہے کہ اس کو کس طول پر ناپا گیا ہے۔ تطول اکثر ۸ انچ کے طول پر ناپے جاتے ہیں۔ اس سے مختلف تراشی رقبوں کی سلاخوں

کے لیے حقیقی تقابلی نتائج حاصل نہیں ہوتے۔ مثلاً اگر ایک انچ قطر کی گول سلاخ میں تراش کا مقامی سکڑاؤ اور طول کا مقامی تطول صرف ۲ انچ طول میں ہو یعنی پورے طول کے چوتھائی حصے میں تو $\frac{1}{2}$ انچ قطر کی سلاخ میں مقامی اثر غالباً ۱ انچ طول تک محدود ہوگا یعنی پورے طول کے $\frac{1}{8}$ تک۔ اس طرح موٹی سلاخ کے مقامی سکڑاؤ سے ۸ انچ کے طول میں فی صدی تطول پتلی سلاخ سے زیادہ ہوگا کیونکہ صفحہ ۷۱
شدید مقامی فساد کا طول جو موٹی سلاخ میں ۲ انچ ہے پورے طول کی بڑی کسر ہے۔ اعظم بوجھ سے پہلے جو عام تطول پیدا ہوتا ہے وہ سلاخ کے تراشی رقبے پر تقریباً غیر منحصر ہے اور اس سے تمدد کا اچھا اندازہ حاصل ہوتا مگر دقت یہ ہے کہ کمر بننے سے پہلے اس کو ناپنا مشکل ہے۔ شکستگی کے بعد اس کو قابل اطمینان طور پر ناپا نہیں جا سکتا کیونکہ کمر کی طرف دھات کے "بہنے" کی وجہ سے شکستگی کے سکڑاؤ سے انتہائی تطول کچھ فاصلہ تک متاثر ہوتا ہے۔ پھر بھی بعض اوقات اس کو اس طرح محسوب کیا جاتا ہے کہ پورے تطول میں سے شکستگی کے قریب کے ۲ انچ کا مقامی تطول منہا کر کے باقی تطول کو باقی طول کی کسر کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

پروفیسر الوِن نے[۵] دکھایا ہے کہ دو نامساوی تراش کی سلاخوں کے تمدد کا مقابلہ کرنے کا ایک اور ممکن طریقہ یہ ہے کہ جس طول پر تطول ناپا جائے اس کو قطر کے (یا اگر سلاخ گول نہ ہو تو رقبے کے جذر کے) متناسب لیا جائے۔ یا بالفاظ دیگر ایسی سلاخیں استعمال کی جائیں جو ہندسی طور پر مشابہ ہوں۔ یہ طریقہ جرمنی میں مستعمل ہے۔ وہاں "ناپ طول" ل کے، جس پر تطول ناپا جاتا ہے، اور تراش کے رقبے ر کے درمیان حسب ذیل ربط رکھا جاتا ہے:-

[۵] روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز جلد ۱۵۵ صفحہ ۱۷۰۔ نیز انجینیری[۱] کے معیاروں کی مجلس کی مطبوعہ نمبر ۱۸، (کراسبی[۲] لاک وڈ) اور گارڈن[۳] اور گلیور کا ایک مضمون جو رائل سوسائٹی ایڈنبرا کی روئداد جلد ۴۸ حصہ اول میں شائع ہوا۔

Gordon and Gulliver [۳] Crosby Lockwood [۲] Eng. Standards Assoc. [۱]

$$\text{ل} = 11.3\sqrt{\text{ر}}$$

اس ضابطے کی رُو سے اگر سلاخ کا رقبہ نصف مربع انچ (یا سنتی میٹر) ہو تو طول ۸ انچ (یا سنتی میٹر) ہونا چاہیے۔

برطانوی دستور یہ ہے کہ تراش کے رقبے کے بلالحاظ ناپ طول ۸ یا ۱۰ انچ لیا جائے۔ اور چونکہ ایسے امتحانی ٹکڑوں کی تیاری میں جن میں $\dfrac{\text{طول}}{\text{تراشی رقبے کا جذر}}$ مستقل ہو بہت لاگت آتی ہے اس لیے اس قاعدے کی تجارتی طور پر پابندی نہیں کی گئی۔ پروفیسر اَنون نے معلوم کیا ہے کہ طول اور تراشی رقبہ مستقل ہوں اور تراش مستطیلی ہو تو تراش کے اضلاع کے مختلف تناسبوں سے فی صدی تطول متاثر نہیں ہوتا۔

خاص خاص حدود کے اندر مختلف ابعاد سے فی صدی تطول پر جو اثر پڑتا ہے اس کو جبری طور پر یوں بیان کر سکتے ہیں۔

اگر ط = مجموعی تطول اور ل = ناپ طول، تو ط مشتمل ہے دو حصوں پر۔ ایک عام تطول جو ل کے متناسب ہے مثلاً = ب ل، اور ایک مقامی تطول ا جو تقریباً ل پر غیر منحصر ہے — یعنی

$$\text{ط} = \text{ا} + \text{ب ل}$$

اور فی صدی تطول $100 \times \dfrac{\text{ط}}{\text{ل}} = 100\left(\dfrac{\text{ا}}{\text{ل}} + \text{ب}\right)$ جو ایک دیے ہوئے تراشی رقبے کے لیے ل کے بڑھنے سے گھٹتی ہے اور ۱۰۰ ب کے قریب آتی ہے۔

مقامی تطول ا تراشی رقبے س کے جذر کے تقریباً متناسب ہے۔ فرض کرو کہ

$$\text{ا} = \text{ج}\sqrt{\text{س}}$$

اس لیے فی صدی تطول $= 100\left(\dfrac{\text{ج}\sqrt{\text{س}}}{\text{ل}} + \text{ب}\right)$ جو س کے بڑھنے سے بڑھتا ہے

اور ل کے بڑھنے سے گھٹتا ہے۔

صفحہ ۲۲ ا اور ب ایک دیے ہوئے مادے کے لیے مستقل ہونگے۔ اگر ایک ہی مادّے کے دو ایسے ٹکڑوں کے لیئے جن کے ابعاد طول یا تراش یا دونوں کے لحاظ سے مختلف ہوں، فی صدی تطول معلوم ہوں یا ایک ہی ٹکڑے کے دو مختلف طولوں کے تطول معلوم ہوں تو اوپر کے ضابطے کے مستقل ج اور ب معلوم ہو جائینگے۔ لیکن معمولی اشیا میں یکسانیت نہ ہونے کی وجہ سے بہتر یہ ہوگا کہ صرف دو کی بجائے متعدد نتائج حاصل کیے جائیں اور ان کا اوسط نکالا جائے۔ ج اور ب ایک بار معلوم ہو جائیں تو پھر اسی شے کے کسی ابعاد کے ٹکڑے کے تطول کا موٹا اندازہ پہلے سے لگایا جاسکتا ہے۔ اس طریقے سے یہ ممکن ہو جائیگا کہ ایسے ٹکڑوں پر انتہائی تطول کا تجربہ کرکے جو تناسبات کے لحاظ سے کتنے ہی مختلف کیوں نہ ہوں تمددوں کا ایک تقریبی مقابلہ کیا جائے۔ یہ بات ایک مثال کے ذریعے بخوبی سمجھ میں آجائیگی۔

فرض کرو کہ دیا ہوا ہے کہ ایک فولادی جوشارہ تختی کے ایک ٹکڑے میں جس کا تراشی رقبہ ۱٫۳۳۲ مربع انچ ہے ۴ انچ کے طول میں ۳۹٫۵ فی صدی کا تطول پایا جاتا ہے اور اسی تختی کے ایک اَور ٹکڑے میں جس کا تراشی رقبہ ۰٫۹۳۵ مربع انچ ہے ۶ انچ کے طول میں ۳۰٫۲ فی صدی کا تطول پایا جاتا ہے۔ اسی شئے کے ۵، مربع انچ تراش کے ٹکڑے میں ۸ انچ کے طول میں اغلب تطول کیا ہوگا۔

اُوپر کی مساوات کی رُو سے

$$\text{فی صدی تطول} = 100\left(\frac{\text{ج}\sqrt{\text{ر}}}{\text{ل}} + \text{ب}\right)$$

$$\text{پہلے ٹکڑے سے } 39.5 = \left(\frac{\text{ج}\sqrt{1.332}}{4} + \text{ب}\right) \times 100 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\text{دوسرے ٹکڑے سے } 30.2 = \left(\frac{\text{ج}\sqrt{0.935}}{6} + \text{ب}\right) \times 100 \quad \cdots\cdots (2)$$

(۱) اور (۲) سے ب = ۱۸۴ء ، ج = ۷۳۲ء

اس لیے طول ۸ انچ اور رقبہ ۵ء مربع انچ کے لیے تطول تقریباً

$۱۰۰\left(\frac{۷۳۲ء\sqrt{۵ء}}{۸}+۱۸۴ء\right)$ = ۲۴ر۹ فی صدی ہوگا۔

انجینیری معیاروں[1] کی مجلس نے امتحانی ٹکڑوں کو مشین کرنے کی لاگت کے بڑھ نہ جانے کے خیال سے اس کی ضرورت نہیں سمجھی کہ تختی کی پٹیوں کے تطول کی پیمائش کے لیے ۸ انچ کے معیاری طول سے انحراف کیا جائے۔ لیکن اس ثابت طول میں بڑے تراشی رقبوں کے استعمال سے تطول بہت زیادہ ہوجاسکتا ہے اس لیے تختی کی ہر موٹائی کے لیے عرض کی ایک اعظم جائز حد مقرر کردی گئی ہے۔ اس طرح اس ثابت ناپ طول کے لیے رقبہ کی حد بندی کردی گئی اگرچہ اس کو بالکل ثابت نہیں کردیا گیا۔

۲۸- تراش کا فی صدی سکڑاؤ ــــ اگر ایک امتحانی ٹکڑے کی تراش سارے طول میں یکساں ہو اور تطول کے دوران میں سارے طول میں رقبے کا یکساں سکڑاؤ واقع ہوتا رہے جیسا کہ کامل متمدد شے میں ہوگا تو رقبے کا فی صدی سکڑاؤ ابتدائی رقبے کے لحاظ سے وہی ہوگا جو فی صدی تطول پیمائش کے وقت کے آخری طول کے لحاظ سے ہوگا۔ یہ بیان اُسی صورت میں درست ہوگا کہ شے کے "ناپ طول" کا حجم مستقل رہے اور یہ ہمیشہ بہت تقریباً صحیح ہوتا ہے جیسا کہ کثافت کے امتحانات سے ظاہر ہے۔ کیونکہ اگر ل اور لَ ابتدائی اور آخری حجم ہوں اور س اور سَ ابتدائی اور آخری تراشی رقبے ہوں تو چونکہ حجم تقریباً مستقل ہے اس لیے

$$ل \times س = لَ \times سَ$$

یا

$$\frac{ل}{لَ} = \frac{سَ}{س}$$

[1] Engineering Standards Association.

صفحہ ۴۲ طرفین میں سے ا تفریق کرنے سے

$$\frac{ل - لَ}{لَ} = \frac{رَ - ر}{ر}$$

یا

$$\frac{لَ - ل}{لَ} = \frac{ر - رَ}{ر}$$

دائیں جانب سے وہ تطول تعبیر ہوتا ہے جو آخری طول سے محسوب کیا گیا ہے اور بائیں جانب سے رقبے کا سکڑاؤ ابتدائی رقبے کے لحاظ سے۔ اُن اشیا میں جن میں آخرکار ایک کر یا گردن بن جائے شکستگی کے مقام پر سکڑاؤ اُوپر کی مقدار سے زیادہ ہوگا۔ اُوپر کی مقدار کو ممکنہ اقل سکڑاؤ سمجھا جا سکتا ہے سوائے ایک صورت کے جو بہت ہی شاذ ہوگی کہ نمونہ کسی ایسے مقام پر مقامی سختی یا پھوٹک پن کی وجہ سے ٹوٹ جائے جہاں تراش باقی مقامات سے بڑی ہو اور دوسرے حصے کھنچ جانے کی وجہ سے تراش میں گھٹ گئے ہوں۔

۲۹- زور کی حقیقی اور ظاہری حدت ـــــ آسانی کے لیے دستور یہ ہے کہ کسی شے کی انتہائی مضبوطی کو اتنے پونڈ یا ٹن ابتدائی تراش کے فی مربع انچ کی شکل میں بیان کیا جائے۔ اس کو زور کی ظاہری حدت کہا جا سکتا ہے۔ لیکن متمدد نمونوں میں جن کا تناؤ میں شکستگی کے نقطے تک امتحان کیا جائے طول بڑھنے سے تراش سکڑتی ہے۔ اس طرح زور کی حقیقی حدت ظاہری حدت سے زیادہ ہوگی کیونکہ حقیقی حدت بوجھ کو گھٹی ہوئی تراش کے رقبے سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوگی۔ اس لیے

$$\frac{\text{زور کی حقیقی حدت}}{\text{زور کی ظاہری حدت}} = \frac{\text{بوجھ} \div \text{حقیقی (گھٹا ہوا) رقبہ}}{\text{بوجھ} \div \text{ابتدائی رقبہ}}$$

$$= \frac{\text{ابتدائی رقبہ}}{\text{حقیقی گھٹا ہوا رقبہ}} = \frac{رَ}{ر} \quad \text{(دفعہ ۲۸)}$$

گزشتہ دفعہ میں دکھایا گیا تھا کہ یہ منسبت مساوی ہوگی

$$\frac{\text{حقیقی (بڑھا ہوا) طول}}{\text{ابتدائی طول}}$$

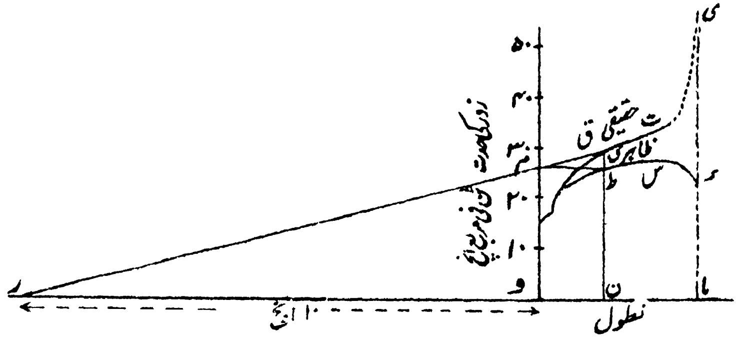
یا $\frac{ل'}{ل}$ کے،

بشرطیکہ تنشی فساد کے تحت حجم مستقل رہے۔ اس ربط کی وجہ سے ایک سادہ ہندسی ساخت حاصل ہوتی ہے جس سے اگر ایک تنشی امتحان کا ظاہری حدت کا منحنی تطول کے لحاظ سے دیا ہوا ہو تو حقیقی حدت کا منحنی کھینچا جا سکتا ہے۔ اگر شکل ۲۹ میں و ن پیمانے پر اُس تطول کو تعبیر کرے جو زور کی ظاہری حدت ط ن کے متناظر ہو تو و ن کے متوازی ط م کھینچو جو محور کو م پر ملے۔ و ر کھینچو جو پیمانے پر ابتدائی طول مثلاً ۱۰ انچ کو تعبیر کرے۔ ر م کو ملاؤ اور خارج کر کے ط ن مخروجہ کو ق پر ملنے دو۔ تب ق ن حقیقی حدت کو تعبیر کریگا کیونکہ گزشتہ دفعہ کی اور اُوپر کی ترقیم سے

$$\frac{ق\,ن}{ر\,ن} = \frac{و\,م}{و\,ر} = \frac{ط\,ن}{و\,ر}$$

یا، $\frac{ق\,ن}{ط\,ن} = \frac{ر\,ن}{و\,ر} = \frac{ل'}{ل} = \frac{س}{س'} = \frac{\text{حقیقی حدت}}{\text{ظاہری حدت}}$

منحنی پر کے دوسرے نقاط جو حقیقی حدت کو تعبیر کریں اُسی طریقے پر ت تک معلوم کیے جا سکتے ہیں جہاں پر امتحانی ٹکڑے کی تراش مقامی طور پر بدلنا شروع ہوتی ہے اور سلاخ کے سارے طول میں یکساں نہیں رہتی۔ اس نقطے سے آگے یہ ساخت کام نہیں دیتی کیونکہ مفروضہ حالات باقی نہیں رہتے۔ منحنی کے دوسرے نقاط اس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں کہ امتحان کے دَوران میں تراش کو خاص طور پر ناپتے جائیں۔ آخری نقطہ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ شکستی بوجھ کو شکستگی پر کی تراش سے تقسیم کریں اور اس کو پیمانے پر تعبیر کرنے کے لیے م ای کھینچیں۔ سفونٹ ۲۴



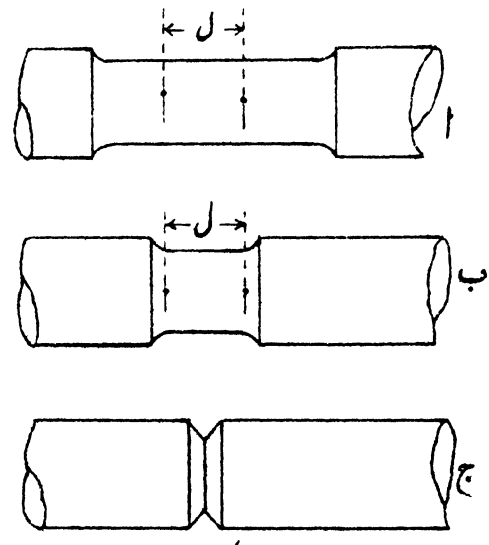
شکل ۲۹

۳۰ - انتہائی مضبوطی، وغیرہ، پر امتحانی ٹکڑے کی شکل کا اثر — تنشی امتحان کے ٹکڑوں کو عموماً اُس طول سے کچھ زیادہ حصہ متوازی رکھا جاتا ہے جس پر تطول ناپنا مقصود ہے اور سرے بڑی تراش کے رکھے جاتے ہیں تاکہ تناؤ عائد کرنے کے لیے گرفت اچھی مل سکے۔ درمیان میں جو متوازی چھوٹی تراش کا حصہ ہے اُس کے مختلف طولوں پر تطول ناپنے کا فی صدی تطول پر جو اثر پڑتا ہے اُس سے دفعہ ۲۷ میں بحث کی جا چکی ہے، وہاں یہ بتایا گیا ہے کہ چھوٹے طول پر ناپنے سے فی صدی تطول زیادہ حاصل ہوتا ہے۔ اب یہ بتانا باقی ہے کہ متوازی چھوٹی تراش کا جو حصہ ہے خود اس کے طول کو کم کرنے کا کیا اثر ہوگا۔ متمدد اشیا میں اس کا اثر اس کے بالکل برعکس ہے جو ایک بڑے متوازی حصے کے صرف ایک چھوٹے حصے پر غور کرنے سے ہوتا ہے۔ سروں کے جو بڑی تراش کے حصے ہیں اُن کی باہمی قربت سے مقامی کھنچاؤ کم ہو جاتا ہے اور اس طرح ایک دیے ہوئے ناپ طول کے لیے تطول اور سکڑاؤ کم ہو جاتے ہیں۔ ابتدائی تراشی رقبے پر محسوبہ انتہائی مضبوطی بڑھ جاتی ہے اور نقطۂ مغلوبیت کا زور بھی زیادہ حاصل ہوتا ہے۔ اِن اثرات کی وجہ یہ ہے کہ دھات جو جزوی طور پر پیکر پذیر ہے اُس میں قریب کی بڑی تراش سے "بہاؤ" پیدا ہوتا ہے جو کمر کے

مقامی شدید زور کو کم کرتا ہے خاص کر تطول کے آخری مراحل میں۔ چنانچہ شکل ۳۰ میں ٹکڑے ا سے ٹکڑے ب میں انتہائی مضبوطی زیادہ اور رقبے کا سکڑاؤ کم پایا جائیگا۔ نیز دونوں میں ایک ہی طول ل پر غور کیا جائے تو ب میں ا سے تطول کم ہوگا۔ انتہائی مضبوطی اور نقطۂ مغلوبیت کے اضافے کی وجہ یہ بھی ہوسکتی ہے کہ متمدد اشیا میں تمام تر یا جزوی طور پر جز کی وجہ سے جو شکستگی اور مغلوبیت (دیکھو دفعات ۲۵ اور ۳۷) امتحانی ٹکڑے کے محور سے ترچھے مستویوں پر واقع ہوگی اُس کی مزاحمت کرنے والا تراشی رقبہ ب اور ج میں ا سے زیادہ ہوگا[1] (شکل ۳۰)۔

ان اثرات کی وجہ سے انجینیری کے معیاروں کی مجلس نے سلاخوں اور ڈنڈوں میں امتحانی ٹکڑوں کے متوازی حصے کے طول کے لیے اقل حد قطر کا ۹ گنا رکھی ہے۔ اور تطول ناپنے کے لیے قطر کا کم ازکم ۸ گنا طول لینا چاہیے۔ صفحہ ۴۵

تراش کی اچانک تبدیلیاں ـــ اگر متوازی حصے کا طول اتنا کم ہو کہ تبدیلی بالکل اچانک ہو تو بہت ہی پیکر پذیر اشیا کو چھوڑ کر باقی سب اشیا میں اچانک تبدیلی کی تراش پر زور ناہموار طور پر تقسیم ہوگا اور متمدد اقل زاویے پر مرتکز ہوگا۔ اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ ناکارگی ایک پست تر اوسط زور پر واقع ہوگی، اور اس طرح شے کی انتہائی مضبوطی کی قیمت کم حاصل ہوگی۔



شکل ۳۰

[1] دیکھو روئداد رائل سوسائٹی جلد ۹۴ صفحہ ۲۴۳۔

اس کی انتہائی صورتیں مستطیلی تراش کے کٹھنے دار نمونے، فانہ نما نالی کے نمونے (ج شکل ۳۰)، اور مدور تراشوں کی تیز کنارے دار ہنسلیاں ہیں۔ تراش کی اچانک تبدیلی سے انتہائی شکستی بوجھ کی قیمت میں جو کمی واقع ہوتی ہے یہ کمی پھوٹک اور غیر متمدد اشیا میں بہت زیادہ ہوگی مثلاً ڈھلے لوہے یا سخت فولاد میں۔ اور بیکر پذیر اشیا میں شدید زور کے مقام پر مادے کا جو مقامی بہاؤ واقع ہوگا اس سے زور کی تقسیم زیادہ یکساں ہوجائیگی اور اس طرح اچانک تبدیلی کا اثر کم ہوجائیگا۔ مائع کے بہاؤ کے خطوط کی مماثلت کی روشنی میں زور کی تقسیم کو تجربتہً معلوم کرنے کی مسٹر گلیور[1] نے کوشش کی ہے[2]۔

۳۱۔ مختلف دھاتوں کا تنشی استحکام اور دیگر خواص

ایک تمثیلی متمدد دھات کی روش دفعہ ۲۳ میں پورے طور پر بیان کی جاچکی ہے۔ فولاد کی دو قسموں اور ایک عمدہ قسم کے ریٹواں لوہے کے "زور فساد" منحنی شکل ۳۱ میں دکھائے گئے ہیں۔ یہ سب دھات کے گول ٹکڑوں کے لیے ہیں جن کا قطر ۱ انچ ہے اور تطول ۸ انچ کے طول پر ناپے گئے ہیں۔ تطول کے لچکدار حصے کو تعبیر کرنے والا خطِ مستقیم مابعد کے فسادوں سے ۲۵۰ گنے پیمانے پر کھینچا گیا ہے۔

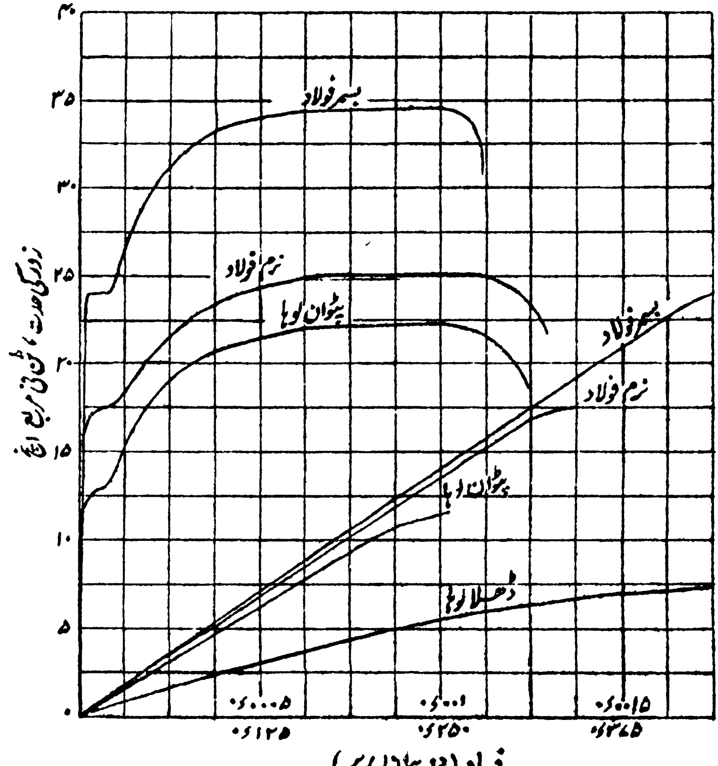
ڈھلا لوہا ایک پھوٹک شے ہے، یعنی بہت تھوڑے سے تطول اور عرضی سکڑاؤ[3] اور تھوڑے سے زور پر ٹوٹ جاتا ہے۔ عمدہ ڈھلے لوہے کے ایک نمونے کے لیے "زور فساد" منحنی بڑے پیمانے پر شکل ۳۱ میں دکھایا گیا ہے۔ انتہائی مضبوطی یا تنشی استحکام ۱۰ ٹن فی مربع انچ سے کچھ ہی زیادہ ہے، اور اس وقت فساد $\frac{1}{100}$ سے ذرا زیادہ ہے۔ ڈھلے لوہے کے منحنی کا شاید ہی کوئی حصہ مستقیم ہوگا۔ زور کے فی ٹن اضافے سے تطول کا جو اضافہ ہوتا ہے وہ اعلیٰ زوروں پر زیادہ ہوتا ہے۔ صفحہ ۴۶

[1] Mr. Gulliver

[2] روئداد رائل سوسائٹی ایڈنبرا جلد ۳۰ صفحہ ۳۸۔ نیز مضمون "زور کے خطوط اور بہاؤ کے سیدھے خطوط" رسالہ انجینیرنگ ۱۱ مارچ ۱۹۱۰ء۔

[3] Lateral

دیکھو چونکہ راست یا کھنچاؤ کی لچک کا مقیاس سے منحنی کے ڈھال کے متناسب ہوتا ہے اس لیے مختلف زوروں پر مختلف ہوگا مثلاً پہلے ٹن فی مربع انچ زور پر

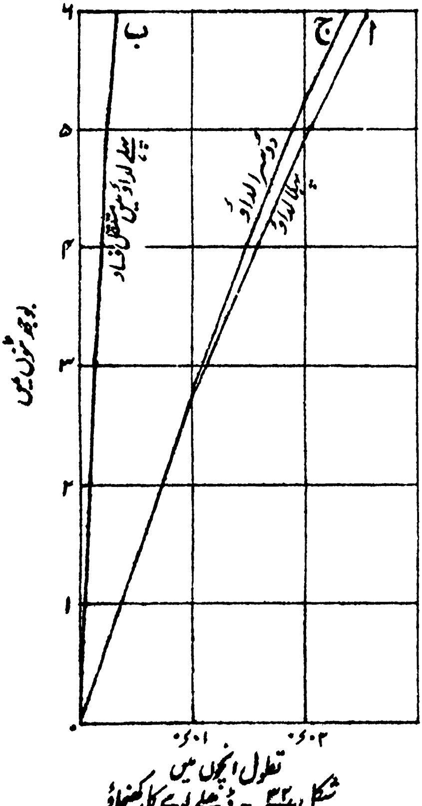


شکل ۳۱ - تنشی "زور فساد" منحنی

اس کی کچھ قیمت ہوگی اور پوری وسعت میں ناپا جائے تو اس سے مختلف ہوگی۔ پہلی صورت میں اس کی قیمت تقریباً ۶۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہوگی اور دوسری صورت میں تقریباً ۴۰۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ بڑی قیمت زیادہ صحیح ہے کیونکہ پیمائش لچک کی حد کے اندر کرنی چاہیے۔ ڈھلے لوہے کے لیے لچک کی حد بہت پست ہے۔ یہاں تک کہ یہ صفر ہو سکتی ہے کیونکہ بہت خفیف زوروں پر بھی مستقل فساد مشاہدہ کیے جا سکتے ہیں۔ کسی زور سے مثلاً تناؤ سے جو مستقل فساد پیدا ہوتا ہے اُس کا ایک حصہ اس وجہ سے ہو سکتا ہے کہ

صفحہ ۵۳

مائع حالت سے ٹھنڈے ہوتے وقت دھات کے اندر جو زور رہ گئے ہونگے اُن پر غالب آنا پڑا ہوگا۔ تناؤ کی ایک خاص مقدار لگانے سے زور کی یہ حالت دُور ہو جائیگی اور اگر نمونہ پر دوبارہ بتدریج بوجھ ڈالا جائے تو اب مستقل فساد پہلے لداؤ کے مقابلے میں بہت کم ہوگا۔ شکل ۳۲ میں ڈھلے لوہے کے ایک ٹکڑے کے لیے "بوجھ تطول" منحنی دکھائے گئے ہیں جس کا قطر ۵/۸ انچ اور طول ۱۰ انچ ہے، اور پہلے لداؤ سے پیدا ہونے والے مستقل فساد بھی دکھائے گئے ہیں۔ اگر



شکل ۳۲ - ڈھلے لوہے کا کھنچاؤ

ہر لداؤ سے جو مستقل فساد پیدا ہوتے ہیں اُن کے تطول میں سے منہا کر دیا جائے تو باقی تطول جن کو لچکدار تطول کہا جاتا ہے ہر صورت میں ایک ہی ہونگے۔ اگر راست لچک کا مقیاس ان تحویل شدہ تطولوں سے محسوب کیا جائے تو ظاہر ہے کہ اس کی قیمت پورا تطول لے کر محسوب کرنے کے مقابلے میں زیادہ ہوگی لیکن کسی صورت میں بھی "بوجھ تطول منحنی" ایک خطِ مستقیم نہیں ہوتا۔ اس لیے مقیاس زور کی مختلف وسعتوں کے لیے مختلف ہوگا مثلاً پہلے ۲ ٹن کی وسعت کے لیے ۵ ٹن کی

وسعت سے مختلف ہوگا۔

تناؤ میں ڈھلے لوہے کی انتہائی مضبوطی عموماً ۷ سے ۱۰ ٹن فی مربع انچ تک ہوتی ہے۔ فشار میں اس کی قیمت اکثر ۵۰ ٹن فی مربع انچ ہوتی ہے۔ نتائج ایک ڈھلواں (Casting) کے مختلف حصوں کے امتحانی ٹکڑوں کے لیے مختلف ہوتے ہیں اور خواص بڑی حد تک ٹھنڈا ہونے کی شرح پر بھی منحصر ہوتے ہیں۔ مثلاً ایک ڈھلی سلاخ کا کھردری حالت میں کھال سمیت امتحان کیا جائے تو نتائج اُن سے مختلف ہونگے جو ایسی ہی ایک سلاخ کے بیرون کو مشین کرنے کے بعد حاصل ہونگے۔ پہلی سلاخ سے انتہائی مضبوطی زیادہ حاصل ہوگی۔

چونکہ ڈھلے لوہے میں تخلخل کا اور ٹھنڈا ہوتے وقت اندر زور رہ جانے کا اور دیگر باتوں کا احتمال ہے اس لیے ڈھلے لوہے میں عملی مضبوطی عموماً تناؤ میں ۱ ٹن فی مربع انچ اور فشار میں ۵ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ جائز نہیں رکھی جاتی۔

پِٹواں لوہا — پٹواں لوہا ایک تمثیلی متمدد دھات ہے اس میں ۹۹ فی صدی سے زیادہ خالص لوہا اور صرف تقریباً ۱ فی صدی کاربن ہوتا ہے۔ یہ گھُل ملانے کی بھٹی سے اسفنجی یا لُئی کی سی حالت میں آتا ہے (مائع نہیں) اور بعد میں اس کو جو پیٹا اور بیلا جاتا ہے اس سے خُبث بالکل دفع نہیں ہو جاتا اور تکمیل یافتہ حالت میں بھی اس کے پرت دیکھے جا سکتے ہیں۔ شکستہ نمونوں سے اِس کی صفحہ ۴۸
ساخت ریشہ دار یا طبق دار پائی جاتی ہے۔ یہ بات بیلنے اور کمانے سے پیدا ہوتی ہے لیکن دھات بذات خود اگر خرد بین سے دیکھی جائے تو قلمدار ساخت کی ہوتی ہے (دیکھو دفعہ ۴۲)۔ تنشی استحکام اور تمدد دونوں ریشوں کی سمت میں علی القوائم سمت سے زیادہ ہوتے ہیں۔ میکانی خواص مختلف اوصاف کی پیداوار میں مختلف ہوتے ہیں۔ عمدہ وصف کی پیداوار کے خواص شکل ۳۱ء میں دکھائے گئے ہیں۔ ادنیٰ وصف کی پیداوار میں انتہائی مضبوطی اور تطول کم ہوتے ہیں (دیکھو باب کے ختم پر کی جدول)۔

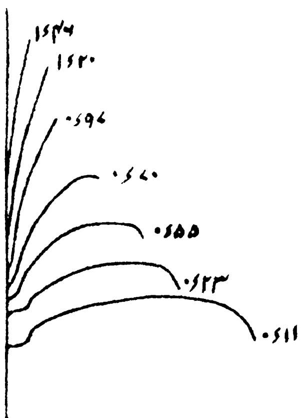
پِٹواں لوہے کی ترکیب مختلف اوصاف میں مختلف ہوتی ہے۔ یہ مناسب ہے کہ فاسفورس کو ½ فی صدی اور گندھک کو ۰۔۵ فی صدی سے کم رکھا جائے۔

فاسفورس سرد دھات کو پھوٹک بناتی ہے اور گندھک سُرخ حرارت پر پھوٹک پن پیدا کرتی ہے۔

فولاد ـــــ فولاد کا لفظ پہلے لوہے کے اُن مختلف اقسام کے لیے بولا جاتا تھا جو سرخ حرارت سے تیزی سے ٹھنڈی کی جائیں تو سخت ہو جاتی تھیں۔ ان میں ½ فی صدی سے زیادہ کاربن لوہے کے ساتھ کیمیائی طور پر ملا ہُوا ہوتا تھا۔ ان فولادوں کا تنشی استحکام اور تمدد اتنا قابلِ لحاظ نہیں جتنا نرم قسموں کا۔ زیادہ کاربن کے فولاد متمدد نہیں ہوتے لیکن اُن کی تنشی مضبوطی زیادہ ہوتی ہے۔

اب بسیمر[1]، سی منز[2]، اور دوسرے عملوں کے ذریعے بہت زیادہ متمدد فولاد تیار کیے جاتے ہیں جن کی تنشی مضبوطی کم ہوتی ہے۔ ان کو نرم فولاد کہا جاتا ہے۔ بہت سے کاموں میں پٹواں لوہے کی جگہ نرم فولادوں نے لی ہے کیونکہ یہ زیادہ مضبوط، زیادہ یکساں اور زیادہ متمدد ہوتے ہیں۔ پٹواں لوہے کو ڈھالا نہیں جا سکتا لیکن ان کو ڈھالا جا سکتا ہے۔ اور جب سلاخیں، وغیرہ، بنانے کی ضرورت ہوتی ہے تو پہلے ان کو کُندوں میں ڈھالا جاتا ہے اور پھر بیلا جاتا ہے۔

چونکہ کُندے مائع حالت سے حاصل کیے جاتے ہیں اس لیے بعد میں بیلنے اور گھڑنے سے ریشہ پیدا نہیں ہوتا، اور دھات پٹواں لوہے سے زیادہ متجانس ہوتی ہے اور اکثر اس میں تھوڑا کاربن موجود ہوتا ہے لیکن یہ تپا جوڑنے میں اتنی قابلِ اعتماد نہیں اس لیے تپا جوڑ جہاں ضروری ہو وہاں عمدہ پٹواں لوہا استعمال کیا جاتا ہے۔ ان فولادوں میں ½ فی صدی سے



شکل ۳۳ ـ فولاد پر کاربن کا اثر

[1] Bessemer
[2] Siemens.

کم کاربن ہوتا ہے اور کاربن کی مقدار اس پر منحصر رکھی جاتی ہے کہ فولاد کس غرض کے لیے مطلوب ہے۔ مثلاً فولادی پٹریوں میں ۳ء سے ۴ء فی صدی تک تعمیری فولاد میں تقریباً ۲۵ء فی صدی، اور ریوٹوں کے فولاد میں تقریباً ۱ء فی صدی رکھا جاتا ہے۔ فولاد کے میکانی خواص پر کاربن کا بہت نمایاں اثر ہوتا ہے اور اس کو شکل ۳۳ میں دکھایا گیا ہے جو پروفیسر گڈمین[1] کی اشکال سے لی گئی ہے۔ دیگر اجزا، خواہ خفیف مقدار ہی میں کیوں نہ ہوں، فولاد کے خواص پر اثر کرتے ہیں اور کیمیائی ترکیب سے قطع نظر دھات پر جو میکانی اور حرارتی اعمال کیے جاتے ہیں وہ بھی، جیسا کہ آگے چل کر معلوم ہوگا، مضبوطی اور تمدد میں بڑی حد تک ترمیم کرتے ہیں۔ "خصوصی" انجینیری فولاد اب کثرت سے استعمال ہوتے ہیں جن میں نکل[2]، کرومیم اور وینےڈیم ہوتی ہیں اور جن میں اعلیٰ تنشی مضبوطی اور اس کے ساتھ خاصا تمدد بھی ہوتا ہے۔

فولاد میں تعمیر، جہاز سازی، مشین سازی اور دیگر اغراض کے لیے جن اوصاف کی ضرورت ہوتی ہے وہ برطانوی معیاروں کی مجلس کی قرار دادہ معیاری تخصیصات میں بیان کیے گئے ہیں اور یہ تخصیصات مجلس مذکور کے لیے شائع کیے گئے ہیں[3]۔ چند عام فولادوں کے تنشی امتحانات اور اُن کی ترکیب کے متعلق اہم ضروریات ذیل کی جدول میں دی گئی ہیں۔ تمام مضبوطیاں اور تطول معیاری ابعاد کے امتحانی ٹکڑوں سے ناپے جانے چاہییں (دیکھو مکمل تخصیصات) اور دیگر میکانی امتحانات کی تخصیص کر دی جاتی ہے۔

---

[1] Prof : Goodman.

---

[2] دیکھو ھیڈ فیلڈ (Hadfield) کا مضمون "لوہے اور نکل کی ملواں دھاتیں" (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز جلد ۱۳۸)، نیز مضمون "کروم وینے ڈیم فولاد" (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانیکل انجینیرز دسمبر ۱۹۰۴ء) ۔ اور ایک مضمون "مینگنیزی فولاد" (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز جلد ۹۳)

[3] کراسبی، لاک وڈ اینڈ سنز۔

Alloys of Iron and Nickel.

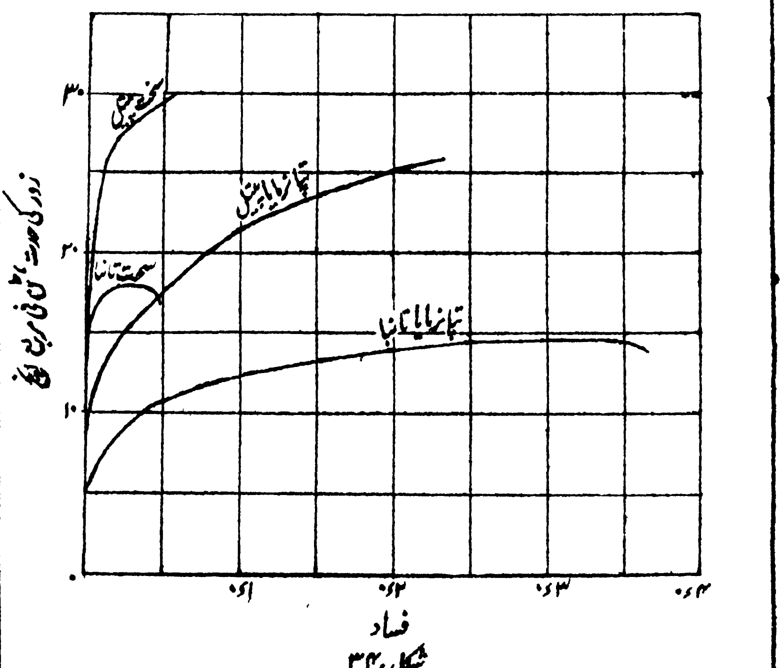
شے اور اس کا استعمال	ترکیب		تنشی استحکام ٹن فی مربع انچ		اقل تطول (فی صد) ۸ انچ میں	کیفیت
	گندھک کا اعظم فی صد	فاسفورس کا اعظم فی صد	اقل	اعظم		
تعمیری فولاد، پلوں، عام تعمیروں، تختیوں، زاویوں، وغیرہ کے لیے	۰ر۰۶	i ۰ر۰۶ ii ۰ر۰۷	۲۸	۳۳	۲۰	i کھلے چولہے کے عمل سے
اوپر کی تعمیروں کے لیے ریوٹوں کی سلاخیں	—	—	۲۵	۳۰	۲۵	ii بسمر
جہاز کی تختیاں	—	—	۲۸	۳۲	۲۰ iii	iii ۳/۸ انچ سے کم کے لیے ۱۶ فیصدی
زاویے، گرہ دار زاویے، نالی دار تراشیں، وغیرہ، جہاز سازی کے لیے	—	—	۲۸	۳۳	۲۰	
جہازوں کے لیے ریوٹوں کی سلاخیں	—	—	۲۵	۳۰	۲۵	
ریلوں کے دھرے	۰ر۰۳۵	۰ر۰۳۵	۳۵ تا ۴۰	—	۲۵ ۲۰	

فولاد کی گھڑائیوں اور ڈھلوانوں کی مضبوطی اور تمدد بہت سے حالات پر منحصر ہوتے ہیں، اور یہ بڑی جسامت کے ہوں تو ان کے مختلف حصوں میں مختلف ہوتے ہیں۔ ان کی قیمتوں کا کچھ اندازہ باب کے آخر کی جدول سے ہوگا۔

تانبا۔ تانبے کی تنشی مضبوطی، تمدد، اور لچک کی حد میکانی عمل مثلاً سرد پیٹنے یا گرم بیلنے سے بڑی حد تک متاثر ہوتے ہیں۔ یہ دھات اگرچہ بعض حالتوں میں بہت متمدد ہوتی ہے لیکن اس میں کسی ایسے نقطۂ مغلوبیت کا پتہ نہیں چلتا جس پر مغلوبیت دفعتاً واقع ہو جیسا کہ لوہے اور فولاد کی صورت میں ہوتا ہے۔ زور اور فساد کے درمیان تناسبیت سے انحراف بتدریج واقع ہوتا ہے (دیکھو شکل ۳۴)۔

تانبے کی ملواں دھاتیں[1]۔ پیتل ——— پیتل، تانبے اور جست کی ملدھات کا نام ہے۔ میکانی خواص ترکیب اور عمل پر بڑی حد تک منحصر ہوتے ہیں (دیکھو شکل ۳۲)۔ بہت سے پیتل تناؤ میں بہت مستحکم اور تانبے سے زیادہ سخت ہوتے ہیں اور ڈھلائی میں بہتر ہوتے ہیں لیکن اتنے متمدد نہیں ہوتے۔ بعض ملواں دھاتیں جو بہت مضبوط ہوتی ہیں مثلاً ڈلٹا دھات، اُن میں تھوڑا سا لوہا شامل ہوتا ہے۔ ان کا تنشی استحکام نرم فولاد سے کم نہیں ہوتا۔ صفحہ ۵

کانسی —— عام طور پر کانسیاں زیادہ تر تانبے اور ٹِن کی ملواں دھاتیں ہوتی ہیں۔



شکل ۳۲

[1] دیکھو ملواں دھاتوں کی تحقیقاتی کمیٹی کی مختلف رپورٹیں (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانیکل انجینیرز ۱۸۹۱ء تا ۱۹۱۰ء)۔

توپ دھات تقریباً ۹۰ فی صدی تانبے اور ۱۰ فی صدی ٹن کی ملواں دھات ہوتی ہے۔ یہ مضبوط ڈھلوانوں (Castings) کے لیے بہت کثرت سے استعمال ہوتی ہے کیونکہ کڑی ہوتی ہے اور اس کی تنشی مضبوطی بلند ہوتی ہے۔

فاسفر کانسی تانبے اور ٹن کی ایک ملدھات ہے جس میں فاسفورس کی تھوڑی مقدار شامل ہوتی ہے۔ اس کا تنشی استحکام بلند ہوتا ہے لیکن تورّق اور تمدد مطلوب ہوں تو ٹن ۵ فی صدی سے اور فاسفورس ۱ فی صدی سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے۔ سخت ڈھلوانوں کے لیے ٹن کو ۱۰ فی صدی تک اور فاسفورس کو ۱ فی صدی تک بڑھایا جاسکتا ہے اور اس سے کچھ زیادہ پھوٹک پن نہیں پیدا ہوگا۔

مینگینیز کانسی میں بالعموم ٹن اور مینگینیز کے علاوہ جست بھی ہوتا ہے۔ یہ تناؤ میں مستحکم، متمدد، اور سخت ہوتی ہے اور تآکل کی سخت مزاحمت کرتی ہے۔

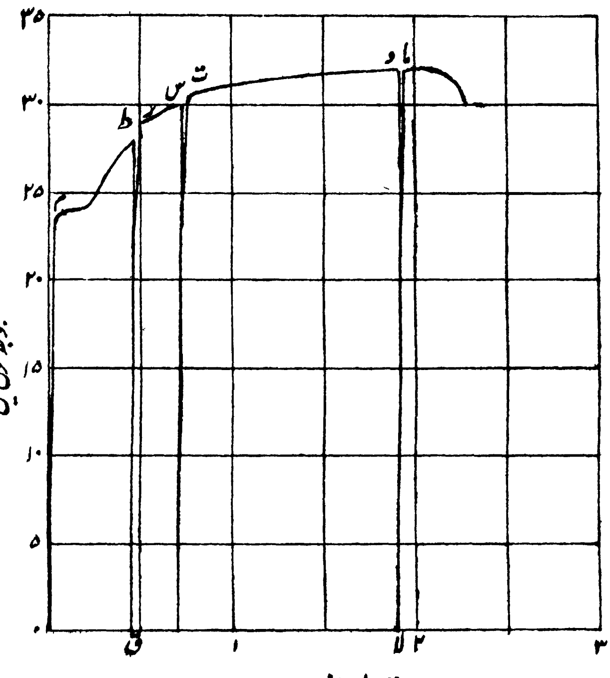
سلیکن کانسی —— کانسی میں تھوڑا سا سلیکن ملا دینے سے اس کی مضبوطی اور تمدد میں اضافہ ہوجاتا ہے اور برقی موصلیت میں کمی نہیں ہوتی جیسی کے فاسفورس ملانے سے ہوتی ہے۔

ایلومینیم کانسی[1] میں بالعموم ٹن نہیں ہوتا بلکہ تانبا اور ایلومینیم ہوتا ہے۔ ایلومینیم بالعموم ۱۰ فی صدی سے زیادہ نہیں ہوتا۔ ایلومینیم اس سے زیادہ کرنے سے تنشی استحکام بڑھتا ہے اور پھوٹک پن پیدا نہیں ہوتا۔
صفحہ ۵۱ ۱۰ فی صدی والی ملدھات کی مضبوطی بڑی ہوتی ہے (۴۰ تا ۴۵ ٹن فی مربع انچ) اور تمدد بھی خاصا ہوتا ہے۔

ایلومینیم —— ایلومینیم اپنے ہلکے پن کی وجہ سے ایک اہم دھات ہے۔ اس کی کثافتِ اضافی ڈھلے ہونے کی صورت میں صرف ۲٫۶ اور بیلے

[1] دیکھو ملواں دھاتوں کی کمیٹی کی آٹھویں رپورٹ (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانکل انجینیرز جنوری سنہ ۱۹۰۷ء) اور نویں رپورٹ (جنوری سنہ ۱۹۱۰ء)۔

ہونے کی صورت میں صرف ۲٫۷۵ - ڈھلے ہونے کی صورت میں اس کی تنشی مضبوطی مقابلۃً پست یعنی ۵ تا ۶ ٹن فی مربع انچ ہوتی ہے لیکن بیلنے یا تارکشی سے بڑھ جاتی ہے۔ لچک کی حد پست ہے اور مقابلۃً پست تنشی بوجھوں سے



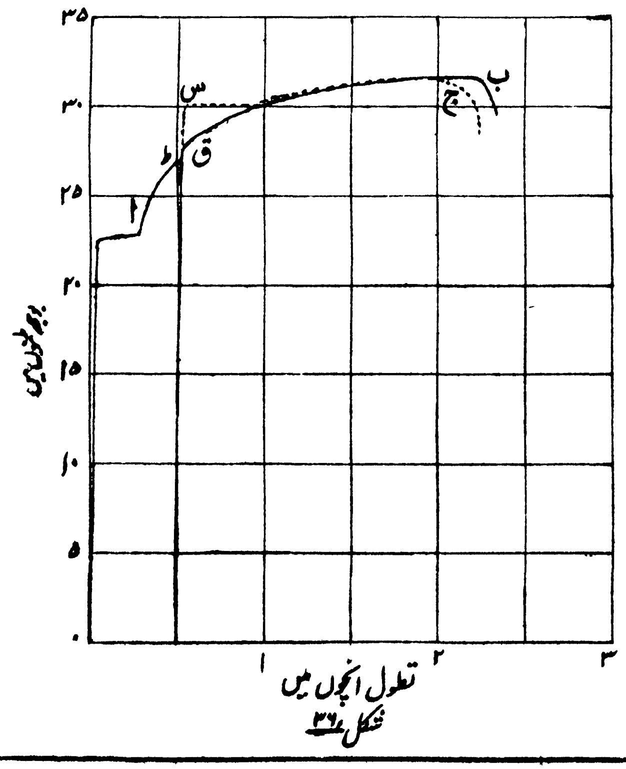
شکل ۳۵

آہستہ "رینگنا" شروع ہوجاتا ہے (دیکھو دفعہ ۲۳) - عموماً انتہائی مضبوطی کے نام سے جو زور موسوم ہیں اُن سے بہت پست زور کو اگر دیر تک لگا رکھا جائے تو شکستگی واقع ہوجاتی ہے۔

طواں دھاتیں - تنشی استحکام اور سختی بڑھانے کے لیے ایلومینیم کے ساتھ تانبا، ٹن اور جست ملائے جاتے ہیں۔

۳۲ - تنشی لچک کی حد اور نقطۂ مغلوبیت کو بڑھانا۔

بیش فسادی ـــــ اگر فولاد یا کسی اور متمدد شے کا ایک ٹکڑا "بیش فساد" ہو یعنی ایسے بوجھ سے فساد کے تحت ہو جو نقطۂ مغلوبیت (دفعہ ۲۴) سے متجاوز ہونے کے لیے کافی ہے تو بعد میں اسی ٹکڑے کا پھر امتحان کرنے سے یہ پایا جائیگا اب نقطۂ مغلوبیت پہلے سے اونچا ہے اور لچک کی حد اور زور اور فساد کی تناسبیت کی حد کم ہو گئی ہے۔ مثلاً شکل ۳۵ میں بسمر فولاد کی سلاخ کے ایک ٹکڑے کا "بوجھ تطول" نقشہ دکھایا گیا ہے جس کا ابتدائی قطر ۱ انچ تھا اور تطول ایسے طول کے نلپے گئے جو ابتدا میں ۱۰ انچ تھا۔ لداؤ میں تین بار خلل ڈالا گیا یعنی بوجھ لگا کر بہت تیزی سے نکال لیا گیا اور پھر بتدریج صفر سے بڑھایا گیا۔ بوجھ پہلی بار نقطہ ط پر نکالا گیا۔ پھر چند منٹ کے اندر دوبارہ لادنے سے خط ق ر حاصل ہوا جو مغلوبیت کے نئے نقطہ ر تک دھات کے جزوی لچکدار طرزِ عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ یہ نقطہ ر صفحہ ۵۲



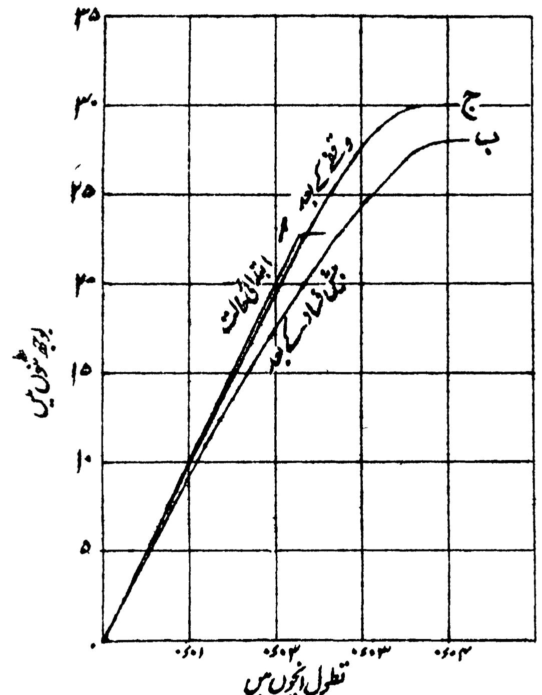
شکل ۳۶

سابق کے نقطہ ط کے بوجھ سے تقریباً ا ٹن زیادہ ہے اور سابق کے نقطۂ مغلوبیت م سے بہت زیادہ ہے۔ بعد میں اور دو نقاط س اور و پر خلل ڈالنے سے نئے اور بلند تر نقاطِ مغلوبیت ت اور ما حاصل ہونگے۔ بوجھ نکال کر پھر لگانے کے لیے ممکنہ طور پر کم وقفہ لیا گیا۔

وقت کا اثر۔ اگر کسی شے کو ایک بار فساد کے تحت آنے کے بعد پھر دوبارہ لادے جانے سے پہلے تھوڑی دیر آرام کرنے دیا جائے تو اس میں زیادہ سختی کے متعلقہ خواص پیدا ہو جاتے ہیں بہ نسبت اس کے کہ فوراً لاد دیا جائے۔ اس کا نقطۂ مغلوبیت بڑھ جاتا ہے اور شکستگی پر کا تطول گھٹ جاتا ہے۔ انتہائی بوجھ بھی بڑھ سکتا ہے خاص کر اگر سابق کا بوجھ انتہائی مضبوطی سے بہت کم نہیں تھا۔ لچک کی حد بھی بڑھ کر تقریباً نئے نقطۂ مغلوبیت تک پہنچ جاتی ہے۔ یہ باتیں اشکال ۳۶، ۳۷ اور ۳۸ میں دکھائی گئی ہیں۔ صفحہ ۵۳
شکل ۳۶ میں فولاد کے ایسے دو ٹکڑوں کے "بوجھ تطول" منحنی دکھائے گئے ہیں جو تقریباً بالکل ایک جیسے ہیں اور اسی ایک انچ سلاخ سے کاٹے گئے ہیں لیکن ان پر عمل کسی قدر مختلف کیے گئے ہیں۔ دونوں ٹکڑے ۲۷ ٹن تک نقطۂ ط تک لادے گئے۔ اس سے منحنی ا حاصل ہوا۔ اس کے بعد زور ہٹا لیا گیا۔ پھر پہلے پر فوراً ہی دوبارہ بتدریج بوجھ نقطۂ شکستگی تک ڈالا گیا۔ اس سے نقطۂ مغلوبیت ق حاصل ہوا جو ۲۸ ٹن سے ذرا کم ہے۔ اس کے بعد اس میں جو فسادات واقع ہوئے وہ بھرے ہوئے خط کے منحنی ب سے دکھائے گئے ہیں۔ دوسرے ٹکڑے کو ۲۴ گھنٹے کا آرام دیا گیا اور پھر لادا گیا۔ اس میں نقطۂ مغلوبیت س حاصل ہوا جو تقریباً ۳۰ ٹن ہے۔ اس کے بعد کے فسادات نقطہ دار منحنی ج سے دکھائے گئے ہیں۔ انتہائی تطول اس ٹکڑے میں زیادہ تھا جس کو زیادہ وقفہ نہیں دیا گیا جس میں وہ سخت ہوتا اور دونوں کی شکستگیاں ایسی تھیں جیسی مختلف تمدد کی دھاتوں کی ہوتی ہیں (دیکھو دفعہ ۲۷)۔ نقطۂ مغلوبیت کا وقفے کی وجہ سے بلند ہو جانا اس وقت اور بھی نمایاں ہوتا ہے جب کہ بوجھ کو ہٹا لینے کی بجائے ویسا ہی رہنے دیا جائے[1]

---

[1] دیکھو ایونگ (Ewing) کا مضمون (روئداد رائل سوسائٹی ۱۸۸۰ء)



شکل ۳۷

اور بوجھ لگانے میں ذرا دیر بھی ٹھہر جانے سے "زور فساد" نقشے میں ایک کٹھنہ بن جاتا ہے۔

صفحہ ۵۲ "سرد کام" کا اثر —— "فساد سختائی" —— گزشتہ بیان سے آسانی سے سمجھ میں آجائیگا کہ نقطۂ مغلوبیت اور تمدد خاص کر آہنی (Ferrous) دھاتوں میں اُس عمل سے بڑی حد تک متاثر ہوتے ہیں جو عموماً شدید فسادوں پر مشتمل ہوتا ہے اور جو دھاتوں پر ان کو تیار کرتے وقت کیا جاتا ہے مثلاً بیلنا یا سرد حالت میں کھینچنا وغیرہ۔ مقامی سختی یا تمدد کی کمی بھی ایسی دھات میں پیدا ہوجا سکتی ہے جس پر سوراخ سازی، جز یا پیٹنے کا کھرا عمل کیا گیا ہو۔

بیش فساد نمونوں میں نقطۂ مغلوبیت سے پہلے جو خفیف فساد پیدا ہوتے ہیں وہ دلچسپی سے خالی نہیں۔ ابھی جن دو نمونوں کا ذکر کیا گیا ہے

اُن کے یہ فساد شکل ۳۷ میں بڑے پیمانے پر دکھائے گئے ہیں جس میں شکل ۳۶ کے متناظر حروف ا، ب، ج لگائے گئے ہیں۔ ابتدائی منحنی ا میں تقریباً نقطۂ مغلوبیت تک زور اور فساد میں تقریباً کامل تناسبیت پائی جاتی ہے۔ منحنی ب میں (جو بیش فسادی کے فوراً بعد کا ہے) اتنی تناسبیت نہیں پائی جاتی۔ لچک کی حد بھی تقریباً صفر ہے۔ لیکن منحنی ج جو ۲۴ گھنٹے کے آرام کے بعد کی حالت کو تعبیر کرتا ہے انحنا میں ا سے بہت مختلف نہیں۔ تینوں منحنیوں کے ڈھالوں کے ذریعے جو کھنچاؤ کے مقیاس سے حاصل ہونگے اُن کا باہم مقابلہ کرتے وقت یہ یاد رہے کہ منحنیوں ب اور ج کی صورت میں تراشی رقبہ ا سے تقریباً ۵ فی صدی کے بقدر کم ہوگیا ہے اور تطول ایسے طولوں پر دکھائے گئے ہیں جو ہر صورت کے صفر بوجھ پر ۱۰ انچ تھے۔ اگر ان باتوں کا لحاظ کیا جائے یعنی اگر مجموعی بوجھ کی بجائے زور کی حدت کو ترسیم کیا جائے تو ا اور ج سے مقیاس کی قیمتیں تقریباً ایک ہی حاصل ہونگی۔

حرارت کی مدد سے تیز بازیابی — پانی کے نقطۂ جوش کی سی تپشوں کا بعض دھاتوں پر بڑا قابلِ لحاظ اثر ہوتا ہے اور وہ یہ کہ بیش فسادی کے بعد لچک کی بازیابی کی شرح بہت تیز ہوجاتی ہے۔ لچک بہت جلد تقریباً کامل ہوجاتی ہے اور نقطۂ مغلوبیت بھی اتنا بلند ہوجاتا ہے جتنا کہ ایک کافی آرام کے وقفے کے بعد ہوتا ہے۔[1]

اوپر جو اقسام بیان ہوئی ہیں اُن کے مختلف منحنیوں کے درمیان جو خفیف سے اختلافات ہیں اُن کو زیادہ واضح کرنے کی یہ تدبیر ہے کہ نقشے میں فساد کا پیمانہ بڑا لیا جائے اور اس بات کو ایک چھوٹی سی جگہ میں حاصل کرنے کے لیے پروفیسر الیونگ (Ewing) نے[2] ایک تدبیر اختیار کی ہے کہ منحنیوں کو

[1] دیکھو میور (Muir) کے مضامین (رائل سوسائٹی کے حصہ فلسفہ کی روئداد جلد ۱۹۳) اور حارلے اور ٹام لِنسن کے مضامین (فلوسافیکل میگزین ۱۹۰۵ء)۔

[2] حصہ فلسفہ کی روئداد جلد ۱۹۳۔

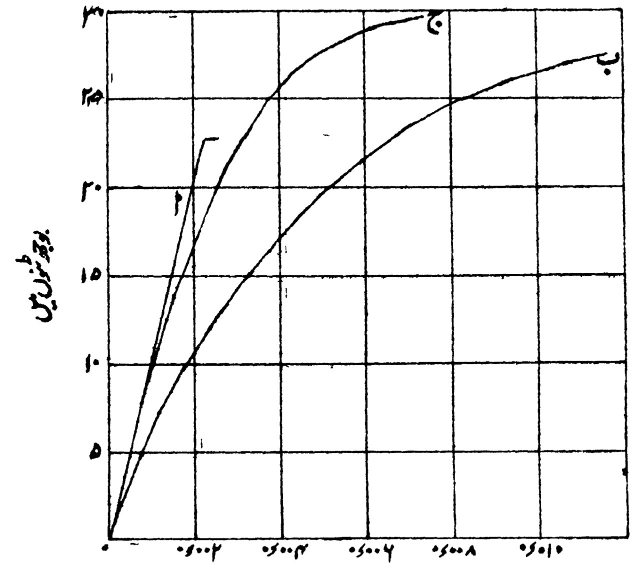
"کم کر دیا جائے"، یعنی ہر تطول میں سے ایک مقدار منہا کر لی جائے جو اس تطول کے متناظر بوجھ کے متناسب ہو۔ اس طریقے کی تمثیل کے لیے شکل ۲۲ کو شکل ۳۳ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس صورت میں ہر تطول کو بقدر ۰۰۰۹، انچ فی ٹن بوجھ کے کم کر دیا گیا ہے۔

بیش فسادی میں پس ماندگی ——— ایسی شے میں جو پہلے بیش فساد ہو چکی ہو فساد کا ایک حصہ آہستہ "رینگتے ہوئے" پیدا ہوتا ہے۔ اور اسی طرح پورا فساد یا اس کا کچھ حصہ بوجھ ہٹا لینے کے کچھ دیر بعد غائب ہوتا ہے۔ بوجھ ہٹا لینے کے بعد جو یہ عارضی فساد کے تحت ہونے کی خاصیت ہے اسے پس ماندگی کہا گیا ہے۔ اسی طرح کا اثر لچک کی حدود کے اندر ہو سکتا ہے اور یہی ایک حد تک اس کا باعث ہے کہ اگر دھاتوں پر بوجھ بالتکرار لگایا جائے تو انتہائی سکونی مضبوطی سے بہت پست زور پر ناکارہ ہو جاتی ہیں اور اس واقعے سے اس بات کی بھی توجیہ ہو سکتی ہے کہ تکراری زور کی مزاحمت زور کے تعدد پر کیوں منحصر ہے (دیکھو دفعہ ۵۱)۔

صفحہ ۵۵ **۳۳۔ ٹھنڈا کرنے میں سختانا** ——— بیش فسادی کے جو مختلف اثرات ہیں اور جن کو "فساد سختائی" سے موسوم کیا گیا ہے اُن سے بالکل متمایز عمل یہ ہے کہ فولاد کو ایک اعلیٰ تپش سے تیزی سے ٹھنڈا کر کے سخت کیا جائے۔ اس کے لیے عموماً یہ کیا جاتا ہے کہ گرم دھات کو کسی سرد مائع میں ڈبو دیتے ہیں۔ اس سے جو سختی حاصل ہوتی ہے وہ فولاد کے اندر کاربن کی مقدار پر اور ٹھنڈا ہونے کی شرح پر منحصر ہے۔ کم از کم ۵ء۰ فی صدی تک کاربن جتنا زیادہ ہو اور ٹھنڈے ہونے کی شرح جتنی تیز ہو اُتنی ہی زیادہ سختی پیدا ہو گی۔

اس طرح سختانے سے فولاد کا تنشی استحکام بڑھ جاتا ہے لیکن فولاد بہت پھُوٹک ہو جاتا ہے اور اس کا تمدد بہت کم رہ جاتا ہے۔ اس کا نقطۂ مغلوبیت نمایاں نہیں ہوتا بلکہ "زور فساد" منحنی مستقیمیت سے بتدریج منحرف ہوتا ہے۔ دوسری دھاتیں مثلاً تانبا، جست، المونیم، اور پیتل بھی اسی طرح کا عمل کرتی ہیں کیونکہ اُن کی لچک کی وسعت بہت گھٹ جاتی ہے اور بہت پست زور پر اُن میں مستقل فساد پیدا ہو جاتا ہے۔[1]

[1] دیکھو ڈاکٹر میور (Muir) کا مضمون (روئداد رائل سوسائٹی جلد ۱۷)



تطول انچوں میں (مذکورہ طریقے پر تحویل شدہ)

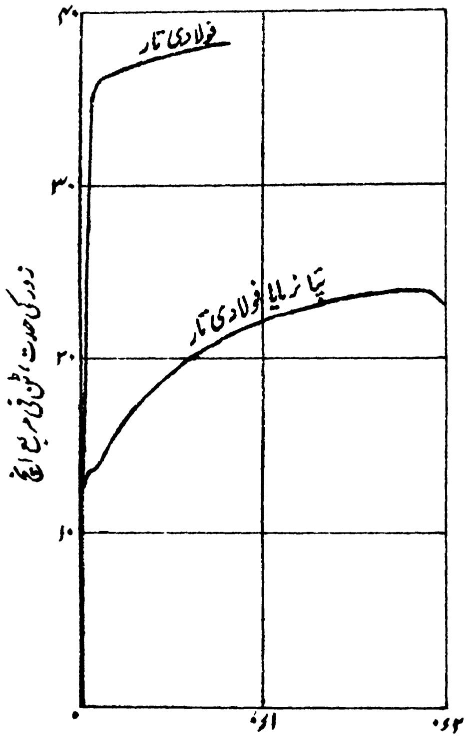
شکل ۳۸

مختلف اغراض کے لیے فولاد کی کم و بیش سختی اس طرح دُور کر دی جاتی ہے کہ دھات کو مختلف تپشوں تک دوبارہ گرم کیا جاتا ہے اور یہ تپش اس پر منحصر ہوتی ہے کہ کتنی سختی باقی رکھنا مطلوب ہے۔ اِس عمل کو "آب دینا" کہا جاتا ہے اور مطلوبہ "آب" اُن رنگوں سے پہچانی جاتی ہے جو دھات کی ایک صاف، پالش کی ہوئی سطح پر ظاہر ہوں۔ کافی اعلیٰ تپش تک گرم کریں تو تیز ٹھنڈا کرنے سے جو سختی پیدا ہوتی ہے وہ سب کی سب دُور کی جاسکتی ہے۔ دمکتی سُرخ حرارت سے بجھایا جائے تو بہت ہی صفحہ ۵۶ نرم فولادوں کو چھوڑ کر باقی سب فولاد کچھ نہ کچھ ضرور سخت ہوجاتے ہیں۔

ڈھلے لوہے کو اس طرح سختایا جاسکتا ہے کہ پگھلی ہوئی دھات کو سرد شدہ سانچوں میں ڈالا جائے۔ باہر کی کھال جو پہلے ٹھنڈی ہوتی ہے بہت سخت ہوجاتی ہے۔

۴۳ ۔ دھاتوں پر حرارتی عمل ـــــ دھاتوں پر تپش کی تعیین

اور منضبط تبدیلیوں کا عمل انجینیری اور فلزیات کا ایک اہم حصہ بن گیا ہے۔ اس کا مکمل علم حاصل کرنے کے لیے فلزیات اور فلز نگاری کے خاصے علم کی ضرورت ہے لیکن بعض حراری عمل صنعت کا ایسا اہم حصہ ہو گئے ہیں کہ ان کا مختصر ذکر ضروری ہے۔



شکل ۴۹۔ فولادی تار کو تپا نرانے کے اثر

لوہا اپنے نقطۂ اماعت سے جو تقریباً ۱۴۰۰° م ہے ٹھنڈا ہوتے وقت دو فاصل تپشوں پر نمایاں سکوت اختیار کرتا ہے۔ ان تپشوں پر دھات کے اندر حرارت نمودار ہوتی ہے۔ اور بہت سی اشیا میں ایک فاصل تپش پر اسی طرح کا واقعہ مشاہدے میں آتا ہے جب کہ وہ اپنی حالت کو بدلتی ہیں مثلاً مائع سے ٹھوس ہونے میں۔ لوہے کو گرم کرتے وقت اسی طرح دو سکتے واقع ہوتے ہیں جن میں حرارت جذب ہوتی ہے۔ یہ معلوم ہے کہ ٹھوس لوہے کی تین بہروپی شکلیں ہیں، اور ایک شکل سے دوسری میں منتقل ہوتے وقت اندرونی ساخت کی بڑی تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ نقطۂ اماعت سے اتر کر بالائی فاصل تپش تک لوہا اس حالت میں ہوتا ہے جس کو جیم لوہا کہتے ہیں۔ بالائی فاصل تپش پر جو تقریباً ۹۰۰° م ہوتی ہے لوہا ب شکل میں منتقل ہوتا ہے (جو غیر مقناطیسی ہے)

اور تقریباً ۷۶۰° م پر تیسری شکل شروع ہوتی ہے جو عہ لوہا کہلاتی ہے اور یہ شکل ۷۶۰° سے نیچے کی ہر تپش پر پائی جاتی ہے ۔ ان تینوں شکلوں عہ، بہ، جہ میں لوہوں کے طبیعی خواص مختلف ہیں ۔

جہ لوہا لوہے کے کاربائیڈ کو (جس کو سیمنٹائیٹ (Cementite) کہا جاتا ہے) ایک "ٹھوس محلول" کے طور پر رکھ سکتا ہے یعنی اس طرح کہ اس محلول کے اجزا یعنی لوہا اور لوہے کا کاربائیڈ اس طرح گھلے ملے ہوسکتے ہیں کہ ایک ٹھوس ٹکڑے کی
صفحہ ۱۵۵ ساخت بالکل یکساں ہو جیسے کہ مائع محلول میں ہوتی ہے ۔

فولاد کو آہستہ ٹھنڈا کرنے میں بالائی فاصل تپش (تقریباً ۹۰۰° م) اور تقریباً ۷۰۰° م کے درمیان تپش کی ایک فاصل وسعت واقع ہوتی ہے جس کے اندر خالص لوہا اس ٹھوس محلول سے علیحدہ ہونا شروع ہوتا ہے اور یہ علیحدگی تقریباً ۷۰۰° م پر مکمل ہوجاتی ہے ۔ اب لوہا عہ حالت میں ہوتا ہے اور دوسرے اجزا سے علیحدہ ہوتا ہے جو لوہے اور کاربن پر مشتمل ہوتے ہیں ۔ یہ بات خردبین سے مشاہدے میں آسکتی ہے ۔ گرم کرنے کے عمل میں تپش کی وہ حدود جن پر معکوس تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں سرد ہوتے وقت کی حدود سے کسی قدر اونچی ہوتی ہیں اور ٹھوس محلول کی حالت کو پورے طور پر قائم کرنے کے لیے تقریباً ۹۵۰° م تک گرم کرنا ضروری ہوتا ہے ۔ بالائی فاصل تپش وہ اقل تپش ہے جس پر فولاد تمام تر ٹھوس محلول کی حالت میں ہوسکتا ہے ۔

تطبیع —— فولاد کا یہ عمل ایسا ہے کہ دھات کو بالائی فاصل تپش[1] سے تقریباً ۵۰° م اوپر تک (یعنی معمولی نرم فولادوں کو تقریباً ۹۵۰° م تک) گرم کیا جائے اور پھر اس کو ہوا میں ٹھنڈا ہونے کے لیے چھوڑ دیا جائے ۔ اس طرح خالص لوہے کو ٹھوس محلول سے علیحدہ ہونے کی آزادی رہیگی ۔ بالعموم دھات کو ۹۵۰° کی تپش پر تقریباً ۱۵ منٹ تک رکھا جاتا ہے ۔

تپا نرمانا —— یہ وہ حرارتی عمل ہے جو کسی دھات کو نرم اور

[1] تپش کی فاصل وسعت کی حدود کسی قدر فولاد کی ترکیب پر منحصر ہوتی ہیں ۔

متمدد بنانے کے لیے کیا جاتا ہے۔

فولاد کی صورت میں، تپانرمانا اس پر مشتمل ہے کہ ایک منتخبہ تپش تک گرم کیا جائے اور اس کے بعد بہت آہستہ اور منضبط طور پر ٹھنڈا کیا جائے جس کی وجہ سے ساخت کی مختلف تبدیلیوں کو مکمل طور پر واقع ہونے کا موقع ملتا ہے۔ اگر غرض صرف یہ ہے کہ سرد کام کرنے سے جو اندرونی زور پیدا ہو گئے ہیں اُن کو دُور کیا جائے تو منتخبہ اعظم تپش بالائی فاصل تپش سے نیچے لی جاسکتی ہے۔ لیکن اگر اس کے علاوہ قلمی ساخت کو مصفےٰ کرنا مقصود ہے تو تطبیع کے عمل کی طرح بالائی فاصل تپش سے اُوپر تک گرم کرنا ضروری ہوگا۔

فولاد کو سختانا —— اب یہ آسانی سے محسوس ہوگا کہ معمولی کاربنی فولاد جو تیزی سے ٹھنڈا کرنے سے سخت ہو جاتا ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ مختلف اجزائے ترکیبی کو علٰحدہ ہونے سے روک دیا جائے اور لوہے کے کاربائیڈ کو لوہے کے اندر ٹھوس محلول کی شکل میں برقرار رکھا جائے۔ بجھا کر فولاد کو سخت کرنے کے لیے ضروری ہے کہ اس کو بالائی فاصل تپش سے اوپر تک گرم کیا جائے۔ "خصوصی" یا "ملدھات" فولادوں میں بہت آہستہ مثلاً ہوا میں ٹھنڈا کرنے سے بھی علٰحدگی واقع نہیں ہوتی اور اس کی وجہ یہ ہے کہ نکل یا دوسرے اجزا کے ذریعے علٰحدگی کو روکا جاتا ہے۔

تنشی بیش فسادی یا بناتے وقت یا استعمال کرتے وقت کے کسی اَور سرد کام سے آہنی (Ferrous) دھاتوں اور دیگر دھاتوں میں جو سختی پیدا ہوتی ہے وہ قلموں کے بیکر پذیر فساد کی وجہ سے ہوتی ہے۔ قلموں پر خاص معین سطحوں پر پھسلن واقع ہوتی ہے اور خردبینی امتحان میں پھسل پٹیوں سے ظاہر ہوتی ہے (دفعہ ۲۴)۔ قلموں کے بگاڑ سے پیدا شدہ سختی تپانرمانے کے عمل میں ظاہراً اس وجہ سے دُور ہوتی ہے کہ قلموں کے اندر تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ ممکن ہے یہ تبدیلی قلموں کا نئے سرے سے بننا ہو یا ایسا ہی کوئی اَور واقعہ ہو۔

آہنی (Ferrous) دھاتوں میں "نیلی حرارت" پر عموماً ایک سختی یا

پھوٹک پن پیدا ہوتا ہے اور اگرچہ بعض صورتوں میں اِن دھاتوں کو سرد حالت میں بے خطر طور پر کمایا جاسکے لیکن مدھم سرخ حرارت سے نیچے پیٹنے یا کوئی اور کام کرنے سے تڑق پیدا ہو جانے کا احتمال رہتا ہے۔

کشیدہ تانبا، پیتل، اور کانسیاں اعلیٰ تپش سے بجھا کر یا تیزی سے ٹھنڈا کر کے نرم کیے جاتے ہیں۔ ایلومینیم کی صورت میں نرم کرنے کے لیے ٹھنڈا آہستہ کیا جاتا ہے۔ نوٹ ۵۸

ڈیورے لومین (Duralumin) جو پٹواں ایلومینیم کی ملواں دھاتوں میں سے ایک بہت اہم لدھات ہے جس میں تقریباً ۴ فی صدی تانبا اور ۰٫۵ فی صدی مگنیسیئم ہوتا ہے حرارتی عمل سے بہت متاثر ہوتا ہے۔ اگر اس کو تقریباً ۴۸۰°م کی تپش سے پانی میں بجھایا جائے اور پھر ۲ دن کی "عمر" ہونے دی جائے تو اس کی انتہائی تنشی مضبوطی تقریباً ۵۰ فی صدی بڑھ جاتی ہے یعنی تقریباً ۲۸ ٹن فی مربع انچ ہو جاتی ہے۔ اگر دھات کو ۲۸۰°م تک گرم کر کے آہستہ ٹھنڈا کیا جائے تو نرم ہو جاتی ہے اور اس پر سرد کام کیا جاسکتا ہے۔

مختلف آہنی (Ferrous) اور غیر آہنی (Non ferrous) ملواں دھاتوں پر حرارتی عمل کے اثرات کی تفصیلات کے لیے فلزیات کی جدید کتابوں کا مطالعہ کیا جائے۔

متعدد خصوصی دھاتوں اور ملواں دھاتوں کے لیے مناسب حرارتی عمل برطانوی انجینیری کے معیاروں کی مجلس کی تخصیصات میں بتائے گئے ہیں۔

کسی شے مثلاً کشیدہ تار کو تپا نرمانے کا اثر یہ ہوتا ہے کہ تنشی استحکام اور لچک کم ہو جاتے ہیں اور تطول کے ذریعے محسوبہ تمدد بڑھ جاتا ہے جو تیاری کے وقت بہت فسادات واقع ہونے سے گھٹ گیا تھا دیکھو اشکال (۳۳ الف اور ۳۹ ب)۔ بیلی سلاخوں اور کشیدہ تاروں کو تپا نرمانے سے عموماً مینگ کے مقیاس سے کی مشاہدہ کی ہوئی قیمتیں بڑھ جاتی ہیں جس کی وجہ غالباً یہ ہے کہ بن کر آنے کے بعد جو اندرونی زور رہ گئے ہوں وہ دور ہو جاتے ہیں۔

یکے بعد دیگرے مختلف ناپ کے ٹھپوں میں سے کھینچ کر باریک تار بنانے کا جو عمل ہے اس میں ضروری ہے کہ تمدد کو واپس لے آنے کے لیے اُن مختلف مراحل کے درمیان دھات کو تپا نرما لیا جائے۔

سرد کشیدہ فولاد پر حرارتی عمل سے جو اثرات واقع ہوتے ہیں اُن میں سے اکثر بڑی حد تک اس پر منحصر ہوتے ہیں کہ تپا نرمانے کے لیے کونسی تپش اختیار کی گئی - پروفیسر لی[1] نے رسالہ انجینیر ۲۳ اور ۳۰ دسمبر ۱۹۲۶ء میں سرد کشیدہ فولادی نلیوں پر کی ہوئی ایک تحقیق کا بیان دیا ہے جس میں وہ مختلف اثرات بیان کیے ہیں جو تپا نرمانے کی تپشوں کو ہوا کی تپش سے لے کر ۱۰۰۰°م تک لینے سے پیدا ہوتے ہیں۔

فولاد کے ڈھلواؤں کو تپا نرمانے سے تنشی استحکام اور تمدد بڑھتے ہیں اور لچک کی حد بھی بڑھتی ہے۔ جو فولاد اور لوہا بہت گھسنے پسنے میں آنے والا ہو مثلاً اُٹھاؤ زنجیریں، اُن کو وقتاً فوقتاً تپا نرمایا جاتا ہے تاکہ دھات پھٹک نہ ہو جائے (دیکھو دفعہ ۴۵)۔

ڈاکٹر ایچ۔ جے۔ گاف[2] کی تحقیق سے پتہ چلتا ہے کہ استعمالی طور پر زنجیر پر جو عمل ہوتے ہیں اُن کی وجہ سے پھوٹک بن جانے سے پٹواں لوہے کی کڑیوں کی کھال میں کس طرح تڑق شروع ہو جاتی ہے اور متمدد اندرونی مادے میں سرایت کر کے شکستگی پیدا کرتی ہے۔ مدھم سرخ حرارت پر تپا نرمانے سے یا ۱۰۰۰°م پر تطبیع سے بیرونی تہ میں قلم نئے سرے سے بنینگے اور اس طرح کڑیاں متمدد اور مزید استعمال کے لائق ہو جائینگی۔

حرارتی عمل کے اثرات کے امتحانات — اگرچہ حرارتی عمل کے وہ اثرات جو متناسبیت کی حد، انتہائی زور کے تطول اور رقبے کے سکڑاؤ کے

---

[1] Prof. F. C. Lea

[2] "پٹواں لوہے کی زنجیر اور رطاب کی ناکارگی کے اسباب" (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانکل انجنیرز اپریل ۱۹۲۸ء) - اور خصوصی رپورٹ نمبر ۳ انجنیری تحقیقات، صیغۂ فولاد و آہن۔

متعلق پیدا ہوتے ہیں تنشی امتحانات سے ایک حد تک ظاہر ہو جاتے ہیں لیکن اکثر ایسا ہوتا ہے کہ اختیاری معیاری "وصفی امتحانات" زیادہ حسبِ حال ہوتے ہیں خاص کر اس لیے کہ ممکن ہے کہ حرارتی عمل جس حصے پر کیا گیا ہے وہ چھوٹا سا ہو یا یہ عمل محض مقامی ہو۔ اس مقصد کے لیے سختی کے امتحانات (دفعہ ۱۸۴) اور صدمے کے امتحانات (دفعہ ۱۸۵) خاص طور پر کارآمد ہوتے ہیں۔ صفحہ ۴۵

۳۵۔ لادنے کی شرح کا اثر — اکثر اشیا کے نمونوں کو تناؤ میں شکستگی تک جانچنے کے لیے جو معمولی وقت لگتا ہے اُس میں لداؤ کی شرح معمولی ہوا کی تپش پر انتہائی بوجھ، نقطۂ مغلوبیت یا تطول پر کوئی اثر نہیں رکھتی۔ فسادوں کو نمودار ہونے کے لیے وقت درکار ہوتا ہے اور اگر بوجھ تیزی سے لگایا جائے (مثلاً دو منٹ میں) تو فساد بوجھ کو زیادہ آہستہ لگانے کی صورت کے مقابلے میں کم ہونگے۔ اگر اس کے برخلاف بوجھ بہت آہستہ لگایا جائے اور بالتسلسل نہیں بلکہ وقفوں کے ساتھ جن میں دھات سخت ہو سکتی ہے (دفعہ ۳۱) تو ایک کٹھنہ دار بوجھ تطول نقشہ حاصل ہوتا ہے جس سے اوسط فساد کمتر حاصل ہونگے بہ نسبت اس کے کہ نمونے پر بوجھ تیزی سے لیکن بالتسلسل لگایا جاتا۔

نیز اگر بوجھ لگانے کی شرح اتنی تیز ہو کہ بوجھ ایک صدمے کی نوعیت کا ہو تو شکستگی پر نرم فولاد کا تطول معمولی شرح کے امتحانات کے مقابلے میں بہت زیادہ ہوگا[۱]۔ ایسی تیز شرحوں یا دھکے والے لداؤ کے تحت یہ بھی اغلب ہے کہ نقطۂ مغلوبیت معمولی شرحوں کے مقابلے میں بڑھ جائے لیکن تیزی سے لگائے ہوئے بوجھ کی صورت میں زور اور فساد کے درمیان ضروری نہیں کہ وہی ربط ہو جو سکونی بوجھوں کے لیے ہوتا ہے[۲]۔ جست اور ٹن میں بوجھ تیزی سے

[۱] دیکھو "توپ فولاد کا عملِ تیاری" (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز جلد ۱۳۹)؛ نیز ضربات کے امتحانات پر مضمون (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانیکل انجینیرز (مئی ۱۹۱۰ء)۔

[۲] دیکھو "دھاتوں میں آنی (Momentary) زور کے اثرات" از ھاپکنسن (روئداد رائل سوسائٹی ۱۹۰۵ء)

لگانے کی صورت میں شکستگی کے قبل کے زور بڑھ جاتے ہیں ۔ یہاں تک کہ معمولی امتحانی مشینوں میں جو تیز شرح ممکن ہے اُس کے ذریعے سُست امتحانوں کے مقابلے میں دُگنی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے ۔ سیمنٹ کی خاصیت بھی ایسی ہی ہے (دیکھو دفعہ ۱۸۷) ۔

ہوا کی تپش سے بہت بلند تر تپشوں پر انتہائی زور اور تطول پر لداؤ کی شرح کا بہت اثر ہوتا ہے ۔ اس سے دفعہ ۳۸ میں اعلیٰ تپشوں پر "رینگنا" کے عنوان سے بحث کی گئی ہے ۔

۳۶ ۔ فشار ـــــ دھاتوں میں لچک کی حد اور لچک کا مقیاس (م) راست فشار میں بھی تقریباً وہی ہوتا ہے جو تناؤ میں ہوتا ہے اور چونکہ تنشی امتحان قابلِ اطمینان فشاری امتحان سے بہت آسان ہوتا ہے اس لیے یہ بالکل عام دستور ہے کہ تقریباً تمام دھاتوں کے میکانی خواص کے علم کے لیے تنشی امتحانوں پر حصر کیا جائے ۔

لچک کی حد سے اونچے زوروں کے تحت سخت اور پھوٹک اشیا فشار میں عموماً جز کی وجہ سے ناکارہ ہوتی ہیں جو راست فشار سے مائل کسی مستوی پہ واقع ہوتا ہے ۔ اس کے برخلاف پیکر پذیر اشیا طول میں برابر چھوٹی ہوتی جاتی ہیں اور ساتھ ہی ساتھ عرض میں پھیلتی جاتی ہیں (دیکھو شکل ۴۲) اور اس سے تراش کا رقبہ بڑھتا جاتا ہے جس کی وجہ سے مزید فشاری فساد پیدا کرنے کے لیے زیادہ بوجھ درکار ہوتا ہے ۔ اس لیے انتہائی فشاری مضبوطی کی واضح تخصیص مشکل ہے ۔ تمثیلی فشاری زور فساد منحنی شکل ۴۳ میں دکھائے گئے ہیں ۔ شکل ۴۳ سے نظر آئیگا کہ بہت فشار کے بعد پٹواں لوہا طولاً تڑقتا ہے ۔ اگر دھات کامل پیکر پذیری کے قریب ہو تو زور کی حقیقی حدت جس کے تحت مادہ "بہتا ہے" مستقل ہوگی ۔ تب حجم کو مستقل فرض کرتے ہوئے اگر ل = کسی سلاخ کا ابتدائی طول، اور ل۱ = گھٹا ہوا طول،

ر = ابتدائی تراشی رقبہ، ر۱ = بڑھا ہوا تراشی رقبہ، تو

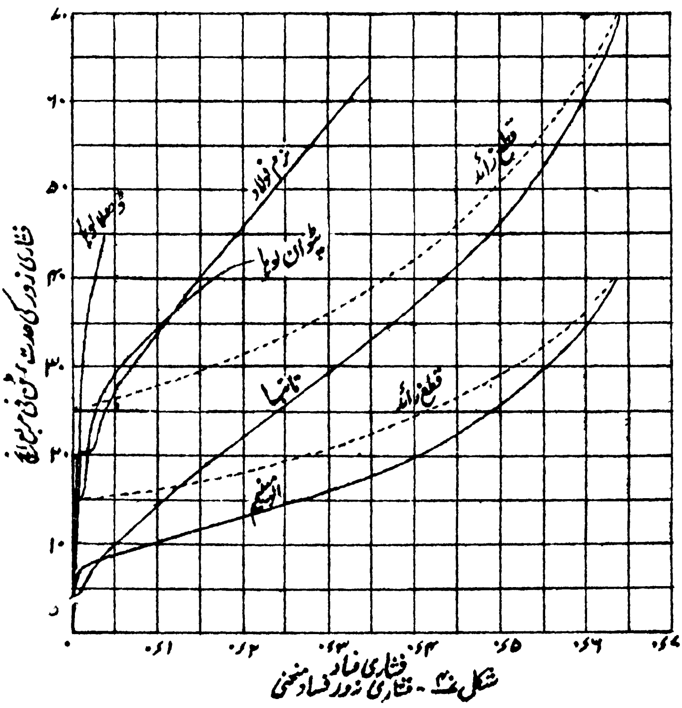
$\text{س}_1\text{ل}_1 = \text{س ل}$ (دیکھو دفعات ۲۸ اور ۲۹)

$$\text{زور کی حقیقی حدت} = \frac{\text{بوجھ}}{\text{س}_1}$$ صفحہ ۶

$$= \frac{\text{بوجھ}}{\text{س} \times \frac{\text{ل}}{\text{ل}_1}} = \frac{\text{بوجھ} \times \text{ل}_1}{\text{س ل}}$$

$$= \frac{\text{بوجھ} \times \text{ل}_1}{\text{سلاخ کا حجم}}$$

یعنی
$$\left.\begin{array}{r}\text{پیکر پذیر بہاؤ کے}\\ \text{مستقل دباؤ کی حدت}\end{array}\right\} = \frac{\text{بوجھ} \times (\text{ل}_1 - \text{ل کی کمی})}{\text{سلاخ کا حجم}}$$



شکل نمبر ۴۰ - فشاری زور فساد منحنی

اس لیے بوجھوں کو (یا زور کی ظاہری حدت کو) فشاری فسادوں کے مقابل ترسیم کیا جائے تو ایک قائم زائد حاصل ہوگا کیونکہ ان کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ اس زائد کے جو دو متقارب ہیں اُن میں ایک تو وہ محور ہے جس پر فساد ناپے گئے ہیں، دوسرا اس کے علی القوائم اس نقطے میں سے جو اکائی فساد کو تعبیر کرتا ہے۔

شکل ۴۰ میں دکھایا گیا ہے کہ کس طرح تانبا اور ایلومینیم وغیرہ جیسی پیکر پذیر اشیا کے زور فساد منحنی ایک زائد کی شکل اختیار کرتے جاتے ہیں یعنی یہ اشیا کامل پیکر پذیری کے کتنا قریب آتے ہیں جس میں دھات دباؤ کی حقیقی حدت کے اضافے کے بغیر مسلسل بہتی رہتی ہے۔ دباؤ کی اس حدت کو سیالیت کا دباؤ کہا جاتا ہے۔ صفحہ ۶۱

فشار کے تحت پیکر پذیر بہاؤ کے دوران میں نرم فولاد کی کثافت گھٹتی ہے[1] لیکن زور ہٹا کر آرام دیا جائے تو اس سے کثافت پھر بڑھتی ہے۔

۳۷۔ راست زور کے تحت شکستگی —— تناؤ اور فشار

کی شکستگی کی مختلف اشیا میں جو شکل ہوتی ہے وہ دلچسپی سے خالی نہیں اور اس سے بہت سے نتائج اخذ کیے جا سکتے ہیں۔ متمدد اشیا کی تناؤ کے تحت اور پھوٹک اشیا کی فشار کے تحت شکستگی عموماً جزوی طور پر یا کلی طور پر ایسی سمتوں میں جز یا پھسلن کے واقع ہونے سے ہوتی ہے جو راست زور کی سمت سے ترچھی ہوتی ہیں (دیکھو اشکال ۴۱ اور ۴۲)۔ راست زور کے محور کے ساتھ شکستگی کی سطح کا جو میلان ہوتا ہے وہ ہمیشہ وہ نہیں ہوتا جس میں مماسی یا جزی زور کی حدت کے اعظم ہونے کی توقع ہو سکتی ہے۔ متمدد اشیا کے تناؤ کی صورت میں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ

شکل ۴۱

[1] دیکھو مضمون "نقطۂ مغلوبیت سے زیادہ فشاری زور کے تحت نرم فولاد کی کثافت کی تبدیلی" از لی وٹامسی (رسالہ انجینیرنگ ۲ جولائی ۱۹۱۵ء)۔

شکستگی سے ذرا پہلے تراش کا ایک مقامی سکڑاؤ واقع ہوتا ہے - اس طرح نمونے کے طول میں تراش کی جو فوری غیر یکسانیت واقع ہوتی ہے اُس کی وجہ سے شکستگی سے ذرا پہلے اس تراش پر زور کی تقسیم غیر یکساں ہو جاتی ہے - اس وجہ سے شکستگی کے معائنے سے اس امر کے متعلق کوئی صحیح نتیجہ نہیں اخذ کیا جا سکتا کہ مختلف مائل سطحوں پر جزی زور کی حدتیں باہم کیا ربط رکھتی ہیں -

شکل ۴۲

فشاری شکستگیاں — بھوٹک اشیاء میں (دیکھو شکل ۴۲) فسادات نقطۂ شکستگی تک خفیف سے ہوتے ہیں، اور اگر شے متجانس اور متساوی السموت ہے تو زور کی تقسیم غالباً وہی ہوگی جو لچک کی حدود کے اندر ہوتی ہے -

اگر ایک شے حدت ف کے یکساں فشاری زور کے تحت ہو تو اُن تمام سطحوں پر جن کا عماد راست فشار کے محور سے زاویہ طہ بناتا ہو حسب ذیل زور ہونگے:-

(۱) ایک مماسی یا جزی زور فم = ف جب طہ جم طہ

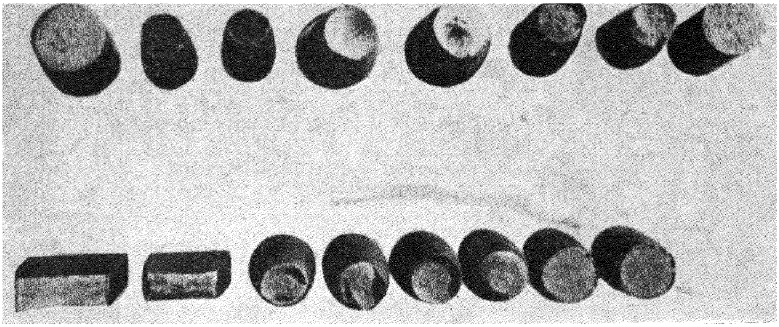
اور (۲) ایک عمادی فشاری زور فع = ف جم۲ طہ صفحہ ۶۲

شکل ۴۳

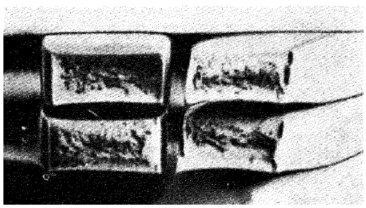
جزی زور کی حدت طہ = ۴۵° کے لیے اعظم ہوگی لیکن مادہ یہاں خالص جز کے تحت نہیں کیونکہ اس کے ساتھ عمادی زور فع موجود ہے اور جس سطح پر شکستگی میں جز عمل میں آتا ہے اس کی سمت کسی حد تک عمادی زور کے عمل پر موقوف ہوتی ہے جس کی حدت طہ کے بڑھنے سے گھٹتی ہے -

نے ویئر کا نظریہ[ھ] — فرض کرو کہ جس سطح پر جز واقع ہوتا ہے وہ خالص راست زور کی تراش سے زاویہ طہ بناتی ہے - تب اس سطح کے دونوں طرف کے حصے شکستگی سے پہلے ایک دوسرے کو اس سطح پر حدت ف جم۲ طہ کے زور سے دبائینگے اور اگر دونوں حصوں کے درمیان رگڑ کی قدر مہ فرض کی جائے تو شکستگی کی ایک مزاحمت مہ ف جم۲ طہ فی اکائی رقبہ ہوگی جو خالص جز کی اس انتہائی مزاحمت کے بالکل علاوہ ہوگی جو

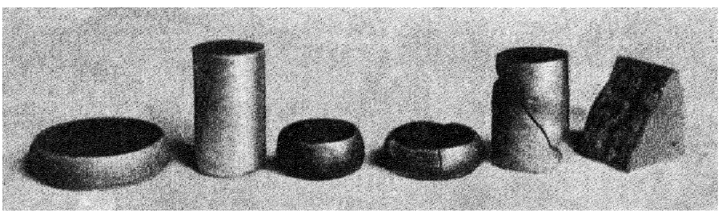
ھ Navier



شکل ۴۱ ۔ تنشی شکستگیاں



شکل ۴۲ ۔ نرم فولاد کی مستی شکستگی



شکل ۴۳ ۔ فشار

مادے کی قوتِ اتصال سے عمل میں آتی ہے۔ قوتِ اتصال کی مزاحمت کو ایک مستقل ق کے مساوی سمجھا جاسکتا ہے۔ اس لیے شکستگی پر

فم = ف جب طہ جم طہ = ق + مہ ف جم² طہ .... (۱)

یا
$$\text{ف} = \frac{\text{ق}}{\text{جب طہ جم طہ} - \text{مہ جم}^2\text{طہ}}$$

تب اگر شکستگی ایسے زاویہ طہ پر واقع ہو جس کے لیے فشاری زور ف کم سے کم درکار ہو تو اس کے لیے $\frac{\text{د ف}}{\text{د طہ}} = 0$، اس لیے تفرق کرنے سے

جم² طہ − جب² طہ + مہ × ۲ جب طہ جم طہ = ۰

یا جم ۲طہ + مہ جب ۲طہ = ۰

یا مم ۲طہ = − مہ = − مس فہ = مم $\left(\frac{\pi}{2} + \text{فہ}\right)$ .... (۲)

جہاں فہ رگڑ کا زاویہ یا ٹھہراؤ کا زاویہ ہے، اور مس فہ = مہ

اس طرح طہ = $\frac{\pi}{4} + \frac{\text{فہ}}{2}$

یعنی شکستگی کا اقتضا جس سطح پر زیادہ سے زیادہ ہے اُس کا میلان ۴۵° سے صفحہ ۶۳
بقدر $\frac{\text{فہ}}{2}$ کے زیادہ ہے، جہاں فہ شے کے دانوں کا ٹھہراؤ کا زاویہ ہے۔

یہ بات ظاہر نہیں کہ کسی شے کے جو دو حصے جزی شکستگی کی وجہ سے آخرکار جدا ہو جاتے ہیں اُن کے درمیان رگڑ کی قدر وہی ہونی چاہیے جو اسی شے کی دو پہلے سے علیحدہ سطحوں کے درمیان ہوتی ہے اور نہ یہ بات کہ درحقیقت کوئی رگڑ ہونی بھی چاہیے۔ لیکن بھوٹک دھاتوں اور پتھروں پر جو تجربات کیے گئے ہیں اُن سے حاصل شدہ شکستگی کے زاویوں کی قیمت اور اس قیمت میں جو رگڑ کے معمولی زاویے سے محسوب کی جائیں خاصی مطابقت پائی جاتی ہے۔ ڈھلے لوہے کے لیے طہ کی قیمت جو عام طور پر حاصل ہوتی ہے

تقریباً ۵۵° ہے جو فہ = ۲۰° کے متناظر حاصل ہوتی ہے (دیکھو شکل ۴۲)۔

فشاری اور جزی زور کے درمیان ربط — اوپر کی حاصل شدہ مساوات کو صحیح مان لیں اور مساوات (۲) سے مہ کی قیمت کو مساوات (۱) میں مندرج کریں تو

$$\text{ف جب طہ جم طہ} = \text{ق} + \text{ف جم}^2\text{ طہ} \times (-\text{ مم ۲ طہ})$$

یا
$$\text{ف جم طہ} \left(\text{جب طہ} + \text{جم طہ}\,\frac{\text{جم}^2\text{ طہ} - \text{جب}^2\text{ طہ}}{\text{۲ جب طہ جم طہ}}\right) = \text{ق}$$

یا
$$\text{ف} = \text{۲ ق مس طہ} = \text{۲ ق}\,\frac{\text{۱} + \text{جب فہ}}{\text{جم فہ}}$$

اس سے فشاری اور جزی زور کی انتہائی مزاحمتوں کے درمیان ربط شکستگی کے زاویے یا ٹھہراؤ کے زاویے کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح کے ربط کو تجربے سے جانچنا آسان نہیں۔ کیونکہ تیز دھار سے قینچی کا سا کترنے کا عمل کیا جائے تو اس کے ساتھ ہی دوسرے زور بھی واقع ہوجاتے ہیں اور ایک گول سلاخ پر مروڑ کا عمل کرنے سے اگرچہ خالص جز پیدا کیا جا سکتا ہے لیکن اس صورت میں لچک کی حد کے باہر جزی زور کی حدت کا اندازہ صحت کے ساتھ نہیں کیا جا سکتا۔

ایسے چھوٹے ٹکڑوں میں جو خمیا نہیں جاتے دباؤ کے تحت شکستگی کا زاویہ اور کچلاؤ کی انتہائی مزاحمت دونوں اس امر پر منحصر ہوتے ہیں کہ جن سطحوں پر بیرونی دباؤ عائد کیا گیا ہے وہ کسی سخت اور مغلوب نہ ہونے والے مادے مثلاً مقوّے یا پلاستر میں نصب ہیں، یا کسی نرم شے میں مثلاً سیسے کی تختی جو اگر دباؤ اس کے سیالیت کے دباؤ سے بڑھ جائے تو بہنا شروع ہوتی ہے (دفعہ ۳۶)۔ اس نصیبی شے کے بہاؤ سے جو عرضی تناؤ پیدا ہوتے ہیں اُس سے شکستگی ایک بہت پست تر بوجھ پر اور ایسی سطحوں پر واقع ہوتی ہے جن کا میلان اعظم فشاری زور کی سطح سے زیادہ زاویہ بناتا ہے بلکہ بعض اوقات تو شکستگی کی سطحیں دباؤ کی سمت کے متوازی ہوجاتی

ہیں[1]۔ اس کی تمثیل یارک شائر کی موٹی ریت کے کچلاؤ کے امتحانات سے شکل ۲۴۳ میں کی گئی ہے جس کی تفصیلات دفعہ ۱۹۱ میں دی گئی ہیں۔

تناؤ کے تحت شکستگیاں — دفعہ ۷ میں دکھایا گیا تھا کہ ایک متوازی سلاخ حدت ف کے یکساں تناؤ کے تحت ہو تو مماسی یا جزی زور کی حدت اعظم قیمت ½ ف کو اُن سطحوں پر پہنچتی ہے جن کے عماد تناؤ کی سمت سے ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں۔ تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ جس زاویے پر متمد اشیا تنشی زور کے تحت جزی کی وجہ سے شکست ہوتی ہیں وہ ۴۵° سے بہت مختلف نہیں۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ان اشیا میں انتہائی جزی زور کی حدت انتہائی تنشی مضبوطی کا نصف ہوتی ہے۔ لیکن اس طرح کا نتیجہ اخذ کرنے سے پہلے بہت سی مثلاً حسب ذیل باتوں پر غور کرنا ضروری ہے:— صفحہ ۹۴

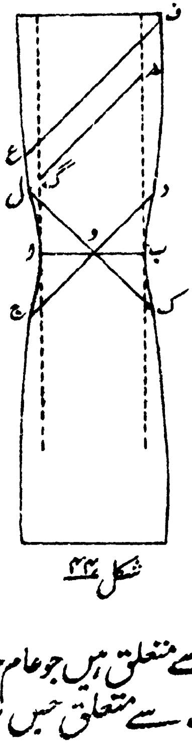
(۱) جزی زور ½ ف کے ساتھ جس کا ابھی ذکر کیا گیا ہے اعظم تناؤ کی سمت سے ۴۵° کا زاویہ بنانے والی سطحوں پر عمادی تناؤ ½ ف بھی ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۷) جس سے شے کی جزی زور کی مزاحمت پر اثر پڑ سکتا ہے۔

(۲) شکستگی پر تنشی زور کی حدت مجموعی کھینچ کی قوت بٹے ابتدائی تراشی رقبہ کے مساوی نہیں (دیکھو دفعہ ۲۹)، اگرچہ اسی ظاہری زور کو تنشی استحکام کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔

(۳) متمد اشیا میں شکستگی سے قبل ایک مقامی کمر بن جانے کی وجہ سے اُن مخروطی یا مستوی سطحوں کا رقبہ جو تناؤ کے محور سے ۴۵° کا زاویہ بنائیں اقل تراش کے $\sqrt{2}$ گنے کے مساوی نہیں اور نہ ابتدائی تراش کے $\sqrt{2}$ گنے کے۔ مثلاً شکل ۴۱ک میں رقبہ ع ف سلاخ کے اس حصے کی تراش کے رقبے کا $\sqrt{2}$ گنا ہے جس میں مقامی سکڑاؤ واقع نہیں ہوا۔ گ ھ اقل تراش ا و ب کا $\sqrt{2}$ گنا ہے اور تراش ج و د ان دونوں قیمتوں کے درمیان ہے اور کمر کی شکل پر منحصر ہے۔

[1] دیکھو مسٹر گلیور کا مضمون (روئداد رائل سوسائٹی آف ایڈنبرا جلد ۲۹ صفحہ ۴۳۲)۔

(۴) ج د جیسی سطح (شکل ۴۴) پر جزی زور کی حدت یکساں نہیں ہوگی اور اقل تراشش کے نقطۂ تقاطع و پر اعظم ہوگی۔



شکل ۴۴

انتہائی جزی مضبوطی کی پیمائش کی دِقّت کا ذکر کیا جا چکا ہے لیکن جہاں تک معمولی حالات کے جز کے تجرباتی نتائج کا تعلق ہے نسبت

$$\frac{\text{ن}_\text{ج}}{\text{ن}_\text{ت}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{انتہائی جزی مزاحمت}}{\text{انتہائی تنشی مضبوطی}}$$

جو حسبِ معمول "ظاہری" زوروں سے محسوب کی جائے پھوٹک دھاتوں میں ۱،۲ سے لے کر متمدد دھاتوں میں ۰،۶ تک ہوتی ہے۔ نرم فولاد اور پٹواں لوہے کے لیے اس کی قیمت تقریباً ۰،۷۵ ہے۔

جزی مزاحمت کی یہ قیمتیں ایسے جزی زوروں سے متعلق ہیں جو عام حالات کے تحت لگائے جاتے ہیں نہ کہ کسی تصوری صورت سے متعلق جس میں کہ جز "خالص" یعنی دیگر فسادی اثرات سے پاک ہے۔

یہ نظریہ پیش کیا گیا ہے کہ تنشی زور کے تحت جو بھی شکستگی واقع ہوتی ہے وہ مماسی زور کے تحت آخرکار جز کے واقع ہونے سے ہوتی ہے[1] لیکن سخت اشیا مثلاً ڈھلے لوہے اور اوزاری فولاد کی حدت میں اس کو تسلیم کرنا مشکل ہے کیونکہ ان میں ترچھی شکستگی کا کوئی شائبہ نہیں پایا جاتا (دیکھو شکل ۴۱)۔

[1] دیکھو "طولی زور کے تحت فولاد کا انشقاق" (روئداد رائل سوسائٹی جلد ۹۴ صفحہ ۲۴۳)۔ نیز "انتہائی تعمیر کا طرزِ عمل خالص جز کے تحت" (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانیکل انجینیرز حصہ اول ۱۹۰۶ء) اور اس پر جو بحث ہوئی۔

جو اشیا بہت متمدد ہیں مثلاً ایلومینیم، تانبا، اور نرم فولاد، ان میں شکستگی کھینچ کے محور سے ۴۵° پر یا کسی قدر زیادہ پر واقع ہوتی ہے۔ گول سلاخ میں جز ہوجانے کا سبب میں زیادہ اقتضا تشاکل مخروطی سطحوں مثلاً ل و د اور ج و ک (شکل ۱۲ اے) پر ہوگا اور متجانس دھاتوں میں شکستگی ہمیشہ ایسی ہی شکل اختیار کرتی ہے (دیکھو شکل ۱۲ب)۔ سخت تر اشیا میں جزی مضبوطی کی تنشی استحکام کے ساتھ نسبت زیادہ ہوتی ہے اور بیلے بسمر فولاد میں یا ایسے فولادوں میں جن کو کھینچ کر خاص کر قلب پر سخت کیا گیا ہو تنشی شکستگی بالعموم ایک قلم کیے ہوئے مخروط کی شکل میں ہوتی ہے جس کی وجہ بظاہر یہی ہے کہ پہلے مرکزی حصہ چٹختا ہے اور پھر باہر کا نرم مادہ کترا جاتا ہے۔ یہ بات شکل ۱۲ اے میں فولاد کی چار گول سلاخوں میں دکھائی گئی ہے۔ صفحہ ۶۵

متمدد دھات کی چوڑی چپٹی سلاخوں میں اگر مادہ متجانس ہو تو شکستگی کی جس شکل کی توقع کی جاسکتی ہے وہ مستوی یا قلم کیے ہوئے مضلع مخروط ہیں جن کے چہرے سلاخ کے محور سے ۴۵° سے کچھ زیادہ زاویہ بنائیں گے۔ اس طرح کی شکستگیاں شکل ۱۲ ج میں دکھائی گئی ہیں۔

یہ قابل لحاظ بات ہے کہ اگر فولاد یا پٹواں لوہے کے ایک ٹکڑے کو آہستہ توڑا جائے تو بہت باریک ساخت کی بلکہ ریشہ دار شکستگی حاصل ہوتی ہے جس میں قلمیں بہت چھوٹی چھوٹی ہوتی ہیں اور اگر اسی فولاد یا لوہے کو بہت تیزی سے توڑا جائے تو شکستگی پر بڑی بڑی قلمیں نمودار ہوتی ہیں۔

۳۸- میکانی خواص پر تپش کا اثر

—— جو اہم ترین دھاتیں ہیں اُن کے تنشی استحکام، تمدد اور لچک میں معمولی کرۂ ہوائی کی تپشوں کی حدود کے اندر کوئی بڑا تغیر نہیں ہوتا۔ لیکن یہ سب کو معلوم ہے کہ بہت سی دھاتوں کی مضبوطی "سفید گرم" تپشوں پر بڑی حد تک کم ہوجاتی ہے۔

پٹواں لوہے اور فولاد پر اعلیٰ تپشوں اور لادنے کی معمولی شرحوں پر جو سکونی امتحانات کیے گئے ہیں اُن سے حسبِ ذیل اثرات کا پتہ چلتا ہے[1] :-

(۱) تننشی استحکام (ا) معمولی تپشوں پر تپش کے ۲۰۰° تا ۳۰۰° ف تک بڑھنے سے گھٹتا ہے اور اس کی قیمت ۶۰° ف کی قیمت سے تقریباً ۵ فی صدی کم ہوتی ہے۔ (ب) پھر اس کی قیمت بڑھنا شروع ہوتی ہے اور ۴۰۰° اور ۶۰۰° ف کے درمیان کسی تپش پر اعظم ہوتی ہے۔ یہ قیمت ۶۰° ف پر کی قیمت سے تقریباً ۱۵ فی صدی زیادہ ہوتی ہے۔ (ج) تپش اور بڑھے تو اس کی قیمت بالتسلسل گھٹتی ہے۔

(۲) لچک کی حد تپش کے بڑھنے سے بالتسلسل گھٹتی ہے۔

(۳) تطول (ا) تپش طبعی تپش سے بڑھے تو یہ گھٹتا ہے اور ۳۰۰° ف کے قریب اقل قیمت کو پہنچتا ہے، اور پھر (ب) تپش کے بڑھنے سے بالتسلسل بڑھتا ہے۔

۲۰۰° اور ۴۰۰° ف کے درمیان تناؤ کے تحت تطول بالاستقامت واقع نہیں ہوتا بلکہ بوجھ لگانے کے دوران میں وقفوں کے ساتھ پیدا ہوتا ہے۔ جب زور اور فساد کو ترسیم کیا جاتا ہے تو ہموار منحنی کی بجائے ایک کٹھنہ دار منحنی حاصل ہوتا ہے۔

(۴) راست لچک کا مقیاس (ے) تپش کے بڑھنے سے بالاستقامت گھٹتا ہے۔ جن دھاتوں میں اس کی قیمت کرۂ ہوائی کی تپش پر ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہوتی ہے اُن میں ۵۰۰° ف پر گھٹ کر ۱۲۰۰۰ ٹن فی مربع انچ

---

[1] دیکھو مضمون "تپش کے ساتھ دھاتوں کے لچک کے مقیاس اور دیگر خواص کی تبدیلی" برٹش ایسوسی ایشن سکشن گ ۱۹۱۳ء (رسالہ انجینیرنگ ۱۶، اکتوبر ۱۹۱۳ء)۔ نیز "اشیا کے طبیعی خواص" ممالک متحدہ امریکہ کے بیورو آف سٹینڈرڈز اور اعلیٰ تپش پر اشیا کے خواص کے متعلق انجینیری تحقیقاتی رپورٹ (متعلق بہ سائنس و صنعت) کی گشتی نشان ۱۰۱۔

ہوجاتی ہے۔

اعلیٰ تپشوں پر "رینگنا" — یہ بات ایک عرصے سے معلوم ہے کہ "رینگنا" یعنی بوجھ دیر تک لگا رہے تو تطول کا آہستہ آہستہ بڑھنا اعلیٰ تپشوں پر خاص کر واقع ہوتا ہے۔ سنہ ۱۹۲۰ء کے بعد "رینگنے" پر بہت سے تجربات شائع ہوئے ہیں۔ اعلیٰ تپشوں پر "انتہائی رینگتا زور" یعنی زور کی صفحہ ۲۶۶
وہ حد جس کے نیچے رینگنا آخرکار موقوف ہوگیا اور جس کے اوپر سے شروع ہوا یہاں تک آخرکار شکستگی واقع ہوگئی، لی نے[1] سنہ ۱۹۲۴ء میں ان حدوں کو معلوم کرنے کی ایک کوشش کا ذکر شائع کیا۔ ایسی حدود کا معلوم کرنا ایک دقّت طلب اور لازماً بالواسطہ اور مشکل عمل ہے لیکن اس سے جو معلومات حاصل ہوتی ہیں وہ دن بدن اہمیت اختیار کرتی جاتی ہیں خاص کر اندرونی احتراقی انجنوں اور دیگر مشینوں کے دن بدن بڑھتے ہوئے استعمال کی وجہ سے جو اعلیٰ تپشوں پر کام کرتی ہیں خاص کر جہاں سُبک پن کی ضرورت ہو جیسا کہ طیّارہ سازی میں ہوتا ہے۔ "اعلیٰ تپشوں پر اشیا کے خواص" پر ایک جامع تحقیقات سرکاری معمل طبیعیات میں شروع کی گئی اور جو پہلی دو رپورٹیں ٹیپ سل (Tapsell) اور کلن شا (Clenshaw) نے[2] لکھی ہیں ان سے کاربنی فولادوں کے متعلق بہت سی کارآمد معلومات حاصل ہوتی ہیں جن کے اندر "انتہائی رینگتے زور" کی قیمتیں بھی شامل ہیں۔ نمونے کے طور پر ایک نتیجہ دفعہ ۵۰ اور شکل ۱۵۲ میں دیا گیا ہے۔

پست تپشیں — ایک بہت نرم فولاد پر بہت پست تپش پر

[1] "اشیا پر ادنیٰ اور اعلیٰ تپشوں کے اثرات" از پروفیسر لی (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانیکل انجینیرز دسمبر سنہ ۱۹۲۴ء)۔

[2] سررشتہ سائنٹیفک وصنعتی تحقیقات کی انجینیری تحقیقاتی رپورٹیں نمبر ۱ و ۲۔ نیز نمبر ۳ جس میں فساد اور تپش دونوں کے تدریجی سختانے کے اثرات پر روشنی پڑتی ہے۔

تجربات[1] کرنے سے پایا گیا کہ تپش کے گھٹنے سے تنشی مضبوطی بتدریج بڑھتی ہے۔ تطول تقریباً غائب ہو جاتا ہے اور شے ایک بہت پھوٹک شے کا عمل کرتی ہے۔ معمولی تپش پر واپس آنے پر اصلی خواص سے کوئی مستقل انحراف نہیں پایا جاتا۔

۳۹ - تپش کے تغیر سے پیدا ہونے والا زور

یہ سب کو معلوم ہے کہ اگر دھاتیں اپنے ابعاد کو بدلنے کے لیے آزاد ہوں تو تپش کے تغیر سے اپنے ابعاد کو بدلتی ہیں۔ لیکن اگر ابعاد کے تغیر کو روکا جائے تو شے کے اندر زور پیدا ہوتا ہے جو روکے ہوئے فساد کے متناظر ہوتا ہے۔ مثلاً اگر ایک لمبی سلاخ کو گرم کیا جائے جس سے اُس کا طول بڑھ جائے اور پھر اس کے سروں کو استوار سہاروں کے ساتھ مضبوط جکڑ دیا جائے جس کی وجہ سے سلاخ سُکڑ کر اپنے اصلی طول کو واپس نہ آسکے تو سلاخ ٹھنڈی ہو کر تناؤ میں ہوگی اور سہاروں کو کھینچیگی۔ اس طرح کی کھینچ عائد کرنے کی کئی عملی مثالیں ہیں مثلاً دو متوازی دیواروں کو جکڑنے والی بندھن سلاخیں اور ٹائر جو پہیّوں پر سکڑ کر بیٹھے ہوں۔

حرارت کے تحت طولی پھیلاؤ تپش کی معمولی وسعتوں میں تپش کے اضافے کے متناسب ہوتا ہے۔ متناسب تطول یعنی تطول فی اکائی طول فی درجہ تپش کو طولی پھیلاؤ کی شرح کہا جاتا ہے۔ اس طرح اگر پھیلاؤ کی شرح عہ ہو تو ایک سلاخ جس کا طول تپش ت$_1$ پر ل ہو تپش ت$_2$ پر حسبِ ذیل طول کی ہو جائیگی

ل{۱ + عہ (ت$_2$ - ت$_1$)}

[1] دیکھو لوہے اور فولاد کے انسٹی ٹیوٹ کے رسالہ (۱۹۰۱ء) میں ہیڈفیلڈ (Had field) کا مضمون۔ یا رسالہ انجینیر ۲۶ مئی ۱۹۰۶ء یا رسالہ انجینیرنگ ۱۹ مئی ۱۹۰۶ء۔ اور لی (Lea) کا وہ مضمون جس کا حوالہ "رینگنے" کے سلسلے میں اوپر دیا گیا ہے۔

اگر اس کے بعد سلاخ ٹھنڈی ہو کر تپش ت°۱ پر آئے اور سکڑاؤ بالکل نہ ہونے پائے تو فساد عہ (ت۲ - ت۱) باقی رہیگا اور سروں کو مقید کرنے والے سہاروں پر تناؤ سے عہ (ت۲ - ت۱) سلاخ کی تراش کے فی اکائی رقبہ پیدا ہوگا - سے ینگ کا مقیاس ہے۔

فارن ہیٹ درجوں کے لیے طولی پھیلاؤ کی تقریبی شرحیں حسب ذیل ہیں:-

پٹواں لوہا	ء۰۰۰۰۰۶۷
فولاد	ء۰۰۰۰۰۶۲
تانبا	ء۰۰۰۰۱۰
ڈھلا لوہا	ء۰۰۰۰۰۶۰

فولاد میں اگر سکڑاؤ روک دیا جائے تو تنشی فساد فی درجہ فارن ہیٹ ء۰۰۰۰۰۶۲ ہوگا، اور اگر کھنچاؤ کا مقیاس ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ لیا جائے تو اس سے زور کی حدت

۱۳۰۰۰ × ء۰۰۰۰۰۶۲ = ء۰۸۰۶

ٹن فی مربع انچ پیدا ہوگی - اس طرح ۱ ٹن فی مربع انچ کا زور پیدا کرنے کے لیے

۱/ء۰۸۰۶ = تقریباً ۱۲°ف

ٹھنڈا کرنا ہوگا۔

مشین کے اندر مختلف دھاتوں میں مختلف پھیلاؤ واقع ہونے سے شدید زور پیدا ہونے کا احتمال رہتا ہے۔ بعض وقت دو حصوں کے پھیلاؤں کے اختلاف سے بھی کام لیا جاتا ہے۔

مثال ۱ — اگر ۱ انچ قطر اور ۱۰ فٹ طول کی ایک فولاد کی سلاخ کرۂ ہوائی کی تپش سے ۱۰۰°ف اوپر تک گرم کی جائے اور سروں پر مضبوطی سے جکڑ لی جائے تو اگر ٹھنڈی ہوتے وقت سلاخ سروں کے بندھنوں کو بقدر ۱/۴۴" کے کھینچ لے تو کرۂ ہوائی کی تپش تک ٹھنڈی ہونے پر

سلاخ میں کتنا تناؤ ہوگا - یہ مان لو کہ فولاد فی درجہ فارن ہیٹ اپنے طول کا ء۰۰۰۰۰۶۲ پھیلتا ہے اور یہ کہ کھنچاؤ کا مقیاس ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے -

سلاخ کا حاصل فساد

= ء۰۰۰۰۰۶۲ × ۱۰۰ − $\frac{۱}{۴۰}$ ÷ ۱۲۰

= ء۰۰۰۶۲ − ء۰۰۰۲۱ = ء۰۰۰۴۱

اس لیے زور کی حدت = ۱۳۰۰۰ × ء۰۰۰۴۱

= ۵ء۳۳ ٹن فی مربع انچ

اس لیے ۱ انچ قطر کی سلاخ پر مجموعی کھینچ

= ۵ء۳۳ × ء۷۸۵۴ = ۴ء۱۸ ٹن

مثال ۲ — تانبے کی ۱ انچ قطر کی ایک چھوٹی سلاخ ایک فولادی نلی کے اندر جس کا بیرونی قطر ۱ $\frac{۳}{۸}$ انچ ہے اور موٹائی $\frac{۱}{۸}$ انچ ہے وسط میں رکھی گئی ہے، اور ۶۰° ف پر دونوں کے سرے باہم استوارانہ جکڑ دیے گئے ہیں - اگر اس مجموعے کو ۲۶۰° ف تک گرم کیا جائے تو دونوں دھاتوں میں زور کی حدت کیا ہوگی - پھیلاؤ کی شرحیں وہی لو جو اوپر دی گئی ہیں - مے کی قیمت فولاد کے لیے ۱۳۰۰۰، اور تانبے کے لیے ۷۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے -

تانبے میں فولاد سے آزاد پھیلاؤ کی زیادتی فی اکائی طول

= ء۰۰۰۰۱۰۰ − ء۰۰۰۰۰۶۲ = ء۰۰۰۰۰۳۸

اب اس مجموعے میں تانبا اُتنا نہیں پھیلیگا جتنا آزادی کی حالت میں پھیلتا، اور فولاد آزادی کی حالت سے زیادہ پھیلیگا - دونوں کے طولی فسادوں کا مجموعہ ء۰۰۰۰۰۳۸ فی درجہ اور اس طرح ۲۰۰ درجے کے لیے ء۰۰۰۷۶ ہوگا -

اب اگر $س_{ف}$ = فولاد کا فساد صفحہ ۶۸

اور $س_{ت}$ = تانبے کا فساد

تو $\quad \text{س}_{\text{ف}} + \text{س}_{\text{ت}} = ۰٫۰۰۷۶ \quad ....(۱)$

فولاد میں زور کی حدت $= ۱۳۰۰۰\,\text{س}_{\text{ف}}$

تانبے " " " $= ۷۰۰۰\,\text{س}_{\text{ت}}$

فولاد میں مجموعی کھینچ = تانبے میں مجموعی دباؤ

اس لیے $\quad ۱۳۰۰۰ \times \text{س}_{\text{ف}} \times \frac{\pi}{۴}\left\{\left(\frac{۱۱}{۸}\right)^۲ - \left(\frac{۹}{۸}\right)^۲\right\}$

$$= ۷۰۰۰ \times \text{س}_{\text{ت}} \times \frac{\pi}{۴}$$

اس لیے $\quad \frac{\text{س}_{\text{ف}}}{\text{س}_{\text{ت}}} = \frac{۷}{۱۳} \times \frac{۸^۲}{۱۱^۲ - ۹^۲} = \frac{۷}{۱۳} \times \frac{۶۴}{۴۰} = \frac{۵۶}{۶۵}$

یا $\quad \text{س}_{\text{ت}} = \frac{۶۵}{۵۶}\,\text{س}_{\text{ف}} \quad ....(۲)$

اس قیمت کو (۱) میں مندرج کرنے سے

$$\text{س}_{\text{ف}}\left(۱ + \frac{۶۵}{۵۶}\right) = ۰٫۰۰۷۶$$

$$\text{س}_{\text{ف}} = ۰٫۰۰۳۵۲$$

$$\text{س}_{\text{ت}} = ۰٫۰۰۴۰۸$$

فولاد میں زور کی حدت $= ۱۳۰۰۰ \times ۰٫۰۰۳۵۲$

$= ۴۵٫۷۶$ ٹن فی مربع انچ

تانبے میں زور کی حدت $= ۷۰۰۰ \times ۰٫۰۰۴۰۸$

$= ۲۸٫۵۶$ ٹن فی مربع انچ

انتہائی مضبوطیوں کی جدول

ذیل کی قیمتیں اوسط ہیں، انتہائی نہیں

شے	تنشی استحکام ٹن فی مربع انچ	جزی مضبوطی ٹن فی مربع انچ
ڈھلا لوہا	۷ تا ۱۰	۹ تا ۱۱
پٹواں لوہے کی سلاخیں	۲۰ تا ۲۴	۱۵ تا ۱۸
" " تختیاں (مضبوطی ریشوں کی سمت میں)	۲۱	۱۶
" " (مضبوطی ریشوں کے علی القوائم)	۱۹	۱۴
فولاد، نرم تعمیری (دیکھو جدول دفعہ ۳۱)	۲۸ تا ۳۲	۲۱ تا ۲۴
" " ، ریولٹوں کے لیے	۲۶ تا ۲۹	—
" ، پٹریوں کے لیے	۳۰ تا ۴۰	—
" کے ڈھلواں اور گھڑائیاں	۲۵ تا ۳۵	—
" کے تار	۷۰ تا ۹۰	—
اوزاری فولاد (کاربنی، سختایا)	۷۰	۴۵
تانبا، ڈھلا ہوا	۹	—
" ، سخت کھنچا ہوا	۲۰	—
" ، تپا نرمایا ہوا	۱۴	—
پیتل	۸	۸ تا ۱۰
توپ دھات	۱۴ تا ۱۷	۱۵
فاسفر کانسی	۳۶	۲۴
مینگنیز کانسی	۳۵	—
الومینیم، ڈھلا ہوا	۳ تا ۵	—
" ، بیلا ہوا	۷ تا ۱۰	۶
الومینیم کانسی (۱۰ فی صدی تانبا)	۴۰	۲۵
چوبینہ	دیکھو دفعہ ۱۹۶	دیکھو دفعہ ۱۹۸

صفحہ ۶۹

انتہائی فشاری یا کچل مضبوطی کی جدول

شے	شکستی مضبوطی ٹن فی مربع انچ
ڈھلا لوہا	۴۰ تا ۵۰
پیتل	۵
تانبا (ڈھلا)	۲۰

لچک کی قدروں کی جدول

شے	کھنچاؤ کا، یا راست، یا ینگ کا مقیاس ے ٹن فی مربع انچ	عرضی یا جزی یا استواری کا مقیاس س ٹن فی مربع انچ
پٹواں لوہا	۱۲۰۰۰ تا ۱۳۰۰۰	۵۰۰۰ تا ۶۰۰۰
فولاد	۱۳۰۰۰ تا ۱۴۰۰۰	۵۵۰۰ تا ۶۵۰۰
ڈھلا لوہا	۶۰۰۰ تا ۹۰۰۰	۲۵۰۰ تا ۳۵۰۰
تانبا	۶۰۰۰ تا ۷۰۰۰	۲۰۰۰ تا ۳۰۰۰
پیتل	۵۰۰۰ تا ۶۰۰۰	۲۰۰۰ تا ۳۰۰۰
توپ دھات	۵۰۰۰ تا ۶۰۰۰	۲۰۰۰ تا ۳۰۰۰
ایلومینیم	۴۰۰۰ تا ۵۰۰۰	—
ایلومینیم کانسی	۷۵۰۰	—

سوالات ۲

۱۔ نرم فولاد کے ایک گول ٹکڑے کے تنشی امتحان کے مشاہدات سے

جس کا قطر ۱ انچ اور ناپ نقطوں کے درمیان طول ۱۰ انچ تھا حسبِ ذیل اعداد حاصل ہوئے :۔

بوجھ (ٹن)	۵	۱۰	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۰٫۵	۲۱	۲۱٫۵
تطول (انچ)	٫۰۰۴۷	٫۰۰۹۶	٫۰۱۴۵	٫۰۱۵۵	٫۱۴	٫۲۱	٫۲۶	٫۳۲	٫۳۶	٫۳۹	٫۴۳
بوجھ (ٹن)	۲۲	۲۲٫۵	۲۳	۲۳٫۵	۲۴	۲۴٫۵	۲۵	۲۵٫۴۵	۲۵٫۱	۲۳٫۱	۲۱٫۷
تطول (انچ)	٫۴۹	٫۵۳	٫۶۰	٫۶۹	٫۷۸	٫۸۹	۱٫۰۸	۲٫۱۳	۲٫۱۳	۲٫۳۰	۲٫۳۵

لچکدار اور متمدد تطولوں کے لیے علیحدہ زور فساد نقشے کھینچو، اور دھات کی انتہائی تنشی مضبوطی، نقطۂ مغلوبیت پر زور کی حدت، ۱۰ انچ پر فی صدی تطول، اور کھنچاؤ کا مقیاس معلوم کرو۔

۲۔ دو متوازی دیواروں کو جن کا باہمی فاصلہ ۲۵ فٹ ہے ایک انچ قطر کی فولادی سلاخ کے ذریعے باہم تھاما گیا ہے جو دونوں سروں پر دھات کی تختیوں اور ڈھبریوں میں سے گزرتی ہے۔ سلاخ جب ۳۰۰° ف کی تپش پر تھی تو ڈھبریاں کس دی گئیں۔ سلاخ جب ٹھنڈی ہو کر ۶۰° ف کی تپش پر آجائے تو حسبِ ذیل صورتوں میں اُس کی کھینچ معلوم کرو (ا) سرے بالکل اپنی جگہ برقرار رہیں (ب) سرے بقدر $\frac{1}{4}$" کے مغلوب ہوں۔ فولاد فی درجہ فارن ہیت اپنے طول کا ۶۲ ٫۰۰۰۰۰ پھیلتا ہے اور ے = ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ۔

۳۔ تانبے کی دو موٹی تختیاں فولادی بولٹوں کے ذریعے باہم تماس میں رکھی گئی ہیں۔ اگر تپش میں ۲۰۰° ف کا اضافہ ہو اور بولٹوں کے سروں اور ڈھبریوں کو اتنی کافی مسندی سطح ہو کہ تانبے کے فشاری فساد نظر انداز کیے جا سکیں تو بولٹوں کے اندر تنشی زور کا اضافہ معلوم کرو۔ فارن ہیت درجوں کے لیے پھیلاؤ کی شرح فولاد کے لیے ۶۲ ٫۰۰۰۰۰ اور تانبے کے لیے ۰۰۰۰۱ ٫ اور

ے کی قیمت فولاد کے لیے ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ ۔

۴۔ ۳۰۰۰ پونڈ کا ایک بوجھ تین متوازی تاروں سے سہارا گیا ہے جو ایک ہی انتصابی مستوی میں ہیں ۔ درمیانی تار فولاد کا ہے اور بازو کے دونوں پیتل کے ہیں اور تینوں کا تراشی رقبہ ۱/۱۲ مربع انچ ہے ۔ تار اس طرح ترتیب دیے گئے ہیں کہ جب تپش ۶۰° ف ہو تو تینوں مساوی بوجھ سہارتے ہیں ۔ ہر ایک تار کا زور (ا) ۶۰° ف پر (ب) ۲۰۰° ف پر معلوم کرو اور بتاؤ کہ ہر ایک تار مجموعی بوجھ کی کونسی کسر برداشت کرتا ہے ۔ ے کی قیمت فولاد کے لیے ۳۰×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ اور پیتل کے لیے ۱۲×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ ہے اور پھیلاؤ کی شرح فارن ہیت درجوں کے لیے فولاد کے لیے ۰٫۰۰۰۰۰۶۲ اور پیتل کے لیے ۰٫۰۰۰۰۱ ہے ۔

۵۔ ایک ڈھلے لوہے کا استوانے کا ڈھکن ڈھلے لوہے کے استوانے کے حاشیے کو پٹواں لوہے کے بولٹوں کے ذریعے بولٹ کیا گیا ہے جن کا مجموعی تراشی رقبہ اُن سے دبنے والی سطحوں کے موثر رقبے کا ۱/۱۰ ہے ۔ اگر بولٹوں کو کسنے کے بعد دھات کی تپش ۳۰۰° ف بڑھ جائے تو بولٹوں میں تناؤ کی کمی فی مربع انچ معلوم کرو ۔ پھیلاؤ کی شرح (فارن ہیت) پٹواں لوہے کے لیے ۰٫۰۰۰۰۰۶۷ اور ڈھلے لوہے کے لیے ۰٫۰۰۰۰۰۶ ہے ۔ ے کی قیمت پٹواں لوہے کے لیے ۱۲۰۰۰ ٹن فی مربع انچ اور ڈھلے لوہے کے لیے ۶۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے ۔

تیسرا باب

بازگشتگی اور متغیر زور

۳۰۔ تنشی فساد پیدا کرنے میں کام ـــــ ایک سلاخ کے اُوپر ایک بتدریج بڑھتا ہوا تنشی بوجھ لگایا جائے تو بوجھ کی سمت میں تطول واقع ہوتا ہے اور کام ہوتا ہے ۔ ایک بہت چھوٹے تطول مف لا انچ کے دوران میں کھینچ کی متغیر قوت مستقل اور ق ٹن کے مساوی سمجھی جا سکتی ہے۔ تب اس تطول کے دوران کا کام

= ق × مف لا انچ ٹن

مجموعی تطول ل کے دوران کے کام کو ق × مف لا جیسی مقداروں کے مجموعے سے یعنی ـــ

Σ (ق × مف لا) یا $\int_{\text{۰}}^{\text{ل}}$ ق فرلا

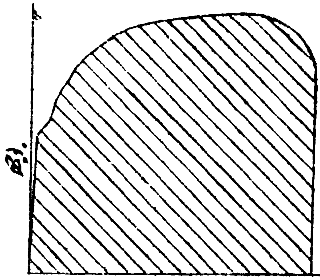
سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

ترسیمی تعبیر ـــ کسی "بوجھ تطول" نقشے میں معین قوت کو تعبیر کرتے ہیں اور فصلے پیدا شدہ تطول کو۔ اس طرح منحنی کے نیچے کا رقبہ یعنی ـــ

ا ق فرلا

کھنچاؤ کے کام کو تعبیر کرتا ہے - اس طرح شکل ۴۵ میں سایہ دار رقبہ کام کو تعبیر کریگا۔

پیمانہ — اگر قوت کا پیمانہ ایک انچ کو ف ٹن ہو اور تطول کا پیمانہ ایک انچ کو ط انچ تو نقشے کا ایک مربع انچ رقبہ ف ط "انچ ٹن" کو تعبیر کریگا۔ اس طرح یہ کام کے نقشے کا پیمانہ ہوگا۔



شکل ۴۵

متعدد دھاتوں میں شکستگی تک کے پورے کام کو موٹے اندازے کے طور پر سمجھا جاسکتا ہے کہ مجموعی تطول اور نقطۂ مغلوبیت کے بوجھ کا حاصل ضرب مثبت تطول اور اعظم بوجھ اور نقطۂ مغلوبیت کے بوجھ کے فرق کے دو تہائی حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ یا بالفاظِ دیگر

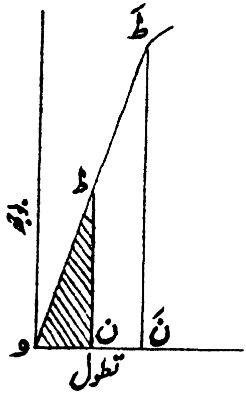
اوسط بوجھ

= مغلوبیت کا بوجھ + $\frac{2}{3}$ (اعظم بوجھ - مغلوبیت کا بوجھ)

اس تقریب کے معنے یہ ہوئے کہ نقطۂ مغلوبیت تک کے فساد کو نظر انداز کیا جائے اور باقی زور فساد منحنی کو مکافی سمجھا جائے۔

۴۱۔ لچکدار فساد کی توانائی —— لچکدار فساد پیدا کرنے میں جو کام ہوتا ہے وہ زیر فساد شے کے اندر فسادی توانائی کی شکل میں مجتمع ہوتا ہے اور بوجھ ہٹا لینے پر نمودار ہوتا ہے۔ اس کے برخلاف غیر لچکدار فساد کے دوران میں جو کام کیا جاتا ہے وہ شے کے ذرات کے اتصال پر غالب آنے اور ان کو ایک دوسرے پر پھسلانے میں صرف ہوتا ہے اور زیرِ فساد شے میں حرارت کی شکل میں ظاہر ہوتا ہے۔ جو اشیا

ہوک کے قانون کی پابندی کرتی ہیں اُن میں چونکہ بوجھ تطول نقشے کا لچکدار حصّہ ایک خطِ مستقیم ہوتا ہے اس لیے اگر تنشی فساد میں بوجھ لچک کی حد سے متجاوز نہ ہو تو فسادی توانائی کی شکل میں جو کام جمع ہوتا ہے وہ



= ½ بوجھ × تطول

شکل ۴۶ میں جب بوجھ قیمت ط ن کو پہنچے تو جمع شدہ کام سایہ دار رقبہ ط و ن یعنی ½ × ط ن × و ن سے تعبیر ہوگا جو

½ × بوجھ × تطول

شکل ۴۶

کے متناسب ہے۔

۴۲ - بازگشتگی ــــ لفظی طور پر بازگشتگی سے وہ طاقت مراد ہوگی جو کسی زیرِ فساد شے میں فسادی قوتوں کے ہٹ جانے پر اپنی اصلی حالت پر واپس آنے کی ہو لیکن اصطلاح میں اس سے مراد وہ توانائی ہے جو زیرِ فساد شے واپس کر دے - لچک کی حد کے اندر اس کی مقدار تنشی فساد کے کام کی طرح بوجھ کے نصف اور تطول کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگی۔

اگر دھات کا ایک ٹکڑا لچک کی حد کے اندر یکساں تنشی زور کی حدت ف کے تحت ہو - تراش کا رقبہ س ہو اور طول ل اور بوجھ ف × س ہو تو تطول

= ل × فساد = ل × $\frac{ف}{م}$ (دفعہ ۹)

جہاں م کھنچاؤ کا مقیاس ہے - اس لیے بازگشتگی

$$= \frac{1}{2}\,\text{ف}\,\text{س} \times \text{ل}\,\frac{\text{ف}}{\text{ے}} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ف}^2}{\text{ے}}\,\text{ل}\,\text{س}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{ف}^2}{\text{ے}} \times \text{ٹکڑے کا حجم}$$

یا بازگشتگی =

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{ف}^2}{\text{ے}}\ \text{فی اکائی حجم}$$

اگر تناؤ یکساں نہ ہو تو جملہ اسی شکل کا ہوگا لیکن اگر ف اعظم حدت ہو تو جزوِ ضربی $\frac{1}{2}$ سے کم ہوگا۔ چند خاص صورتوں پر بعد میں غور کیا جائیگا۔

برداشتنی بازگشتگی ـــــ کسی شئے کے اندر مستقل فساد پیدا کیے بغیر جو فسادی توانائی جمع کی جا سکے وہ اس کی برداشتنی بازگشتگی کہلاتی ہے۔ اگر لچک کی حد یا برداشتنی زور پر زور کی یکساں حدت ز ہو تو برداشتنی بازگشتگی

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{ز}^2}{\text{ے}} \times \text{حجم}$$

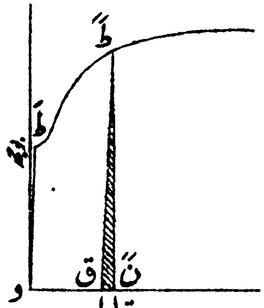
یہ شکل ۲۶ میں ایسی شے کے لیے جو ہوک کے قانون کی پابند ہو رقبہ و ط ن سے تعبیر ہوگی۔ صفحہ ۴۳

برداشتنی بازگشتگی کو بعض اوقات کسی شے کی ایک خاصیت کے طور پر بیان کیا جاتا ہے اور اس وقت اسے فی اکائی حجم بیان کرتے ہیں، یعنی —

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{ز}^2}{\text{ے}}$$

لچک کی حد کے باہر فسادی توانائی ـــــ جیسا کہ دفعہ میں بیان کیا گیا ہے لچک کی حد کے باہر عموماً فساد کا صرف ایک حصہ لچکدار نوعیت کا ہوتا ہے۔ شکل ۲۳ دفعہ ۳۲ سے معلوم ہوتا ہے کہ متمدد تطول کے دوران میں جو لچکدار یا تقریباً لچکدار فساد ہوتا ہے اُس کے دوران میں زور اور فساد کی نسبت خالص لچکدار فساد کے دوران کی نسبت سے زیادہ مختلف نہیں ہوتی۔ بالفاظِ دیگر

یہ تقریباً اصلی کھنچاؤ کے مقیاس کے مساوی ہوتی ہے۔ اس لیے فسادی توانائی یا جس کو "لچک کی حد کے باہر بازگشتگی" کہا جاسکتا ہے تقریباً



شکل ۴۷

$$\frac{1}{2}\frac{\text{ف}^2}{\text{ے}}\times\text{حجم}$$

کے مساوی ہوگی اور شکل ۴۷ میں رقبہ ط ن ق سے تعبیر ہوسکتی ہے جہاں ط ق تقریباً متوازی ہے ط و کے اور تقریباً مستقیم ہے۔
یہ مقدار صریحاً اُس کام سے بہت مختلف ہے جو بوجھ کو بتدریج بڑھا کر زور ف تک پہنچنے میں ہوتا ہے اور جو رقبہ و ط ن سے تعبیر ہوتا ہے اور بازگشتگی نہیں کہلا سکتا۔

۲۴۱[1] عام صورت میں لچکدار فساد کی توانائی —

اگر صدر زور اور فساد وہ ہوں جو دفعہ ۱۹ میں دیے گئے ہیں تو چونکہ صدر زور ف_1، ف_2، ف_3 ایک دوسرے سے بے تعلق ہیں اس لیے ف_1 کا کام فی اکائی حجم (گزشتہ دفعہ کی سادہ صورت کے مقابلے میں جس میں $\text{ف}_2 = \text{ف}_3 = 0$) جانبی فساد $\frac{\text{ف}_2+\text{ف}_3}{\text{م ے}}$ کے کام کی وجہ سے کم ہوجائیگا اور ذیل کی مقدار کے مساوی ہوگا:—

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\text{ف}_1^2}{\text{ے}}-\frac{\text{ف}_1(\text{ف}_2+\text{ف}_3)}{\text{م ے}}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

اور اسی طرح کے جملے دوسرے زوروں ف_2، ف_3 کے لیے حاصل ہونگے۔ اس لیے

[1] اس دفعہ کو کتاب کے ابتدائی مطالعے میں چھوڑ دینا بہتر ہوگا۔

جمع کرنے سے مجموعی فسادی توانائی فی اکائی حجم

$$= \frac{1}{2\text{ے}}\left\{\text{ف}_1^2+\text{ف}_2^2+\text{ف}_3^2-\frac{2}{\text{م}}\left(\text{ف}_1\text{ف}_2+\text{ف}_2\text{ف}_3+\text{ف}_3\text{ف}_1\right)\right\} \cdots\cdots (2)$$

ایک دلچسپ مثال خالص جز کی ہے جس کے لیے فرض کرو کہ

$$\text{ف}_1 = \text{ق}،\ \text{ف}_2 = -\text{ق}،\ \text{ف}_3 = 0$$

تب لچکدار فساد کی توانائی فی اکائی حجم

$$= \frac{\text{ق}^2}{\text{ے}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)$$

جو مساوات (۱) دفعہ ۱۳ کی رُو سے $\frac{1}{2}\frac{\text{ق}^2}{\text{س}}$ کے مساوی ہے، اور یہ نتیجہ
ایک دوسرے طریقے سے آگے چل کر نکالا جائیگا (دفعہ ۹۵) اور اس طرح صفحہ ۲۷
یہ دفعہ ۱۳ کے ربط (۱) کے ثبوت کا ایک متبادل طریقہ ہے۔

مقدار (۲) کی قیمت اعظم فسادی توانائی کے مفروضے (دفعہ ۲۵) کی رُو سے کسی شے کی لچکدار مضبوطی کا ناپ ہوگی۔ دفعہ ۲۵ کے آخر میں جس خاص صورت کا ذکر کیا گیا ہے اُس میں ف_1 اور ف_2 کی بجائے دیے ہوئے صدر زور مندرج کیے جائیں اور ف_3 (= صفر) کو حذف کر دیا جائے، اور اس کا خیال رکھیں کہ دفعہ ۲۵ کی ترقیم میں ف_1 زور کا ایک جزوِ ترکیبی ہے صدر زور نہیں تو (۲) کی شکل یہ ہو جاتی ہے:۔

$$\frac{1}{2\text{ے}}\left\{\text{ف}_1^2+2\text{ق}^2\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

یا اگر ز وہ سادہ تناؤ ہو جس سے یہی لچکدار فسادی توانائی فی اکائی حجم پیدا ہو تو

$$\text{ز}^2 = \text{ف}_1^2+2\text{ق}^2\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right) = \text{ف}_1^2+\frac{\text{ے}}{\text{س}}\text{ق}^2 \cdots\cdots (4)$$

یا

$$\text{ز} = \sqrt{\text{ف}_1^2+2\text{ق}^2\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)} = \sqrt{\text{ف}_1^2+\frac{\text{ق}^2\text{ے}}{\text{س}}} \cdots\cdots (5)$$

اگر پوائی سن کی نسبت $\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{4}$ جس کی وجہ سے

$$1 + \frac{1}{\text{م}} = \frac{\text{ے}}{2\,\text{س}} = \frac{5}{4}$$

تو معادل سادہ زور ز جس سے یہی لچکدار فسادی توانائی فی اکائی حجم پیدا ہو

$$\text{ز} = \sqrt{\text{ف}_1^2 + \frac{5}{4}\,\text{ق}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

جو دفعہ ۲۵ کی مقداروں (۱) اور (۲) سے زیادہ ہے، اور اعظم "زور کے فرق" (یعنی جزی زور کے دُگنے) سے کم ہے جو دفعہ ۲۵ کی مساوات (۳) سے

$$\sqrt{\text{ف}_1^2 + 4\,\text{ق}^2}$$

ہے۔

۳۴۔ لچک کی حد کے اندر متحرک تنشی بوجھ

اگر ایک سلاخ پر ایک تنشی بوجھ اچانک لگایا جائے اور اس سے جو زور پیدا ہو وہ لچک کی حد سے باہر نہ ہو تو سلاخ ایک کامل کمانی کا عمل کریگی اور تناؤ میں اہتزاز کریگی۔ تعادل کے محل کے دونوں جانب اہتزاز کا حیطہ اُس امتداد کے مساوی ہوگا جو اسی بوجھ کو بتدریج لگانے سے پیدا ہوتا۔ اس لیے اعظم آنی فساد اس کا دُگنا ہوگا جو اسی بوجھ کو بتدریج لگانے سے پیدا ہوتا۔

مثلاً فرض کرو کہ ایک تنشی بوجھ و تراشی رقبہ ر کی ایک سلاخ کو اچانک لگایا جاتا ہے تب آنی فساد

$$\text{س} = 2\,\frac{\text{و}}{\text{ر}} \div \text{ے}$$

اور زور کی آنی حدت

$$\text{ف} = \text{ے}\,\text{س} = 2\,\frac{\text{و}}{\text{ر}}$$

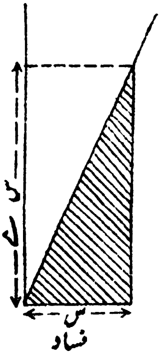
اور یہ اُس زور کا دُگنا ہے جو سکونی یا بتدریج لگائے ہوئے بوجھ و سے پیدا ہوتا ہے یہاں

یہ فرض کیا گیا ہے کہ زور فساد منحنی (یا ینگ کے مقیاس کی قیمت) لچک کی حد کے اندر بوجھ پڑنے کی شرح پر منحصر نہیں اور یہ بات غالباً تقریباً صحیح ہے۔ آنی "زور فساد" نقشہ شکل ۴۸ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا رقبہ مقدار

½ ے س² یا ½ (ے س)² / ے صفحہ ۵۰

کے متناسب ہوگا جو شے کے اکائی حجم کا کام ہے۔

اگر ایک سلاخ پر پہلے سے ایک بوجھ مثلاً ایک "ساکن" تنتشی بوجھ وب ہو اور اسی قسم کا ایک متحرک بوجھ و لگایا جائے تو بشرطیکہ لچک کی حد سے تجاوز نہ ہو اعظم زور



شکل ۴۸

= وب/ر + ۲و/ر یا (وب + و)/ر + بوجھ کا تغیر/ر

اگر اس کے برخلاف متحرک بوجھ و سے مخالف قسم کا زور پیدا ہو (مثلاً فشاری) تو آنی زور

= وب/ر − ۲و/ر یا (وب − و)/ر − بوجھ کا تغیر/ر

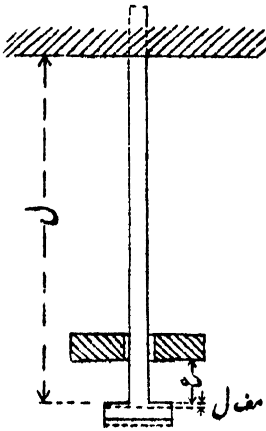
مثال — وہ سکونی بوجھ معلوم کرو جس سے وہی اعظم زور پیدا ہوں جو (ا) ایک ۴۰ ٹن کے ساکن تنتشی اور ایک ۱۰ ٹن کے متحرک تنتشی بوجھ سے پیدا ہوں، اور (ب) ایک ۲۰ ٹن کے ساکن تنتشی اور ۳۰ ٹن کے متحرک فشاری بوجھ سے پیدا ہوں۔

(ا) معادل سکونی بوجھ = ۵۰ + ۱۰ = ۶۰ ٹن تناؤ۔

(ب) معادل سکونی بوجھ = ۲۰ − ۳۰ − ۳۰ = −۴۰ ٹن، یعنی ۴۰ ٹن دباؤ۔

۴۴۔ اگر ایک ہلکی سلاخ پر ایک تنتشی بوجھ دھکے کے ساتھ محوراً لگایا جائے مثلاً ایک بھاری وزن کسی بلندی سے گرایا جائے اور زور اور فساد کی متناسبیت کی حدود سے تجاوز واقع نہ ہوا ہو اگر سلاخ کے سوا تمام رابطے

بے انتہا استوار ہوں تو سلاخ میں جو فسادی توانائی جمع ہو جائیگی وہ گرے ہوئے وزن کی کھوئی ہوئی توانائی بالحرکت کے مساوی ہوگی۔



اگر ایک بھاری وزن و پونڈ (شکل ۴۹) ع انچ کی ایک بلندی سے ایک روک کے اوپر اس طرح گرے کہ طول ل انچ اور تراشی رقبہ سا مربع انچ کی ایک سلاخ میں ایک خالص محوری تنشی زور پیدا ہو تو اگر کھنچاؤ مف ل پیدا ہو، فساد س، اور آنی تنشی زور کی حدت ف، اور اگر روک، گرنے والا وزن، اور سلاخ کے سہارے سب بے انتہا استوار سمجھے جائیں تو

شکل ۴۹

و(ع + مف ل) = ½ ے س × سا × مف ل

= ½ ق مف ل .... (۱)

جہاں ق سلاخ پر معادل سکونی بوجھ پونڈوں میں ہے اور ے کھنچاؤ کا لچک کا مقیاس پونڈ فی مربع انچ میں - اس لیے

و (ع + مف ل) = ½ ے س × سا × س ل .... (۲) صفحہ ۴۶

یا چونکہ ف/ے = س

اس لیے و(ع + مف ل) = ½ ف۲/ے × سلاخ کا حجم .... (۳)

اور ف۲ = ۲ ے × و(ع + مف ل) / سلاخ کا حجم یا تقریباً ۲ ے و ع / حجم .... (۴)

جب کہ مف ل بلندی ع کے مقابلے میں بہت چھوٹا ہو۔

اس مساوات سے ف معلوم ہوسکتا ہے اگر ے معلوم ہو۔
اگر ع = ۰ تو

$$ف^۲ = \frac{۲ ے و مف ل}{س ل} = ۲ \frac{و}{س} \times ے \times \frac{مف ل}{ل}$$

$$= ۲ \frac{و}{س} \times ف$$

$$یعنی\ ف = ۲ \frac{و}{س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

جیسا کہ دفعہ گزشتہ میں حاصل ہوچکا ہے۔

تصادم کے وقت سلاخ کے جمود کی وجہ سے جو توانائی ضائع ہوگی اگر اس کا لحاظ کیا جائے تو بقائے معیارِ حرکت کے اصول سے تصادم کے فوراً بعد وزن و اور سلاخ کے آزاد سرے کی رفتار ء اس طرح معلوم ہوسکتی ہے کہ یہ فرض کریں کہ امتداد اُسی طرح تقسیم ہوا ہے جس طرح کہ سکونی بوجھ و کی صورت میں ہوتا یعنی گویا کہ تناؤ سارے طول میں ایک آن میں پھیل گیا ہے۔
اس طرح اگر سلاخ کا وزن و ہو تو

$$و \sqrt{۲ ج ع} = و ء + \frac{و}{ل} \int^{ل} \frac{لا}{ل} ء\ فرلا$$

$$= (و + \tfrac{۱}{۲} و) ء$$

$$یا \quad ء = \sqrt{۲ ج ع}\ \frac{و}{و + \tfrac{۱}{۲} و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

تصادم کے بعد مجموعی توانائی بالحرکت

$$تم = \frac{۱}{۲} \frac{و ء^۲}{ج} + \frac{۱}{۲ ج} \times \frac{و}{ل} \int^{ل} \left(\frac{لا}{ل} ء\right)^۲ فرلا$$

$$= \frac{۱}{۲ ج} (و + \tfrac{۱}{۳} و) ء^۲$$

$$= \frac{(\text{و} + \frac{1}{3}\text{و})\,\text{و}^2}{(\text{و} + \frac{1}{2}\text{و})^2} \cdot \text{ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

اس توانائی بالحرکت میں و اور و کے تجاذبی کام کو جمع کرکے حاصل جمع کو فسادی توانائی کے اضافے کے مساوی رکھیں تو

$$\text{تح} + \text{و}\frac{\text{ف}}{\text{ے}} \times \text{ل} + \frac{\text{و}}{\text{ل}} \times \frac{\text{ف}}{\text{ے}} \int_{0}^{\text{ل}} \text{لا فرلا}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\text{ف}^2\,\text{س ل}}{\text{ے}} + \frac{\text{و}}{\text{ل}} \times \frac{\text{ف}}{\text{ے}} \int_{0}^{\text{ل}} \text{لا فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$ [له]

یا $$\text{ف}^2 - ۲\text{ف}\frac{\text{و}}{\text{س}} - \frac{۲\text{ے}}{\text{س ل}} \times \frac{(\text{و} + \frac{1}{3}\text{و})}{(\text{و} + \frac{1}{2}\text{و})^2} \times \text{و}^2\text{ع} = ۰ \quad \ldots\ldots (۹)$$

یا $$\text{ف} = \frac{\text{و}}{\text{س}}\left\{۱ + \sqrt{۱ + \frac{۲\,\text{س ے}\,(\text{و} + \frac{1}{3}\text{و})}{\text{ل}\,(\text{و} + \frac{1}{2}\text{و})^2} \times \text{ع}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

اگر ع = ۰ تو ف = ۲ $\frac{\text{و}}{\text{س}}$ جیساکہ دفعہ گزشتہ میں اور دفعہ ہذا میں اوپر حاصل ہوا ہے۔ اگر ع تطول معٔ ل کے مقابلے میں بہت بڑا ہو تو مساوات (۹) میں ف کی رقم غائب ہوجائیگی اور

$$\text{ف} = \text{و}\sqrt{\frac{۲\text{ے}}{\text{ل س}} \cdot \frac{\text{و} + \frac{1}{3}\text{و}}{(\text{و} + \frac{1}{2}\text{و})^2} \times \text{ع}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

له دائیں جانب اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ ابتدائی فسادی توانائی $\frac{1}{۲\text{ے}} \int_{0}^{\text{ل}} \left(\frac{\text{ولا}}{\text{س ال}}\right)^2 \text{س فرلا}$ کو آخری فسادی توانائی $\frac{1}{۲\text{ے}} \int_{0}^{\text{ل}} \left(\text{ف} + \frac{\text{ولا}}{\text{س ال}}\right)^2 \text{س فرلا}$ میں سے تفریق کیا جائے۔

دستور ہے کہ دھکے کے ساتھ پڑنے والے یا تیزی کے ساتھ پڑنے والے بوجھوں کی صورت میں کھنچاؤ کا مقیاس وہی تسلیم کیا جائے جو سکونی امتحان سے حاصل ہوتا ہے اگرچہ یقین نہیں کہ یہ درست ہے۔ اس کے متعلق[۵] ہم پروفیسر ہاپ کنسن[۶] کے دھکوں کے تجربات کا حوالہ دیتے ہیں جن میں ایسے خاص لچکدار زور اور فساد پائے جاتے ہیں جو لچک کی عام مفروضہ حدود سے بہت زیادہ ہیں بشرطیکہ وہ وقفہ جس کے دَوران میں زور ان حدود سے بڑھ گئے ہوں $\frac{1}{1000}$ ثانیہ یا اس سے کم ہو۔ (صفحہ ۶۶) آیا زور لگانے کی اتنی تیز شرحوں میں زور اور فساد کا باہمی ربط وہی رہتا ہے جو ان سے ہزاروں گنا سست شرح پر ہوتا ہے یہ امر نامعلوم ہے۔

مثال ـــ اگر کسی ۲ ہنڈرڈ ویٹ کے وزن کے گرنے کا پورا صدمہ ایک فولادی سلاخ کے کھنچنے میں صرف ہو جس کا قطر $1\frac{1}{2}$ انچ اور طول ۱۰ فٹ ہے تو سلاخ کا امتداد اور زور کی حدت معلوم کرو۔ فولاد کے لیے ے کی قیمت 30×10^{6} پونڈ فی مربع انچ اور گرنے کی بلندی سلاخ کے کھنچنے سے پہلے ۲ انچ ہے۔

اگر لا = کھنچاؤ انچوں میں، تو توانائی کی مساوات انچ پونڈوں میں حسب ذیل ہوگی:

$$224(2+\text{لا}) = \frac{1}{2}\,\text{ے}\,\frac{\text{لا}}{120}\times\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\times\text{لا}$$

یا $$\text{لا}^{2} - 0.001\,\text{لا} - 0.00203 = 0$$

یا $$\text{لا} = 0.0455 \text{ انچ}$$

$$\text{زور کی حدت} = \frac{0.0455}{120}\times 30\times 10^{6} = 11370 \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

---

[۵] روئیداد رائل سوسائٹی فروری ۱۹۰۵ء۔ نیز "صدمہ کے متعلق چند تجربات" رسالہ انجینیرنگ ۳۰ اپریل و ۷ مئی ۱۹۰۹ء

[۶] Prof. B. Hopkinson

۴۵ - صدموں کی مزاحمت ـــــ ظاہر ہے کہ کسی شے میں کسی ضرب کی توانائی کو لے لینے کی جو صلاحیت ہوگی اُس سے ایک حد تک اس بات کا پتہ چلیگا کہ یہ شے ایسی تعمیروں کے لیے موزوں ہے یا نہیں جو صدموں کے زیرِ عمل آتی ہو۔ ایک دلچسپ سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ اس موزونیت کو معلوم کرنے کے لیے برداشتی بازگشتگی بہتر رہنما ہے یا شے کو توڑ دینے کا مجموعی کام۔ اس کے لیے متعدد باتوں پر غور کرنا ضروری ہے۔

(۱) مستقل بگاڑ کے بغیر ضرب کو برداشت کر لینے کی صلاحیت کا ایک پیمانہ برداشتی بازگشتگی یعنی وہ توانائی ہے جو لچک کی حد تک جمع ہو اور جو رقبہ طنَ و (شکل ۴۶) کے متناسب ہے۔ چونکہ یہ مقدار ایک سکونی یا آہستہ لداؤ کے امتحان سے معلوم کی جاتی ہے اس لیے یہ صحیح طور پر ضرب کی برداشت کی صلاحیت کا اندازہ اُسی صورت میں کریگی کہ فسادوں کی مقدار زور لگانے کی شرح پر منحصر نہ ہو۔

(۲) کسی شے کو توڑنے میں جو مجموعی کام صرف ہو اُس سے اس کا اندازہ ہوسکتا ہے کہ یہ شے پہلے بیش فساد نہ ہوئی ہو تو ایک واحد ضرب سے ٹوٹنے کی کتنی مزاحمت کریگی۔ یہ امر کہ آیا یہ بہت تیز لداؤ اور آہستہ لداؤ دونوں کے لیے ایک ہی ہے اس پر منحصر ہے کہ آیا دونوں صورتوں میں بے لچک فساد اور زور ایک ہی ہیں۔ مگر غالباً انتہائی زور اور فساد دونوں تیز لداؤ کی صورت میں زیادہ ہوتے ہیں یعنی شکستگی کی مزاحمت زیادہ ہوتی ہے۔

(۳) برداشتی بازگشتگی کے اور اُس کام کے درمیان جو کسی شے کو توڑنے میں کیا جائے کسی ربط کا ہونا ضروری نہیں خواہ یہ توڑنا آہستہ یا تیز یا زور کو ایک ہی بار لگانے یا بار بار لگانے سے عمل میں آیا ہو۔

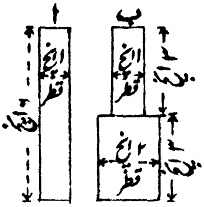
مساوی یا غیر مساوی ضربوں کی تکرار سے جو شکستگی واقع ہوگی اُس میں صرف شدہ توانائی صریحاً وہ نہیں ہوگی جو ایک ہی ضرب سے توڑنے میں ہوتی ہے۔ اگر ایک واحد ضرب جس کی توانائی رقبہ و ط طَ نَ ع (شکل ۴۶) کے

متناسب ہو طؔ نؔ کے متناسب زور پیدا کرے تو لچکدار فساد کی توانائی کسی رقبہ طؔ نؔ قؔ کے متناسب ہوگی - اس سے جو سختاؤ پیدا ہوگا (دفعہ ۳۲) اُس سے لچکدار فساد کی برداشت کی صلاحیت بڑھ جائیگی لیکن ایک دی ہوئی ضرب سے پیدا ہونے والے زور بھی بڑھ جائینگے - پیکر پذیر فساد کے ذریعے صدموں کو برداشت کرنے کی صلاحیت جو اس طرح گھٹ جائیگی اُس کو تپا نرمانے کے عمل کے ذریعے پھر حاصل کرلیا جاسکتا ہے جیسا کہ 'اُٹھاؤ' زنجیروں' وغیرہ' کی صورت میں ہوتا ہے -

متعدد صدموں کے بعد واقع ہونے والی شکستگی تک جو مجموعی توانائی صَرف ہوتی ہے اُس کا اور ایک واحد صدمے سے ہونے والی شکستگی کی توانائی کا ربط ظاہر ہے کہ کوئی ایسا سادہ ربط نہیں ہوگا بلکہ جو مختلف صدمات واقع ہوں اُن کی مقدار اور اُن سے پیدا ہونے والے سختاؤں پر منحصر ہوگا - نیز چھوٹی ضربوں کے بعد جس آخری ضرب سے شکستگی واقع ہو اُس کی توانائی صریحاً سابق کی ضربوں کی مقدار پر منحصر ہوگی — صفحہ ۷۸
اس بات کا غلطی سے بعض اوقات خیال نہیں رکھا جاتا جب کہ اشیا کا بڑھتی ہوئی مقداروں کی تکراری ضربات سے تخریب تک امتحان کیا جاتا ہے' اور مزاحمت کی صلاحیت کا اندازہ فقط آخری ضرب کی مقدار سے کرلیا جاتا ہے -

لچک کی حد تک جو توانائی جمع ہو' یا کسی شے کو توڑنے میں جو کام صَرف ہو' جب کہ پوری شے میں زور کی حدت یکساں ہو' ان کو شے کے فی اکائی حجم بیان کرنے میں آسانی ہوتی ہے اور جب اس طرح بیان کیے جائیں تو وہ زیر بحث شے کی ایک خاصیت کے طور پر ہوتے ہیں - لیکن ایک دیے ہوئے فسادی عمل کے تحت اشیا کی شکلیں مختلف ہوں تو زور کی تقسیم مختلف ہوگی اور بازگشتگی یا شکستگی تک کا کام مختلف ہوگا کیونکہ یہ ایک حد تک ہندسی شکل پر منحصر ہوتے

ہیں۔ مثلاً ایک ہی شے کے دو ٹکڑوں ا اور ب (شکل نمبر ۵۰) سے بہت مختلف برداشتنی بازگشتگی حاصل ہوگی۔ ٹکڑے ب میں ٹکڑے ا سے حقیقی بازگشتگی کم ہوگی اور بازگشتگی فی اکائی حجم اَور بھی کم ہوگی۔



شکل نمبر ۵۰

فرض کرو کہ زیرِ بحث شے کے لیے برداشتنی تنشی (یا فشاری) زور کی حدت یعنی لچک کی حد پر زور کی حدت ز ہے۔ تب چونکہ ب کی اقل تراش وہی ہے جو ا کی ہے اس لیے مجموعی برداشتنی بوجھ دونوں ٹکڑوں کے لیے وہی ہوگا۔ ب کا امتداد صریحاً ا سے کم ہوگا اس لیے بازگشتگی جو بوجھ اور امتداد کے حاصل ضرب کا نصف ہوتی ہے اُسی نسبت میں کم ہوگی جس میں کہ امتداد کم ہے۔ نسبت:

$$\frac{\text{ا کا امتداد}}{\text{ب کا امتداد}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{8}{5}$$

کیونکہ ب کے نچلے حصے میں زور صرف $\frac{1}{4}$ ز ہوگا۔

ا کی بازگشتگی (دفعہ ۴۲) —

$$= \frac{1}{2}\frac{\text{ز}^2}{\text{ے}} \times \text{حجم} = \frac{1}{2}\frac{\text{ز}^2}{\text{ے}} \times \frac{\pi}{4} \times 6$$

ب کی بازگشتگی —

اوپر کے حصے کے لیے جس کا قطر ۱ انچ ہے $= \frac{1}{2}\frac{\text{ز}^2}{\text{ے}} \times \frac{\pi}{4} \times 3$

نچلے حصے کے لیے جس کا قطر ۲ انچ ہے $= \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{4}\text{ز})^2}{\text{ے}} \times 4 \times \frac{\pi}{4} \times 3$

$$= \frac{1}{2}\frac{\text{ز}^2}{\text{ے}} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{مجموعی} = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ز}^{۲}}{\text{ے}} \times \frac{\pi}{۴} \times \frac{۳}{۴}\,۳$$

اور نسبت

$$\frac{\text{ا کی بازگشتگی}}{\text{ب کی بازگشتگی}} = \frac{۶}{۳\frac{۳}{۴}} = \frac{۸}{۵} = ۱٫۶ \ (\text{اوپر کی طرح})$$

صفحہ ۷۹ یعنی ا کی شکل کا ٹکڑا ب کی شکل کے ٹکڑے کے مقابلے میں ۶۰ فی صدی زیادہ توانائی لچکدار فساد کی شکل میں مستقل فساد کے بغیر جذب کر سکتا ہے حالانکہ شے ایک ہی ہے اور ب کا حجم زیادہ ہے۔

دونوں شکلوں کا فی اکائی حجم مقابلہ کرنے سے

$$\frac{\text{ا کا حجم}}{\text{ب کا حجم}} = \frac{۱ \times ۶}{(۴ \times ۳) + (۱ \times ۳)} = \frac{۲}{۵} \ \text{یا}\ ۰٫۴$$

اس لیے

$$\frac{\text{ا کی بازگشتگی فی اکائی حجم}}{\text{ب کی بازگشتگی فی اکائی حجم}} = \frac{۱٫۶}{۰٫۴} = ۴ : ۱$$

دونوں ٹکڑوں کا مقابلہ ایک اور طرح پر کیا جا سکتا ہے۔ اگر ب کے اندر زور کسی بوجھ سے مثلاً ایک دھکے والے بوجھ سے لچک کی حد ز کو پہنچے تو اس کے اندر جذب شدہ توانائی

$$= \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ز}^{۲}}{\text{ے}} \times \frac{\pi}{۴} \times \frac{۳}{۴}\,۳$$

اب اگر ا بھی یہی توانائی جذب کرے تو اس میں ایک پست تر زور ف پیدا ہوگا۔ (گزشتہ جملوں کے استعمال سے) ف کی قیمت یوں حاصل ہوگی:-

$$\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ے}} \times \frac{\pi}{۴} \times ۶ = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ز}^{۲}}{\text{ے}} \times \frac{\pi}{۴} \times \frac{۳}{۴}\,۳$$

یا

$$\frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ز}^{۲}} = \frac{۵}{۸}$$

یا

$$\frac{\text{ف}}{\text{ز}} = \sqrt{\frac{۵}{۸}} = ۰٫۷۹$$

یعنی ایک دیے ہوئے عمل سے (۲) میں ۱۲ فی صدی کم زور پیدا ہوگا حالانکہ اس میں ۴۰ فی صدی کم مادہ ہے۔ اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اس میں پورا طول دیے ہوئے عمل کے تحت متاثر ہے اور ب میں ایسا نہیں ہوتا۔

اس تقابل سے جو کسی قدر انتہائی صورت تھی یہ فوراً ظاہر ہوگا کہ کیوں ایسے بولٹ کے تنے کی تراش کو جو صدمات یا اچانک بوجھوں کے تحت آتا ہو گھٹا کر اس تراش کی حد تک لے آتے ہیں جو پیچ کی چوڑیوں کی تہ پر ہو۔ ڈنڈے کے اندر چوڑیوں ہی کی اس اقل تراش سے زیادہ تراش رکھنے سے دھکے والی قوتوں کا اثر کم زور ترین حصے میں مرتکز ہوگا اور ان کا فسادی اثر بڑھ جائیگا۔

۴۶۔ دھاتوں کی تھکن — تجربے سے معلوم ہوا ہے کہ تعمیر میں جو دھاتیں استعمال ہوتی ہیں وہ آخر کار ایسے زوروں کی تکرار سے ٹوٹ جاتی ہیں جو ان کی انتہائی سکونی مضبوطی سے بہت کم ہوتے ہیں۔ نیز یہ کہ اگر زوروں کی محض تکرار ہی نہ ہوئی ہو بلکہ تعاکس بھی ہوا ہو یعنی دھات پر مخالف قسموں کے تکراری بوجھوں کا عمل ہوا ہو تو شکستگی کی مزاحمت اور بھی گھٹ جاتی ہے۔ ان صورتوں میں اکثر کہا جاتا ہے کہ زیر بحث شے "تھک گئی ہے"۔ چونکہ متغیر زور کے تحت کی ناکارگی کی ابھی پوری تحقیق نہیں ہوئی ہے اس لیے پوری دھات کی تھکن کے الفاظ سے یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا کہ مادے کے اندر کیا واردات گزرتی ہے۔

نیز تھکن کے لفظ کو زور کے عمل کی تکرار کے اثرات کے ساتھ مخصوص کر دینا بھی درست نہیں کیونکہ بعض حالات میں ایک مستقل زور کے دیر تک عمل کرنے سے دھات کے اندر کم زوری پیدا ہو جاتی ہے۔ لیکن اب دستور یہی ہے کہ "تھکن" کا لفظ تکراری زور کے اثرات کے ساتھ مخصوص رکھا جاتا ہے۔ صفحۂ ۸

یہاں یہ معلوم ہونا چاہیے کہ زور کے تغیرات کی آہستہ یا تیز تکرار سے دھات پر جو کچھ گزرتی ہے وہ اس سے بالکل مختلف ہے جو دفعہ گزشتہ میں

ضربات یا صدمات کے متعلق بیان ہوا ہے۔

اشیا کے سبک پن اور کفایت کی جو مانگ ہے اور مشینری میں تیز تر رفتاروں کا جو استعمال ہونے لگا ہے اس کی وجہ سے موجودہ زمانے میں سابق کے مقابلے میں بہت زیادہ زور جائز رکھے جانے لگے ہیں، اور چونکہ بہت سی صورتوں میں دھاتوں کی ناکارگی ایسے زوروں پر تھکن کی وجہ سے واقع ہوگی جو سکونی لداؤ کے لیے بالکل بے خطر ہوتے اس لیے گزشتہ ستر سال کے عرصے میں مختلف ممالک میں تھکن سے پیدا ہونے والی ناکارگی کی تجرباتی تحقیقات پر بہت توجہ کی گئی ہے۔

تھکن پر غور کرنے کے لیے مناسب ہے کہ متغیر زوروں کی جو مختلف قسمیں ہیں اُن میں تمیز کی جائے۔ "گھٹتے بڑھتے" زور کی اصطلاح اُس وقت استعمال کی جاتی ہے جب زور ایک ہی علامت کی اعظم اور اقل قیمت کے درمیان بدلے اور اس میں اگر اقل قیمت صفر ہو تو زور کو "تکراری" کہا جاتا ہے۔ "متعاکس" زور سے مراد ایسے زور ہیں جو مخالف علامتوں کی اعظم اور اقل قیمت کے درمیان بدلیں مثلاً تناؤ سے فشار تک بدلیں۔ "تبادل" زور عموماً اُس متعاکس زور کو کہا جاتا ہے جو مساوی اور مخالف حدود کے درمیان بدلے۔

۷۴۔ تھکن کی تحقیقات کی مختصر تاریخ ۔۔۔ اگرچہ سنہ ۱۸۶۴ء سے پہلے بھی کچھ تحقیقیں کی گئی تھیں لیکن اہم تحقیق سب میں پہلے فیربیرن[1] نے کی جو "رائل سوسائٹی کے فلسفیانہ کاروبار" میں سنہ ۱۸۶۴ء میں شائع ہوئی۔ اس کے بعد کئی اہم تحقیقیں کی گئیں، خاص کر بیسویں صدی عیسوی میں۔ یہاں ایک تحقیق کا مختصر بیان کیا جاتا ہے۔ یہ تحقیق عزت کی مستحق ہے اور تھکن کے مضمون کے لیے ایک بہت کارآمد تمہید کا کام دیتی ہے۔

[1] Fairbairn

ووہلر کے تجربات ؎۱ — ووہلر کی طویل تحقیقوں سے لوہے اور فولاد کے گھٹتے بڑھتے زوروں کے تحت کے طرزِ عمل پر بہت روشنی پڑتی ہے۔ اس کے تجربات میں مروڑ، خماؤ اور سادہ راست زور شامل تھے۔ اِن تجربات سے اہم ترین نتائج جو اخذ ہوتے ہیں، یہ ہیں:-

(۱) گھٹتے بڑھتے زوروں کے تحت شکستگی کی مزاحمت خاص خاص حدود کے اندر زور کے گھٹنے بڑھنے کی وسعت پر یعنی اعظم اور اقل زور کے جبری فرق پر منحصر ہوتی ہے نہ کہ صرف اعظم زور پر۔

(۲) اگر زور متعاکس ہوں (یعنی تنشی اور فشاری) تو سکونی شکستی زور سے بہت کم پر بلکہ معمولی لچک کی حد سے بھی کم پر تکرار کی کثرت سے شکستگی واقع ہو سکتی ہے۔

یہ دوسرا نکتہ جدول ۱ اور شکل ۱۵ کے ذریعے واضح ہو سکتا ہے۔ منتخبہ دھات دُھرے کا لوہا ہے جو فینکس ؎۲ کمپنی کا بنایا ہوا ہے۔ اس پر مساوی اور مخالف تناؤ اور فشار عائد کیے گئے جو خماؤ کے عمل سے ایک گھومتی ہوئی سلاخ میں پیدا ہوئے۔ اس دھات کی انتہائی مضبوطی معمولی سکونی تنشی امتحانات سے ۲۳ ٹن فی مربع انچ اور تطول تقریباً ۲۰ فی صدی حاصل ہوا تھا۔

؎۱ اس کا ایک تفصیلی بیان رسالہ انجینیرنگ جلد ۱۱ (۱۸۷۱ء) میں دیا گیا ہے۔ نیز ایک عمدہ بیان اور کئی نتائج اور بحث انون کی کتاب "اشیا کی آزمائش" میں دیے گئے ہیں (لانگمینز)۔ نیز برٹش ایسوسی ایشن کی رپورٹ ۱۸۷۰ء صفحہ ۲۴۴ میں۔

؎۱ Wohler ؎۲ Phoenix & Co.

صفحہ

جدول ۱

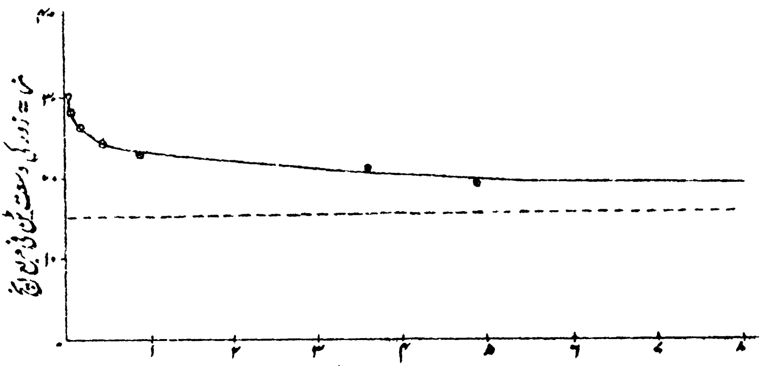
(زور ٹن فی مربع انچ میں)

اعظم زور (تناؤ)	اقل زور (فشار)	زور کی وسعت	شکستگی تک تکرار کی تعداد
+۱۵٫۳	(-) ۱۵٫۳	۳۰٫۶	۵۶۴۳۰
۱۴٫۳	۱۴٫۳	۲۸٫۶	۹۹۰۰۰
۱۳٫۴	۱۳٫۴	۲۶٫۸	۱۸۳۱۴۵
۱۲٫۴	۱۲٫۴	۲۴٫۸	۴۷۹۴۹۰
۱۱٫۵	۱۱٫۵	۲۳٫۰	۹۰۹۸۴۰
۱۰٫۵	۱۰٫۵	۲۱٫۰	۳۶۳۲۵۸۸
۹٫۶	۹٫۶	۱۹٫۲	۴۹۱۷۹۹۲
۸٫۶	۸٫۶	۱۷٫۲	۱۹۱۸۶۷۹۱
۷٫۶	۷٫۶	۱۵٫۲	۱۳۲۲۵۰۰۰۰ (نہیں ٹوٹا)

شکل ۱۵ میں زور کی وسعت کو معین اور اس پر شکستگی پیدا کرنے کے لیے تکرار کی ضروری تعداد کو فصلہ مان کر ترسیم کیا گیا ہے۔ لا انتہا تکرار کے لیے زور کی وسعت تقریباً ۱۵٫۲ ٹن حاصل ہوتی ہے یعنی ۷٫۶ ٹن فی مربع انچ اعظم تنشی یا فشاری زور۔ اور یہ قیمت شے کی معمولی لچک کی حد سے غالباً بہت نیچے ہے۔ یہ وسعت "زور کی انتہائی وسعت" کہلاتی ہے جس پر شکستگی واقع کرنے کے لیے تکرار کی مطلوبہ تعداد لا انتہا ہو جائے۔

یہ نتائج، اگرچہ بعض دیگر نتائج سے زیادہ باقاعدہ ہیں، لیکن انہی کو

نوعیت میں مختلف مضبوطیوں کے پٹواں لوہوں اور فولادوں کے تمثیلی نتائج



شکل ۱۵

سمجھا جا سکتا ہے - اعلیٰ کاربن کے سخت فولادوں میں نرم فولادوں سے "زور کی انتہائی وسعت" زیادہ حاصل ہوتی ہے۔

گھٹتے بڑھتے زور کے تحت قوتِ برداشت کا زور کی وسعت پر انحصار جدول (۲) سے ظاہر ہو سکتا ہے - یہ اوپر کی دھاتت کے خالص تمثیلی امتحانات سے حاصل ہوئی۔

صفحہ ۸۲

جدول ۲

(زور ٹن فی مربع انچ میں)

اعظم زور	اقل زور	زور کی وسعت	شکستگی تک تکرار کی تعداد
۲۲٫۹۲	۰	۲۲٫۹۲	۸۰۰
۲۱٫۰۱	۰	۲۱٫۰۱	۱۰۶۹۱۰
۱۹٫۱۰	۰	۱۹٫۱۰	۳۴۰۸۵۳
۱۷٫۱۹	۰	۱۷٫۱۹	۴۰۹۴۸۱
۱۷٫۱۹	۰	۱۷٫۱۹	۴۸۰۸۵۲
۱۵٫۲۸	۰	۱۵٫۲۸	۱۰۱۴۱۶۴۵
۲۱٫۰۱ +	۹٫۵۵ +	۱۱٫۴۶	۲۳۷۳۴۲۴
۲۱٫۰۱ +	۱۱٫۴۶ +	۹٫۵۵	۴۰۰۰۰۰۰۰ (نہیں ٹوٹا)

یہاں تکراری زوروں کا انتہائی اعظم زور بوجھ کو لگا کر پورا نکال لینے کی صورت میں تقریباً ۱۵٫۲۸ ٹن فی مربع انچ ہے اور صرف نصف نکالنے کی صورت میں ۲۱ ٹن فی مربع انچ ہے۔ اس طرح متغیر بوجھ کی تینوں قسموں کے لیے انتہائی اعظم زور حسب ذیل ہوئے:

تکراری بوجھ کی قسم	انتہائی اعظم زور	انتہائی وسعت
کاملاً متعاکس	۷٫۶	۱۵٫۲
اعظم سے صفر تک	۱۵٫۲۸	۱۵٫۲۸
اعظم سے نصف تک	۲۱٫۰۱	تقریباً ۱۰

ان اعداد سے ظاہر ہے کہ ایسے امتحانوں میں متغیر زور کے تحت برداشت یا شکستگی کا سوال اعظم زور سے زیادہ زور کی وسعت پر منحصر ہے۔

اسپین گن بوگ[1] نے وہلر[2] کے تجربات کو انہی مشینوں پر جاری رکھا اور اسی طرح کے نتائج لوہے اور فولاد اور تانبے کی بھرتوں کے لیے حاصل کیے۔ اسی قسم کے وسیع نتائج باؤشنگر[3] اور سر بی بیکر[4] نے لوہے اور فولاد کے لیے شائع کیے ہیں۔ چند نتائج مختلف لوہوں اور فولادوں کے لیے جدول ۳ میں درج کیے جاتے ہیں۔ ان میں صرف پہلا باؤشنگر کے تجربات سے ماخوذ ہے باقی سب انون[5] کی کتاب "اشیا کا امتحان" سے لیے گئے ہیں۔ زور جو ٹن فی مربع انچ میں بیان کیے گئے ہیں وہ زور ہیں جو دھاتوں نے شکستگی سے پہلے ۲۰ لاکھ سے زیادہ تکرار پر برداشت کیے۔

جدول ۳ سے ظاہر ہوتا ہے کہ زور کے "کامل تعاکس" یا "تبادل" کی حد سخت فولادوں میں انتہائی سکونی مضبوطی کی $\frac{1}{3}$ سے لے کر متمدد ترین لوہوں اور فولادوں میں $\frac{1}{2}$ تک ہوتی ہے۔ موجودہ زمانہ کی دھاتوں اور امتحان کے طریقوں سے ان سے بڑی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ نیز جدول سے یہ بھی معلوم ہوگا کہ تکرار کی حد انتہائی مضبوطی کے ۴۰ سے ۶۰ فی صدی تک ہوتی ہے۔ متمدد لوہوں اور نرم فولادوں میں ۵۵ سے ۶۰ فی صدی تک ہوتی ہے۔ نیز یہ کہ تعاکس اور تکرار کی حدود اعلیٰ تنشی استحکام کے فولادوں (یعنی اعلیٰ کاربن والے فولادوں) میں زیادہ نرم اور متمدد فولادوں سے زیادہ ہوتی ہیں، اگرچہ انتہائی سکونی مضبوطیوں کی اتنی بڑی کسر نہیں ہوتیں جتنی نرم اور متمدد فولادوں میں ہوتی ہیں۔ صفحہ ۲۳ ش

---

[*] دیکھو انون کی "اشیا کی آزمائش" میں کے اور برٹش ایسوسی ایشن کی رپورٹ ۱۸۸۶ء صفحہ ۴۲۴ میں کے خلاصے۔

---

[1] Spangenberg [2] Wöhler [3] Bauschinger

[4] Sir B. Baker [5] Unwirn

جدول ۳

شے اور تنشی استحکام	اقل زور (انتہائی)	اعظم زور (انتہائی)	زور کی انتہائی وسعت	اعظم کی نسبت تنشی استحکام کے ساتھ
کرپ (Krupp) کا دُھرا فولاد، ۲۵ ٹن	− ۱۴٫۰۵	+ ۱۴٫۰۵	۲۸٫۱	٫۲۷
	۰	۲۰٫۵	۲۰٫۵	٫۳۹
	۱۷٫۵	۳۷٫۷۵	۲۰٫۲۵	٫۷۳
پٹواں لوہے کی تختی، ۲۲٫۸ ٹن	− ۷٫۱۵	+ ۷٫۱۵	۱۴٫۳۰	٫۳۱
	۰	۱۳٫۱۰	۱۳٫۱۰	٫۵۷
	۱۱٫۴	۱۹٫۲	۷٫۸	٫۸۴
بسمر فولاد، ۲۸٫۶ ٹن	− ۸٫۵۵	+ ۸٫۵۵	۱۷٫۱۰	٫۳۰
	۰	۱۵٫۷	۱۵٫۷	٫۵۵
	۱۴٫۳	۲۳٫۸	۹٫۵	٫۸۳
فولادی پیڑی، ۳۹ ٹن	− ۹٫۷	+ ۹٫۷	۱۹٫۴	٫۲۵
	−	۱۸٫۴	۱۸٫۴	٫۴۷
	۱۹٫۵	۳۰٫۸۵	۱۱٫۳۹	٫۶۹
نرم فولاد کی جوشارہ تختی، ۲۶٫۶ ٹن	− ۸٫۶۵	+ ۸٫۶۵	۱۷٫۳	٫۳۳
	۰	۱۵٫۸	۱۵٫۸	٫۵۹
	۱۳٫۳	۲۲٫۵۵	۹٫۲۵	٫۸۵

رینلڈز[1] اور سمتھ[2] کی تحقیق — وولر کے کام کی اشاعت کے بعد ایک عرصے تک اس مضمون پر کوئی قابلِ ذکر کام نہیں ہوا

[1] Reynolds [2] Smith

یہاں تک کہ ۱۹۲۰ء میں ڈاکٹر جے - ایچ - سمتھ نے پروفیسر آسبورن رینلڈز کی شرکت میں ایک طویل تحقیق کے نتائج شائع کیے ہے یہ تحقیق ایک متکافی وزن کی جمودی قوتوں کے ذریعے مختلف دھاتوں میں پیدا ہونے والے زور کے تعاکسوں پر تھی (دیکھو دفعہ ۱۸۲) مقابل سادہ زور یعنی تنشی اور فشاری تقریباً مساوی مقداروں کے تھے اور تعاکس کی سرعت جو وولر کے تجربات میں تقریباً ۶۰ تا ۸۰ تغیرات فی منٹ تھی ان تجربات میں ۱۳۰۰ تا ۲۵۰۰ فی منٹ تھی جو سابق کے تمام تجربات سے زیادہ ہے۔

ان تجربات سے یہ ثابت ہوتا معلوم ہوا کہ زور کے تعاکسوں کی صورت میں "زور کی انتہائی وسعت" اور کسی خاص زور پر شکستگی کے لیے تعاکسوں کی مطلوبہ تعداد ان تیز رفتاروں پر بہت کم ہے اور جو رفتاریں اوپر بیان کی گئی ہیں اُن کے درمیان رفتار کے بڑھنے سے گھٹتی ہے۔ لیکن بعد میں جو متعدد تحقیقیں عمل میں آئیں اُن سے معلوم ہوا کہ ہوا کی تپش پر متبادل زور کی انتہائی وسعت ۱۳۰۰ اور ۲۵۰۰ دَور فی منٹ کے درمیان تعدد کے بدلنے سے نہیں بدلتی۔ تاہم رینلڈز اور سمتھ کے تجربات تھکن کی تحقیق کی تاریخ میں ایک اہم اور نمایاں واقعہ ہیں اور ان کی وجہ سے اس مضمون کے ساتھ نئے سرے سے دلچسپی پیدا ہوگئی اور متکافی انجنوں اور دیگر مشینوں کی رفتاروں میں اضافہ ہوجانے کی وجہ سے اور بعد میں ہوا بازی کے انجنوں میں وزن کو کم سے کم رکھنے کی ضرورت کی وجہ سے اس دلچسپی میں اَور اضافہ ہوگیا۔ ۱۸۲ ط

۱۸۴۔ تھکن کے مظہر کے متعلق موجودہ علم ــــــ بیسویں صدی عیسوی میں اِس مضمون پر انگلستان میں اور ممالک متحدہ امریکہ میں بہت تحقیق

---

۷ رائل سوسائٹی کے شعبۂ فلسفہ کی روئداد ۱۹۰۲ء صفحہ ۲۶۵

کی گئی ہے ۔ سب میں زیادہ روشنی ڈالنے والا جو کام ہے اُس کا اکثر حصّہ انگلستان کے سرکاری طبیعی معمل (نیشنل فزیکل لیباریٹری) میں انجام پایا ہے اور حال میں اس معمل میں اور دوسری جگہوں پر جو تحقیقیں کی گئی ہیں اُن کو ایک فوقیت یہ حاصل ہے کہ اُن کو انجینیری کی اتحادی مجلسِ تحقیقات کے ساتھ اشتراک اور ہوائیاتی تحقیقی کمیٹی کے مشورے حاصل تھے ۔ الی نوآ (Illinois) (امریکہ) کی یونیورسٹی کے انجینیری تجربہ گاہ میں بھی امریکہ کی سرکاری تحقیقی کونسل، بحری انجینیری تجربہ گاہ اور ہوائی سروس کے معملوں کے ساتھ اشتراکِ عمل کے ذریعے قابلِ قدر تحقیق عمل میں آئی ہے ۔ برطانوی اور امریکی سرکاری تحقیقی مجلسوں کی مطبوعات کی وجہ سے اِس مضمون کے باقاعدہ علم کا ایک کثیر حصّہ حاصل ہوتا ہے جس کے اہم حصے پر ذیل کی دفعات میں تبصرہ کیا جاتا ہے ۔ زمانۂ موجودہ کی تحقیقات کی ضروریات کے مدِّنظر متعدد موزوں امتحانی مشینیں ایجاد کی گئی ہیں ان کا کچھ حوالہ باب ۱۶ میں دیا گیا ہے ۔

دھاتوں کی تھکن کے پورے مضمون پر مکمل معلومات کے لیے ڈاکٹر گاف[۱] کی کتاب "دھاتوں کی تھکن" ۱۹۲۴ء کا یا پروفیسر مور و کامرز[۲] کی کتاب "دھاتوں کی تھکن" کا مطالعہ کیا جائے ۔ ان دونوں کتابوں میں معلومات کے اصلی ماخذوں کی تفصیلی فہرست دی گئی ہے ۔ تفصیل معلومات کا ایک کثیر حصّہ الی نوآ (Illinois) یونیورسٹی کے انجینیری تجربہ گاہ کے رسالے کے نمبروں ۱۲۴، ۱۳۶، ۱۴۲، ۱۵۲، ۱۵۶، ۱۶۴ اور ۱۶۵ میں ملیگا ۔ اس مضمون کا ۱۹۲۵ء تک کا ایک عمدہ مختصر تبصرہ گاف کے کینٹر[۳] لکچروں (۱۹۲۵ء) میں ملیگا[*]

* رائل سوسائٹی آف آرٹس کا رسالہ ۱۹۲۵ء ۔

[۱] Dr. H. J. Gouph
[۲] Prof: H. F. Moore & J. B. Kommers
[۳] Cantor Lectures

۹۴۔ زور کی انتہائی وسعتیں ـــــ بہت مختلف قسموں کی مشینوں سے بہت مختلف طریقوں پر تکراری زور لگائے گئے اور ان سب سے ایک اہم بات واضح طور پر ظاہر ہوئی اور وہ یہ ہے کہ دیے ہوئے حالات کے تحت زور کی ایک معین انتہائی وسعت موجود ہوتی ہے جس کو بعض اوقات "تھکن کی وسعت" یا "برداشت کی وسعت" کہا جاتا ہے جس کے اندر زور کی تکرار کتنے ہی بار کیوں نہ کی جائے شکستگی واقع نہیں ہوگی۔ ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ نکالنا مشکل ہے کہ زور کی بالکل لاانتہا تکرار پر بھی شکستگی واقع نہیں ہوگی لیکن تجربات میں تکرار ۱۰ کرور تک کی گئی تھی۔ نیز جس طریقے پر اس حد کا تقرب حاصل ہوتا ہے وہ خود اِس حد کے وجود کی ایک زبردست دلیل ہے۔ ایک عمدہ مثال الی نوآ یونیورسٹی کے تجربہ گاہ کے رسالے کے نمبر ۱۴۲ سے پروفیسر مور اور کامرز کے کام سے انتخاب کی گئی ہے۔ ایک فولاد پر جس میں ۹۳ر فی صدی کاربن تھا اور جس پر ایک معین اور قلم بندشدہ حرارتی عمل کیا گیا تھا تکراری زور کا عمل کیا گیا۔ یہ تکراری زور (جو ایک گھومتے ہوئے قطعے پر یکساں خماؤ کا معیار عائد کر کے پیدا کیا گیا تھا) مساوی اور متضاد حدود کے درمیان تھا یعنی ایک خاص تنشی زور سے مساوی حدت کے فشاری زور تک بدلتا تھا۔ اس سے جو نتائج حاصل ہوئے وہ جدول ۱ میں درج ہیں۔

صفحہ ۵

جدول ۱

موڈ اور کامرز کے فولاد نمبر ۹، کاربن ۰۹۳ ور "گوہرش $\frac{1}{5}$" پر متعاکس خماؤ کے امتحان کے ز - ن نتائج

ز یعنی اعظم زور پونڈ فی مربع انچ میں۔ تناؤ اور فشار	ن یعنی دوروں کی تعداد ہزار کی اکائیوں میں
۴۸۸۰۰	۱۵
۴۴۵۰۰	۲۴
۴۲۰۰۰	۳۶
۴۰۰۰۰	۸۰
۳۸۱۰۰	۱۷۷
۳۶۹۰۰	۱۶۲
۳۵۷۰۰	۳۰۱
۳۴۲۰۰	۲۹۰
۳۳۴۰۰	۳۶۱
۳۲۸۰۰	۶۴۳
۳۲۴۰۰	۸۸۱
۳۱۱۰۰	۱۳۰۲
۳۰۸۰۰	۹۶۲
۳۰۸۰۰	۲۲۷۰
۳۰۵۰۰	۱۰۰۱۲۵ ـہ
۳۰۵۰۰	۱۰۳۶۷۷ ـہ
۳۰۳۰۰	۱۰۱۱۹۰ ـہ
۲۹۹۰۰	۱۰۱۱۷۶ ـہ
۲۹۹۰۰	۱۰۲۴۸۳ ـہ

ـہ نمونہ ٹوٹا نہیں

اگر ن کو فصلہ اور سر کو معین مان کر ایک منحنی کھینچا جائے جس کو سر، ن منحنی کہا جاتا ہے جس کا نمونہ شکل ۵۱ میں دکھایا گیا ہے تو منحنی تقریباً ۳۰،۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا متقارب ہوتا ہے۔ اگر سر اور ن کو ترسیم کرنے کی بجائے لوک سر اور لوک ن کو علی الترتیب فصلہ اور معین کے طور پر ترسیم کیا جائے[1] جس کو لوک سر لوک ن منحنی کہا جاتا ہے تو اور زیادہ نمایاں نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ جو شکل ۵۲ میں دکھایا گیا ہے۔

شکل کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ زور کی اُن وسعتوں کے متناظر نقاط جن کے لیے شکستگی واقع ہوئی تقریباً ایک خطِ مستقیم پر واقع ہیں جس کو خارج کیا جائے تو لوک و کے محور کو قطع کریگا۔ لیکن جن نقاط کے متناظر شکستگی واقع نہیں ہوتی اس مستقیم طریق سے بالکل ہٹ کر واقع ہیں۔ ترسیم کرنے کے اس لوکارتمی طریقے میں دو خوبیاں ہیں۔ ایک تو یہ کہ ایسا پیمانہ مل سکتا ہے جو ن کی بڑی قیمتوں اور چھوٹی قیمتوں دونوں کے لیے موزوں ہو دوسرے یہ کہ زور کی انتہائی وسعت کی قیمت کے قریب منحنی کا چپٹا پن زیادہ نمایاں ہوجاتا ہے۔ سٹرائے ہیئر[1] نے سر اور ن کے درمیان ایک قوت نمائی ربط معلوم کرنے کی بھی کوشش کی[2]

یہ امتحان اور قوت برداشت کے متعلق اکثر امتحانات فیرس بھرتوں صفحہ ۸۶
(فولادوں) سے متعلق ہیں، لیکن اب یہ امر عام طور پر مسلم ہے کہ فیرس دھاتوں کے لیے زور کی ایک معین انتہائی وسعت ہے جو نمونے میں زور کے

---

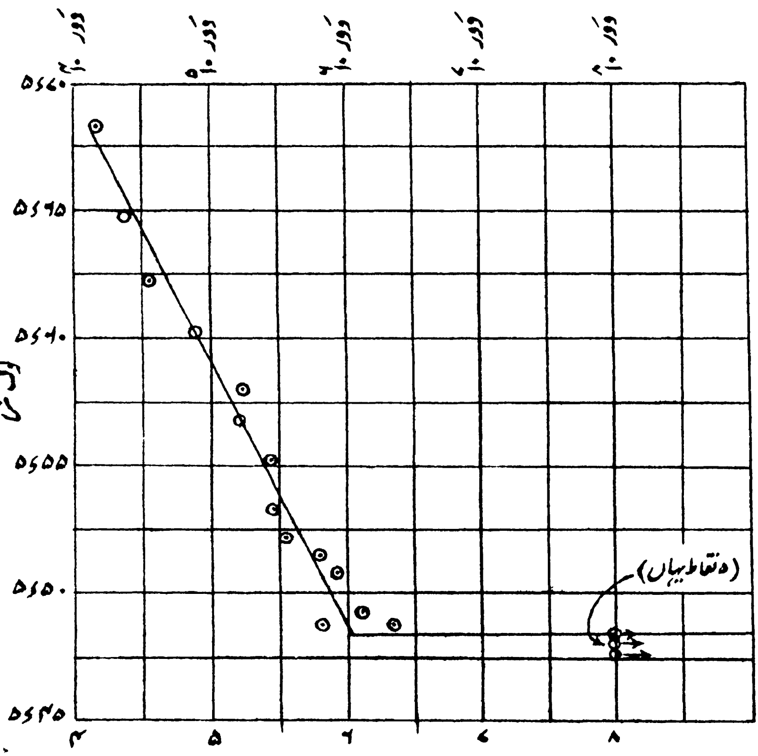
۱ جیسا کہ باسکوئن نے "برداشت کے امتحان کا قوت نمائی قانون" میں تجویز کیا ہے۔ (آزمائش اشیا کی امریکی سوسائٹی کی روئداد جلد ۱۰ سنہ ۱۹۱۰ء)۔

۲ "تبادل زور کے تحت تھکن کی حدود" (روئداد رائل سوسائٹی الف جلد ۹۰ سنہ ۱۹۱۴ء)۔

---

۱ Stroymeyer

ایک تا دو کرور تعاکسوں سے شکستگی واقع نہ ہونے سے معلوم ہو سکتی ہے۔ اور جہاں تک تحقیق کی گئی ہے یہ بات عام طور پر خالص دھاتوں کے متعلق ہے اور اکثر غیر فیرس بھرتوں کے متعلق بھی درست پائی گئی ہے لیکن بعض



شکل ۵۲

غیر فیرس دھاتیں اور بھرتیں کئی کرور تعاکسوں کے بعد بھی ٹوٹی ہیں اگرچہ کہ ان زوروں پر ، ز ، ن منحنی بالکل چپٹا نظر آتا تھا ۔ اس لیے " انتہائی وسعت " کے وجود کے متعلق کوئی عام بیان دیتے وقت احتیاط کرنی چاہیئے ۔

لہ دیکھو الی نوآ یونیورسٹی کے انجینیری تجربات گھر کا رسالہ نمبر ۱۵۲ صفحہ ۵۵۔

صفحہ ۸۷

جدول ۲

متعاکس زوروں کے تحت توتِ برداشت کی حد (تپشیں طبعی' اور تعدد ۵۰۰۰ دَور فی منٹ کے اندر)

نمبر	شے	سکونی تنشی امتحانات کے نتائج: تناسبیت کی حد ٹن فی مربع انچ	مغلوبیت پر کا زور ٹن فی مربع انچ	انتہائی تنشی مضبوطی ٹن فی مربع انچ	تطول فی صدی	سکڑاؤ فی صدی	برداشت کی حدود (گھومتی سلاخ کا امتحان) ٹن فی مربع انچ	برداشت کی حد / انتہائی تنشی مضبوطی
۱	آرمکو لوہا (تپا نرمایا)	۵٫۲	۶٫۸	۱۸٫۷	۵۰	۸۰	±۱۲٫۶	٫۶۷
۲	۰٫۲۴ فی صدی کاربن کا فولاد (تپا نرمایا)	۱۶٫۸	۱۷٫۱	۲۷٫۰	۳۹	۶۴	±۱۱٫۴	٫۴۲
۳	۱٫۲۰ فی صدی کاربن کا فولاد (تپا نرمایا)	۲۶٫۲	۲۷٫۱	۵۲٫۲	۸	۱۲	±۲۲٫۳	٫۴۳
۴	۳ فی صدی "نِکل کرومیم" فولاد (تپا نرمایا)	۱۶٫۰	۳۸٫۲	۶۵٫۵	۲۳	۴۵	±۳۱٫۰	٫۴۷
۵	ڈھلا لوہا	—	—	۱۴٫۱ (فشاری ۴۹٫۶)	—	—	۴٫۷	٫۳۳

کیمیائی تجزیہ — فی صدوں میں

نمبر ۱	کاربن ۰٫۰۱۲	سلیکن ۰٫۰۱۷	مینگنیز ۰٫۰۷	گندھک ۰٫۰۱۷	فاسفورس ۰٫۰۱۴	(باقی لوہا)
نمبر ۲	" ۰٫۲۴	" ۰٫۰۰۷	" ٫۴۵	" ۰٫۰۵۱	" ۰٫۰۰۹	"
نمبر ۳	" ۱٫۲	" ٫۱۹	" ٫۲۵	" ۰٫۰۲۱	" ۰٫۰۲۱	"
نمبر ۴	" ۰٫۱۹	" ٫۳۲	" ٫۴۵	" ۰٫۰۲۸	" ۰٫۰۲۱	نکل ۳٫۰ کرومیم ٫۴۸ (باقی لوہا)
نمبر ۵	" ۳٫۴۴	" ۱٫۱۰	" ٫۶۲	" ۰٫۰۹۳	" ۰٫۵۱	(۲٫۷۲ کاربن گریفائیٹ تھا) (باقی لوہا)

صفحہ
قوتِ برداشت کی حدود یا زور کی انتہائی وسعتوں کی چند قیمتیں بطور نمونہ اور لوہوں اور فولادوں کی پانچ اہم قسموں کی مضبوطی کے متعلق اہم خواص جدول ۲ میں دکھائے گئے ہیں - ان میں سے دو (یعنی نمبر ۳ اور ۵) الی نوآ یونیورسٹی کے انجینیری تجربہ گاہ کے رسالے کے نمبروں ۱۴۲ اور ۱۴۴ سے لیے گئے ہیں - باقی سرکاری طبیعی معمل (انگلستان) کی تحقیقات کے نتائج سے ماخوذ ہیں اور گاف کی کتاب "دھاتوں کی تھکن" کے ضمیمے میں دھاتوں کے میکانی خواص کے متعلق جو عمدہ جدولیں دی گئی ہیں اُن سے لیے گئے ہیں - گاف کی اس کتاب میں زیادہ وسیع معلومات مل سکتی ہیں۔

جدول ۲ کی برداشت کی حدود اُن مساوی اور مخالف تنشی اور فشاری زوروں کے لیے ہیں جو ایک اسطوانی نمونے کے تناؤ سے پیدا ہوتے ہیں۔ جب مساوی اور مخالف تناؤ اور فشار محوری قوتوں کے طور پر لگائے جائیں جن سے کم از کم فرضی طور پر نمونوں کی پوری تراشوں پر یکساں زور واقع ہوں تو برداشت کی حدود کسی قدر پست حاصل ہوتی ہیں - مثلاً شے نمبر ۱ میں برداشت کی حد راست زور کے لیے ± ۹٫۹ ٹن فی مربع انچ یعنی جدول ۲ میں دی ہوئی قیمت کی صرف ۷۹ فی صدی پائی گئی - برداشت کی ظاہری حدود کے اِن اختلافات کی کوئی یقینی توجیہ موجود نہیں بعض لوگ اس کی ایک ممکن وجہ یہ بتاتے ہیں کہ متبادل دباؤ اور کھنچاؤ برداشت کرنے والے نمونوں میں بوجہ شاید ٹھیک ٹھیک محوری نہ رہتا ہو اور اس طرح زور کی تقسیم غیر یکساں ہو جاتی ہو (دیکھو دفعہ ۹۸) - اور ایک ممکن توجیہ اس واقعے سے بھی کی جاتی ہے جو تجربے سے بھی ثابت ہے کہ اگر ایک دھات پر برداشت کی حدود کے اندر زور کی تکرار کی جائے تو اس کی برداشت کی حد بڑھ جاتی ہے جس کی وجہ سے ایک گھومتے ہوئے شہتیر کا اندرونی حصہ جہاں زور سطح سے کم ہے (دیکھو باب ۵) مضبوط تر ہو جائیگا - لیکن چونکہ یہ فرق پست نقطۂ مغلوبیت کی مد نرم" اشیا میں زیادہ ہوتا ہے اور ایسی اشیا میں بہت کم ہوتا ہے جو "مغلوب" نہیں ہوتیں اور اس طرح اپنے آپ کو

جھٹکارا نہیں دے سکتیں اس لیے غالباً توجیہ در اصل یہ ہے کہ بعض اشیا میں گھومتے شہتیروں کے جو امتحان کیے جاتے ہیں اُن میں انتہائی زور اتنا ہوتا ہے کہ زور کو نئے سرے سے تقسیم کرے اور اس طرح اعظم زور در اصل اتنا نہیں ہوتا جتنا کہ خالص لچکدار خماؤ کے نظریے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس نکتے کے متعلق گاف و ٹیپ سل[1] کے مضمون "تھکن کے چند تقابلی امتحانات" کا حوالہ دیا جاتا ہے جو ہوائی تحقیقی کمیٹی کی رپورٹوں اور یادداشتوں کے سلسلے کے نمبر ۹۲، میں اپریل ۱۹۲۶ء کو شایع ہوا ہے۔

برداشت کا زور کا نظریہ ــــ سکونی زوروں کی مزاحمت سے جو لچکدار مضبوطی معلوم کی جاتی ہے (دفعہ ۲۵) اس کی طرح یہ معلوم کرنا بھی دلچسپی سے خالی نہیں کہ زور (یا فساد) کی کس حالت سے یہ پتہ چلیگا کہ کوئی جسم زور کے دوری تغیرات کے تحت بے انتہا برداشت رکھتا ہے یا ناقص ہوتا جائیگا اور آخرکار ٹوٹ جائیگا۔ اشیا کے نمونوں میں خماؤ کے ذریعے راست زور کے تعاکس اور مروڑ کے ذریعے جزی زور کے تعاکس پیدا کرکے یہ دکھایا گیا ہے کہ مختلف دھاتوں میں جزی زور کی برداشت کی حد اور راست (بذریعہ خماؤ) زور کی برداشت کی حد کے درمیان کوئی مستقل نسبت نہیں۔ ایک بہت متمدد نرم فولاد کے لیے میسن[2] نے[1] نسبت ۰٫۵ پائی جو اس کے متناظر ہے کہ ناکارگی جزی زور کی وجہ سے واقع ہو کیونکہ سادہ راست زور سے ایک جزی زور اس کے نصف کے مساوی پیدا ہوتا ہے (دفعہ ۷)، لیکن دوسری دھاتوں میں دوسری (اس سے بڑی) نسبتیں حاصل ہوئیں اور اس طرح متمدد دھاتوں کے لیے بھی کوئی عام نتیجہ اخذ نہیں کیا جا سکتا۔

---

[1] "متعاکس زور کے تجربات" روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانکل انجینیرز فروری ۱۹۱۷ء۔

---

[1] Gough and Tapsell [2] Mason

انتہائی وسعتوں کی سرعت کے ساتھ دریافت

صفحہ ۱۷۱ ڈاکٹر اسمتھ نے [۱] نمونوں میں ایک مستقل تنشی "اوسط" یا "برقرار" زور کے اوپر متعاکس زور تیزی کے ساتھ عائد کیے یعنی اس طرح کوئی مطلوبہ اعظم تناؤ اور اس کے ساتھ زور کی کوئی مطلوبہ وسعت حاصل کی۔ انہوں نے اپنے نمونوں کو ایک امتداد پیما لگایا اور زور فساد کے ربط میں لچک کی حدیں اور مغلوبیت کے نقطے اسی طرح معلوم کیے جس طرح سکونی زوروں کی صورت میں کیے جاتے ہیں۔ زور کی مختلف وسعتوں کے لیے (جن کے ساتھ مختلف اوسط زور شامل تھے) نقطۂ مغلوبیت کا زور معلوم کرکے انہوں نے "مغلوبیت کی وسعتیں" مرتسم کی ہیں، یعنی متغیر زور کی وہ اعظم وسعتیں جن کے اندر مغلوبیت واقع نہیں ہوتی۔ یہ مغلوبیت کی وسعتیں اوسط زور کی مختلف قیمتوں کے لیے متعدد فرس دھاتوں میں زور کی برداشت کی "وولر کی وسعت" کے مطابق پائی گئیں، حالانکہ وولر کی وسعت اس طرح معلوم کی جاتی ہے کہ ۱۰ لاکھ مکمل اُتار چڑھاؤ عائد کیے جائیں اور نمونہ نہ ٹوٹے۔ اس مطابقت کے اظہار کے لیے جو نقشے بنائے گئے ہیں اُن کو دیکھنا ہو تو ڈاکٹر اسمتھ کے اصلی پرچے کا مطالعہ کیا جائے۔ اگر ان "مغلوبیت کی وسعتوں" اور زور کے اُتار چڑھاؤ کی مستقل برداشت کی وسعتوں کی مطابقت مسلم ہو جائے تو وولر کے امتحان کے لیے ایک سہل طریقہ ہاتھ آئیگا ورنہ اُس میں اتنا وقت صرف ہوتا ہے کہ اکثر اوقات اس سے درگزر کرنا پڑتا ہے۔

اسٹرائے میئر نے [۲] ایک متبادل مروڑ کی مشین پر کام کرکے

---

[۱] "دھاتوں کی تھکن پر چند تجربات" لوہے اور فولاد کے انسٹی ٹیوٹ کا رسالہ (نمبر ۲ سنہ ۱۹۱۰ء)۔

[۲] "تھکن کی حدود" روئداد رائل سوسائٹی و جلد ۹۰ سنہ ۱۹۱۴ء۔

---

[۱] Wohler [۲] Stroymeyer

حرارتی پیمائش کے ذریعے لچک کے خاتمے کو تقریباً نقطۂ مغلوبیت کے متناظر معلوم کیا اور حرارتی پیمائش کے ذریعے اس کی دریافت ممکن ہے کیونکہ اس حالت میں کسی شے کے اندر جو کام کیا جاتا ہے اُس سے حرارت نمودار ہوتی ہے۔ بعد میں گاف نے[1] حرارہ پیمائی تفتیش کے ذرائع کو اور ترقی دی اور متبادل مروڑ اور متبادل خماؤ کے امتحانوں میں " فساد " کا طریقہ پیش کیا۔ فساد کے طریقے کی ٹھیک تفصیل کسی قدر پیچیدہ ہے لیکن بہت سی (خاص کر فیرس) دھاتوں کے لیے اس سے تھکن کی جو وسعتیں حاصل ہوتی ہیں وہ اسمتھ کی " مغلوبیت کی وسعتوں " کے مطابق نہیں لیکن کثیر تعداد کے تکراری دَوروں سے جو برداشت کی وسعتیں حاصل ہوتی ہیں اُن کے بہت قریب ہیں۔ دوسرے تجربہ کرنے والوں نے، انگلستان اور امریکہ دونوں جگہ " فساد " کا اور حرارہ پیمائی دونوں طریقے اختیار کیے ہیں اور اس طرح جو وسعتیں حاصل ہوئیں اُن میں اور برداشت کی وسعتوں میں خاصی مطابقت پائی گئی خاص کر فیرس (Ferrous) دھاتوں میں۔ لیکن خاص کر غیر فیرس اشیا میں ان سرعت کے ساتھ معلوم کی ہوئی وسعتوں اور حقیقی برداشت کے امتحانات سے معلوم کی ہوئی وسعتوں کے درمیان نمایاں اختلافات قلم بند کیے گئے ہیں[2] اس لیے ان طریقوں سے جو نتائج حاصل ہوں اُن کو برداشت کی وسعتیں سمجھنے میں اور خاص کر غیر فیرس دھاتوں میں ایسا سمجھنے میں احتیاط سے کام لینا چاہیے۔ صفحہ ۹۰

[1] دیکھو " متعاکس مروڑ کے تحت دھاتوں کی تھکن پر چند تجربات " (ہوائی تحقیقی کمیٹی کی رپورٹیں اور یادداشتیں نمبر ۷۴۳، ۱۹۲۱ء) یا گاف کی " دھاتوں کی تھکن " باب ۱۰۔ نیز " تھکن کی آزمائش کے طریقوں کی ترقی " رسالۂ انجینیر ۱۲ اگست ۱۹۲۱ء و رسالہ انجینیرنگ ۶ جولائی ۱۹۲۳ء۔

[2] دیکھو الی نوآ یونیورسٹی کی انجینیری تحقیقات گاہ کا رسالہ نمبر ۱۵۲ از مور (Moore) و جیسپر (Jesper) صفحہ ۶۲۔

۵۰ - برداشت اور تھکن کی وسعتوں پر اثر ڈالنے والے امور

(۱) تعدد کا اثر۔ رینلڈز[1] اور اسمتھ[2] کے تجربات سے یہ معلوم ہوتا نظر آیا کہ ہوا کی تپشوں پر معمولی فولادوں میں برداشت کی (تعاکس میں) انتہائی وسعت (جو صرف ۱۰ لاکھ دوروں کے ذریعے معلوم کی جائے) ۱۹۰۰ تا ۲۴۰۰ دور فی منٹ کی رفتار پر ۱۳۰۰ تا ۱۶۰۰ دور فی منٹ کے مقابلے میں خاصی کم ہے۔ لیکن دوسروں نے بعد میں جو مختلف طریقوں پر تحقیق کی[2] اس سے نہ صرف اس کی تصدیق نہیں ہوئی بلکہ یہ معلوم ہوا کہ تھکن کی انتہائی وسعت میں تعداد کے فرق سے ۲۰۰ سے ۵۰۰۰ دور فی منٹ تک کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

ہاپکنسن[3] نے ۷۰۰۰ دور فی منٹ کے جو اعلیٰ تعدد کے تجربات کیے اُن سے اس سے بڑی انتہائی وسعت حاصل ہوئی جو اسی شے پر دوسری قسم کی مشینوں میں ۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰ دور فی منٹ پر کیے گئے۔ یہ شہادت پورے طور پر فیصلہ کن نہیں معلوم ہوئی لیکن جنکن (Jenkin) نے[4] ابھی آرمکو لوہے،

---

[1] رائل سوسائٹی کے شعبہ فلسفہ کی روئداد سنہ ۱۹۰۲ء، صفحہ ۲۶۵۔

[2] خاص طور پر دیکھو فولاد کے متعلق مور اور جیسپر کا کام (الی نوآئیونیورسٹی کی انجنیری تحقیقات گاہ کا رسالہ نمبر ۱۳۶ صفحہ ۵۸) اور ھے (Haigh) کا کام پیتلوں کی تھکن کے متعلق (دھاتوں کے انسٹی ٹیوٹ کا رسالہ نمبر ۲ جلد ۱۸ سنہ ۱۹۱۷ء)

[3] "ایک تیز رفتار تھکن کا ممتحن اور اعلیٰ تعدد کے متعاکس زور کے تحت دھاتوں کی برداشت" (روئداد رائل سوسائٹی ا جلد ۸۶ جنوری سنہ ۱۹۱۲ء) - نیز ایڈان کے مضمون پر بحث۔

[4] ہوائی تحقیقی کمیٹی کی رپورٹ اور یادداشتیں نمبر ۹۸۲ - "اعلیٰ تعدد کے تھکن کے امتحانات" از پروفیسر جنکن جو روئداد رائل سوسائٹی ا جلد ۱۰۹ مئی سنہ ۱۹۲۵ء سے لے کر علٰحدہ چھاپا گیا۔

[1] Reynolds [2] Smith

نرم فولاد اور تانبے میں اعلیٰ تعدد پر زور کی انتہائی وسعت میں اضافہ پایا ہے۔ اُس نے ایک چھوٹی سلاخ پر کام کیا جو برق کے ذریعے عرضی ارتعاشش میں رکھی گئی اور اُس نے ان تینوں دھاتوں میں ۶۰۰۰۰ دَور فی منٹ پر زور کی انتہائی وسعت کو ۳۰۰۰ دَور فی منٹ پر کی وسعت کے مقابلے میں ۱۰ فی صدی زیادہ پایا۔

اس مضمون پر اب جو کچھ معلومات میسر ہیں اُس کی اکثریت سے یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے کہ ہوا کی تپشوں پر (تعاکس کی) تھکن کی وسعت میں تعدد کی تبدیلی سے کوئی قابل لحاظ تبدیلی نہیں ہوتی اور تعاکس کی اعلیٰ رفتار پر تھکن کی وسعت میں کسی قدر اضافہ ہونا پایا جاتا ہے۔ اس کے متعلق اتنی کافی شہادت نہیں کہ یقین کے ساتھ کہا جا سکے کہ اگر زور ایک اعظم اور اقل تناؤ یا ایک اعظم اور صفر تناؤ کے درمیان اُترتا چڑھتا رہے تو بھی تعدد کا تھکن کی وسعت پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔ یہ بھی یقینی معلوم ہوتا ہے کہ اعلیٰ تپشوں پر تعدد کا تھکن کی وسعتوں پر بہت اثر ہوتا ہے۔

(ب) امتحان کی تپش کا اثر —— ہوا کی معمولی تپش سے زیادہ حرارت کا برداشت کے اعداد و شمار پر اہم اثر ہوتا ہے۔ مطبوعہ تحقیقوں سے (جن میں پہلی تحقیق لی (Lea) کی ہے[۱] جو ۱۹۲۴ء میں طبع ہوئی) پتہ چلتا ہے کہ بہت سے فولادوں کے لیے مساوی اور مقابل زوروں کی برداشت کی حد ہوا کی معمولی تپشوں سے ۳۰۰° ھ تا ۴۰۰° ھ تک کسی قدر بڑھتی ہے یا تقریباً مستقل رہتی ہے اور اس کے بعد تپش کے بڑھنے سے گھٹتی ہے۔ لی کے نتائج کے جیسے نتائج مور و نمبر ۱۹۱

[۱] "فولاد پر تکراری زور کی وسعت پر اعلیٰ تپش کا اثر" برٹش ایسوسی ایشن ۱۹۲۴ء۔ نیز رسالہ انجینیرنگ ۳ و ۱۰ اکتوبر ۱۹۲۴ء۔ نیز "دھاتوں پر تپش کا اثر" روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانکل انجینیرز دسمبر ۱۹۲۴ء۔

جلیسپر نے[1] مختلف اوصاف کے فولادوں کے لیے حاصل کیے۔
لیکن یہ بات قابلِ لحاظ ہے کہ (تعاکس کی) برداشت کی حد کا گھٹاؤ اتنی سرعت کے ساتھ واقع نہیں جتنا کہ "انتہائی رینگتے زور" کا (دفعہ ۳۸) یعنی دیر تک قائم رہنے والے بوجھ کے تحت کے تناشی زور کا گھٹاؤ ہوتا ہے۔ چنانچہ تقریباً ۴۰۰° تا ۴۰۰° م کے اوپر تعاکس کی انتہائی وسعت کا نصف انتہائی رینگتے زور سے زیادہ ہوتا ہے۔ پروفیسر لی کا خیال ہے کہ اعلیٰ تپشوں پر ایک لزج قسم کی مزاحمت ایک اہمیت اختیار کرلیتی ہے جو ہوا کی تپشوں پر اتنی اہم نہیں ہوتی۔
"اعلیٰ تپشوں پر اشیا کے خواص" کے متعلق سرکاری طبیعی معمل (انگلستان) میں جو جامع تحقیقات شروع کی گئی ہے اُس میں اعلیٰ تپشوں پر تھکن کے زور کی انتہائی وسعتوں کی دریافت بھی شامل ہے اور پہلی دو رپورٹوں میں[2] جو ٹیپ سل اور کِلن شا نے لکھی ہیں آرمکو (Armco) لوہے کے (جو تقریباً خالص لوہا ہوتا ہے) اور سادہ کاربنی فولادوں کے متعلق جن میں ۱۷ء، ۴۲ء اور ۵۱ء فی صدی کاربن ہو دلچسپ اعداد موجود ہیں - ذیل کی جدول انہیں رپورٹوں سے ایک ۱۷ء فی صدی کاربن کے فولاد کے لیے لی گئی ہے :-

[1] الی نوآ یونیورسٹی کے انجینیری تحقیقات خانہ کا رسالہ نمبر ۱۵۲۔
[2] سائنٹفک اور صنعتی تحقیقات کے سررشتہ کی انجینیری تحقیقات کی خصوصی رپورٹیں نمبر ۱ اور ۲ ۱۹۲۷ء۔
[3] Tapsell and clenshaw

امتحان کی تپش	انتہائی تھکن کی وسعت اندازے کے بموجب ٹن فی مربع انچ	انتہائی رینگتے زور کا اندازہ ٹن فی مربع انچ	انتہائی تنشی زور (لداؤ کی معمولی شرح) ٹن فی مربع انچ
ہوا	±۱۲٫۵	-	۲۸٫۵
۱۰۰	±۱۲٫۳	-	۳۰٫۵
۲۰۰	±۱۲٫۳	-	۳۷٫۶
۲۵۰	-	۳۴٫۰	۳۷٫۳ (۲۵۵° مرب)
۳۰۰	±۱۶٫۰	۲۶٫۰	۳۴٫۳
۳۵۰	-	۲۰٫۰	۳۲٫۷
۴۰۰	±۱۶٫۸	۱۴٫۵	۲۷٫۸
۴۵۰	-	۹٫۵	۲۵٫۵
۵۰۰	±۱۱٫۷	۴ تا ۵	۱۹٫۴
۶۰۰	±۶٫۸	-	۹٫۹ (۶۱۵° مرب)

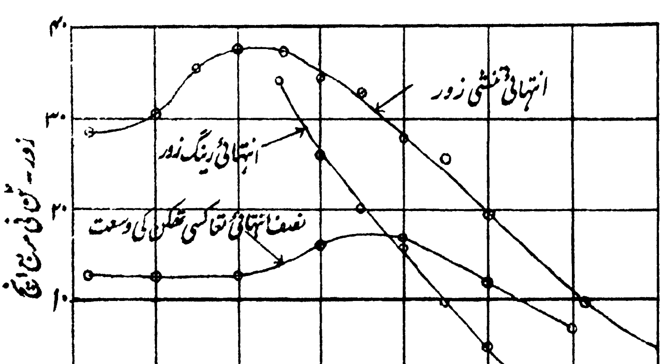
اس جدول کے اعداد کو شکل ۵۲ ۱ میں ترمیم کیا گیا ہے۔ دیکھو ۵۰۰° م پر "متعاکس" زور کی تھکن کی انتہائی وسعت انتہائی رینگتے زور کے یعنی اُس سکونی تناؤ کے دُگنے سے زیادہ ہے جو کہ زیر بحث شے رینگنے اور آخرکار ٹوٹ جانے کے بغیر برداشت کرے۔ نیز ۵۰۰° م پر "تکراری" تھکن کی وسعت تقریباً ۱۷ ٹن فی مربع انچ پائی گئی (اقل زور صفر، اعظم ۱۷، اوسط زور ۸٫۵ ٹن فی مربع انچ) یعنی تکرار کے دوران کا اوسط زور بھی انتہائی رینگتے زور سے بہت زیادہ تھا۔[1]

(ج) ٹھنڈے کام اور تپانرمانے کا اثر — سکونی امتحانوں پر

[1] اس تحقیق کے متعلق مزید اطلاعات کے لیے دیکھو "نرم فولاد کی تھکن کی مزاحمت کے خواص" از ٹیپ سل (لوہے اور فولاد کے انسٹی ٹیوٹ کا رسالہ مئی ۱۹۲۸ء)۔

صفحہ ۹۲

ٹھنڈے کام کا اثر دفعہ ۳۲ میں اور تپا نرمانے کا اثر دفعہ ۴۴ میں دکھایا گیا تھا - فولاد کی برداشت کی حدود پر مثلاً سکونی انتہائی تنشی مضبوطی پر یہ اثر ہوتا ہے کہ ٹھنڈے کام سے اضافہ ہوتا ہے اور تپا نرمانے سے کمی ہوتی ہے - لیکن یہ اثرات اتنے نمایاں نہیں ہوتے جتنا کہ زور اور فساد کی متناسبیت کی حد پر اثر ہوتا ہے - یہ اکثر دیکھا گیا ہے کہ تعاکس کی برداشت کی حد اور انتہائی تنشی استحکام کے درمیان جو نسبت ہوتی ہے اُس میں بہت سے (بیٹواں) فولادوں میں یا ایک ہی فولاد کی مختلف حالتوں میں جو حرارتی عمل یا ٹھنڈے کام سے حاصل ہوں کچھ بہت زیادہ فرق نہیں ہوتا - تعاکس کی وسعت کے نصف اور انتہائی تنشی استحکام کی نسبت عموماً ۰٫۴۰ سے ۰٫۵۵ تک ہوتی ہے اور اس کی اوسط قیمت تقریباً ۰٫۵۰ ہوتی ہے - ڈھلے فولاد کے لیے اوسط قیمت تقریباً ۰٫۴۲ اور ڈھلے لوہے کے لیے تقریباً ۰٫۳۵ ہوتی ہے - غیر فیرس دھاتوں میں ٹھنڈے کام سے بعض صورتوں میں تعاکس کی برداشت کی وسعت اور انتہائی تنشی زور کی نسبت تقریباً غیر متبدل رہتی ہے -



شکل ۵۲ الف

(د) کم باری کا اثر ——— بہت سے تجربہ کرنے والوں نے یہ بات محسوس کی ہے کہ اگر برداشت کی وسعت سے کسی قدر پست زور دَوری طور پر لگایا جائے اور پھر اس کو بتدریج بڑھاکر حد پر لایا جائے تو برداشت کی وسعت کسی قدر بڑھ جاتی ہے اور زور عام حد سے کسی قدر زیادہ بھی کیا جاسکتا ہے۔ اس کو سمجھا جاسکتا ہے کہ "ٹھنڈے کام" کے ذریعے برداشت کی وسعت کو بڑھانے کی ایک خاص صورت ہے۔ اور اس کا اطلاق کاربنی فولادوں اور ڈھلے لوہے دونوں پر ہوتا ہے۔

(ر) نمونے کی شکل وصورت کا اثر ——— سکونی تنشی امتحانوں میں امتحانی ٹکڑوں کی شکل کا جو اثر ہوتا ہے اُس کا دفعہ ۳۰ میں ذکر کیا گیا ہے۔ تراش کی اچانک تبدیلی کا اثر تھکن کے امتحانی ٹکڑے میں یہ ہوتا ہے کہ اقل تراش پر جو برداشت کی حدود محسوب کی جائیں وہ بہت گھٹ جاتی ہیں۔ اسٹینٹن[1] و بیراسٹو[2] i اور مور[3] و کامرز[4] ii کے حاصل کردہ نتائج سے معلوم ہوتا ہے اگر نمونے میں تراش کی تبدیلی اچانک اور دھاردار کنارے کے ساتھ ہو تو جائز زور کا گھٹاؤ تقریباً ۵۰ فی صدی ہوتا ہے، اور اگر تراش کی تبدیلی معمولی پیچ کی چوڑیوں کی شکل میں ہو تو تقریباً ۳۰ فی صدی ہوتا ہے۔ کسی عدم تسلسل مثلاً چھوٹے سوراخوں وغیرہ کا اثر اُس سے بہت کم ہوتا ہے جو کہ متجانس متساوی السموت شے کے لیے محسوب کیا جائے اور ڈھلے لوہے میں فولاد کے مقابلے میں تناسباً کم ہوتا ہے۔ گاف (Gough)[iii] نے دُھرے میں چابی کے عام سوراخوں کی صفحہ ۹۳

i "لوہے اور فولاد کی متعاکس زور کی مزاحمت پر" (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز سنہ ۱۹۰۶ء جلد ۱۶۶)۔

ii الی نوآ یونیورسٹی کے انجینیری تجربات خانہ کا رسالہ نمبر ۱۲۴۔

iii "دھاتوں کی تھکن" سنہ ۱۹۲۴ء صفحہ ۹۴۔

[1] Stanton [2] Bairstow [3] Moore [4] Kommers

وجہ سے پیچیدگی کی انتہائی وسعت کی کمی کی پیمائش کی ہے اور یہ کمی اُس نے ۰.۰۲ فی صدی کاربن کے فولاد میں ۱۲ فی صدی اور ۰.۶۵ فی صدی کاربن کے فولاد میں ۲۰ فی صدی پائی۔

(س) سطح کی تکمیل کا اثر۔۔۔ سوہان کی خراشوں اور دیگر اوزاروں کے نشانات سے تعاکس کی تھکن کی حد پر کیا اثر ہوتا ہے اس کی تحقیق مور و کامرز[i] اور ٹامس[ii] نے کی ہے۔ اُنہوں نے معلوم کیا کہ کاربنی فولادوں میں کھردری تکمیل یا موٹے سوہان کی خراشوں سے ۱۲ سے ۲۰ فی صدی تک کی کمی ہوسکتی ہے۔ کمانیوں پر تجربے کرکے لی[لہ] اور ہےؤڈ[ہے][iii] نے معلوم کیا کہ بہت پست زوروں پر تھکن سے ناکارگی پیدا ہوگئی جس کی وجہ صریحاً سطح کے نقائص تھے جو غالباً تارکشی کی وجہ سے پیدا ہوگئے تھے۔

(ص) تاکُل۔۔۔ "پیتلوں کی تھکن" پر ایک تحقیق کے دوران میں پروفیسر ہے (Haigh)[iiii] نے بعض اُن تاکُل کے عاملوں کا اثر معلوم کیا جن کے ذریعے امتحانی ٹکڑے تھکن کے امتحانوں کے دَوران میں تر رکھے جاتے تھے۔ یہ پایا گیا کہ بعض کے اثر سے پیتلوں کی برداشت گھٹ جاتی ہے اور بعض کے اثر سے نہیں گھٹتی۔ ہے نے یہ بھی لکھا ہے کہ اس کا مشاہدہ ہے کہ نرم فولاد میں

i آئی اوا یونیورسٹی کے انجینیری تجربات خانہ کا رسالہ نمبر ۱۲۴۔
ii "فولاد کی تھکن مضبوطی پر کھرچوں اور کارخانے کے مختلف عملوں کا اثر" از ٹامس (رسالہ انجینیرنگ ۱۲، ۱۹ اکتوبر ۱۹۲۳ء)۔
iii روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانکل انجینیرز اپریل ۱۹۱۷ء صفحات ۴۲۶ و ۴۴۷۔
iiii دھاتوں کے انسٹی ٹیوٹ کا رسالہ نمبر ۲ ۱۹۱۷ء جلد ۱۸۔

لہ Lea ہے Heywood

ترشوں، نوشادر، اور بحری پانی کے اثر سے تھکن جلد تر واقع ہوجاتی ہے اور اگرچہ امتحان سے پہلے تاکل کی وجہ سے برداشت کم ہوگئی تھی لیکن امتحان کے دوران میں امتحانی ٹکڑے کی سطح کو اکال متعاملوں سے مسلسل تری پہنچانے کی وجہ سے اور زیادہ گھٹ گئی - تاکل سے پیدا ہونے والی تھکن کے متعلق بعد میں مزید تحقیق امریکہ میں میک ایڈم[1] نے کی - اس نے کاربنی اور خصوصی فولادوں پر (جن میں بے داغ فولاد بھی شامل ہیں) اور غیر فیرس (Nonferrous) دھاتوں پر خالص پانی اور کھاری پانی کی رو کے اثر کی تحقیق کی - اس کی تحقیق سے ھے کے اکتشاف کی تصدیق اور توسیع ہوگئی اور بہت سے ایسے نکات کی توجیہ ہوگئی جو ہا-ن ترسیم کے متعلق توجیہ طلب تھے اور مختلف دھاتوں پر تاکلی اثرات کا فرق واضح ہوگیا - ان اثرات کے فرق کی توجیہیں اب تک محض قیاسی ہیں -

۵۱ - اتار چڑھاؤ کی مختلف وسعتوں پر انتہائی زور -

اگر وولر کے تجربات کی طرح اعظم زور اور اقل زور کی نسبت کو بہت متغیر کیا جائے تو ان مختلف وسعتوں کے متناظر اعظم زور کی جو انتہائی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ان کو ترسیمی طور پر یا جبری طور پر مختلف طریقوں پر تعبیر کرسکتے ہیں - یہ جو تین مقداریں ہیں یعنی اعظم زور کی حدت صفحہ ۹۲
(مثلاً تنشی) زع، اقل زور کی حدت (جو فشاری ہو تو منفی لی جائیگی) زق، اور زور کی وسعت س، ان میں ظاہر ہے کہ حسب ذیل ربط ہوگا:

[1] "زور فساد کے دور کا ربط اور دھاتوں کی تاکل تھکن"۔ روئداد امریکی سوسائٹی امتحان اشیا جلد ۲۶ حصہ ۲ صفحہ ۴۲۲ سنہ ۱۹۲۶ء - نیز "دھاتوں کی تاکل تھکن وغیرہ" روئداد امریکی سوسائٹی فولاد Treating مارچ سنہ ۱۹۲۷ء جلد ۱۱ نمبر ۳ - نیز "غیر آہنی دھاتوں کی تاکل تھکن"، روئداد امریکی سوسائٹی امتحان اشیاء -

[1] Mc Adam

سہ = زع - زق

ان مقداروں کے درمیان جو ربط زور کے عملاً لاانتہا اتار چڑھاؤ کے لیے ہوگا اُس کو باؤشنگر کے ایک امتحان کے نتائج سے دکھایا جاسکتا ہے۔ یہ امتحان نرم فولاد کی جو شارہ تختی پر کیا گیا تھا۔ اس کے نتائج جو جدول ۳ دفعہ ۴۷ میں دیے گئے ہیں حسب ذیل ہیں :۔

	زع	زق	سہ
(ا)	۲۶٫۶	۲۶٫۶	۰
(ب)	۲۲٫۵۵	۱۳٫۳	۹٫۲۵
(ج)	۱۵٫۸	۰	۱۵٫۸
(د)	۸٫۶۵ +	۸٫۶۵ -	۱۷٫۳

شکل ۳-۵۴ میں زع اور سہ کی ان قیمتوں کو معین اور زق کو فصلہ مان کر ترسیم کیا گیا ہے۔ مگر غالباً اِن تین مقداروں کا ربط اشکال ۳-۵۴ اور ۳-۵۵ سے بہتر طور پر واضح ہوتا ہے۔ ان میں زع اور زق دونوں انتصاباً ناپے گئے ہیں اور وسعت سہ ان دونوں منحنیوں کے انتصابی فاصلے کے مساوی ہے۔ مخروجہ حصّے دع اور دَعَ محض قیاسی ہیں لیکن بعد میں جو تحقیقیں کی گئیں اُن سے معلوم ہوتا ہے کہ دونوں شکلوں کے حصہ دد کے قریب وسعت تقریباً مستقل ہے یعنی دع اور دَعَ تقریباً متوازی ہیں۔ ظاہر ہے کہ فشاری زور کے بڑھنے سے وسعت کو پھر گھٹنا چاہیے لیکن اس کے متعلق تجرباتی شہادت موجود نہیں کیونکہ منحنی کا یہ حصّہ عملاً بالکل غیر اہم ہے۔ سایہ دار رقبہ ایسا ہے کہ اگر اعظم زور اور اقل زور دونوں اس کے اندر واقع ہوں تو شئے زور کی لاانتہا تکرار یا تعاکس

(جیسی کہ صورت ہو) برداشت کرسکیگی اور ٹوٹیگی نہیں ۔ وولر[1]، باؤشنگر[2] اسپین گن برگ[3] اور دوسروں کے تجربات سے زع اور سہ کی جو قیمتیں حاصل ہوئیں اُن کے درمیان کے ربط کو بیان کرنے کے لیے بہت سے آزمایشی ضابطے پیش کیے گئے ہیں ۔ ان میں سب سے زیادہ مشہور گرہبر[4] کا مکافی ربط ہے[5] جو حسبِ ذیل مساوات سے تعبیر ہوتا ہے :-

$$\text{زع} = \frac{\text{سہ}}{2} + \sqrt{\text{ز}^2 - \text{ن سہ ز}} \quad ....(1)$$

جہاں ز شے کا انتہائی سکونی تنشی استحکام ہے، اور ن ایک مستقل ہے جو تجربہ کے ذریعے معلوم کیا جاتا ہے ۔ ن کی قیمت متمدد دھاتوں میں ۳ء۱ سے لے کر چھوٹک دھاتوں میں ۲ تک پائی گئی ہے ۔ تعمیری متمدد دھاتوں میں اس کی قیمت عموماً تقریباً ۵ء۱ ہوتی ہے ۔ اس قیمت سے "تعاکس حد" ½ ز اور تکرار کی حد ۶۱ء۰ ز حاصل ہوتی ہے ۔

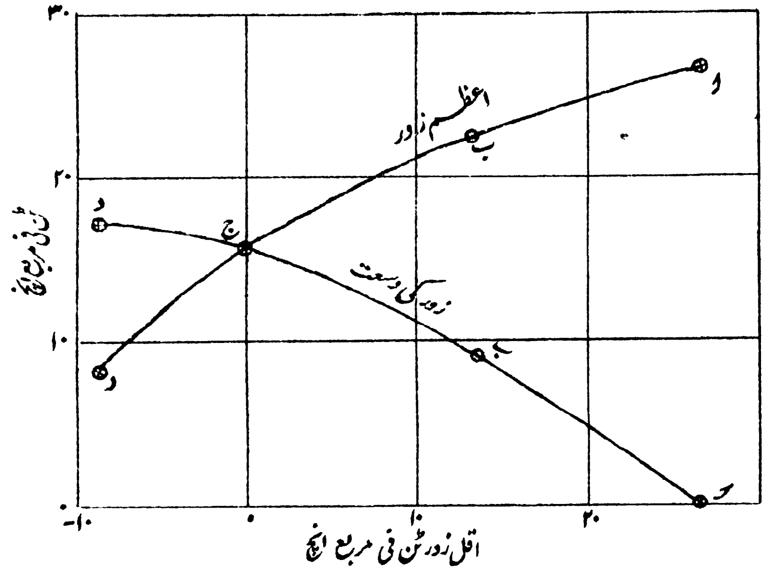
۵۳ء۱ ن کی اوسط قیمت ہے جو اوپر بیان کیے ہوئے نرم فولاد کی جو شارہ تختی کے نتائج سے اخذ کی گئی ہے اور اشکال ۵۳، ۵۴ اور ۵۵ کو ترسیم کرتے وقت تجرباتی قیمتوں (ا)، (ب)، (ج) اور (د) کے درمیان کے نقاط کو محسوب کرکے ترسیم کیا گیا ہے ۔ شکل کی ہمواری سے معلوم ہوگا کہ یہ آزمایشی ربط مشاہدہ کیے ہوئے نقاط کے ساتھ کتنا ہم آہنگ ہے۔ ایسے محسوبہ نتائج پر کہاں تک اعتبار کیا جائے یہ نہیں کہا جاسکتا اور بہرصورت نقاط ا اور ج کے

---

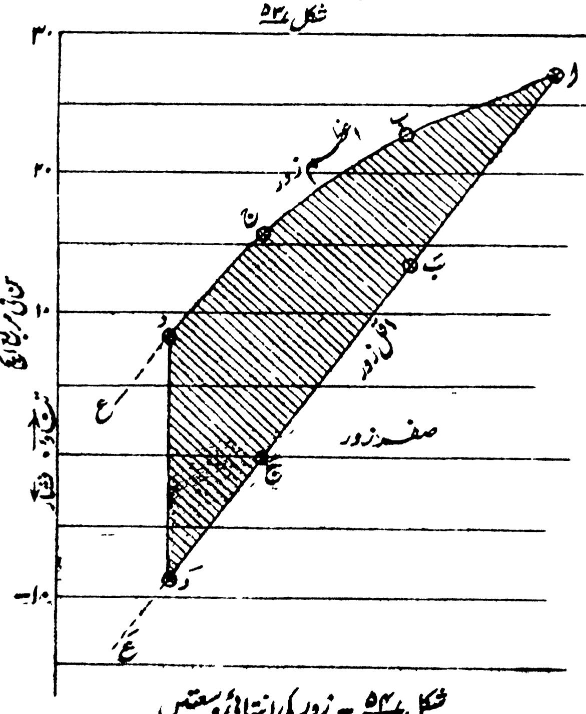
[5] دیکھو انون کی "مشینوں کی تجویز کے مبادیات" جلد اول باب ۲۔

---

[1] Wohler [2] Bauschinger [3] Spangenbery [4] Gerber

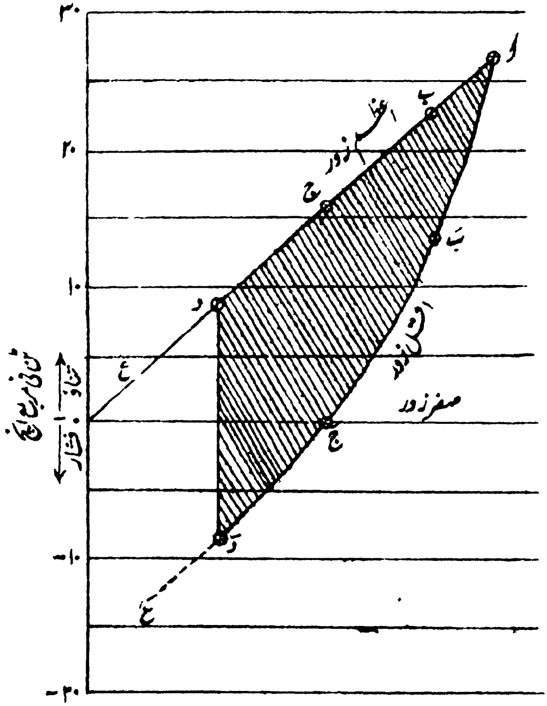


شکل ۵۳



شکل ۵۴ ۔ زور کی انتہائی وسعتیں

درمیان کی اعظم انتہائی زور کی قیمتیں جو لچک کی حد سے خاصی زیادہ ہیں اگرچہ علمی نقطۂ نظر سے دلچسپ ہیں لیکن ان کی علمی اہمیت کچھ زیادہ نہیں کیونکہ مشینوں اور تعمیروں میں ایسے زور استعمال نہیں کیے جا سکتے جن سے قابلِ لحاظ فساد پیدا ہوں - اس طرح علمی نقطۂ نظر سے سب میں
صفحہ ۹۶ اہم نتائج وہ ہیں جو تکرار کی حد (اقل زور صفر) کے اور تعاکس کی حد (مساوی اور مقابل تناؤ اور فشار) کے درمیان ہیں اور جو اشکال ۵۴ اور ۵۵ میں رقبہ ج د دَ جَ سے تعبیر کیے گئے ہیں - اور ان نقاط کے درمیان زور کا تغیر بہت زیادہ نہیں[1] دیگر تجربات سے معلوم ہوتا ہے کہ پٹواں فیرس دھاتوں میں د دَ کے دونوں طرف وسعت سہ تقریباً مستقل ہوتی ہے -



شکل ۵۵ - زور کی انتہائی وسعتیں

[1] دیکھو روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز سنہ ۱۹۰۶ء جلد ۱۶۶ صفحہ ۱۳۰ میں مسٹر الگزینڈر کینیڈی کا تبصرہ

نرم فولاد کے متعلق ہے (Haigh) کے جو تجربات ہیں وہ ن = تقریباً ۰۷ء لینے سے گربر (Gerber) کے مکافی کے بہت مطابق ہوتے ہیں اور ایڈن (Eden) اور ہاپ کنسن (Hopkinson) نے مساوی اور مقابل حدود (یعنی زع = سہ/۲ یا اوسط زور = صفر) کے لیے جو تجربات کیے ہیں اُن سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مکافی ربط درست ہو تو ن کی یہی قیمت اختیار کرنی ہوگی۔

گاف (Gough) نے اپنی کتاب "دھاتوں کی تھکن" کے باب ۴ میں دکھایا ہے کہ مساوات (آ) کو یوں لکھا جا سکتا ہے :-

مہ۲ = ز۲ - ن سہ ز ....(۲)

جہاں مہ = زع - ۱/۲ سہ = ۱/۲ (زع + زق) = اوسط زور اور اگر زور کے تعاکس کی صورت میں جب کہ مہ = ۰ ہوتا ہے سہ کی قیمت کو سہ٭ کہا جائے تو ن = سہ/سہ٭

اس طرح

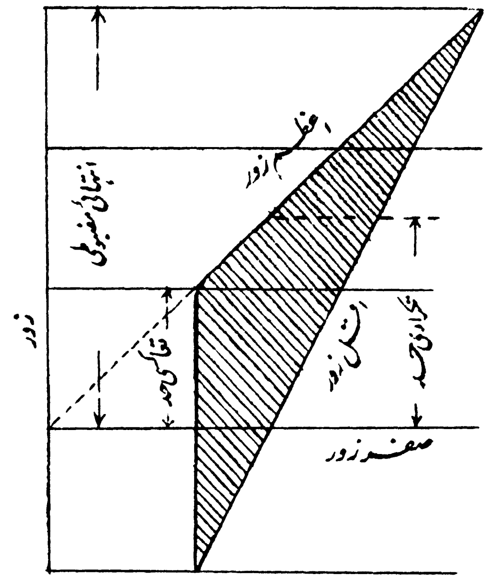
سہ = سہ٭ {۱ - (مہ/ز)۲} ....(۳)

گاف نے اس ربط کو اور دیگر ربطوں کو استعمال کر کے ایک ہی نقشے میں امتحانات کے متعدد سلسلوں کے نتائج کو دکھایا ہے اور مختلف "قوانین" کا مقابلہ کیا ہے۔

گُڈمَن کا قانون ـــــ کافی معلومات موجود نہ ہونے کی وجہ سے اشکال ۵۴ اور ۵۵ کے منحنیوں کو بعض اوقات خطوطِ مستقیم

Goodman ؎

سمجھا جاتا ہے اور تکرار کی حد کو سکونی تنشی استحکام کا نصف اور تعاکس کی حد کو ایک تہائی سمجھا جاتا ہے کیونکہ بہت سی مختلف دھاتوں سے یہ اوسط قیمتیں حاصل ہوتی ہیں - انتہائی وسعت شکل ۵۶ کے سایہ دار



شکل ۵۶

رقبے کے انتصابی معینوں سے تعبیر ہوتی ہے - اعظم زور اور اقل زور کے خطوط کے درمیان کے انفراج سے تعاکس کی حدود کے نواح میں وسعت کچھ زیادہ نہیں بدلتی اور یہ طریقہ اور کچھ نہیں تو کم ازکم سادہ ترین تو ہے - اس ربط کو جبری طور پر حسب ذیل مساوات سے تعبیر کیا جائیگا:—

$$\text{ع} = \text{ز} - \text{سہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

یا

$$\text{سہ} = \frac{۲}{۳}(\text{ز} - \text{مہ}) = \text{سہ}\left(۱ - \frac{\text{مہ}}{\text{ز}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

یہ شکل میں (۳) سے مشابہ ہے لیکن میہ کی قوت کم ہے۔ ہےؔ(Haigh) نے اس قسم کا ایک ربط بحری پیتل کے اعظم اور اقل زوروں کے درمیان معلوم کیا لیکن تعاکس کی حد تقریباً ۲۱ ٹن فی مربع انچ پائی گئی اور تناؤ کی انتہائی مضبوطی ۲۸٫۷ ٹن فی مربع انچ - خطِ مستقیم والے ربط کو آسانی کے لیے اس طرح ترسیم کیا جاسکتا ہے کہ اوسط یا قائم زور کو فصلہ مانیں - اور یہ اس طرح تعبیر ہوگا:- صفحہ ۸۰

$$\left.\begin{array}{l} \text{نع} = \text{ز} - ۶۹۵٫۰ \text{ سہ} \\ \text{سہ} = ۴۳۵٫۱ (\text{ز} - \text{نع}) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (۶)$$

۵۲ - متغیر زور کے تحت ناکارگی کی توجیہات -

زور کے تکراری اُتار چڑھاؤ کے تحت جو ناکارگی عام تجربے میں مشاہدے میں آتی ہے اور اُوپر کے مذکورہ تجربات میں مشاہدے میں آئی اُس کی توجیہ کرنے یا اس پر کچھ روشنی ڈالنے کی بہت کوششیں کی گئی ہیں - اگرچہ اس منظر کی کوئی مکمل اور اطمینان بخش توجیہ اب تک پیش نہیں کی گئی لیکن اُس کے متعلق جو مختلف نظریے پیش کیے گئے ہیں وہ دلچسپ اور سبق آموز ہیں -

لچک کی طبعی حدود - یہ بات عام طور پر معلوم ہے (دیکھو دفعہ ۳۲) کہ زور اور فساد کے عمل سے لچک کی حد بڑھائی جاسکتی ہے اور یہ کہ کمائی ہوئی دھاتیں اپنی تیاری میں جن عملوں سے گزرتی ہیں اُن سے اسی طرح کی ایک بڑھی ہوئی لچک کی حد پیدا ہوتی ہے - باؤشنگر[1] نے معلوم کیا کہ ابتدائی لچک کی حد سے بڑھے ہوئے تکراری زور کے لگانے سے لچک کی حد عموماً بڑھ جاتی ہے - اگر تکراری زور اس نئی لچک کی حد سے کم تھا تو

[1] Bauschinger

باؤشنگر نے معلوم کیا کہ زیر تجربہ شے اس طرح کے زور کی لاانتہا تکرار کو برداشت کر سکیگی کمتے سکونی تجربے میں متعاکس زور کے عمل سے لچک کی حد بعض اوقات گھٹ جاتی ہے اور باؤشنگر نے تناؤ اور فشار کی انہی گھٹی ہوئی حدود کو لچک کی طبعی حدود مانا۔ اُس نے یہ خیال ظاہر کیا کہ لچک کی یہ طبعی حدود وہی ہیں جو زور کے لا انتہا تعاکس کے لیے زور کی حدود ہوتی ہیں۔

اسٹینٹن[1] اور بیراسٹو[2] نے معلوم کیا کہ زور کے دس لاکھ سے زیادہ تعاکس سہنے کے بعد تناؤ کی لچک کی حد اپنی ابتدائی قیمت سے خاصی کم ہوگئی اور تعاکسوں میں جو اعظم تناؤ لگایا گیا تھا اس سے کسی قدر کم تھی اور فشار میں لگائے ہوئے اعظم فشار سے کسی قدر زیادہ۔ زور کی انتہائی وسعت تقریباً اُس مجموعی لچک کی وسعت کے مساوی تھی جو مادے نے اتار چڑھاؤ زوروں کی وجہ سے اختیار کرلی۔ اس سے باؤشنگر کے قیاس کی خاصی تصدیق ہوتی ہے جو سب میں پہلے جیمس ٹامسن نے ۱۸۴۸ء میں ظاہر کیا تھا۔ اگر یہ نظریہ صحیح ہو کہ لاانتہا تعاکسوں کے زور کی وسعت اور لچک کی وسعت ایک ہی چیز ہے تو وولر کے نتائج کی اور دوسرے نتائج کی ایک بڑی حد تک توجیہ ہوجائیگی جن میں شکستگی لچک کی ابتدائی حد سے بہت کم زور پر واقع ہوگئی کیونکہ مستقل فساد کتنے ہی خفیف کیوں نہ ہوں شکستگی پیدا کر سکتے ہیں خاص کر اگر مقامی ہوں۔ البتہ یہ ایک قابل غور بات ہے جو باؤشنگر نے اور بعد میں اسمتھ نے معلوم کی کہ بوجھ کے اُتار چڑھاؤ کی ایک

1. دیکھو انون کی "اشیا کی آزمائش" صفحات ۳۵۳ و ۳۶۴ دوسرا ایڈیشن۔
2. روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز ۱۹۰۶ء صفحات ۹۶ و ۱۰۴۔

1. Stanton
2. Bairstow

کثیر تعداد برداشت کرنے کے بعد جو سکونی امتحانات کیے گئے اُن سے تنشی استحکام میں کوئی کمی نہیں معلوم ہوئی بلکہ تھوڑی زیادتی ہی پائی گئی۔

صفحہ ۱ بعد میں جب بیراسٹو[1] نے تجربات کر کے کسی شے کی اُن لچک کی حدود کا جو وہ شے زور کے تبادل کے بعد اختیار کرتی ہے اُس نے خطر انتہائی زور کی وسعت سے مقابلہ کیا جو وولر نے اسی (یا اس جیسی) شے کے لیے معلوم کی تو باؤشنگر کا قیاس صحیح معلوم ہوا۔

اگر ہم لچک کی طبعی حدود وہ سمجھیں جو زور کے مکمل تعاکس سے متقرر ہوں تو یہ لازم نہیں آتا کہ ان طبعی حدود کے درمیان کی وسعت ایک ہی قسم کے زور کی تکرار کی صورت میں (تناؤ اور فشار کے لیے) مساوی ہے اور اس بارے میں راست تجربات موجود نہیں۔ باؤشنگر[2] کے چند تجربات سے بظاہر معلوم ہوا کہ تنشی لچک کی حد کو بڑھانے سے فشاری حد گھٹتی ہے لیکن اس کو ثابت شدہ نہیں سمجھا جا سکتا اور کچھ شہادت اس امر کے متعلق موجود ہے کہ تنشی حد کو بڑھانے سے فشاری حد کم از کم سکونی امتحان میں بڑھ یا گھٹ سکتی ہے[3]۔

لچکدار پس ماندگی پست زوروں پر — لمبے تاروں[4]

تجربات کر کے ایونگ[5] نے معلوم کیا ہے[6] کہ جس زور کو عموماً لچک کی حد

---

۱ دیکھو "لوہے اور فولاد کی لچک کی حدود زور کے دوری تغیرات کے تحت" رائل سوسائٹی کے شعبہ فلسفہ کی روئداد ۲۱۰۔

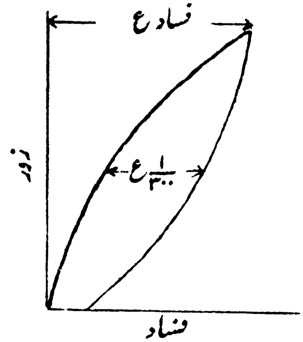
۲ انون کی "اشیا کی آزمائش" صفحہ ۳۶۰ دوسرا ایڈیشن۔

۳ دیکھو میور کا مضمون روئداد رائل سوسائٹی ۱ جلد ۷۷، صفحہ ۲۷۷۔

۴ برٹش ایسوسی ایشن کی رپورٹ ۱۸۹۹ء صفحہ ۵۰۲۔

Ewing ۵

سمجھا جاتا ہے اس سے بہت پست زور پر فساد زور کے ٹھیک متناسب نہیں ہوتا بلکہ بتدریج لداؤ میں فساد ذرا پیچھے رہتا ہے۔ بوجھ اُتارتے وقت فساد بوجھ کے تناسب میں کم نہیں ہوتا بلکہ اُس سے کم گھٹتا ہے۔ اس طرح زور فساد کے نقشے سے ایک حلقہ بنتا ہے جس کا عرض کسی خاص زور پر اُس زور کے متناظر بوجھ کے اترتے اور پڑتے وقت کے فسادوں کا فرق ہے (دیکھو شکل ۵۷)۔



شکل ۵۷

پروفیسر ایونگ کے تجربات میں حلقے کا عرض وسط میں اعظم فساد کے $\frac{1}{۳۰۰}$ کے قریب تھا۔ متغیر زوروں کے دوروں کے درمیان اس طرح فساد کی پس ماندگی کی وجہ سے کسی شے میں مقابلۃً پست زوروں پر بہت سا مقامی فساد مجتمع ہو سکتا ہے اور اس سے زور کے تکراری اُتار چڑھاؤں کے تحت شکستگی کی ایک توجیہ ذہن میں آتی ہے۔

کسی شے کو زور سے بالکل آزاد کر دینے کے بعد فساد کا جو گھٹاؤ عمل میں آئے اُسے لچکدار پس کاری کہا جاتا ہے۔

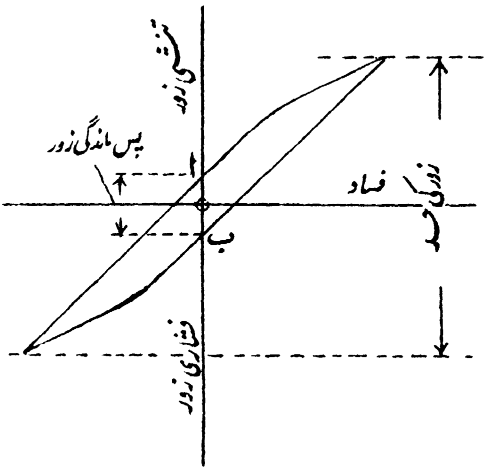
لچکدار پس ماندگی پر اس کے بعد خاصی تحقیق کی گئی، اور ان تحقیقوں سے متبادل زوروں کے تحت کی ناکارگی کے مسئلے پر بہت کچھ روشنی ڈالی جا سکتی ہے۔ کسی شے پر جب زور کے اتنے تعاکس واقع ہو جائیں کہ وہ ایک دوری کیفیت حاصل کر لے تو اُس کا پس ماندگی کا حلقہ شکل ۵۷ ا کی طرح کا ہو گا۔ حلقے کا

عرض بہت مبالغے کے ساتھ اُتارا گیا ہے ۔ صفر فساد پر کا عرض ا ب
۱/۲ ٹن فی مربع انچ پایا گیا[1] جب کہ زور کی وسعت ۱۰ ٹن فی مربع انچ
یعنی ا ب کا ۴۰۲ گنا تھی ۔ ہاپ کنسن[1] اور ولیمز[2] نے اُس
توانائی کی پیمائش کی جو پس ماندگی میں ۱۲۰ دَور فی ثانیے کے تعاکس صفحہ ۔
میں ضائع ہوئی ، اور اُس توانائی کا اندازہ لگایا جو سکونی امتحان میں
ضائع ہوتی ہے ، اور اِس طرح اِن دونوں صورتوں میں مکمل حلقے
کے اندر ضائع ہونے والی توانائیوں کے باہمی ربط کا اندازہ لگایا۔
وہ اس نتیجے پر پہنچے کہ تیز تعاکس کی صورت میں توانائی سکونی امتحان
سے (تقریباً ۱۵ فی صدی) کم ہوتی ہے ۔ راوِٹ[3] نے اس کے
بعد معلوم کیا کہ تپا نرمائے ہوئے نرم فولاد کے پس ماندگی کے منحنی کا
رقبہ ۶۰ دَور فی ثانیہ کی شرح کے تعاکس پر تقریباً وہی ہوتا ہے جو
سکونی تجربہ میں ہوتا ہے اور یہ کہ سخت کشیدہ نل میں پس ماندگی تپا نرمائے نل سے
بہت کم ہوتی ہے ۔ نیز یہ کہ متوسط اعلیٰ تپشوں مثلاً ۳۰۰° م پر
پس ماندگی بڑھتی ہے اور ان تپشوں پر سست تعاکس میں (جس
میں مادے کو بہنے کا موقع مل جاتا ہے) پس ماندگی تیز تعاکس سے
بہت زیادہ ہوتی ہے ۔ تپا نرمائے فولادی نل میں اعلیٰ تپشوں پر
"بہاؤ" بے تپا نرمائے مادے کی نسبت بہت کم ہوتا ہے ۔
زور کی اُن حدود کے درمیان جو فولاد کی مغلوبیت کی حدود ہیں
(دفعہ ۴۹) کسی دور کے لیے زور اور فساد کی پیمائشوں کو ترسیم

[1] دیکھو "فولاد کی لچک اور پس ماندگی" از ہاپ کنسن و ولیمز، روئداد رائل سوسائٹی ۱۲ نومبر ۱۹۱۲ء یا رسالہ انجینیرنگ ۱۳ دسمبر ۱۹۱۲ء ۔
[3] روئداد رائل سوسائٹی سلسلہ ا جلد ۸۹ صفحہ ۵۲۸، اور جلد ۹۱ صفحہ ۲۹۱۔

[1] Hopkinson [2] Williams [3] F. E. Rowett .

کیا جائے تو پس ماندگی کے حلقے بنتے ہیں لیکن اسمتھ اور ویجووڈ[1] نے اِن حلقوں کا تجربۃً امتحان کرکے معلوم کیا کہ زور کی وسعت کے گھٹنے سے یہ عرض میں گھٹتے ہیں اور آخرکار زور کی ایک چھوٹی وسعت کے لیے بالکل غائب ہوکر ایک خط بن جاتے ہیں۔ اُن کا خیال ہے کہ یہ وسعت غالباً "باؤشنگر کی وسعت" ہے، یعنی کامل لچک کی



شکل ۱۵۷

وسعت (لچک کی طبعی حدود کے درمیان) ان معنی میں کہ زور کے تعاکس کے دَور میں سے گزرنے پر کوئی پس ماندگی کا حلقہ نہیں بنتا۔
گاف[2] نے تانبے کے پس ماندگی کے حلقوں کا ایسے زوروں کے لیے امتحان کیا جو تھکن کی حدود کے بہت اندر تھے اور اُس نے معلوم

[1] "دوری حالت میں فولاد کے زور فساد کے حلقے" لوہے اور فولاد کے انسٹی ٹیوٹ کا رسالہ نمبر ا ۱۹۱۵ء۔
[2] "تانبے کی لچک کی حدود زور کے دَوری تغیرات کے تحت" رسالہ انجینیرنگ ۸، ستمبر ۱۹۲۲ء۔

[2] Gough

کیا کہ جو حلقے پہلے مقابلتاً بڑے بڑھے زور کے تعاکس کے تحت تیزی سے گھٹتے گئے اور ۴ لاکھ تعاکسوں کے بعد شے تقریباً لچکدار بن گئی یعنی تقریباً ۳۰ لاکھ مزید تعاکسوں کے بعد یہ حالت بغیر کسی مزید تغیر کے برقرار رہی۔

میسن[1] نے کھوکھلے نرم فولاد کے نمونوں پر مروڑ کے تحت تجربہ کر کے معلوم کیا کہ دوروں کی رفتار کو ۲ سے ۲۰۰ فی منٹ تک بدلنے سے غیر لچکدار فساد میں بڑی کمی واقع ہوتی ہے۔ نیز ۲۰۰ سے ۲ فی منٹ کرنے میں بڑا اضافہ واقع ہوتا ہے۔ لیکن فساد کی یہ بڑھی ہوئی وسعت گھٹتی گئی۔ شروع میں بہت تیزی سے اور پھر آہستہ آہستہ جس سے معلوم ہوا کہ گویا آرام کی وجہ سے بازیابی عمل میں آرہی ہے۔ لیکن یہ لچک کی بازیابی نہیں معلوم ہوتی بلکہ غالباً فساد کے بعد ایک طرح کا سختاؤ واقع ہونے کی وجہ سے ہے جس کی وجہ سے امتحان کے دوران میں دوری غیر لچکدار فساد کی پیدائش قطعی طور پر کم ہو جاتی ہے۔

متحرک بوجھ کا حرکی اثر — یہ خیال ظاہر کیا گیا ہے کہ بوجھ کے تکراری اُتار چڑھاؤ سے جو شکستگی پیدا ہوتی ہے اُس کا باعث یہ ہے کہ بوجھ بتدریج نہیں لگایا جاتا اور اِس طرح اِن پیہم دھکوں کا اثر اُس سے زیادہ ہوتا ہے جتنا کہ فرض کیا جاتا ہے۔ اُتار چڑھاؤ کی تیز شرح پر زور کی انتہائی وسعت میں جو کمی واقع ہوتی ہے جیسی کہ اسمتھ کے تجربات میں ہوئی اُس سے اِس نظریے کی کسی قدر تائید ہوتی ہے۔ لیکن اُتار چڑھاؤ کی ایک

[1] ۔ نشست رفتار متعاکس زور کے امتحانات میں رفتار کا اثر اور بازیابی" روئداد رائل سوسائٹی ۱۹۱۶ء۔

صفحہ ۱۰۱

[1] Mason

کثیر تعداد کے بعد لچک کی حد اور تنشی استحکام کے متعلق سکونی تجربات سے دھاتوں کی جس حالت کا پتہ چلتا ہے اُس کی کسی ایسے حرکی عمل سے توجیہ نہیں ہوسکتی جو ایک کابل لچکدار جسم کے اندر واقع ہوسکتا ہے (دیکھو دفعات ۴۳ اور ۴۴)۔ اس طرح کا ایک نظریہ پیش کیا گیا ہے جس میں تعاکس حد تنشی استحکام کی ایک تہائی اور تکرار کی حد نصف بتائی گئی ہے (مقابلہ کرو گڈمن کے قانون سے' دفعہ ۵۱ اور شکل ۵۶)۔ لیکن اِن توجیہوں میں اس بات کا خیال نہیں رکھا جاتا کہ متغیر زور کے تحت متمدد دھاتیں اکثر کسی قابل پیمائش تطول یا رقبے کی تبدیلی کے بغیر ٹوٹ جاتی ہیں اور یہ کہ تنشی استحکام عموماً سکونی تجربات میں ابتدائی رقبے سے محسوب کیا جاتا ہے۔ یہ ایک بالکل فرضی معیار ہے شکستگی کا حقیقی زور نہیں (دیکھو دفعہ ۲۹) اور اب اسے عام طور پر ترک کیا جا رہا ہے۔

اسٹین ٹن اور بلیر اسٹو[1] نے ایک گرتے ہوئے دھمس کے صدمے سے پیدا ہونے والے متبادل تناؤ اور فشار کے تحت دھاتوں کی انتہائی مزاحمت کا تجربہ کیا ہے۔ اُن کے نتائج سے یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے کہ مختلف اشیا کی صدمے کی اضافی مزاحمت $\frac{ز^2}{ہ}$ کے متناسب ہے (دیکھو دفعہ ۴۲)' جہاں ز حقیقی لچک کی حد ہے جو وولر کے امتحان سے ناپی جائے یعنی متعاکس زور کی لا انتہا برداشت کی وسعت ہے۔

فاصل مدّتِ دوران ــــ یہ بالکل ممکن ہے کہ کسی مشین کے ایک رُکن کے طبعی ارتعاش کی مدتِ دوران اور اس پر

[1] "اشیا کی صدمے کی مزاحمت" روئداد انسٹی ٹیوٹ آف میکانیکل انجینیرز حصہ ۱م ۱۹۰۸ء

لگائی ہوئی ایک دَوری قوت کی مدت دَوران کے ایک ہوجانے سے شکستگی واقع ہوجائے (دیکھو دفعہ ۱۶۰)۔ مدتِ دوران کے اس ایک ہونے سے حیطۂ ارتعاش بڑھ جائیگا اور اس سے مستقل فساد واقع ہوسکتا ہے اور یہ اثر جمع ہوکر دھات کو نقصان پہنچا سکتا ہے۔

۱ امتحانوں کی مختلف قسمیں —— تجربات کے نتائج پر غور کرتے وقت یہ یاد رکھنا چاہیے کہ کس آلے کے ذریعے زور لگایا گیا تھا۔ مثلاً متحرک کمیتوں کے جمود کے ذریعے جو یکساں منقسم راست زور پڑے اُس کے اثرات پر صدمے یا فاصل مدتِ دَوران کا اثر پڑ سکتا ہے۔ لیکن یکساں منقسم زور کے امتحان میں برداشت پر بوجھ پڑنے کی سرعت اور دیگر اثرات کے معلوم کرنے کی زیادہ آسانی ہے بہ نسبت خماؤ کے امتحان کے جس میں ایک بہت چھوٹے رقبے پر اعظم زور پڑتا ہے اور اس کو سہارا ایسی دھات سے ملتا ہے جس پر زور کم ہے۔ بلکہ واقعہ یہ ہے کہ خماؤ کے تیز تعاکسوں کے تحت زور کی تقسیم تیقن کے ساتھ معلوم بھی نہیں۔ صفحہ ۲۰

۵۳ - خردبینی تحقیقات —— فولاد کے نمونوں کا زور کے تکراری اُتار چڑھاؤ یا تعاکس کے تحت خردبین کے ذریعے معائنہ کرنے پر حال میں بہت توجہ کی گئی ہے۔ ایونگ اور ھمفرای[۱] نے سویڈنی لوہے کا ایسے زور کا تعاکس اتنے بار کرکے جو شکستگی کے لیے کافی تھا تھوڑے تھوڑے وقفے سے خردبینی معائنہ کیا اور یہ دیکھا کہ ابتدائی نقطۂ مغلوبیت سے ذرا کم زور کے چند تعاکسوں کے بعد قلموں کے مجموعے میں چند قلموں پر

[۱] رائل سوسائٹی کے شعبۂ فلسفہ کی روئداد جلد ۲۰۰۔

پھسل پٹیاں (دیکھو دفعہ ۲۴) نمودار ہوئیں - مزید تعاکسوں کے بعد پھسل پٹیاں تعداد میں بڑھتی گئیں اور چوڑی ہوتی گئیں - آخر میں قلموں میں آڑی تڑقیں پیدا ہوئیں اور ایک قلم سے دوسری قلم کو پھیلتی گئیں اور اس طرح شکستگی واقع ہوئی - بعد میں گاف [1] اور ھین سن نے معلوم کیا کہ پھسل پٹیاں زور کی بے خطر وسعتوں اور خطرہ دار وسعتوں دونوں میں پھسل پٹیاں پیدا ہوئیں لیکن بے خطر وسعت کی صورت میں کسی قدر فساد سختاؤ عمل میں آیا اور مزید پھسلن واقع نہیں ہوئی - یہ امر کہ سختاؤ درحقیقت واقع ہوتا ہے ایلومینیم کی صورت میں اس طرح ثابت ہوا کہ ایک اکیلی بڑی قلم پر زور کے تعاکس کے عمل کا معائنہ کیا گیا جس میں پھسلن خاص خاص آسان مستویوں پر واقع ہوتی ہے - گاف اور ھین سن اس نتیجے پر پہنچے کہ قلمیں ٹوٹ کر چھوٹی چھوٹی قلمیں اور مختلف وضعوں میں پیدا کرتی ہیں - اب متصل قلموں کی وضعوں کے اختلاف کی وجہ سے پھسلن موقوف ہوجاتی ہے کیونکہ ایک قلم کے لیے جو مستوی پھسلن کے لیے آسان ہوگا عموماً ساتھ کی قلم کے لیے وہ مستوی آسان نہ ہوگا - البتہ اگر زور انتہائی زور سے بڑھ جائے تو قلمدار دانوں میں اعظم پھسلن کے طبقے میں خرد بینی تڑقیں شروع ہوتی ہیں اور ان کے سروں پر زور کے مرتکز ہونے کی وجہ سے تڑق بڑھتی ہے اور شکستگی واقع ہوتی ہے - یہ عمل اتنا مقامی ہوسکتا ہے کہ اس کی وجہ سے متمدد دھات کی شکستگی بھی بعض اوقات ایسی معلوم ہوتی ہے کہ گویا ایک پھوٹک دھات کی شکستگی ہے جو سکونی بوجھ سے عمل میں آئی ہے -

[1] روئداد رائل سوسائٹی جلد ۱۰۴ (سنہ ۱۹۲۳ء) - ہوائی تحقیقی کمیٹی کی رپورٹیں اور یادداشتیں نمبر ۹۹۵، ۱۰۲۳ تا ۱۰۲۵ -

پروفیسر مور کی ایک دلچسپ کتاب "گاڑیوں کے دھروں میں تھکن سے پیدا ہونے والی تڑقوں کا مطالعہ" طبع ہوئی ہے جس میں اس طرح کی تڑقوں کو کارخانے کے اندر معلوم کرنے کا طریقہ بھی دکھایا گیا ہے[۱]۔

۵۴۔ متغیر زور کے لیے سلامتی کی قدریں ـــــ

متغیر زور پر جو مختلف تجربات کیے گئے ہیں اُن سے اور نیز تعمیروں اور مشینوں کی تجویز اور استعمال کے متعلق جو عام تجربہ ہے اُس کے نتائج سے یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے کہ کسی شے پر کامی زور اُس پر پڑنے والے فسادی عمل کے لحاظ سے تجویز کرنا چاہیے[۲]۔ مثلاً اگر نرم فولاد میں اتفاقی اور غیر محسوبہ فسادات، کاریگری کی غلطیوں، مرورِ زمانہ سے کم زور ہو جانے اور اسی طرح کے اور اتفاقات کی رعایت کے لیے ایک برقرار غیر متغیر زور کے لیے قدرِ سلامتی (یعنی انتہائی سکونی مضبوطی صفحہ ۱۰۳
اور کامی زور کی نسبت) ۳ اختیار کی جائے تو اگر نرم فولاد میں متعاکس زور کے لیے بھی اسی طرح کے اتفاقات کی اتنی ہی رعایت کی جائے تو اعظم زور تعاکس کے انتہائی زور کا $\frac{1}{3}$ ہونا چاہیے یعنی انتہائی سکونی مضبوطی کا تقریباً $\frac{1}{8}$ یا $\frac{1}{9}$ کیونکہ تعاکس کی حد انتہائی سکونی مضبوطی کا تقریباً ۳۰ تا ۴۰ فی صدی ہے (جدول ۳ دفعہ ۴۷)۔ اس لیے اس صورت میں قدرِ سلامتی اوپر کی تعریف کی رو سے ۸ یا ۹ ہوگی۔

انون مختلف اشیا اور مختلف حالات کے لیے سلامتی کی قدروں کے لیے حسبِ ذیل جدول دیتا ہے:۔

۱۔ الی نو آئی یونیورسٹی کے انجینیری تجربات خانہ کا رسالہ نمبر ۱۶۵۔

۲۔ دیکھو برٹش ایسوسی ایشن کی رپورٹ ۱۸۸۶ء صفحہ ۴۲۴۔

سلامتی کی قدروں کی جدول

شے	قدرِ سلامتی ذیل کے حالات میں			
	ساکن بوجھ	متحرک یا متغیر بوجھ: صرف ایک قسم کا زور	متحرک یا متغیر بوجھ: متعاکس زور	صدمات
ڈھلا لوہا	۴	۶	۱۰	۱۵
پٹواں لوہا اور فولاد	۳	۵	۸	۱۲
چوبینہ	۷	۱۰	۱۵	۲۰

سوالات ۳

۱ - سوالات نمبر ۲ کے سوال ۱ میں جس شے کا ذکر کیا گیا ہے اُس میں سکونی امتحان میں شکستگی تک کیا ہوا کام فی مکعب انچ معلوم کرو۔

۲ - نرم فولاد کی ایک سلاخ کی مجموعی لچکدار فساد کی توانائی یا بازگشتگی معلوم کرو جس کا قطر ۱ انچ اور طول ۱۰ فٹ ہے اور جس پر ۷ ٹن کا ایک تنشی بوجھ ہے۔ ے = ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ۔

۳ - $1\frac{1}{2}$ انچ قطر اور ۸ فٹ طول کی ایک سلاخ مجموعی برداشتنی بازگشتگی معلوم کرو۔ تنشی لچک کی حد ۱۴ ٹن فی مربع انچ اور کھنچاؤ کا مقیاس (ے) ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے۔ نیز برداشتنی بازگشتگی فی مکعب انچ معلوم کرو۔

۴ - ۱۰ فٹ طول اور ۱٫۵ مربع انچ تراش کی ایک سلاخ میں ۶ ٹن کے ایک تنشی بوجھ کے اچانک عمل کرنے سے زور کی حدت اور تطول معلوم کرو۔ کتنا بوجھ اچانک عمل کر کے $\frac{1}{20}$ انچ کا تطول پیدا کریگا۔ ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ لو۔

۵ ۔ حسبِ ذیل کے معادل ساکن بوجھوں کا تخمینہ کرو: (ا) ایک ساکن تنشی بوجھ ۱۵ ٹن کا اور ایک متحرک تنشی بوجھ ۲۰ ٹن کا (ب) ایک ساکن فشاری بوجھ ۱۵ ٹن کا اور ایک متحرک تنشی بوجھ ۲۰ ٹن کا۔ اگر فساد کو ۰۰۱ء سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے تو ہر صورت میں مطلوبہ تراش کا رقبہ معلوم کرو۔ ے = ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ۔

۶ ۔ ۵۶۰ پونڈ کا ایک بوجھ $\frac{1}{2}$ انچ کی بلندی سے ایک انتصابی سلاخ کے نچلے سرے پر کے روک پر گرتا ہے۔ سلاخ کا طول ۱۰ فٹ اور تراش ایک مربع انچ ہے۔ اگر کھنچاؤ کا مقیاس (ے) ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہو تو سلاخ میں پیدا شدہ زور معلوم کرو۔

۷ ۔ سوال ۶ کا بوجھ سلاخ کو کھینچنا شروع کرنے سے پہلے زیادہ سے زیادہ کتنی بلندی میں سے گر سکتا ہے تاکہ ۱۴ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ زور نہ پیدا ہو۔

۸ ۔ دو گول سلاخیں ا اور ب ۱۰ انچ لمبی ہیں۔ ا کا قطر ۲ انچ طول میں ۱ انچ اور باقی ۸ انچ طول میں $\frac{3}{4}$ انچ ہے۔ ب کا قطر ۸ انچ طول میں ۱ انچ اور باقی ۲ انچ طول میں $\frac{3}{4}$ انچ ہے۔ اگر ب کو ایسا محوری دھکا پہنچے جس سے اس میں ۱۵ ٹن فی مربع انچ کا زور پیدا ہو تو اسی دھکے سے ا میں کتنا زور پیدا ہوگا۔ لچک کی حدود کے اندر ا اس طرح ب سے کتنی زیادہ توانائی جذب کر سکتا ہے۔

صفحہ ۱۰۱

چوتھا باب

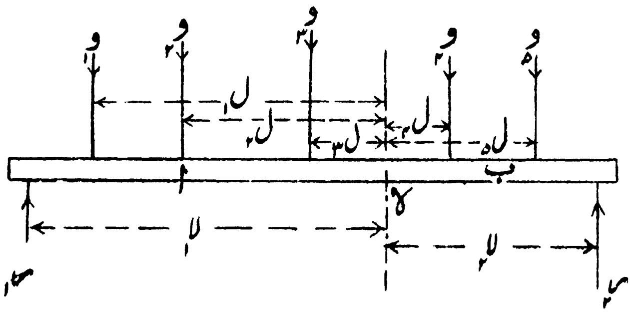
خماؤ کا نظریہ

۵۵۔ شہتیر اور خماؤ ـــــ اگر کسی شے کی ایک سلاخ پر بیرونی قوتیں (جن میں بوجھ اور ردِّ عمل داخل ہیں) اس کے طولی محور سے ترچھے عمل کریں تو وہ ایک شہتیر کہلاتی ہے اور بوجھ کے جو اجزائے ترکیبی محور کے علی القوائم ہوں اُن سے پیدا ہونے والے فساد کو جھکاؤ یا خمیدگی کہتے ہیں۔ موجودہ باب اور اس کے بعد کے چار بابوں میں صرف ایسے شہتیروں سے بحث کی گئی ہے جو بالکل سیدھے یا تقریباً سیدھے ہوں۔ چونکہ شہتیر عموماً اُفقی ہوتے ہیں اور بیرونی قوتیں وزن ہوتی ہیں اس لیے اس میں آسانی ہوگی کہ شہتیروں کو ہمیشہ اُفقی سمجھا جائے اور بیرونی قوتوں کو انتصابی اگرچہ حاصل شدہ نتائج دوسری صورتوں میں بھی درست ہونگے۔ تعمیروں کے ارکان اکثر شہتیر بھی ہوتے ہیں اور داب رک یا بندھن بھی، یعنی اُن پر طولی قوتوں کے علاوہ عرضی قوتیں بھی

ہوتی ہیں۔

۵۶۔ شہتیروں پر فسادی عمل ــــ جزی قوت اور خماؤ کا معیار

اور خماؤ کا معیار ــــ خمیدگی سے پیدا ہونے والے زوروں اور فسادوں سے بحث کرنے سے پہلے اُن فسادی عملوں سے بحث کی جائیگی جو شہتیروں پر لداؤ کے مختلف نظاموں اور سہارے کے مختلف طوروں سے پیدا ہوں۔



شکل ۵۵

اگر ہم ایک شہتیر سے بحث کریں جس پر متعدد عرضی بوجھ عمل کریں جیسا کہ شکل ۵۵ میں ہے تو پورا شہتیر بوجھوں و۱، و۲، و۳ وغیرہ اور سہارے کی قوتوں یا ردِّ عملوں ہا۱ اور ہا۲ کے زیرِ عمل تعادل میں ہوگا۔ نیز اگر شہتیر کو ایک خیالی تراش لا سے دو حصوں ا اور ب میں تقسیم کیا جائے تو یہ دونوں حصے تعادل میں ہونگے۔ ا کو تعادل میں رکھنے والا نظام قوتوں و۱، و۲، و اور ہا اور نیز اُن قوتوں پر مشتمل ہے جو شہتیر کے اندر زور کی کیفیت کی وجہ سے حصہ ب حصہ ا پر تراش لا میں سے عمل کرتا ہے۔ ان مؤخر الذکر قوتوں سے ہم آسانی کے لیے اُن کے مجموعی اُفقی اور انتصابی

صفحہ ۱۵۲

اجزائے ترکیبی اور اُن کے معیاروں کے ذریعے بحث کرینگے۔ سکونیات کی رُو سے تعادل کی معمولی شرائط کے اطلاق سے حسبِ ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں:۔

(۱) چونکہ حصہ ۱ پر کوئی اُفقی قوتیں نہیں سوائے اُن کے جو تراش لا میں سے عمل کرتی ہیں اس لیے اُن قوتوں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا۔

(۲) چونکہ ۱ پر انتصابی پچھوار قوتوں کا جبری مجموعہ

$$و_{۱} + و_{۲} + و_{۳} - ر_{۱}$$

ہے اس لیے ۱ پر ب کی لگائی ہوئی حاصل انتصابی اوپر وار قوت $و_{۱} + و_{۲} + و_{۳} - ر_{۱}$ ہوگی جو ایک اوپر وار قوت

$$ر_{۲} - (و_{۴} + و_{۵})$$

کے بھی مساوی ہے۔

جزی قوت — اس طرح ۱ پر ب کی لگائی ہوئی حاصل انتصابی قوت تراش لا کے کسی جانب کی انتصابی قوتوں کے جبری مجموعے کے مساوی ہے۔ ب پر ۱ کا عمل اس کے مساوی اور مخالف ہوگا۔ یہ مجموعی انتصابی جزوِ ترکیبی زیرِ بحث تراش پر کی جزی قوت کہلاتی ہے۔

(۳) اگر لا سے $و_{۱}$، $و_{۲}$، $و_{۳}$ اور $ر_{۱}$ کے فاصلے علی الترتیب $ل_{۱}$، $ل_{۲}$، $ل_{۳}$ اور لا ہوں تو ۱ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا معیار لا کے گرد —

$$م = ر_۲ ل_۱ - و_۱ ل_۱ - و_۲ ل_۲ - و_۳ ل_۳$$

جو $و_۳ ل_۳ + و_۲ ل_۲ - ر_۲ ل_۱$ کے بھی مساوی ہے اور

اگر اوپر کا جملہ مثبت ہو تو موافق سمتِ ساعت ہے۔

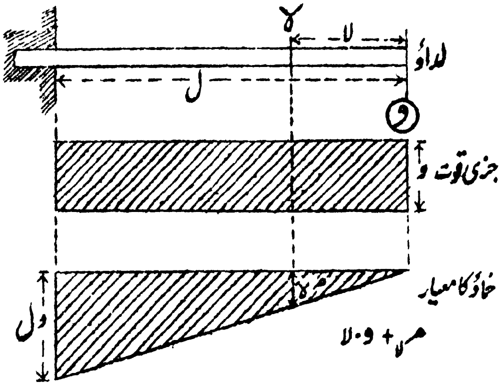
حصہ ب حصہ ا پر جو معیار لگاتا ہے وہ اس کی تعدیل کریگا اور اِس طرح مقدار میں اُس کے مساوی ہوگا۔

خماؤ کا معیار۔۔۔ اوپر کی مقدار م زیرِ غور تراش کے کسی ایک جانب کی تمام قوتوں کے معیاروں کا جبری مجموعہ ہے اور اس کو خماؤ کا معیار کہتے ہیں - اس کو متوازن کرنے والا معیار جو حصہ ب حصہ ا پر لگاتا ہے اِس تراش پر شہتیر کا مزاحمت کا معیار کہلاتا ہے - تعادل کی سکونیاتی شرائط سے ظاہر ہے کہ مزاحمت کا معیار اور خماؤ کا معیار مقدار میں باہم مساوی ہونگے۔

۵۷ - جزی قوت اور خماؤ کے معیار کے نقشے۔۔۔

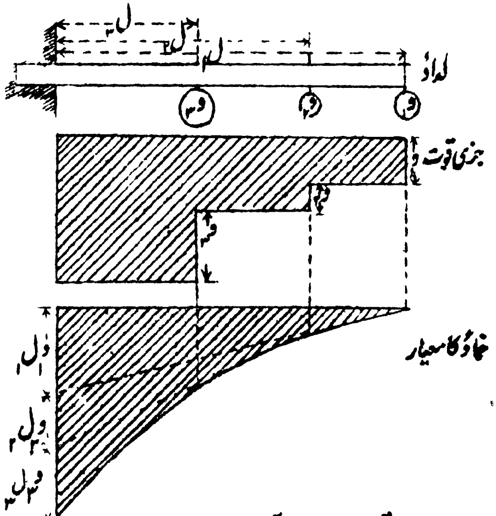
جزی قوت اور خماؤ کا معیار دونوں عموماً مقدار میں ایک لدے ہوئے شہتیر کے طول میں نقطہ بہ نقطہ بدلینگے - ان کی قیمت کسی خاص تراش پر حساب کے ذریعے محسوب کی جاسکتی ہے، یا عام جبری جملے معلوم کیے جاسکتے ہیں جن سے شہتیر کی کسی تراشش پر خماؤ کا معیار اور جزی قوت معلوم ہوسکیں۔ خماؤ کے معیار اور جزی قوت کے تغیر کو منحنیوں کے ذریعے ترسیماً بھی تعبیر کیا جاسکتا ہے جن کے اساس کسی پیمانے پر شہتیر کے طول کو تعبیر کریں اور انتصابی معین خماؤ کے معیاروں یا جزی قوتوں کو جیسی کہ صورت ہو - خماؤ کے معیار اور جزی قوت کے منحنیوں کی چند سادہ تمثیلی مثالیں اشکال ۵۹ تا ۶۹ میں

دی گئی ہیں - ہر صورت میں ھ خماؤ کے معیار، ق جزی قوت،
اور س ردِ عمل یا سہارنے والی قوت کو تعبیر کرتا ہے ۔ اور ان حروف کو صفحہ ۱۰۶



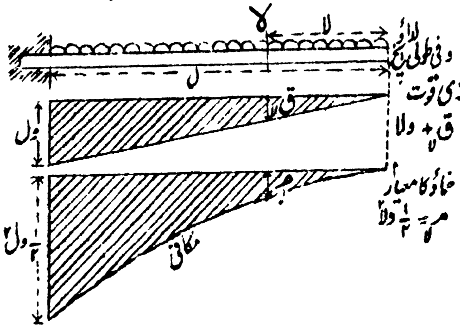
شکل ۵۹ - برآمدہ بیرم - سرے پر بوجھ

لاحقے لگا دیے جاتے ہیں جن سے ان کا محل تعبیر ہوتا ہے - خماؤ کے
معیار اور جزی قوتوں کی دوسری صورتوں سے آگے چل کر بحث کی جائیگی

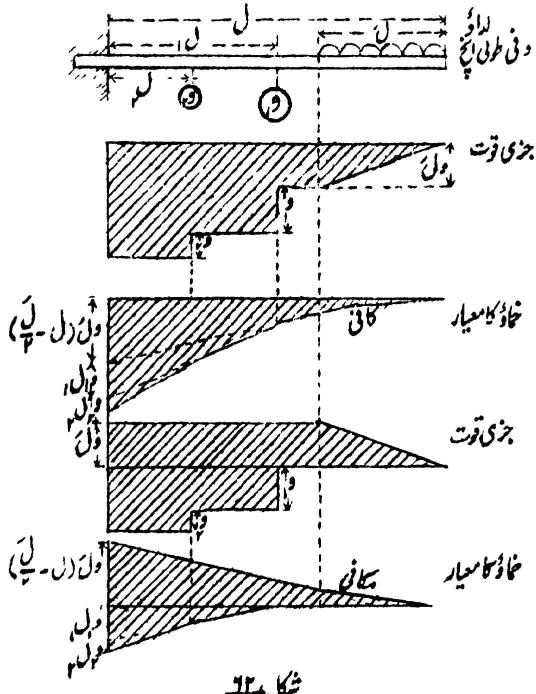


شکل ۶۰ - برآمدہ بیرم، متعدد بوجھ

(دیکھو دفعات ۸۴ تا ۹۱) - متحرک بوجھوں کی صورت میں فسادی عمل بوجھ
کے محل کے ساتھ بدلتے ہیں - ان صورتوں سے تعمیروں کے نظریے
کی کتابوں میں بحث کی گئی ہے - اگر ایک شہتیر پر متعدد مختلف مرتکز صفحہ ۲۰۱



شکل ۶۱ - یکساں لدا ہوا برآمدہ بیم

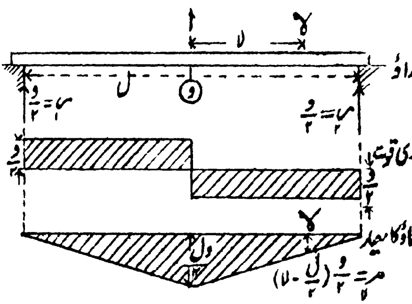


شکل ۶۲

یا منقسم بوجھ ہوں تو کسی تراش پر خماؤ کا معیار اُن بوجھوں سے
علٰحدہ علٰحدہ پیدا ہونے والے خماؤ کے معیاروں کا جبری مجموعہ
ہوگا۔ نقشے کھینچتے وقت بعض اوقات اس میں آسانی ہوتی ہے صفحہ ۱۰۸
کہ دو علٰحدہ بوجھوں کے نقشوں کے معینوں کو جمع کیا جائے اور
جبری مجموعے کو ترسیم کیا جائے، یا ان دو منحنیوں کو ایک ہی اساسی
خط کی مقابل جانبوں میں ترسیم کیا جائے اور حاصل قیمتوں کو اس طرح
بننے والے نقشے کی بالائی اور زیرین حد کے درمیان کے انتصابی مقطوع
سے بالراست ناپ لیا جائے۔

یہ دونوں طریقے شکل ۶۲ میں ترتیب میں دکھائے گئے ہیں۔

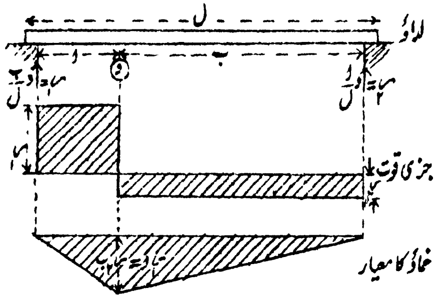
اشکال ۵۹ تا ۶۲ برآمدہ بیرموں کو تعبیر کرتی ہیں، یعنی ایسے شہتیروں
کو جو ایک سرے پر مضبوطی کے ساتھ ثابت ہیں اور دوسرے سرے پر
آزاد۔ اشکال ۶۳ تا ۶۶ ایسے شہتیروں کو تعبیر کرتی ہیں جن کے



شکل ۶۳۔ آزادانہ سہارا ہوا شہتیر۔ مرکزی بوجھ

دونوں سرے سہاروں پر آزادانہ ٹکے ہوئے ہیں اور جن پر
مختلف بوجھ عمل کرتے ہیں کہ شکلوں میں دکھائے گئے ہیں۔ کسی
خاص نقطے پر جزی قوت یا خماؤ کا معیار محسوب کرنے کے لیے
یا ان دونوں مقداروں کے لیے شہتیر کے ایک حصہ یا پورے

طول کے ہر نقطے کے لیے حروف میں ایک جملہ حاصل کرنے کے لیے پہلا مرحلہ عموماً یہ ہوتا ہے کہ نامعلوم سہارنے والی قوتوں یا ردِعملوں

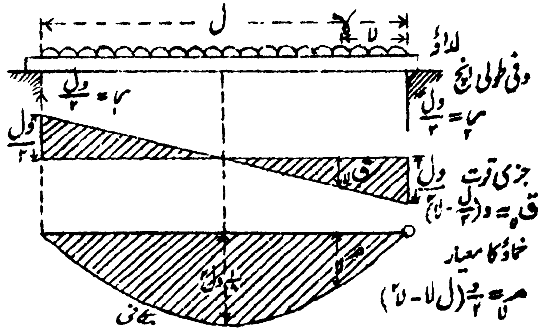


شکل ۲۱

(س۱ اور س۲) کو معلوم کیا جائے۔ یہ اس طرح آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں کہ دونوں میں سے کسی ایک سہارے کے گرد تمام بیرونی قوتوں (مع ردِعملوں) کا معیار لے کر ان معیاروں کے جبری مجموعے کو صفر کے مساوی رکھا جائے۔ جب تمام بیرونی قوتیں معلوم ہو جائیں تو کسی تراش کے لیے جزی قوت اور خماؤ کا معیار آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔ جزی قوت تراش کی کسی ایک جانب کی تمام بیرونی عرضی قوتوں کا جبری مجموعہ ہوگی اور خماؤ کا معیار تراش کی کسی ایک جانب کی تمام بیرونی قوتوں کے معیاروں کا جبری مجموعہ ہوگا۔ صفحہ ۱۰۹

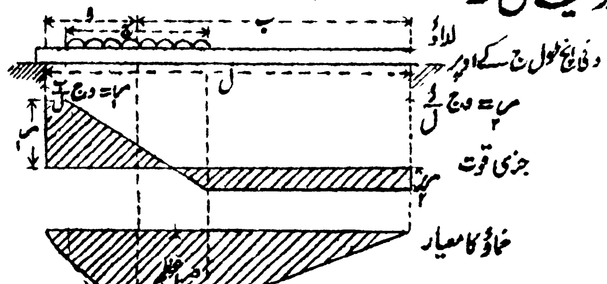
حاصل مجموعوں کی علامت کا سوال اختیاری ہے اور کچھ زیادہ اہم نہیں۔ لیکن نقشہ کھینچتے وقت مخالف قوتوں اور معیاروں کو اساسی خط کی مقابل جانبوں میں بتانا مناسب ہے۔ مثال کے طور پر شکل ۲۱ والی صورت پر پورے طور پر غور کرو۔ بوجھ شہتیر کے

طول ج پر و فی طولی انچ کی شرح سے یکساں پھیلا ہوا ہے - بوجھ کے



شکل ۶۵ - آزادانہ سہارا ہوا شہتیر - یکساں پھیلا ہوا بوجھ

مرکزِ جاذبہ کے فاصلے شہتیر کے بائیں اور دائیں سہاروں سے علی الترتیب ا اور ب ہیں - اس طرح ا + ب = ل = شہتیر کا فصل سہاروں کے درمیان -



شکل ۶۶ - آزادانہ سہارا ہوا شہتیر

دائیں سہارے کے گرد معیار لینے سے ---

م۱ × ل = و × ج × ب

م۱ = و × ج × ب/ل

م۲ = و × ج × ا/ل

جزی قوت ق بائیں سہارے سے بوجھ کے شروع تک $\text{س}_{۱}$ کے مساوی ہے۔ صفر عنلا

لدے ہوئے حصے میں بائیں سہارے سے فاصلہ لا پر یعنی

$\text{لا} = \text{ا} - \frac{\text{ج}}{۲}$ سے $\text{لا} = \text{ا} + \frac{\text{ج}}{۲}$ تک

$$\text{ق}_{\text{لا}} = \text{س}_{۱} - \text{و}\left\{\text{لا} - \left(\text{ا} - \frac{\text{ج}}{۲}\right)\right\}$$

$$= \text{وج}\frac{\text{ب}}{\text{ل}} - \text{ولا} + \text{و}\left(\text{ا} - \frac{\text{ج}}{۲}\right)$$

یا $$\text{و}\left(\frac{\text{ج ب}}{\text{ل}} + \text{ا} - \text{لا} - \frac{\text{ج}}{۲}\right)$$

جو صفر کے مساوی ہے جب کہ $\text{لا} = \text{ج}\frac{\text{ب}}{\text{ل}} + \text{ا} - \frac{\text{ج}}{۲}$

باقی طول میں دائیں سہارے تک جزی قوت عددی طور پر $\text{س}_{۲}$ کے اور جبری طور پر $\text{س}_{۱} - \text{وج}$ کے مساوی ہے یعنی

$$\text{ق} = \text{و}\left(\frac{\text{ج ب}}{\text{ل}} - \text{ج}\right) = \text{وج}\left(\frac{\text{ب} - \text{ل}}{\text{ل}}\right) = -\text{وج}\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$$

خماؤ کا معیار (م) بائیں سہارے سے بوجھ کے شروع تک بائیں سہارے سے فاصلہ لا پر یعنی $\text{لا} < \text{ا} - \frac{\text{ج}}{۲}$ کے لیے تراش کی بائیں طرف معیاروں پر غور کرنے سے —

$$\text{م}_{\text{لا}} = \text{س}_{۱} \times \text{لا} = \text{وج}\frac{\text{ب}}{\text{ل}} \times \text{لا} \quad \text{(ایک خطِ مستقیم)}$$

لدے ہوئے حصے میں، یعنی جہاں لا > ا - ج/۲ اور < ا + ج/۲

م(لا) = ں(۱) × لا - {لا - (ا - ج/۲)} × و × ۱/۲ {لا - (ا - ج/۲)}

= و ج ب/ل × لا - و/۲ (لا - ا + ج/۲)^۲

اِس جملے کی پہلی رقم شکل میں دکھائے ہوئے بائیں ہاتھ کے نقطہ دار خطِ مستقیم سے تعبیر ہوتی ہے اور دوسری منحنی اور اِس خطِ مستقیم کے درمیان کے فاصلے سے ۔ اس طرح م(لا) سایہ دار نقشے کے انتصابی معین سے تعبیر ہوگا۔

بوجھ کے دائیں طرف، یعنی جب کہ لا > ا + ج/۲، بائیں طرف کے معیاروں پر غور کرنے سے

م(لا) = ں(۱) لا - و ج (لا - ا)

= و ج ب/ل لا - و ج (لا - ا)

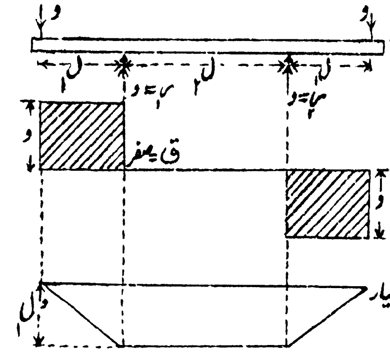
یا م(لا) = و ج ا - و ج لا (۱ - ب/ل)

یا و ج ا - و ج لا/ل × ا

= و ج ا/ل (ل - لا)

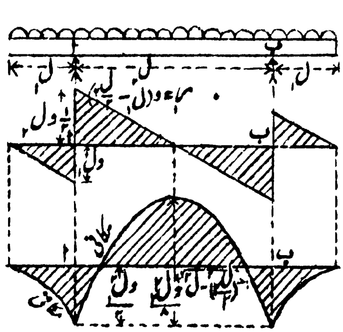
= ں(۲) (ل - لا) (ایک خطِ مستقیم)

صفحہ ۱۱۱ یہی نتیجہ آسانی سے اس طرح معلوم ہو سکتا تھا کہ دائیں طرف کے معیاروں پر غور کیا جائے اور زیرِ غور حصے کے لیے دائیں طرف قوت صرف ہ۲ ہے۔
شکل ۶۷ ایک ایسے شہتیر کو تعبیر کرتی ہے جس کا طول تو



شکل ۶۷

ل + ۲ ل ہے لیکن متشاکل سہاروں کے درمیان فصل اس سے چھوٹا ہے اور ل کے مساوی ہے اور شہتیر کے سروں پر مساوی بوجھ



شکل ۶۸

لگائے گئے ہیں۔ سہاروں کے درمیان جزی قوت صفر ہوگی اور خماؤ کا معیار مستقل ہوگا۔

شکل ۶۸ میں طول $\text{ل}_2 + 2\text{ل}_1$ کا ایک شہتیر دکھایا گیا ہے جس پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ و ہے اور سہارے باہمی فاصلہ ل_2 پر ہیں اور سرے دونوں طرف سہاروں سے بقدر طول ل_1 کے باہر نکلے ہوئے ہیں۔ سہاروں پر خماؤ کا معیار

$$\text{م} = \text{و}\,\text{ل}_1 \times \frac{\text{ل}_1}{2} = \frac{\text{و}\,\text{ل}_1^2}{2}$$

فصل کے اندر کسی سہارے سے فاصلہ لا پر خماؤ کا معیار۔ صفحہ ۱۱۲

$$\text{م}_{\text{لا}} = \text{و}\,(\text{ل}_1 + \text{لا}) \times \frac{\text{ل}_1 + \text{لا}}{2} - \text{ہ}_1\,\text{لا}$$

$$= \frac{\text{و}}{2}(\text{ل}_1 + \text{لا})^2 - \text{و}\,\text{لا}\left(\text{ل}_1 + \frac{\text{ل}_2}{2}\right)$$

$$= \frac{\text{و}}{2}\text{ل}_1^2 - \frac{\text{و}}{2}(\text{ل}_2\,\text{لا} - \text{لا}^2)$$

اس جملے کی پہلی رقم سہاروں پر کا معیار ہے اور دوسری رقم طول ل_2 کے یکساں لدے ہوئے فصل کی صورت میں خماؤ کا معیار ہے (دیکھو شکل ۶۵)۔ یہ دو رقمیں مخالف علامتوں کی ہیں اور اگر ل_2 کافی بڑا ہو تو خماؤ کا معیار فصل کے اندر دو نقطوں پر صفر ہوکر علامت بدلیگا۔ ان نقطوں کے لیے

$$\frac{\text{و}}{2}\text{ل}_1^2 - \frac{\text{و}}{2}\,\text{لا}\,(\text{ل}_2 - \text{لا}) = 0$$

$$\text{لا}^2 - \text{ل}_2\,\text{لا} + \text{ل}_1^2 = 0$$

یا

$$\text{لا} = \frac{\text{ل}_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{ل}_2}{2}\right)^2 - \text{ل}_1^2}$$

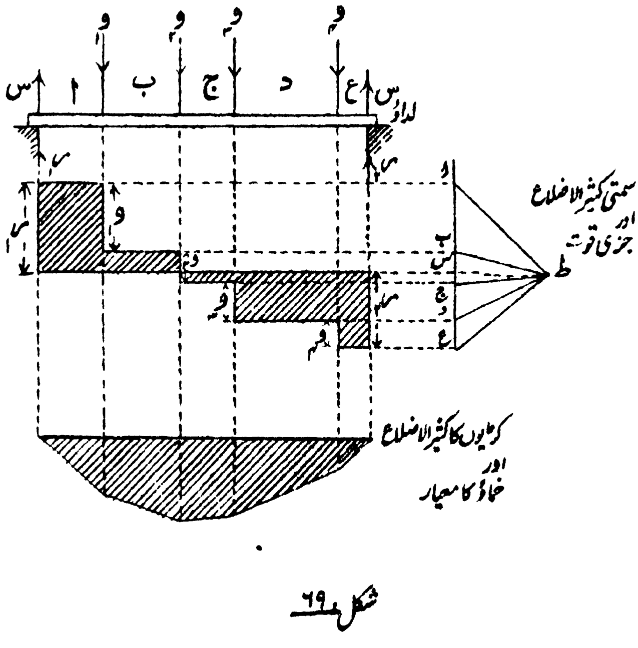
یعنی یہ دو نقطے فصل کے وسط کے دونوں جانب وسط سے فاصلہ $\pm\sqrt{\left(\frac{ل}{۲}\right)^۲ - ل_۱^۲}$ پر ہیں۔ یہ دونوں نقطے منطبق ہونگے (فصل کے وسط پر) اگر $ل = ۲ل_۱$ اور ان کا وجود ہی نہیں ہوگا اگر $ل$ چھوٹا ہو $۲ل_۱$ سے اور اس صورت میں خماؤ کا معیار علامت نہیں بدلیگا۔

نقاطِ انعطاف ــــ ظاہر ہے کہ مخالف علامت کے خماؤ کے معیار مخالف انحنا کی خمیدگی پیدا کرنے کا اقتضا رکھینگے۔ اگر خماؤ کے معیار کا منحنی مسلسل ہو تو علامت کی تبدیلی کے لیے ضروری ہے کہ صفر قیمت میں سے گزرے اور صفر خماؤ کے معیار اور علامت کی تبدیلی کا یہ نقطہ نقطۂ انعطاف یا خیالی قبضہ کہلاتا ہے۔ شکل ۶۸ کے نقاطِ انعطاف کا محل مساوات $م_۱ = ۰$ سے ابھی معلوم کیا گیا ہے۔

۵۸ - خماؤ کا معیار کڑیوں کے یا ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے

ــــ کسی افقی شہتیر کے اوپر عمل کرنے والی انتصابی قوتوں کے نظام کے لیے جو ریسمانی یا کڑیوں کا کثیر الاضلاع کھینچا جائے اس کا انتصابی عرض کسی تراش پر اس تراش کے خماؤ کے معیار کو تعبیر کریگا۔ یہ شکل ۶۹ میں دکھایا گیا ہے جس میں سمتی کثیر الاضلاع کے سمتی س ط کو افقی بنا کر کڑیوں کے کثیر الاضلاع کا اساس افقی بنایا گیا ہے اور س ط کو افقی اس طرح بنایا گیا کہ جو نقطہ س بوجھ کے خط ا ب ج د ع کو سہارنے والی قوتوں کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اس سے افقی خط کھینچا گیا اور اس کے اوپر

قطب ط انتخاب کیا گیا - کڑیوں کے کثیرالاضلاع کے معینوں سے خماؤ کے معیار کے تعبیر ہونے کا آسان ثبوت یہ ہے کہ کڑیوں کے کثیرالاضلاع کے اضلاع کو خارج کرنے سے جو مثلث بنتے ہیں وہ سمتی کثیرالاضلاع کے متناظر مثلثوں کے مشابہ ہوتے ہیں - اور اس تشابہ کے ذریعے مطلوبہ ثبوت حاصل ہوجاتا ہے - خماؤ کے معیار کا پیمانہ ا انچ کو ق × ف × ی پونڈ انچ ہوگا جہاں قوت کا پیمانہ ا انچ کو ق پونڈ، فاصلے کا ا انچ کو ف انچ ہے اور قطبی فاصلہ س ط طول میں ی انچ ہو- یہ ضروری نہیں کہ نقشے کو افقی اساس پر کھینچا جائے لیکن فاصلہ ی کو افقاً لینا چاہیے اور خماؤ کا معیار انتصابی معینوں سے ناپنا چاہیے - صفحہ ۱۱۳



شکل ۶۹

جزی قوت کا نقشہ سمتی کثیر الاضلاع کے انتصابی بوجھ کے خط سے ظل لے کر بنایا گیا ہے۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ کھینچنے کا یہی طریقہ یکساں اور کسی طرح پر پھیلے ہوئے بوجھ کی صورت میں بھی کام دے سکتا ہے اور اس میں جتنی صحت مطلوب ہو اتنی صحت حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس کے لیے یہ کرنا ہوگا کہ پھیلے ہوئے بوجھ کو شہتیر کے طول میں متعدد حصوں میں تقسیم کر کے ہر ایک حصے کو اس کے مرکزِ جاذبہ پر مرتکز سمجھا جائے۔ اس سے رسیمانی کثیر الاضلاع ایک مستقیم الاضلاع شکل ہوگی۔ خماؤ کے معیار کا اصلی منحنی اس کو اندر کی جانب (نہ کہ باہر کی جانب) مس کرنے والا منحنی ہوگا۔

۵۹ - خماؤ کے معیار اور جزی قوت کے درمیان

ربط ــــــ ایک شہتیر کے جس پر و فی اکائی طول کا ایک مسلسل پھیلا ہوا بوجھ ہے چھوٹے طول مف لا (شکل ۸۰) پر غور کرو۔ و ضروری نہیں کہ مستقل ہو لیکن مف لا اتنا چھوٹا لو کہ و کو اس کے اوپر مستقل سمجھا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ٹکڑے مف لا کے دونوں سروں پر جزی قوتیں ق اور ق + مف ق اور خماؤ کے معیار م + مف م ہیں جیسا کہ شکل ۸۰ میں دکھایا گیا ہے۔

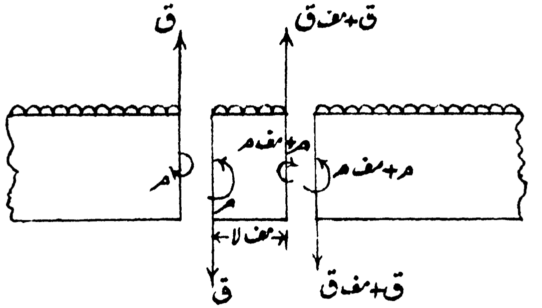
ٹکڑے مف لا پر کی انتصابی اوپر وار اور نیچے وار کی قوتوں کو مساوی رکھنے سے

$$ق + مف ق = ق + و مف لا$$

یا $$مف ق = و مف لا$$

یا $$\frac{فرق}{فرلا} = و \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

یعنی جزی قوت کی تبدیلی کی شرح (جو جزی قوت کے منحنی کے ڈھال سے تعبیر ہوتی ہے) مقدار میں لداؤ کی حدت کے مساوی ہے۔ صفحہ ۱۲۱



شکل ۸۰

فاصلہ لا۔ لا. میں تکمل کرنے سے

$$\text{ق} - \text{ق}_{.}\ (\text{جزی قوت کی مجموعی تبدیلی}) = \int_{\text{لا}_{.}}^{\text{لا}} \text{د} \cdot \text{فلا}$$

یا

$$\text{ق} = \text{ق}_{.} + \int_{\text{لا}_{.}}^{\text{لا}} \text{د} \cdot \text{فلا}$$

اس میں ہر رقم کے ساتھ اس کے موزوں علامت لینی چاہیے۔

د = مستقل کے لیے ان ربطوں کو اشکال ۶۱، ۶۵، ۶۸ کے جزی قوت کے نقشوں میں دکھایا گیا ہے۔

ٹکڑے مف لا پر عمل کرنے والی تمام بیرونی قوتوں کا بائیں طرف کی تراش کے کسی نقطے کے گرد معیار لے کر مخالف معیاروں کو مساوی رکھنے سے

م + (ق + مف ق) مف لا − و مف لا × مف لا / ۲

= م + مف م

یا پہلے رُتبے کی چھوٹی مقداروں تک

مف م = ق مف لا

یعنی فرم / فرلا = ق .... (۲)

یعنی خماؤ کے معیار کی تبدیلی کی شرح جزی قوت کے مساوی ہے۔
اس لیے تکمل کرنے سے، لا سے لاً تک خماؤ کے معیار کی مجموعی تبدیلی $\int_{\text{لا}}^{\text{لاً}}$ ق فرلا ہوگی، جو لا اور لاً پر کے معینوں کے درمیان جزی قوت کے نقشے کے رقبے کے متناسب ہے۔ مثلاً اشکال ۶۳ تا ۶۹ میں یہ رقبہ شہتیر کے سروں کے درمیان صفر ہے کیونکہ اساسی خط کے اوپر اور نیچے کا رقبہ مساوی ہے۔
ربط (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ جزی قوت کے نقشے کے معین خماؤ کے معیار کے منحنی کے ڈھالوں کے متناسب ہیں۔ جہاں جزی قوت صفر ہوکر علامت بدلے خماؤ کے معیار کی قیمت (ریاضیاتی) اعظم یا اقل ہوگی۔ اس واقعے سے کسی شہتیر کا زیادہ سے زیادہ خماؤ کا معیار معلوم کرنے کا ایک آسان طریقہ ہاتھ آتا ہے جیساکہ اشکال ۶۵، ۶۶ اور ۶۸ میں دکھایا گیا ہے۔ شکل ۶۶ میں، وہ تراش جس پر جزی قوت صفر ہے صریحاً طول ج کو نسبت ر : س میں تقسیم کرتی ہے۔ یا دفعہ ۵۰ کے صفحہ ۱۱۵
جملے کو استعمال کریں تو ق بائیں سہارے سے فاصلہ

$$ج\frac{ب}{ل} + ا - \frac{ج}{۲}$$

پر صفر ہوگا۔ اس نقطے پر خماؤ کا معیار اعظم ہے اور اس کی قیمت آسانی سے محسوب ہو سکتی ہے۔

علامتیں ـــ دیکھو چونکہ لا دائیں طرف مثبت لیا جاتا ہے اور و نیچے کی طرف مثبت، اس لیے (۱) میں ق کو اُس وقت مثبت سمجھا گیا ہے جب کہ اس کا عمل زیرِ غور تراش کے بائیں طرف اوپر وار ہو اور دائیں طرف نیچے کو۔ اس لیے علامت کا خیال رکھنے اور نیچے وار قوتوں کو مثبت سمجھنے سے جزی قوت وہ نچوار اندرونی قوت ہے جو کسی تراش کے دائیں طرف عمل کرے، یا کسی تراش کے دائیں جانب اوپر وار عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا جبری مجموعہ، یا بائیں جانب نیچے وار عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا جبری مجموعہ ہے۔ نیز (۲) میں مر کو اس وقت مثبت سمجھا گیا ہے جب کہ تراش کے بائیں طرف شہتیر کے حصے پر اس کا عمل موافق سمتِ ساعت ہو اور دائیں طرف کے حصے پر مخالف سمتِ ساعت۔ اس لیے خماؤ کا معیار تراش کے دائیں طرف کی بیرونی قوتوں کا موافق سمتِ ساعت معیار یا بائیں طرف کی بیرونی قوتوں کا مخالف سمتِ ساعت معیار ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ مثبت خماؤ کے معیار سے اوپر وار تحدب پیدا ہوگا اور منفی خماؤ کے معیار سے نیچے وار تحدب۔

مرتکز بوجھ ـــ ایسے بوجھوں کی صورت میں جو فصل کے ثابت نقطوں پر (کم وبیش) مرتکز ہوں جزی قوت کا منحنی (دیکھو اشکال ۶۰، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۷ اور ۶۹) غیر مسلسل ہوتا ہے، اور نیز خماؤ کے معیار کے منحنی کا ڈھال بھی غیر مسلسل

ہوتا ہے - البتہ لداؤ کے نقاط کے درمیان اوپر کے ربط درست رہتے ہیں اور جس تراش پر جزی قوت کا منحنی اساسی خط کو قطع کرتا ہے وہ ایک اعظم خماؤ کے معیار کی تراش ہوگی (دیکھو اشکال ۶۳، ۶۷، ۶۹)۔

مرتکز بوجھ در اصل عملاً ایسا بوجھ ہوتا ہے جو ایک بہت چھوٹے طول پر پھیلا ہوا ہوتا ہے (ضروری نہیں کہ یکساں پھیلا ہو)۔ اس طرح بوجھ کے نقطے پر جزی قوت کے نقشے میں جو انتصابی خطوط دکھائے جاتے ہیں اُن کو در اصل انتصابی سمت سے تھوڑا جھکا دینا چاہیے کیونکہ کسی تراش پر جزی قوت کی صرف ایک قیمت ہونی چاہیے۔

مثال ۱ — ایک ۲۰ فٹ طول کے شہتیر کے دونوں سرے سہاروں پر ٹکے ہوئے ہیں اور اس پر $\frac{1}{2}$ ٹن فی طولی فٹ کا ایک بوجھ ہے اور ایک اور بوجھ $1\frac{1}{2}$ ٹن فی طولی فٹ کا جو بائیں سرے سے ۱۲ فٹ طول تک ہے۔ اعظم خماؤ کے معیار کا محل اور مقدار معلوم کرو اور جزی قوت اور خماؤ کے معیار کے نقشے کھینچو۔

لداؤ شکل ۷۱ میں اوپر ا ج ب پر دکھایا گیا ہے۔

$\frac{1}{2}$ ٹن فی فٹ کی وجہ سے ردِ عمل ا اور ب پر ۵ ٹن ہیں۔

$1\frac{1}{2}$ ٹن فی فٹ کے بوجھ سے جس کا مرکزِ جاذبہ ا سے ۶ فٹ ہے۔

(ب کا ردِ عمل) × ۲۰ = ۱۸ × ۶

ب کا ردِ عمل = ۵٫۴ ٹن

اس لیے ا کا ردِ عمل = ۱۸ − ۵٫۴ = ۱۲٫۶ ٹن } دوسرے بوجھ کی وجہ سے

دونوں بوجھوں کے لیے جزی نقشے علیحدہ ایک اُفقی خط کی مقابل جانبوں میں کھینچے گئے ہیں اور حاصل نقشہ سایہ دار دکھایا گیا ہے۔

صفحہ ۱۱۶ خماؤ کا معیار وہاں اعظم ہے جہاں جزی قوت صفر ہے جیسا کہ د پر دکھایا گیا ہے۔ اس کا فاصلہ بائیں سہارے سے معلوم کرنے کا غالباً آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ جزی قوت

بائیں سہارے پر ۱۷،۶ ٹن ہے اور ۲ ٹن فی طولی فٹ کی شرح سے گھٹتی ہے اس لیے اس کی قیمت صفر

$$\text{بائیں سہارے سے}\ \frac{۱۷،۶}{۲} = ۸،۸\ \text{فٹ}$$

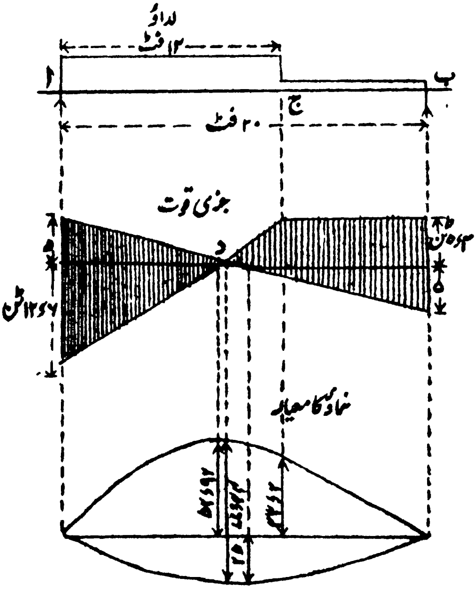
پر ہوگی۔

اس جگہ خماؤ کا معیار

$$= \frac{۸،۸}{۲} \times ۲ \times ۸،۸ - ۸،۸ \times ۱۷،۶ =$$

$$= ۷۷،۴۴\ \text{ٹن فٹ}$$

دونوں بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار کے نقشے شکل ۱۰۱ میں ایک ہی اساسی خط کے مقابل جانب کھینچے گئے ہیں۔ دونوں بوجھوں کا متحدہ نقشہ اُن نقشوں کی حدود کے درمیان کی انتصابی پیمائشوں سے حاصل ہوگا۔



شکل ۱۰۱

اکیلے $\frac{۱}{۲}$ ٹن فی فٹ کے بوجھ کے لیے اعظم خماؤ کا معیار فصل کے وسط میں ہوگا اور

$$= ۵ \times ۱۰ - \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۵ = ۲۵$$

ٹن فٹ

اکیلے $\frac{۱}{۲}$ ۱ ٹن فی فٹ کے بوجھ کے لیے اعظم وہاں ہوگا

جہاں اس بوجھ کی وجہ سے جزی قوت صفر ہے، یعنی ا سے فاصلہ

$12.6 \div 1.5 = 8.4$ فٹ پر ہوگا۔

اس لیے اس منحنی کا اعظم معین —

$= 12.6 \times 8.4 - 8.4 \times 1\frac{1}{2} \times \frac{8.4}{2} = 52.92$ ٹن فٹ

ج پر اس منحنی کا معین

$= 5.4 \times 8 = 43.2$ ٹن فٹ

اور ج کے دائیں طرف یہ راست ب کے فاصلے کی طرح بدلتا ہے۔ اور منحنی ایک خطِ مستقیم ہوتا ہے۔

مثال ۲ — ایک اُفقی شہتیر اب جو ۲۴ فٹ لمبا اور ا پر قبضہ دار ہے، ایک سہارے ج پر ٹکا ہوا ہے جو ا سے ۱۶ فٹ کے فاصلے پر ہے، اور اس شہتیر پر ایک پھیلا ہوا بوجھ ۱ ٹن فی طولی فٹ کا ہے اور ایک اَور بوجھ ۳۲ ٹن ب پر ہے۔ ردِّ عمل، جزی قوتیں اور خماؤ کے معیار معلوم کرو۔ اگر ب پر کا بوجھ گھٹا کر ۸ ٹن کر دیا جائے تو اس سے کیا فرق ہوگا؟

فرض کرو کہ سہارے ج کا اوپر وار ردِّ عمل $ر_ج$ ہے۔

ا کے گرد معیار لینے سے (شکل ۷۲)۔

صفحہ ۱۱۷

$16\, ر_ج = (32 \times 24) + (24 \times 12) = 1056$

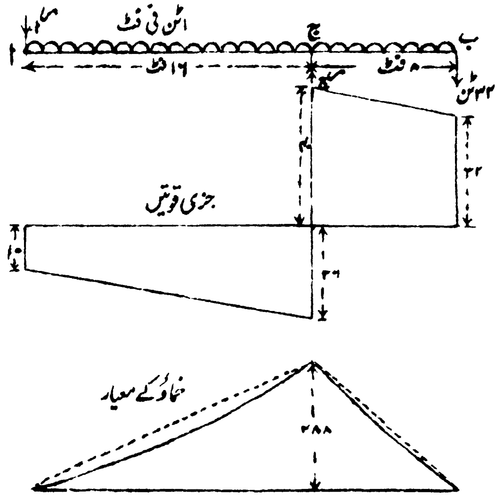
$ر_ج = 66$ ٹن

اگر ا کا اوپر وار ردِّ عمل $ر_ا$ ہو تو

$ر_ا = 24 + 32 - 66 = -10$ ٹن

یا ۱۰ ٹن نیچے کو۔

جزی قوت کا نقشہ شکل ۶-۲۰ میں دکھایا گیا ہے۔ ب پر جزی قوت ۳۲ ٹن ہے، وہاں سے بتدریج بڑھ کر ج پر اس کی قیمت بقدر ۸ ٹن کے زیادہ ہے۔ یہاں بقدر ۶۶ ٹن نیچے گھٹ کر مخالف علامت کی ۲۶ ٹن ہو جاتی ہے۔ ج سے ا تک مجموعی تبدیلی



شکل ۶-۲۰

۱۶ ٹن یکساں شرح سے ہے اور ا پر قیمت ۱۰ ٹن ہے۔

ج پر خماؤ کا معیار ــــ

= (۸×۳۲) + (۸×۴) = ۲۸۸ ٹن فٹ

ا اور ب پر اس کی قیمت صفر ہوتی ہے اور کسی حصے میں بھی ریاضیاتی مفہوم میں اعظم نہیں ہوتی۔ ب سے ۴ فٹ کے فاصلے پر خماؤ کا معیار

= (۴×۳۲) + (۴×۲) = ۱۳۶ ٹن فٹ

ا اور ج کے وسط میں

$= (۱۰ \times ۸) + (۸ \times ۴) = ۱۱۲$ ٹن فٹ

پورا نقشہ شکل ۴۲ میں دکھایا گیا ہے -

ب پر صرف ۸ ٹن کا بوجھ سمجھ کر مسئلے کو حل کرنے سے

$$۱۶ \, ر_ج = (۸ \times ۲۴) + (۲۴ \times ۱۲) = ۱۹۲ + ۲۸۸$$

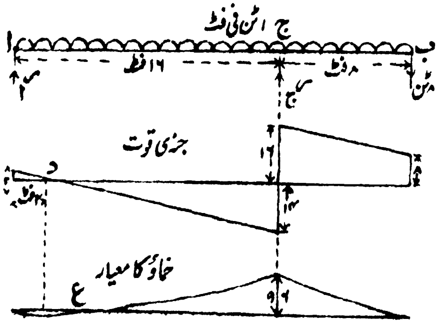
$$= ۴۸۰$$

$$ر_ج = ۳۰ \text{ ٹن}$$

مجموعی بوجھ $= ۲۴ + ۸ = ۳۲$ ٹن

$ر_ا = ۲$ ٹن اوپر وار

صفحہ ۱۱۸ جزی قوت اور خماؤ کے معیار کے نقشے شکل ۴۳ میں دکھائے گئے ہیں - جزی قوت ب پر ۸ ٹن ہے اور ۸ ٹن اور بڑھ کر ج پر ۱۶ ٹن ہوجاتی ہے - یہاں ۳۰ ٹن گھٹ کر مخالف علامت کے ۱۴ ٹن ہوجاتی ہے - ج سے ا تک اس میں ۱۶ ٹن کی تبدیلی ہوتی ہے



شکل ۴۳

اور ا پر اس کی قیمت ۲ ٹن ہوتی ہے۔ ج اور ا کے درمیان اس کی قیمت صفر ہوتی ہے اور علامت بدلتی ہے۔

(ریاضیاتی) اعظم خماؤ کے معیار کی تراش ا اور ج کے درمیان وہ ہوگی جہاں جزی قوت صفر ہے، اور چونکہ ا پر جزر ۲ ٹن ہے اور ۱ ٹن فی فٹ کی شرح سے گھٹتا ہے اس لیے صفر قیمت تراش د پر ہوگی جو ا سے ۲ فٹ ہوگا۔

ج پر خماؤ کا معیار

= (۸ × ۸) + (۸ × ۴) = ۹۶ ٹن فٹ

ب سے ۴ فٹ پر

= (۴ × ۸) + (۴ × ۲) = ۴۰ ٹن فٹ

ا اور ج کے درمیان ا سے فاصلہ لا پر

= لا × لا/۲ − ۲لا = لا (لا/۲ − ۲)

جو لا = ۴ کے لیے یعنی ا سے ۴ فٹ پر صفر ہے اس لیے یہ نقطہ ع ایک نقطۂ انعطاف ہوگا۔ اس فاصلے کو اس طرح بھی معلوم کر سکتے تھے کہ صریحاً اس کو اد کا دگنا ہونا چاہیے۔

آخر میں م د = ۲ × ۱ − ۲ × ۲ = − ۲ ٹن فٹ

مثال ۳ — ایک شہتیر دونوں سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا ہے اور اس کا فصل ۲۰ فٹ ہے۔ بوجھ منقسم ہے۔ بائیں سہارے پر اس کی شرح ۱ ٹن فی طولی فٹ ہے اور دائیں سہارے پر ۴ ٹن فی طولی فٹ اور سہاروں کے درمیان شرح ہموار طور پر بدلتی ہے۔ اعظم خماؤ کے معیار کا محل اور قیمت معلوم کرو۔

آسانی کے لیے بوجھ کو دو حصوں میں تقسیم کرو۔ ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ۱ ٹن فی طولی فٹ کا اور دوسرا بائیں سہارے سے

صفحہ ۱۱۹

صفر سے بڑھتا ہوا دائیں سہارے پر ۳ ٹن فی طولی فٹ شرح کا - پہلے بوجھ کی وجہ سے دونوں سہاروں کے ردِّ عمل ۱۰ ٹن ہونگے - دوسرے بوجھ کی اوسط حدت ۱٫۵ ٹن فی طولی فٹ، یا مجموعی بوجھ ۳۰ ٹن ہوگا - اس کا مرکزِ جاذبہ بائیں سرے سے $\frac{۲}{۳}$ فصل پر ہوگا - اس طرح اس بوجھ کی وجہ سے دائیں سہارے کا ردِّ عمل ۳۰ ٹن کا $\frac{۲}{۳}$ یعنی ۲۰ ٹن ہوگا، اور بائیں سہارے کا ۱۰ ٹن ہوگا -

اس طرح مجموعی ردِّ عمل بائیں اور دائیں سہارے پر ۲۰ ٹن اور ۳۰ ٹن ہونگے -

بائیں سہارے سے فاصلہ لا فٹ پر بوجھ فی فٹ

$$= ۱ + \frac{۳}{۲۰} \text{ لا ٹن فی فٹ}$$

کیونکہ اس کے بڑھنے کی شرح $\frac{۳}{۲۰}$ ٹن فی فٹ فی فٹ ہے -

طول لا فٹ میں اوسط شرح

$$= \frac{۱}{۲}\left(۱ + ۱ + \frac{۳}{۲۰} \text{ لا}\right) = ۱ + \frac{۳}{۴۰} \text{ لا ٹن فی فٹ}$$

اور لا فٹ پر مجموعی بوجھ —

$$= \text{لا}\left(۱ + \frac{۳}{۴۰} \text{ لا}\right)$$

خماؤ کا معیار اُس جگہ اعظم ہوگا جہاں جزی قوت صفر ہو، یعنی اُس تراش پر جس کے بائیں جانب کا بوجھ بائیں ردِّ عمل ۲۰ ٹن کے مساوی ہو -

اس تراش کے لیے جزی قوت

$$\text{ق} = ۲۰ - \text{لا}\left(۱ + \frac{۳}{۴۰} \text{ لا}\right) = ۰$$

$$۳ \text{ لا}^{۲} + ۴۰ \text{ لا} - ۸۰۰ = ۰$$

$$\text{لا} = ۱۰٫۹۶ \text{ فٹ} = ۱۰ \text{ فٹ } ۱۱٫۵ \text{ انچ}$$

سہارے سے فاصلہ لا فٹ پر خماؤ کا معیار

$$= ۲۰\text{لا} - \text{لا} \times \frac{\text{لا}}{۲} - \frac{۳\text{لا}^{۲}}{۴۰} \times \frac{۱}{۳}\text{لا}$$

جب کہ لا = ۱۰٫۹۶ فٹ تو

$$\text{م} = ۲۱۹ - ۶۰ - ۳۳ = ۱۲۶ \text{ ٹن فٹ}$$

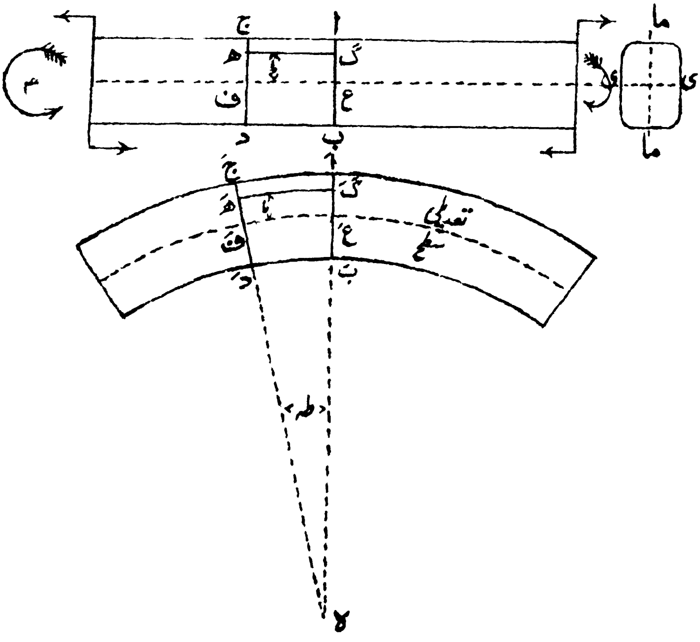
ق اور م کے لیے جو جملے اوپر حاصل ہوئے ہیں اُن سے جزی قوت اور خماؤ کے معیار کے منحنی کھینچے جا سکتے ہیں۔

۶۰۔ لچکدار خماؤ کا نظریہ — سادہ خمیدگی کی صورت میں یعنی ایسے جھکاؤ کی صورت میں جو کسی شہتیر میں جزی قوت کے بغیر خالص جفتوں سے پیدا ہو، فسادی عمل اور شہتیر کے ابعاد، زور ڈلی فسادوں، لچک اور انحنا کے درمیان ربط چند سادہ مفروضات کی مدد سے نہایت آسانی سے قائم کیا جا سکتا ہے۔

خمیدگی کی ایسی صورتوں میں جو "سادہ" نہیں لیکن جو عام طور پر سب میں زیادہ کثرت سے واقع ہوتی ہیں یعنی جن میں جزی قوت کے فسادات نظر انداز کیے جا سکتے ہیں، ان ہی سادہ ربطوں کو بطور تقرب کے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ایسی صورتوں میں " خماؤ کے سادہ نظریے" کا استعمال حق بجانب ہے یا نہیں اس کا تصفیہ اسی پر منحصر ہے کہ اس سادہ نظریے سے جو نتائج حاصل ہوں وہ تجربات کے نتائج سے اور لچکدار خماؤ کے پیچیدہ لیکن صحیح نظریے کے نتائج سے کتنے مطابق ہیں۔

۶۱۔ سادہ خماؤ — متجانس شے کی ایک سیدھی سلاخ کے سروں پر مساوی اور مقابل جفت لگائے جائیں اور کوئی اور قوت عمل نہ کرے تو اس کے سارے طول میں ایک یکساں خماؤ کا معیار ہوگا، ۱۲۱

اور کوئی جزی توت نہ ہونے کی وجہ سے یہ سلاخ سادہ خماؤ کے تحت کہلائیگی۔ اس طرح کا فسادی عمل شکل ۷/۶ میں شہتیر کے سہاروں کے درمیان دکھایا گیا ہے۔ ہم شہتیر کی تراش کو سارے طول میں مستقل، اور ایک وسطی طولی مستوی کے گرد متشاکل فرض کرینگے جس کے اندر اور جس کے متوازی خمیدگی واقع ہوتی ہے۔ شکل ۷/۷ میں وسطی طولی تراش خماؤ سے پہلے اور بعد اور ایک عرضی تراش دکھائی گئی ہیں۔ عرضی تراش ایک محور ما ما کے گرد متشاکل ہے۔



شکل ۷/۷ سادہ خماؤ

یہ فرض کیا جائیگا کہ شہتیر کی عرضی مستوی تراشیں خمیدگی کے بعد بھی مستوی رہتی ہیں اور طولی ریشوں کے علی القوائم رہتی ہیں اور یہ مفروضہ

حق بجانب ہے اس لیے کہ فساوی عمل ہر تراش پر وہی ہے - یہ مفروضہ بد نولی[1] کا مفروضہ کہلاتا ہے۔

کوئی دو بہت قریب عرضی تراشوں اب اور ج د پر غور کرو۔ خمیدگی کے بعد یہ متوازی نہیں رہینگی اور ان کی شکل اَبَ اور جَ دَ کی جیسی ہوجائیگی - اج پر کے مادے کا پرت کھنچ کر اَجَ ہوجائیگا اور ب د پر کا بھنچ کر بَ دَ ہوجائیگا۔ خط ع ف اُس پرت کو تعبیر کرتا ہے جو خمیدگی کے دوران میں نہ کھنچتا ہے نہ بھینچا جاتا ہے۔ اس سطح ع ف میں کوئی طولی فساد نہیں ہوتا اور یہ تعدیلی سطح کہلاتی ہے۔ کسی عرضی تراش سے اس کے تقاطع کا جو خط ہوتا ہے وہ اس تراش کا تعدیلی محور کہلاتا ہے۔ ۱۲۱

فرض کرو کہ تراشیں اَبَ اور جَ دَ خارج ہوکر شکل کے علی القوائم ایک خط پر ملتی ہیں جو ہ سے تعبیر ہوتا ہے، اور فرض کرو کہ تقاطع کا زاویہ طہ (نیم قطری) ہے اور تعدیلی سطح عَ فَ کا نصف قطرِ انحنا ہ عَ = ر ہے - فرض کرو کہ کسی پرت ھَ گَ کی جو ابتدا میں تعدیلی سطح ف ع کے متوازی تھا تعدیلی سطح سے بلندی عَ گَ = ما ہے۔

$$\text{تب}\quad \frac{\text{ھَ گَ}}{\text{عَ فَ}} = \frac{(\text{ر} + \text{ما})\,\text{طہ}}{\text{ر}\,\text{طہ}} = \frac{\text{ر} + \text{ما}}{\text{ر}}$$

اور پرت ھَ گَ کا فساد

$$\text{س} = \frac{\text{ھَ گَ} - \text{ھ گ}}{\text{ھ گ}} = \frac{\text{ھَ گَ} - \text{عَ فَ}}{\text{عَ فَ}}$$

$$= \frac{(\text{ر} + \text{ما})\,\text{طہ} - \text{ر}\,\text{طہ}}{\text{ر}\,\text{طہ}} = \frac{\text{ما}}{\text{ر}}$$

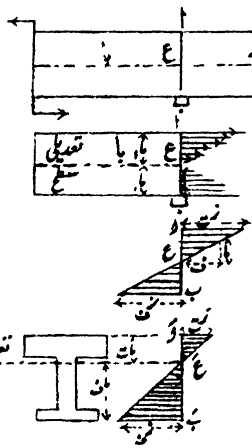
---

[1] Bernoulli

اس لیے اگر لچک کی حد سے تجاوز واقع نہ ہوا ہو تو تعدیلی سطح سے بلندی ما پر طولی تنشی زور کی حدت

$$ف = ے × س = ے × \frac{ما}{ر} ....(۱)$$

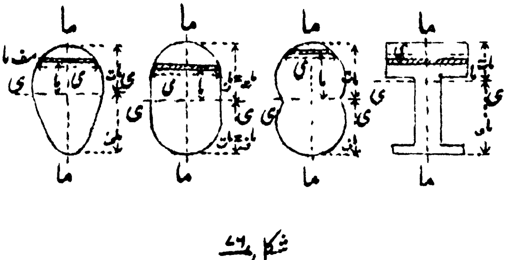
جہاں ے ینگ کا مقیاس ہے، بشرطیکہ مادّے کے پرت طولی زور کے تحت اس طرح عمل کریں گویا کہ آزاد ہیں اور اطراف کے مادے سے جس میں زور کی حدت مختلف ہے کسی طرح کی رکاوٹ پیش نہیں آتی - اگر ے کی قیمت تناؤ اور فشار میں مساوی ہو تو تعدیلی سطح کے مقابل جانب فشاری زور کی حدت بھی فاصلہ ما پر یہی ہوگی -



شکل ۵۵

اس طرح تراش کے ہر نقطے پر راست طولی زور کی حدت ف تعدیلی محور سے نقطے کے فاصلے کے متناسب ہوتی ہے - اس کی قیمت اکائی فاصلے پر (یعنی ما = ایر) $\frac{ے}{ر}$ ہوگی، اور اعظم قیمت اُس احاطہ پر ہوگی جو تعدیلی محور سے زیادہ سے زیادہ فاصلے پر ہے - طولی زور کی حدت کا تغیر شکل ۵۵ کے مطابق ہوگا جس میں تیروں کے سر اُس قوت کی سمت کو تعبیر کرتے ہیں جو تراش ا ب پر حصہ د حصہ با پر لگاتا ہے - چونکہ تعدیلی سطح کی مقابل جانبوں میں زور مخالف قسم یا علامت کے ہوتے ہیں اس لیے اُن کو اس طرح تعبیر کیا جا سکتا ہے جس طرح ا ع ب پر کیا گیا ہے -

۶۲ - تعدیلی محور کا محلِ وقوع - - شہتیر پر صرف جفت عمل
کرتے فرض کیے گئے ہیں اس لیے تراش ا ب کے کسی ایک طرف مثلاً
بائیں طرف کا حصہ (اشکال ۷۴، ۷۵) چونکہ ایک بیرونی جفت سے اور صفحہ ۱۴۳
تراش ا ب میں سے عمل کرنے والی قوتوں سے تعادل میں ہے اس لیے
یہ قوتیں ایک جفت کے معادل ہونی چاہییں جو بیرونی جفت کو خمیدگی کے
مستوی میں متوازن کرے ۔ (انتصابی) جزی قوت صفر ہے اس لیے اب
میں سے عمل کرنے والی اندرونی قوتیں بالکل اُفقی (یا طولی) ہونی چاہییں
اور چونکہ یہ مل کر ایک جفت ہوتی ہیں اس لیے مجموعی تنشی قوت مجموعی فشاری
قوت کے مساوی ہونی چاہیے، یعنی اُفقی اندرونی قوتوں کا مجموعہ
بیرونی قوتوں کی طرح صفر ہونا چاہیے ۔ اس واقعے کو جبری طور پر ظاہر
کرنے سے تعدیلی محور کا محل معلوم ہو سکتا ہے ۔ شکل ۷۴ میں شہتیر کی
تراش ایک اُفقی محور کے گرد متشاکل ہے لیکن استدلال کے لیے یہ ضروری
نہیں ۔ البتہ خماؤ کے مستوی ما ما کے گرد تراشیں متشاکل ہونی چاہییں ۔
ایسی کوئی تراش لو جیسی کہ شکل ۷۶ میں ہیں، اور فرض کرو کہ تعدیلی محور



شکل ۷۶

ی ی کے متوازی رقبے کی کوئی چھوٹی پٹی مف ر یا ی مف ما ہے جہاں
ی تراش کا متغیر عرض ہے تب، چونکہ مجموعی اُفقی قوت صفر ہے
اس لیے ــــ

ع (ف ۔ مف ر) = ۰ یا ع (ف ۔ ی ۔ مف ما) = ۰
اور چونکہ ربط (۱)، دفعہ ۱۶ کی رو سے ـــ

ف = سے/ر ۔ ما

اس لیے سے/ر ع (ما مف ر) = ۰ یا سے/ر ع (ما ی مف ما) = ۰ ....(۲)

مقدار ع (ما مف ر) یا ع (ما ی مف ما) تعدیلی محور کے گرد تراش کے رقبے کے مجموعی معیار کو تعبیر کرتا ہے، اور یہ اسی صورت میں صفر ہو سکتا ہے کہ محور تراش کے مرکزِ جاذبہ یعنی مرکزِ ہندسی میں سے گزرے۔

تراش کے ہر حصے کے لیے ف کی جگہ سے/ر ما کا استعمال اس مفروضے پر مبنی ہے کہ سے کی قیمت تناؤ اور فشار میں مساوی ہے اور اس مفروضے کی لچک کی حدود کے اندر تجربے سے تائید ہوتی ہے۔

سادہ خماؤ کے نظریے کے مفروضات ـــ بہتر ہوگا کہ "سادہ خماؤ" کے اس نظریے میں جو مفروضات اختیار کیے گئے ہیں ان کو یہاں اکٹھا کر کے لکھ دیا جائے۔ یہ مفروضات حسبِ ذیل ہیں:-

(۱) یہ کہ عرضی مستوی تراشیں خمیدگی کے بعد بھی مستوی اور عمادی رہتی ہیں۔

(۲) یہ کہ شے متجانس، متساوی السموت، اور ھوک کے قانون کی پابند ہے، اور یہ کہ لچک کی حدود سے تجاوز واقع نہیں ہوا۔

(۳) یہ کہ شے کا ہر پرت زور کے تحت طولاً اور عرضاً پھیلنے یا سکڑنے کے لیے آزاد ہے گویا کہ دوسرے پرتوں سے بالکل علیحدہ ہے۔ اگر یہ نہ ہو تو ربط (۱) دفعہ ۶۱ میں سے ینگ کا مقیاس نہیں ہوگا بلکہ کوئی اور لچک کا مستقل ہوگا (دیکھو دفعہ ۲۱)۔ لیکن اور صفحہ ۱۲۳

ہر لحاظ سے ربط درست رہیگا۔

(۴) یہ کہ راست لچک کے مقیاس کی قیمت تناؤ اور فشار میں مساوی ہے۔

۶۳- مزاحمت کے معیار کی قیمت —— تعدیلی محور سے

کسی فاصلہ ما پر طولی زور کی حدت ($\text{ف} = \frac{\text{ے}}{\text{ر}} \times \text{ما}$) معلوم ہونے کی وجہ سے اور یہ معلوم ہونے کی وجہ سے کہ یہ طولی اندرونی قوتیں مل کر ایک جفت بناتی ہیں جو ہر تراش پر خماؤ کے معیار کے مساوی ہوتا ہے اب یہ باقی ہے کہ اس جفت کی قیمت کو جو مزاحمت کا معیار کہلاتا ہے (دیکھو دفعہ ۵۶) تراش کے ابعاد اور پیدا شدہ زور کی حدت کی رقوم میں بیان کیا جائے۔

دفعہ گزشتہ کی طرح شکل ۶۷ کو استعمال کرو۔ تعدیلی محور سے فاصلہ ما پر تراش کا چھوٹا رقبہ مف ر یا ی مف ما ہے اور اِس پر زور کی حدت ——

$$\text{ف} = \frac{\text{ے}}{\text{ر}}\ \text{ما}$$

اس چھوٹے رقبے پر مجموعی زور

$$= \text{ف}.\text{مف ر}\quad \text{یا}\quad \text{ف}.\text{ی}.\text{مف ما}$$

اور اس زور کا معیار ——

$$= \text{ف}.\text{ما}.\text{مف ر}\quad \text{یا}\quad \text{ف}.\text{ی}.\text{ما}.\text{مف ما}$$

اور پوری تراش میں معیار ——

$$\text{م} = \Sigma(\text{ف}.\text{ما}.\text{مف ر})\quad \text{یا}\quad \text{م} = \Sigma(\text{ف ی}.\text{ما}.\text{مف ما})$$

اور ف کی جگہ دفعہ ۶۱ سے اس کی قیمت $\frac{\text{ے}}{\text{ہر}}$ ما رکھنے سے (دفعہ ۶۱)

$$\text{مر} = \frac{\text{ے}}{\text{ہر}} \sum (\text{ما}^2 \text{مف ر}) \text{ یا } \frac{\text{ے}}{\text{ہر}} \sum (\text{ی ما}^2 \text{مف ما}) \quad \text{......(۳)}$$

حاصل جمع $\sum (\text{ما}^2 \text{مف ر})$ یا $\sum (\text{ی ما}^2 \text{مف ما})$ چھوٹے چھوٹے رقبوں اور محور سے ان کے فاصلوں کے مربعوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے - یہ چھوٹے چھوٹے رقبے لا انتہا چھوٹے کردیے جائیں تو یہ حاصل جمع محور کے گرد تراش کے رقبے کا معیارِ جمود کہلاتے ہیں ۔مختلف تراشوں کے جمود کے معیاروں کی قیمتوں سے دفعات ۶۶ تا ۶۸ میں بحث کی گئی ہے۔ اگر ہم تراش کے رقبے کے معیارِ جمود کو آ سے تعبیر کریں یعنی

$$\sum (\text{ما}^2 \text{مف ر}) = \sum (\text{ی ما}^2 \text{مف ما}) = \text{آ}$$

تو ضابطہ (۳) کی شکل یہ ہوجاتی ہے :-

$$\text{مر} = \frac{\text{ے}}{\text{ہر}} \text{آ} \text{ یا } \frac{\text{مر}}{\text{آ}} = \frac{\text{ے}}{\text{ہر}} \quad \text{..........(۴)}$$

اور چونکہ ربط (۱) دفعہ ۶۱ سے $\frac{\text{ے}}{\text{ہر}} = \frac{\text{ف}}{\text{ما}}$ (تعدیلی محور سے اکائی فاصلے پر زور کی حدت) اس لیے صفحہ ۱۲۴

$$\frac{\text{ف}}{\text{ما}} = \frac{\text{مر}}{\text{آ}} = \frac{\text{ے}}{\text{ہر}} \quad \text{...... ....(۵)}$$

یہ ربط بہت اہم ہیں اور ان کو حفظ کرلینا چاہیے - اگر ان کو اس شکل میں رکھا جائے کہ

$$\text{ف} = \frac{\text{مر}}{\text{آ}} \times \text{ما} \text{ یا } \frac{\text{ے}}{\text{ہر}} \text{ما}$$

تو تعدیلی محور سے فاصلہ ما پر کے طولی زور کی حدت خماؤ کے معیار اور تراش کے

ابعاد (آ) کی رقوم میں یا نصف قطرِ انحنا اور لچک کے مستقل کی رقوم میں حاصل ہوگی۔ ف کی انتہائی قیمتیں، تنشی اور فشاری، اُن پرتوں کے اندر واقع ہوتی ہیں جو تعدیلی محور سے سب میں زیادہ فاصلے پر ہوتے ہیں۔ اس طرح اگر اشکال ۶۵ اور ۶۶ میں تنشی اور فشاری پہلوؤں کے انتہائی پرتوں کے فاصلے تعدیلی محور سے علی الترتیب $\text{ما}_{\text{ت}}$ اور $\text{ما}_{\text{ف}}$ ہوں، اور تنشی اور فشاری زور کی اعظم حدتیں جو ان پرتوں کے اندر ہیں $\text{ز}_{\text{ت}}$ اور $\text{ز}_{\text{ف}}$ ہوں تو

$$\frac{\text{ف}}{\text{ما}} = \frac{\text{ز}_{\text{ت}}}{\text{ما}_{\text{ت}}} = \frac{\text{ز}_{\text{ف}}}{\text{ما}_{\text{ف}}} = \frac{\text{مر}}{\text{آ}} = \frac{\text{ے}}{\text{ر}}$$

یا $$\text{ز}_{\text{ت}} = \text{مر}\,\frac{\text{ما}_{\text{ت}}}{\text{آ}}،\quad \text{ز}_{\text{ف}} = \text{مر}\,\frac{\text{ما}_{\text{ف}}}{\text{آ}}$$

یا $$\text{مر} = \text{ز}_{\text{ت}}\cdot\frac{\text{آ}}{\text{ما}_{\text{ت}}} = \text{ز}_{\text{ف}}\cdot\frac{\text{آ}}{\text{ما}_{\text{ف}}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

غیر متشاکل تراش کے لیے زور کی حدت کا تغیر شکل ۶۵ میں دَعَ بَ پر دکھایا گیا ہے۔

تعدیلی محور کے گرد متشاکل تراشوں کے لیے $\text{ما}_{\text{ت}}$ اور $\text{ما}_{\text{ف}}$ باہم مساوی ہونگے اور تراش کی گہرائی کے نصف کے مساوی ہونگے۔ اگر نصف گہرائی کو ما سے تعبیر کیا جائے اور انتہائی یا کھال پر کی مساوی حدتوں کو ز سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{مر} = \text{ز}\,\frac{\text{آ}}{\text{ما}}$$

مقدار $\frac{\text{آ}}{\text{ما}}$ تراش کا مقیاس کہلاتی ہے، اور بالعموم علامت مق سے تعبیر ہوتی ہے۔ اس طرح

$$\text{مر} = \text{ز}\,\text{مق} \quad \text{یا} \quad \text{ز} = \frac{\text{مر}}{\text{مق}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

یعنی مزاحمت کا معیار م زور کی اعظم پیدا شدہ حدت کے اور تراش کے مقیاس کے متناسب ہے۔

غیر متشاکل تراشوں کی صورت میں جو بہت کم پیش آتی ہیں تراش کے مقیاس کی دو قیمتیں ہونگی:

$$\frac{آ}{مات} \quad \text{اور} \quad \frac{آ}{ماف}$$

ان کو مق$_ت$ اور مق$_ف$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ربط (۶) کی یہ شکل ہو جائیگی —

$$م = ز_ت \, مق_ت = ز_ف \, مق_ف \qquad \text{.........(۸)}$$

صفحہ ۱۲۵ ۶۴ — معمولی کھاؤ — سادہ کھاؤ کی صورت جس سے دفعہ گزشتہ میں بحث کی گئی ہے صرف اُس کھاؤ سے بحث کرتی ہے جس کے ساتھ جزی قوت موجود نہیں لیکن ایسی مثالیں عام نہیں اور عموماً کھاؤ کے عمل کے ساتھ جزی قوت موجود رہتی ہے جو شہتیر کی عرضی تراشوں میں (انقصابی) جزی زور پیدا کرتی ہے (دیکھو اشکال ۵۹ تا ۶۶ وغیرہ)۔ ایسی صورتوں میں کسی ایسی تراش کے اندر عمل کرنے والی قوتوں کو جس پر جزی قوت صفر نہیں نہ صرف ایک جُفت کو متوازن کرنا ہے بلکہ تراش پر کی جزی قوت کو بھی۔ اس طرح تراش کے نقاط پر عمادی طولی زوروں کے علاوہ مماسی زور بھی ہونگے۔ اس مماسی زور کی تقریبی تقسیم سے دفعہ ۷۱ میں اور جزی انصراف سے دفعہ ۹۶ میں بحث کی گئی ہے۔ جزی زور صفر نہ ہوں تو تراش کے کسی نقطے پر طولی زور صریحاً صدر زور نہیں (دفعات ۱۴ اور ۷۳) اور فساد اُس سادہ نوعیت کا نہیں ہوگا جو دفعہ ۶۱ اور شکل ۷۱ میں فرض کی گئی ہے اور یہ ماننے کی کوئی وجہ نہیں کہ مستوی تراشیں مستوی رہتی ہیں۔ سان وینان[۱] ایک مشہور فرانسیسی

[۱] St. Venant

ماہر لچک نے ایک شہتیر کے جھکاؤ کی تحقیق یہ فرض کر کے کی کہ ہر ایک پرت یا ریشہ طولی تناؤ یا فشار کے تحت عرضاً سکڑنے یا پھیلنے کے لیے آزاد ہے لیکن یہ فرض نہیں کیا کہ مستوی تراشیں خماؤ کے بعد مستوی رہتی ہیں۔ وہ اس نتیجے پر پہنچا کہ برنولی[1] کا مفروضہ اور دفعہ ۶۳ کی مساواتوں (۵) کی جیسی مساواتیں اسی صورت میں بالکل صحیح ہوتی ہیں جب کہ خماؤ کا معیار نقطہ بہ نقطہ ایک خطِ مستقیم کے قانون کا تابع ہو یعنی جب کہ جزی قوت مستقل ہو۔ سان وینان کے ٹھیک ٹھیک لچک کے نظریے کے لیے جو دوسری صورتوں کے لیے صحیح ہے طالب علم ٹاڈھنٹر[2] اور پیرسن کی کتاب "لچک کے نظریے کی تاریخ" جلد دوم حصہ اول (انگریزی کتاب کے) صفحات ۵۳ تا ۶۹ کا مطالعہ کریں۔

اکثر عملی صورتوں میں "سادہ خماؤ" کا نظریہ (دفعات ۶۱ تا ۶۳) بالکل کافی ہے اور اس کے نتائج کی مدد سے انجینیر شہتیروں اور تعمیروں کو تجویز کرنے کے قابل ہو جاتا ہے اور ان کے زوروں اور فسادوں کو خاصی صحت کے ساتھ محسوب کر سکتا ہے۔ دیکھو مسلسل لداؤ کی اکثر صورتوں میں خماؤ کا سب میں بڑا معیار بطور ایک ریاضیاتی اعظم کے اُن تراشوں پر واقع ہوتا ہے جہاں جزی قوت صفر ہوتی ہے (دفعہ ۵۹ اور اشکال ۶۳ تا ۶۹) اور جن پر صورت حال سادہ خماؤ کی سی ہوتی ہے اور اکثر صورتوں میں جہاں شہتیر کی تراش سارے طول میں یکساں ہوتی ہے اعظم طولی زور اعظم خماؤ کے معیار کی تراش میں واقع ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں سادہ نظریہ کتنا کارآمد ہے۔ نیز یہ اکثر ہوتا ہے کہ جہاں جزی قوت قابلِ لحاظ ہو وہاں خماؤ کا معیار خفیف ہوتا ہے اور ایسی صورتوں میں جزی زور کی حدت کو دفعہ ۷۱ کے طریقے سے

[2] Todhunter and Pearson [1] Bernoulli

خاصی صحت کے ساتھ محسوب کیا جاسکتا ہے۔

اس کتاب میں انجینیروں کے عام دستور کی پیروی کی جائیگی یعنی سادہ شہتیر کے نظریے کا اطلاق کیا جائیگا۔ البتہ خاص خاص صورتوں میں فساد اور زور کے اندر جو ترمیم ضروری ہو وہ بیان کردی جائیگی۔

۶۵۔ خماؤ کے سادہ نظریے کا خلاصہ ــــ ایک اُفقی شہتیر انتصابی بوجھوں کو برداشت کیے ہوئے ہو تو اس کی کسی عرضی تراش پر تعادل کی معمولی تین شرائط کی رُو سے ــــ

(۱) زور کے مجموعی انتصابی اجزائے ترکیبی تراش کی کسی ایک جانب کی بیرونی قوتوں کے جبری مجموعے کے یعنی جبری قوت ق کے مساوی ہونگے۔ صفحہ ۱۲۶

(۲) جبری مجموعی اُفقی قوت صفر ہوگی۔

(۳) تراش میں سے عمل کرنے والی اُفقی قوتوں کا مجموعی مزاحمت کا معیار تراش کے کسی ایک جانب کی بیرونی قوتوں کے معیاروں کے جبری مجموعے کے یعنی خماؤ کے معیار م کے مساوی ہوگا۔

اگر مستوی تراشیں مستوی رہیں تو طولی فساد تعدیلی محور سے فاصلے کے متناسب ہوگا اور فساد س $= \frac{ما}{ر}$ ۔ اس لیے کسی تراش کے کسی نقطے پر طولی زور کی حدت اُسی فاصلے کے متناسب ہوگی۔ یعنی ــ

$$ف \propto ما \quad \text{اور} \quad ف = \frac{ے}{ر}.ما$$

طولی زور کے معیاروں کا حاصل جمع لینے سے

$$م = \frac{ے}{ر} \times \bar{آ} = \frac{ف\,\bar{آ}}{ما}$$

یا

$$\frac{ف}{ما} = \frac{م}{\bar{آ}} = \frac{ے}{ر} = \frac{ز}{ما}$$

جہاں ز۱ اور ما۱ کھال کے زور کی حدت اور کھال کا تعدیلی محور سے انتصابی فاصلہ ہیں۔

ان ربطوں کو عددی مثالوں میں استعمال کرتے وقت اس کا خیال رہے کہ اکائیاں ہم آہنگ ہوں۔ چونکہ تراشیں عموماً انچوں میں بیان کی جاتی ہیں اور زور پونڈ یا ٹن فی مربع انچ میں اس لیے بہتر ہے کہ خماؤ کے معیار یا مزاحمت کے معیار کو پونڈ انچوں یا ٹن انچوں میں لیا جائے۔

مثال ۱ — ایک متشاکل تراش کے ۱۲ انچ گہرے فولادی شہتیر کو کتنے نصف قطرِ انحنا تک خم کیا جا سکتا ہے کہ کھال پر زور ۵ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو (ے = ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

چونکہ ے / ر = ز۱ / ما۱

∴ ر = ے ما۱ / ز۱

جہاں ما۱ نصف گہرائی ہے جو ۶ انچ ہے۔

اس لیے ر = ۶ × ۱۳۵۰۰ / ۵ = ۱۶۲۰۰ انچ یا ۱۳۵۰ فٹ

مثال ۲ — اگر لچک کی حد سے تجاوز نہ ہوا ہو تو ایک ۱/۳۲ انچ موٹی کمانی فولاد کی پٹی کا زور معلوم کرو اگر اس کو ۲٫۵ فٹ قطر کے ایک چرخ کے گرد لپیٹا گیا ہو (ے = ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

ز۱ = ے ما۱ / ر

ما۱ = ½ × ۱/۳۲ = ۱/۶۴ انچ

اور ر = ۱۵ انچ

اس لیے $\text{ز}_{\text{ا}} = \dfrac{۱۳۵۰۰ \times \frac{۱}{\text{جہ}}}{۱۵} = ۲۲۵ء۵$ ٹن فی مربع انچ

مثال ۳ — ایک تشاکل تراش کا معیارِ جمود ۲۶۵۴ انچ اکائیاں ہے اور گہرائی ۲۴ انچ ہے۔ بڑے سے بڑا فصل معلوم کرو جس پر اس تراش کے ایک شہتیر کو آزادانہ سہارا جائے تو ۱ء۲ ٹن فی طولی فٹ کے یکساں منقسم بوجھ کو سہار سکے اور زور ۷ء۵ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔ صفحہ ۱۲۷

فرض کرو کہ ل = فصل انچوں میں، تب چونکہ بوجھ فی طولی انچ $\frac{۱ء۲}{۱۲}$ یا ۰ء۱ ٹن ہے اس لیے اعظم خماؤ کا معیار جو وسط میں واقع ہوگا۔

$$\text{م} = \frac{۱}{۸} \times ۰ء۱ \times \text{ل}^{۲}$$ (دیکھو شکل ۶۵)

اور چونکہ $\text{م} = \text{ز}_{\text{ا}} \times \dfrac{\bar{\text{I}}}{\text{ما}}$

جہاں ما = نصف گہرائی = ۱۲ انچ

اس لیے $\frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{۱۰} \times \text{ل}^{۲} = ۷ء۵ \times \dfrac{۲۶۵۴}{۱۲}$

یا $\text{ل}^{۲} = \dfrac{۲۶۵۴ \times ۷ء۵ \times ۸۰}{۱۲} = ۱۳۲۷۰۰$

ل = ۳۶۴ انچ یا ۳۰ فٹ ۴ انچ

سوالات نمبر ۴

۱ — ایک ۱۲ فٹ طول کے برآمدہ بیرم پر ۳، ۷، ۴ اور ۶ ٹن کے بوجھ آزاد سرے سے علی الترتیب ۰، ۲، ۵ اور ۸ فٹ کے فاصلوں پر ہیں۔ ثابت سرے پر اور شہتیر کے وسط میں خماؤ کا معیار اور جزی قوت معلوم کرو۔

۲ ۔ ایک ۱۰ فٹ طول کے برآمدہ بیرم کا وزن ۲۵ پونڈ فی طولی فٹ ہے اور اس پر ۲۰۰ پونڈ کا ایک بوجھ آزاد سرے سے ۳ فٹ کے فاصلے پر ہے۔ سہارے پر خماؤ کا معیار معلوم کرو اور جزی قوت اور خماؤ کے معیار کے نقشے کھینچو۔

۳ ۔ ایک شہتیر ۱۶ فٹ فصل کے سہاروں پر ٹکا ہوا ہے۔ اور اس پر اس کے ذاتی وزن سمیت ایک بوجھ ۲ ٹن (مجموعی) اس کے سارے طول پر یکساں پھیلا ہوا ہے اور $\frac{1}{2}$ ٹن اور $\frac{1}{2}$ ٹن کے مرتکز بوجھ بائیں سہارے سے ۵ فٹ اور ۹ فٹ کے فاصلوں پر ہیں۔ بائیں سہارے سے ۴ فٹ کے فاصلے پر خماؤ کا معیار معلوم کرو اور اعظم خماؤ کے معیار کا محل اور مقدار معلوم کرو۔

۴ ۔ ایک شہتیر کا فصل ۲۴ فٹ ہے اور اس پر ۱۰ ٹن کا ایک بوجھ سارے طول میں یکساں پھیلا ہوا اور ۱۲ ٹن کا ایک اور بوجھ بائیں سہارے سے ۶ فٹ کے فاصلے سے دائیں جانب ۸ فٹ طول کے اوپر یکساں پھیلا ہوا ہے۔ اعظم خماؤ کا معیار کہاں واقع ہوگا اور اس کی مقدار کیا ہوگی اور فصل کے وسط میں خماؤ کا معیار کیا ہوگا۔

۵ ۔ ل فٹ فصل کے ایک شہتیر پر ایک منقسم بوجھ ہے جو بائیں سہارے پر صفر ہے اور ہموار طور پر بڑھتے ہوئے دائیں سہارے پر و ٹن فی فٹ ہے۔ اعظم خماؤ کے معیار کی تراشش کا بائیں سہارے سے فاصلہ اور اس کی مقدار معلوم کرو۔ اگر ل = ۱۸ فٹ اور و = ۲ (ٹن فی طولی فٹ) تو عددی قیمتیں حاصل کرو۔

۶ ۔ ۳۰ فٹ طول کا ایک افقی شہتیر ا ب سرے ا پر اور اس سے ۲۰ فٹ پر ج پر سہارا ہوا ہے اور ۷ ٹن کا ایک بوجھ ب پر اور ۱۰ ٹن کا ایک بوجھ ا اور ج کے وسط میں ہے۔ خماؤ کے معیار کے نقشے کھینچو اور نقطۂ انعطاف معلوم کرو۔

۷ ۔ اگر گزشتہ سوال میں ایک اور بوجھ ا سے ج تک پھیلا ہوا $\frac{1}{4}$ ٹن فی طولی فٹ کا ہو تو نقطۂ انعطاف معلوم کرو۔

۸ ۔ ۴۰ فٹ طول کا ایک گرڈر دونوں سروں سے ۸ فٹ کے فاصلے پر

سہارا گیا ہے اور اس کے سارے طول پر ۱ ٹن فی طولی فٹ کا ایک بوجھ پھیلا ہوا ہے۔ خماؤ کا معیار سہاروں اور وسط میں معلوم کرو۔ نقاطِ انعطاف کہاں واقع ہوتے ہیں؟ خماؤ کے معیار کا منحنی کھینچو۔

۹۔ طول ل کے ایک شہتیر پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے اور اس کے دو سہارے ہیں۔ سہارے سروں سے کتنے فاصلے پر رکھے جائیں کہ اعظم خماؤ کا معیار کم سے کم ہو۔ نقاطِ انعطاف کہاں ہونگے؟ صفحہ ۱۴۸

۱۰۔ ۱۸ فٹ طول کا ایک شہتیر دو سہاروں پر رکھا ہوا ہے جو ۱۰ فٹ کے فاصلہ پر ہیں اور بائیں سہارے سے ۵ فٹ نکلا ہوا ہے۔ اس پر ۵ ٹن کا ایک بوجھ بائیں سرے پر، ، ٹن سہاروں کے وسط میں، اور ۳ ٹن دائیں سہارے پر ہے۔ شہتیر کے وسط میں اور فصل کے وسط میں خماؤ کا معیار معلوم کرو، اور نقاطِ انعطاف معلوم کرو۔

۱۱۔ اگر گزشتہ سوال کے شہتیر پر ایک اور بوجھ سہاروں کے درمیان ۱ ٹن فی طولی فٹ کا ہو تو فصل کے وسط میں خماؤ کا معیار اور نقاطِ انعطاف کے محل معلوم کرو۔

۱۲۔ ایک متشاکل تراش کی گہرائی ۸ انچ اور معیارِ جمود ۷٫۵ انچ اکائیاں ہے۔ اس پر ۹۰ ٹن انچ کا خماؤ کا معیار عمل کرے تو راست زور کی زیادہ سے زیادہ حدت کیا ہوگی۔

۱۳۔ ایک شہتیر کی تراش کی گہرائی ۱۰ انچ اور معیارِ جمود ۱۴۵ انچ اکائیاں ہے۔ کھال کا زور ۷٫۵ ٹن فی مربع انچ ہو تو مزاحمت کا معیار محسوب کرو۔

۱۴۔ ۲۰ فٹ فصل کے ایک سادہ سہارے ہوئے شہتیر کی تراش کی گہرائی ۱۲ انچ، اور معیارِ جمود ۲۷۵ انچ اکائیاں ہے۔ اگر زور کی جائز حدت ۷٫۵ ٹن فی مربع انچ ہو تو شہتیر کتنا مجموعی منقسم بوجھ سہار سکتا ہے۔ اسی اعظم زور کے ساتھ وسط میں کتنا بوجھ سہارا جاسکتا ہے۔

۱۵۔ ۱۰ انچ گہری متشاکل تراش کے ایک شہتیر کو کسی نصف قطر پر

کم کیا جاسکتا ہے کہ کھال کا زور ۶ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔ ے
= ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ اگر تراشش کا معیارِ جمود ۲۱۱ انچ اکائیاں ہوتو
مزاحمت کا معیار کیا ہوگا۔

صفحہ ۱۲۹

پانچواں باب

شہتیروں کے زور

۶۶۔ کسی تراش کے رقبے کا معیارِ جمود ــــ کسی شہتیر کی کسی تراش کے کسی نقطے پر زور کی جو حدت پیدا ہوتی ہے وہ فسادی عمل اور شہتیر کے ابعاد پر منحصر ہوتی ہے۔ دفعہ ۶۳ میں خماؤ کے معیار، پیدا شدہ زور، شہتیر کی گہرائی، اور تراش کے رقبے کے معیارِ جمود یعنی دوسرے معیار کے درمیان ایک ربط معلوم کیا گیا تھا۔ مقدار آ کی یہ تعریف کی گئی تھی کہ

آ = ∑ (ما مف ر)

جہاں ما چھوٹے رقبے مف ر کا فاصلہ اُس محور سے ہے جس کے گرد مقدار آ کو محسوب کرنا ہے، یعنی تراش کے تعدیلی محور سے۔

اب اس پر غور کیا جائیگا کہ مختلف سادہ ہندسی شکلوں کے لیے آ کی مقدار مختلف محوروں کے گرد کس طرح محسوب کی جائے۔ حاصل جمع ∑ (ما۲ مف ر) اکثر صورتوں میں معمولی تکمل کے عمل سے معلوم ہوسکتا ہے۔ اگر کسی مستوی شکل کا رقبہ ر ہو اور شکل کے مستوی کے اندر کسی محور کے گرد اس کا معیارِ جمود آ ہو تو اس محور کے گرد اس رقبے کے گردشی نصف قطر

(گ) کی یہ تعریف ہے کہ

$$\text{گ}^2\,\text{س} = \bar{\text{ا}} = \Sigma\,(\text{ما}^2\,\text{مف}\,\text{س})$$

یا بالفاظِ دیگر گ، ما کی وہ قیمت ہے جس پر اگر رقبہ س مرتکز ہوتا تو معیارِ جمود وہی ہوتا جو اصلی شکل کا ہے۔ ایسی مستوی شکلوں کے معیارِ جمود محسوب کرنے کے لیے جو سادہ ہندسی اشکال مثلاً مستطیل، دائرہ، وغیرہ، کی شکل رکھنے والے حصوں پر مشتمل ہوں دو آسان مسئلے بہت کار آمد ہیں۔

مسئلہ (۱) — کسی مستوی رقبے کا معیارِ جمود اس کے مستوی میں کے کسی محور کے گرد اس کے مرکزِ جاذبہ (یا مرکزِ ہندسی) میں سے گزرنے والے متوازی محور کے گرد کے معیارِ جمود سے بقدر ایسی مقدار کے زیادہ ہوتا ہے جو رقبے کے اور محور سے مرکزِ ہندسی کے فاصلے کے مربع کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے۔

یعنی اگر کسی رقبے س کا اس کے مستوی میں کے کسی محور کے گرد معیارِ جمود $\bar{\text{ا}}$ ہو اور مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے متوازی محور کے گرد معیارِ جمود $\bar{\text{ا}}_{\text{ج}}$ ہو اور ان دونوں محوروں کے درمیان فاصلہ ل ہو تو

$$\bar{\text{ا}} = \bar{\text{ا}}_{\text{ج}} + \text{ل}^2\,\text{س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

یا ہر ایک رقم کو س پر تقسیم کرنے سے

$$\text{گ}^2 = \text{گ}_{\text{ج}}^2 + \text{ل}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

مجہ غ۱۳ جہاں گ کسی ایسے محور کے گرد گردشی نصف قطر ہے جو مرکزِ ہندسی سے فاصلہ ل پر ہو اور $\text{گ}_{\text{ج}}$ مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے متوازی محور کے گرد گردشی نصف قطر ہے۔ اس مسئلے کا ثبوت مختصراً یہ ہے:-

$$\bar{\text{ا}} = \Sigma\left\{(\text{ل}+\text{ما})^2\,\text{مف}\,\text{س}\right\} = \Sigma\left\{(\text{ل}^2 + ۲\,\text{ل}\,\text{ما} + \text{ما}^2)\,\text{مف}\,\text{س}\right\}$$

= ل^۲ Σ (مف س) + ۲ل Σ (ما مف س) + Σ (ما^۲ مف س)

= ل^۲ × س + ۰ + آ~ج~

جہاں ما مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے محور سے ناپا گیا ہے۔

مسئلہ (۲) ــــ کسی مستوی شکل کے معیارِ جمود اس کے مستوی میں کے دو علی القوائم محوروں کے گرد لیے جائیں تو ان کا مجموعہ ایسے محور کے گرد کے معیارِ جمود کے مساوی ہوتا ہے جو اِس مستوی کے علی القوائم ہو اور ان دو محوروں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرے۔ یعنی اگر آ~ے~، آ~ہ~ اور آ~ما~ تین باہم علی القوائم محوروں وے، وہ اور وما کے گرد، جو نقطہ و پر ملتے ہیں، معیارِ جمود ہوں، اور وہ اور وما شکل کے مستوی کے اندر ہوں تو

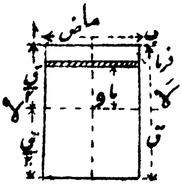
آ~ے~ = آ~ہ~ + آ~ما~

کیونکہ اگر کسی چھوٹے رقبے مف س کے فاصلے محوروں وے، وہ اور وما سے علی الترتیب ر، ما اور لا ہوں تو چونکہ ر^۲ = لا^۲ + ما^۲ اس لیے

Σ (ر^۲ مف س) = Σ {(ما^۲ + لا^۲) مف س}

= Σ (ما^۲ مف س) + Σ (لا^۲ مف س)

یعنی آ~ے~ = آ~ہ~ + آ~ما~



شکل ۶۶

مستطیلی رقبہ ــــ مستطیل اب ج د (شکل ۶۶) کا معیارِ جمود محور ہ ہ کے گرد حسبِ ذیل طریقے پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔ شکل میں دی ہوئی ترقیم اختیار کریں تو ہ ہ کے متوازی رقبے کی پتلی پٹیاں ض فرما لینے سے

$$\text{آ}_{\text{ہہ}} = \int_{-\frac{\text{ق}}{۲}}^{+\frac{\text{ق}}{۲}} \text{ما}^{۲}\ \text{ض فرما} = \frac{۱}{۳}\ \text{ض} \left[\text{ما}^{۳}\right]_{-\frac{\text{ق}}{۲}}^{+\frac{\text{ق}}{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۱۲}\ \text{ض ق}^{۳}$$

اسی طرح ما ما کے گرد

$$\text{آ}_{\text{ماما}} = \frac{۱}{۱۲}\ \text{ق ض}^{۳}$$

دج کے گرد مسئلہ (۱) کی رو سے

$$\text{آ}_{\text{دج}} = \text{آ}_{\text{ہہ}} + \text{ض ق} \left(\frac{\text{ق}}{۲}\right)^{۲} = \text{ض ق}^{۳} \left(\frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۴}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳}\ \text{ض ق}^{۳}$$

اس کو اس طرح بھی حاصل کر سکتے تھے کہ ما کو دج سے شمار کرکے حسبِ ذیل تکمل کریں :—

$$\text{آ}_{\text{دج}} = \int_{0}^{\text{ق}} \text{ض ما}^{۲}\ \text{فرما} = \frac{۱}{۳}\ \text{ض ق}^{۳}$$

کھوکھلا مستطیلی رقبہ اور متشاکل I تراش —

شکل ۸۷ میں جو دو رقبے دکھائے گئے ہیں اُن کے معیارِ جمود محور ہہ کے گرد مساوی ہونگے کیونکہ اگر ہہ کی متوازی سمت میں رقبے کی تقسیم میں تبدیلی ہونے سے اِس خط کے گرد معیارِ جمود میں تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ دونوں صورتوں میں

$$\text{آ}_{\text{ہہ}} = \frac{۱}{۱۲} \left(\text{ض ق}^{۳} - \text{ض}'\ \text{ق}'^{۳}\right)$$

مثلثی رقبہ — شکل ۸۹ میں جو مثلث دکھائے گئے ہیں

صفحہ ۱۳۱

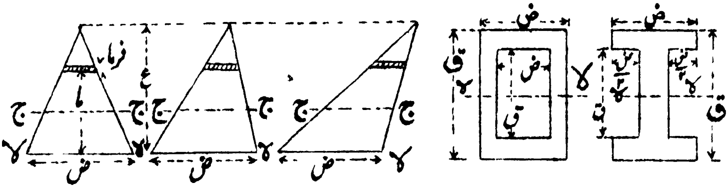
اُن سب کے لیے قاعدہ ض کے گرد

$$آ_{ہ} = \int_{0}^{ع} ض \times \frac{ع - ما}{ع} ما^{2} فرما = \frac{ض}{ع} \int_{0}^{ع} (ع ما^{2} - ما^{3}) فرما$$

$$= \frac{1}{12} ض ع^{3}$$

اور مسئلہ (۱) کی رُو سے مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے متوازی محور ج ج کے گرد

$$آ_{ج} = آ_{ہ} - \frac{1}{2} ض ع \left(\frac{1}{3} ع\right)^{2} = \frac{1}{36} ض ع^{3}$$



شکل ۷۹ شکل ۷۸

دائری رقبہ ـــــ دائرے کے مستوی کے علی القوائم اور اُس کے مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد معیارِ جمود $آ_{ہ}$ اس طرح معلوم ہوگا کہ نصف قطر ر اور چوڑائی فر ر کی دائری پٹیاں لی جائیں (شکل ۸۰)۔

$$آ_{ہ} = \int_{0}^{ر} ر^{2} \times 2\pi ر \, فر = 2\pi \frac{ر^{4}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \pi ر^{4} \text{ یا } \frac{\pi}{32} ق^{4}$$

پھر مسئلہ (۲) کی رُو سے

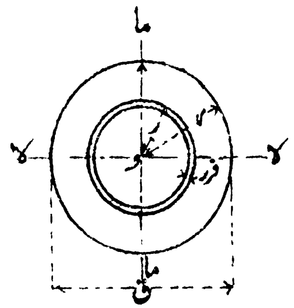
$$\text{آ}_{\text{ہ}} = \text{آ}_{\text{ہہ}} + \text{آ}_{\text{ماما}}$$

جہاں $\text{آ}_{\text{ہہ}}$ اور $\text{آ}_{\text{ماما}}$ دو علی القوائم قطروں ہہ اور ماما کے گرد معیارِ جمود ہیں - اور چونکہ تشاکل سے $\text{آ}_{\text{ہہ}} = \text{آ}_{\text{ماما}}$ اس لیے

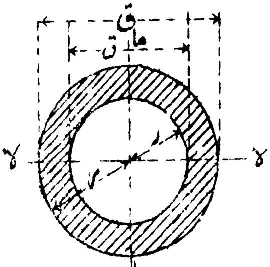
$$\text{آ}_{\text{ہ}} = ۲\,\text{آ}_{\text{ہہ}} = ۲\,\text{آ}_{\text{ماما}}$$

اور $$\text{آ}_{\text{ہہ}} = \text{آ}_{\text{ماما}} = \frac{۱}{۴}\pi\,\text{ر}^{۴} \;\text{یا}\; \frac{\pi}{۶۴}\,\text{ق}^{۴}$$

اس کو اس طرح بھی حاصل کیا جاسکتا تھا کہ ہہ یا ماما کے متوازی سیدھی پٹیاں لی جاتیں -



شکل ۸۰



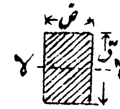
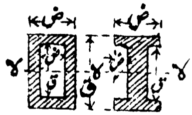
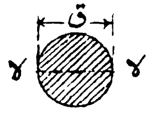
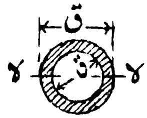
شکل ۸۱

مستدیر حلقئ رقبہ ـــــ اوپر کے نتیجے سے ظاہر ہے کہ اگر شکل ۸۱ کے مستوی کے علی القوائم مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد معیارِ جمود $\text{آ}_{\text{ہ}}$ ہو تو

$$\text{آ}_{\text{ہ}} = \frac{\pi}{۲}\left(\text{ر}_{۱}^{۴} - \text{ر}^{۴}\right) \;\text{یا}\; \frac{\pi}{۳۲}\left(\text{ق}_{۱}^{۴} - \text{ق}^{۴}\right)$$

صفحہ ۱۳۲ اور $$\text{آ}_{\text{ہہ}} = \text{آ}_{\text{ماما}} = \frac{\pi}{۴}\left(\text{ر}_{۱}^{۴} - \text{ر}^{۴}\right) \;\text{یا}\; \frac{\pi}{۶۴}\left(\text{ق}_{۱}^{۴} - \text{ق}^{۴}\right)$$

تراش کا مقیاس (مق) ـــ جب شہتیروں کی تراشیں اوپر کی شکلوں میں سے کوئی شکل ہو تو تعدیلی محور کے گرد معیارِ جمود اوپر کی مقداروں میں سے کوئی ایک ہوگی اور تراش کا مقیاس (دفعہ ۶۳) اُس معیارِ جمود کو نصف گہرائی سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا ـ مختلف تراشوں کے لیے اس کی قیمتیں ذیل کی جدول میں دی گئی ہیں ـ

تراش	معیارِ جمود آہہ	تراش کا مقیاس (مق)
	$\frac{1}{12}$ ض ق^3	$\frac{1}{6}$ ض ق^2
	$\frac{1}{12}$ (ض ق^3 ـ ض ق^3)	$\frac{1}{6}$ ((ض ق^3 ـ ض ق^3) / ق)
	$\frac{\pi}{64}$ ق^4	$\frac{\pi}{32}$ ق^3
	$\frac{\pi}{64}$ (ق^4 ـ ق^4)	$\frac{\pi}{32}$ ((ق^4 ـ ق^4) / ق)

مثال ۱ ـــ ایک مستطیلی تراش کے چوبی شہتیر کو سروں پر سادہ طور پر سہارنا اور اس پر ایک ۱۶ فٹ کے فصل کے وسط میں ۱$\frac{1}{2}$ ٹن کا ایک بوجھ ڈالنا مقصود ہے ـ اگر اعظم زور $\frac{3}{4}$ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہونا ہو اور گہرائی عرض کی دگنی رکھنا ہو تو موزوں ابعاد معلوم کرو ـ

سروں پر ردِّ عمل $\frac{3}{4}$ ٹن ہیں، اور وسط میں خماؤ کا معیار

$$= \frac{۳}{۴} \times ۸ \times ۱۲ = ۷۲ \text{ ٹن انچ}$$

تراش کا مقیاس (مق) یوں حاصل ہوگا:-

$$\frac{۳}{۴} \times \text{مق} = ۷۲$$

یا $$\text{مق} = ۹۶ \ (\text{انچ})^{۳}$$

اب اگر $$\text{ض} = \frac{۱}{۲} \text{ق}$$

تو $$\frac{۱}{۶} \text{ض} \text{ق}^{۲} = \frac{۱}{۱۲} \text{ق}^{۳} = ۹۶$$

یا $$\text{ق} = \sqrt[۳]{۱۱۵۲} = ۱۰٫۵ \text{ انچ تقریباً}$$

$$\text{ض} = ۵٫۲۵ \text{ انچ}$$

مثال ۲ — ایک ہی شے اور مساوی مضبوطی کے دو شہتیروں کے وزن کا مقابلہ کرو جن میں سے ایک ٹھوس دائری تراش کا ہے اور دوسرا کھوکھلی دائری تراش کا ہے جس کا اندرونی قطر بیرونی قطر کا $\frac{۳}{۴}$ ہے۔ صفحہ ۱۳۲

چونکہ خماؤ کی مزاحمت تراش کے مقیاس کے متناسب ہوتی ہے اس لیے اگر کھوکھلے شہتیر کا قطر ق ہو اور ٹھوس شہتیر کا قطر ق ہو تو

$$\frac{\pi}{۳۲}\left\{\frac{\text{ق}^{۴} - (\frac{۳}{۴}\text{ق})^{۴}}{\text{ق}}\right\} = \frac{\pi}{۳۲} \text{ق}^{۳}$$

$$\left(۱ - \frac{۸۱}{۲۵۶}\right) \text{ق}^{۳} = \text{ق}^{۳}$$

$$\frac{\text{ق}}{\text{ق}} = \sqrt[۳]{\frac{۲۵۶}{۱۷۵}} = ۱٫۱۳۵$$

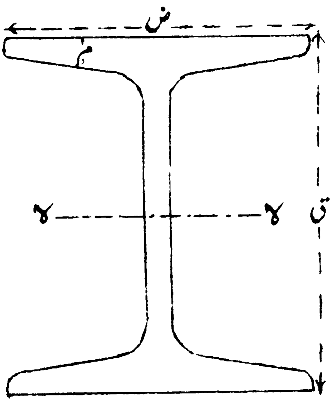
وزنوں کی نسبت حسبِ ذیل ہوگی:-

$$\frac{\text{ٹھوس}}{\text{کھوکھلا}} = \frac{\text{ق}^{۲}}{\text{ق}^{۲} - (\frac{۳}{۴}\text{ق})^{۲}} = \frac{۱۶}{۷}\left(\frac{\text{ق}}{\text{ق}}\right)^{۲}$$

$$= \frac{16}{7} \times \frac{1}{(1.135)^2} = 1.77$$

۶۷ - فولاد کی معمولی تراشیں — مستطیل اور دائرے

جیسی ہندسی شکلیں اگرچہ اُن مشینوں اور تعمیروں کے حصّوں کی تراش کو اکثر تعبیر کرتی ہیں جو کہ خماؤ کے تحت آتے ہیں لیکن خماؤ کی مزاحمت کے لیے یہ تراشیں باکفایت نہیں ہوتیں کیونکہ تعدیلی محور کے پاس مادّے کا ایسا بہت سا حصہ ہوتا ہے جو زور کی ایک تھوڑی سی کسر برداشت کرتا ہے۔ ایک مستقل فسادی عمل کے لیے وہ تراش صریحاً سب میں باکفایت ہوگی جس کے اندر تقریباً سارا مادہ اعظم زور برداشت کرے۔ اِس طرح چونکہ خماؤ کے معیار سے طولی راست زور پیدا ہوتا ہے جس کی حدّت تراش کے کسی نقطے پر تعدیلی محور سے فاصلے کے متناسب ہوتی ہے اس لیے تراش کے رقبے کا بڑا حصہ تعدیلی محور سے اعظم فاصلے پر ہونا چاہیے۔ اس سے I تراش کی طرف ذہن منتقل ہوتا ہے جو فولادی شہتیروں کی سب میں زیادہ عام شکل ہے خواہ یہ ایک سالم ٹکڑے میں بیلے جائیں (دیکھو شکل ۸۲) یا متعدد ٹکڑوں[1] کو باہم ریوٹا کر بنائے جائیں۔ اس طرح کی تراش میں رقبے کا اکثر حصہ تقریباً پوری نصف گہرائی پر واقع ہوتا ہے۔ اس طرح اگر پتلے انتصابی پیٹے کو نظر انداز کر دیا جائے تو معیارِ جمود I (م ۲ مف س) تقریباً حسبِ ذیل



شکل ۸۲

[1] ایسے تختہ گرڈروں کا تذکرہ مصنف کی کتاب "تعمیروں کا نظریہ" میں کیا گیا ہے۔

ہو جاتا ہے :-

$$(\text{دونوں کوروں کا رقبہ}) \times \left(\frac{\text{ق}}{۲}\right)^{۲}$$

صفحہ ۱۳۴ یعنی گردشی نصف قطر تقریباً $\frac{\text{ق}}{۲}$ ہوتا ہے، اور تراش کا مقیاس **مق** جو معیارِ جمود کو $\frac{\text{ق}}{۲}$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے تقریباً حسبِ ذیل ہوتا ہے ـــ

$$(\text{دونوں کوروں کا رقبہ}) \times \frac{\text{ق}}{۲}$$

یا

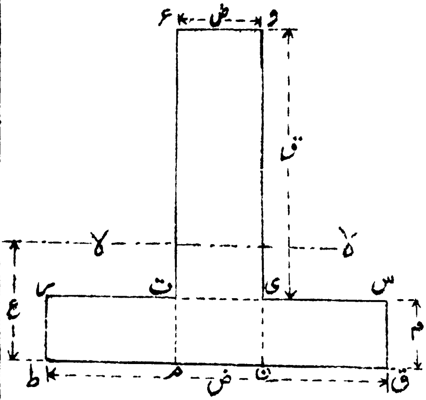
$$\text{مق} = ۲\,\text{ض}\,\text{م} \times \frac{\text{ق}}{۲} = \text{ض}\,\text{م}\,\text{ق} \quad \text{تقریباً}$$

جہاں م کور کی اوسط موٹائی ہے اور بیلی ہوئی تراش میں عموماً تراش کے دونوں سروں سے $\frac{۱}{۱۲}$ عرض پر ناپی جاتی ہے ۔ یہ تقربات اکثر صحیح قیمتوں کے بہت قریب ہوتے ہیں کیونکہ کور کے سارے رقبے کو تعدیلی محور ہہ سے $\frac{\text{ق}}{۲}$ کے فاصلے پر لینے سے مضبوطی کا بیش اندازہ ہوا ہے اور انتصابی پٹے کو نظر انداز کرنے سے کم اندازہ ہوا ہے ۔

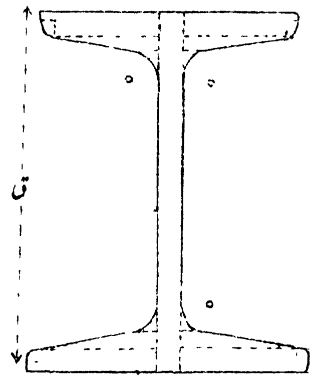
شکل ۸۲ میں دی ہوئی تراش کی جیسی بیلی I تراش کا معیارِ جمود، وغیرہ، عام طور پر اس طرح محسوب ہو سکتا ہے کہ اس کو مستطیلوں، مثلثوں، دائری حصّوں اور کمان شانوں[۵] میں تقسیم کریں جیسا کہ شکل ۸۳ میں دکھایا گیا ہے اور اس کے بعد دفعہ ۶۶ کے مسئلہ (۱) کا اطلاق کریں۔ لیکن اس طرح کا عمل بہت طویل ہو جاتا ہے اور اس سے نتیجے میں جو صحت حاصل ہوتی ہے اُتنی صحت کی ضرورت بھی نہیں کیونکہ اگرچہ تمام ابعاد کی تخصیص تو بہت صحت کے ساتھ کی جاتی ہے لیکن صنعت میں اتنی صحت حاصل کرنا مشکل ہے ۔ انجینیری کے معیاروں کی کمیٹی نے جن تراشوں کی سفارش کی ہے اُن کے معیارِ جمود اس صحیح طریقے پر نکالے گئے ہیں اور ان کی جدول بنائی گئی ہے ۔ دفعہ آیندہ میں ہم ایک ترسیمی طریقہ بیان کرینگے جو ہر قسم کی تراش کے لیے کار آمد ہے ۔

[۵] Spandrils

T تراشیں، وغیرہ ـــــ ان تراشوں کے کونے عموماً گول کیے ہوئے ہونگے اور اگر یہ ٹھیک ٹھیک معلوم ہوں تو معیارِ جمود شکل ۸۳



شکل ۸۴



شکل ۸۳

کے اصول کے مطابق تقسیم کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے ۔ لیکن اگر گولائی کو نظر انداز کر دیا جائے اور تراش کو مستطیلوں پر مشتمل سمجھا جائے جیسا کہ شکل ۸۴ میں ہے تو ہم حسب ذیل عمل کر سکتے ہیں ۔ معیاروں کے طریقے سے کنارے ط ق سے مرکزِ جاذبہ یا مرکزِ ہندسی تک فاصلہ ع معلوم کرو۔ اس طرح صفحہ ۳۵

$$\text{ع}\{(\text{ض}\times\text{م})+(\text{ض}\times\text{ق})\} = (\text{ض}\times\text{م}\times\tfrac{1}{2}\text{م}) + (\text{ض}\times\text{ق})(\text{م}+\tfrac{1}{2}\text{ق})$$

جس سے ع معلوم ہوسکتا ہے ۔

اب مستطیل ط ر س ق اور ۶ و ی ت کے گرد ان کا معیارِ جمود ط ق کے گرد آطق معلوم کرو۔

$$\text{آ}_{\text{طق}} = \tfrac{1}{3}\text{ض}\,\text{م}^3 + \tfrac{1}{12}\text{ض}\,\text{ق}^3 + \text{ض}\times\text{ق}(\text{م}+\tfrac{1}{2}\text{ق})^2$$

یا مستطیل ع و ن م اور مستطیل س ر ت ھ ط کا دُگنا لے کر ان کا معیارِ جمود معلوم کرو تو

$$آ_{طق} = \frac{1}{3}(ض - ض)م^{3} + \frac{1}{3}ض(م + ق)^{3}$$

آطق معلوم کرنے کے بعد مسئلہ (۱)، دفعہ ۶۶ کا اطلاق کرو جس سے ـــ

$$آ_{ہہ} = آ_{طق} - (ض م + ض ق)ع^{2}$$

ایک اور متبادل طریقہ یہ ہوگا کہ تراش کو مستطیلوں میں تقسیم کر کے مسئلہ (۱) دفعہ ۶۶ کی مدد سے بالراست $ا_{ہہ}$ معلوم کیا جائے۔ لیکن چونکہ ع اتنا سادہ عدد نہیں ہوگا جتنے کہ دیے ہوئے صدر ابعاد ہونگے اس لیے اس آخری طریقے سے ذرا طویل اعداد کی ضربیں کرنی ہونگی۔

ایک اور تدبیر یہ ہوگی کہ ع و کے گرد معیارِ جمود معلوم کیا جائے۔ اس طرح

$$آ_{ع و} = \frac{1}{3}ض(ق + م)^{3} - \frac{1}{3}(ض - ض)ق^{3}$$

اس کے بعد مسئلہ (۱) دفعہ ۶۶ کو استعمال کر کے $آ_{ہہ}$ معلوم کر لیا جائے۔

بالکل انہی اصولوں کے اطلاق سے کسی تراش کا معیارِ جمود معلوم کیا جا سکتا ہے جو تعدیلی محور کے گرد متشاکل نہ ہو لیکن مستطیلوں میں تقسیم ہو سکتی ہو مثلاً شکل ۹۴ والی تراش۔

۶۸۔ رقبوں کے معیار، مراکزِ ہندسی اور معیارِ جمود کی ترسیمی دریافت ـــ ایسی تراشوں کا معیار اور معیارِ جمود (یا دوسرا معیار) معلوم کرنے کے لیے جو سادہ ہندسی اشکال پر مشتمل نہ ہوں عموماً تخمینے کا کوئی تقریبی طریقہ اختیار کرنا ہوگا اور کوئی ترسیمی طریقہ اس کا ایک بہت سہل حل ہوگا۔ اس کے جو متعدد ترسیمی طریقے ہیں اُن میں غالباً ذیل کا طریقہ سب میں

سہل ہے۔ اس میں رقبوں کی پیمائش کے لیے ایک سطح پیما استعمال کیا جاتا ہے۔

کسی مستوی شکل ا ط ق ب[ے] کا معیار اور معیارِ جمود کسی محور ی ی کے گرد اور معیارِ جمود مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے ایک متوازی محور کے گرد معلوم کرنا۔ ایک خط س س کھینچو جو ی ی کے متوازی اور اس سے فاصلہ ف پر ہو۔ ی ی میں کوئی قطب ہ لو۔ بہتر ہے کہ ایسا نقطہ لیا جائے جو شکل ا ط ق ب کے قریب ترین ہو۔ شکل میں ی ی کے متوازی بہت سے آڑے خطوط کھینچو مثلاً ا ب اور ط ق۔ ان خطوط کے سروں مثلاً ط اور ق، وغیرہ، سے س س کے علی القوائم خطوط کھینچو جو س س کو نقاط ن اور م، وغیرہ، پر ملیں۔ ان نقاط ن اور م، وغیرہ کو ہ سے ملاؤ۔ یہ ملانے والے خطوط ط ق کو نقاط ط۱ اور ق۱ پر ملتے ہیں۔ اسی طرح ا ب پر نقاط ا۱ اور ب۱ حاصل ہونگے۔ اب ان سب نقاط میں سے ایک خط کھینچنے سے جو رقبہ گھریگا وہ پہلا مشتق رقبہ ط۱ ق۱ ب۱ ا۱ ہوگا۔ اب اس مشتق شکل پر یہی عمل کرنے سے یعنی ط۱ ق۱ کا ظل ن۱ م۱ لے کر ط۲ ق۲ حاصل کرنے سے دوسرا مشتق رقبہ ط۲ ق۲ ب۲ ا۲ حاصل ہوگا۔ تب

(پہلا مشتق رقبہ ط۱ ق۱ ب۱ ا۱) × ف

= رقبہ ط ق ب ا کا معیار خط ی ی کے گرد

= ع (م اف ر)

صفحہ ۱۳۶

اور آ‌ی‌ی = دوسرا مشتق رقبہ ط۲ ق۲ ب۲ ا۲ × ف۲

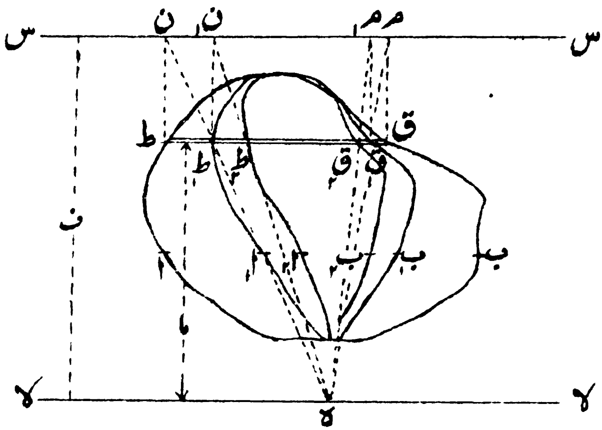
یعنی ی ی کے گرد رقبہ ط ق ب ا کا دوسرا معیار

اور مرکزِ جاذبہ میں سے گزرنے والے متوازی محور کے گرد

آ‌ج = آ‌ی‌ی − (رقبہ ط۱ ق۱ ب۱ ا۱)۲ / رقبہ ط ق ب ا × ف۲

ے شکل ۸۵

ثبوت :— فرض کرو کہ رقبے ط ق ب ا، $ط_۱$ $ق_۱$ $ب_۱$ $ا_۱$ اور $ط_۲$ $ق_۲$ $ب_۲$ $ا_۲$ علی الترتیب ر، $ر_۱$، $ر_۲$ سے تعبیر ہوتے ہیں اور ل ل سے کسی فاصلہ ما پر ان کا عرض ی، $ی_۱$، $ی_۲$ سے تعبیر



شکل ۸۵

ہوتا ہے - تب رقبوں کی چھوٹی پٹیاں ط ق، $ط_۱$ $ق_۱$ اور $ط_۲$ $ق_۲$ یا مف ر، مف $ر_۱$ اور مف $ر_۲$ علی الترتیب ی فرما، $ی_۱$ فرما، $ی_۲$ فرما کے مساوی ہونگی -

پہلی مشتق شکل میں پٹی ط ق تحویل ہوکر $ط_۱$ $ق_۱$ ہوگئی ہے اور یہ تحویل کی نسبت ما : ف ہوگی یعنی

$$\text{مف } ر_۱ = \frac{\text{ما}}{\text{ف}} \text{ مف } ر$$

یا

$$ی_۱ \text{ فرما} = \frac{\text{ما}}{\text{ف}} \cdot ی \cdot \text{فرما}$$

حاصل جمع لینے سے —

س$_1$ یا $\sum$ (مف س$_1$) یا $\sum$ ($\frac{\text{ما}}{\text{ن}}$ مف س)

= $\frac{1}{\text{ن}}$ $\sum$ (ما مف س) = $\frac{1}{\text{ن}}$ $\sum$ (ما ۰ ی ۰ فرما)

یا تکملی کی شکل میں

$\int$ ی$_1$ فرما = $\frac{1}{\text{ن}}$ $\int$ ما ی فرما

اس طرح رقبہ س$_1$ یا $\sum$ (مف س$_1$) محور ۷۷ کے گرد رقبہ س کے معیار کے متناسب ہوگا اور معیار س$_1$ × ف کے مساوی ہوگا۔

تب ۷۷ سے رقبہ س کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ $\bar{\text{ما}}$ ہو تو

$\bar{\text{ما}}$ = $\frac{\sum \text{(ما مف س)}}{\sum \text{(مف س)}}$ = $\frac{\text{س}_1}{\text{س}}$ × ف

صفحہ ۱۳۷ اب دوسری مشتق شکل کی پٹی ط$_2$ ق$_2$ پٹی سے ط$_1$ ق$_1$ سے نسبت $\frac{\text{ما}}{\text{ن}}$ میں تحویل شدہ ہے۔ اس لیے

مف س$_2$ = $\frac{\text{ما}}{\text{ن}}$ مف س$_1$ = $\frac{\text{ما}^2}{\text{ن}^2}$ مف س

یا ی$_2$ فرما = $\frac{\text{ما}}{\text{ن}}$ ی$_1$ فرما = $\frac{\text{ما}^2}{\text{ن}^2}$ ی فرما

حاصل جمع لینے سے

س$_2$ یا $\sum$ (مف س$_2$) یا $\sum$ ($\frac{\text{ما}}{\text{ن}}$ مف س$_1$)

= $\frac{1}{\text{ن}}$ $\sum$ (ما مف س$_1$) = $\frac{1}{\text{ن}^2}$ $\sum$ (ما^2 مف س)

یا $\int$ ی$_2$ فرما = $\frac{1}{\text{ن}}$ $\int$ ما ی$_1$ فرما = $\frac{1}{\text{ن}^2}$ $\int$ ما^2 ی فرما

یعنی رقبہ $س_۲$ محور ہہ ہہ کے گرد رقبہ س کے معیارِ جمود یا دوسرے معیار کے تناسب ہے اور معیارِ جمود

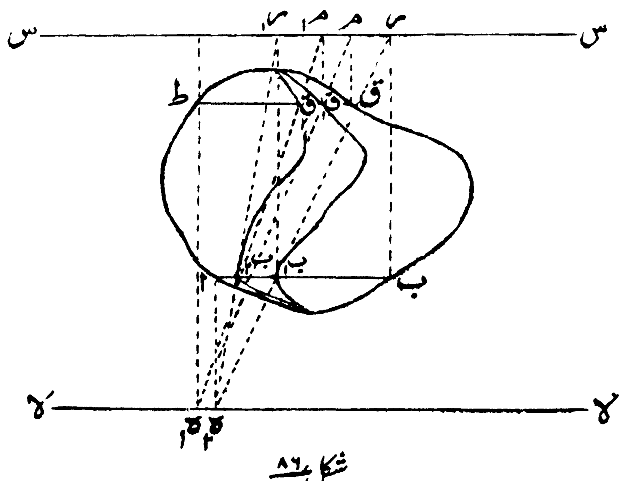
$$آ_{ہہ} = س_۲ \times ف^۲$$

اور چونکہ س کے مرکزِ جاذبہ کا فاصلہ ہہ ہہ سے $\frac{س_۱}{س_۲} \times ف$ ہے اس لیے مسئلہ (۱) دفعہ ۶۶ کی رُو سے

$$آ_ج = س_۲ ف^۲ - س م^۲ = س_۲ ف^۲ - س \left(\frac{س_۱}{س_۲}\right)^۲ ف^۲$$

$$= ف^۲ \left(س_۲ - \frac{س_۱^۲}{س_۲}\right)$$

شکل ۸۶ میں ایک کسی قدر ترمیم یافتہ ساخت دکھائی گئی ہے جس میں شکل ۸۵ کی طرح ایک مستقل قطب ہ لینے کی بجائے آڑے خطوط

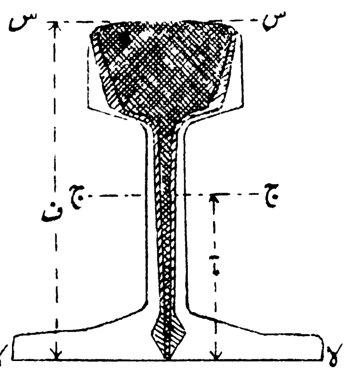


شکل ۸۶

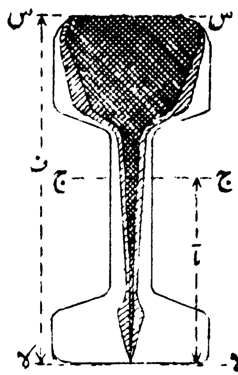
طق یا اب کے جیسے ہر خط کے لیے ایک علیحدہ قطب اختیار کیا جاتا ہے یعنی سروں ط، ا وغیرہ سے ہہ ہہ پر کھینچے ہوئے عمود کا پائیں۔ اس کی

صفحہ ۱۳۸ وجہ سے اصلی رقبے اور مشتق رقبوں کا بایاں احاطہ وہی رہیگا، اور رقبے ا، ا۱، ا۲ علی الترتیب ط ف ب ا، ط ق ب۱ ا، ط ق ب۲ ا ہونگے۔

اکثر صورتوں میں یہ ساخت استعمال کے لیے سہولت بخش ہے اور ایسے رقبوں کے لیے جو ل ل کے ایک علی القوائم محور کے گرد متشاکل نہ ہوں پہلی ساخت سے بہتر نتائج دیتی ہے۔

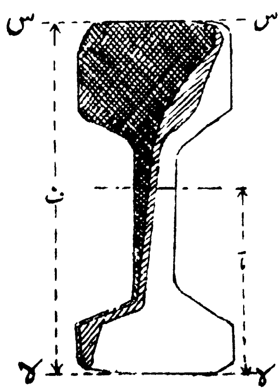


شکل ۸۸



شکل ۸۷

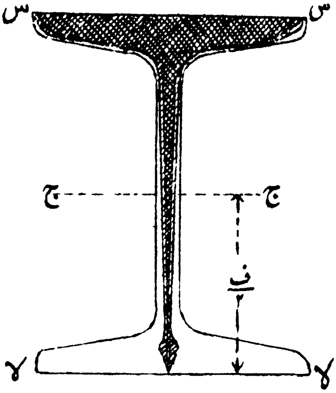
ایسی تراشوں کی صورت میں جو تعدیلی محور کے گرد متشاکل ہوں تراش کا مقیاس مق اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ آج کی قیمت کو نصف گہرائی سے تقسیم کریں اور دیگر صورتوں میں اس طرح کہ آج کی قیمت کو انتہائی تنشی یا فشاری پرت کے فاصلے سے تقسیم کریں جس سے تراش تنشی یا فشاری مقیاس حاصل ہوگا۔ (دیکھو (۸) دفعہ ۶۳)۔



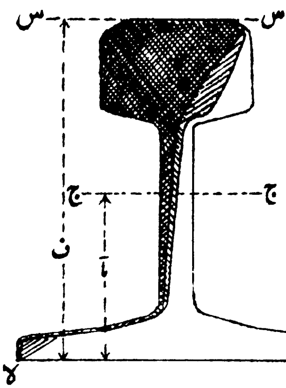
شکل ۸۹

ان ترسیمی طریقوں کی تمثیلیں اشکال ۸۷ تا ۹۳ میں دکھائی گئی ہیں۔ اشکال ۸۷ اور ۸۸ پٹری کی تراشوں کو

تعبیر کرتی ہیں۔ ان کا مرکز ہندسی اور معیارِ جمود شکل ۸۵ کی طرح معلوم کیے گئے ہیں۔ شکال ۸۹ اور ۹۰ میں انہی تراشوں پر شکل ۸۶ کے طریقے کا اطلاق کیا گیا ہے۔ اشکال ۹۱ اور ۹۲ متماثل I شہتیر کی تراشوں کو



شکل ۹۱

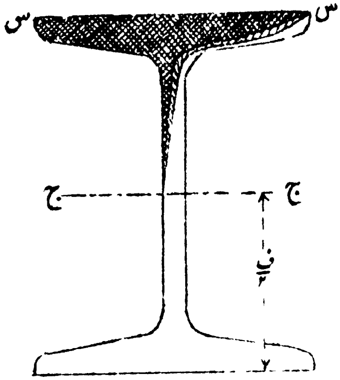


شکل ۹۰

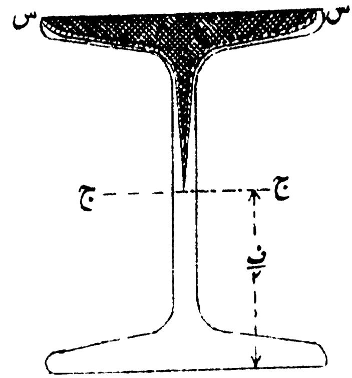
تعبیر کرتی ہیں۔ ان کا معیارِ جمود شکل ۸۵ کی طرح معلوم کیا گیا ہے۔ لیکن شکل ۹۲ میں تعدیلی محور کے گرد معیارِ جمود بالراست معلوم کیا گیا ہے اور مسئلہ (۱) دفعہ ۶۶ کا استعمال نہیں کیا گیا۔ اس صورت میں اندرونی رقبے کے دُگنے کو ف/۲ سے ضرب دینے سے شہتیر کی تراش کا مقیاس مق حاصل ہوتا ہے۔ شکل ۹۳ میں اسی تراش پر شکل ۸۶ کے متبادل ساخت کے اصول کا اطلاق کیا گیا ہے۔

اشکال ۹۲ اور ۹۳ میں پہلا مشتق رقبہ ر۱ صریحاً ایسا ہے کہ اگر صفحہ ۱۳۹
پورے رقبہ پر اُس حدت کا یکساں زور عائد کیا جائے جو شہتیر کی کھال پر عمل کرتی ہے تو نصف رقبے پر مجموعی زور وہی ہوگا جو اصلی تراش کے نصف پر جھکاؤ کے دوران میں فی الحقیقت پڑتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کیونکہ اصلی رقبے کی ہر پٹی نسبت (ا : ف/۲) میں تحویل کردی گئی ہے،

اور یہ وہی نسبت ہے جو اِس پٹی کے زور کی حدت اور کھال کے زور کی



شکل ۹۳



شکل ۹۲

حدت کی ہے۔ کسی شہتیر کی تراش کے پہلے مشتق رقبہ کو بعض اوقات مقیاسی شکل کہتے ہیں۔

صفحہ ۱۴۰

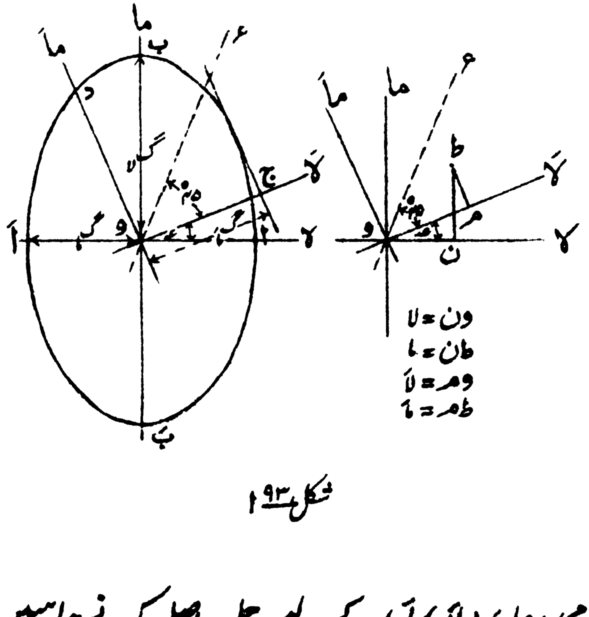
تعدیلی محور کے دونوں جانب جو متوازی طولی زور ہونگے اُن کے مرکز صریحاً مقیاسی شکل کے رقبے کے مرکز یا مرکزِ ہندسی پر ہونگے۔ یعنی کسی عرضی تراش کے آر پار عمل کرنے والی طولی قوتیں سکونیاتی طور پر اس کے معادل ہیں کہ تنشی قوتوں کا مجموعہ مقیاسی شکل کے تنشی جانب کے مرکزِ ہندسی پر عمل کرے اور (مساوی) مجموعی فشار فشاری جانب کے مرکزِ ہندسی پر عمل کرے (جو دباؤ کا مرکز ہوگا)۔

جبری اور ترسیمی طریقوں کا مقابلہ کرتے وقت یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مقدار $\frac{1}{ما} \int$ مای ذرا مقیاسی شکل کا رقبہ ایسے خطوط کے درمیان ہے جو تکمل کی حدود کے متناظر ہوں اور تعدیلی محور کے متوازی ہوں۔ ما یا $\frac{ق}{۲}$ نصف گہرائی ہے۔

۱۶۸۔ جمود کا ناقص یا معیار کا ناقص —— کسی تراش کے صدر محور —— کسی مستوی رقبے کے صدر محوروں ولا اور وما کی یہ تعریف کی جاسکتی ہے کہ یہ دو علی القوائم محور ہیں جو مستوی کے اندر ہیں اور مرکزِ ہندسی میں سے گزرتے ہیں اور ایسے ہیں کہ مقدار ج (لا ما . مف ر) جو جمود کا حاصل ضرب (یا حاصل ضرب معیار) کہلاتی ہے صفر ہے۔ اس میں لا اور ما رقبے کے ایک چھوٹے حصے مف ر کے قائم محدد بلحاظ ولا اور وما کے ہیں۔

فرض کرو کہ ج (ما² مف ر) = آلا = گ²لا ج (مف ر)

اور ج (لا² مف ر) = آما = گ²ما ج (مف ر)



شکل ۱۹۳ ا

تب کسی اور علی القوائم محوروں ولاَ اور وماَ کے گرد، جو مستوی کے اندر ہوں اور ولاَ محور ولا سے زاویہ عہ بناتا ہو، معیارِ جمود معلوم کرنے کے لیے شکل ۱۹۳ ا کی دائیں جانب سے کسی نقطے ط کے محددوں (لاَ، ماَ) کے لیے جملے حاصل کرنے چاہییں۔

ومر = لاَ = لا جم عہ + ما جب عہ

ظ ھ = مَا = ما جم عہ - لا جیب عہ

اس لیے آ۲ = Σ (لاَ۲ مف س) = جم۲ عہ Σ (لا۲ مف س)

+ جیب۲ عہ Σ (ما۲ مف س) + ۲ جیب عہ جم عہ Σ (لا ما مف س)

آ۲ = آ۱ جم۲ عہ + آ۱ جیب۲ عہ

یا گ۲ = گ۲ جم۲ عہ + گ۲ جیب۲ عہ } کیونکہ Σ (لا ما مف س) = ۰ ....(۱)

اسی طرح آلا = آ جم۲ عہ + آ جیب۲ عہ

اور گ۲ = گ۲ جم۲ عہ + گ۲ جیب۲ عہ } ....(۲)

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

صفحہ ۱۴۱

آلا + آ = آ + آ

گ۲ + گ۲ = گ۲ + گ۲ } = مستقل ....(۳)

یہ نتیجہ مسئلہ (۲) دفعہ ۶۶ سے بالراست نکل آتا ہے ۔

اگر و ا = و اَ (شکل ۱۹۳) کھینچے جائیں جو گ کو تعبیر کریں اور و ب = و بَ جو گ کو تعبیر کریں اور و ا اور و ب کو نیم صدر محور مان کر ایک ناقص اب اَبَ کھینچا جائے تو گ طول و ج سے تعبیر ہوگا جو و سے و مَا کے متوازی مماس پر عمود ہے جہاں و ھ اور و مَا علی الترتیب محوروں و لا اور و ما سے زاویہ عہ بناتے ہیں ۔ ثبوت یہ ہے کہ ناقص کی خاصیت کی رُو سے

و ج۲ = و ا۲ جم۲ عہ + و ب۲ جیب۲ عہ

اور یہ وہی ربط ہے جو (۱) سے حاصل ہوا ہے۔ اس طرح اس معیار کے ناقص سے کسی محور کے گرد گردشی نصف قطر حاصل ہوگا جو محور کے متوازی مماس کے و سے عمودی فاصلے کے مساوی ہوگا۔ نیز چونکہ ناقص میں حاصل ضرب ود × وج مستقل ہوتا ہے (اور و ا × وب کے مساوی ہوتا ہے) اس لیے کسی محور مثلاً ومَا کے گرد گردشی نصف قطر اس کی سمت کے سمتی نیم قطر ود کے معکوس تناسب ہوگا اور اس کی قیمت

$$گ_ا = \frac{گ_۱ \times گ_۲}{ود}$$

اب اگر ایک ایسا منحنی کھینچا جائے کہ و سے اس کا ہر سمتی نیم قطر اس سمت کے محور کے گرد گ کے مربع کے تناسب ہو یعنی آ کے تناسب ہو تو یہ منحنی زیرِ غور تراش کا جمود کا منحنی کہلائیگا۔ مثلاً سمت وہ کا سمتی نیم قطر مساوات (۲) سے حاصل ہوگا اور دوسرے سمتی نیم قطر بھی آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

(۱) کو ھ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے یا محض ناقص کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ گ کی اعظم اور اقل قیمتیں گ۱ اور گ۲ ہیں جو گ کی قیمتیں صدر محوروں کے گرد ہیں۔ بعض اوقات اس کی ضرورت پڑتی ہے کہ گ (اور آ) کی اقل قیمت معلوم کی جائے اور اس کے لیے صدر محور معلوم کرنا ضروری ہے۔ اگر تراش کا کوئی محور تشاکل ہے تو ظاہر ہے کہ وہ ایک صدر محور ہوگا کیونکہ تشاکل کی رو سے ق (لاا مف س) صفر ہونا چاہیے۔ دوسرا صدر محور پہلے کے علی القوائم ہوگا اور تراش کے مرکزِ ہندسی میں سے گزریگا۔ اس کی ایک اہم مثال ایک مساوی بازوؤں کی زاویہ تراش ہے۔

اگر کسی مستوی شکل (مثلاً ایک مستدیر یا مربع تراش) کے رو سے زیادہ محور تشاکل ہوں تو اس کا معیار کا ناقص ایک دائرہ بن جاتا ہے اور اس کا معیارِ جمود ہر ایسے محور کے گرد جو اس کے مستوی میں ہو اور مرکزِ ہندسی

میں سے گزرے وہی ہوتا ہے۔ اگر کسی تراش کا کوئی محور تشاکل نہ ہو تو صدر محور اور صدر یا اعظم اور اقل معیارِ جمود کسی دو علی القوائم محوروں مثلاً و لا اور و ما اور ایک تیسرے محور و ع کے گرد کے معیاروں کے ذریعے معلوم ہو سکتے ہیں جہاں و ع دونوں محوروں و لا اور و ما سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہو۔ ان تین محوروں کے گرد معیارِ جمود گزشتہ دفعات میں بیان کیے ہوئے طریقوں سے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ و ع کے گرد معیارِ جمود آء ہے۔ تب مساوات (۲) کے اطلاق سے

آء = آلا جم۲ (عہ + ۴۵°) + آما جب۲ (عہ + ۴۵°)

= ½ آلا (۱ - جب ۲عہ) + ½ آما (۱ + جب ۲عہ) .... (۴)

۲ آء = آلا + آما + (آما - آلا) جب ۲ عہ .... (۵)

اس لیے (۳) سے

(آما - آلا) جب ۲ عہ = ۲ آء - (آلا + آما) .... (۶)

(۱) میں سے (۲) کو تفریق کرنے سے

(آما - آلا) جم ۲ عہ = آما - آلا .... (۷)

صفحہ ۱۴۲

(۶) کو (۷) سے تقسیم کرنے سے

مس ۲ عہ = [۲ آء - (آلا + آما)] / [آما - آلا] .... (۸)

اس سے صدر محوروں کی سمت معین ہوتی ہے۔ عہ کو و لا سے و ع کی مخالف سمت میں ناپنا چاہیے۔

نیز (۳) اور (۷) سے

آ~اا~ = ½ { آ~ار~ + آ~اہ~ + (آ~اا~ − آ~اہ~) قط ۲ عہ } .... (۹)

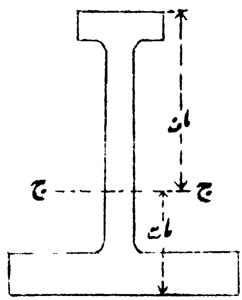
اور آ~اہ~ = ½ { آ~اا~ + آ~اہ~ − (آ~اا~ − آ~اہ~) قط ۲ عہ } .... (۱۰)

جس سے صدر معیارِ جمود معلومہ تین معیاروں کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں۔

۶۹۔ بعض خاص تراشیں۔ ڈھلا لوہا اور کنکریٹ کا فولاد۔

(۱) ڈھلے لوہے کے شہتیر —— ڈھلا لوہا عموماً فشار میں تناؤ سے پانچ یا چھ گنا زیادہ مضبوط ہوتا ہے لیکن جب تک مادہ زور اور فساد کی تناسبیت کو برقرار رکھے تشاکل تراش میں خماؤ میں انتہائی حدتیں تناؤ اور فشار کی مساوی ہونگی (دیکھو دفعہ ۶۳)۔ ڈھلے لوہے میں کوئی قابل لحاظ بیکر پذیر مغلوبیت نہیں ہوتی جس کی وجہ سے لچک کی حد کے باہر زور کی تقسیم لچک کی حد کے اندر کی تقسیم سے زیادہ مختلف نہیں ہوگی۔ اس طرح تشاکل تراش کا ڈھلے لوہے کا شہتیر خماؤ میں تناؤ کی وجہ سے ناکارہ ہوگا اور اس طرح یہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ تراش ایسی رکھی جائے کہ فشاری زور کی اعظم حدت تنشی زور کی اعظم حدت کی تقریباً پانچ گنی ہو۔ اور یہ اس طرح کیا جا سکتا ہے کہ تراش کی شکل ایسی ہو جس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ فشاری کنارے سے تنشی کنارے سے فاصلے کا پانچ گنا ہو۔ ایک کوردار یا غیر منتظم I تراش میں اس کے لیے تناؤ کور بڑی اور فشار کور بہت چھوٹی رکھنی ہوگی۔ اور ڈھلے لوہے کے لیے کوروں کی جسامت کا یہ فرق اتنا بڑا ہوگا کہ چھوٹی کور کے جلد ٹھنڈے ہونے کی وجہ سے شدید اندرونی زور پیدا ہو جائینگے اور تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مرکزِ ہندسی سے فشاری اور تنشی کوروں کے فاصلوں کی نسبت ۵ کی بجائے ۲ یا ۳ : ۱ رکھی جائے (دیکھو شکل ۹۴) تو بہت

باکفایت نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ تناؤ کور کو بہت موٹا بنانے کی بجائے اس کا عرض زیادہ رکھا جاتا ہے کیونکہ زیادہ موٹائی سے ٹھنڈے ہونے کی رفتار سست ہوجاتی ہے۔ شکل ۹۴ جیسی تراش کا معیار جمود مستطیلوں میں تقسیم کرکے (دیکھو دفعہ ۶۷) یا دفعہ ۶۸ کے مطابق ترسیماً حاصل کیا جاسکتا ہے۔



شکل ۹۴

(۲) محکم کنکریٹ کی تراشیں[۱]۔

سیمنٹ اور کنکریٹ اعلیٰ فشاری زور کو برداشت کرنے کے لیے موزوں ہیں لیکن تناؤ کو برداشت کرنے کے بہت کم بلکہ موزوں نہیں۔ ان کو خماؤ برداشت کرنے کے قابل بنانے کے لیے دھات کے ذریعے جو تناؤ کو برداشت کرتی ہے محکم کیا جاتا ہے۔ دھات مختلف تدبیروں سے کنکریٹ کے اندر مضبوط جکڑی جاتی ہے۔ اس طرح کی شے میں مفروضہ حسب معمول یہ ہے کہ دھات سارا تناؤ برداشت کرتی ہے اور کنکریٹ سارا فشار۔ اس قسم کے ایک مرکب شہتیر کی صورت میں تعدیلی محور عموماً تراش کے مرکز ہندسی میں سے نہیں گزریگا کیونکہ دونوں اشیا (دھات اور کنکریٹ) کی راست لچک کے مقیاس (سے) مختلف ہیں (دیکھو دفعہ ۶۲)۔ اس کو تقریبی طور پر اس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے کہ سمنٹ کی مجموعی فشاری قوت یا دھکیل کو دھات کی مجموعی کھینچ کے مساوی رکھیں۔ چونکہ دھات کی تراش گہرائی کے ایک بہت چھوٹے حصے کو گھیرتی ہے اس لیے دستور ہے کہ دھات کے رقبے کو اس کے مرکز پر مرتکز اور زور کی ایک یکساں حدت کے تحت مانا جائے جو اس کے مرکز پر کی حدت کے مساوی ہو۔

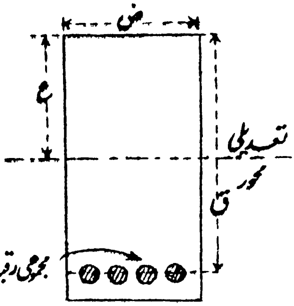
ذیل میں جو آہن کنکریٹ کے شہتیروں کے خماؤ کا سادہ نظریہ بیان

صفحہ ۴۳

[۱] ترسیمی طریقے کے لیے دیکھو "محکم کنکریٹ کی تراشوں کی ترسیمی سکونیات" جو رسالہ "انجینیرنگ" ۲۵ دسمبر ۱۹۱۵ء میں شائع ہوا ہے۔

کیا گیا ہے اُسے صرف تقریبی سمجھنا چاہیے کیونکہ کنکریٹ کے تناؤ کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔ اور نیز کنکریٹ جیسی غیر متجانس شے میں معمولی کامی بوجھوں کے تحت زور اور فساد کی تناسبیت صحت کے ساتھ موجود نہیں ہوگی۔ زیادہ دقیق اور آزمائشی قاعدے وضع کیے گئے ہیں اور تجربے سے اُن کا امتحان کیا گیا ہے لیکن ذیل کا طریقۂ حساب سب میں زیادہ کثیر الاستعمال ہے۔

فرض کرو کہ ایک آہن کنکریٹ کے شہتیر کے تراشی ابعاد شکل ۹۵ کے مطابق ہیں۔ مان لو کہ دفعات ۶۱ اور ۶۵ کے مطابق خماؤ سے پیدا ہونے والا فساد تعدیلی محور سے فاصلے کے اور شے کے راست لچک کے مقیاس کے متناسب ہے۔ فرض کرو کہ تراش کے فشار کے کنارے سے تعدیلی محور کی گہرائی ع ہے، اس کنارے پر فشاری زور کی حدت (جو اعظم ہوگی) زض اور دھاتی اِحکام کے اندر تنشی زور کی حدت زت ہے جو عملاً یکساں مانی جاسکتی ہے۔ فرض کرو کہ فشار میں کنکریٹ کا راست لچک کا مقیاس ےض اور تناؤ میں فولاد کا ےت ہے۔



شکل ۹۵

تب فشاری کنارے پر کنکریٹ میں فساد $\frac{\text{زض}}{\text{ےض}}$ ہوگا (دیکھو دفعہ ۶۱)

اور دھات میں فساد $\frac{\text{زت}}{\text{ےت}}$ ہوگا۔

یہ فساد جہاں واقع ہوتے ہیں اُن مقاموں کے فاصلے تعدیلی محور سے ع اور (ق - ع) ہیں اور چونکہ فساد تعدیلی محور سے فاصلے کے متناسب مانے گئے ہیں (دفعات ۶۱ اور ۶۵) اس لیے

$$\frac{\text{زض}}{\text{ےض}} \div \frac{\text{زت}}{\text{ےت}} = \frac{\text{ع}}{\text{ق} - \text{ع}}$$

یا $$\frac{\text{ن}_{\text{ن}}}{\text{ز}_{\text{ت}}} = \frac{\text{ع}}{\text{ق} - \text{ع}} \; \frac{\text{سے}_{\text{ن}}}{\text{سے}_{\text{ت}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

دی ہوئی اشیا کے لیے $\text{سے}_{\text{ن}}$ اور $\text{سے}_{\text{ت}}$ کی نسبتیں معلوم ہونگی۔
کنکریٹ اور فولاد کی صورت میں ان کی نسبت بالعموم $\frac{۱}{۱۰}$ سے $\frac{۱}{۱۵}$ تک ہوتی ہے۔

صفحہ ۲۴۴

مجموعی دباؤ = (فشاری زور کی اوسط حدت) × (فشاری رقبہ)

$$= \frac{\text{ن}_{\text{ن}}}{۲} \times \text{ع} \times \text{ض}$$

کنکریٹ کے تناؤ کو نظر انداز کر کے مجموعی تناؤ

$$= \text{ز}_{\text{ت}} \times (\text{اِحکام کی تراش کا رقبہ}) = \text{ز}_{\text{ت}} \times \text{ر}$$

اور چونکہ مجموعی دھکیل مجموعی کھینچ کے مساوی ہونا چاہیے کیونکہ دونوں مل کر ایک جفت بنتے ہیں جو مزاحمت کا معیار ہے اس لیے

$$\frac{\text{ن}_{\text{ن}}}{۲} \times \text{ع} \times \text{ض} = \text{ز}_{\text{ت}} \times \text{ر}$$

$$\frac{\text{ن}_{\text{ن}}}{\text{ز}_{\text{ت}}} = \frac{۲\text{ر}}{\text{ع} \times \text{ض}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اس لیے (۱) سے

$$\frac{۲\text{ر}}{\text{ع} \times \text{ض}} = \frac{\text{ع}}{\text{ق} - \text{ع}} \times \frac{\text{سے}_{\text{ن}}}{\text{سے}_{\text{ت}}}$$

اس سے ع کے لیے ایک مساوات درجہ دوم مقداروں ض، ر، ق اور $\frac{\text{سے}_{\text{ن}}}{\text{سے}_{\text{ت}}}$ کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے جو سب کی سب معلوم فرض کی گئی ہیں۔

آہن کنکریٹ کے شہتیروں کی تراشیں عموماً مستطیلی ہوتی ہیں لیکن اگر تراش کا فشاری حصہ کسی اور شکل کا ہو تو مجموعی فشار کو کنارے کی اعظم حدت زف کی رقوم میں (جس کا تعدیلی محور سے فاصلہ ع نامعلوم ہے) بیان کرنے کے لیے حسب ذیل عمل کرنا چاہیے۔

فرض کرو کہ تعدیلی محور سے فاصلہ ما پر تراش کا عرض تعدیلی محور کے متوازی ی ہے جو کسی ثابت مقام مثلاً فشاری کنارے سے اس کے فاصلہ (ع ـ ما) کے ساتھ ایک معلومہ طریقے پر بدلتا ہے اور فرض کرو کہ تعدیلی محور سے فاصلہ ما پر زور کی حدت ف ہے۔ تب

$$\frac{\text{ف}}{\text{ما}} = \frac{\text{زف}}{\text{ع}}$$

$$\text{ف} = \frac{\text{زف}}{\text{ع}} \times \text{ما}$$

$$\text{مجموعی فشار} = \int_{0}^{\text{ع}} \text{ف ی فرما} = \frac{\text{زف}}{\text{ع}} \int_{0}^{\text{ع}} \text{ما ی فرما}$$

اور یہ معلوم ہوسکتا ہے کہ اگر ی کو ع ـ ما کی رقوم میں بیان کیا جائے۔ اس کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے ـ

$$\text{مجموعی فشار} = \text{زف} \times (\text{فشاری مقیاسی شکل کا رقبہ})$$

(دیکھو دفعہ ۶۸ کا آخر) ـ شکل ۹۵ کی مستطیلی تراش میں ی = ض = مستقل اور یہ آسان ترین صورت ہے۔

بسا اوقات آہن کنکریٹ کا فشاری رقبہ T کی شکل کا ہوتا ہے جو ایک کنکریٹ کی سل یا فرش اور ایک اس کو سہارنے والے مستطیلی شہتیر کے بالائی حصے پر مشتمل ہوتا ہے جس کا نچلا حصہ تناؤ کو برداشت کرنے کے لیے محکم کیا جاتا ہے فرش اور شہتیر ایک سالم جسم یعنی "یک لخت" ہوتے ہیں۔ (دیکھو نیچے کی مثال ۳ اور اس کے بعد کا نوٹ) ـ اس طرح عرض

دو حصوں میں علیٰحدہ علیحدہ مستقل ہوتا ہے اور عمل کو ان دو حصوں میں تقسیم کر دینا چاہیے۔ T کی انتصابی ٹانگ کا فشار (یعنی شہتیر کے بالائی حصے کا زور) آڑے حصے یعنی سل کے زور کے مقابلے میں نظر انداز کرنے کے قابل ہوتا ہے۔

صفحہ ۱۴۵ مجموعی فشار کا مزاحمت کا معیار

$$= \frac{ن_ن}{ع} \int_{ن}^{ع} ما^{ای} فرما \quad یا \quad ن_ن \times \frac{آ}{ع}$$

جہاں آ فشاری رقبے کا معیارِ جمود تعدیلی محور کے گرد ہے۔ اس کا ترسیمی معادل حسبِ ذیل ہوگا:۔

ن$_ن$ × (فشار کی مقیاسی شکل کا رقبہ) × (اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ تعدیلی محور سے)

مقیاسی شکل کا مرکزِ ہندسی دباؤ کے مرکز پر منطبق ہوگا۔ یا دفعہ ۶۸ کی طرح دوسرا مشتق رقبہ استعمال کرنے سے

فشار کا مزاحمت کا معیار = ن$_ن$ × ع × فشاری حصے کا دوسرا مشتق رقبہ

مجموعی تناؤ کا مزاحمت کا معیار صریحاً ن$_ت$ × ر × (ق - ع) ہوگا اور مزاحمت کا مجموعی معیار

= مجموعی فشار (یا کھینچ) × فشار کے مرکز کا فاصلہ اِحکام سے۔

مثال ۱۔ ایک ۲۰ انچ گہرے اور ۱۰ انچ چوڑے محکم کنکریٹ کے شہتیر میں ۱ انچ قطر کی چار سلاخیں اس طرح رکھی گئی ہیں کہ ان کے محور شہتیر کے نچلے رُخ سے ۲ انچ کے فاصلے پر ہیں۔ تعدیلی محور کا محل اور تراش کا مزاحمت کا معیار معلوم کرو جب کہ فشاری زور کی اعظم حدت ۱۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو۔ اس وقت فولاد میں تنشی زور کی حدت کیا ہوگی۔ ی کی قیمت فولاد کے لیے کنکریٹ کی ۱۲ گنی لو۔

شکل ۹۵ کی اور اوپر کی ترقیم کو استعمال کریں تو

$$\text{ق} = \text{۲۰} - \text{۲} = \text{۱۸ انچ}$$

$$\frac{\text{زف}}{\text{شف}} \div \frac{\text{زت}}{\text{شت}} = \frac{\text{اعظم فشاری فساد}}{\text{دھات کا تنشی فساد}} = \frac{\text{ع}}{\text{۱۸} - \text{ع}}$$

$$\frac{\text{زف}}{\text{زت}} = \frac{\text{شف}}{\text{شت}} \times \frac{\text{ع}}{\text{۱۸} - \text{ع}} = \frac{\text{ع}}{\text{۱۲}(\text{۱۸} - \text{ع})}$$

اور فولاد کی مجموعی کھینچ کو کنکریٹ کے فشار کے مساوی رکھنے سے

$$\text{زت} \times \text{۴} \times \frac{\text{۳}}{\text{۴}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{زف} \times \text{ع} \times \text{۱۰}$$

اس لیے

$$\frac{\text{زف}}{\text{زت}} = \frac{\frac{\text{۳}}{\text{۴}} \times \text{۴}}{\text{ع} \times \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \times \text{۱۰}} = \frac{\text{۳}}{\text{۵ع}} = \frac{\text{ع}}{\text{۱۲}(\text{۱۸} - \text{ع})}$$

یا

$$\text{۵ع}^{\text{۲}} + \text{۳۱۲ع} - \text{۳۲۱۶} = \text{۰}$$

اس کو حل کرنے سے $\text{ع} = \text{۸٫۵ انچ}$

تعدیلی محور سے فولادی سلاخوں کے مرکز کا فاصلہ

$$= \text{۱۸} - \text{۸٫۵} = \text{۹٫۵ انچ}$$

$$\text{مجموعی فشار} = \frac{\text{۱۰۰۰}}{\text{۲}} \times \text{۱۰} \times \text{۸٫۵} = \text{۴۲۵۰ پونڈ}$$

اور دھات کا مجموعی تناؤ اس کے مساوی ہوگا۔

تعدیلی محور سے دباؤ کے مرکز کا فاصلہ ۸٫۵ انچ کا $\frac{۲}{۳}$ ہوگا اور تناؤ کے مرکز کا فاصلہ ۹٫۵ انچ ہوگا۔ صفحہ ۱۴۶

اس لیے مزاحمت کا معیار

$$= (\text{۴۲۵۰}) \times \left(\text{۹٫۵} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}} \times \text{۸٫۵}\right)$$

$$= \text{۶۴۴۶۰ پونڈ انچ}$$

فولاد میں جس کا رقبہ ۳ مربع انچ ہے تنشی زور کی حدت

$$\text{ز}_{\text{ت}} = \frac{۴۲۵۰}{۳} = ۱۳۵۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

یا دوسرے طریقے سے

$$\frac{\text{ز}_{\text{ت}}}{۱۰۰} = ۱۲ \times \frac{۹٫۵}{۸٫۵} = ۱۳۴۲$$

جس سے اوپر کے تقریبی نتیجے کی جانچ ہوجاتی ہے۔

مثال ۲ — ایک محکم کنکریٹ کے فرش کو ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ برداشت کرنا ہے۔ فصل ۱۲ فٹ ہے اور فرش کی موٹائی ۱۰ انچ ہے۔ معلوم کرو کہ کتنے اِحکام کی ضرورت ہے اور کتنا بوجھ فی مربع فٹ برداشت کیا جاسکتا ہے۔ فولادی سلاخوں کے مرکز فرش کی نچلی جانب سے $\frac{۱}{۲}$ ۱ انچ کے فاصلے پر رکھے جائیں۔ کنکریٹ کا جائز زور ۶۰۰ پونڈ فی مربع انچ اور فولاد کا ۱۲۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہے اور فولاد کا راست لچک کا مقیاس کنکریٹ کا ۱۰ گنا ہے۔ اگر بوجھ فرش کے فی مربع فٹ ۳۰۰ پونڈ ہو تو صرف ایک سمت میں خماؤ مان کر دونوں اشیا کے انتہائی زوروں کا اندازہ کرو۔

فرض کرو کہ ع = تعدیلی محور کا فاصلہ فشار کے کنارے سے۔

تب فولادی سلاخوں کے مرکزوں سے فاصلہ ۱۰ - ۱٫۵ - ع

= ۸٫۵ - ع انچ ہوگا۔

زور کی حدتوں کی نسبت

$$\frac{\text{تنشی زور کی حدت}}{\text{فشار کی اعظم حدت}} = \frac{۱۲۰۰۰}{۶۰۰} = ۱۰ \times \frac{۸٫۵ - \text{ع}}{\text{ع}}$$

اس لیے

$$۲\text{ع} = ۸٫۵ - \text{ع}$$

$$\text{ع} = ۲٫۸۳ \text{ انچ}$$

فرش کی ا انچ چوڑی پٹی لینے سے

کنکریٹ کا فشار $= \frac{۶۰۰}{۲} \times ۲٫۸۳ \times ۱ = ۸۵۰$ پونڈ

فولاد کا مجموعی تناؤ بھی ۸۵۰ پونڈ ہونا چاہیے۔ اس لیے مطلوبہ تراشی رقبہ

$= \frac{۸۵۰}{۱۲۰۰۰} = ۰٫۰۷۰۸۳$ مربع انچ

فرش کے عرض کے فی انچ۔ اگر ا انچ قطر کی گول سلاخیں استعمال کی جائیں تو ان کو باہمی فاصلہ

$\frac{۰٫۷۸۵۴}{۰٫۰۷۰۸} = ۱۱٫۱$ انچ پر رکھا جا سکتا ہے۔

مزاحمت کا مجموعی معیار

$$= ۸۵۰\left\{\left(\frac{۲}{۳} \times ۲٫۸۳\right) + (۸٫۵ - ۲٫۸۳)\right\}$$

$=$ ۶۴۲۲ پونڈ انچ

جو مجموعی فشار (یا تناؤ) اور دباؤ کے مرکز اور سلاخوں کے مرکزوں کے درمیان کے فاصلے کا حاصل ضرب ہے۔ صفحہ ۱۴۷

اگر و = بوجھ فی طولی انچ جو فرش کے فی مربع انچ کا بوجھ بھی ہوگا، تو مزاحمت کے معیار کو خماؤ کے معیار کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{۱}{۸}\,و \times ۱۴۴ \times ۱۴۴ = ۶۴۲۲$$

$$۱۴۴\,و = \frac{۶۴۲۲ \times ۸}{۱۴۴} = ۳۵۷ \text{ پونڈ}$$

جو بوجھ فی مربع فٹ ہے۔

اگر بوجھ صرف ۳۰۰ پونڈ فی مربع فٹ ہو تو زور اسی تناسب سے گھٹ جائینگے اور اس طرح

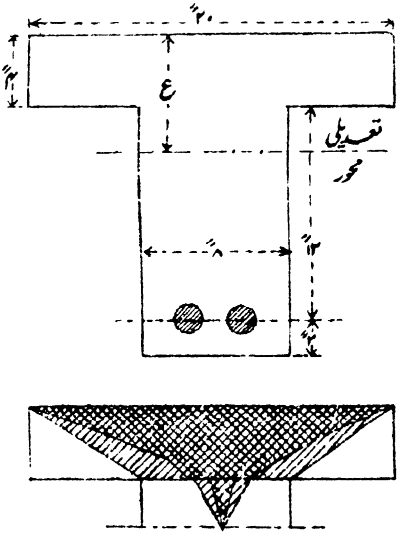
فشار کی اعظم حدت = ۶۰۰ × $\frac{۳۰۰}{۳۵۷}$

= ۵۰۵ پونڈ فی مربع انچ

تنشی زور کی حدت = ۱۲۰۰۰ × $\frac{۳۰۰}{۳۵۷}$

= ۱۰۰۹۰ پونڈ فی مربع انچ

مثال ۳ — ایک محکم شہتیر T تراش کا ہے۔ آڑا حصہ یعنی فشاری کور ۲۰ انچ چوڑی اور ۴ انچ گہری ہے۔ اور انتصابی ٹانگ ۱۴ انچ گہری اور ۸ انچ چوڑی ہے۔ اِحکام ۱½ انچ قطر کی فولاد کی دو گول سلاخوں پر مشتمل ہے جن کے محور نچلے رُخ سے ۲ انچ کے فاصلے پر ہیں۔ مفروضات حسبِ معمول اختیار کر کے فولاد کے زور کی حدت اور تراش کا مجموعی مزاحمت کا معیار معلوم کرو جب کہ کنکریٹ پر فشاری زور ۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ پڑے۔ فولاد کا راست لچک کا مقیاس کنکریٹ کے فشاری مقیاس کا ۱۲ گنا لو۔



شکل ۹۶

فرض کرو کہ

زت = فولاد کے زور کی حدت

ع = تعدیلی محور کا فاصلہ فشاری کنارے سے (دیکھو شکل ۹۶)۔

اس طرح زور کی حدتوں کی نسبت حسبِ ذیل ہوگی:

$$\frac{\text{زت}}{۵۰۰} = \frac{۱۶ - \text{ع}}{\text{ع}} \times ۱۲$$

یا
$$\text{زت} = \frac{۱۶ - \text{ع}}{\text{ع}} \times ۶۰۰۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

صفحہ ۱۴۸

$$\text{مجموعی فشار} = \frac{۵۰۰}{\text{ع}} \int_{\text{ع}-۴}^{\text{ع}} ۲۰\ \text{ما فرما} + \frac{۵۰۰}{\text{ع}} \int_{0}^{\text{ع}-۴} ۸\ \text{ما فرما}$$

$$= \frac{۱۰۰۰۰}{۲\times\text{ع}}\left\{\text{ع}^۲ - (\text{ع}-۴)^۲\right\} + \frac{۴۰۰۰}{۲\text{ع}}(\text{ع}-۴)^۲$$

$$= \frac{۴۰۰۰۰}{\text{ع}}(\text{ع}-۲) + \frac{۲۰۰۰}{\text{ع}}(\text{ع}-۴)^۲$$

پہلی رقم آڑے حصے کے اور دوسری رقم تعدیلی محور سے اوپر انتصابی ٹانگ کے فشار کو تعبیر کرتی ہے۔ مجموعی تناؤ

$$= ۲ \times \frac{۱۳}{۴} \times \frac{۹}{۴}\ \text{زت} = \frac{۳۹}{۸}\ \text{زت}$$

زت کی قیمت (۱) سے لے کر رکھنے اور مجموعی تناؤ کو مجموعی فشار کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{۳۹}{۸} \times \frac{۱۶ - \text{ع}}{\text{ع}} \times ۶۰۰۰ = \frac{۴۰۰۰۰}{\text{ع}}(\text{ع}-۲) + \frac{۲۰۰۰}{\text{ع}}(\text{ع}-۴)^۲$$

اس سے ع = ۶٫۶ انچ

اور $\text{زت} = ۶۰۰۰ \times \frac{۱۶ - ۶٫۶}{۶٫۶} = ۸۵۵۰$ پونڈ فی مربع انچ

فشار کا معیارِ مزاحمت

$$= \frac{500}{6.66}\int_{2.66}^{6.66} 20\,\text{ما}^2\,\text{فرما} + \frac{500}{6.66}\int_{0}^{2.66} 8\,\text{ما}^2\,\text{فرما}$$

$$= \frac{20\times 500}{3\times 6.66}\left\{(6.66)^3 - (2.66)^3\right\}$$

$$+ \frac{8\times 500}{3\times 6.66}(2.66)^3 = 139000 \text{ پونڈ انچ}$$

تناؤ کا معیارِ مزاحمت

$$= 8550 \times \frac{39}{8} \times 9.4 = 284000 \text{ پونڈ انچ}$$

اس لیے مجموعی معیارِ مزاحمت

$$= 139000 + 284000 = 423000 \text{ پونڈ انچ}$$

اگر تکملوں میں دوسری رقم کو نظر انداز کردیا جائے یعنی تعدیلی محور کے اوپر انتصابی ٹانگ میں جو خفیف سا فشاری زور ہے اس کو نظر انداز کردیا جائے تو مجموعی فشار اور معیارِ مزاحمت کی قیمتوں پر کوئی بڑا اثر نہیں پڑتا ۔ معیارِ مزاحمت کا اندازہ ترسیماً اس طرح کرسکتے ہیں کہ فشاری رقبے کی مقیاسی شکل تعدیلی محور پر قطب لے کر کھینچی جائے (دیکھو شکل ۹۶)۔ تب فشار کا معیارِ مزاحمت

$= 500 \times$ (فشاری مقیاسی شکل کا رقبہ) $\times$ (محور سے اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ)

یا اگر دوسری مشتق شکل کھینچی جائے تو معیار

$= 500 \times 6.66 \times$ (دوسری مشتق شکل کا رقبہ)

تناؤ کا معیارِ مزاحمت

= ۵۰۰ × (فشار کی پہلی مقیاسی شکل کا رقبہ) × ۹٫۴۸

صفحہ ۱۴۹ نوٹ ــــ T تراش کی ایک بہت عام مثال آہن کنکریٹ کے فرشوں کی ہے جن کے ساتھ آڑے شہتیر یک تختہ ہوں۔ فرش T کے آڑے حصے کی بجائے ہوتا ہے۔ اس صورت میں آڑا حصہ T کے باقی حصے کے مقابلے میں بہت بڑا ہوتا ہے اور اگر اِحکام کے اندر زور ایک معتدل مقدار میں ہو تو تعدیلی محور آڑے حصے کے نیچے کی بجائے اس کے اندر واقع ہوگا۔ اس کی وجہ سے فرش کی سل کے نچلے پہلو میں تناؤ پیدا ہوگا۔ لیکن فرش کو اس سمت میں تناؤ کے لیے محکم نہیں کیا جاتا اس لیے تڑق پیدا ہونے کا احتمال رہتا ہے۔ اس سے اس طرح بچ سکتے ہیں کہ زیادہ اِحکام استعمال کیا جائے جس کی وجہ سے آڑے شہتیر یعنی T کی انتصابی ٹانگ میں زور کی حدت کم ہوجائیگی۔

۷۔ یکساں مضبوطی کے شہتیر ــــ خماؤ کا معیار کسی شہتیر کے طول میں عموماً نقطہ بہ نقطہ بدلتا ہے اور اس تغیر کا قانون لداؤ کی کیفیت پر منحصر ہوتا ہے۔ اگر تراش سارے طول میں یکساں ہو تو ایسی ہونی چاہیے کہ اُس اعظم خماؤ کو برداشت کرسکے جو شہتیر پر کسی جگہ پڑتا ہو۔ اس طرح یہ تراش باقی مقامات پر ضرورت سے زیادہ بڑی ہوگی۔ ظاہر ہے کہ تراش کو ہر مقام پر فسادی عمل کے متناسب رکھنے سے کفایت عمل میں آئیگی۔ اس پر چند عملی قیود ہیں۔ اُن کو ملحوظ رکھ کر مختلف نمونوں کی مرکب گرڈر کی تراشوں میں اسی اصول سے کام لیا جاتا ہے۔ دوسری صورتوں میں اس طرح کی متغیر تراش کو جو ٹھیک ٹھیک فسادی عمل کے متناسب ہو اختیار کرنے سے عملاً بہت کم کوئی فائدہ ہوتا ہے اگرچہ تراش اکثر چیزوں میں متغیر ضرور رکھی جاتی ہے مثلاً جہازوں کے مستول، گاڑیوں کی کمانیاں اور بہت سے برآمدہ بیرم۔

مضبوطی کی یکسانیت کے واسطے تراش کو جس طرح بدلنا ہوگا اس کا یہاں مختصر طور پر ذکر کیا جاتا ہے۔ صرف خماؤ سے پیدا ہونے والے راست زوروں پر غور کریں تو اس مطلب کے لیے کہ ایک خماؤ کے معیار م کے تحت جو شہتیر کے طول میں مستقل نہ ہو ہر تراش پر اعظم زور ز ایک ہی ہو ذیل کی شرط پوری ہونی چاہیے :۔

$$\text{م} = \text{ز}\,\text{مق} \quad \text{یا} \quad \text{مق} = \frac{\text{م}}{\text{ز}} \quad \text{یا} \quad \text{ز} = \frac{\text{م}}{\text{مق}}$$

جہاں مق شہتیر کا متغیر تراش کا مقیاس ہے۔ بالفاظِ دیگر ز مستقل رہنا چاہیے اور مقیاس مق کو خماؤ کے معیار کے متناسب ہونا چاہیے۔ اگر مستطیلی تراش لیں جس میں مق = $\frac{1}{6}$ ض ق^{2} (دفعہ ۶۶) تو ض یا ق (یا دونوں) کو اس طرح بدلنا ہوگا کہ ض ق^{2} متناسب ہو م کے۔ اگر شہتیر ایک برآمدہ بیرم ہے جس پر ایک سرے پر بوجھ و ہو (دیکھو شکل ۵۹ ت) تو اس میں آزاد سرے سے فاصلہ لا پر خماؤ کا معیار و.لا ہوگا اور راست زور کے لحاظ سے یکساں مضبوطی اس طرح حاصل ہوسکتی ہے کہ عرض ض کو لا کے تناسب میں بدلیں۔ اس صورت میں شہتیر کی گہرائی ق مستقل ہوگی اور سطحی خاکہ مثلثی ہوگا۔ عرض کے لیے

$$\frac{1}{6}\,\text{ض}\,\text{ق}^{2} = \frac{\text{و}\,\text{لا}}{\text{ز}} \quad \text{یا} \quad \text{ض} = \frac{6\,\text{و}}{\text{ز}\,\text{ق}^{2}}\,.\,\text{لا}$$

عام صورت میں مستقل گہرائی کے مستطیلی شہتیروں کے لیے یکساں مضبوطی کی شرط یہ ہوگی کہ عرض اسی طرح بدلے جس طرح خماؤ کے معیار کے نقشے کا ارتفاع بدلتا ہے۔ کیونکہ

$$\text{ض} = \frac{6}{\text{ز}\,\text{ق}^{2}} \times \text{م} \quad (\text{جس میں ز اور ق مستقل ہیں})$$

اگر عرض مستقل رکھا جائے تو گہرائی کا مربع خماؤ کے معیار کے متناسب ہونا چاہیے یعنی گہرائی ہر مقام پر خماؤ کے معیار کے جذر کے متناسب صفحہ ۱۵۰

ہونی چاہیے ۔ یا

$$ق^{۲} = \frac{۶}{ز ض} \times م$$ (جس میں ز اور ض مستقل ہیں)

ٹھوس مستدیر تراشوں کے لیے جن کا قطر متغیر ہو

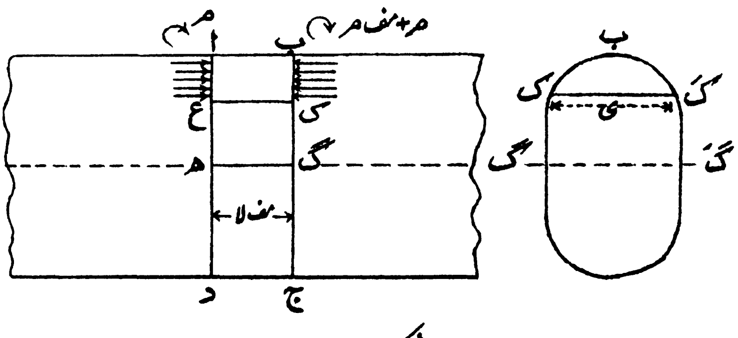
$$مف = \frac{\pi}{۳۲} ق^{۳} = \frac{م}{ز}$$

یا $$ق^{۳} = \frac{۳۲}{\pi ز} \times م$$

یعنی قطر خماؤ کے معیار کے تیسرے جذر کی طرح بدلنا چاہیے۔

۱۷ ۔ شہتیروں کے اندر جزی زور کی تقسیم ——— دفعہ ۵۶ میں

ایک افقی شہتیر کے ایک حصے کے تعادل پر غور کرتے وقت آسانی اس میں پائی گئی کہ ایک انتصابی مستوی تراش پر عمل کرنے والی قوتوں کو افقی اور انتصابی اجزا میں تحلیل کیا جائے ۔ زور کے اُفقی یا طولی اجزا کی حدت کے تغیر سے دفعات ۶۱، ۶۲ اور ۶۳ میں بحث کی گئی ہے ۔ اب ہم انتصابی تراش پر



شکل ۹۷

مماسی یا جزی زور کی تقسیم پر غور کرینگے ۔ کسی تراش کے کسی نقطے پر جو

انتصابی جز ہوگا اُس کے ساتھ ایک مساوی حدت کا اُفقی جز بھی موجود ہوگا (دیکھو دفعہ ۸) - انتصابی جز کا تقاضا یہ ہوگا کہ تراش کے دونوں طرف کے حصوں کے درمیان اضافی انتصابی پھسلن پیدا کرے اور اُفقی جز کا تقاضا یہ ہوگا کہ ایک اُفقی یا طولی تراش کے دونوں جانب کے حصوں کے درمیان اضافی اُفقی پھسلن پیدا کرے - تعدیلی محور سے بلندی ما پر جزی زور کی اوسط حدت تقریبی طور پر حسب ذیل طریقے پر معلوم کی جاسکتی ہے:-

شکل ۹۷ میں فرض کرو کہ ا د اور ب ج شہتیر کی دو تراشیں فاصلہ ع ک پر یا تعدیلی سطح گ ھ پر ناپے ہوئے فاصلہ مف لا پر ہیں - فرض کرو کہ گ ھ سے کسی بلندی ما پر متغیر عرض ی سے تعبیر ہوتا ہے - فرض کرو کہ تراش ا د پر خاؤ کا معیار م ہے اور ب ج پر م + مف م - تب تعدیلی سطح سے کسی بلندی ما پر تراش ا د پر طولی یا اُفقی زور کی حدت

$$ف = \frac{م\ ما}{آ} \quad (\text{دفعہ ۶۱})$$

جہاں آ تراشِ عمودی کا معیارِ جمود ہے - دونوں تراشوں کے درمیان کے صفحہ ۱۵۱
حصے اب ک ع پر غور کرو - تراشِ عمودی کے چھوٹے سے رقبے ی فرما پر تراش اع میں طولی دباؤ

$$= ف\ ی\ فرما = \frac{م\ ما}{آ}\ ی\ فرما$$

اسی بلندی پر تراش ب ک میں دباؤ

$$= \frac{(م + مف\ م)\ ما}{آ}\ ی\ فرما$$

یعنی کسی پرت پر دباؤ ب ک کی طرف سے اع سے بقدر $\frac{مف\ م}{آ}$ ما ی فرما کے ہوگا - اس لیے رقبہ ب ک پر کے مجموعی دباؤ کی زیادتی اع پر کے مجموعی دباؤ پر

$$= \int_{\text{ما}}^{\text{ما}_1} \frac{\text{مف مر}}{\text{آ}}\ \text{مای فرما} = \frac{\text{مف مر}}{\text{آ}} \int_{\text{ما}}^{\text{ما}_1} \text{مای فرما}$$

جہاں ما۱ = ما کی انتہائی قیمت یعنی ھ ا، اور ی پرت ع ک اور ا ب کے درمیان تراشِ عمودی کے متغیر عرض کو تعبیر کرتا ہے ۔ چونکہ حصہ ا ب ک ع پر حاصل اُفقی قوت صفر ہے اس لیے ب ک پر جو دباؤ کی زیادتی ہے اُس کو سطح ع ک پر کی اُفقی جزی قوت کے ساتھ متوازن ہونا چاہیے ۔اس لیے اگر (طول مف لا کے اندر جزی زور کی حدت کے تغیر کو نظر انداز کرتے ہوئے) بلندی ما پر جزی زور کی اوسط حدت ج ہو تو ع ک پر جزی زور ج ی مف لا ہوگا اور

$$\text{ج ی مف لا} = \frac{\text{مف مر}}{\text{آ}} \int_{\text{ما}}^{\text{ما}_1} \text{مای فرما}$$

اس لیے

$$\text{ج} = \frac{\text{مف مر}}{\text{مف لا}} \times \frac{1}{\text{آ ی}} \int_{\text{ما}}^{\text{ما}_1} \text{مای فرما}$$

$$= \frac{\text{ق}}{\text{آ ی}} \int_{\text{ما}}^{\text{ما}_1} \text{مای فرما} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)^{\text{ل}}$$

ل اگر شہتیر کی عمودی تراشں متغیر ہو تو ربط $\text{مف ف} = \frac{\text{ما}}{\text{آ}}\ \text{مف لا}$ کی بجائے $\text{ف} = \frac{\text{مر ما}}{\text{آ}}$ سے حسب ذیل ربط حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فرلا}} = \left(\text{آ ما} \frac{\text{فرمر}}{\text{فرلا}} - \text{مرما} \frac{\text{فرآ}}{\text{فرلا}}\right) \div \text{آ}^2$$

اور اس طرح مساوات (۱) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے:

$$\text{ج} = \frac{\text{ق آ} - \text{مر} \frac{\text{فرآ}}{\text{فرلا}}}{\text{ی آ}^2} \int_{\text{ما}}^{\text{ما}_1} \text{مای فرما}$$

اور یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے اگر آ، لا کا اور ی، ما کا سادہ تفاعل ہو۔

جہاں ق = $\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}}$ (دفعہ ۵۹ مساوات (۲)) = تراش پر مجموعی جزی قوت۔
دراصل بلندی ما پر جزی زور کی حدت کسی قدر متغیر ہوگی اور عرضاً اندر کی جانب زیادہ ہوگی۔

جملہ $\frac{\text{ق}}{\text{آی}}\int_{\text{ما}}^{\text{ما}_1}$ مای فرما میں تکمل کے باہر کا حرف ی اور تکمل کی نچلی حد کو تعبیر کرنے والا حرف ما تعدیلی سطح ھ گ سے اس خاص بلندی کی سطح کے لیے ہیں جس کے لیے ج مطلوب ہے لیکن تکمل کے اندر کے حروف ما اور ی دونوں وسعت ما، تا ما میں یا ا تا ع میں متغیر ہیں (شکل ۹۷)۔
دیکھو مقدار $\int_{\text{ما}}^{\text{ما}_1}$ مای فرما تعدیلی محور گ گَ کے گرد رقبہ ک ب کَ کا معیار ہے جو رقبے اور گ گَ سے اس کے مرکزِ ہندسی کے فاصلے کا حاصل ضرب ہے یا مقیاسی شکل کے اس رقبے کے جو ک کَ کے اوپر ہے اور بلندی ھ ا یا ما، کے حاصل ضرب کے مساوی ہے (دیکھو دفعہ ۶۸)۔ اس طرح

$$\text{ج} = \frac{\text{ق}}{\text{آ} \times \text{ک کَ}} \times (\text{رقبہ ک ب کَ}) \times$$

(اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ گ گَ سے) .... (۲)

یا
$$\text{ج} = \frac{\text{ق} \times \text{ما}_1}{\text{آ} \times \text{ک کَ}} \times (\text{مقیاسی شکل کا رقبہ ب}$$

اور ک کَ کے درمیان) .... (۳)

ان سے عمودی تراش کے کسی نقطے پر جزی زور کی حدت معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

اوپر کے جملے (۱) یا (۳) سے ظاہر ہے کہ ج اعظم ہوگا جب کہ

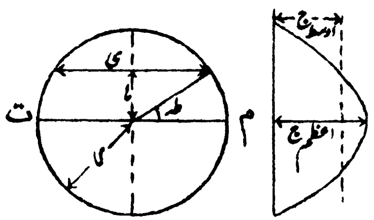
تکمل کی نچلی حد صفر ہو (یعنی ج تعدیلی سطح پر اعظم ہوگا) اور ج دونوں کناروں پر (جہاں ما = ما، یا ما = - ما،) صفر ہوگا۔ اگر مقیاسی شکلوں والا ترسیمی طریقہ اختیار کیا جائے تو تعدیلی محور کی متقابل جانبوں کے رقبوں کی علامتیں مخالف سمجھنی چاہییں۔

مستطیلی تراش (شکل ۹۸)۔ عرض ض گہرائی ق۔ چونکہ ی مستقل اور ض کے مساوی ہے اس لیے تعدیلی محور سے کسی بلندی ما پر

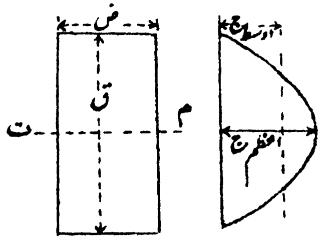
$$\text{ج} = \frac{\text{ق}}{\text{آ ی}} \int_{\text{ما}}^{\frac{\text{ق}}{2}} \text{ما ی فرما} = \frac{\text{ق}}{\text{آ}} \int_{\text{ما}}^{\frac{\text{ق}}{2}} \text{ما فرما}$$

$$= \frac{12\,\text{ق}}{\text{ض ق}^3} \left(\frac{1}{2}\,\text{ما}^2 \right)_{\text{ما}}^{\frac{\text{ق}}{2}}$$

$$= \frac{6\,\text{ق}}{\text{ض ق}^3} \left\{ \left(\frac{\text{ق}}{2}\right)^2 - \text{ما}^2 \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$



شکل ۹۹



شکل ۹۸

اگر ق کے خط کو اساسی خط مان کر ج کی قیمتوں کو ترسیم کیا جائے جیسا کہ شکل ۹۸ میں کیا گیا ہے تو منحنی ایک مکافی ہوگا اور جب کہ ما = ۰ تو

$$\text{ج} = \frac{3}{2}\,\frac{\text{ق}}{\text{ض ق}}$$

جزی زور کی اوسط حدت ق ÷ ض ق ہے۔ اس طرح اعظم حدت اوسط حدت سے ۵۰ فی صدی زیادہ ہوئی۔

مستطیل تراش ــــ شکل ۹۹ کو دیکھ کر

$$\text{ما} = \text{سا جب طہ} ،\ \text{ی} = \text{۲ سا جم طہ} ،\ \text{فرما} = \text{سا جم طہ فرطہ}$$

اور $\text{آ} = \frac{\pi\,\text{سا}^{۴}}{۴}$ مندرج کرنے سے

$$\text{ج} = \frac{\text{۴ ق} \times \text{۲ سا}^{۳}}{\pi\,\text{سا}^{۴} \times \text{۲ سا جم طہ}} \int_{\text{طہ}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب طہ جم}^{۲}\text{طہ فرطہ}$$

$$= \frac{\text{۴ ق}}{\pi\,\text{سا}^{۲}\,\text{جم طہ}} \left(\frac{۱}{۳}\,\text{جم}^{۳}\text{طہ}\right)_{\frac{\pi}{۲}}^{\text{طہ}}$$

$$= \frac{\text{۴ ق}}{۳\,\pi\,\text{سا}^{۲}}\,\text{جم}^{۲}\text{طہ} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{۴ ق}}{۳\,\pi\,\text{سا}^{۲}}\left(۱ - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{سا}^{۲}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

صفحہ ۱۳ تعدیلی محور پر طہ = ۰ یا ما = ۰ اور

$$\text{ج} = \frac{۴}{۳}\,\frac{\text{ق}}{\pi\,\text{سا}^{۲}}$$

جو تراش کے جزی زور کی اوسط حدت کا $\frac{۴}{۳}$ ہے۔ مختلف بلندیوں پر حدتیں شکل ۹۹ کے مطابق ہونگی۔ منحنی ایک مکافی ہے۔ یہ نتائج محض تقریبی ہیں۔ پٹی ی فرما میں زور اندر کی جانب زیادہ ہوتا ہے اور باہر کی جانب کم ہوتا جاتا ہے [1]

---

[1] پٹی کے اندر حدت کو مستقل ماننے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے اُس کا ایک سہل اندازہ مسٹر پری چرڈ کے پرچے "جھکاؤ کے نظریے کی خامیاں" سے ہوگا جو Trans. Am. Soc. Civil Engineers کی جلد ۸، صفحہ ۔۔۔ میں ملیگا۔ اس پرچے سے ابتدائی مستوی تراشوں کی شکل کے بگاڑ کا اندازہ ہوجاتا ہے اور نیز اس امر کا کہ سادہ جھکاؤ کے نظریے سے جو زور حاصل ہوتے ہیں اُن کی اصلاح کے لیے اُن میں کیا ترمیم کرنی چاہیے کہ زیادہ تقریبی نتائج حاصل ہوں۔

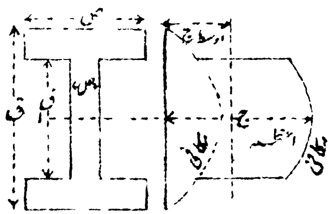
اس نقشے کا اوسط ارتفاع جزی زور کی اوسط حدت کو تعبیر نہیں کرتا کیونکہ تراش کا عرض یکساں نہیں - ایک پتلی دھاتی نلی کی صورت میں جس کی موٹائی م ہو تعدیلی محور پر ج کی اعظم قیمت اس طرح حاصل ہوگی کہ $\int_{ما}^{م}$ ما ی فرما کے لیے اس کی قیمت نصف رقبے اور تعدیلی محور سے اس کے مرکزِ ہندسی کے فاصلے کا حاصل ضرب لی جائے اس طرح

$$ج = \frac{ق\,۲}{ر^{۲} \times ۲\pi\, ر\, م \times ۲\, م} \times \pi\, ر\, م \times \frac{۲}{\pi}\, ر = \frac{۲ق}{۴\pi\, ر\, م}$$

جو پوری تراشش کے اوسط کا دوگنا ہے۔

مستطیلی I تراش نوکدار کناروں کے ساتھ (شکل نمبر ۱۰۰)۔

کور کے اندر تعدیلی محور سے فاصلہ ما پر



شکل نمبر ۱۰۰

$$ج = \frac{ق}{آض}\int_{ما}^{\frac{ق}{۲}} ماض\, فرما$$

$$= \frac{ق}{۲آ}\left(\frac{ق^{۲}}{۴} - ما^{۲}\right)$$

$ما = \frac{ق_۱}{۲}$ رکھنے سے کور کے نچلے پہلو پر

$$ج = \frac{ق}{۲آ} \cdot \frac{ق^{۲} - ق_۱^{۲}}{۸}$$

پیٹے میں

$$ج = \frac{ق}{آض}\int_{ما}^{\frac{ق}{۲}} ما ی\, فرما$$

جہاں ی = ض کچھ حصّے تک اور = ض باقی حصّے میں (یعنی پیٹے میں)۔
اس طرح تکملی کو دو حصّوں میں تقسیم کرنے سے

$$\text{ج} = \frac{\text{ق}}{\text{٢ض}}\left(\text{ض}\int_{\text{ق}_1/2}^{\text{ق}/2}\text{ما فرما} + \text{ض}_1\int_{\text{ما}}^{\text{ق}_1/2}\text{ما فرما}\right)$$

$$= \frac{\text{ق}}{2}\left(\frac{\text{ض}}{\text{ض}_1}\times\frac{\text{ق}^2-\text{ق}_1^2}{8} + \frac{\text{ق}_1^2}{8} - \frac{\text{ما}^2}{2}\right)$$

$\text{ما} = \frac{\text{ق}_1}{2}$ رکھنے سے پیٹے کے ذرا اندر

$\text{ج} = \frac{\text{ق}}{2}\times\frac{\text{ق}^2-\text{ق}_1^2}{8}\times\frac{\text{ض}}{\text{ض}_1}$ یعنی کور کے ذرا اندر کی قیمت کا $\frac{\text{ض}}{\text{ض}_1}$ گنا۔

اور ما = ٠ رکھنے سے

$$\text{ج} = \frac{\text{ق}}{2}\left\{\left(\frac{\text{ض}}{\text{ض}_1}\times\frac{\text{ق}^2-\text{ق}_1^2}{8}\right) + \frac{\text{ق}_1^2}{8}\right\}$$

شکل ۱۰۰ کے منحنی (حسب قرارداد) مختلف بلندیوں پر (اوسط) حدت صفحہ ۱۵۷
کے تغیر کو ظاہر کرتے ہیں۔ دونوں حصے مکافی ہیں۔

کسی بلندی کی اوسط حدت کو آسانی سے اوپر کی مساوات (۲) سے بیان کر سکتے ہیں۔ مثلاً پیٹے میں بلندی ما پر

$\text{ج} = \frac{\text{ق}}{\text{٢ض}}\times$ (بلندی ما کے اوپر کے تراشی رقبے کا معیار تعدیلی محور کے گرد)

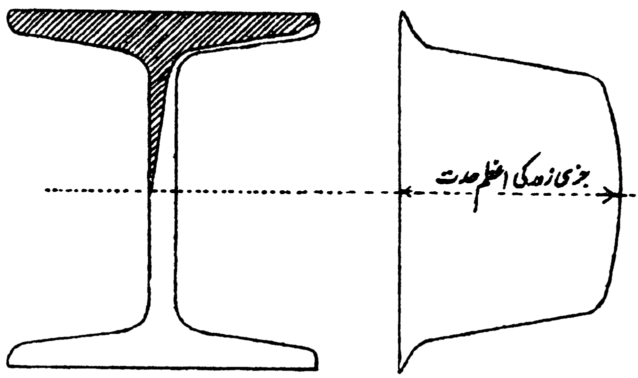
اس طرح ما = ٠ پر اعظم زور (حصوں کا معیار لینے سے)

$$\text{ج} = \frac{\text{ق}}{\text{٢ض}}\left\{\text{ض}\left(\frac{\text{ق}}{2}-\frac{\text{ق}_1}{2}\right)\left(\frac{\text{ق}}{2}+\frac{\text{ق}_1}{2}\right)\times\frac{1}{2} + \text{ض}_1\frac{\text{ق}_1}{2}\times\frac{\text{ق}_1}{4}\right\}$$

جو گزشتہ نتیجے کے مطابق ہے۔ یہ نتائج اگرچہ ریاضی کی رو سے بالکل صحیح ہیں

لیکن طبیعی طور پر صرف تقریبی ہیں۔ کور کے اندرونی پہلو پر کوئی جزی زور نہیں ہو سکتا اور اس سطح پر تقسیم یکساں نہیں ہو سکتی۔

پھیلی ہوئی I تراش — اس کے لیے بہترین طریقہ مقیاسی شکل کا ترسیمی طریقہ ہے جو اوپر بیان کیا جا چکا ہے۔ ایک مثال شکل ۱۰۱ میں



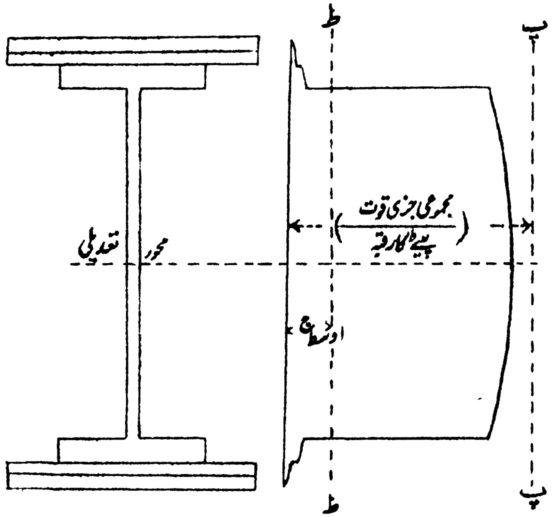
شکل ۱۰۱

دکھائی گئی ہے۔ ہر معین اس کے اوپر کے مقیاسی شکل کے رقبے اور تراش کے متناظر عرض کے حاصل تقسیم کے متناسب ہے۔

ساختہ گرڈر کی تراش — شکل ۱۰۲ میں ایک ساختہ گرڈر کی تراش کے مختلف حصوں میں جزی زور کی حدت دکھائی گئی ہے۔ زور کی حدیں اسی طرح محسوب کی گئی ہیں جس طرح شکل ۱۰۱ میں I تراش کے لیے مگر یہاں شکل کو تین حصوں میں تقسیم کرنا پڑا کیونکہ تراش میں تین مختلف عرض ہیں۔

تقرب — پیٹے کے اندر جزی زور کی حدت محسوب کرنے کے لیے معمولی تقرب یہ ہے کہ یہ مانا جائے کہ پیٹا ساری انتصابی جزی قوت کو برداشت کرتا ہے اور اس کی تقسیم یکساں ہے۔ شکل ۱۰۲ سے ظاہر ہے کہ پیٹے کے اندر حدت زیادہ نہیں بدلتی۔ اوپر کے تقرب کی رو سے جزی زور کی جو حدت ہو گی وہ نقطہ دار خط پ پ سے تعبیر ہو گی۔

یہ تراش کی پوری جزی قوت کو پیٹے کی تراش کے رقبے سے تقسیم کرنے سے حاصل
ہوئی۔ شکل ۱۰۲ کو دیکھ کر نتیجہ نکالا جا سکتا ہے کہ پیٹے کے اوسط جزی زور کے
لیے یہ آسان تقرب موجودہ تراش کی صورت میں ایک اچھا تقرب ہے - خط صفحہ ۱۵۵
ط ط جزی زور کی اوسط حدت یعنی پوری جزی قوت بٹے تراش کا پورا رقبہ کو



شکل ۱۰۲

تعبیر کرتا ہے - ظاہر ہے کہ اس سے پیٹے کے زور کا صحیح اندازہ نہیں ہو سکتا۔
پیٹے کا زور اس سے ہر جگہ زیادہ ہے۔

مثال — ایک I تراش کا شہتیر ۲۰ انچ گہرا اور ۷½ انچ چوڑا ہے - اس کی کوریں ۱ انچ موٹی اور پیٹا ۰٫۶ انچ موٹا ہے - اس پر ۴۰ ٹن کی جزی قوت ہے - معلوم کرو کہ پیٹا مجموعی جزی قوت کا کتنا حصہ برداشت کرتا ہے اور اس میں زور کی اعظم حدت کیا ہے - آ = ۱۶۴۷ انچ اکائیاں
تراش کے تعدیلی محور سے کسی بلندی ما پر پیٹے میں جزی زور کی اوسط حدت

$$ج = \frac{۴۰}{۰٫۶ \times ۱۶۴۷}\left(۷٫۵ \int_{۹}^{۱۰} \text{ما فرما} + ۰٫۶ \int_{۰}^{۹} \text{ما فرما}\right)$$

$$= \frac{۴۰}{۲ \times ٫۶ \times ۱۶۴۷}\left\{(۷٫۵ \times ۱۹) + ٫۶(۸۱ - \text{ما}^{۲})\right\}$$

$$= ۳٫۸۷ - ٫۰۱۲۱۳\ \text{ما}^{۲}$$

تعدیلی محور سے بلندی ما پر پیٹے کی ایک پٹی کا زور جس کی گہرائی فرما ہو

$$= \text{ج} \times ٫۶ \times \text{فرما}$$

اور پیٹے پر مجموعی جزی قوت

$$= ٫۶ \int_{-۹}^{۹} \text{ج فرما} = ٫۶ \int_{-۹}^{۹} (۳٫۸۷ - ٫۰۱۲۱۳\ \text{ما}^{۲})\ \text{فرما}$$

$$= ۱٫۲\,(۳۴٫۸۳ - ٫۰۰۴۰۴ \times ۷۲۹)$$

$$= ۳۸٫۲۶\ \text{ٹن}$$

یعنی کُل کا ۹۵٫۶ فی صدی ۔

صفحہ ۱۵۶ ج کی اعظم قیمت (جو ما = ۰ پر ہوگی) صریحاً ۳٫۸۷ ٹن فی مربع انچ ہے۔
اب معمولی تقرب کی جانچ کرو یعنی پوری جزی قوت کو پیٹے پر یکساں پھیلا ہوا سمجھو تو حدت

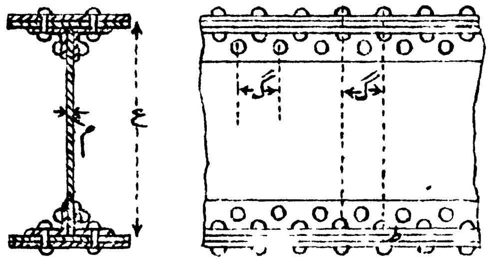
$$= \frac{۴۰}{۱۸ \times ٫۶} = ۳٫۷۰\ \text{ٹن فی مربع انچ}$$

جو پیٹے کے اندر ج کی اوسط قیمت

$$\frac{۳۸٫۲۶}{۱۸ \times ٫۶} = ۳٫۵۴\ \text{ٹن فی مربع انچ}$$

اور اعظم قیمت ۳٫۸۷ ٹن فی مربع انچ کے درمیان ہے ۔

۷۲ - گرڈر میں ریوٹوں کی گھائی —— مرکب I تراشوں میں کوریں اور پیٹا چونکہ تختیاں ہوتے ہیں اس لیے ان کو زاویئی پیٹیوں کے ذریعے مربوط کیا جاتا ہے جو پیٹے کو اور کور کو ریوٹائی جاتی ہیں۔ (دیکھو شکل ۱۰۳)۔



شکل ۱۰۳

اس طرح ریوٹوں کو پیٹے اور کور کے درمیان کے طولی جز کو منتقل کرنا ہوگا۔ فرض کرو کہ ریوٹوں کی گھائی گ ہے اور فرض کرو کہ ایک ریوٹ کی شکستگی کی کامی مزاحمت مز ہے۔ پیٹے کے اندر جزی زور کی حدت کے تغیر کو نظرانداز کرنے سے اور دفعہ گزشتہ کا تقریبی طریقہ اختیار کرنے سے اُفقی اور انتصابی جزی زور کی حدت

$$ج = \frac{ق}{م \times ع}$$

جہاں م = پیٹے کی موٹائی اور ع = پیٹے کی گہرائی اور ق = تراشش پر مجموعی جزی قوت۔ افقی فاصلہ گ کے اندر مجموعی افقی جزی قوت ج × گ × م کی مزاحمت کرتی ہے اس لیے

$$ج\,گ\,م = مز$$

$$گ = \frac{مز}{ج\,م} = \frac{مز\,ع}{ق}$$

اس کو اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ ایک نقطہ ط (شکل ۱۰۳ ب) کے گرد پیٹے کے طول گ پر کی قوتوں کا معیار لیں اور اس کو ملحوظ رکھیں کہ پیٹے پر صرف ایک اہم قوت ہے اور وہ جزی قوت ق ہے۔

گھائی گ کے لیے اوپر جو جملہ حاصل ہوا ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مستقل گہرائی ع کے گرڈر میں جہاں جزی قوت ق کم ہو وہاں گھائی کو بڑا رکھا جا سکتا ہے۔ مثلاً ایک منقسم بوجھ کو برداشت کرنے والے گرڈر کے وسط کے قریب۔ لیکن سہولت کے لیے متغیر گھائی کے بجائے سارے طول میں ایسی گھائی اختیار کی جاتی ہے جو اعظم جزی قوت کی تراش کے لیے موزوں ہو۔ منوٹ ۱۵۱ ایک ریوٹ کی کامی مزاحمت مز اس کی اُس مزاحمت کے ذریعے معلوم ہو سکتی ہے جو جزی شکستگی کے خلاف یا ایک قطر میں کھلے جانے کے خلاف ظہور میں آئے۔ اگر جزی شکستگی کی مزاحمت سے کام لیا جائے تو زاویوں کو پیٹے سے جوڑنے والے ریوٹوں کی صورت میں چونکہ ہر ایک ریوٹ میں دو مستدیر تراشیں جزی مزاحمت کریں گی اس لیے

$$مز = ۲ \times \frac{\pi}{۴} \times ق^۲ \times ز_ج$$

جہاں ق ریوٹ کا قطر ہے اور $ز_ج$ جزی زور کی بے خطر حدت ہے۔
کچلاؤ کی مزاحمت

$$= ق \times م \times ز_ک$$

جہاں $ز_ک$ = ریوٹ کے رقبے کے ظل پر کچلاؤ کے زور کی بے خطر حدت۔ $ز_ک$ کو عموماً $ز_ج$ کا تقریباً دوگنا لیا جاتا ہے۔ ان دونوں مزاحمتوں میں جو کم تر ہو اس کو کامی مزاحمت سمجھنا چاہیے۔ پیٹا بہت پتلا ہو تو یہ کچلاؤ کی مزاحمت ہوگی۔

اگر جزی مزاحمت کی رُو سے حساب کیا جا رہا ہو تو زاویوں کو کونوں سے جوڑنے کے لیے پیٹے سے دُگنے ریوٹ درکار ہوں گے کیونکہ ہر ایک ریوٹ جزی مزاحمت کے لیے صرف ایک مستدیر رقبہ پیش کرتا ہے۔ اس کے لیے

کور میں پیٹے کے دونوں طرف اُسی گھائی گ کی ضرورت ہوگی جس کی پیٹے کے لیے ضرورت تھی کیونکہ اس طرح کور میں پیٹے سے دُگنے ریوٹ ہوجائینگے۔ لیکن اگر کھلاؤ کی مزاحمت کی رُو سے حساب کیا جارہا ہو تو کور کی صورت میں گھائی ۲گ اختیار کی جاسکتی ہے۔

پیٹے کے انتصابی جوڑوں میں چونکہ تختیاں دوہری ڈھانک تختیوں کے ذریعے جوڑی جاتی ہیں اس لیے ریوٹ دوہرے جزمیں ہونگے۔ اور گھائی

$$گ = \frac{مز ع}{ق}$$

اختیار کی جاسکتی ہے جہاں ق اُس انتصابی تراش کی جزی قوت ہے جہاں جوڑ واقع ہے اور مز ریوٹ کی اُن دونوں مزاحمتوں میں سے کم تر مزاحمت کی قیمت ہے جن کا اُوپر ذکر کیا گیا ہے۔

مثال — ایک گرڈر کا پیٹا $\frac{3}{8}$ موٹی فولادی تختی کا ہے اور ۵۰ انچ اونچا ہے۔ پیٹے اور کوروں کو جوڑنے کے لیے ۱ انچ کے ریوٹوں کے لیے ایک موزوں گھائی دریافت کرو۔ زاویہ تختیاں ۶ انچ × ۶ انچ × $\frac{1}{2}$ انچ ہے۔ ریوٹوں کے اندر اوسط جزی زور ۴ ٹن فی مربع انچ ہو۔ تراش پر مجموعی جزی قوت ۱۵۰ ٹن ہے۔

دوہرے جزمیں ہونے کی وجہ سے پیٹے کے ۱ انچ ریوٹ کی مجموعی مزاحمت

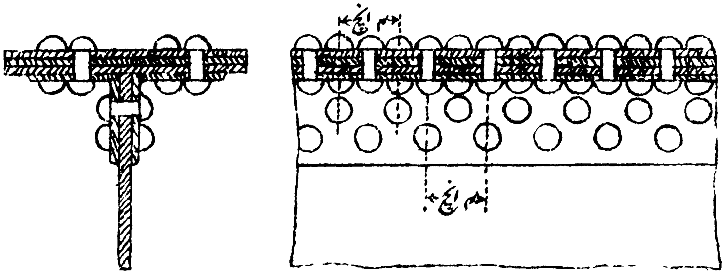
$$= ۲ × ۰٫۷۸۵۴ × ۴ = ۶٫۲۸ \text{ ٹن}$$

اوپر کے ضابطے کو استعمال کرنے سے

$$گ = \frac{۵۰ × ۶٫۲۸}{۱۵۰} = ۲٫۰۹ \text{ انچ (یا کہو ۲ انچ)}$$

ایک ہی قطار میں ۱ انچ کے ریوٹوں کے لیے یہ گھائی بہت چھوٹی ہے۔ لیکن اگر دو قطاریں لگائی جائیں جیسا کہ شکل ۲۰۱۰ میں دکھایا گیا ہے صفحہ ۵۸

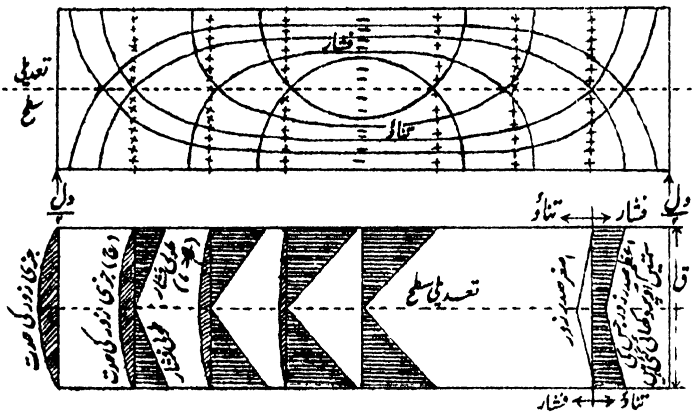
اور ہر ایک قطار میں ریوٹوں کا درمیانی فاصلہ ۴ انچ رکھا جائے تو مطلوبہ مزاحمت حاصل ہوجاتی ہے۔



شکل ۱۰۳

۷۳ - شہتیروں میں صدر زور ـــــ خماؤ سے پیدا ہونے والا راست زور جو دفعات ۶۱ تا ۶۵ میں معلوم کیا گیا ہے اور اُفقی اور انتصابی جزی زور جو دفعہ ۷۱ میں معلوم کیے گئے ہیں در اصل جیسا کہ دفعات ۵۶، ۶۴ اور ۶۵ میں بتایا گیا ہے صرف زور کے اجزائے ترکیبی ہیں جو سہل سمتوں میں معلوم کیے گئے ہیں - اُن حدود اور قیود کے اندر جن کے تحت خماؤ کا سادہ نظریہ تقریباً صحیح ہے (دفعہ ۶۴) دفعات ۱۷ اور ۱۸ کو استعمال کر کے صدر زوروں کی سمت اور مقدار معلوم کی جا سکتی ہے - کسی نقطے پر ان دو صدر زوروں میں کے بڑے زور کی وہی علامت ہوگی جو طولی راست جزوِ ترکیبی کی ہوگی اور یہ صدر زور اُس جزو ترکیبی کے ساتھ حاصل شدہ دو زاویوں میں سے چھوٹا (حادہ) زاویہ بنائیگا۔ شکل ۱۰۴ میں ایک مستطیلی عمودی تراش کے شہتیر میں، جس پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے، مختلف نقطوں پر صدر زوروں کی سمت دکھائی گئی ہے اور نیز چند انتصابی تراشوں میں اُفقی راست اور انتصابی جزی

اجزائے ترکیبی کی حدتیں اور ایک تراش پر دونوں مخالف صدر زوروں کی صفحہ ۱۵۹
حدتیں دکھائی گئی ہیں - کسی دی ہوئی تراش پر اُفقی راست زور کی تقسیم



شکل ۱۰۵ - صدر زور کے منحنی اور صدر اور اجزائے ترکیبی زوروں کی مقداریں

شکل ۷۵ کے مطابق ہوگی اور ایک دی ہوئی بلندی پر اس کی حدت شہتیر کے طول میں اس طرح بدلیگی جس طرح خماؤ کا معیار بدلتا ہے جس کا نقشہ شکل ۶۵ میں دیا گیا ہے - انتصابی تراشوں پر مماسی یا جزی زور کی تقسیم شکل ۹۸ کے مطابق ہوگی اور ایک دی ہوئی بلندی پر اس کی حدت شہتیر کے طول میں جزی قوت کی طرح بدلیگی جس کا نقشہ شکل ۶۵ میں دیا گیا ہے - تمثیل میں وضاحت کی غرض سے مستطیلی تراش میں فصل ل گہرائی کا صرف ۴ گنا لیا گیا ہے تاکہ جزی قوت مقابلۃً قابل لحاظ ہو - انتصابی (اور اُفقی) جزی زور کی اعظم حدت جو سرے کی تراش کے وسط میں واقع ہوتی ہے شکل ۶۵ اور دفعہ ۱۷ کی رو سے =

$$\text{ج} = \frac{۳}{۲}\,\frac{\frac{۱}{۲}\text{ول}}{\text{ض ق}} = \frac{۳}{۴}\,\frac{\text{ول}}{\text{ض ق}}$$

جہاں و فصل ل پر بوجھ فی طولی انچ ہے۔

اُفقی راست زور کی اعظم حدت جو وسطی تراش کی چوٹی اور تہ پر واقع ہوتی ہے شکل ۱۰۵ اور دفعہ ۶۳ مساوات (۷) کی رو سے =

$$ز = \frac{1}{8} \text{ول}^2 \div \frac{1}{6} \text{ض ق}^2 = \frac{3}{4} \frac{\text{ول}^2}{\text{ض ق}^2}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{اعظم ج}}{\text{اعظم ز}} = \frac{\text{ق}}{\text{ل}} = \frac{1}{4}$$

ایک تراش کے جو دائیں سہارے سے $\frac{1}{8}$ل کے فاصلے پر ہے ہر نقطے کے لیے صدر زوروں کی مقداریں ضابطہ (۳) دفعہ ۱۸ سے محسوب کی گئی ہیں اور شکل ۱۰۵ میں دکھائی گئی ہیں۔ دونوں صدر زور مخالف علامتوں کے ہیں اور ان میں سے بڑے کی علامت وہی ہے جو راست اُفقی زور کی ہے یعنی تعدیلی محور سے اوپر فشاری ہے اور نیچے تنشی ہے۔ نقشے میں اس تراش کے ہر نقطے کے لیے صدر زوروں کی سمت نہیں دکھائی گئی۔

گہرائی اور فصل کی ایسی بڑی نسبت کے لیے جیسی کہ $\frac{1}{4}$ ہے خماؤ کے سادہ نظریے سے صحیح نتائج کی توقع نہیں کی جا سکتی لیکن بڑے فصلوں کی صورت میں مستطیلی تراش کے لیے جزی زور صریحاً زیادہ ناقابل لحاظ ہوتے جائینگے۔ شکل ۱۰۵ میں جو مقداریں دکھائی گئی ہیں اُن سے در اصل مقصود یہ نہیں کہ حدت کی صحیح صحیح مقدار معلوم ہو بلکہ یہ کہ حدت کے تغیر کا ایک تصور ہو جائے۔

صدر زور کے منحنی — شکل ۱۰۵ میں صدر زور کے خطوط شہتیر کی ایک طولی تراش میں دکھائے گئے ہیں۔ کسی نقطے پر ان کے مماس اور عماد اس نقطے کے دونوں صدر زوروں کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح منحنیوں کے دو نظام ہونگے جو ایک دوسرے کو علی القوائم قطع

کرینگے ۔ یہ دونوں مرکزی خط کو ۴۵° پر قطع کرتے ہیں (دیکھو دفعات ۸ اور ۱۵)۔ دونوں میں سے کسی منحنی پر بھی زور کی حدت زیادہ سے زیادہ اُس وقت ہوگی جب وہ شہتیر کے طول کے متوازی ہو۔ اسی منحنی پر چلتے جائیں تو یہ حدت گھٹتے گھٹتے اُس مقام پر صفر ہو جائیگی جہاں یہ منحنی شہتیر کے بالائی یا نچلے چہرے کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔ عام طور پر طول اور گہرائی کی نسبت بہت سے بہت زیادہ ہوتی ہے اس لیے عام طور پر مستطیلی شہتیروں میں صدر زور کے منحنی شکل ۱۰۵ کے منحنیوں سے بہت زیادہ چپٹے ہونگے ۔ فصل کے وسط کے قریب انتصابی جزی زور اسی تناسب میں کم ہوگا ۔

صفحہ ۱۶۱ اعظم جزی زور ـــــ شہتیر کے کسی نقطے پر جزی زور کی حدت اُن دو علی القوائم مستویوں پر اعظم ہوگی جو صدر مستویوں سے ۴۵° کے زاویے بنائیں اور ان کی مقدار دفعہ ۱۸ مساوات (۴) سے حاصل ہوگی یعنی صدر زوروں کی حدتوں کے جبری فرق کے نصف کے مساوی ہوگی ۔ جو شکل ۱۰۵ کی صورت میں صدر زوروں کی حدتوں کو ایک ہی علامت کے ساتھ لے کر اُن کے حسابی مجموعے کا نصف لینے سے حاصل ہوگی ۔

I تراشوں کے صدر زور ـــــ I تراشوں میں، خواہ وہ سالم بیلی ہوئی ہوں یا تختیوں اور زاویوں سے بنی ہوئی ہوں، یہ دکھایا گیا ہے (دفعہ ۶۷) کہ خاؤ کے طولی راست زوروں کی مزاحمت میں پیٹے کا رقبہ زیادہ اہمیت نہیں رکھتا یا بالفاظِ دیگر تراش کے مقیاس میں یہ زیادہ حصہ نہیں لیتا ۔ اور دفعہ ۷۱ (شکل ۱۰۲) میں دکھایا گیا ہے کہ کوروں پر بہت کم جزی زور پڑتا ہے ۔ البتہ یہ معلوم رہے کہ پیٹے میں کور کے قریب طولی راست زور کی حدت تراش کی اعظم حدت سے بہت کم نہیں جو کہ بیرونی پرتوں میں واقع ہوتی ہے اور اس مقام پر انتصابی جزی زور کی حدت بھی اُس اعظم حدت سے بہت کم نہیں جو تعدیلی مستوی پر واقع ہوتی ہے ۔ اس طرح ممکن ہے کہ اس مقام کا صدر زور ان دونوں اعظموں سے زیادہ ہو (دیکھو نیچے کی مثال) ۔ I تراش کے

گرڈروں کے پیٹوں میں جزی زور کی بہت پست حدتیں جائز رکھی جاتی ہیں۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ جزی زوروں سے تنشی اور فشاری صدر زور پیدا ہوتے ہیں جن کی وجہ سے پتلا پیٹیا کم وبیش ایک لمبے داب روک کی حالت میں ہوگا۔ دفعہ ۲۵ میں دی ہوئی کیفیت کا بھی مطالعہ کیا جائے جو ایسی شے کی مضبوطی کے متعلق دی گئی ہے جس پر مخالف قسم کے صدر زور عمل کریں اور I تراشوں کے پیٹوں میں ہمیشہ یہی ہوتا ہے۔ ان میں دفعہ ۱۸ کی ترقیم کے بموجب

$$ف = \frac{ف_۱}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{ف_۱}{۲}\right)^۲ + ق^۲}$$

تختی دار گرڈروں کے پیٹوں کی تجویز کی مکمل بحث کے لیے طلبہ مصنف کی کتاب "نظریۂ تعمیر" سے مدد لے سکتے ہیں۔

مثال —— ۲۰ انچ گہری اور ۷½ انچ چوڑی I تراش کے ایک شہتیر کی کوریں ۱ انچ موٹی اور پیٹیا ۰٫۶ انچ موٹا ہے۔ ایک خاص تراش پر اس پر ۴۰ ٹن کی جزی قوت اور ۸۰۰ ٹن انچ کا خماؤ کا معیار عمل کرتا ہے۔ صدر زور (ا) بیرونی کناروں (ب) تراش کے وسط (ج) بیرونی کناروں سے ۱½ کے فاصلے پر معلوم کرو۔

تعدیلی محور کے گرد معیارِ جمود

$$= \frac{۱}{۱۲}\left(۷٫۵ \times ۲۰^۳ - ۶٫۹ \times ۱۸^۳\right) = ۱۶۴۷ \ (\text{انچ})^۴$$

(و) بیرونی کناروں پر $ز = \frac{۱۰ \times ۸۰۰}{۱۶۴۷} = ۴٫۸۶$ ٹن خالص تناؤ یا فشار۔ دوسرا صدر زور صفر ہوگا۔

(ب) تراش کے وسط میں انتصابی اور اُفقی جزی زور کی حدت

$$ج = \frac{۴۰}{۰٫۶ \times ۱۶۴۷}\left(۷٫۵ \int_۹^{۱۰} ما\, فرما + ۰٫۶ \int_۰^۹ ما\, فرما\right)$$

$$= ۳٫۸۷ \ \text{ٹن فی مربع انچ}$$

جیساکہ دفعہ ۱۷ کے آخر کی مثال میں ہے۔

چونکہ یہ خالص جز ہے اس لیے صدر زور مساوی تناؤ اور فشار ہونگے،
دونوں تراش سے ۴۵° کا زاویہ بنائینگے اور دونوں کی حدت جزی حدت کے صفحہ ۱۶۱
مساوی یعنی ۳٫۸۷ ٹن فی مربع انچ ہوگی۔

(ج) تراش کے علی القوائم راست زور کی حدت

$$\text{ف}_{\text{۱}} = \frac{\text{۸٫۵} \times \text{۸۰۰}}{\text{۱۶۴۷}} = \text{۴٫۱۳ ٹن فی مربع انچ}$$

تراش پر انتصابی جزی زور کی حدت

$$\text{ج} = \frac{\text{۴۰}}{\text{۰٫۶} \times \text{۱۶۴۷}} \left(\text{۷٫۵} \int_{\text{۹}}^{\text{۱۰}} \text{ما فرما} + \text{۰٫۶} \int_{\text{۸٫۵}}^{\text{۹}} \text{ما فرما} \right)$$

$$= \frac{\text{۴۰}}{\text{۰٫۶} \times \text{۲} \times \text{۱۶۴۷}} \left\{ (\text{۷٫۵} \times \text{۱۹}) + \text{۰٫۶} (\text{۸۱} - \text{۷۲٫۲۵}) \right\}$$

$$= \text{۲٫۹۹ ٹن فی مربع انچ}$$

اس لیے صدر زور دفعہ ۱۸ کی رو سے حسب ذیل ہونگے ــــ

$$\text{ف} = \frac{\text{ف}_{\text{۱}}}{\text{۲}} \pm \sqrt{\left\{ \left(\frac{\text{ف}_{\text{۱}}}{\text{۲}} \right)^{\text{۲}} + \text{ج}^{\text{۲}} \right\}}$$

$$= \text{۲٫۰۶۵} \pm \text{۳٫۶۳} = \text{۵٫۶۹۵ اور } -\text{۱٫۵۶۵ ٹن فی مربع انچ}$$

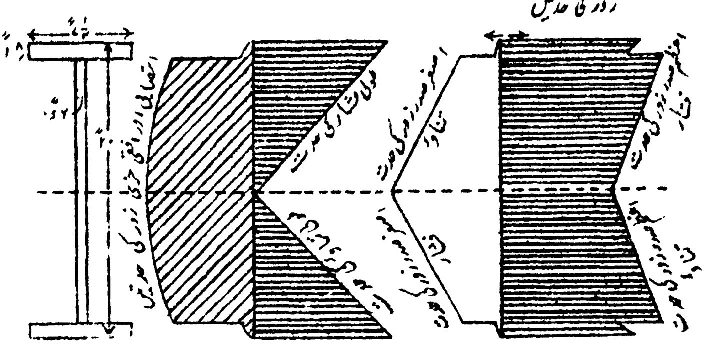
بڑا صدر زور کور کے متناظر راست زور سے زاویہ

$$\text{مس}^{-\text{۱}} \frac{\text{۲٫۹۹}}{\text{۵٫۶۹۵}} = \text{۲۷° ۴۰′} \quad \text{(دیکھو دفعہ ۱۸ مساوات (۲))}$$

یا تراش سے ۶۲° ۲۰′ بنائیگا۔

اس سے یہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ ایک بڑا خماؤ کا معیار اور جزی قوت
برداشت کرنے والی I تراش کی کور کے ذرا اندر صدر زور کی حدت

(۵۶۹۵ ٹن فی مربع انچ) تراش کی بیرونی انتہائی پرتوں سے بھی زیادہ ہوسکتی ہے۔



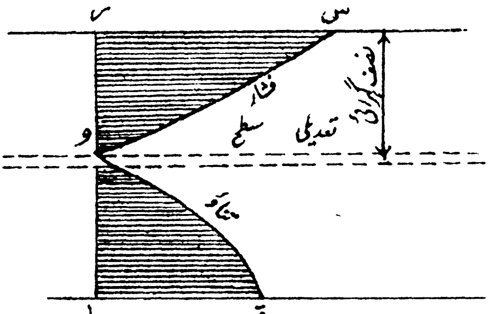
شکل ۱۰۶ - I تراش شہتیر میں اجزائے ترکیبی اور صدر زور کی حدتوں کی مقداریں

پٹے کے اندر صدر زوروں کی حدتیں اوپر کے طریقے کے مطابق محسوب کرکے شکل ۱۰۶ میں دکھائی گئی ہیں جس سے معلوم ہوتا ہے کہ بڑا صدر زور اعظم قیمت سے کہیں بھی بہت کم نہیں۔ صدر زوروں کے متعلق اس طرح کے نتائج کو تسلیم کرتے وقت خماؤ کے سادہ نظریے کے اطلاق کی حدود پیش نظر رہنی چاہییں۔ ان نتائج کو محض تقربات سمجھا جائے جن سے زوروں کی نوعیت کا ایک اندازہ ہوجاتا ہے۔ صفحہ ۱۶۲

۴۷۔ لچک کی حد سے متجاوز خماؤ ـــــ انشقاق کا مقیاس۔

اگر شہتیر کے انتہائی ریشوں کے لچک کی حد کو پہنچ جانے کے بعد بھی خماؤ جاری رہے تو طولی زور کی حدت اب طولی فساد کے متناسب نہیں رہیگی اور زور کی تقسیم شکل ۷۵ کے مطابق نہیں ہوگی۔ لچک کی حد کے باہر متوسط درجے کا خماؤ ہو تو یہ مفروضہ کہ مستوی تراشیں مستوی رہتی ہیں اکثر تقریباً صحیح رہتا ہے۔ اس صورت میں فساد تعدیلی محور سے فاصلے کے

متناسب ہونگے (دفعہ ۱۶۱) اور طولی زور کی حدت تعدیلی محور سے انتہائی ریشوں تک تقریباً اسی طرح بدلیگی جس طرح راست زور کے زور فساد نقشے میں بدلتی ہے تقسیم کی مختلف قسمیں واقع ہونگی بمطابقت اس کے کہ لچک کی حد تناؤ میں پہلے واقع ہوتی ہے یا فساد میں پہلے یا دونوں میں ایک ساتھ - ڈھلے لوہے کی لچک کی حقیقی حد تناؤ یا فشار میں بہت پست ہے لیکن کسی ایسے زور جیسے ۸ ٹن فی مربع انچ پر تنشی فساد فشار کے مقابلے میں بہت زیادہ ہوتا ہے اور زور کی متناسبیت سے بہت ہٹا ہوا ہوتا ہے - اس لیے متشاکل تراش میں زور کی

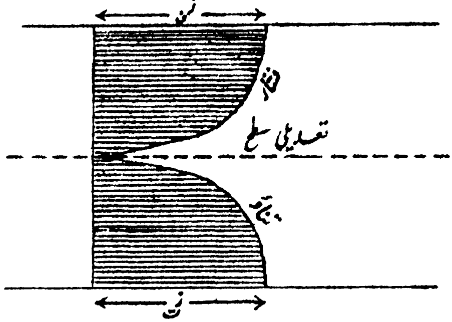


شکل ۱۰۷

تقسیم کم و بیش شکل ۱۰۷ کے مطابق ہوگی - تعدیلی سطح اب تراشی رقبے کے مرکز ہندسی میں سے نہیں گزریگی بلکہ فشاری کنارے کے نزدیک تر ہوگی جس میں مغلوبیت تناؤ کے کنارے سے کم ہونے کی وجہ سے زور کی حدت زیادہ ہوگی - اگر شہتیر کا عرض تراش کے اندر مستقل ہو یعنی تراشش مستطیلی ہو تو تعدیلی سطح نصف گہرائی کے مقام سے اس طرح سرکیگی کہ رقبے وطق اور ورس مساوی رہیں کیونکہ مجموعی تناؤ اور مجموعی فشار مساوی ہوتے ہیں اور مل کر ایک جفت بنتے ہیں -

اگر شہتیر کا مادّہ ایسا ہو کہ اس کا تناؤ اور فشار دونوں میں ایک ہی

زور فساد نقشہ ہو تو تعدیلی سطح تراشی رقبے کے مرکزِ ہندسی ہی میں سے گزرتی
رہیگی کیونکہ تناؤ اور فشار کی تقسیم تشاکل ہوگی لیکن دونوں میں زور کی حدت
دفعہ ۱۶۳ لچک کی حد کے باہر تعدیلی سطح کے فاصلے کے متناسب نہیں ہوگی (دیکھو شکل ۱۰۸)۔



شکل ۱۰۸

تعدیلی سطح سے قریب زور کی حدت زیادہ ہوگی بہ نسبت اُس صورت کے کہ زور تعدیلی سطح سے فاصلے کے متناسب ہوتا۔ حدت فاصلے کے متناسب تقسیم اور یکساں تقسیم کے درمیان ہوگی[1]

انشقاق کا مقیاس —— اگر ایک سلاخ کا خماؤ کے تحت انشقاق کی حد تک امتحان کیا جائے تو انشقاق کے وقت بیرونی پرتوں پر زور کی حدت دفعہ ۱۴۳ کے ضابطہ (۶) یعنی

$$\text{ز}_\text{ت} = \text{م}\,\frac{\text{ب}_\text{ت}}{\text{آ}} \quad \text{اور} \quad \text{ز}_\text{ن} = \text{م}\,\frac{\text{ب}_\text{ن}}{\text{آ}}$$

سے حاصل ہونے والی حدت کے مساوی نہیں ہوگی کیونکہ اس ضابطے میں لچک کی حالت فرض کی گئی ہے جو اب باقی نہیں۔ تاہم مقدار

[1] شہتیر کی عمودی تراشوں میں فساد کی تقسیم کے متعلق چند تجربات ڈاکٹر مارو (Dr. J. Morrow) کے لکھے ہوئے ایک پرچے میں ملینگے جو رائل سوسائٹی کی رو داد جلد ۲، صفحہ ۱۲ میں طبع ہوا ہے۔

$$\text{ھر}\,\frac{\text{ما}}{\text{آ}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ھر}}{\text{مق}}$$

کو، جس میں ھر انشقاق کے وقت کا خماؤ کا معیار ہے، اکثر ڈھلے لوہے کے وصف کا ایک نمایندہ سمجھا جاتا ہے۔ اس کے لیے خماؤ کا امتحان ایک وسطی بوجھ کے ذریعے آسانی سے ترتیب دیا جا سکتا ہے۔ یہ صریحاً زور کی حقیقی حدت نہیں اور اس کو انشقاق کا عرضی مقیاس کہا جاتا ہے۔ یہ اصطلاح زیادہ تر مستطیلی تراش کے امتحان تک محدود ہے۔ ڈھلے لوہے میں یہ مقیاس تنشی امتحان سے حاصل ہونے والے انتہائی تنشی استحکام سے بہت زیادہ ہوتا ہے اور اس کی دو وجہیں ہیں۔ ایک یہ کہ مقابلۃً پست زور پر بھی زور کی تقسیم شکل ۱۰۷ کے مانند ہو جاتی ہے جس کی وجہ سے پست تنشی زور کے ساتھ ڈھلے لوہے کی اعلیٰ فشاری مضبوطی بکار آمد ہو جاتی ہے۔ اور دوسرے یہ کہ انشقاق سے قبل زور کی تقسیم ایسی ہوتی ہے کہ اندرونی پرت اُس متناسب حدت سے زیادہ حدت برداشت کرتے ہیں جو مزاحمت کے معیار کے ضابطہ

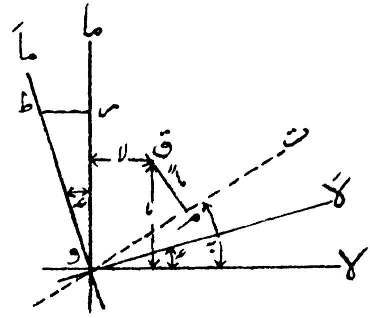
$$\text{ز}\,\frac{\text{آ}}{\text{ما}} \quad \text{یا} \quad \text{ف}\,\frac{\text{آ}}{\text{ھا}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{6}\,\text{زض ق}^{2} \quad (\text{مستطیلی شہتیر کے لیے})$$

سے حاصل ہوتی ہے اور اس طرح مزاحمت بڑھ جاتی ہے۔ یہ دوسری وجہ صفحہ ۱۶۲
پتلی I تراش پر اتنی موثر نہیں جس میں راست زور تقریباً تمام تر کوروں پر پڑتا ہے اور اس کی حدت بیرونی کناروں پر لچک کی حد سے گزر جانے کے بعد بھی کور کے اندر مقابلۃً یکساں رہتی ہے (دیکھو شکل ۱۰۸)۔ لیکن عملاً "انشقاق کا مقیاس" کی اصطلاح اور انشقاق کا عرضی امتحان ڈھلے لوہے اور چوبینے کے لیے اور مستطیلی تراش تک محدود ہیں۔

۱۷۴۔ غیر متشاکل خماؤ[1] ــــ سادہ خماؤ کی بحث میں (دفعہ ۶۱)

[1] نیز دیکھو دفعہ ۹۸ اور ۱۹۸

یہ مان لیا گیا تھا کہ شہتیر کی عمودی تراش اُس محور کے گرد متشاکل ہے جو تراش کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے اور خمیدگی کے مستوی میں ہے۔ خمیدگی کا مستوی اور بیرونی خماؤ کے جفت کا مستوی باہم متوازی ہونگے اگر تراش کا محور جو بیرونی معیار کے مستوی میں ہے ایک صدر محور ہو (دفعہ ۱۶۸)۔ اگر یہ شرط پوری نہ ہو تو فرض کرو کہ وماَ (شکل ۱۰۸ ا) بیرونی خماؤ کے معیار کا مستوی ہے (خط وماَ اس مستوی کا نقش تراش کے مستوی میں ہے جو شکل کے مستوی پر منطبق ہے) اور صدر محور وما سے زاویہ عہ بناتا ہے۔ یا فرض کرو کہ خماؤ کے جفت م کا مستوی ولاَ کے علی القوائم ہے۔ اگر جفت م کو



شکل ۱۰۸ ا

جو فرض کرو کہ وط سے تعبیر ہوتا ہے، صدر محوروں ولا اور وما کے گرد اجزائے ترکیبی ور اور رط میں تقسیم کیا جائے تو یہ اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہونگے:

م جم عہ اور − م جب عہ

تب تراش پر کسی نقطے پر خماؤ کے زور کی حدت اور فساد اس طرح معلوم ہو سکتے ہیں کہ معیار کے ان دو اجزائے ترکیبی کے اثرات کا جبری مجموعہ لیا جائے۔ اس طرح اگر کسی نقطہ ق کے محدد صدر محوروں ولا اور وما کے لحاظ سے لا، ما ہوں تو اس پر زور کی حدت مساوات (۵) دفعہ ۱۶۳ کی رُو سے

$$\text{ف} = \frac{\text{ما م جم عہ}}{\text{آ}_{\text{لا}}} - \frac{\text{لا م جب عہ}}{\text{آ}_{\text{ما}}} \quad .... (۱)$$

جہاں آلا اور آما تراش کے صدر معیارِ جمود و لا اور وما کے گرد ہیں۔
کسی نقطہ (۔ لا، ما) کے لیے

$$\text{ف} = \frac{\text{ما م جم عہ}}{\text{آلا}} + \frac{\text{لا م جب عہ}}{\text{آما}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

تعدیلی محور کے لیے (۱) میں ف = ۰ رکھنے سے

$$\text{ما} = \text{لا} \frac{\text{آلا}}{\text{آما}} \text{مس عہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

جو ایک خطِ مستقیم وت ہے جو تراش کے مرکزِ ہندسی میں سے گزرتا ہے اور و لا سے زاویہ بہ بناتا ہے۔ اس طرح اس کی مساوات ہوئی

$$\text{ما} = \text{لا مس بہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$ صفحہ ۱۵

اور

$$\text{مس بہ} = \frac{\text{آلا}}{\text{آما}} \text{مس عہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

دیکھو ربط (۵) جس کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس بہ} = \frac{\text{گ}^2_{\text{لا}}}{\text{گ}^2_{\text{ما}}} \text{مس عہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

وہ ربط ہے جو معیار کے ناقص کے مزدوج محوروں کے ڈھالوں کے درمیان ہے (دفعہ ۱۶۸)۔ اس معیار کے ناقص کے خاص نیم محاور و لا کی سمت میں وما کے گرد کا گردشی نصف قطر $\text{گ}_{\text{لا}}$ اور وما کی سمت میں و لا کے گرد کا گردشی نصف قطر $\text{گ}_{\text{ما}}$ ہیں۔ اس لیے اگر معیار کا ناقص کھینچا جائے تو تعدیلی محور وت (شکل ۱۸۵ ا) کی سمت اس طرح معلوم ہوگی کہ وما کا مزدوج محور کھینچا جائے اور یہ آسانی سے اس طرح ہو سکتا ہے کہ

و مَا کے ایک متوازی وتر کے نقطۂ تنصیف کو و سے ملایا جائے ۔

کسی دیے ہوئے مستوی میں ایک خماؤ کا معیارہ دیا ہوا ہو تو ایک دی ہوئی تراش میں پیدا ہونے والا اعظم زور معلوم کرنے کے لیے پہلے خاص محاور کی سمتیں اور جمود کے خاص معیاروں کی قیمتیں معلوم کی جائینگی جیساکہ دفعہ ۶۸ ا میں بیان کیا گیا ہے ۔ اس کے بعد (۵) سے تعدیلی محور کی سمت معلوم کرو اور اس کو دی ہوئی تراش پر کھینچو اور معائنے سے وہ نقطہ معلوم کرو جو تعدیلی محور سے دور ترین ہے اور مساوات (۱) کا اطلاق کرو ۔ زور کی حدت تعدیلی محور سے فاصلہ مَا کی رقوم میں بھی بیان ہوسکتی ہے (شکل ۱۰۸ع ۲) کیونکہ

$$\text{ق ن} = \text{مَا} = \text{ما جم بہ} - \text{لا جب بہ} \quad \ldots\ldots(۷)$$

اور (۵) سے

$$\text{ما} \frac{\text{جم عہ}}{\text{آ}^{۲}_{\text{لا}}} \div \text{لا} \frac{\text{جب عہ}}{\text{آ}^{۲}_{\text{ما}}} = \frac{\text{ما جم بہ}}{\text{لا جب بہ}} \quad \ldots\ldots(۸)$$

اس لیے

$$\left(\frac{\text{ما جم عہ}}{\text{آ}^{۲}_{\text{لا}}} - \frac{\text{لا جب عہ}}{\text{آ}^{۲}_{\text{ما}}}\right) \div \text{مَا} = \frac{\text{لا جب عہ}}{\text{آ}^{۲}_{\text{ما}}} \div \text{لا جب بہ} \quad \ldots\ldots(۹)$$

اور اس کو (۱) میں مندرج کرنے سے اور (۸) سے جب عہ کی قیمت مندرج کرنے سے

$$\text{ف} = \frac{\text{م} \times \text{مَا}}{\text{آ}^{۲}_{\text{ما}}} \times \frac{\text{جب عہ}}{\text{جب بہ}} = \frac{\text{م} \times \text{مَا}}{\sqrt{\text{آ}^{۴}_{\text{لا}}\,\text{جم}^{۲}\,\text{بہ} + \text{آ}^{۴}_{\text{ما}}\,\text{جب}^{۲}\,\text{بہ}}} \quad \ldots\ldots(۱۰)$$

ف کی تنشی یا فشاری اعظم قیمت ز، اس طرح معلوم ہوگی کہ تعدیلی محور کی تنشی یا فشاری جانب مَا کی جو اعظم قیمت ہو وہ لی جائے ۔

نتیجہ ۔ ایک دوسری شکل میں ـــــ ضابطہ (۵) دفعہ ۶۳ کی

مدد سے ف کی قیمت کو بالراست تعدیلی محور و ت کے گرد کے معیارِ جمود کی رقوم میں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کیونکہ و ۷ کے گرد جو خماؤ کا معیار مہ ہے اس کا جزوِ ترکیبی و ت کے گرد مہ جم (بہ - عہ) ہوگا اس لیے

$$ف = \frac{ما^گ \times مہ\ جم\ (بہ - عہ)}{آ_ت} \qquad \dots\dots\dots\dots (۱۱)$$

جہاں آت تعدیلی محور و ت کے گرد کا معیارِ جمود ہے جو دفعہ ۱۶۸ کے مطابق معیار کے ناقص سے ترسیماً معلوم ہو سکتا ہے یا ربط (۲) دفعہ ۱۶۸ میں عہ کی جگہ بہ لکھنے سے حاصل ہوگا - اس کو (۱۱) میں مندرج کریں تو

$$ف = \frac{ما^گ\ مہ\ جم\ (بہ - عہ)}{آ_ا\ جم^۲\ بہ + آ_ا\ جب^۲\ بہ} \qquad \dots\dots\dots\dots (۱۲)$$

اور یہ ضابطہ ربط بہ اور عہ کے درمیان کے ربط (۵) کی وساطت سے آسانی سے شکل (۱۰) میں تحویل ہو سکتا ہے - صفحہ ۱۶۶

غیر متشاکل خماؤ کی کسی صورت کو حل کرنے کے لیے کونسا طریقہ اختیار کیا جائے یہ کسی حد تک تراش کی قسم پر منحصر ہوگا - مثلاً مستطیلی تراشوں میں ایک کونا ہمیشہ اعظم زور کا نقطہ ہوگا اور ضابطہ (۲) کو راست استعمال کیا جا سکتا ہے - دوسری تراشوں میں یہ ہو سکتا ہے کہ اعظم اکائی زور کا نقطہ معلوم کرنے کے لیے تعدیلی محور کھینچنے میں زیادہ سہولت ہو -

مثال ۱ — ایک برطانوی معیاری نامساوی زاویہ $۶'' \times ۳\frac{۱}{۲}'' \times \frac{۳}{۸}''$ کے لیے اعظم جائز خماؤ کا معیار محسوب کرو جب کہ چھوٹے کنارے پر بوجھ ہو اور بڑا کنارہ انتصاباً نیچے کو ہو - زور ۶ ٹن فی مربع انچ تک محدود رہے - رقبہ جمود کے خاص معیار اور تراش کے مرکزِ ہندسی کا محل دیے ہوئے ہیں - معیاری جدولوں سے اخذ کر کے ضروری اعداد شکل ۱۰۸ ب میں دیے گئے ہیں اور حسب ذیل ہیں :-

مس لا و لاَ = مس عہ = ۰٫۳۴۴

اس لیے عہ = ۱۹°

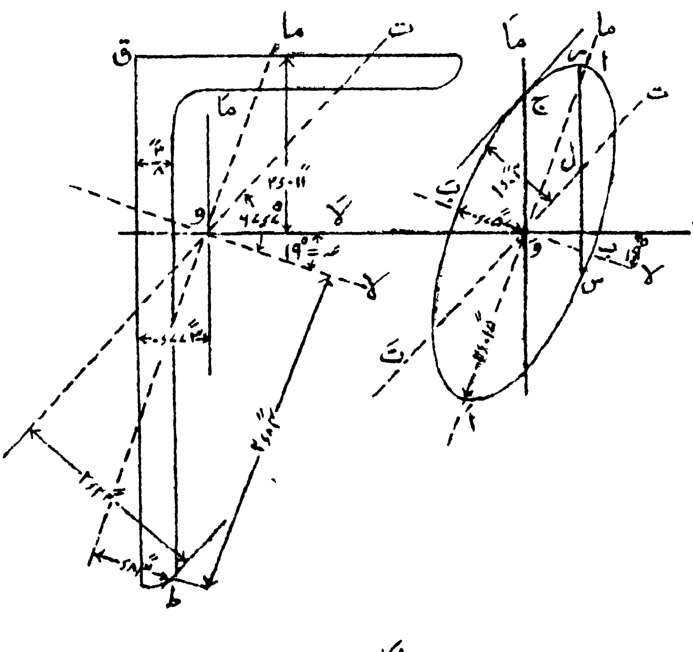
آلا = ۱۳٫۹۰۸ (انچ)۴

آما = ۱٫۹۶۳ (انچ)۴

رقبہ = ۳٫۴۲۴ مربع انچ

اس لیے گلا = ۲٫۰۱۵ انچ

گما = ۰٫۷۵۷ انچ



شکل ۵۱ ب

(۵) سے تعدیلی محور کا محل معلوم ہوسکتا ہے:۔

مس بہ = $\frac{۱۳٫۹۰۸}{۱٫۹۶۳}$ × ۰٫۳۴۴ = ۲٫۴۳۷

= مس ۶۷٫۷°

تعدیلی محور و ن شکل ۱۰۸ ب میں بائیں طرف کھینچا گیا ہے اور معائنہ سے ظاہر ہے کہ تراش میں و ت سے دور ترین نقطہ ط ہے۔ و لا سے اس کا فاصلہ = ۴٫۸۴″ = ـ ما اور و ما سے اس کا فاصلہ = ۳٫۸۳″ = +لاَ صفحہ ۱۶۷
اس لیے (۱) میں ف = ۶ ٹن فی مربع انچ رکھنے سے —

۶ = − (۴٫۸۴ م جم ۱۹°) / ۱۳٫۹۰۸ − (۳٫۸۳ م جب ۱۹°) / ۱٫۹۶۳

= − م (۰٫۲۶۱ + ۰٫۱۳۷۵)

اس لیے

م = − ۱۵٫۰۵ ٹن انچ

منفی علامت سے صرف خماؤ کے معیار کی قسم معلوم ہوتی ہے۔ یعنی یہ کہ ط تعدیلی محور و ت کی تنشی جانب ہے یا فشاری جانب۔ اگر تنشی جانب ہے تو ق پر فشاری زور ہوگا جو (۱) سے آسانی سے حاصل ہو جائیگا۔

ترسیمی حل — شکل ۱۰۸ ب میں دائیں طرف معیار کا ناقص کھینچو اس طرح کہ مس لا و لاَ = ۰٫۳۴۴ یا زاویہ لا و لاَ = ۱۹°، وَمَا = گ = ۱۵٫۰۲″ وَب = ۷٫۵۰″ (کسی پیمانے پر)۔ ومَا کے متوازی کوئی وتر م س کھینچو اور ع پر اس کی تنصیف کرو۔ وَ اور ع میں سے گزرتا ہوا خط ت وَ تَ کھینچو جو تعدیلی محور ہوگا۔ اس تعدیلی محور و ت کو تراش کے اندر کھینچو جیسا کہ شکل میں بائیں طرف کیا گیا ہے اور تعدیلی محور سے دور ترین نقطہ ط معلوم کرو جو ۲٫۲۲″ کے فاصلے پر ہے۔ ج میں سے و ت کے متوازی ناقص کا مماس کھینچو اور ت وَ تَ سے اس کا عمودی فاصلہ ناپو جو ۴٫۰″ ہے۔ تب و ت کے گرد تراش کا معیارِ جمود

= (۱٫۰۴)² × ۳٫۴۲۴ = ۳٫۷۰ (انچ⁴)

تب زاویہ ت و لا کو ناپنے سے جو ۷٫۴° ہے اور (۱۱) کو استعمال کرنے سے

۶ = ۲٫۲۲ × ھ × جم ۴۸٫۶° ÷ ۳٫۷۰

= ۰٫۳۹۶ ھ

یعنی ھ = ۱۵٫۱۵ ٹن انچ جو سابقہ نتیجے کی تقریباً تصدیق کرتا ہے۔

مثال ۲ — ایک برطانوی معیاری مساوی زاویہ ۴½″ × ۴½″ × ⅜″ ہے اور اس کے پنجوں یعنی بیرونی سروں کو ۰٫۲۷۵ انچ نصف قطر سے گول بنا دیا گیا ہے۔ اس کا تراشی رقبہ ۳٫۲۳۶ مربع انچ ہے اور اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ دونوں بیرونی کناروں سے ۱٫۲۴۴ انچ ہے۔ اس کے خاص معیارِ جمود ۹٫۷۶۸ (انچ)^۴ اور ۲٫۵۱۴ (انچ)^۴ ہیں۔ اول الذکر ایسے محور کے گرد ہے جو بیرونی کناروں کے تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ اس تراش کا ایک شہتیر سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا ہے اور زاویہ کی ایک ساق افقی ہے اور اس پر ½ ٹن کا انتصابی بوجھ سہاروں کے وسط میں ہے۔ سہاروں کا درمیانی فاصلہ ۵ فٹ ۴ انچ ہے۔ شہتیر کے اندر اعظم تنشی اور فشاری زور معلوم کرو۔

اس صورت میں تشاکل سے ع = ۴۵°

اگر کناروں کے تقاطع میں سے گزرنے والے خاص محور سے تعدیلی محور زاویہ ب بناتا ہو تو (۵) سے

مس ب = ۹٫۷۶۸ / ۲٫۵۱۴ = ۳٫۸۸۵

اس لیے جدولوں سے ب ≑ ۷۵٫۶°

تعدیلی محور کا زاویہ بوجھ والے کنارے سے

= ۷۵٫۶° − ۴۵° = ۳۰٫۶°

تنشی جانب کا دُور ترین نقطہ نقشہ کو پیمانے پر کھینچنے سے یا محسوب کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ یہ نقطہ گولائی دار پنجے پر واقع ہوگا جیسا کہ شکل ۸۰ اب میں دکھایا گیا ہے۔ اس گولائی کے مرکز کے محدد زاویے کے کناروں کے متوازی محوروں کے حوالے سے معلوم ہیں۔ اس طرح مائل تعدیلی محور سے فاصلہ آسانی سے

محسوب ہوسکتا ہے۔ گولائی دار پیچ کا فاصلہ مرکز سے نصف قطر ۷۵ء۲ گ کے بقدر زیادہ ہوگا۔ دونوں طریقوں میں سے کوئی بھی طریقہ اختیار کیا جائے م = ۲۶ء۲ گ حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ ۱۶۸

تعدیلی محور کے گرد ـــــ

آت = ۶۸ء۹۷ جم^{۲} ۶ء۷۵° + ۵۱۴ء۲ جب^{۲} ۶ء۷۵°

= ۹۶ء۲ (انچ)^{۴}

اس کی تنقیح معیار کا ناقص کھینچ کر کی جاسکتی ہے۔ سہاروں کے بیچ میں خماؤ کا معیار م

$\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times ۶۴$ = ۸ ٹن انچ

اس لیے (۱۱) سے

اعظم تننی زور = $\frac{۲۶ء۲ \times ۸ \times \text{جم}\ ۳۰ء۶°}{۲ء۹۶}$ = ۵ء۲۶ ٹن فی مربع انچ

نیز تعدیلی محور سے بیرونی کناروں کا تقاطع جہاں فشاری زور اعظم ہے ۱ء۷۰ گ کے فاصلے پر ہے (یعنی ۱ء۲۴۴ × $\frac{۱}{۲}$ ۱۴ × جب ۶ء۷۵°)۔ اس لیے اعظم فشاری زور

= $\frac{۱ء۷۰ \times ۸ \times \text{جب}\ ۶ء۷۵°}{۲ء۹۶}$

= ۳ء۹۷ ٹن فی مربع انچ

سوالات نمبر ۵

۱۔ ۱۲ انچ گہری اور ۸ انچ چوڑی مستطیلی تراش کے ایک چوبی شہتیر کا فصل ۱۴ فٹ ہے اور اس پر فصل کے وسط میں ایک ۳ ٹن کا بوجھ ہے۔ شہتیر کے اندر اعظم زور اور فصل کے وسط میں انحنا کا نصف قطر معلوم کرو۔ ے = ۸۰۰ ٹن فی مربع انچ۔

۲۔ ایک ۹ انچ گہری کڑی کا عرض کیا ہونا چاہیے تاکہ وہ ۱۲ فٹ کے فصل پر ۲۵۰ پونڈ فی طولی فٹ کا یکساں پھیلا ہوا بوجھ برداشت کرے اور زور ۱۲۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

۳۔ ایک فرش (floor) کو ۳ ہنڈرڈ ویٹ فی مربع فٹ کا بوجھ برداشت کرنا ہے۔ کڑیوں کی گہرائی ۱۲ انچ اور چوڑائی $4\frac{1}{2}$ انچ ہے اور فصل ۱۴ فٹ ہے۔ ان کے مرکزی خطوط کو کتنے فاصلوں سے رکھا جائے کہ خماؤ کا زور ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

۴۔ خماؤ کے زور کی ایک دی ہوئی اعظم حدت کے لیے ایک مربع تراش کے شہتیر کی ان دو وضعوں کے معیارِ مزاحمت کا مقابلہ کرو (ا) دوضلع انتصابی (ب) ایک وتر انتصابی۔ خماؤ دونوں صورتوں میں ایک انتصابی مستوی کے متوازی ہے۔

۵۔ ایک مستطیلی شہتیر ۹ انچ گہرا اور ۴ انچ چوڑا ہے۔ یہ کتنے طول کے فصل پر ۲۵۰ پونڈ فی طولی فٹ کا بوجھ برداشت کرسکتا ہے بغیر اس کے کہ خماؤ کے زور کی حدت ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ ہو۔

۶۔ ایک ۱۲ انچ گہرے I تراش کے شہتیر کی کوریں ۶ انچ چوڑی اور ۱ انچ موٹی ہیں اور بیٹا $\frac{3}{4}$ انچ موٹا ہے اس کی جھکاؤ کی مضبوطی کا ایک مستطیلی شہتیر سے مقابلہ کرو جس کا وزن یہی ہو اور گہرائی چوڑائی سے دُگنی ہو۔

۷۔ ایک بیلے فولاد کی کڑی ۱۰ انچ گہری ہے اس کی کوریں ۶ انچ چوڑی اور $\frac{3}{4}$ انچ موٹی ہیں۔ اس پر ۵ ٹن کا ایک بوجھ ۱۴ فٹ کے فصل پر یکساں پھیلا ہوا ہو تو اس سے پیدا ہونے والا تقریبی زور معلوم کرو۔

۸۔ ایک ڈھلے لوہے کا نل ۶ انچ بیرونی اور $4\frac{1}{2}$ انچ اندرونی قطر کا ہے۔ اگر خماؤ کی وجہ سے زور کی اعظم حدت ۱۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو تو خماؤ کا معیار معلوم کرو۔

۹۔ انچ اکائیوں میں ایک T تراش کا معیارِ جمود اُس محور کے گرد معلوم کرو جو تراش کے مرکزِ ہندسی میں سے گزرے اور آڑے حصے کے متوازی ہو۔ تراش کی مجموعی بلندی ۴ انچ، آڑے حصے کی چوڑائی ۵ انچ اور موٹائی دونوں حصوں کی $\frac{1}{2}$ انچ ہے۔

صفحہ ۱۶۹

۱۰۔ ایک ڈھلے لوہے کے گرڈر کی فشاری کور ۴ انچ چوڑی اور $1\frac{1}{2}$ انچ گہری ہے تنشی کور ۱۲ انچ چوڑی اور ۲ انچ گہری ہے۔ اور پٹیا ۱۰ انچ × $1\frac{1}{2}$ انچ ہے۔ حسب ذیل چیزیں معلوم کرو (۱) مرکزِ ہندسی کا فاصلہ تناؤ کے کنارے سے (۲) تعدیلی محور کے گرد معیارِ جمود (۳) بوجھ فی طولی فٹ جو ۱۰ فٹ فصل پر ایک سادہ سہارا ہوا شہتیر برداشت کرسکتا ہے بغیر اس کے کہ کھال کا تناؤ ۲ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہو۔ فشاری زور کی اعظم حدت اس وقت کیا ہوگی۔

سوالات نمبر ۱۱ تا ۱۶ میں کنکریٹ کا تناؤ نظر انداز کردیا جائے اور فولاد کا راست لچک کا تناؤ کا مقیاس کنکریٹ کے فشار کے مقیاس کا ۱۵ گنا لیا جائے۔ کنکریٹ کو کامی زوروں کے اندر کامل لچکدار سمجھا جائے۔

۱۱۔ ایک محکم کنکریٹ کے شہتیر میں جو ۱۰ انچ چوڑا اور ۲۲ انچ گہرا ہے $1\frac{1}{4}$ انچ کی چار گول فولادی سلاخیں نچلے کنارے سے ۲ انچ کے فاصلے پر رکھی گئی ہیں۔ اگر شہتیر سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا ہو تو یہ شہتیر ایک ۱۶ فٹ کے فصل پر کتنا بوجھ فی طولی فٹ سہاریگا اگر شہتیر میں فشاری زور ۶۰۰ پونڈ فی مربع انچ کو پہنچے۔ احکام کے اندر تنشی زور کی حدت کیا ہوگی۔

۱۲۔ ایک محکم کنکریٹ کا فرش (floor) ۹ انچ موٹا ہے اور احکام نچلے رُخ سے ۲ انچ کے فاصلے پر ہے۔ فولادی احکام کا کتنا تراشی رقبہ فی فٹ عرض درکار ہوگا اگر کنکریٹ کا زور ۶۰۰ پونڈ فی مربع انچ کو پہنچے جب کہ فولاد میں زور ۱۵۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو اور ۱۰ فٹ کے فصل پر ان زوروں کے ساتھ کتنا بوجھ فی مربع فٹ برداشت کیا جا سکتا ہے۔

۱۳۔ ایک کنکریٹ کا شہتیر ۱۸ انچ گہرا اور ۹ انچ چوڑا ہے اور اس کو ۱۵ فٹ کے فصل پر ایک ۱۰۰۰ پونڈ فی طولی فٹ کا یکساں پھیلا ہوا بوجھ برداشت کرنا ہے۔ فولادی احکام کا کتنا تراشی رقبہ درکار ہوگا اگر سلاخوں کے مرکز شہتیر کے نچلے رُخ سے ۲ انچ اوپر رکھے جائیں اور کنکریٹ میں دباؤ کی حدت ۶۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ جائز نہ رکھی جائے۔

۱۴۔ ایک آہن کنکریٹ[1] کا فرش ۸ انچ موٹا ہے اور اس پر ۱۲ فٹ کے فصل پر ایک ۲۰۰ پونڈ فی مربع فٹ کا بوجھ ہے۔ اگر کنکریٹ کے اندر دباؤ ۶۰۰ پونڈ فی مربع فٹ تک

---

[1] Ferro-Concrete

محدود رکھا جائے تو فولادی اِحکام کا کتنا تراشی رقبہ فرش کے فی فٹ عرض درکار ہوگا اگر اِحکام نچلی سطح سے ۲ انچ کے فاصلے پر رکھا جائے۔ اور اس صورت میں فولاد میں کامی زور کیا ہوگا؟

۱۵۔ ایک کنکریٹ کے فرش کا حصہ ایک سہارنے والے شہتیر کے ساتھ مل کر ایک T تراش کی شکل میں ہوتا ہے جس کا آڑا حصہ ۳۰ انچ چوڑا اور ۶ انچ گہرا ہے اور انتصابی ٹانگ ۸ انچ چوڑی ہے اور اس کو فرش کے نچلے رُخ سے ۱۲ انچ نیچے سلاخوں سے محکم کرنا ہے۔ فولاد کا کتنا تراشی رقبہ تعدیلی محور کو فرش کے نچلے رُخ کے مستوی میں لائیگا۔ اعظم فشار ۶۰۰ پونڈ فی مربع انچ کو پہنچے تو فولاد میں تناؤ کی حدت کیا ہوگی۔

۱۶۔ T تراش کے ایک محکم کنکریٹ کے شہتیر کا آڑا حصہ ۲۴ انچ چوڑا اور ۵ انچ گہرا ہے اور باقی حصہ ۱۰ انچ چوڑا اور ۱۸ انچ گہرا ہے۔ اِحکام ۲ انچ کی دو گول سلاخوں پر مشتمل ہے جن کے مرکز شہتیر کے نچلے رُخ سے ۳ انچ کے فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ کنکریٹ میں انتہائی فشاری زور ۶۰۰ پونڈ فی مربع انچ کو پہنچے تو فولاد میں تناؤ کی حدت اور تراش کا معیارِ مزاحمت معلوم کرو۔

۱۷۔ ایک (محکم) مرکب (flitched) چوبی شہتیر دو چوبی کڑیوں پر جن میں سے ہر ایک ۴ انچ چوڑی اور ۱۲ انچ گہری ہے اور ایک $\frac{1}{2}$ انچ فولادی ۹ انچ گہری تختی پر مشتمل ہے جو ان کے درمیان متشاکلاً رکھی گئی ہے اور اِن کو مضبوطی کے ساتھ جکڑ دی گئی ہے۔ ایک تراش کا مجموعی معیارِ مزاحمت کیا ہوگا جب کہ چوبینے میں خماؤ کا زور ۱۲۰۰ پونڈ فی مربع انچ کو پہنچے اور فولاد میں زور کی اعظم حدت کیا ہوگی (E کی قیمت فولاد کے لیے چوبینے سے ۲۰ گنی کی جائے)۔

۱۸۔ ایک کھوکھلی مدوّر تراش کے شہتیر کی عمودی تراش میں جس کا بیرونی قطر اندرونی قطر کا دوگنا ہے انتصابی جزی زور کی اعظم اور اوسط حدت کی نسبت معلوم کرو۔ نمونہ ۱۷

۱۹۔ ایک I تراش ۱۰ انچ گہری اور ۸ انچ چوڑی ہے۔ کوریں ۰٫۷ انچ موٹی اور پیٹیا ۰٫۶ انچ موٹا ہے۔ تراش پر مجموعی انتصابی جزی زور ۳۰ ٹن ہو تو تراش میں انتصابی جزی زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔ انتصابی جزی زور کی اعظم اور اوسط حدت کی نسبت کیا ہوگی۔

۲۰۔ ایک تختی دار گرڈر کی تراش میں کوریں ۱۶ انچ چوڑی اور ۲ انچ موٹی ہیں۔ پیٹیا جو ۴۰ انچ گہرا اور $\frac{3}{4}$ انچ موٹا ہے کوروں کو $4 \times 4 \times \frac{5}{8}$ انچ کے زاویوں سے

جوڑا گیا ہے اور تراش پر ۱۰۰ ٹن کی ایک انتصابی جزی قوت ہے۔ تراش کے تمام حصوں میں انتصابی جزی زور کی حدت تقریباً معلوم کرو اور اس کے تغیر کو ایک منحنی کھینچ کر دکھاؤ۔ (ریوٹوں کے سوراخوں اور زاویہ تختی کے کونوں کی گولائی کو نظرانداز کردو)۔

۲۱۔ اگر اوپر کے سوال نمبر ۲۰ میں تراش پر ۵۰۰۰ ٹن انچ کا ایک خماؤ کا معیار بھی عمل کرتا ہو تو پیٹے میں تناؤ کور کے بیرونی کنارے سے ۷ انچ کے فاصلے پر خاص زور معلوم کرو۔

۲۲۔ $6'' \times 4'' \times \frac{3}{8}''$ کی زاویئی تراش کے ایک شہتیر کے چھوٹے کنارے کے علی القوائم ایک طولی مستوی میں خماؤ کی مزاحمت کا معیار معلوم کرو۔ زاویے کے پنج نصف قطر ۳ءٗ" کے ساتھ اور جڑ نصف قطر ۴۲۵ءٗ کے ساتھ گول کردی گئی ہے۔ زور کی حد ۶ ٹن فی مربع انچ ہے۔ خاص معیارِ جمود ۲۰۹ء۱۵ (انچ)^4 اور ۱۳ء۷۲ (انچ)^4 ہیں اور مرکزِ ہندسی کا فاصلہ چھوٹے اور بڑے بیرونی کناروں سے علی الترتیب ۹۱۲ء۱" اور ۹۲۳ءٗ" ہے۔ وہ خاص محور جس کے گرد معیارِ جمود اعظم ہے چھوٹے کنارے سے ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس ۴۳۹ء۰ ہے۔

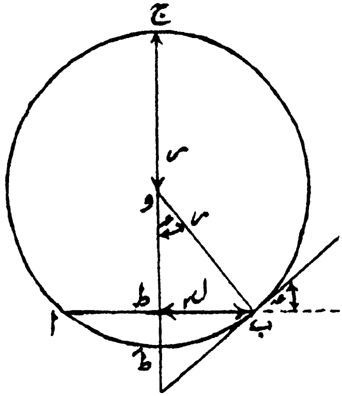
چھٹا باب

شہتیروں کا انصراف

۷۵ - صلابت اور مضبوطی ـــــ بالعموم یہ ضروری ہے صفحہ ۱۷۱
کہ شہتیر مضبوط کے ساتھ صلب بھی ہو، یعنی لداؤ کی وجہ سے اپنے اصلی محل سے بہت زیادہ منصرف نہ ہو۔ انصراف کا بیشتر حصّہ عموماً خماؤ کی وجہ سے ہوتا ہے جس سے پیدا ہونے والے انحنا کا ربط زور کی حدت کے ساتھ دفعہ ۶۱ میں دکھایا گیا ہے۔ اب ہم شہتیروں کے مختلف حصوں کا انصراف مختلف لداؤں اور مختلف سہاروں کی صورت میں معلوم کرینگے۔ علامت ما جو ایک متغیر ہے تعدیلی مستوی کے مختلف نقاط کے اصلی محلوں سے انصراف کے لیے استعمال کی جائیگی۔ اس علامت ما کو اُس متغیر ما سے خلط ملط نہیں کرنا چاہیے جو ہم نے پہلے ایک تراش کے اندر تعدیلی محور سے کسی نقطے کے فاصلے کے لیے استعمال کیا ہے اگرچہ دونوں ما ایک ہی سمت میں ناپے جاتے ہیں جو انتصابی ہے۔ یہ فرض کیا جائیگا کہ تمام انصراف لچک کی حد کے اندر ہیں اور شہتیر کے طول کے مقابلے میں بہت خفیف ہیں۔

۷۶ - سادہ خماؤ میں انصراف - یکساں انحنا ـــــ اگر ایک

مستقل تراش کے شہتیر پر اس کے سارے طول میں ایک یکساں خماؤ کا معیار م عمل کرے تو وہ (دیکھو دفعات ۶۱ اور ۶۳) نصف قطر ر کی ایک مستدیر قوس کی شکل اختیار کرے گی جس کے لیے



شکل ۱۰۹

$$\frac{ے}{ر} = \frac{م}{آ} \quad یا \quad \frac{1}{ر} = \frac{م}{آ ے}$$

جہاں ے راست لچک کا مقیاس ہے، اور آ تراشی رقبے کا معیار جمود تعدیلی محور کے گرد ہے۔ اگر طول ل کا ایک شہتیر ا ب (شکل ۱۰۹) جو ابتدا میں سیدھا تھا خم ہو کر ایک دائرے کی قوس ا طَ ب کی شکل اختیار کرے تو وسط کا انصراف ط طَ یا ما شکل ۱۰۹ سے علم ہندسہ کی رو سے آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کیونکہ

صفحہ ۱۷۲

$$ط طَ \times ط ج = ط ب^2 = \left(\frac{ل}{۲}\right)^2$$

$$ط طَ (۲ ر - ط طَ) = \frac{ل^2}{۴}$$

$$۲\, ط طَ \times ر - (ط طَ)^2 = \frac{ل^2}{۴}$$

اور چھوٹے انصرافوں کے لیے $(ط طَ)^2$ کو جو ایک بہت چھوٹی مقدار ہوگی نظر انداز کرنے سے

$$۲\, ط طَ \times ر = \frac{ل^2}{۴}$$

$$ما \quad یا \quad ط طَ = \frac{ل^2}{۸ ر} = \frac{۱}{۸} \frac{م ل^2}{آ ے} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کیونکہ $ر = \frac{آ ے}{م}$ (دفعہ ۶۳)

اس صورت میں پورا طول ایک اعظم خماؤ کے معیار م کے زیر عمل ہے جیسا کہ شکل ۶۷ میں سہاروں کے درمیان ہے۔ دوسری صورتوں میں جن میں شہتیر کے بعض حصوں پر خماؤ کا معیار اعظم سے کم ہو اعظم انصراف کے اس اوپر کے جملے میں عددی سر $\frac{1}{8}$ سے کم ہوگا۔

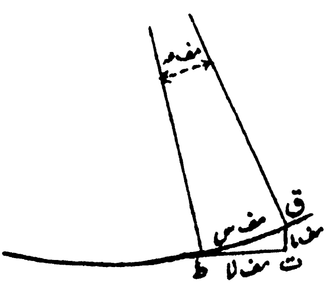
اگر شہتیر کے سروں کا ڈھال کا زاویہ ابتدائی وضع ا ب کے ساتھ عہ ہو تو چھوٹے انصرافوں کے لیے (نیم قطریوں میں) عہ = جب عہ لینے سے

$$عہ = \frac{ط ب}{و ب} = \frac{ل}{۲ ر} = \frac{م ل}{۲ آ ے} \quad \text{.........(۲)}$$

۷۷۔ انحنا، ڈھال، انصراف، وغیرہ کے باہمی ربط۔

لا کو (اُفقی) فصل پر کسی موزوں مبداء سے فاصلہ، ما (انتصابی) کو لا کے علی القوائم انصراف، عہ کو شہتیر کا ڈھال نیم قطریوں میں کسی ثابت سمت کے ساتھ جو بالعموم اُفقی لی جاتی ہے اور س کو خمیدہ تعدیلی سطح کے یک رُخی نقشے کی قوس کا طول ماننے سے

(شکل ۱۱۰)۔



شکل ۱۱۰

$\frac{فر ما}{فر لا} =$ مس عہ = عہ (بہت تقریباً اگر عہ ہمیشہ بہت چھوٹا ہو)

کسی خط کے انحنا کی عموماً یہ تعریف کی جاتی ہے کہ عہ کی تبدیلی فی اکائی قوس یعنی۔

$$\frac{فر عہ}{فر س}$$

ہے اور چونکہ (شکل ۱۱۰) مف عہ بہت چھوٹا ہے اس لیے مف لا کو مف س

کے مساوی یعنی $\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = 1$ لیا جاسکتا ہے۔

صفحہ ۱۷۳

اس لیے انحنا

$$\frac{1}{\text{ہر}} = \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} \quad \text{......(۱)}$$ [۱]

اور
$$\frac{\text{ھ}}{\text{آے}} = \frac{1}{\text{ہر}} = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} \quad \text{.........................(۲)}$$

یہ ربط شہتیر کے کسی نقطے لا کے لیے صحیح ہے کیونکہ یہ ربط جو یکساں انحنا $\frac{1}{\text{ہر}}$ کے لیے ثابت کیا گیا ہے انحنا $\frac{1}{\text{ہر}}$ کے متغیر ہونے کی صورت میں ہر چھوٹے طول فرس کے لیے صحیح ہوگا۔

اس لیے ڈھال ـــــ

$$\text{عہ یا } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \int \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{ھ}}{\text{آے}}\,\text{فرلا} \quad \text{.........(۳)}$$

تکمل مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔

---

[۱] اس تقرب کو ایک اور طریقے پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ انحنا ـــ

$$\frac{1}{\text{ہر}} = \frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

اور اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ بہت چھوٹا ہو تو ایک سے بڑی قوتیں نظر انداز کی جاسکتی ہیں اور $\frac{1}{\text{ہر}}$ اس طرح $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ ہو جاتا ہے۔

اور انصراف ـ

$$\text{ما} = \int \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} = \int \text{عہ فرلا، یا} \iint \frac{\text{مہ}}{\text{آ ے}}\,\text{فرلا فرلا} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مناسب حدود کے ساتھ ـ

ان ربطوں کو دفعہ ۵۹ کے ربطوں یعنی

$$\frac{\text{فرمہ}}{\text{فرلا}} = \text{ق} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرق}}{\text{فرلا}} = \text{و} = \frac{\text{فر}^{2}\text{مہ}}{\text{فرلا}^{2}}$$

کے ساتھ ملانے سے جہاں ق جزی قوت ہے اور و بوجھ فی اکائی طول مبدأ سے فاصلہ لا پر ہے :ـ

$$\text{ق} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{آ ے}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}\right) = \text{آ ے}\,\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

جہاں آ اور ے مستقل ہیں ـ اور

$$\text{و} = \text{آ ے}\,\frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فرلا}^{4}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فرلا}^{4}} = \frac{\text{و}}{\text{آ ے}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اگر و مستقل ہو یا لا کا ایک معلومہ تکمل پذیر تفاعل ہو تو ق ، مہ ، عہ اور ما کے لیے عام جملے مساوات

$$\text{آ ے}\,\frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فرلا}^{4}} = \text{و}$$

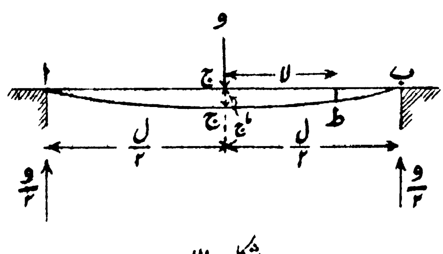
کو ایک ، دو، تین اور چار بار تکمل کرنے سے حاصل ہونگے ـ ہر تکمل کے بعد ایک تکمل کے مستقل کا اضافہ کرنا ہوگا ـ اگر شہتیر کے سہاروں یا تنصیب کے متعلق کافی معطیات دیے گئے ہوں تو ان مستقلوں کی قیمتیں معین ہوسکتی ہیں ـ اگر کسی نقطے پر کے خماؤ کے معیار کے عام جملے کو لا کے ایک تکمل پذیر تفاعل کے طور پر لکھا جاسکے جیسا کہ دفعہ ۷۵ میں ہے تو عہ اور ما کے عام جملے مساوات صفحہ ۱۷۱

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \frac{\text{مہ}}{\text{آ ے}}$$

کو دو بار تکمل کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

اوپر کے دونوں طریقوں کی مثالیں دفعہ آئندہ میں دی گئی ہیں۔

علامتیں ــــ اگر ما کو انتصاباً نیچے مثبت سمجھا جائے تو ڈھال عہ یا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اس وقت مثبت ہوگا جب کہ لا کی مثبت سمت میں (جو عموماً دائیں سمت میں ہوتی ہے) میلان نیچے کی جانب ہو۔ اوپر وار تحدب کی صورت میں لا کے بڑھنے سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ بڑھتا ہے یعنی $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ مثبت ہوتا ہے۔ دفعہ ۵۹ میں خماؤ کے معیار کی علامت اس طرح اختیار کی گئی تھی کہ دائیں جانب کی بیرونی قوتوں کا موافق سمت ساعت معیار مثبت ہو۔ اس لیے اگر مساوات (۲) میں م کے لیے کسی تراش کی دائیں جانب کی بیرونی قوتوں کا موافق سمتِ ساعت معیار لکھا جائے (اگر وہ مثبت ہو تو مثبت منفی ہو تو منفی) تو مساوات کی دوسری طرف میں مثبت انحنا یعنی $+\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ لکھنا چاہیے۔ صریحاً یہی امر تراش کی بائیں جانب کے مخالف سمتِ ساعت معیار کے لیے بھی صحیح ہے۔ اگر معیار ان کی مخالف سمت میں لیے جائیں تو مساوات (۲) میں



شکل ۱۱۱

$-\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ لکھنا چاہیے۔ علامتوں کے قواعد کی پابندی نہ کی جائے تو مساوات (۲) کے تکمل سے حاصل ہونے والے عہ اور ما کی علامتوں میں غلطی واقع ہوگی۔ یہ دیکھو کہ تراش کی دائیں جانب بیرونی قوتوں کے مثبت موافق سمتِ ساعت معیار سے $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ کی علامت مثبت ہوتی ہے، یعنی شہتیر اس تراش پر اوپر وار محدب ہوگا۔

۷۸۔ یکساں شہتیر، سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا اور

سادہ بوجھ — ذیل کی دو مثالیں بہت تفصیل کے ساتھ حل کی گئی ہیں تاکہ تکمل کے مستقل معلوم کرنے کا طریقہ واضح ہو جائے۔

(ا) فرض کرو کہ ایک وسطی بوجھ و ہے (شکل ۱۱۱)، اور ج کو مبداء مانو۔ تب نصف فصل ج ب میں مبداء ج سے افقی فاصلہ لا پر نقطہ ط پر

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{م}}{\text{آے}} = -\frac{1}{\text{آے}} \times \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right) \text{(دیکھو شکل ۶۳)}$$

اس کو تکمل کرنے سے

$$\text{ع یا } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \int \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\,\text{فرلا} = -\frac{\text{و}}{2\,\text{آے}}\left(\frac{\text{ل}}{2}\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2}\right) + \text{ا}$$

جہاں ا ایک مستقل ہے۔

چونکہ ع = ۰ جب کہ لا = ۰ اس لیے ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے ۰ = ۰ + ا یعنی ا = ۰ اور اس مبداء (ج) کے انتخاب سے ا غائب ہو جاتا ہے اور صفحہ ۱۷۵

$$\text{ع یا } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{و}}{2\,\text{آے}}\left(\frac{\text{ل}}{2}\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2}\right) \quad \text{..........(۱)}$$

دوبارہ تکمل کرنے سے

$$\text{ما} = \int \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} = -\frac{\text{و}}{2\,\text{آے}}\left(\frac{\text{ل}}{4}\text{لا}^2 - \frac{\text{لا}^3}{6}\right) + \text{ب} \quad \text{........(۲)}$$

اب چونکہ ما = ۰ جب کہ $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{2}$ اس لیے تکمل کا مستقل $\text{ب} = +\frac{1}{48}\,\frac{\text{و ل}^3}{\text{آے}}$

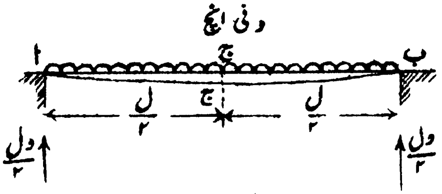
مساواتوں (۱) اور (۲) سے نصف فصل کے کسی نقطے پر ڈھال اور انعطاف معلوم ہوتے ہیں۔ چنانچہ سرے پر یعنی $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{2}$ پر

$$\text{ع}_{\text{ب}} = -\frac{\text{و}}{2\,\text{آے}}\left(\frac{\text{ل}^2}{4} - \frac{\text{ل}^2}{8}\right) = -\frac{\text{و ل}^2}{16\,\text{آے}} \quad \text{..........(۳)}$$

اور وسط میں

$$\text{ما}_{\text{ج}} = \frac{\text{و ل}^{۳}}{۴۸\ \text{آ ے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

دوسرے نصف فصل کے ڈھال اور انصراف صریحاً ج سے اُن فاصلوں پر اسی مقدار کے ہونگے۔



شکل ۱۱۲

(ب) فرض کرو کہ و فی طولی فٹ کا ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے ۔ مبداء ا پر لو (شکل ۱۱۲) اور مساوات $\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{و}$ کو استعمال کرو ۔ چار تکملوں سے جو چار مستقل شریک ہونگے اُن کی قیمت معلوم کرنے کے لیے چار معلومہ شرائط درکار ہیں ۔ یہ چہار شرائط موجودہ صورت میں حسبِ ذیل ہیں :-

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{صر} = ۰\ \text{جب کہ لا} = ۰$$

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = ۰\ \text{جب کہ لا} = \text{ل}$$

$$\text{ما} = ۰\ \text{جب کہ لا} = ۰$$

$$\text{ما} = ۰\ \text{جب کہ لا} = \text{ل}$$

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} = \text{و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

تکمل کرنے سے

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} = \text{ولا} + \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

پھر تکمل کرنے سے

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \frac{۱}{۲}\,\text{ولا}^{۲} + \text{ا لا} + ۰$$

یہ نیا مستقل صفر اس لیے رکھا گیا ہے کہ لا = ۰ کے لیے دونوں طرفوں کو صفر

ہونا چاہیے۔

$\text{لا} = \text{ل}$ کے لیے $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۰$ رکھنے سے

$$۰ = \frac{۱}{۲}\,\text{و}\,\text{ل}^{۲} + \text{ا}\,\text{ل}$$

اس لیے $\qquad \text{ا} = -\frac{۱}{۲}\,\text{و}\,\text{ل}$

صفحہ ۱۶۷ (یہ نتیجہ مساوات (۶) سے بھی حاصل ہوسکتا تھا کیونکہ $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ پر جزی قوت صفر ہے)

تب ا کی قیمت مندرج کرنے سے

$$\text{آ ے}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = \frac{۱}{۲}\,\text{و}\,\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۲}\,\text{و ل لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

تکمل کرنے سے

$$\text{ع} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{آ ے}}\left(\frac{۱}{۶}\,\text{و}\,\text{لا}^{۳} - \frac{۱}{۴}\,\text{و ل}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

پھر تکمل کرنے سے

$$\text{ما} = \frac{۱}{\text{آ ے}}\left(\frac{۱}{۲۴}\,\text{و}\,\text{لا}^{۴} - \frac{۱}{۱۲}\,\text{و ل}\,\text{لا}^{۳} + \text{ب لا} + ۰\right)$$

نیا مستقل صفر ہے اس لیے کہ $\text{ما} = ۰$ جب کہ $\text{لا} = ۰$

$\text{لا} = \text{ل}$ پر $\text{ما} = ۰$ رکھنے سے

$$۰ = \frac{۱}{۲۴}\,\text{و}\,\text{ل}^{۴} - \frac{۱}{۱۲}\,\text{و}\,\text{ل}^{۴} + \text{ب ل}$$

یا $\qquad \text{ب} = \frac{۱}{۲۴}\,\text{و}\,\text{ل}^{۳}$

یہ (۸) سے بھی حاصل ہوسکتا تھا اس لیے کہ تشاکل کی وجہ سے $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ پر $\text{ع} = ۰$

اس طرح

$$\text{ما} = \frac{1}{\text{آ ے}}\left(\frac{1}{24}\,\text{ولا}^{4} - \frac{1}{12}\,\text{ول لا}^{3} + \frac{1}{24}\,\text{ول}^{3}\,\text{لا}\right)$$

یا

$$\text{ما} = \frac{\text{ولا}}{24\,\text{آ ے}}\left(\text{لا}^{3} - 2\,\text{ل لا}^{2} + \text{ل}^{3}\right) \qquad \ldots(9)$$

یا

$$\text{ما} = \frac{\text{ولا}\,(\text{ل} - \text{لا})}{24\,\text{آ ے}}\left(\text{ل}^{2} + \text{ل لا} - \text{لا}^{2}\right)$$

مساواتوں (۶)، (۷)، (۸) اور (۹) سے سرے ا سے فاصلہ لا پر کسی نقطے پر ق، م، عہ اور ما کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ مثلاً عہ اعظم ہوگا جب کہ $\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}} = 0$ یعنی م = ۰ یعنی سروں پر، اس لیے (۸) میں لا = ۰ رکھنے سے

$$\text{عہ}_{\text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{آ ے}} = \frac{\text{ول}^{3}}{24\,\text{آ ے}} \qquad \ldots\ldots(10)$$

ما اعظم ہوگا جب کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$ یعنی عہ = ۰ یعنی جب کہ $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{2}$ اور تب

$$\text{ما}_{\text{ج}} = \frac{\text{ول}^{4}}{24\,\text{آ ے}}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{384}\,\frac{\text{ول}^{4}}{\text{آ ے}} \qquad \ldots(11)$$

یا اگر مجموعی بوجھ ول = و تو

$$\text{ما}_{\text{ج}} = \frac{5}{384}\,\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{آ ے}} \qquad \ldots\ldots(12)$$

یہاں کی تمام علامتیں دفعات ۵۹ اور ۷۷ کے آخر میں دی ہوئی قرارداد کے مطابق ہیں اور اس کی تمثیل پیش کرتی ہیں۔

صفحہ ۱۷۷ برآویختہ سرے ــــ دونوں سہاروں کے درمیان جن کا فاصلہ ل ہو درمیانی نقاط کے لیے عمل بالکل اوپر کے جیسا ہوگا۔ صرف یہ کہ دونوں سہاروں پر آ ے $\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}$ صفر ہونے کی بجائے اُس خماؤ کے معیار کے مساوی ہوگا جو برآویختہ سرے کی وجہ سے ہے۔

تھونی دار شہتیر ــــ اگر اس شہتیر کو ایک وسطی سہارے کے ذریعے تھونی دے کر سروں کی سطح پر لایا جائے تو وسطی انصراف صفر ہوگا یا بالفاظِ دیگر تھونی کے ردِّ عمل سے پیدا ہونے والا (اور اس کے تناسب) اوپر وار انصراف بوجھ سے پیدا ہونے والے نیچوار وسطی انصراف کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ تھونی کا اوپر وار ردِّ عمل ت ہے۔ تب (۴) اور (۱۱) سے

$$\frac{\text{ت ل}^3}{\text{۴۸ آ ے}} = \frac{\text{۵}}{\text{۳۸۴}} \, \frac{\text{و ل}^3}{\text{آ ے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱۳})$$

یا ت = $\frac{\text{۵}}{\text{۸}}$ ول یعنی وسطی تھونی پورے بوجھ کا $\frac{\text{۵}}{\text{۸}}$ برداشت کرتی ہے اور سروں کے ہر ایک سہارے پر $\frac{\text{۳}}{\text{۱۶}}$ حصہ پڑتا ہے۔

تھونی کا دھساؤ ــــ اگر تھونی سروں کے سہاروں کے ساتھ ہم سطح نہ ہو بلکہ نیچوار بوجھ سے پیدا ہونے والے انصراف کے صرف $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ کو دور کرے تو تھونی کا ردِّ عمل اوپر کی مقدار کا $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ ہوگا۔

لچکدار تھونی ــــ اگر وسطی تھونی اور سروں کے سہارے ابتدا میں ایک ہی سطح میں تھے لیکن لچکدار تھے اور ہر ایک کو بقدر اکائی فاصلے کے نیچا کرنے کے لیے دباؤ چ درکار ہو تو تھونی بقدر $\frac{\text{ت}}{\text{چ}}$ کے دبیگی اور سروں کے سہارے بقدر $\frac{\text{ول} - \text{ت}}{\text{۲ چ}}$ کے۔ تب سطح کے فرق کی وجہ سے پیدا ہونے والے نیچوار انصراف اور ت سے پیدا ہونے والے اوپر وار انصراف کے

فرق کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{ت}{چ} - \frac{ول - ت}{۲چ} = \frac{۵}{۳۸۴}\,\frac{ول^{۳}}{آ\,ے} - \frac{ت\,ل^{۳}}{۴۸\,آ\,ے}$$

$$ت\left(\frac{۳}{۲چ} + \frac{ل^{۳}}{۴۸\,آ\,ے}\right) = ول\left(\frac{۵}{۳۸۴}\,\frac{ل^{۳}}{آ\,ے} + \frac{۱}{۲چ}\right)$$

$$ت = ول\,\frac{\frac{۲۴\,آ\,ے}{چ\,ل^{۳}} + \frac{۵}{۸}}{\frac{۷۲\,آ\,ے}{چ\,ل^{۳}} + ۱} \qquad \cdots\cdots\cdots (۱۴)$$

صریحاً یہ نتیجہ کامل استوار سہاروں کے لیے جن کے لیے چ لامتناہی ہوتا ہے پہلے حاصل کیے ہوئے نتیجے کے مطابق ہے اور بہت لچکدار سہاروں کے لیے $\frac{۱}{۲}$ ول کے قریب آتا ہے۔ اگر سروں کے سہاروں اور وسطی تھونی کی لچک مختلف ہو تو اوپر کے عمل میں جو ترمیم کرنی ہوگی وہ سادہ ہوگی۔

مثال ۱ — ۱۰ فٹ فصل کا ایک شہتیر دونوں سروں پر سہارا ہوا ہے اور اس پر ایک پھیلا ہوا بوجھ ہے جو ایک سرے پر صفر ہے اور ہموار طور پر بڑھتا ہوا دوسرے سرے پر ۴ ٹن فی طولی فٹ ہے۔ عمودی تراش کا معیارِ جمود ۳۷٫۵ (انچ)^{۴} اور ے ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہو تو دونوں سروں پر کے ڈھال اور اعظم انصراف کی مقدار اور محل معلوم کرو۔

سروں کی حالت حسبِ سابق ہے۔ مبداء ہلکے سرے پر لو۔ تب اس سے لا انچ کے فاصلے پر بوجھ فی طولی انچ

$$= \frac{لا}{۱۲۰} \times \frac{۴}{۱۲} = \frac{لا}{۳۶۰}\ ٹن$$

$$\frac{فر^{۲}ما}{فرلا^{۲}} = \frac{۱}{۳۶۰\,آ\,ے} \times لا$$

$$\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} = \frac{۱}{۳۶۰\ \text{آ}\ \text{ے}}\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \text{ا}\right)$$

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \frac{۱}{۳۶۰\ \text{آ}\ \text{ے}}\left(\frac{\text{لا}^{۳}}{۶} + \text{ا}\,\text{لا} + ۰\right)$$

$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = ۰$ جب کہ لا = ل اس لیے $\text{ا} = -\frac{\text{ل}^{۲}}{۶}$ اور

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \frac{۱}{۳۶۰\ \text{آ}\ \text{ے}}\left(\frac{\text{لا}^{۳}}{۶} - \frac{\text{ل}^{۲}\text{لا}}{۶}\right)$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۳۶۰\ \text{آ}\ \text{ے}}\left(\frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴} - \frac{\text{ل}^{۲}\text{لا}^{۲}}{۱۲} + \text{ب}\right)$$

$$\text{ما} = \frac{۱}{۳۶۰\ \text{آ}\ \text{ے}}\left(\frac{\text{لا}^{۵}}{۱۲۰} - \frac{\text{ل}^{۲}\text{لا}^{۳}}{۳۶} + \text{ب}\,\text{لا} + ۰\right)$$

ما = ۰ جب کہ لا = ل اس لیے

$$\text{ب} = \frac{\text{ل}^{۴}}{۳۶} - \frac{\text{ل}^{۴}}{۱۲۰} = \frac{۷\,\text{ل}^{۴}}{۳۶۰}$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۳۶۰\ \text{آ}\ \text{ے}}\left(\frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴} - \frac{\text{ل}^{۲}\text{لا}^{۲}}{۱۲} + \frac{۷\,\text{ل}^{۴}}{۳۶۰}\right)$$

اور

$$\text{ما} = \frac{۱}{۳۶۰\ \text{آ}\ \text{ے}}\left(\frac{\text{لا}^{۵}}{۱۲۰} - \frac{\text{ل}^{۲}\text{لا}^{۳}}{۳۶} + \frac{۷\,\text{ل}^{۴}\,\text{لا}}{۳۶۰}\right)$$

ہلکے سرے لا = ۰ پر

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۷ \times ۱۲۰^{۴}}{۳۶۰} \times \frac{۱}{۳۷۵ \times ۱۳۰۰۰ \times ۳۶۰}\ \text{نیم قطری}$$

$$= ۰٫۱۳۱$$

بھاری سرے لا = ۱۲۰ انچ پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰۱۵۰ء

اعظم انصراف کے نقطے پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰ یعنی

$$\frac{\text{لا}^{4}}{24} - \frac{\text{ل}^{2}\,\text{لا}^{2}}{12} + \frac{7}{360}\,\text{ل}^{4} = 0$$

یا   لا = ۵۲ء ل = ۶۲ء۴ انچ

اور اس قیمت کو مندرج کرنے سے   ما = ۰۹۲۵ء انچ

مثال ۲ — ایک لکڑی کا تختہ ۱۲ انچ چوڑا، ۴ انچ موٹا اور ۱۰ فٹ لمبا ایک استوار سہارے سے تین تاروں کے ذریعے لٹکایا گیا ہے جن میں سے ہر ایک کی تراش $\frac{1}{8}$ مربع انچ اور طول ۱۵ فٹ ہے۔ دو تار سِروں پر ہیں صفحہ ۶۹ اور ایک وسط میں۔ تینوں تاروں کو ٹیٹ (tight) کرکے تختے پر ۴۰۰ پونڈ فی طولی فٹ کا ایک یکساں بوجھ رکھا گیا ہے۔ لکڑی کے وزن کو نظرانداز کرکے وسطی اور سِروں کے تاروں کا تناؤ اور تختے میں خماؤ کے زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔ راست لچک کا مقیاس (سے) تاروں کے لیے لکڑی کا ۲۰ گنا لیا جائے۔

فرض کرو کہ تاروں کے مقیاس $\text{سے}_{\text{ت}}$ اور لکڑی کا $\text{سے}_{\text{ل}} = \frac{1}{20}\,\text{سے}_{\text{ت}}$ ہے۔

تاروں کے لیے قوت فی انچ کھنچاؤ (چ) = $\frac{\text{سے}_{\text{ت}}}{180 \times 8}$ کیونکہ ۱ انچ کھنچاؤ میں فساد $\frac{1}{180}$ ہوگا۔ لکڑی کے شہتیر کے لیے جو وسط میں سہارا گیا ہے

$$\text{آ} = \frac{1}{12} \times 12 \times 64 = 64 \ (\text{انچ})^{4}$$

وسطی تار پر پڑنے والا بوجھ اوپر کی مساوات (۱۴) سے معلوم ہوگا۔

$$\frac{\text{۲۴ سم}^{\text{۴}} \times \text{۶۴} \times \text{۸} \times \text{۱۸۰}}{\text{سم}^{\text{۴}} \times \text{۱۲۰} \times \text{۱۲۰} \times \text{۱۲۰}} = \text{٫۰۶۴}$$

اس لیے (۱۴) کی رو سے وسطی تار کا مجموعی تناؤ

$$\text{ت} = \text{۴۰۰۰} \times \frac{\text{٫۰۶۴} + \text{٫۶۲۵}}{\text{۱} + (\text{٫۰۶۴} \times \text{۳})} = \text{۴۰۰۰} \times \text{٫۵۷۸}$$

$$= \text{۲۳۱۲ پونڈ}$$

$$\text{سروں کے ہر ایک تار میں مجموعی تناؤ} = \frac{\text{۴۰۰۰} - \text{۲۳۱۲}}{\text{۲}} = \text{۸۴۴ پونڈ}$$

خماؤ کا سب میں بڑا معیار یا تو وسطی سہارے پر واقع ہوگا جہاں نقشہ غیر مسلسل ہے یا بطور ریاضیاتی اعظم کے سرے اور وسط کے درمیان ہوگا۔
ایک سرے سے لا انچ کے فاصلے پر

$$\text{م} = \text{۸۴۴ لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \times \frac{\text{۴۰۰}}{\text{۱۲}} \times \text{لا}^{\text{۲}}$$

$$\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = \text{۸۴۴} - \frac{\text{۱۰۰}}{\text{۳}}\,\text{لا}$$

جو صفر ہے جب کہ لا = ۲۵٫۳۲ انچ
لا کی یہ قیمت مندرج کرنے سے

$$\text{م} = \text{۲۱۳۷۰} - \text{۱۰۶۸۵} = \text{۱۰۶۸۵ پونڈ انچ}$$

وسط میں

$$\text{م} = (\text{۸۴۴} \times \text{۶۰}) - (\text{۲۰۰۰} \times \text{۳۰}) = -\,\text{۹۳۶۰ پونڈ انچ}$$

یہ لا = ۲۵٫۳۲ انچ پر کی قیمت سے کم ہے۔

خماؤ کے زور کی اعظم حدت

$$\frac{\text{عرما}}{\text{آ}} = \frac{۲\times ۱۰۶۸۵}{۲۴} = ۳۳۴ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

۷۹۔ یکساں برآمدہ بیرم، سادہ طور پر لدا ہوا ——

(۱) ایک مرتکز بوجھ و آزاد سرے پر۔ مبداء ع ثابت سرے پر لو (شکل ۱۱۳)۔

تب $\text{لا} = ۰$ پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ اور $\text{ما} = ۰$

کسی نقطہ لا پر خماؤ کا معیار

$$\text{آے} \cdot \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{و}(\text{ل} - \text{لا})$$

$$\text{آے} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و}(\text{ل لا} - \tfrac{۱}{۲}\text{لا}^{۲}) + ۰$$

$$\text{آے} \cdot \text{ما} = \text{و}(\tfrac{۱}{۲}\text{ل لا}^{۲} - \tfrac{۱}{۶}\text{لا}^{۳}) + ۰$$

شکل ۱۱۳

سرے ا پر

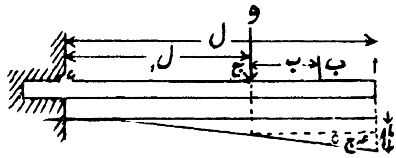
$$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{\text{ا}} \text{ یا } \text{ع}_{\text{ا}} = \frac{\text{و}}{\text{آے}}(\text{ل}^{۲} - \tfrac{۱}{۲}\text{ل}^{۲})$$

$$= \frac{\text{ول}^{۲}}{۲\text{آے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور $$\text{ما}_{\text{ا}} = \frac{\text{ول}^{۳}}{\text{آے}}(\tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۶}) = \frac{\text{ول}^{۳}}{۳\text{آے}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

دیکھو شکل ۱۱۱ کے شہتیر کے سہارے کا اوپر وار انصراف شہتیر کے وسط کی اضافت سے اس ضابطہ (۲) کی مدد سے حاصل ہوسکتا ہے اور وہ یہ ہوگا

$$\frac{\frac{\text{و}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^{۳}}{۳\,\text{آ}\,\text{ے}} = \frac{\text{و}\,\text{ل}^{۳}}{۴۸\,\text{آ}\,\text{ے}}$$ (جو نتیجہ (۴) دفعہ ۸، کے مطابق ہے)

(ب) ایک مرتکز بوجھ ثابت سرے سے فاصلہ ل۱ پر - مبداء ثابت سرے ع پر (شکل ۱۱۴) - تمام حالات اوپر کی طرح -

شکل ۱۱۴

ع سے ج تک

$$\text{آ}\,\text{ے}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{۲}} = \text{و}\,(\text{ل}_{۱} - \text{لا})$$

$$\text{آ}\,\text{ے}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \text{و}\,(\text{ل}_{۱}\,\text{لا} - \tfrac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۲}) + ۰$$

$$\text{آ}\,\text{ے}\,.\,\text{ما} = \text{و}\,(\tfrac{۱}{۲}\,\text{ل}_{۱}\,\text{لا}^{۲} - \tfrac{۱}{۶}\,\text{لا}^{۳})$$

ج پر $\left(\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\right)_{\text{ج}}$ یا $\text{ع}_{\text{ج}} = \frac{\text{و}\,\text{ل}_{۱}^{۲}}{۲\,\text{آ}\,\text{ے}}$ (حسبِ سابق)........(۳)

اور $\text{ما}_{\text{ج}} = \frac{\text{و}\,\text{ل}_{۱}^{۳}}{۳\,\text{آ}\,\text{ے}}$ ....(۴)

صفحہ ۱۸۱ ج سے پرے کسی نقطہ ب پر ڈھال وہی ہوگا جو ج پر ہے اور ب پر کا انصراف ج سے بقدر ذیل کی مقدار کے زیادہ ہوگا۔

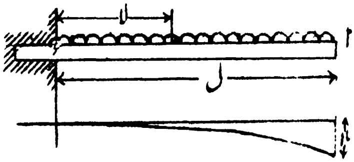
$$\text{ب} \times (\text{ڈھال ج سے ب تک}) = \text{ب} \times \frac{\text{و}\,\text{ل}_1^2}{2\,\text{آ}\,\text{ے}}$$

اور سرے پر

$$\text{ا}_1 = \frac{\text{و}\,\text{ل}_1^3}{3\,\text{آ}\,\text{ے}} + (\text{ل} - \text{ل}_1)\frac{\text{و}\,\text{ل}_1^2}{2\,\text{آ}\,\text{ے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

یہی ضابطہ بوجھوں کی کسی تعداد کے لیے درست ہے۔ آزاد سرے پر یا اور کہیں تقوفی ہو تو اُس پر بوجھ معلوم کرنے کے لیے دفعہ گزشتہ کی طرح اوپر وار اور نیچے وار انصرافوں کی مساوات استعمال کی جا سکتی ہے۔

(ج) یکساں پھیلا ہوا بوجھ و فی اکائی طول - مبدا، ۶ (شکل ۱۱۵)



شکل ۱۱۵

ثابت سرے پر۔

اس کے لیے دفعہ ۷۷ کی مساوات (۲) یا (۶) سے ابتدا کی جا سکتی ہے۔ مساوات (۲) لینے سے

$$\text{م} = \text{آ}\,\text{ے}\,\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{و}}{2}(\text{ل} - \text{لا})^2 = \frac{\text{و}}{2}(\text{ل}^2 - 2\,\text{ل}\,\text{لا} + \text{لا}^2)$$

$$\text{آ}\,\text{ے}\,\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و}}{2}\left(\text{ل}^2\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2 + \frac{1}{3}\text{لا}^3\right) + 0$$

$$\text{آ}\,\text{ے}\,.\,\text{ا} = \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{1}{2}\text{ل}^2\text{لا}^2 - \frac{1}{3}\text{ل}\,\text{لا}^3 + \frac{1}{12}\text{لا}^4\right) + 0$$

لا = ل کے لیے

$$\text{یا}\ \left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)_{۱} = \frac{\text{ول}^{۳}}{۲\,\text{آ}\,\text{ے}}\left(۱ - ۱ + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۱}{۶}\,\frac{\text{ول}^{۳}}{\text{آ}\,\text{ے}}\ \text{یا}$$

$$\frac{۱}{۶}\,\frac{\text{ول}^{۲}}{\text{آ}\,\text{ے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

جہاں و = ول

$$\text{م}_{۱} = \frac{\text{ول}^{۲}}{۲\,\text{آ}\,\text{ے}}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱۲}\right) = \frac{۱}{۸}\,\frac{\text{ول}^{۲}}{\text{آ}\,\text{ے}}\ \text{یا}$$

$$\frac{۱}{۸}\,\frac{\text{ول}^{۳}}{\text{آ}\,\text{ے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

نتیجہ (۱۲) دفعہ ۷۸ اس نتیجے سے اخذ کیا جاسکتا تھا کیونکہ شہتیر کے مرکز کی اضافت سے سہارے کا اوپر وار انصراف

$$= \frac{\frac{\text{ول}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^{۳}}{۳\,\text{آ}\,\text{ے}} - \frac{\text{و}\left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^{۴}}{۸\,\text{آ}\,\text{ے}} = \frac{۵}{۳۸۴}\,\frac{\text{ول}^{۴}}{\text{آ}\,\text{ے}}$$

تھونی دار برآمدہ بیرم ـــ (۶) اور (۷) سے اوپر وار اور نیچے وار انصرافوں کو مساوی رکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر برآمدہ بیرم یکساں لدا ہوا ہو اور اس کے آزاد سرے کے نیچے ایک تھونی ہو جو بوجھ پڑنے کے بعد آزاد سرے کو ثابت سرے کی سطح میں رکھے تو تھونی پر پورے بوجھ کا صفحہ ۱۸۲
$\frac{۳}{۸}$ حصہ پڑیگا - خماؤ کے معیار کا نقشہ اس طرح کھینچا جاسکتا ہے کہ شکل ۵۹ اور شکل ۶۰ کے جیسے نقشوں کو اکٹھا کیا جائے اور و = $\frac{۳}{۸}$ ول لیا جائے۔ معینوں کے فرق سے حاصل خماؤ کا معیار تعبیر ہوگا - جزی قوت کا منحنی شکل ۶۱ کی طرح ایک خطِ مستقیم ہوگا لیکن اساسی خط کی اضافت سے جسماً بقدر $\frac{۳}{۸}$ ول کے اٹھایا ہوا ہوگا - تھونی دار برآمدہ بیرموں میں لداؤ کی دیگر اقسام سے انہی اصولوں پر بحث کی جاسکتی ہے۔ طالبعلم اس سادہ صورت کو بطور مشق کے پورے طور پر

حل کریں، اعظم انصراف، انعطاف وغیرہ کے نقطے معلوم کریں ۔ عمل یہ ہوگا کہ مساوات $\text{آ ے}\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فر لا}^4} = \text{و}$ کو تکمل کریں، معطیات یہ ہیں کہ دونوں سروں پر ما = ۰، ثابت سرے پر ڈھال = ۰ اور آزاد سرے پر $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = 0$۔

دھسان تھونی ـــ اگر تھونی ثابت سرے کی سطح سے نیچی ہو تو اس پر کا بوجھ اسی تناسب سے کم ہوجائیگا ۔ اگر یہ اس سطح سے اوپر ہو تو اسی تناسب میں بڑھ جائیگا ۔

لچکدار تھونی ـــ اگر ثابت سرا استوار ہو اور آزاد سرے پر کا سہارا لچکدار ہو اور اس کے لیے قوت چ فی اکائی لچکاؤ درکار ہو اور وہ لداؤ سے پہلے ثابت سرے کی سطح میں ہو تو اوپر کی منقسم بوجھ کی سادہ صورت کے لیے تھونی کے لچکاؤ کو بوجھ اور تھونی سے پیدا ہونے والے انصرافوں کے فرق کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{\text{ت}}{\text{چ}} = \frac{1}{8}\,\frac{\text{و ل}^4}{\text{آ ے}} - \frac{\text{ت ل}^3}{3\,\text{آ ے}}$$

جس سے
$$\text{ت} = \text{و ل}\,\frac{\frac{3}{8}}{\left(1 + \frac{3\,\text{آ ے}}{\text{چ ل}^3}\right)}$$

لداؤ کی دیگر اقسام اور تھونی کے دوسرے محلوں کے لیے اسی طرح کے اصول بکار آمد ہونگے ۔

(د) جزوی منقسم بوجھ

اگر بوجھ ثابت سرے سے صرف طول ل_1 تک پھیلا ہوا ہو تو آزاد سرے کا انصراف اوپر کے (۵) کے طریقے سے

$$\text{ما} = \frac{1}{8}\,\frac{\text{و ل}_1^4}{\text{آ ے}} + (\text{ل} - \text{ل}_1)\,\frac{1}{6} \times \frac{\text{و ل}_1^3}{\text{آ ے}} \quad \text{.........} \quad (8)$$

اگر بوجھ آزاد سرے سے اُس نقطے تک ہو جو ثابت سرے سے فاصلہ ل پر ہے تو آزاد سرے کا انصراف (۸) کو (۷) میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوگا۔

مثال ۱ — ایک برآمدہ بیرم پر ثابت سرے سے اس کے $\frac{۳}{۴}$ طول کے فاصلے پر ایک مرتکز بوجھ و ہے اور آزاد سرے کو ثابت سرے کی سطح میں ایک تھونی دی گئی ہے۔ معلوم کرو کہ تھونی پر کتنا بوجھ پڑتا ہے۔

فرض کرو کہ تھونی پر دباؤ ت ہے۔ تب

$$\frac{۱}{۳}\,\frac{ت\,ل^{۳}}{\text{آے}} = \frac{۱}{۳}\,\frac{و\,(\frac{۳}{۴}ل)^{۳}}{\text{آے}} + \frac{۱}{۴}ل\,\frac{و\,(\frac{۳}{۴}ل)^{۲}}{۲\,\text{آے}}$$

$$\frac{۱}{۳}ت = و\left(\frac{۹}{۱۲۸}+\frac{۹}{۶۴}\right) = \frac{۲۷}{۱۲۸}\,و$$

$$ت = \frac{۸۱}{۱۲۸}\,و$$

مثال ۲ — ایک ۱۰ فٹ لمبے برآمدہ بیرم پر ایک یکساں پھیلا ہوا ی۱۸۳
بوجھ ۵ فٹ طول پر ثابت سرے سے ۳ فٹ سے لے کر آزاد سرے سے ۲ فٹ تک ہے۔ آزاد سرے کو ثابت سرے کی سطح میں تھونی دی گئی ہے۔ معلوم کرو کہ تھونی پر کتنا بوجھ پڑتا ہے۔

فرض کرو کہ و = بوجھ فی طولی فٹ اور ت = تھونی پر دباؤ۔ مجموعی بوجھ $\frac{۱}{۲}$ ول ہے۔ اگر تھونی نہ ہوتی تو آزاد سرے کا انصراف

$$= \frac{۱}{۸}\,\frac{و\,(٫۸\,ل)^{۴}}{\text{آے}} + ٫۲\,ل \times \frac{۱}{۶}\,\frac{و\,(٫۸\,ل)^{۳}}{\text{آے}}$$

$$- \left\{\frac{۱}{۸}\,\frac{و\,(٫۳\,ل)^{۴}}{\text{آے}} + ٫۷\,ل \times \frac{۱}{۶}\,\frac{و\,(٫۳\,ل)^{۳}}{\text{آے}}\right\}$$

$$= \frac{و\,ل^{۴}}{\text{آے}}\left\{\frac{٫۴۰۹۶}{۸} + \frac{٫۱۰۲۴}{۶} - \frac{٫۰۰۸۱}{۸} - \frac{٫۰۱۸۹}{۶}\right\}$$

$$= \text{ء۰۶۴۱} \; \frac{\text{و ل}^{۴}}{\text{آ ے}}$$

اس لیے $\frac{۱}{۳} \; \frac{\text{ت ل}^{۳}}{\text{آ ے}} = \text{ء۰۶۴۱} \; \frac{\text{و ل}^{۴}}{\text{آ ے}}$

ت = ء۱۹۲۳ و ل یا مجموعی بوجھ کا ء۳۸۵

دیکھو یہ بوجھ کے نصف سے کم ہے اگرچہ کہ بوجھ کا مرکزِ جاذبہ تھونی دار سرے سے قریب تر ہے۔

مثال ۳ — ایک یکساں عمودی تراش کے برآمدہ بیرم پر ایک بوجھ اس طرح پھیلا ہوا ہے کہ ثابت سرے پر اس کی حدت اعظم ہے اور و ہے اور ہموار طور پر بدلتی ہوئی آزاد سرے پر صفر ہوتی ہے۔ اگر آزاد سرے کو ثابت سرے کی سطح میں تھونی دی گئی ہو تو تھونی پر بوجھ معلوم کرو۔

اس کو سابق کی دو مشقوں کے طریقوں پر حل کیا جا سکتا ہے یعنی بغیر تھونی کا انصراف معلوم کرکے یا بالراست تکمل کرکے۔ تکمل کا طریقہ اختیار کرنے سے اور مبداء ثابت سرے پر لینے سے

$$\text{آ ے} \; \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{و} \; \frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{ل}} = \text{و} \left(۱ - \frac{\text{لا}}{\text{ل}} \right)$$

$$\text{آ ے} \; \frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} = \text{و} \left(\text{لا} - \frac{۱}{۲} \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ل}} + \text{ا} \right)$$

$$\text{آ ے} \; \frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} = \text{و} \left(\frac{۱}{۲} \text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۶} \frac{\text{لا}^{۳}}{\text{ل}} + \text{ا لا} + \text{ب} \right)$$

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} = ۰$ جب کہ لا = ل

اس لیے اس کے اندراج سے $\text{ب} = \frac{۱}{۶}\text{ل}^{۲} - \frac{۱}{۲}\text{ل}^{۲} - \text{ا ل} = -\frac{۱}{۳}\text{ل}^{۲} - \text{ا ل}$

اور $\text{آ ے} \; \frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} = \text{و} \left(\frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۶}\frac{\text{لا}^{۳}}{\text{ل}} + \text{ا لا} - \frac{۱}{۳}\text{لا}^{۲} - \text{ا ل} \right)$

$$\frac{\text{ف}\,\text{ما}}{\text{ف}\,\text{لا}} = \frac{\text{و}}{\text{آ}\,\text{ے}}\left(\frac{1}{6}\text{لا}^{3} - \frac{1}{24}\frac{\text{لا}^{4}}{\text{ل}} + \frac{1}{2}\text{ا}\,\text{لا}^{2} - \frac{1}{2}\text{ل}^{2}\text{لا} - \text{ا}\,\text{ل}\,\text{لا} + 0\right)$$

$$\text{ما} = \frac{\text{و}}{\text{آ}\,\text{ے}}\left(\frac{1}{24}\text{لا}^{4} - \frac{1}{120}\frac{\text{لا}^{5}}{\text{ل}} + \frac{1}{6}\text{ا}\,\text{لا}^{3} - \frac{1}{6}\text{ل}^{2}\text{لا}^{2} - \frac{1}{2}\text{ا}\,\text{ل}\,\text{لا}^{2} + 0\right)$$

چونکہ ما = ۰ جب کہ لا = ل

اس لیے $\text{ا}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \text{ل}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{6}\right) = -\frac{2}{15}\text{ل}$

یعنی $\text{ا} = -\frac{2}{5}\text{ل}$

اور $\text{آ}\,\text{ے}\,\frac{\text{ف}^{3}\text{ما}}{\text{ف}\,\text{لا}^{3}} = \text{و}\left(\text{لا} - \frac{1}{2}\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ل}} - \frac{2}{5}\text{ل}\right)$

اس سے کسی مقام کی جزی قوت معلوم ہوتی ہے - آزاد سرے پر جہاں لا = ل، نوٹ ۱۸۴
جزی قوت

$$= \text{و}\,\text{ل}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{10}\text{و}\,\text{ل}$$

جو آزاد سرے پر کا ردِّعمل اور تھونی پر بوجھ ہوگا -

مجموعی بوجھ $\frac{1}{2}$ ول ہے اس لیے آزاد سرے پر بوجھ کا $\frac{1}{5}$ حصّہ پڑتا ہے - اگر دونوں سرے آزاد ہوتے تو $\frac{1}{2}$ حصہ پڑتا -

مثال ۴ — ایک ۲ انچ مربع فولادی سلاخ ایک سرے سے ۳ فٹ کے فاصلے پر علی القوائم موڑی گئی ہے - دوسرا بازو جو بہت لمبا ہے زمین میں انتصاباً گاڑا گیا ہے اور چھوٹا بازو (جو ۳ فٹ ہے) اُفقی ہے اور زمین سے ۱۰ فٹ اونچا ہے - اُفقی بازو کے سرے سے $\frac{1}{4}$ ٹن کا ایک بوجھ لٹکایا گیا ہے - آزاد سرے کے اُفقی اور انتصابی انصراف معلوم کرو ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ -

لمبے بازو میں خماؤ کا معیار سارے طول میں تقریباً وہی ہوگا جو موڑ پر ہے یعنی $\frac{1}{4} \times 36 = 9$ ٹن انچ -

اس لیے لمبا بازو ایک مستدیر قوس کی شکل اختیار کریگا جس کا نچلا سرا انتصابی ہوگا۔ اس لیے لمبے بازو کے دونوں سروں کو ملانے والا خط انتصابی سمت سے ذیل کا زاویہ بنائیگا۔

$$\frac{م\,ل}{۲\,آ\,ے} \text{ (دفعہ ۷۶ مساوات (۲)) } = \frac{۱۲۰ \times ۹}{۲\,آ\,ے}$$

$$= \frac{۱۲ \times ۱۲۰ \times ۹}{۱۶ \times ۱۳۰۰۰ \times ۲} = \frac{۸۱}{۲۶۰۰} \text{ نیم قطری}$$

اس طرح پورے چھوٹے بازو کا افقی انصراف

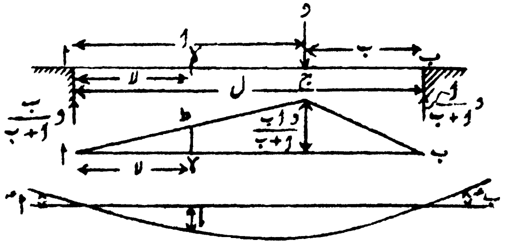
$$= \frac{۸۱}{۲۶۰۰} \times ۱۲۰ = \frac{۲۴۳}{۶۵} = ۳٫۷۴ \text{ انچ}$$

انتصابی سمت سے لمبے بازو کے بالائی سرے کا میلان صریحاً مقدار $\frac{۸۱}{۲۶۰۰}$ کا جو اوسط میلان ہے دُگنا ہوگا۔ اس طرح چھوٹے برآمدہ بازو کا نجوار میلان موڑ پر $\frac{۸۱}{۱۳۰۰}$ ہوگا۔ آزاد سرے کا انتصابی انصراف

$$= \text{موڑ کا نجوار میلان} \times ل + \frac{و\,ل^{۲}}{۳\,آ\,ے}$$

$$= \frac{۸۱}{۱۳۰۰} \times ۳۶ + \frac{۱۲ \times ۳۶ \times ۳۶ \times ۳۶ \times \frac{۱}{۴}}{۱۶ \times ۱۳۰۰۰ \times ۳}$$

$$= ۲٫۲۴۳ + ۰٫۲۲۴ = ۲٫۴۶۷ \text{ انچ}$$



شکل ۱۱۶

۸۰ - سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر غیر مرکزی بوجھ

فرض کرو کہ سہارے ا سے فاصلہ ا پر اور سہارے ب سے فاصلہ ب پر
ایک بوجھ و مرتکز ہے۔ فصل ا + ب = ل ہے۔ صریحاً ردِّ عمل صفحہ ۱۸۵

$$\text{ر}_{\text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}\,\text{و} \quad \text{اور} \quad \text{ر}_{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا} + \text{ب}}\,\text{و}$$

فرض کرو کہ ا، ب سے بڑا ہے۔ ا کو مبداء ماننے سے ا سے ج تک

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = -\frac{\text{و}}{\text{آے}}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}} \times \text{لا} \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{وب}}{\text{آے}\,(\text{ا} + \text{ب})} \times \frac{\text{لا}^{2}}{۲} + \text{م}_{۱}$$

ج پر

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \ \text{یا}\ \text{ع}_{\text{ج}} = -\frac{\text{وب}}{\text{آے}\,(\text{ا} + \text{ب})} \times \frac{\text{ا}^{2}}{۲} + \text{م}_{۱}$$

یا

$$\text{م}_{۱} = \text{ع}_{\text{ج}} + \frac{\text{وب}\,\text{ا}^{2}}{۲\,\text{آے}\,(\text{ا} + \text{ب})}$$

اور

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{وب}}{\text{آے}\,(\text{ا} + \text{ب})} \times \frac{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}}{۲} + \text{ع}_{\text{ج}} \quad \cdots\cdots\cdots (۲)$$

$$\text{ما} = -\frac{\text{وب}}{\text{آے}\,(\text{ا} + \text{ب})}\left(\frac{\text{لا}^{3}}{۶} - \frac{\text{ا}^{2}\text{لا}}{۲}\right) + \text{ع}_{\text{ج}} \times \text{لا} + ۰ \quad \cdots\cdots (۳)$$

اور ج پر جہاں لا = ا

$$\text{ما}_{\text{ج}} = \frac{\text{وب}}{\text{آے}\,(\text{ا} + \text{ب})} \times \frac{\text{ا}^{3}}{۳} + \text{ا}\,\text{ع}_{\text{ج}} \quad \cdots\cdots\cdots (۴)$$

اسی طرح ب کو مبداء ماننے سے اور لا کو ج کی طرف مثبت لینے سے اور
اس طرح عج کو مخالف علامت کا لینے سے

$$\text{ما}_\text{ج} = \frac{\text{و ا}}{\text{آ ے (ا + ب)}} \times \frac{\text{ب}^۳}{۳} - \text{ب ع}_\text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

(۵) کو (۴) میں سے تفریق کرنے سے

$$\text{(ا + ب) ع}_\text{ج} = - \frac{\text{و ا ب (ا}^۲ - \text{ب}^۲)}{\text{۳ آ ے (ا + ب)}}$$

اور

$$\text{ع}_\text{ج} = - \frac{\text{و ا ب (ا - ب)}}{\text{۳ آ ے (ا + ب)}} \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

عج کی اس قیمت کو (۳) میں مندرج کرنے سے

$$\text{ما} = - \frac{\text{و ب}}{\text{آ ے (ا + ب)}} \left(\frac{\text{لا}^۳}{۶} - \frac{\text{ا}^۲\text{لا}}{۶} - \frac{\text{ا ب لا}}{۳} \right)$$

$$= \frac{\text{و ب لا}}{\text{آ ے (ا + ب)}} \times \frac{\text{ا}^۲ + \text{۲ ا ب} - \text{لا}^۲}{۶} \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

اور بوجھ کے نیچے ج پر جہاں لا = ا

$$\text{ما}_\text{ج} = \frac{\text{و ا}^۲\text{ب}^۲}{\text{۳ آ ے (ا + ب)}} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

صفحہ ۱۸۶ اعظم انصراف کے مقام پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ ۔ (۲) میں عج کی قیمت رکھنے سے

یا (۷) کو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{و ب}}{\text{آ ے (ا + ب)}} \left(\frac{\text{لا}^۲}{۲} - \frac{\text{ا}^۲}{۶} - \frac{\text{ا ب}}{۳} \right) \quad \ldots (\text{۱۲ا})$$

اور جب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ تو

$$\text{لا}^۲ = \frac{۱}{۳} \text{ا (ا + ۲ ب)}$$

$$\text{لا} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{۲ ا ب}} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{\sqrt{۳}} \sqrt{\text{ل}^۲ - \text{ب}^۲}$$

جس سے لا کی وہ قیمت حاصل ہوتی ہے جس پر انصراف ما اعظم ہے۔

دیکھو لا کی یہ قیمت ا سے کم ہے اگر ب، ا سے کم ہو۔ فصل کے دوسرے حصے کے لیے اس کا متناظر جملہ صحیح نہیں ہوگا کیونکہ لا اس صورت میں ب سے بڑا ہوگا۔ چھوٹے حصے ب کے اندر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ صفر نہیں۔

نیز دیکھو کہ اگر ب کی قیمت $\frac{1}{2}$ل سے صفر تک بدلے تو اعظم انصراف کا محل (لا) صرف $\frac{1}{2}$ل سے $\frac{1}{\sqrt{3}}$ل یا ۰٫۵۷۷ل تک بدلتا ہے یعنی اعظم انصراف کا نقطہ وسط سے شہتیر کے طول کے ۸ فی صدی کے اندر رہتا ہے۔ لا کی اوپر کی قیمت کو (۷) میں مندرج کرنے سے

$$\text{ما}_{\text{اعظم}} = \frac{\text{و ب}\,(\text{ا}^2 + 2\,\text{اب})^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}\ \text{آ ے}\,(\text{ا}+\text{ب})} \ \text{یا}\ \frac{\text{و ب}\,(\text{ل}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}\ \text{آ ے ل}} \quad \ldots\ldots(9)$$

چھوٹے حصہ ب میں ب سے فاصلہ (ا + ب - لا) یا کہو لاَ پر (جو ب سے چھوٹا ہے) کسی نقطے پر (۷) کے متناظر انصراف

$$\text{ما} = \frac{\text{و ا لاَ}}{\text{آ ے}\,(\text{ا}+\text{ب})} \times \frac{\text{ب}^2 + 2\,\text{اب} - \text{لاَ}^2}{6} \quad \ldots\ldots(10)$$

اور (۲ ا) کے متناظر

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\ \text{یا ع} = \frac{\text{و ا}}{\text{آ ے}\,(\text{ا}+\text{ب})}\left(\frac{\text{لاَ}^2}{2} - \frac{\text{ب}^2}{6} - \frac{\text{اب}}{3}\right) \quad \ldots\ldots(11)$$

جو لاَ < ب کی صورت میں کبھی صفر نہیں ہوتا۔

متعدد بوجھ ـــ اگر ایک فصل پر متعدد مرتکز بوجھ ہوں تو کسی نتیجہ نقطے کا انصراف، خواہ وہ کسی بوجھ کا نقطۂ عمل ہو یا کوئی اور نقطہ ہو، اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ ہر ایک بوجھ کی وجہ سے اُس نقطے پر علیحدہ علیحدہ انصراف (۷) یا (۱۰) کی مدد سے معلوم کیے جائیں۔ مساوات (۷) بڑے حصوں کے نقاط کے لیے اور (۱۰) چھوٹے حصوں کے لیے استعمال کی جائے ہر بوجھ کے لیے مبدا اس طرح

انتخاب کیا جائے کہ منتخبہ نقطہ مبداء اور بوجھ کے درمیان ہو۔

کوئی دو بوجھوں کے درمیان ڈھال ا سے فاصلہ لا کی رقوم میں لکھا جا سکتا ہے اور وہ اس طرح کہ (۲ ا) اور (۱۱) کی طرح کی رقموں کا حاصل جمع لیں اور لاَ کی بجائے (ا + ب - لا) لکھیں۔ اگر یہ حاصل جمع صفحہ ۱۸۶
منتخبہ دو بوجھوں کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لیے صفر ہو تو لا کی اس قیمت سے اعظم انصراف کا محل حاصل ہوگا۔ اگر صفر نہ ہو تو اعظم انصراف کسی اور دو بوجھوں کے درمیان واقع ہوگا۔ جن دو بوجھوں کے درمیان اعظم انصراف واقع ہوتا ہے وہ بالعموم محض معائنے سے اس واقعہ کی مدد سے معلوم ہو سکتے ہیں کہ ہر ایک انفرادی بوجھ اپنا اعظم انصراف مرکز سے ایک چھوٹے فاصلے کے اندر پیدا کرتا ہے۔ دفعہ ۸۱ میں ایک زیادہ سادہ طریقہ دیا گیا ہے۔

مثال۔ ۲۰ فٹ فصل کے ایک شہتیر کو سروں پر آزادانہ سہارا گیا ہے اور بائیں سرے سے ۹ فٹ کے فاصلے پر سہاروں کی سطح میں تھونی دی گئی ہے جس کی وجہ سے دو فصل ۹ اور ۱۱ فٹ کے بن گئے ہیں۔ شہتیر پر ۳ ٹن کا ایک بوجھ بائیں سہارے سے ۵ فٹ کے فاصلے پر اور ۷ ٹن کا ایک بوجھ دائیں سرے سے ۴ فٹ کے فاصلے پر ہے۔ تھونی اور سروں کے سہاروں کے ردِ عمل معلوم کرو۔

اگر شہتیر کو تھونی نہ دی جاتی تو ا سے ۹ فٹ کے فاصلے پر نقطہ ج (شکل ۱۱۷) پر انصراف ۳ ٹن کے بوجھ کے لیے مساوات (۱۰) میں ا = ۵، ب = ۱۵، و = ۳ اور لاَ = ۱۱ رکھنے سے

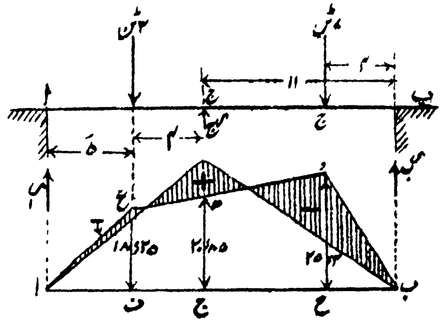
$$\text{ما ج} = \frac{۱۱ \times ۵ \times ۳}{۲۰\,\text{آ ے}} \left\{ \frac{۱۲۱ - (۱۵ \times ۱۰) + ۲۲۵}{۶} \right\} = \frac{۳۴۹٫۲۵}{\text{آ ے}}$$

اور ۷ ٹن کے بوجھ کے لیے مساوات (۷) میں ا = ۱۶، ب = ۴، و = ۷،

لا = ۹ رکھنے سے

$$م_ج = - \frac{۴ \times ۷}{۲۰\, آ\, ے} \left\{ \frac{(۹ \times ۴ \times ۱۶ \times ۲) - (۹ \times ۲۵۶) - ۷۲۹}{۶} \right\}$$

$$= \frac{۶۳۶٫۳}{آ\, ے}$$



شکل ۱۱۷

ان کو جمع کرنے سے شہتیر کا انصراف تھونی کے بغیر

$$\frac{۹۸۵٫۵۵}{آ\, ے}$$

ہوگا۔

اگر ج پر تھونی کا ردِّ عمل $ر_ج$ ہو تو مساوات (۸) کی رو سے
اوپر وار انصراف

$$م_ج = \frac{ر_ج \times ۸۱ \times ۱۲۱}{۳ \times ۲۰ \times آ\, ے} = \frac{۱۶۳٫۳۵\, ر_ج}{آ\, ے}$$

ج پر کے ان دونوں انصرافوں کو مساوی رکھنے سے

$$ر_ج = \frac{۹۸۵٫۵}{۱۶۳٫۳۵} = ۶٫۰۳۱ \text{ ٹن}$$

ا اور ب کے ردِّ عمل آزاد سروں کے گرد معیار لینے سے

حاصل ہونگے۔

$$م_ب = \frac{(۹ \times ۶٫۰۳) - (۱۲ \times ۷) + (۵ \times ۳)}{۲۰} = ۲٫۶۳۵ \text{ ٹن}$$

$$م_ا = ۱۰ - ۶٫۰۳۱ - ۲٫۶۳۵ = ۱٫۳۳۴ \text{ ٹن}$$

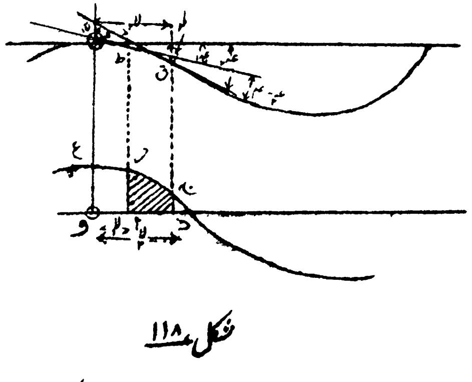
۸۱۔ انصراف اور ڈھال خماؤ کے معیار کے نقشوں سے ــــ

ڈھال ــــ کسی شہتیر کے کسی دو نقطوں کے درمیان ڈھال کا فرق مساوات (۳) دفعہ ۷۷ سے معلوم ہوسکتا ہے۔

$$ع \text{ یا } \frac{فرما}{فرلا} = \int \frac{فر^۲ما}{فرلا^۲} \times فرلا = \int \frac{م}{آ ے} فرلا = \frac{۱}{آ ے} \int م فرلا$$

اگر آ اور ے مستقل ہوں۔

ایک مستقل عمودی تراش کے شہتیر پر دو نقاط ط اور ق کے درمیان (شکل ۱۱۸، جس میں ڈھال اور انصراف بہت مبالغے کے ساتھ دکھائے گئے ہیں) میلان کی تبدیلی $ع_۲ - ع_۱$، جو اِن نقاط پر کے مماسوں کے درمیان کا زاویہ ہے، حسب ذیل ہوگی



شکل ۱۱۸

$$ع_۲ - ع_۱ = \frac{۱}{آ ے} \int_{لا_۱}^{لا_۲} م فرلا \ldots (۱)$$

مقدار $\int_{لا_۱}^{لا_۲} م فرلا$ نقاط ط اور ق کے درمیان خماؤ کے معیار کے نقشے کے رقبے اب ج د کو تعبیر کرتا ہے۔

اگر تکمل کی نچلی حد صفر ہو تو نقطہ و سے جہاں شہتیر اُفقی ہے نقطہ ق تک

جہاں ڈھال عہ$_ب$ ہے، یہ ڈھال عہ$_ب$ میلان کی تبدیلی کے مساوی ہوگا اور اس طرح

$$\text{عہ}_ب = \frac{1}{\text{آ ے}} \int_{\text{لا}_ا}^{\text{لا}_ب} \text{مر فرلا} \quad \text{(جو رقبہ و ع ج د کے تناسب ہے)} \quad \ldots\ldots(۲)$$

اس طرح کسی شہتیر کے دو نقاط کے درمیان ڈھال کی تبدیلی ان کے درمیان خماؤ کے معیار کے نقشے کے رقبے کے متناسب ہے اور کسی صفر ڈھال کے نقطے سے کسی اور نقطے تک خماؤ کے معیار کے منحنی کے تحت کا رقبہ اس نقطے کے ڈھال کے متناسب ہوگا۔ اگر خماؤ کے معیار کا منحنی صفر قیمت سے گزرے تو خماؤ کے معیار کی علامت کی تبدیلی کا بھی خیال رہنا چاہیے۔ اوپر دار تحدب پیدا کرنے والے خماؤ کو ایک جبری علامت دی جاتی ہے جو بالعموم مثبت ہوتی ہے اور نیچے دار تحدب پیدا کرنے والے خماؤ کو مخالف علامت دی جاتی ہے (دیکھو دفعہ ۷۷)۔ لیکن موجودہ باب میں اس کی زیادہ اہمیت نہیں کہ کس کو مثبت کہا جائے۔

پیمانے — اگر خماؤ کے معیار کے نقشے میں ۱ اُفقی انچ ف انچ کو تعبیر کرے، اور ۱ انتصابی انچ ص پونڈ انچ کو تو خماؤ کے معیار کے نقشے کا ۱ مربع انچ ف ص پونڈ (انچ^2) کو تعبیر کریگا اور نیز ڈھال کے زاویہ $\frac{\text{ف ص}}{\text{آ ے}}$ نیم قطری کو تعبیر کریگا اگر آ (انچ^4) کی اکائیوں میں اور ے پونڈ فی مربع انچ میں ہو۔ صفحہ ۱۸۹

انصراف — دفعہ ۷۷ کی مساوات (۲) یعنی

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}$$

سے

$$\text{لا}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{م لا}}{\text{آ ے}}$$

لا = لا$_ا$ اور لا = لا$_ب$ کے درمیان تکمل کرنے سے اور تکمل کے لیے

تکمل بالحصص کا طریقہ اختیار کرنے سے ——

$$\left(\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{ما}\right)_{\text{لا}=\text{لا}_1}^{\text{لا}=\text{لا}_2}=\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2}\frac{\text{مرلا}}{\text{آسے}}\,\text{فرلا}$$

$$=\frac{1}{\text{آسے}}\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2}\text{مرلا فرلا}\ (\text{اگر آسے مستقل ہو})\ \ldots\ldots(۳)$$

یا، $$(\text{لا}_2\text{ع}_2-\text{ما}_2)-(\text{لا}_1\text{ع}_1-\text{ما}_1)=\frac{1}{\text{آسے}}\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2}\text{مرلا فرلا}\ \ldots\ldots\ldots(۴)$$

اگر تکمل کی حدود جن کے درمیان انصراف مطلوب ہے ایسی ہوں کہ دونوں حدود پر لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ صفر ہو (یعنی دونوں حدود پر اجزائے ضربی لا اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ میں سے کوئی نہ کوئی صفر ہو) تو

$$\left(\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{ما}\right)_{\text{لا}=\text{لا}_1}^{\text{لا}=\text{لا}_2}\ \text{بن جاتا ہے}\ -(\text{ما}_2-\text{ما}_1)\ \ldots\ldots\ldots(۵)$$

اور $\frac{1}{\text{آسے}}\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2}\text{مرلا فرلا}$ سے دونوں نقاط کے درمیان شہتیر کے لیول کی تبدیلی حاصل ہوتی ہے۔

مقدار ——

$$\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2}\text{مرلا فرلا}$$

سے لا۱ اور لا۲ کے درمیان خماؤ کے معیار کے نقشے کے رقبے مبدا ۱ کے گرد معیار تعبیر ہوتا ہے۔ اگر یہ رقبہ س ہو اور اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ مبدا سے $\bar{\text{لا}}$ ہو تو $\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2}\text{مرلا فرلا}$ کو س × $\bar{\text{لا}}$ سے تعبیر کرسکتے ہیں۔

یہ مقدار لیول کی تبدیلی کو اسی صورت میں تعبیر کریگی جب کہ $\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$
دونوں حدود پر صفر ہو ۔ حاصل ضرب $\text{لا} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ یا $\text{لا} \times \text{عہ}$ نقطہ لا پر کے
مماس کے اس طول کے انتصابی ظل کو تعبیر کرتا ہے جس کا اُفقی ظل لا ہے ۔ اگر
تکمل کی نچلی حد صفر ہو اور مبداء پر ما صفر ہو تو مقدار

$$\left(\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما}\right)_{\cdot}^{\text{لا}}$$

صفحہ ۱۹۰ لا پر سے کے مماس کے مذکورہ طول کے انتصابی ظل اور لا پر کے انصراف کے
فرق کو تعبیر کریگی، یا بالفاظِ دیگر شہتیر کے انتصابی انصراف کو اِس کے مماس سے
تعبیر کریگی ۔ اس لیے اس صورت میں مبداء سے فاصلہ لا پر انصراف $\text{لا}\,\text{عہ}$
اور $\frac{1}{\text{آے}} \times$ (خاؤ کے معیار کے نقشہ کا رقبہ) کے فرق کے مساوی ہے یعنی

$$= \text{لا}\cdot\text{عہ} - \frac{1}{\text{آے}}\int_{\cdot}^{\text{لا}} \text{مرلا}\;\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

جہاں $\int_{\cdot}^{\text{لا}}$ مرلا فرلا مثبت یا منفی کچھ ہی ہوسکتا ہے ۔

پیمانے ـــ اگر خاؤ کے معیار کے نقشے میں اُفقی انچ ف انچ کو تعبیر کرے
اور ا انتصابی انچ ص پونڈ انچ کو تعبیر کرے اور س مربع انچوں میں اور لآ
انچوں میں ناپا جائے تو حاصل ضرب س × لآ انصراف کو پیمانہ ا انچ کو
$\frac{\text{ف ص}}{\text{آے}}$ انچ پر تعبیر کریگا ۔

استعمال ـــ (و) برآمدہ بیرم، آزاد سرے پر بوجھ و
(دیکھو شکل ۹۵) ـــ اگر مبداء انصراف سے پہلے یا بعد کے آزاد سرے پر
لیا جائے تو

$$\text{لا} = \cdot \text{ پر } \text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \cdot$$

ثابت سرے پر لا = ل اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$ ۔ اس لیے ۔

$$\left(\text{لا}\cdot\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما}\right)_0^{\text{ل}}$$

سے دونوں سروں کے لیول کا فرق با ۔ ما$_{\text{ل}}$ حاصل ہوگا جو

$$\frac{\text{م} \times \bar{\text{لا}}}{\text{آے}}$$

کے مساوی ہوگا جہاں $\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{ول} \times \text{ل}$ اور $\bar{\text{لا}} = \frac{2}{3}\text{ل}$
اس طرح انصراف ۔

$$= \frac{1}{2}\,\text{ول}^2 \times \frac{2}{3}\text{ل} \div \text{آے} = \frac{\text{ول}^3}{3\,\text{آے}}$$

جو نتیجہ (۲) دفعہ ۷۹ کے مطابق ہے ۔

اسی طرح، اگر بوجھ ثابت سرے سے فاصلہ ل$_1$ پر ہو تو $\text{م} = \frac{1}{2}\text{ول}_1^2$،
اور $\bar{\text{لا}} = \text{ل} - \frac{1}{3}\text{ل}_1$ اور اس طرح آزاد سرے کا انصراف

$$= \frac{1}{2}\frac{\text{ول}_1^2}{\text{آے}}\left(\text{ل} - \frac{1}{3}\text{ل}_1\right) = \frac{\text{ول}_1^2\,\text{ل}}{2\,\text{آے}} - \frac{\text{ول}_1^3}{6\,\text{آے}}$$

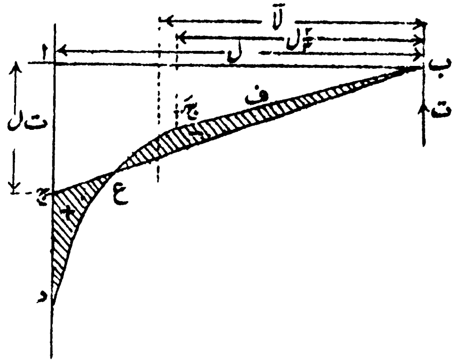
جو نتیجہ (۵) دفعہ ۷۹ کے مطابق ہے اور متفرق بوجھوں کی کسی تعداد پر اس کا اطلاق ہوسکتا ہے ۔

یکساں منقسم بوجھ اٹھائے ہوئے برآمدہ بیرم کا انصراف بھی اسی طرح خماؤ کے معیار کے نقشے (شکل ۱۶۱ ب) سے معلوم ہوسکتا ہے اگر شکل ۱۶۱ ب کے مکافی کمان شانہ کے مرکز ہندسی کا فاصلہ آزاد سرے سے معلوم کرلیا جائے ۔ ورنہ اس رقبے کا صفحہ ۱۹۱
معیار تکمل کے ذریعے معلوم ہوسکتا ہے۔ مبدا ر ا پر لینے سے (شکل ۱۶۱ ب)

$$\frac{1}{\text{آے}}\int_0^{\text{ل}} \text{م}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{\text{و}}{2\,\text{آے}}\int_0^{\text{ل}} \text{لا}^3\,\text{فرلا} = \frac{1}{8}\frac{\text{ول}^4}{\text{آے}}$$

جو نتیجہ (۷) دفعہ ۷۹ کے مطابق ہے ۔

(ب) غیر منتظم طور پر لدا ہوا برآمدہ بیرم ـــــ کسی برآمدہ بیرم پر کوئی غیر منتظم لداؤ ہو تو خماؤ کے معیار کا نقشہ ا ب ف ع د ا (شکل ۱۱۹) کھینچ لینے کے بعد اسی طریقے کا اطلاق کیا جا سکتا ہے۔ آزاد سرے کا انصراف حسبِ سابق ر × لاَ / آ ے سے حاصل ہوگا۔ پیمانے موزوں انتخاب کرنے ہونگے۔ اس صورت میں طریقہ خالص ترسیمی ہو جاتا ہے اور اِس پر مشتمل ہوتا ہے کہ خماؤ کے معیار کے نقشے کو پیمانے پر کھینچا جائے ر کو ناپا جائے اور کسی ایک ترسیمی طریقے سے لاَ معلوم کیا جائے یا دفعہ ۶۸ کی مدد سے منتقل رقبے کے ذریعے حاصل ضرب ر لاَ معلوم کیا جائے۔ قطب ب کے متناظر منتقل رقبہ لیا جائے تو وہ مبداء ب کے ساتھ منحنی ھ × لا کے تحت کے رقبے کو تعبیر کریگا۔



شکل ۱۱۹

اگر غیر منتظم لداؤ متعدد مرتکز بوجھوں پر مشتمل ہو تو مجموعی رقبہ ر کو متعدد مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ سمجھا جائے اور حاصل ضرب ر × لاَ کو ان رقبوں اور آزاد سرے سے ان کے مراکزِ ہندسی کے فاصلوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع سمجھا جائے۔

تھونی دار برآمدہ بیرم۔ غیر منتظم بوجھ ـــــ اگر برآمدہ بیرم کو سرے پر تھونی دی گئی ہو تو فرض کرو کہ ب پر تھونی کا اوپر وار ردِّ عمل ت ہے (شکل ۱۱۹)۔ غیر منتظم لداؤ کی وجہ سے خماؤ کے معیار کا نقشہ ا ب ف ع د ہے اور تھونی کی وجہ سے مثلث ا ب ج ہے، ان کے معین مخالف علامتوں کے ہیں۔ ب کے گرد ان دونوں رقبوں کے معیار مل کر صفر ہونگے کیونکہ مقدار

$\left(\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما}\right)$ حدود صفر اور ل کے درمیان صفر ہے کیونکہ ان حدود پر دونوں مقداریں صفر ہوتی ہیں اس لیے

$$\text{ر} \times \text{لاَ} = \tfrac{1}{2}\,\text{ت ل} \times \text{ل} \times \tfrac{2}{3}\,\text{ل}$$

$$\text{یا}\quad \text{ت} = \frac{3\,\text{ر} \times \text{لاَ}}{\text{ل}^3}$$

یہ ایک عام ضابطہ ہے جو منتظم اور غیر منتظم ہر قسم کے بوجھوں کے لیے درست ہے۔ غیر منتظم بوجھوں کی صورت میں ر × لاَ معلوم کرنے کے لیے ترسیمی عمل اختیار کرنا پڑیگا۔

حاصل خم ؤ کے معیار کا نقشہ شکل نمبر ۱۱۹ میں سایہ دار دکھایا گیا ہے اور ع سے نقطۂ انعطاف حاصل ہوتا ہے۔ حصّے د ج ع اور ع ف ب مخالف علامتوں کے ہیں۔

صفحہ ۱۹۲ ا اور ب کے درمیان کسی نقطہ لا کا انصراف اس طرح حاصل ہوگا کہ لا اور ا میں کے انتصابی خطوط کے درمیان اس نقشے کا جو رقبہ آتا ہے اُس کا معیار لا کے گرد لیا جائے اور رقبوں کی علامتوں کا لحاظ رکھا جائے۔ چونکہ ا سے شمار کیے ہوئے رقبے ڈھال کو تعبیر کرتے ہیں اس لیے ع کی دائیں طرف کسی نقطے پر، جہاں ع کے دائیں طرف کا رقبہ د ج ع کے مساوی ہو، ڈھال صفر ہوگا اور انصراف اعظم ہوگا۔

اگر برآمدہ بیرم کو ا اور ب کے درمیان کسی نقطے پر تھونی دی گئی ہو تو اُوپر کا ضابطہ درست رہیگا بشرطیکہ رقبہ ر اور طول لاَ نقشے کے حصے ا ب ف ع د سے متعلق ہوں جو ا اور تھونی کے درمیان ہے۔ لاَ تھونی سے ناپا جائیگا اور ل تھونی کا فاصلہ ا سے ہوگا۔

(ج) شہتیر جو ایک ھی لیول پر دو نقطوں پر سہارا گیا ہو۔ ایک سرے ا پر مبدا رستے لینے سے (اشکال نمبر ۱۱۶ اور نمبر ۱۲۰)۔

$$\frac{\text{م}\,\bar{\text{لا}}}{\text{آ ے}} = \frac{1}{\text{آ ے}}\int_{0}^{\text{ل}} \text{م لا فرلا} = \text{ل} \times \text{ع}_{\text{ب}} = \left(\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما}\right)_{0}^{\text{ل}}$$

جہاں م خماؤ کے معیار کے نقشے کا رقبہ ہے اور $\bar{\text{لا}}$ اس کے مرکز ہندسی کا فاصلہ ا سے ہے، یا م × $\bar{\text{لا}}$ مبدا ا کے گرد رقبے کے معیار کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے

$$\text{ع}_{\text{ب}} = \frac{\text{م} \times \bar{\text{لا}}}{\text{آ ے} \times \text{ل}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٦)$$

اسی طرح ب کے گرد معیار لینے سے —

$$\text{ع}_{\text{ا}} = -\frac{\text{م}(\text{ل} - \bar{\text{لا}})}{\text{آ ے} \times \text{ل}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٧)$$

اور اس کی علامت $\text{ع}_{\text{ب}}$ کے مخالف ہوگی۔ دفعہ ۷۷ میں علامتوں کے متعلق جو قرارداد دی گئی ہے اُس کی رو سے م اس شہتیر کے لیے منفی ہوگا جس پر نیچوار بوجھ ہوں جن سے نیچوار تحدب پیدا ہوتا ہے۔ اس طرح $\text{ع}_{\text{ا}}$ مثبت ہوگا اور $\text{ع}_{\text{ب}}$ منفی۔

اس طرح (مقداریں) سہاروں پر کے ڈھال ان کے درمیان خماؤ کے معیار کے رقبے کے متناسب ہیں اور ان کی باہمی نسبت اس رقبے کے مرکز ہندسی سے ان کے فاصلوں کی نسبت کا معکوس ہے۔ اور دیکھو یہ وہی نسبت ہے جو سہاروں کے ردِّ عملوں میں مجموعی بوجھ کے مرکز ہندسی کے حوالے سے ہوگی۔

اگر خماؤ کے معیار کا رقبہ ا سے ایک نقطہ ہ تک، جو ا سے دائیں طرف فاصلہ لا پر، $\text{م}_{\text{لا}}$ ہو جو نیچوار تحدب کی صورت میں منفی ہوگا تو لا پر ڈھال $\text{ع}_{\text{لا}}$ ہو تو

$$\text{ع}_{\text{لا}} = \text{ع}_{\text{ا}} + \frac{1}{\text{آ ے}}\int_{0}^{\text{لا}} \text{م فرلا} \;\text{یا}\; \text{ع}_{\text{ا}} + \frac{\text{م}_{\text{لا}}}{\text{آ ے}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

جو اعظم انصراف کی تراش پر صفر ہوگا اور یہ صفر قیمت میں سے گزرےگا کیونکہ $\text{م}_{\text{لا}}$ منفی ہے۔

چونکہ (لا فرما/فرلا - ما)ʘ^لا = لا عہ - ما = ۱/آ ے ∫ʘ^لا مر لا فرلا

ما = لا عہ - ۱/آ ے ∫ʘ^لا مر لا فرلا .... (۸ ل)

صفحہ ۱۹۳ اور (۸) سے عہ کی قیمت درج کرنے سے

ما = لا عہ + لا/آ ے ∫ʘ^لا مر فرلا - ۱/آ ے ∫ʘ^لا مر لا فرلا

= لا عہ + لا عہ/آ ے - ۱/آ ے × (مر کا معیار ا کے گرد) .... (۹)

یا ل پر انصراف —

ما = (لا × ا پر کا ڈھال) + ۱/آ ے (مر کا معیار ل کے گرد) .... (۱۰)

جس سے شہتیر کے کسی نقطے کا انصراف معلوم ہوگا - دوسری رقم منفی ہے - اور (۸ ل) کی مدد سے لکھ سکتے ہیں —

ما = (لا × ل پر ڈھال) - ۱/آ ے (مر کا معیار ا کے گرد) ...... (۱۱)

یاد رہے کہ مر ایک منفی مقدار ہے -

غالباً ضابطہ کی شکل (۱۰) شکل (۱۱) سے زیادہ سہل ہوگی کیونکہ عہ مستقل ہے - (۸) سے ظاہر ہے کہ اگر ل اعظم انصراف کے نقطے سے آگے ہے تو ل پر کا ڈھال منفی ہوگا - دیکھو (۱۰) میں دوسری رقم منفی ہے اور شہتیر کے ل پر کے انتصابی ہٹاؤ کو ا پر کے مماس سے محسوب کرتی اور (۱۱) کی دوسری رقم ا پر کے انتصابی ہٹاؤ کو ل پر کے مماس سے - اوپر وار تحدب کی صورت میں ان دوسری رقموں کی علامتیں بدل جائینگی - طالب علم ان مختلف رقموں کے ہندسی مفہوم کو مختلف حالات کے شہتیروں کے خاکوں میں دکھائیں -

برآویختہ سرے — کسی برآویختہ سرے کے کسی نقطے کا انصراف (مثلاً جیسا کہ اشکال ۶۷، ۶۸، ۷۲ یا ۷۳ میں ہے) ایک برآمدہ بیرم کی طرح معلوم ہوسکتا ہے بشرطیکہ سہارے پر کے ڈھال سے پیدا ہونے والے انصراف کو (جبری طور پر) جمع کر دیا جائے۔ برآویختہ شہتیر میں سہاروں کے درمیان کے نقاط کے لیے اوپر کے ربط درست رہتے ہیں بشرطیکہ رقبوں، رقبوں کے معیاروں، وغیرہ، کی علامتوں کا لحاظ رکھا جائے۔ غیر منتظم لداؤ کی صورت میں ان عملوں کو تقریباً انجام دیا جاسکتا ہے اور رقبوں کے معیار (ر × لا) ان کے مراکز ہندسی معلوم کیے بغیر دفعہ ۶۸ کی مدد سے "مشتق رقبے" کے ذریعے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

جب ڈھال اور انصراف کے لیے اوپر کے جملے جو ہر قسم کے لداؤ کے لیے درست ہیں خماؤ کے معیار کے نقشے کے ابعاد کی رقوم میں لکھ لیے جائیں تو جبری جملے حاصل ہوتے ہیں جس طرح کے جملے کہ دیگر طریقوں سے مختلف لداؤں کے لیے معلوم کیے جاچکے ہیں مثلاً ایک شہتیر پر ایک اکیلا مرتکز بوجھ ہو تو اس کے کسی نقطے کا انصراف اور ڈھال اس طریقے پر دفعہ ۸۰ کے طریقے کے متبادلاً حاصل ہوسکتا ہے۔

غیر مرکزی بوجھ — شکل ۱۱۶ اور اوپر کی مساوات (۷) کی مدد سے ا اور ب کے گرد خماؤ کے معیار کے نقشے کے رقبے کے معیار کو دو حصوں میں تقسیم کرنے سے

$$ع_ا = \frac{۱}{ے ا (ا+ب)} \left\{ \left(\frac{ا}{۲} ب \frac{و ا ب}{ا+ب} \times \frac{۲}{۳} ب \right) + \frac{۱}{۲} ا \frac{و ا ب}{ا+ب} \left(ب + \frac{ا}{۳} \right) \right\}$$

$$= \frac{و ا ب (ا + ۲ ب)}{۶ آ ے (ا+ب)} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۲)$$

اور (۸) سے ا اور ج کے درمیان — صفحہ ۱۹۴

$$ع_ج = ع_ا - \frac{۱}{آ ے} \times \text{رقبہ ط ا ۷} = ع_ا - \frac{۱}{آ ے} \left(\frac{و ب لا}{ا+ب} \times \frac{لا}{۲} \right)$$

$$=\frac{\text{و ب}}{\text{آ ے (ا + ب)}}\left(\frac{\text{ا}^{۲}\text{+ ۲ ا ب}}{۶}-\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right)\ldots\ldots\ldots(۱۳)$$

جو (۲ ا) دفعہ ۸۰ کے مطابق ہے

$$\text{ع}_{\text{لا}}=\text{۰ پر}\qquad \text{لا}^{۲}=\tfrac{۱}{۳}(\text{ا}^{۲}\text{+ ۲ ا ب})$$

نیز (۱۰) سے ا اور ج کے درمیان

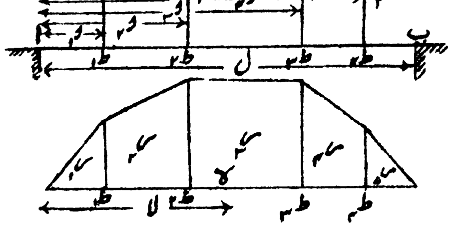
$$\text{ما}=\text{ع}_{\text{ا}}\times\text{لا}-\frac{\text{و ب لا}}{\text{آ ے (ا + ب)}}\times\frac{\text{لا}}{۲}\times\frac{\text{لا}}{۳}$$

$$=\frac{\text{و ب لا}}{\text{آ ے (ا + ب)}}\left(\frac{\text{ا}^{۲}\text{+ ۲ ا ب - لا}^{۲}}{۲}\right)\ldots\ldots\ldots(۱۴)$$

جو (۷) دفعہ ۸۰ کے مطابق ہے۔ اور لا = ا کے لیے

$$\text{ما}_{\text{ج}}=\frac{\text{و ا}^{۲}\text{ب}^{۲}}{\text{۳ آ ے (ا + ب)}}\ldots\ldots\ldots(۱۵)$$

متعدد بوجھ — اگر متعدد انتصابی بوجھ و، و، و، و، ا سے فاصلوں ا، ا، ا، ا پر نقاط ط، ط، ط، ط پر ہوں (شکل نمبر ۱۲۰) تو خماؤ کے معیار کا نقشہ دفعہ ۵۸ کے مطابق کھینچا جا سکتا ہے یا دفعہ ۵۶ کے مطابق محسوب کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ط، ط، ط وغیرہ پر خماؤ کے معیار علی الترتیب م، م، م وغیرہ ہیں۔ فرض کرو کہ خماؤ کے معیار کے نقشے کا رقبہ سر ہے



شکل نمبر ۱۲۰

اور اس کو ط، ط، وغیرہ میں سے گزرنے والے انتصابی خطوط کے ذریعے پانچ حصوں س، س، س وغیرہ میں تقسیم کرو جیسا کہ دکھایا گیا ہے (شکل نمبر ۱۲۰)

تب $س_۱ = \frac{و_۱ م_۱}{۲}$ ، $س_۲ = \frac{م_۱ + م_۲}{۲} (ل_۲ - ل_۱)$ ، وغیرہ

نچزار بوجھوں کے لیے سب رقبے منفی ہونگے۔

تب $$ع = - \frac{۱}{آ سے} \, \frac{س (ل - لآ)}{ل}$$

جہاں لآ رقبہ س کے مرکزِ ہندسی کا مبدار ا سے فاصلہ ہے اور ل - لآ اس کا فاصلہ ب سے ہے۔

مقدار س (ل - لآ) یعنی رقبہ س کا معیار ب کے گرد اُن مثلثی رقبوں کے معیاروں کا مجموعہ لیا جاسکتا ہے جو ہر ایک بوجھ کے علیحدہ خماؤ کے معیار کے نقشے کو تعبیر کرتے ہیں۔ اس طرح مقدار $ع_۰$ اوپر کے جملے (۱۲) کے جیسے چار جملوں کا حاصل جمع ہوگی۔

اس طرح $ط_۱$ ، $ط_۲$ ، $ط_۳$ وغیرہ پر کے ڈھال حسبِ ذیل ہونگے:- غو ۱۹۵

$$ع_۱ = ع_۰ + \frac{س_۱}{آ سے} ، \quad ع_۲ = ع_۰ + \frac{س_۱ + س_۲}{آ سے} ، \text{ وغیرہ}$$

ہر صورت میں دوسری رقم منفی ہے۔

یہ امر کہ کس حصے میں ڈھال صفر ہوتا ہے ڈھال سے یا ا سے بوجھوں تک کے مجموعی رقبوں سے آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے۔ مثلاً اگر صفر ڈھال $ط_۲$ اور $ط_۳$ کے درمیان واقع ہو تو $ط_۲$ اور $ط_۳$ پر کے ڈھال مخالف علامتوں کے ہونگے۔

یعنی $-(س_۱ + س_۲)$ چھوٹا ہوگا $\frac{س (ل - لآ)}{ل}$ سے

یا $-(س_۱ + س_۲ + س_۳)$ بڑا ہوگا $\frac{س (ل - لآ)}{ل}$ سے

اگر صفر ڈھال ا سے فاصلہ لا پر نقطہ ک پر ہو تو چونکہ اس پر خماؤ کا معیار $= \text{م}_2 + \frac{\text{لا} - \text{و}_2}{\text{و}_3 - \text{و}_2}(\text{م}_3 - \text{م}_2)$، اور ڈھال صفر ہے، اس لیے ا سے ک تک کا رقبہ $\text{س}\,\frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{ل}}$ کے مساوی ہوگا۔ یعنی

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \left(\text{م}_2 + \frac{\text{لا} - \text{و}_2}{\text{و}_3 - \text{و}_2}\cdot\frac{\text{م}_3 - \text{م}_2}{2}\right)(\text{لا} - \text{و}_2) = \text{س}\cdot\frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{ل}}$$

اس مساوات درجہ دوم سے لا معلوم ہو سکتا ہے۔

اعظم انصراف کی مقدار اوپر کی مساوات (۱۱) سے آسانی سے معلوم ہو جائیگی یعنی

$-\frac{1}{\text{اے}}$ (ا ک پر خماؤ کے معیار کے نقشے کا معیار ا کے گرد) اور اس جملے کی قیمت آسانی سے اس طرح معلوم ہو سکتی ہے کہ ا ک پر کے رقبے کو مثلثوں میں تقسیم کیا جائے، مثلاً طے میں سے وتر کھینچ کر۔ کسی اور مقام کا انصراف مساوات (۱۰) سے حاصل ہوگا۔ معطیات عددی ہوں تو یہ طریقہ اوپر کے جبری جملوں سے بہت مختصر ہوگا۔ اسی مسئلے کے لیے دوسرے خالص ترسیمی طریقے دفعہ آئندہ میں دیے گئے ہیں۔

دیگر صورتیں —— ایسے شہتیروں سے جن پر یکساں پھیلے ہوئے بوجھ فصل کے ایک حصے پر ہوں انہیں طریقوں سے آسانی سے بحث کی جا سکتی ہے۔ خماؤ کے معیار کے نقشے کو رقبوں کے معیاروں کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لیے علیحدہ حصوں میں تقسیم کرنا ہوگا اور لداؤ کی شرح کی یکایک تبدیلی یا عدم تسلسل کے مقامات پر تکمل کے مناسب حدود اختیار کرنا ہوگا۔

مثال ۱ —— دفعہ ۸۰ کے آخر کی مثال کو خماؤ کے معیار کے نقشے کے

ذریعے حل کرو:۔

خماؤ کے معیار کے نقشے کو ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے (دیکھو دفعہ ۵۸) یا محسوب کرکے (دیکھو دفعہ ۵۷) حاصل کرو۔ اس کو شکل ۱۷۱ میں دکھایا گیا ہے جس میں ا ع د ب دونوں بوجھوں کے لیے بے سہارے فصل ا ب کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہے۔ تب مساوات (۷) سے

$$\text{ع}_\text{ا} = -\frac{۱}{\text{آ ے}}\ (\text{رقبہ ا ع د ب کا معیار ب کے گرد}) \div \text{ا ب}$$

اس معیار کو محسوب کرنے کی آسانی کے لیے د ف کو ملا کر (منفی) رقبہ ا ع د ب کو چار مثلثوں میں تقسیم کرو۔ ٹن اور فٹ کو اکائی لینے سے شکل ۱۹۶

$$\text{عم} = \frac{۱}{۲۰\ \text{آ ے}}\Big[\Big(\frac{۴ \times ۲۵٫۴}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times ۴\Big) + \Big\{\frac{۱۱ \times ۲۵٫۴}{۲} \times \Big(۴ + \frac{۱۱}{۳}\Big)\Big\} +$$

$$\Big\{\Big(\frac{۱۱ \times ۱۸٫۲۵}{۲}\Big) \times (۴ + \frac{۲۲}{۳})\Big\} + \Big\{\Big(\frac{۵ \times ۱۸٫۲۵}{۲}\Big) \times \Big(۱۵ + \frac{۵}{۳}\Big)\Big\}\Big]$$

$$= \frac{۱۵۵٫۲}{\text{آ ے}}$$

اور ع ھ ج ف کو ایک وتر ف ھ سے تقسیم کرکے (۱۰) سے

$$\text{ما}_\text{ج} = \frac{۱۵۵٫۲}{\text{آ ے}} \times ۹ - \frac{۱}{\text{آ ے}}\Big[\Big(\frac{۴ \times ۲۰٫۸۵}{۲} \times \frac{۴}{۳}\Big) + \Big(\frac{۴ \times ۱۸٫۲۵}{۲} \times \frac{۸}{۳}\Big) +$$

$$\Big\{\Big(\frac{۵ \times ۱۸٫۲۵}{۲}\Big)\Big(۴ + \frac{۵}{۳}\Big)\Big\}\Big]$$

$$\text{ما}_\text{ج} = \frac{۱۳۹۷ - ۴۱۱٫۵}{\text{آ ے}} = \frac{۹۸۵٫۵}{\text{آ ے}}\ \ (\text{نیچے کو})$$

ج پر ایک بوجھ س ج اوپر وار ہو تو (۱۵) کی رُو سے

$$\text{ما}_\text{ج} = \frac{۱۲۱ \times ۸۱ \times \text{س}_\text{ج}}{۲۰ \times ۳\ \text{آ ے}} = \frac{۱۶۳٫۲۵\ \text{س}_\text{ج}}{\text{آ ے}}\ \ (\text{اوپر کو})$$

ج پر کے ان دونوں انصرافوں کو مساوی رکھنے سے

$$ر_ج = \frac{۹۸۵٫۵}{۱۶۳٫۳۵} = ۶٫۰۳ \text{ ٹن}$$

$$ر_ا = \frac{(۱۱ \times ۶٫۰۳) - (۳ \times ۱۵) + (۴ \times ۷)}{۲۰} = ٫۳۳۴ \text{ ٹن}$$

$$ر_ب = ۱۰ - ٫۳۳۴ - ۶٫۰۳ = ۶٫۶۳۶ \text{ ٹن}$$

اب اُوپر کے طریقوں کو حاصل ضرب کے معیار کے نقشے پر (جو شکل ۱۱۷ میں سایہ دار دکھایا گیا ہے) استعمال کر کے ا اور ج کے درمیان یا ج اور ب کے درمیان کسی نقطے پر انصراف اور اعظم انصراف کا محل، وغیرہ، معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثال ۲ — شکل ۱۱۸ کے شہتیر کے آزاد سروں کا انصراف معلوم کرو۔ اوپر کی مساوات (۶) اور (۷) سے دائیں طرف نچوار ڈھال

$$ع_ا = -ع_ب = -\frac{۱}{آ\,ے} \times \frac{ل_۲}{۲} \times \frac{۱}{ل_۲} \int_۰^{ل_۲} \left\{ \frac{و\,ل_۱^۲}{۲} - \frac{و}{۲}(ل_۲\,لا - لا^۲) \right\} ف\,لا$$

$$= -\frac{۱}{۲\,آ\,ے} \left(\frac{و\,ل_۱^۲\,ل_۲}{۲} - \frac{و\,ل_۲^۲}{۸} \times \frac{۲}{۳} \times ل_۲ \right)$$

$$= -\frac{و\,ل_۲}{۲۴\,آ\,ے} \left(۶\,ل_۱^۲ - ل_۲^۲ \right)$$

جو منفی ہوگا اگر $ل_۲ > ل_۱ \sqrt{۶}$

آزاد سرے پر نچوار انصراف

$$= -ع\,ل_۱ + \frac{و\,ل_۱^۴}{۸\,آ\,ے} = \frac{و\,ل_۱}{۲۴\,آ\,ے} \left(۶\,ل_۱^۲\,ل_۲ - ل_۲^۳ + ۳\,ل_۱^۳ \right)$$

صفحہ ۱۹۷ وسط میں اوپر دار انصراف حسب ذیل ہوگا:—

(سروں کے بوجھوں کی وجہ سے اوپر وار انصراف) ۔ (سہاروں کے درمیان کے بوجھ کی وجہ سے نیچوار انصراف)

اور یہ پہلی رقم کے لیے (۱۱) کو استعمال کرنے سے

$$= \frac{1}{آ\,ے}\left(۰ + \frac{و\,ل_۱^۲}{۲} \times \frac{ل_۲}{۲} \times \frac{ل_۲}{۴}\right) - \frac{۵}{۳۸۴}\,\frac{و\,ل_۲^۴}{آ\,ے}$$

$$= \frac{و\,ل_۲^۲}{۱۶\,آ\,ے}\left(ل_۱^۲ - \frac{۵}{۲۴} ل_۲^۲\right)$$

جو مثبت ہوگا اگر $ل_۲ < \sqrt{۴{,}۸}\; ل_۱$

مثال ۳ — دفعہ ۵۹ کی مثال ۲ میں (دیکھو شکل ۲ـ۶) ب پر اور ا اور ج کے وسط میں انصراف معلوم کرو۔

ا پر مبداء لو ۔ س$_ا$ = ۱۰ ٹن اس لیے (۶) کی رو سے ب کی طرف نیچوار ڈھال

$$ع_ج = \frac{1}{۱۶\,آ\,ے}\int_۰^{۱۶}\left(۱۰\,لا + \frac{لا^۲}{۲}\right) لا\, فرلا = \frac{1}{۱۶\,آ\,ے}\left(\frac{۱۰}{۳} لا^۳ + \frac{لا^۴}{۸}\right)_۰^{۱۶}$$

$$= \frac{۲۱۸۴۵{,}۳}{۱۶\,آ\,ے}$$

اس میں آ (فٹ)^۴ میں اور ے ٹن فی مربع فٹ میں ہے

$$ب \text{ پر انصراف} = \left(\frac{۲۱۸۴۵}{۱۶\,آ\,ے} \times ۸\right) + \frac{۸ \times ۸ \times ۸ \times ۳۲}{۳\,آ\,ے}$$

$$+ \frac{۸ \times ۸ \times ۸ \times ۸}{۸\,آ\,ے}$$

$$= \frac{۱۶۸۹۶}{آ\,ے} \text{ فٹ}$$

(اگر آ اور ے انچ کی اکائیوں میں ہوں تو ب پر کا انصراف

$$= ۱۷۲۸ \times \frac{۱۶۸۹۶}{\text{آ ے}} \text{ (انچ)}$$

مبدار کو ا اور ج کے وسط میں لینے سے اور لا کو ج کی طرف مثبت لینے سے۔

$$\text{م} = ۱۰\,(۸ + \text{لا}) + \tfrac{۱}{۲}\,(۸ + \text{لا})^{۲} = \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + ۱۸\,\text{لا} + ۱۱۲ \text{ ٹن فٹ}$$

اور مبدا سے ج تک مساوات (۴ و) کے استعمال سے مبدار پر اوپر وار انحراف

$$= ۸ \times \frac{۲۱۸۴۵٫۳}{۱۶\,\text{آ ے}} - \frac{۱}{\text{آ ے}} \int_{۰}^{۸} \left(\frac{\text{لا}^{۳}}{۲} + ۱۸\,\text{لا}^{۲} + ۱۱۲\,\text{لا}\right) \text{فرلا}$$

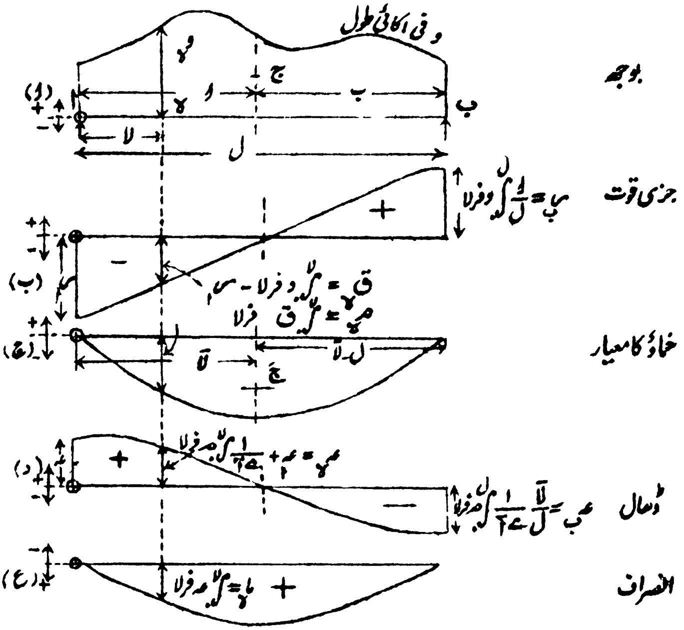
$$= \frac{۱}{\text{آ ے}}\,(۱۰۹۲۲ - ۷۱۶۸) = \frac{۳۷۵۴}{\text{آ ے}} \text{ فٹ}$$

یا $= ۱۷۲۸ \times \frac{۳۷۵۴}{\text{آ ے}}$ انچ اگر آ (انچ)^{۴} میں اور ے ٹن فی مربع انچ میں ہو۔

۸۲ — دیگر ترسیمی طریقے —

پہلا طریقہ — دفعہ ۷۷ کی پانچ مساواتوں سے فوراً انحراف، ڈھال، وغیرہ، بوجھ کی تقسیم کے منحنی سے معلوم کرنے کا ایک ترسیمی طریقہ سوجھتا ہے۔ اگر شہتیر کے طول کو اساسی خط مان کر ان پانچ مقداروں و، ق، م، ع اور ما کو (دیکھو دفعہ ۷۷) ترسیم کیا جائے تو ہر ایک منحنی اپنے سے ماسبق منحنی کے تکمل کو تعبیر کریگا یعنی کسی منحنی کے کسی دو معینوں کا فرق ماسبق منحنی کے متناظر معینوں کے درمیان کے رقبے کے متناسب ہوگا۔ اس لیے اگر پہلا منحنی دیا ہوا ہو تو دوسرے صفحہ ۱۹۸
منحنی رقبوں کو ناپ کر یعنی ترسیمی تکمل کے ذریعے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ شکل ۱۲۱ میں اس طرح کے پانچ منحنی ایک شہتیر کے لیے دکھائے گئے ہیں جو دونوں سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا ہے۔ سروں پر جزئی قوتیں اور ڈھال صفر نہیں لیکن ان کی قیمت معلوم کرنے کا طریقہ

سمجھایا جاچکا ہے اور یہ قیمتیں شکل ۱۲۱ میں دکھائی گئی ہیں۔ ج اور جَ علی الترتیب لداؤ اور خماؤ کے معیار کے نقشوں کے مرکزِ ہندسی ہیں۔



شکل ۱۲۱

طالب علم مختلف منحنیوں کی ٹھیک ٹھیک مماثلت کا مطالعہ کریں۔ اس ترسیمی طریقے کے استعمال میں پیمانے بے حد اہمیت رکھتے ہیں۔ ان کا حساب ذیل میں بتایا جاتا ہے۔

برآمدہ بیرم کی صورت میں ق اور م کے منحنی (شکل ۱۲۱ کے منحنیوں (ب) اور (ج) کے متناظر) آزاد سرے پر صفر سے شروع ہونے چاہییں (سوائے اس صورت کے کہ سرے پر کوئی مرتکز بوجھ ہو) اور عہ اور نا کے منحنی (شکل ۱۲۱ کے منحنیوں (د) اور (ع) کے متناظر)

ثابت سرے پر صفر سے شروع ہونے چاہییں۔

شکل ۱۲۱ کے لیے پیمانے ——— فصل پر طولی پیمانہ ا انچ کو ف انچ، آ (انچ)^{۴} میں، ے پونڈ فی مربع انچ میں۔

(ا) معین، ق پونڈ فی طولی انچ = ا انچ

∴ ا مربع انچ رقبہ ف ق پونڈ بوجھ کو تعبیر کریگا۔

(ب) معین، (ا) کے ن مربع انچ = ا انچ = ن، ف، ق پونڈ صفحہ ۱۹۹

∴ ا مربع انچ رقبہ ن ف ق^{۲} پونڈ انچ کو تعبیر کریگا۔

(ج) معین، (ب) کے م مربع انچ = ا انچ = م نَ ف^{۲} ق پونڈ انچ

∴ ا مربع انچ رقبہ م ن ف^{۳} ق پونڈ (انچ)^{۲} کو تعبیر کریگا۔

(د) معین، (ج) کے نَ مربع انچ = ا انچ = $\frac{\text{نَ م ن ف}^{۳}\text{ ق}}{\text{آ ے}}$ نیم قطری۔

∴ ا مربع انچ رقبہ $\frac{\text{نَ م ن ف}^{۴}\text{ ق}}{\text{آ ے}}$ انچ کو تعبیر کریگا۔

(ع) معین، (د) کے مَ مربع انچ = ا انچ = $\frac{\text{مَ نَ م ن ف}^{۴}\text{ ق}}{\text{آ ے}}$ انچ

اگر انچ کو ق پونڈ فی طولی انچ کی بجائے قوت کا پیمانہ انچ کو ق پونڈ ہو تو انصراف کا پیمانہ انچ کو $\frac{\text{مَ نَ م ن ف}^{۴}\text{ ق}}{\text{آ ے}}$ ہوگا۔

دوسرا طریقہ ——— یہ غیر منتظم قسم کے لداؤں کے لیے غالباً بہترین طریقہ ہے۔ مساواتوں ———

$$\text{و} = \frac{\text{فر}^{۲}\text{م}}{\text{فرلا}^{۲}} \text{ اور } \text{م} \times \frac{۱}{\text{آ ے}} = \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$$

یا شکل ۱۲۱ کے نقشوں سے معلوم ہوتا ہے کہ خماؤ کے معیار (م) اور انصراف (ما) میں وہی ربط پایا جاتا ہے جو بوجھ فی اکائی طول (و) اور خماؤ کے معیار میں پایا جاتا ہے۔ اس لیے فصل کو اساسی خط مان کر ما کا منحنی خماؤ کے

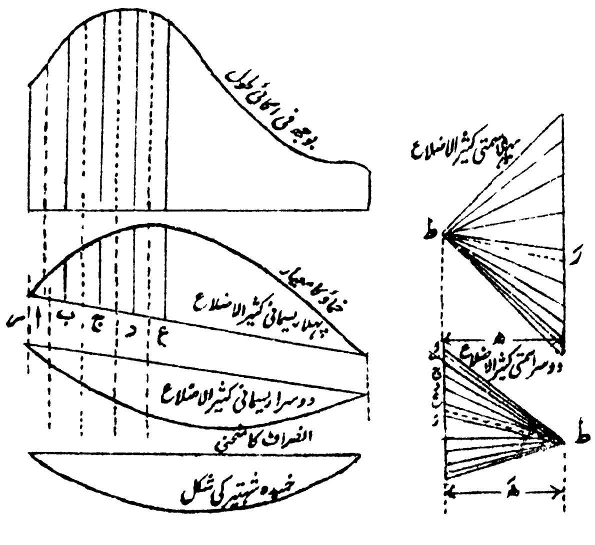
معیار کے نقشے سے اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے جس طرح خماؤ کے معیار کا نقشہ لداؤ کے نقشے سے یعنی ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے (دیکھو دفعہ ۵۸) ۔ اگر خماؤ کے معیار کے نقشے کو ایک لداؤ کا نقشہ سمجھا جائے تو اس سے حاصل ہونے والا ریسمانی کثیر الاضلاع وہ کثیر الاضلاع ہوگا جس کو انصراف کا منحنی اندر کی طرف مس کریگا اور جو انصراف کے منحنی سے جتنا چاہیں تقرب حاصل کر سکتا ہے ۔

منقسم بوجھ کی صورت میں (دفعہ ۵۸) یہ ضروری تھا کہ لداؤ کے نقشے کو حصوں میں تقسیم کیا جائے (جو بہتر ہے کہ انتصابی پٹیاں ہوں) اور بوجھ کے ہر ایک حصے کو اس کے مرکزِ ہندسی پر مرتکز مانا جائے۔ اسی طرح خماؤ کے معیار کے نقشے کو، خواہ وہ منقسم بوجھ سے حاصل ہوا ہو یا مرتکز بوجھوں سے، حصوں میں تقسیم کرنا ہوگا (دیکھو شکل ۱۲۲) اور رقبے کے ہر ایک حصے کو ایک قوت سمجھا جائے جو اس رقبے کے مرکزِ ہندسی میں سے عمل کرتی ہے ۔ ایک اور قطب ط انتخاب کیا جاتا ہے اور طول اب، ب ج، ج د، د ع، وغیرہ، خماؤ کے معیار کے نقشے کے رقبوں کے متناسب قائم کیے جاتے ہیں - ان رقبوں کے مرکزِ ہندسی خطوط اب، ب ج، ج د، د ع، وغیرہ، پر ہیں - دوسرے ریسمانی کثیر الاضلاع سے جس کے اضلاع ط سے اشعاع کرنے والے خطوط کے متوازی ہونگے انصراف کا منحنی تقریبی طور پر حاصل ہوگا - حقیقی منحنی وہ ہوگا جو اس کثیر الاضلاع کے اندر کھینچا جائے کیونکہ انصرافی منحنی کے کسی دو تراشوں پر کے مماسوں کو ان تراشوں کے درمیان کے خماؤ کے معیار کے نقشے کے مرکزِ ہندسی کے انتصاباً نیچے متقاطع ہونا چاہیے ۔

انصراف شدہ شہتیر کی شکل دکھانے کے لیے انصرافی منحنی کو شہتیر کے متوازی یعنی ایک افقی اساس پر کھینچنا چاہیے - یہ اس طرح کیا جا سکتا ہے کہ دوسرے سمتی کثیر الاضلاع کو دوبارہ ایک نئے قطب کے ساتھ

صفحہ ۲۰۰ کھینچا جائے جو ر کی اُفقی سیدھ میں ہو اور ایک نیا ریسمانی کثیر الاضلاع اس کے تناظر کھینچا جائے یا یہ کیا جاسکتا ہے کہ دوسرا ریسمانی کثیر الاضلاع جو حاصل ہوا تھا اُس کے معینوں کو ایک اُفقی اساسی خط پر قائم کیا جائے۔

یہ طریقہ یہاں دکھائے ہوئے سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے علاوہ دوسری صورتوں پر بھی قابلِ اطلاق ہے بشرطیکہ خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل کیا جا چکا ہو۔ اگر ایک شہتیر کے مختلف حصوں میں متضاد انحنا پائے جائیں یعنی انحنا علامت بدلے، مثلاً جیسا کہ ایک برآویختہ یا دربستہ شہتیر میں ہوتا ہے (دیکھو باب ۷) تو سمتی کثیر الاضلاع میں انتصابی سمتیوں کو ان کی جو علامت ہو وہ لگانی چاہیے۔ اگر خماؤ کے معیار کے نقشے کے ایک قسم کے



شکل ۱۲۳

رقبوں کو نیچوار سمتیوں سے تعبیر کیا جائے تو مخالف قسم (یا علامت) کے رقبوں کو اُوپر وار سمتیوں سے تعبیر کرنا چاہیے۔

پیمانے —— اگر طولی اُفقی پیمانہ ا انچ کو ف انچ ہو اور قوت کا پیمانہ

انچ کو ق پونڈ ہو اور پہلے سمتی کثیر الاضلاع کا اُفقی قطبی فاصلہ ھ انچ ہو تو خماؤ کے معیار کے نقشے کے معینوں کا پیمانہ انچ کو ف × ق × ھ پونڈ انچ ہوگا جیسا کہ دفعہ ۵۸ میں ہے۔ خماؤ کے معیار کے نقشے کا ایک مربع انچ ف² ق ھ پونڈ (انچ)² کو تعبیر کریگا اور اگر دوسرے سمتی کثیر الاضلاع کا اُفقی قطبی فاصلہ ھَ انچ ہو اور اس کے لیے سمتی پیمانہ انچ کو خماؤ کے معیار کے نقشے کے م مربع انچ ہو تو انصرافی منحنی آ ے × ما کو پیمانہ انچ کو م ف³ ق ھ ھَ پونڈ (انچ)³ پر تعبیر کریگا یعنی ما کو پیمانہ

$$\text{انچ کو}\ \frac{\text{م ف}^{3}\ \text{ق ھ ھَ}}{\text{آ ے}}\ \text{انچ}$$

پر تعبیر کریگا جہاں آ (انچ)⁴ میں اور ے پونڈ فی مربع انچ میں ہے۔ صفحہ ۲۰۱

اگر اراؤ مسلسل ہو جیسا کہ شکل ۱۲۲ میں ہے اور اس کے لیے قوت کا پیمانہ انچ کو ف پونڈ کی بجائے انچ کو ق پونڈ فی طولی انچ اختیار کیا جائے تو آخر میں پیمانہ انچ کو $\frac{\text{م ف}^{4}\ \text{ق ھ ھَ}}{\text{آ ے}}$ انچ ہوگا۔ اگر قوت کی اکائی ٹن ہو تو ے کو بھی اسی اکائی میں بیان کرنا چاہیے اور دیگر ترمیمات ظاہر ہیں۔

۸۳ ۔ متغیر تراش کے شہتیر ــــ اب تک جن ڈھالوں اور انصرافوں سے بحث کی گئی ہے وہ مستقل تراش کے شہتیروں کے لیے تھے جس کی وجہ سے دفعہ ۷۷ کے ربط (۳)

$$\text{ء} = \int \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}\,\text{فرلا}\ \text{کی شکل}\ \text{ء} = \frac{1}{\text{آ ے}} \int \text{م فرلا}\ \text{ہوگئی تھی ۔}$$

لیکن اگر آ مستقل نہ ہو، صرف ے مستقل ہو تو

$$\text{ء} = \frac{1}{\text{ے}} \int \frac{\text{م}}{\text{آ}}\,\text{فرلا}$$

اور مساوات (۱) دفعہ ۸۱ ہو جائیگی ۔

$$\text{عم}_{۲} - \text{عم}_{۱} = \frac{۱}{\text{ہے}} \int_{\text{لا}_{۱}}^{\text{لا}_{۲}} \left(\frac{\text{م}}{\text{آ}}\right) \text{فرلا}$$

اور مساوات (۳) دفعہ ۸۱ ہوجائیگی ۔

$$\left(\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما}\right)_{\text{لا}=\text{لا}_{۱}}^{\text{لا}=\text{لا}_{۲}} = \frac{۱}{\text{ہے}} \int_{\text{لا}_{۱}}^{\text{لا}_{۲}} \frac{\text{م لا}}{\text{آ}}\, \text{فرلا}$$

اس طرح ڈھال اور انصراف معلوم کرنے کے جو طریقے دفعات ۷۸، ۷۹، ۸۱، ۸۲ میں اختیار کیے گئے ہیں وہ متغیر تراش کے شہتیروں کے لیے بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں بشرطیکہ سارے عمل میں م کی بجائے $\frac{\text{م}}{\text{آ}}$ استعمال کیا جائے ۔

اگر آ اور م دونوں (شہتیر پر فاصلہ) لا کے سادہ جبری تفاعل ہوں تو بالعموم تحلیلی طریقے اختیار کیے جا سکتے ہیں (دیکھو ذیل میں مثال ۱)، لیکن اگر دونوں میں سے ایک یا دونوں بے قاعدہ طور پر بدلیں تو ترسیمی طریقے اختیار کرنے چاہییں ۔ چنانچہ دفعہ ۸۱ کی مساوات (۳) کو لکھ سکتے ہیں —

$$\left(\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما}\right)_{\text{لا}_{۱}}^{\text{لا}_{۲}} = \frac{\text{ر}\ \bar{\text{لا}}}{\text{ہے}}$$

جہاں ر یا $\int_{\text{لا}_{۱}}^{\text{لا}_{۲}} \frac{\text{م}}{\text{آ}}\, \text{فرلا}$ = منحنی $\frac{\text{م}}{\text{آ}}$ کے تحت کا رقبہ اور $\bar{\text{لا}}$ = اس کے مرکز ہندسی کا فاصلہ مبدا سے ہے — معیار ر × $\bar{\text{لا}}$ مشتق رقبے کے ذریعے آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۶۸) ۔ جس صورت میں کہ مقدار آ شہتیر کی کسی تراش پر یکایک بدل جائے لیکن شہتیر کے دو یا زیادہ حصوں میں علٰحدہ علٰحدہ ایک سادہ جملے سے تعبیر ہوتی ہو

تو اس تراشش کے اندر عدم تسلسل کے اثرات کو نظر انداز کر کے تکملیوں کو مختلف حصّوں میں تقسیم کرکے اور مناسب حدود اختیار کرکے معمولی تکمل کا
طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے (دیکھو ذیل میں مثال ۲)۔ ہر قسم کے تھونی دار صفحہ ۲۰۲
شہتیروں کی صورت میں تھونی کے نقطے پر تھونی کے ردِّ عمل کے اُوپر دار اور بوجھ کے ہموار انصراف کو مساوی رکھ کر مسئلے کو حل کرنے کا طریقہ اب بھی درست رہیگا۔ متغیر تراش کی صورت میں انصراف اوپر کے قاعدے کے مطابق محسوب کیے جائینگے۔ مثلاً کسی طرح کے لداؤ کے برآمدہ بیرم کے سرے کی تھونی پر پڑنے والے بوجھ کی جیساکہ شکل ۱۱۹ میں ہے مساوات کو حسب ذیل طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ اگر ھ خماؤ کا معیار آزاد سرے ب سے فاصلے کی رقوم میں ہو تو

$$\int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \frac{\text{ھ}}{\text{آ}}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \frac{\text{ت}\,\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \text{ت}\int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{آ}}\,\text{فرلا}$$

یعنی
$$\text{ت} = \int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \frac{\text{ھ}\,\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} \div \int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{آ}}\,\text{فرلا}$$

ترسیماً حل کرنے کے لیے فرض کرو کہ م منحنی $\frac{\text{ھ}}{\text{آ}}$ کے تحت کا رقبہ ہے اور لاَ اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ب سے ہے۔ تھونی پر کوئی بوجھ ت۱ فرض کرو اور فرض کرو کہ ت = و ت۱۔ سرے کے بوجھ ت۱ کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ کھینچو (جو ایک خطِ مستقیم ہوگا)۔ ہر ایک معین (ت۱ × لا) کو آ پر تقسیم کرو تو منحنی $\frac{\text{ت}_{\text{۱}}\times\text{لا}}{\text{آ}}$ حاصل ہوگا۔ فرض کرو کہ اس منحنی کے تحت کا رقبہ مَ ہے اور اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ب سے لاَ ہے۔ تب اوپر کی مساوات ترسیمی شکل میں حسب ذیل ہو جائیگی۔

$$\text{م} \times \text{لاَ} = \text{و} \times \text{مَ} \times \text{لاَ}'$$
$$\text{و} = \text{م}\,\text{لاَ} \div \text{مَ}\,\text{لاَ}'$$

اور $\quad \text{ت} = \text{ا ت}_1$

معیاروں س × لآ اور سَ × لآَ کو ترسیماً بہت آسانی سے ب کو قطب لے کر دفعہ ۶۸ کے مشتق رقبے کے طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں ۔ چونکہ سب نقشوں کے لیے اساس (ل) ایک ہی ہے اس لیے مساوات س × لآ = ا × سَ × لآَ حسب ذیل ہوجاتی ہے :-

س کا پہلا مشتق رقبہ = ا × (سَ کا پہلا مشتق رقبہ)

پیمانوں کی زیادہ اہمیت نہیں کیونکہ ا صرف ایک نسبت ہے ۔ البتہ اتنا ضروری ہے کہ مفروضہ ردّعمل ت۱ کے خماؤ کے معیار کے نقشے میں معین ت۱ ل کو اسی پیمانے پر قائم کیا جائے جو لداؤ کے خماؤ کے معیار کے لیے اختیار کیا گیا ہے ۔ دیگر صورتوں کے لیے ان طریقوں کا زیادہ عام استعمال دفعات ۸۸ اور ۹۱ میں ملیگا ۔

مثال ۱ — ایک مستدیر تراش کا برآمدہ بیرم ثابت سرے سے آزاد سرے تک قطر میں ایک یکساں گاؤدمی رکھتا ہے ۔ آزاد سرے پر قطر ثابت سرے کا نصف ہے ۔ آزاد سرے پر ایک بوجھ و لٹکا ہوا ہو تو اس سرے پر ڈھال اور انصراف معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ ثابت سرے ع پر قطر ق ہے ۔ ثابت سرے کو مبداء مانو (شکل ۱۱۳) ۔ تب ع سے فاصلہ لا پر قطر

$$= \text{ق}\left(1 - \frac{\text{لا}}{2\text{ل}}\right) \ \text{یا}\ \frac{\text{ق}}{2\text{ل}}\left(2\text{ل} - \text{لا}\right)$$

صفحہ ۲۰۳ ع پر تعدیلی محور کے گرد $\text{آ}_1 = \frac{\pi}{64}\text{ق}^4$ (دیکھو دفعہ ۶۶) اس لیے ع سے فاصلہ لا پر —

$$\text{آ} = \frac{\pi}{64}\text{ق}^4\left(1 - \frac{\text{لا}}{2\text{ل}}\right)^4 \ \text{یا} = \frac{\text{آ}_1}{16\,\text{ل}^4}\left(2\text{ل} - \text{لا}\right)^4$$

اور $\text{م} = \text{و}(\text{ل} - \text{لا})$ (دیکھو شکل ۵۹)

$$\text{تب}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\ \text{یا}\ \text{ع} = \frac{1}{\text{ے}}\int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{م}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} = \frac{16\,\text{و}\,\text{ل}^{2}}{\text{آ}_{\text{،}}\,\text{ے}}\int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{ل}-\text{لا}}{(2\text{ل}-\text{لا})^{3}}\,\text{فرلا}$$

یا جزوی کسور میں —

$$\text{ع} = \frac{16\,\text{و}\,\text{ل}^{2}}{\text{آ}_{\text{،}}\,\text{ے}}\int_{0}^{\text{لا}}\left\{\frac{-\text{ل}}{(2\text{ل}-\text{لا})^{3}} + \frac{1}{(2\text{ل}-\text{لا})^{2}}\right\}\text{فرلا}$$

$$= \frac{16\,\text{و}\,\text{ل}^{2}}{\text{آ}_{\text{،}}\,\text{ے}}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\text{ل}}{(2\text{ل}-\text{لا})^{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\text{ل}-\text{لا})} - \frac{1}{12\,\text{ل}^{2}}\right)$$

مستقل رقم $-\frac{1}{12\,\text{ل}^{2}}$ اس طرح ہے کہ $\text{ع} = 0$ جب کہ $\text{لا} = 0$

اس طرح $\text{لا} = \text{ل}$ کے لیے

$$\text{ع}_{\text{،}} = \frac{4}{3}\,\frac{\text{و}\,\text{ل}^{2}}{\text{آ}_{\text{،}}\,\text{ے}}$$

$$\text{اب}\quad \text{ما} = \int_{0}^{\text{لا}} \text{ع}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{16\,\text{و}\,\text{ل}^{2}}{\text{آ}_{\text{،}}\,\text{ے}}\left(-\frac{1}{4}\,\frac{\text{ل}}{(2\text{ل}-\text{لا})^{2}} + \frac{1}{2(2\text{ل}-\text{لا})} - \frac{\text{لا}}{12\,\text{ل}^{2}} - \frac{5}{24\,\text{ل}}\right)$$

$$\text{اور}\ \text{لا} = \text{ل}\ \text{پر}\qquad \text{ما}_{\text{،}} = \frac{2}{3}\,\frac{\text{و}\,\text{ل}^{3}}{\text{آ}_{\text{،}}\,\text{ے}}$$

اگر صرف انصراف مطلوب ہوتا تو دفعہ ۱۸ کی مساوات (۳) میں ترمیم کرکے آزاد سرے آ (شکل ۱۱۳) پر مبداء لے کر انصراف کو صرف ایک تکمل سے حاصل کیا جاسکتا تھا:—

$$\left(\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما}\right)_{0}^{\text{ل}} = \text{ما}_{\text{،}} = \frac{1}{\text{ے}}\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{م}\,\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا}$$

$$\text{ما}_1 = \frac{16\,\text{و}\,\text{ل}^4}{\text{آ}_1\,\text{ے}} \int_0^{\text{ل}} \frac{\text{لا}^2}{(\text{ل}+\text{لا})^4}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{16\,\text{و}\,\text{ل}^4}{\text{آ}_1\,\text{ے}} \int_0^{\text{ل}} \left\{ \frac{\text{ل}^2}{(\text{ل}+\text{لا})^4} - \frac{2\,\text{ل}}{(\text{ل}+\text{لا})^3} + \frac{1}{(\text{ل}+\text{لا})^2} \right\} \text{فرلا}$$

$$= \frac{16\,\text{و}\,\text{ل}^4}{\text{آ}_1\,\text{ے}} \left\{ -\frac{1}{3}\,\frac{\text{ل}^2}{(\text{ل}+\text{لا})^3} + \frac{\text{ل}}{(\text{ل}+\text{لا})^2} - \frac{1}{(\text{ل}+\text{لا})} \right\}_0^{\text{ل}}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\text{و}\,\text{ل}^3}{\text{آ}_1\,\text{ے}} \quad \text{(حسبِ سابق)}$$

مثال ۲۔ ـــ ایک مستدیر تراش کے برآمدہ بیرم کا ثابت سرے سے وسط تک ایک مستقل قطر ہے اور وسط سے آزاد سرے سے اس کا نصف ہے ۔ آزاد سرے پر ایک وزن و کی وجہ سے اس سرے پر انصراف معلوم کرو۔

اگر آ_1 = موٹے (ثابت) سرے پر معیارِ جمود

تو $\frac{1}{16}\text{آ}_1$ = پتلے (آزاد) " " "

صفحہ۴۰ دفعہ ۹۷ کی طرح ثابت سرے ع پر مبدا لینے سے (شکل ۱۱۳)
ع سے (وسطی نقطہ) ج تک ـــ

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{و}}{\text{آ}_1\,\text{ے}}(\text{ل} - \text{لا})$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و}}{\text{آ}_1\,\text{ے}}\left(\text{ل}\,\text{لا} - \frac{1}{2}\text{لا}^2\right) + 0$$

$$\text{اور لا} = \frac{\text{ل}}{2} \text{ پر} \qquad \text{ـج} = \frac{3}{8}\,\frac{\text{و}\,\text{ل}^2}{\text{آ}_1\,\text{ے}}$$

$$\text{ما} = \int \text{عہ فرلا} = \frac{\text{و}}{۲\ \text{آ}_{،}\text{ے}}\left(\text{ل لا}^{۲} - \tfrac{۱}{۳}\text{لا}^{۳}\right) + ۰$$

اور $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ پر $\quad \text{ما}_{ج} = \frac{۵\ \text{و ل}^{۳}}{۴۸\ \text{آ}_{،}\text{ے}}$

ج سے (آزاد سرے) ۱ تک

$$\text{عہ} = \frac{۱۶\text{و}}{\text{آ}_{،}\text{ے}}\left(\text{ل لا} - \tfrac{۱}{۲}\text{لا}^{۲}\right) + ۱$$

لیکن $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ پر $\quad \text{عہ} = \frac{۳}{۸}\frac{\text{و ل}^{۲}}{\text{آ}_{،}\text{ے}}$ (اوپر سے)

اس لیے $\quad ۱ = -\frac{۴۵}{۸}\frac{\text{و ل}^{۲}}{\text{آ}_{،}\text{ے}}$

$$\text{ما} = \int \text{عہ فرلا} = \frac{\text{و}}{\text{آ}_{،}\text{ے}}\Big\{۸\left(\text{ل لا}^{۲} - \tfrac{۱}{۳}\text{لا}^{۳}\right) - \frac{۴۵}{۸}\text{ل}^{۲}\text{لا} + \text{ب}\Big\}$$

لیکن $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ پر $\quad \text{ما} = \frac{۵}{۴۸}\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{آ}_{،}\text{ے}}$ (اوپر سے)

اس لیے $\quad \text{ب} = \frac{۵}{۴}\text{ل}^{۳}$

$$\text{ما} = \frac{\text{و}}{\text{آ}_{،}\text{ے}}\Big\{۸\left(\text{ل لا}^{۲} - \tfrac{۱}{۳}\text{لا}^{۳}\right) - \frac{۴۵}{۸}\text{ل}^{۲}\text{لا} + \frac{۵}{۴}\text{ل}^{۳}\Big\}$$

∴ $\text{لا} = \text{ل}$ پر $\quad \text{ما}_{۱} = \frac{۲۳}{۲۴}\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{آ}_{،}\text{ے}}$

صرف انصراف معلوم کرنا ہو تو آزاد سرے ۱ (شکل ۱۳۲الف) پر مبداء لے کر دفعہ ۸۱ کے طریقے کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ م = ولا، اور تکمل کے

دو حصّے کرنے سے جن میں ایک میں آ کی قیمت آ۱ ہے اور دوسرے میں $\frac{1}{2}$ آ۱ :-

$$\text{ما} = \frac{1}{\text{ے}} \int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{م لا}}{\text{آ}}\, \text{فرلا} = \frac{1}{\text{آ}_1 \text{ے}} \int_{\frac{\text{ل}}{2}}^{\text{ل}} \text{و لا}^2\, \text{فرلا} + \frac{16}{\text{آ}_1 \text{ے}} \int_{0}^{\frac{\text{ل}}{2}} \text{و لا}^2\, \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{آ}_1 \text{ے}} \left[\frac{1}{3} \left\{ \text{ل}^3 - \left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^3 \right\} + \frac{16}{3} \left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^3 \right] = \frac{23}{24} \frac{\text{و ل}^3}{\text{آ}_1 \text{ے}}$$

یکساں مضبوطی کے مستطیلی شہتیروں کا انصراف —

خماؤ کی یکساں مضبوطی کی شرط (دفعہ ۷۰) $\frac{\text{م}}{\text{مق}} = \text{ز}$ = مستقل ہے جہاں مق (تراش کا مقیاس) گہرائی ق کے مستطیلی شہتیر کے لیے = آ ÷ $\frac{\text{ق}}{2}$

اس لیے $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}} = \frac{1}{\text{ے}} \cdot \frac{2\text{ز}}{\text{ق}}$ .... (۱)

صفحہ ۲۰۵ متغیر عرض — اگر ق مستقل ہو تو ظاہر ہے کہ انحنا $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ مستقل ہوگا اور شہتیر مڑ کر ایک دائرے کی قوس بن جائیگا جس کے انصراف دفعہ ۷۶ کے طریقے سے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

یا بالراست تکمل سے معلوم کرنے کے لیے طول ل کے برآمدہ بیرم کے لیے جس پر کوئی لداؤ ہو اور مبدا ار کو دیوار پر لینے سے اعظم ڈھال (آزاد سرے پر)

$$= \frac{2\text{ز ل}}{\text{ے ق}} \text{ یا } \frac{\text{م}_1 \text{ل}}{\text{آ}_1 \text{ے}} \qquad \text{.......... (۲)}$$

جہاں م۱ اور آ۱ کسی خاص تراش مثلاً ثابت سرے پر ہیں جہاں م اور آ کی قیمت بڑی سے بڑی ہوتی ہے اور اعظم انصراف

$$= \frac{\text{ز ل}^2}{\text{ے ق}} \text{ یا } \frac{\text{م}_1 \text{ل}^2}{2\text{آ}_1 \text{ے}} \qquad \text{.......... (۳)}$$

ایک ایسے شہتیر کی صورت جو سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا ہو

اور جس پر بوجھ شہتیر کے وسط کے گرد تشاکل ہو اوپر کی برآمدہ بیرم کی صورت سے اس طرح اخذ کی جاسکتی ہے کہ مبدا کو وسط میں لیں اور ل کی جگہ $\frac{\text{ل}}{۲}$ لکھیں اور اس صورت میں مر۰ اور آ۰ شہتیر کی وسطی تراش کے ہونگے۔

متغیر گہرائی — اگر عرض مستقل ہو اور گہرائی بدلے تو

$$\text{ز} = \frac{\text{مر}}{\text{مق}} = \frac{\text{مر}_۰}{\text{مق}_۰} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{مق}_۰}{\text{مق}} = \frac{\text{مر}_۰}{\text{مر}}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{ق}_۰^۲}{\text{ق}^۲} = \frac{\text{مر}_۰}{\text{مر}} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{\text{ق}} = \frac{۱}{\text{ق}_۰}\sqrt{\frac{\text{مر}}{\text{مر}_۰}}$$

جہاں $\text{مق}_۰ = \frac{۱}{۶}\,\text{ض ق}_۰^۲$ اور $\text{مق} = \frac{۱}{۶}\,\text{ض ق}^۲$

ض مستقل عرض ہے، ق متغیر گہرائی جس کی اعظم قیمت ق۰ ہے جو مق۰ اور مر۰ کے تناظر ہے۔ اس طرح (۱) یہ بن جاتی ہے :—

$$\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = \frac{۲\,\text{ز}}{\text{ے ق}_۰}\sqrt{\frac{\text{مر}}{\text{مر}_۰}} \qquad \text{.............(۴)}$$

$$\text{اور} \quad \text{عہ} = \frac{۲\,\text{ز}}{\text{ے ق}_۰}\int\sqrt{\frac{\text{مر}}{\text{مر}_۰}}\,\text{فرلا} \qquad \text{.............(۵)}$$

خاص صورتوں میں تکمل کے ایک موزوں مستقل کا اضافہ کیا جائیگا اور تکمل اس پر منحصر ہوگا کہ مر، لا کا کونسا تفاعل ہے۔

پھر انصراف کے لیے $\text{ما} = \int \text{عہ فرلا}$

مثلاً ایک برآمدہ بیرم میں جس کے سرے پر بوجھ و ہو (شکل ۱۱۳) مبدا ع پر لینے سے $\text{مر} = \text{و}(\text{ل} - \text{لا}) = \text{مر}_۰\,\frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{ل}}$ ۔ اس لیے

ڈھال اور انصراف کی اعظم قیمتیں (جو آزاد سرے پر ہونگی) حسب ذیل ہونگی:-

$$\text{ع}_\text{ا} = \frac{۲\,\text{و ل}^۲}{\text{آ ے}} \;\text{یا}\; \frac{۲\,\text{م}_\text{ا}\text{ل}}{\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{۴\,\text{ز ل}}{\text{ے ق}} \qquad \text{......(۶)}$$

$$\text{ما}_\text{ا} = \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{و ل}^۳}{\text{آ ے}} \;\text{یا}\; \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{م}_\text{ا}\text{ل}^۲}{\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{۴}{۳}\,\frac{\text{ز ل}^۲}{\text{ے ق}} \qquad \text{......(۷)}$$

صفحہ ۲۰۶ ایک یکساں منقسم بوجھ ول ہو (شکل ۱۱۰ء) تو $\text{م} = \frac{\text{و}}{۲}(\text{ل} - \text{لا})^۲$

$\text{ع}_\text{ا}$ لا تناہی ہوگا، یعنی مماسی خط انتصابی ہوگا اور انصراف

$$\text{ما}_\text{ا} = \frac{\text{و ل}^۳}{۲\,\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{\text{م}_\text{ا}\text{ل}^۲}{\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{۲\,\text{ز ل}}{\text{ے ق}}$$

سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے جس پر ایک وسطی بوجھ و ہو

(شکل ۱۱۱ء) ل کے لیے $\frac{\text{ل}}{۲}$ اور و کے لیے $\frac{\text{و}}{۲}$ لکھنے سے مساوا توں

(۶) اور (۷) سے

$$\text{ع}_\text{ب} = \text{ع}_\text{ا} = \frac{\text{و ل}^۲}{۴\,\text{آ ے}} \;\text{یا}\; \frac{\text{م}_\text{ا}\text{ل}}{\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{۲\,\text{ز ل}}{\text{ے ق}} \qquad \text{......(۸)}$$

$$\text{ما}_\text{ج} = \frac{\text{و ل}^۳}{۴۸\,\text{آ ے}} \;\text{یا}\; \frac{\text{م}_\text{ا}\text{ل}^۲}{۶\,\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{\text{ز ل}^۲}{۳\,\text{ے ق}} \qquad \text{......(۹)}$$

اور ایک یکساں منقسم بوجھ ول ہو (شکل ۱۱۲ء) تو

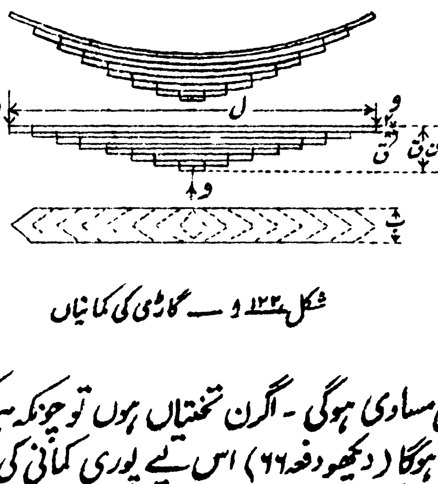
$$\text{م} = \frac{\text{و}}{۲}\left(\frac{\text{ل}^۲}{۴} - \text{لا}^۲\right) = \text{م}_\text{ا}\,\frac{\text{ل}^۲ - ۴\,\text{لا}^۲}{\text{ل}^۲}$$

$$\text{ع}_\text{ب} = \text{ع}_\text{ا} = \frac{\pi}{۳۲}\,\frac{\text{و ل}^۳}{\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{\pi}{۴}\,\frac{\text{م}_\text{ا}\text{ل}}{\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{\pi}{۲}\,\frac{\text{ز ل}}{\text{ے ق}}$$

$$\text{ما}_\text{ج} = \frac{۱}{۴۴}\left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right)\frac{\text{و ل}^۳}{\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{۱}{۴}\left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right)\frac{\text{م}_\text{ا}\text{ل}^۲}{\text{آ}_\text{ا}\text{ے}} \;\text{یا}\; \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right)\frac{\text{ز ل}^۲}{\text{ے ق}}$$

تکمل کے ذریعے ان قیمتوں کی تصدیق طالب علم کے لیے بطور مشق کے چھوڑ دی جاتی ہے۔

گاڑی کی کمانی کا انصراف ——— گاڑی کی کمانی بالعموم ایک مستقل عرض (ض) اور متغیر گہرائی کا شہتیر ہوتا ہے جو ایک دوسرے پر رکھی ہوئی متعدد تختیوں سے بنا ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک کی موٹائی ق ہوتی ہے (دیکھو شکل ۱۲۲ ا)۔ تختیوں کی تعداد وسط سے سروں کی طرف کم ہوتی جاتی ہے۔ بوجھ و وسط پر لیا جاتا ہے اور دونوں سرے سہارے جاتے ہیں۔



شکل ۱۲۲ و ——— گاڑی کی کمانیاں

ہر ایک تختی کا انحنا ابتداء ایک ہی انحنا $\frac{1}{ر}$ ہوتا ہے اور برداشتی بوجھ عموماً وہ ہوتا ہے جو تمام تختیوں کو اکٹھا سیدھا کردے اس طرح ہر ایک تختی میں انحنا کی تبدیلی مساوی ہوگی۔ اگر ن تختیاں ہوں تو چونکہ ہر ایک کی تراش کا مقیاس $\frac{1}{6}$ ض ق^2 ہوگا (دیکھو دفعہ ۶۶) اس لیے پوری کمانی کی تراش کا مقیاس وسط میں $\frac{ن}{6}$ ض ق^2 ہوگا نہ کہ $\frac{1}{6}$ ض (ن ق)^2 کیونکہ پٹیاں علیحدہ ہیں اور اگر ہر ایک پٹی میں برداشتی زور ز ٹن فی مربع انچ ہو تو چونکہ خم کا معیار $\frac{1}{4}$ و ل ہے (دیکھو دفعہ ۶۳) اس لیے

$$ز = \frac{1}{4}\, و\, ل \div \frac{ن}{6}\, ض\, ق^2 = \frac{3}{2}\, \frac{و\, ل}{ن\, ض\, ق^2} \quad ....(10)$$

اگر زور کی یہ حدت کمانی کی ہر عرضی تراش کی ہر ایک تختی میں ایک ساتھ واقع کرنا مقصود ہو تو تراش کا مقیاس ہر جگہ خم کے معیار کے یعنی سرے سے وسط تک سرے سے فاصلے کے متناسب ہونا چاہیے۔ لیکن

کسی تراش پر تراش کا مقیاس اس تراش پر کی تختیوں کی تعداد کے متناسب ہے اس لیے تختیوں کی تعداد سروں سے وسط تک فاصلے کے تناسب سے بڑھنی چاہیے (دیکھو شکل ۱۲۲ ا)۔ ہر تختی کے سرے کے اتنے طول کو جو اس سے بعد کی (یعنی اس سے چھوٹی) تختی سے نکلا ہوا ہے عرض میں گاؤدم کردینا چاہیے (جیساکہ شکل ۱۲۲ ا میں دکھایا گیا ہے) تاکہ تختیوں کی تعداد کی ایکدم تبدیلی کے نقاط کے درمیان معیارِ مزاحمت کی تبدیلی اُسی مسلسل شرح کے ساتھ ہو۔ اس طرح ہر تختی میں ہر تراش پر کھال کے زور کی ایک ہی حدت ز پیدا ہوگی اور ہر ایک تراش میں ہر ایک تختی سے ایک ہی معیارِ مزاحمت $\frac{1}{6}$ ز ض ق^{2} ظہور میں آئیگا جو ایک خماؤ کے معیار $\frac{1}{\text{ن}}\,\frac{\text{و ل}}{4}$ کے متناظر ہوگا۔

تب صریحاً انحنا کی تبدیلی $\frac{1}{\text{ر}}$ جو ز $\div$ $\frac{\text{ق ے}}{2}$ (یا $\frac{\text{م}}{\text{آ ے}}$ یا $\frac{1}{\text{ن}}\,\frac{\text{و ل}}{4} \div \frac{\text{ے ض ق}^{3}}{12}$) ہے ہر ایک تختی کے لیے ایک ہی ہونی چاہیے۔ ایک وسطی بوجھ کے تحت وسطی انصراف سب میں لمبی تختی کے انصراف سے معلوم ہوسکتا ہے جو دفعہ ۷۶ کی رُو سے

$$= \frac{1}{8}\,\frac{\text{م ل}^{2}}{\text{آ ے}} = \frac{1}{8}\,\frac{\text{و ل}}{4\text{ن}} \times \frac{\text{ل}^{2}}{\text{ے}} \times \frac{12}{\text{ض ق}^{3}}$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{ن ے ض ق}^{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

فی الحقیقت تختیوں کے درمیان کی رگڑ کی وجہ سے انصراف زیادہ بوجھ کی صورت میں اس سے کم ہوگا اور کم بوجھ کی صورت میں زیادہ ہوگا۔

مثال ۳ ـــ ایک گاڑی کی فولادی کمانی کا طول ۳۰ انچ رکھنا ہے اور اس کو $\frac{1}{2}$ ٹن کا وسطی بوجھ برداشت کرنا ہے۔ اگر تختیاں ۳ انچ چوڑی

اور ۱/۴ انچ موٹی ہوں تو کتنی تختیاں درکار ہونگی اگر زور کو ۱۲ ٹن فی مربع انچ تک محدود رکھنا ہے۔ کمانی کا وسط میں انصراف کیا ہوگا۔ ہر ایک تختی اپنے سے نیچے کی تختی سے دونوں سروں پر کتنی نکلی رہیگی اور ہر ایک پٹی کو کس نصف قطر کی گولائی دینی چاہیے۔

اگر ن تختیاں استعمال کی جائیں تو

$$۱۲ \times ن \times \frac{۱}{۶} \times ۳ \times \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times ۳۰$$

ن = ۱۰ تختیاں

رگڑ کو نظر انداز کر کے وسطی انصراف

$$= \frac{۳}{۸} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۶۴ \times ۲۷۰۰۰}{۳ \times ۱۳۰۰۰ \times ۱۰} = \frac{۵۴}{۶۵} = ٫۸۳ \text{ انچ}$$

صرف نصف کمانی پر غور کرنے سے نکلے ہوئے سرے

$$= ۱۵ \div ۱۰ = ۱٫۵ \text{ انچ}$$

اگر ہر پٹی برداشتی بوجھ پر سیدھی ہوتی ہو تو ہر پٹی کا نصف قطر انحنا صفحہ ۲۰۸
سب میں لمبی پٹی سے شکل ۱۰۹ سے معلوم کر سکتے ہیں۔ ط ط² یعنی (٫۸۳)² کو نظر انداز کرنے سے

$$۰٫۸۳ \times ۲ ر = ۱۵ \times ۱۵$$

اس لیے $ر = ۱۳۵٫۵$ انچ

یا سب میں لمبی پٹی سے اس طرح :—

$$\frac{۱}{ر} = \frac{م}{ے آ} = \frac{۱}{۱۰} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times ۳۰ \times \frac{۱۲}{۱۳۰۰۰ \times ۳ \times \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}}$$

$$= \frac{۱}{۱۳۵٫۵}$$

سوالات نمبر ۶

۱۔ ایک ریل کا دھرا ۴ انچ قطر کا ہے اور پہیوں کا درمیانی فاصلہ ۴ فٹ ۸½ انچ

ہے۔ دونوں دُھرا بکسوں کے مرکز پہیوں کے مرکزوں سے ۶ انچ باہر ہیں اور ہر ایک دُھرا بکس پر ایک ۵ ٹن کا بوجھ ہے۔ دُھرے کے مرکز کا اوپروار انصراف معلوم کرو۔ (سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

۲ - I تراش کا ایک شہتیر جس کی گہرائی ۱۴ انچ ہے ایک ۲۰ فٹ کے فصل کے سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا ہے۔ اگر عمودی تراش کے رقبے کا معیارِ جمود ۴۴۰ (انچ)^4 ہو تو سہاروں کے وسط میں کتنا بوجھ لٹکایا جاسکتا ہے بغیر اس کے کہ انصراف $\frac{1}{4}$ انچ سے زیادہ ہو اور خماؤ کے زور کی حدت کیا ہوگی؟ کس یکساں منقسم بوجھ سے یہی انصراف پیدا ہوگا اور اس صورت میں خماؤ کے زور کی اعظم حدت کیا ہوگی۔ (سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

۳ - ایک شہتیر سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا ہے اور اس پر ایک بوجھ و یکساں منقسم ہے۔ ایک وسطی اُستوار تھونی سروں کے سہاروں سے کتنی نیچے رکھی جائے کہ اس پر مجموعی بوجھ کا نصف بوجھ پڑے۔ اگر اس طرح رکھی ہوئی تھونی لچکدار ہو اور اس کو اکائی فاصلہ دبانے کے لیے دباؤ س درکار ہو تو اس پر کتنا بوجھ پڑیگا اگر سروں کے سہارے استوار رہیں۔

۴ - ایک شہتیر دو سہاروں پر ٹکا ہوا ہے جن کا درمیانی فاصلہ ۲۰ فٹ ہے اور شہتیر پر ایک منقسم بوجھ ہے جس کی حدت ایک سہارے پر ۱ ٹن فی فٹ ہے اور ہموار طور پر بدلتی ہوئی دوسرے سہارے پر ۴ ٹن فی فٹ ہے۔ اگر تراشی رقبے کا معیارِ جمود ۲۶۵۴ (انچ)^4 ہو اور سے کی قیمت ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہو تو اعظم انصراف کا محل اور اس کی مقدار معلوم کرو۔

۵ - ایک برآمدہ بیرم کے آزاد سرے پر بوجھ و ہے اور وسط میں ایک تھونی ثابت سرے کی سطح میں ہے۔ تھونی پر بوجھ اور آزاد سرے کا انصراف معلوم کرو۔

۶ - ایک برآمدہ بیرم پر وسط میں بوجھ و ہے۔ آزاد سرے کو ثابت سرے کی سطح میں سہارا گیا ہے۔ اس سہارے پر بوجھ، بوجھ و کے مقام پر اور ثابت سرے پر خماؤ کا معیار، اور اعظم انصراف کا محل اور مقدار معلوم کرو۔

اگر یہ برآمدہ بیرم فولاد کا ہو، تراش کا معیارِ جمود ۲۰ (انچ)^۴ ہو، اور طول ۳۰ انچ ہو اور سرے کا سہارا ایک انتصابی فولادی بندھن سلاخ ۱۰ فٹ طول اور ½ مربع انچ تراش کی ہو اور آزاد سرا شہتیر پر بوجھ پڑنے سے پہلے ثابت سرے کی سطح میں ہو تو معلوم کرو کہ آزاد سرے کے سہارے پر کتنا بوجھ پڑیگا۔

۷ - ایک برآمدہ بیرم پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ w ہے اور ثابت سرے سے ¾ طول پر ثابت سرے کی سطح میں تھونی دی گئی ہے۔ تھونی پر کُل بوجھ کا کتنا حصہ پڑیگا؟

۸ - ایک برآمدہ بیرم پر ایک منقسم بوجھ ہے جو ثابت سرے پر w فی اکائی طول سے ہموار طور پر گھٹ کر آزاد سرے پر صفر ہوتا ہے۔ آزاد سرے پر انصراف معلوم کرو۔

۹ - I تراش کا ایک گرڈر ۱۶ فٹ فصل کے دو سہاروں پر ٹکا ہوا ہے اور ایک سہارے سے ۵ فٹ پر ۶ ٹن کا ایک بوجھ ہے۔ اگر تراشی رقبے کا معیارِ جمود ۳،۵ (انچ)^۴ ہو تو بوجھ کے نیچے اور فصل کے وسط میں انصراف اور اعظم انصراف کا محل اور مقدار معلوم کرو (E = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔ صفحہ ۲۰۹

۱۰ - اگر گزشتہ سوال کے شہتیر پر ایک مزید بوجھ ۸ ٹن پہلے بوجھ سے ۸ فٹ کے فاصلے پر ہو اور وسط میں سروں کی سطح پر ایک تھونی ہو تو تھونی پر بوجھ معلوم کرو۔ اگر تھونی بقدر ۱/۱۰ انچ کے دھنسے تو بوجھ کتنا کم ہوگا۔

۱۱ - ۱۶ فٹ فصل کے ایک گرڈر پر ایک سرے سے ۴ اور ۶ فٹ کے فاصلے پر ۷ اور ۶ ٹن کے بوجھ ہیں۔ تراشش کا معیارِ جمود ۴۴۵ (انچ)^۴ ہو اور E = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ تو اعظم انصراف کا محل اور اس کی مقدار معلوم کرو۔

۱۲ - ایک ۲۰ فٹ طول کا فولادی شہتیر ایک استوار سہارے سے تین انتصابی سلاخوں کے ذریعے افقاً لٹکا ہوا ہے جن میں سے ہر ایک کا طول ۱۰ فٹ ہے اور دو سلاخیں شہتیر کے سروں پر ہیں اور تیسری ان کے وسط میں۔ سروں کی سلاخوں کی تراش ۱ مربع انچ اور وسطی سلاخ کی تراش ۲ مربع انچ ہے اور شہتیر کی تراش کا معیارِ جمود ۴۸۰ (انچ)^۴ ہے۔ اگر شہتیر پر ۱ ٹن فی طولی فٹ کا

ایک یکساں بوجھ ڈالا جائے تو ہر ایک سلاخ کا تناؤ معلوم کرو۔

۱۳ — ایک برآمدہ بیرم کے سارے طول پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے اور آزاد سرے کو تھونی دی گئی ہے۔ تھونی پر کتنا بوجھ پڑنا چاہیے کہ برآمدہ بیرم میں خماؤ کے زور کی حدت کم سے کم ہو اور زور کی اس حدت کو اُس حدت سے کیا نسبت ہے جو آزاد سرے کو تھونی دے کر ثابت سرے کی سطح میں رکھنے سے پیدا ہو۔

۱۴ — ایک یکساں طور پر لدے ہوئے برآمدہ بیرم کے آزاد سرے سے کتنے فاصلے پر ایک تھونی ثابت سرے کی سطح میں دی جائے کہ خماؤ کے زور کی حدت کم سے کم ہو اور اس حدت کو اس حدت سے کیا نسبت ہے جو تھونی کو اسی سطح پر آزاد سرے کے نیچے رکھنے سے حاصل ہو۔ تھونی پر کل بوجھ کا کتنا حصہ پڑیگا۔

۱۵ — ایک ڈھلے لوہے کا گرڈر سروں پر سادہ طور پر سہارا ہوا ہے اور اس پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے۔ ایک مرکزی تھونی کے ذریعے مرکز کے انصراف کا زیادہ سے زیادہ کتنا حصہ دور کیا جا سکتا ہے بغیر اس کے کہ فشاری کور میں تناؤ پیدا ہو۔ اِسی شرط کو ملحوظ رکھتے ہوئے $\frac{1}{4}$ فصل پر انصراف کا کتنا حصہ دُور کیا جا سکتا ہے۔

۱۶ — ایک شہتیر اب پر ۱ ٹن فی طولی فٹ کا ایک یکساں بوجھ ہے اور شہتیر دو سہاروں ج اور د پر ٹکا ہوا ہے جہاں اج = ۳ فٹ، ج د = ۱۰ فٹ، اور د ب = ۷ فٹ۔ نقاط ا، ب، اور ف پر سہاروں کی سطح سے انصراف معلوم کرو جہاں ف، ج اور د کا وسطی نقطہ ہے۔ آ = ۲۷۵ (انچ)^۴، ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ ا سے اس تراش کا فاصلہ معلوم کرو جس پر اعظم اُوپر وار انصراف واقع ہوتا ہے۔

۱۷ — اگر گزشتہ سوال کے شہتیر پر ا، ف، ب پر علی الترتیب ۵، ۳، ۴ ٹن کے بوجھ ہوں اور کوئی اور بوجھ نہ ہوں تو ا، ف، ب پر اور اعظم انصراف کی تراش پر انصراف معلوم کرو۔

۱۸ — ایک برآمدہ بیرم کی تراش مستطیلی ہے جس کا عرض مستقل ہے اور گہرائی دیوار پر ق ہے اور ہموار طور پر بدلتی ہوئی آزاد سرے پر $\frac{1}{2}$ ق ہوتی ہے۔

ثابت سرے پر تراش کا معیارِ جمود آ ہے - آزاد سرے پر بوجھ و رکھا جائے تو آزاد سرے کا انصراف معلوم کرو -

۱۹ - ایک انتصابی فولادی کھم کھوکھلی مستدیر تراشش کا ہے - نچلا نصف طول ۴ انچ بیرونی قطر اور ۳½ انچ اندرونی قطر کا ہے اور اوپر کا نصف طول ۳ انچ بیرونی اور ۲½ انچ اندرونی قطر کا ہے - کھم کا مجموعی طول ۲۰ فٹ ہے اور نچلا سرا مضبوطی کے ساتھ ثابت ہے - چوٹی سے ۴ فٹ پر ۱۲۵ پونڈ کی اُفقی کھینچ کے تحت چوٹی کا انصراف معلوم کرو - (ے = ۳۰ × $۱۰^{۶}$ پونڈ فی مربع انچ)

۲۰ - ایک شہتیر سروں پر سہارا ہوا ہے اور ان کے وسط میں ایک بوجھ و رکھا ہوا ہے - تراشی رقبے کا معیارِ جمود وسط میں آ ہے اور ہموار طور پر بدلتا ہوا دونوں سروں پر ½ آ ہوتا ہے - وسط کے انصراف کے لیے جملہ حاصل کرو -

۲۱ - گزشتہ سوال کا وسطی انصراف معلوم کرو اگر بوجھ و فصل پر یکساں پھیلا ہوا ہو - صفحہ ۲۱۰

۲۲ - ایک گاڑی کی کمانی کا طول ۲ فٹ رکھنا ہے اور اس کو ۲ انچ چوڑی ⅜ انچ کی فولادی تختیوں سے بنانا ہے - ۱۰۰۰ پونڈ کا ایک مرکزی بوجھ برداشت کرنے کے لیے کتنی تختیاں درکار ہیں تاکہ زور ۱۵ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو - اس صورت میں مرکزی انصراف کیا ہوگا اور اگر اس بوجھ کے تحت تمام تختیاں سیدھی ہوجائیں تو ابتدائی نصفِ قطر انحنا کیا ہونا چاہیے - (ے = ۳۰ × $۱۰^{۶}$ پونڈ فی مربع انچ) -

۲۳ - ایک گاڑی کی کمانی ½ انچ موٹی اور ۴ انچ چوڑی ۱۰ تختیوں سے بنی ہے - سب میں لمبی تختی کا طول ۴ فٹ ہے - اگر کمانی کو سیدھا کرنے کے لیے ۱٫۵ انچ انصراف درکار ہو تو کتنا مرکزی بوجھ یہ انصراف پیدا کرے گا اور ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہو تو دھات کے اندر زور کی حدت کیا ہوگی -

صفحہ ۱۱

ساتواں باب

دربستہ اور مسلسل شہتیر

۸۴ ۔ دربستہ شہتیر ـــــ اس سے مراد ایسا شہتیر ہے جو دونوں سروں پر اس طرح ثابت ہو کہ سہارے سروں پر شہتیر کے ڈھال کو بالکل مقید کر دیں جس طرح کہ برآمدہ بیرم کے "ثابت" سرے کی صورت میں ہوتا ہے ۔ دونوں سرے بالعموم ایک ہی سطح میں ہوتے ہیں اور اگر سروں کی قید موثر ہو تو دونوں سروں پر شہتیر کا ڈھال صفر ہوتا ہے ۔ ایک یکساں تراش کے شہتیر پر اس قسم کی بندش کا اثر یہ ہے کہ اس کی مضبوطی اور صلابت بڑھ جائے، یعنی زور کی اعظم حدت اور ہر مقام کا انصراف گھٹ جائے ۔ جب اس قسم کے شہتیر پر بوجھ پڑتا ہے تو سروں پر خماؤ کا معیار صفر نہیں ہوتا جیسا کہ سادہ طور پر سہارے ہوئے شہتیر کی صورت میں ہوتا ہے کیونکہ سروں کی بندشیں "تثبیت کے معیار"، عائد کرتی ہیں جن سے شہتیر سروں پر اوپر وار محدب ہوتا ہے اور وسطی حصے کے گرد نیچے کو محدب ہوتا ہے ۔ خماؤ کا معیار دو نقاط انعطاف پر صفر ہو کر علامت بدلتا ہے ۔

اگر سروں پر ڈھال صفر ہو تو منقسم بوجھوں کی صورت میں سروں

پر کے تثبیت کے مطلوبہ جفت شہتیر کے اعظم خماؤ کے معیار ہوتے ہیں۔ ایک خاص حد تک اس بندش میں تھوڑا ڈھیلاپن پیدا ہونے سے (جوکہ عملاً ہمیشہ واقع ہوتا ہے جب کہ کوئی فولادی گرڈر چنائی کے اندر چنا ہوا ہو) تثبیت کے معیار ذرا گھٹ جاتے ہیں اور وسط کے خماؤ کا معیار ذرا بڑھ جاتا ہے اور اس طرح اعظم معیار کسی قدر گھٹ جاتا ہے۔ کامل تثبیت اور کامل آزادی کے درمیان کی کسی صورت میں یہ ہوسکتا ہے کہ خماؤ کے زور کامل تثبیت کی صورت سے کم ہوں۔ اعظم مضبوطی کی صورت اُس وقت پیدا ہوگی جب کہ دونوں اعظم تحدب اعظم تقعر کے مساوی ہوں کیونکہ اس صورت میں مخالف علامتوں کے خماؤ کے معیار مقداریں مساوی ہونگے۔

دربستہ شہتیروں کے مسلسل لداؤ کی سادہ صورتیں، جن میں لداؤ کی شرح جبری شکل میں آسانی سے بیان ہوسکے، بنیادی مساوات

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فرلا}^{4}} = \text{و} \quad (\text{دفعہ ۷۷})$$

کے تکمل سے حل ہوسکتی ہیں۔

شہتیر کے ایک سرے کو مبدا، لینے سے معطیات عموماً حسب ذیل ہونگے — $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ جب کہ لا = ۰ اور لا = ل اور ما = ۰ جب کہ لا = ۰ اور لا = ل

مثلاً فرض کرو کہ بوجھ یکساں منقسم ہے اور و فی اکائی طول فصل ہے تو اوپر کی مساوات کو تکمل کرنے سے صفحہ ۲۱۲

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} = \text{ولا} + \text{ا}$$

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \frac{1}{2}\,\text{ولا}^{2} + \text{الا} + \text{ب}$$

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{6}\,\text{ولا}^{3} + \frac{1}{2}\,\text{الا}^{2} + \text{ب لا} + ۰$$

کیونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰ جب کہ لا = ۰، اور لا = ل پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰ رکھنے سے

۰ = $\frac{1}{6}$ ول² + $\frac{1}{2}$ ال + ب

اور ب = − $\frac{1}{6}$ ول² − $\frac{1}{2}$ ال

آے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = $\frac{1}{6}$ ولا³ + $\frac{1}{2}$ ا لا² − $\frac{1}{6}$ ول² لا − $\frac{1}{2}$ ال لا

آے ما = $\frac{1}{24}$ ولا⁴ + $\frac{1}{6}$ ا لا³ − $\frac{1}{12}$ ول² لا² − $\frac{1}{4}$ ال لا² + ۰

کیونکہ ما = ۰ جب کہ لا = ۰، اور لا = ل پر ما = ۰ رکھنے سے اور ل² پر تقسیم کرنے سے

۰ = $\frac{1}{24}$ ول − $\frac{1}{12}$ ول + $\frac{1}{6}$ ا − $\frac{1}{4}$ ا

ا = − $\frac{1}{2}$ ول اور ب = $\frac{1}{12}$ ول²

اوپر کی مساواتوں میں اِن قیمتوں کو درج کرنے سے جزی قوت، خمائے معیاز ڈھال، اور انصراف کی قیمت ہر مقام پر معلوم ہوتی ہے۔

ق = آے $\frac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فرلا}^3}$ = و (لا − $\frac{1}{2}$ ل)

م = آے $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ = $\frac{1}{12}$ و (۶ لا² − ۶ ل لا + ل²)

جس کی قیمت صفر ہوتی ہے جب کہ لا = ل ($\frac{1}{2}$ ± ۰٫۲۸۹) یعنی فصل کے وسط سے دونوں طرف ۰٫۲۸۹ ل کے فاصلے پر۔ نیز لا = ۰ اور لا = ل پر م = $\frac{1}{12}$ ول²

اور لا = $\frac{\text{ل}}{2}$ پر م = − $\frac{1}{24}$ ول²۔

$$\text{عہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فزلا}} = \frac{\text{و}}{۱۲\,\text{آ}\,\text{ے}}\left(۲\,\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{ل}\,\text{لا}^{۲} + \text{ل}^{۲}\,\text{لا}\right)$$

جو $\text{لا} = ۰$، $\text{لا} = \text{ل}$، $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ پر صفر ہوتا ہے

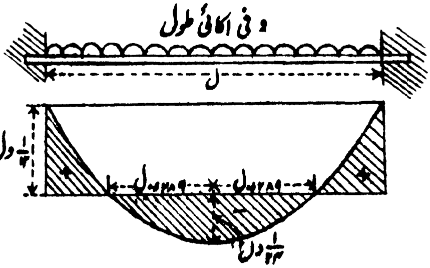
$$\text{ما} = \frac{\text{و}}{۲۴\,\text{آ}\,\text{ے}}\,\text{لا}^{۲}\left(\text{ل} - \text{لا}\right)^{۲}$$

اور مرکز پر، جہاں $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$، انصراف

$$= \frac{۱}{۲۴}\,\frac{\text{و}}{\text{آ}\,\text{ے}}\left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^{۲} \times \left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۳۸۴}\,\frac{\text{و}\,\text{ل}^{۴}}{\text{آ}\,\text{ے}}$$

صفحہ ۲۴۳ یا آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کا $\frac{۱}{۵}$ (دیکھو مساوات (۱۲) دفعہ ۷۸)۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۱۲۳ میں دکھایا گیا ہے۔ دیکھو خماؤ کا معیار اسی طرح بدلتا ہے جس طرح کہ آزاد سروں کی صورت میں ہوتا ہے کیونکہ یہاں $+\frac{۱}{۱۲}\,\text{ول}^{۲}$ سے $-\frac{۱}{۲۴}\,\text{ول}^{۲}$ تک بدلتا ہے یعنی $\frac{۱}{۸}\,\text{ول}^{۲}$ کا تغیر ہوتا ہے جیسا کہ آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کی صورت میں ہوتا ہے (دیکھو شکل ۶۵)۔ لیکن اب اعظم خماؤ کا معیار $\frac{۱}{۸}\,\text{ول}^{۲}$ کی بجائے صرف $\frac{۱}{۱۲}\,\text{ول}^{۲}$ ہے یعنی اگر تراش وہی ہو تو راست خماؤ کے



شکل ۱۲۳

زور کی اعظم حدت نسبت ۲ : ۳ میں گھٹ جائیگی ۔ یہاں اعظم خماؤ کا معیار اور اعظم جزی قوت ($\frac{1}{2}$ ول) دونوں ایک ہی تراش پر واقع ہوتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ جھکاؤ کی زیادہ سے زیادہ مضبوطی حاصل کرنے کے لیے مرکز پر خماؤ کا معیار سروں پر کے خماؤ کے معیار کے مساوی ہونا چاہیے یعنی ہر ایک $\frac{1}{8}$ ول^2 کا نصف ہونا چاہیے ۔ اس صورت میں خماؤ کے معیار کے منحنی کی مساوات دفعہ ۸۷ کی مساوات (۷) سے حسب ذیل ہوگی۔

$$\text{م} = \text{آے}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{1}{2}\,\text{ولا}^2 - \frac{1}{2}\,\text{ول لا} + \frac{1}{16}\,\text{ول}^2$$

اس میں اوپر کی استعمال کی ہوئی مساوات سے صرف آخر کی یعنی مستقل رقم کا فرق ہے ۔ اس مساوات کو دو بار تکمل کرکے ما = ۰ جب کہ لا = ۰ اور لا = ل رکھنے سے، یا ایک بار تکمل کرکے تناکل کی وجہ سے لا = $\frac{\text{ل}}{2}$ پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰ رکھنے سے سروں پر کا مطلوبہ ڈھال $\frac{1}{96}\,\frac{\text{ول}^3}{\text{آے}}$ یعنی آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے سروں کے ڈھال کا $\frac{1}{4}$ حاصل ہوتا ہے (دیکھو (۱۰) دفعہ ۸۷)۔

لداؤ کی دیگر قسمیں، جن میں و، لا کا ایک سادہ تفاعل ہو، اس طریقے سے آسانی سے حل ہوسکتی ہیں۔

ایک اور مثال کے طور پر فرض کرو کہ و = ۰ لیکن ایک سہارا بقدر فاصلہ صہ کے دھنس جاتا ہے ۔ دونوں سرے افقاً ثابت رہتے ہیں ۔ اس سرے پر مبدا لینے سے جو نہیں دھنستا

$$\text{آے}\,\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فرلا}^4} = 0$$

$$\text{آے}\,\frac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فرلا}^3} = \text{ق}$$

جہاں ق سارے فصل کی (مستقل) جزی قوت ہے ۔

آ ے فر²ما / فرلا² = ق لا + م

جہاں م سرے لا = ۰ پر خماؤ کا معیار ہے

آ ے فرما / فرلا = ½ ق لا² + م لا + ۰

اور لا = ل کے لیے فرما / فرلا = ۰ رکھنے سے غ۲۱۲

م = − ق ل / ۲

اور آ ے فرما / فرلا = ½ ق (لا² − ل لا)

آ ے ما = ½ ق (لا³/۳ − ل لا²/۲) + ۰

لیکن ما = صہ جب کہ لا = ل اس لیے

آ ے صہ = ق ل³/۲ (۱/۳ − ۱/۲) = − ۱/۱۲ ق ل³

ق = − ۱۲ آ ے صہ / ل³

م = ۶ آ ے صہ / ل²

اور کسی مقام کا خماؤ کا معیار

= ۶ آ ے صہ / ل² − ۱۲ آ ے · لا · صہ / ل³

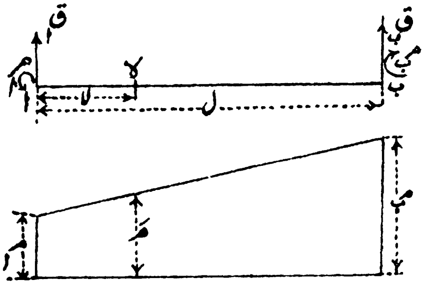
یہ ایک خطِ مستقیم ہے جو لا = ل پر قیمت − ۶ آ ے صہ / ل² کو پہنچتا ہے۔

دونوں سہاروں کے ردِّ عمل مساوی اور مخالف ہونگے اور مقدار میں ق کے مساوی ہونگے۔

۸۵ - خماؤ کے معیار کے نقشے پر ثابت سروں کا اثر

اثر۔۔۔ دربستہ شہتیر میں دیواروں یا پایوں کی طرف سے جو تثبیت کا معیار بوجھ پڑنے کے ساتھ ظہور میں آتا ہے وہ اگر اکیلا عمل کرے تو اس کا اثر یہ ہوگا کہ شہتیر سارے طول میں اوپر وار محدب ہو جائے۔

فرض کرو کہ ایک شہتیر پر صرف یہ "تثبیت کے جفت" عمل کرتے ہیں۔ ان کی وجہ سے فصل کے کسی نقطے پر خماؤ کا معیار آسانی سے اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ شہتیر کو سادہ سہارا



شکل ۱۲۴ - تثبیتی جفتوں کا اثر

ہوا لیکن برآویختہ سمجھا جائے اور برآویختہ سروں پر ایسا بوجھ فرض کیا جائے جس سے سہاروں پر وہی معیار پیدا ہو جو دربستہ شہتیر کا تثبیت کا معیار ہے۔ اگر یہ تثبیت کے معیار مساوی ہوں تو ان سے سارے فصل میں اسی مقدار کا ایک خماؤ کا معیار پیدا ہوگا (دیکھو شکل ۶۷) ۔ اگر دونوں سروں تے تثبیت کے معیار نامساوی ہوں مثلاً سرے ا پر م ہو اور سرے ب پر م (شکل ۱۲۴) تو فصل میں خماؤ کا معیار م سے م تک ایک خطِ مستقیم میں بدلیگا یعنی ایک مستقل شرح کے ساتھ بدلیگا اور طالب علم اس کی تصدیق

ایک ایسے شہتیر کے خماؤ کے معیار کا نقشہ کھینچ کر کرسکتا ہے جو اپنے
سہاروں سے برآویختہ ہو اور جس کے سروں پر بوجھ ہوں۔ اسے
فاصلہ لا پر تشبیث کے جفتوں کی وجہ سے خماؤ کا معیار حسب ذیل ہوگا:۔ صفحہ ۲۱۵

$$\text{مَ} = \text{م}_{\text{ا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ل}}\left(\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}\right) \quad (\text{دیکھو شکل ۱۲۴})$$

کسی دربستہ شہتیر کی کسی تراش پر خماؤ کا معیار اس مقدار مَ اور اس
خماؤ کے معیار کا جبری مجموعہ ہوگا جو دیے ہوئے لداؤ سے ایک آزادانہ
سہارے ہوئے شہتیر کی صورت میں پیدا ہو۔

برآویختہ شہتیر کی مثال کا استعمال کیے بغیر کسی شہتیر کے لیے
جس کے سرے "آزاد" نہ ہوں حسب ذیل نتائج پیش کیے
جاسکتے ہیں:۔

فرض کرو کہ ا کے ذرا دائیں طرف جزی قوت $\text{ق}_{\text{ا}}$ ہے (شکل ۱۲۴)
اور ب کے ذرا بائیں طرف $\text{ق}_{\text{ب}}$ ہے اور ا اور ب پر تقید کرنے والے
معیار $\text{م}_{\text{ا}}$ اور $\text{م}_{\text{ب}}$ ہیں۔ فرض کرو کہ فصل پر بوجھ فی اکائی طول و ہے
جو مستقل یا متغیر کچھ ہی ہوسکتا ہے۔ تب دفعہ ۷۷ کی طرح اور
ا کو مبدا لینے سے

$$\frac{\text{فر}^2\text{م}}{\text{فرلا}^2} = \text{و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{ق یا } \frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = \int_0^{\text{لا}} \text{و فرلا} + \text{ق}_{\text{ا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

کیونکہ $\text{ق} = \text{ق}_{\text{ا}}$ جب کہ $\text{لا} = 0$

$$\text{تب م} = \int_0^{\text{لا}}\int_0^{\text{لا}} \text{و فرلا فرلا} + \text{ق}_{\text{ا}} \times \text{لا} + \text{م}_{\text{ا}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

کیونکہ $\text{م} = \text{م}_{\text{ا}}$ جب کہ $\text{لا} = 0$، $\text{لا} = \text{ل}$ رکھنے سے

$$\text{م}_{\text{ب}} = \int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا فرلا} + \text{ق}_{\text{ا}} \times \text{ل} + \text{م}_{\text{ا}}$$

اس لیے $\text{ق}_{\text{ا}} = \frac{\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}}{\text{ل}} - \frac{1}{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا فرلا}$ ....(۴)

دیکھو $\frac{1}{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا فرلا}$ سرے ا پر کے ردِّ عمل کی قیمت ہوگی جب کہ $\text{م}_{\text{ب}} = \text{م}_{\text{ا}}$ یا جب کہ دونوں صفر ہوں جیسا کہ آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر میں ہوتا ہے۔

(۳) میں $\text{ق}_{\text{ا}}$ کی قیمت درج کرنے سے

$$\text{آ ے}\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فرلا}^2} = \text{م} = \int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا فرلا} + (\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}})\frac{\text{لا}}{\text{ل}} + \text{م}_{\text{ا}}$$

$$- \frac{\text{لا}}{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا فرلا} \quad \text{......(۵)}$$

یا نئی ترتیب کے ساتھ —

$$\text{م} = \text{م}_{\text{ا}} + (\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}})\frac{\text{لا}}{\text{ل}} + \int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا فرلا}$$

$$- \frac{\text{لا}}{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا فرلا} \quad \text{......(۶)}$$

سرے آزاد ہوں تو $\text{م}_{\text{ا}} = \text{م}_{\text{ب}} = 0$ اور

$$\text{م} = \int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا} - \frac{\text{لا}}{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}}\int_0^{\text{ل}} \text{و فرلا فرلا}$$

صفحہ ۲۱۶ اور اگر سرے آزادانہ ہوں تو ایک مزید خماؤ کا معیار ہوگا جس کو لکھا جا سکتا ہے :-

$$م' = م_ا + (م_ب - م_ا)\frac{لا}{ل} \quad \ldots\ldots (۷)$$

یا

$$م' = م_ا \frac{ل - لا}{ل} + م_ب \frac{لا}{ل} \quad \ldots\ldots (۷ ا)$$

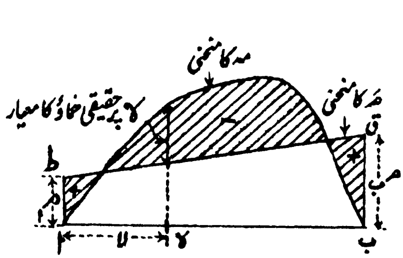
یہی شکل دفعات ۸۷ اور ۸۹ میں استعمال کی جائیگی ۔

اس ترقیم کے ساتھ (۵) کو یوں لکھ سکتے ہیں :-

$$آ ے \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} = مہ + م' = مہ + م_ا + (م_ب - م_ا)\frac{لا}{ل} \quad \ldots\ldots (۸)$$

جہاں مہ ایک مماثل لداؤ کے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے کسی تراش پر کا معیار ہے اور م' سروں کے تثبیت کے معیاروں م_ا اور م_ب کی وجہ سے اس تراش پر خماؤ کا معیار ہے ۔ بالعموم مہ اور م' مخالف علامتوں کے ہونگے ۔ اس لیے اگر مہ اور م' دونوں کو ایک ہی اساسی خط کے ایک ہی جانب ترسیم کیا جائے تو کسی تراش پر خماؤ کا حقیقی معیار ان دونوں منحنیوں کے معینوں کے فرق سے تعبیر ہوگا (دیکھو شکل ۱۲۵) ۔

اُوپر سے کے تکملوں میں جبری علامات قرارداد کے مطابق اختیار کی جائیں (دیکھو دفعہ ۷۷) تو مہ اُوپر وار تقعر کے لیے منفی ہوگا - ردِّعمل



شکل ۱۲۵

ب_ا (ے - ق_ا) اور ب_ب

مساوات (۴) سے معلوم ہو سکتے ہیں۔ اگر م ب - م ا مثبت ہو تو ا پر کا ردِّ عمل مقدار میں اُس صورت سے کہ سرے سادہ طور پر سہارے ہوئے ہوتے بقدر $\frac{1}{ل}$ (م ب - م ا) کے کم ہوگا اور ب پر کا ردِ عمل بقدر اسی مقدار کے زیادہ ہوگا۔

۸۶ - دربستہ شہتیر کسی تشاکل لداؤ کے تحت۔

مستقل تراش کے متشاکلاً لدے ہوئے شہتیر کے لیے ظاہر ہے کہ سہاروں کے تثبیت کے جفت مساوی ہونگے اور شکل ۱۲۷ سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی فصل کے سروں پر مساوی جفت عمل کریں تو سارے فصل میں خماؤ کا معیار اسی کے مساوی ہوتا ہے۔ یا مساوات (۷) دفعہ ۸۵ سے اگر م ب = م ا تو مَ = م ا = م ب ہر تراش پر۔ اس لیے خماؤ کے معیار کے نقشے نے حاصل معین (دیکھو دفعہ ۸۵) آزاد سروں کی صورت کے خماؤ کے معیار کے منحنی اور ایک مستطیل کے معینوں کے فرق کے مساوی ہونگے کیونکہ شکل ۱۲۵ کا منحرف ا ط ق ب ایک مستطیل بن جائیگا۔ اور چونکہ حدود کے اندر

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ یا } ع = \int \frac{م}{آ\,ے}\ \text{فرلا} \quad \text{(دیکھو (۳) دفعہ ۷۷)}$$

اس لیے اگر آ اور ے مستقل ہوں تو شہتیر کے دونوں سروں کے درمیان ڈھال کی تبدیلی $\frac{1}{آ\,ے}\int_0^{ل} م\ \text{فرلا}$ گزشتہ دفعہ کی ترقیم کے مطابق

$$= \frac{1}{آ\,ے}\int_0^{ل} (مہ + مَ)\ \text{فرلا}$$ صفحہ ۲۱۷

جہاں ل فصل کا طول ہے اور مبدا ار ایک سہارے پر ہے۔ دربستہ شہتیر میں اگر دونوں سرے افقاً ثابت ہوں تو ڈھال کی یہ تبدیلی صفر ہوگی۔ اس طرح

$$\left.\begin{aligned} &\int_{0}^{ل} (مہ + ھر)\, فرلا = ۰ \\ یا\quad & -\int_{0}^{ل} ھر\ فرلا = \int_{0}^{ل} مہ\ فرلا \\ یا\quad & -ھر = \frac{۱}{ل}\int_{0}^{ل} مہ\ فرلا \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں :-

$$ر + ر' = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں ر = منحنی مہ کا رقبہ اور ر' = منحنی ھر یا منحرف ا ط ق ب کا رقبہ (شکل ۱۲۵ ب) جو موجودہ خاص صورت میں ایک مستطیل اا' ب' ب ہے (شکل ۱۲۶ ع) -

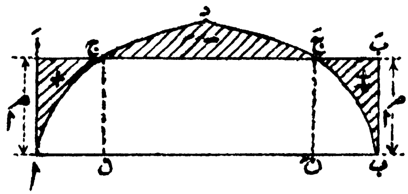
$\int_{0}^{ل}$ (مہ + ھر) فرلا پورے فصل پر خماؤ کے معیار کے نقشہ کے رقبے کو تعبیر کرتا ہے اور مساوات (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ مجموعی رقبہ صفر ہے یعنی ارتفاع ھر (یا ھر) کے مستطیل اور سادہ طور پر سہارے ہوئے سروں کے شہتیر کے خماؤ معیار مہ کے منحنی دونوں کا رقبہ ایک ہی ہوگا اور - ر کے مساوی ہوگا، اور

ھر کی مستقل قیمت $(ھر_{۱}) = -\frac{۱}{ل}\int_{0}^{ل} مہ\ فرلا$، اس کو تعبیر کرنے والے معین کا

طول $-\frac{ر}{ل}$ ہوگا (ر اور مہ عموماً منفی ہونگے) -

اس طرح ایک متشاکلاً لدے ہوئے شہتیر کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل کرنے کے لیے پہلے خماؤ کے معیار کا نقشہ یہ سمجھ کر کھینچو کہ شہتیر

سادہ طور پر سہارا ہوا ہے (ا ج د جَ ب شکل ۱۲۶) اور پھر تمام معینوں کو بقدر اوسط معین کے گھٹا دو، یا بالفاظِ دیگر اساسی خط کو بقدر م کے بلند کر دو جو نقشہ اَ جَ د جَ بَ کے اوسط معین سے یا (رقبہ ا ج د جَ ب) ÷ (طول ا ب) سے تعبیر ہوتا ہے۔



شکل ۱۲۶

نقاط ج اور جَ کے انتصاباً نیچے کے نقاط ن اور نَ انعطاف یا صفر خماؤ کے معیار کے نقاط ہیں، اور رقبے ا اَ ج اور ب بَ جَ مل کر رقبہ ج د جَ کے مساوی اور علامت میں مخالف ہیں۔ نجوار بوجھ کے تحت نجوار ڈھال ا سے ن تک بڑھتا ہے اور ن پر رقبہ ا اَ ج کے متناسب ہوتا ہے۔ ن سے وسط کی طرف ڈھال گھٹتا ہے اور وسط میں صفر ہوتا ہے اور یہاں ا سے شمار کر کے خماؤ کے معیار کے نقشے کا رقبہ صفر ہوتا ہے یعنی جتنا رقبہ مثبت ہے اتنا ہی منفی ہے

صفحہ ۲۱۵ ڈھال اور انصراف حاصل خماؤ کے معیار کے نقشے سے دفعہ ۸۱ کے طریقے کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں بشرطیکہ رقبوں کی علامت کا خیال رکھا جائے۔ یا دفعہ ۸۲ کا طریقہ اختیار کیا جا سکتا ہے اس بات کا لحاظ رکھ کر کہ خماؤ کے معیار کے نقشے کے مختلف حصے رقبے میں مختلف علامتوں کے ہیں اور یہ کہ دونوں سروں پر ڈھال اور انصراف صفر ہیں۔ ایک اور ممکن طریقہ یہ ہے کہ نقاطِ انعطاف (یا خیالی قبضوں) کے درمیان کے حصے ن نَ کو ایک علیحدہ شہتیر سمجھا جائے جو دو برآمدہ بیرموں ا ن اور ب نَ کے سروں پر سہارا ہوا ہے۔

اگر سروں ا اور ب پر ڈھال صفر نہیں بلکہ مساوی مقدار عہ اور

مختلف علامت پر ثابت ہیں اور دونوں وسط کی طرف نچوار ہیں تو ڈھال کو دائیں طرف نچوار ہونے کی صورت میں مثبت سمجھنے سے مساوات (۱) حسب ذیل ہوجاتی ہے

$$\int_{0}^{ل} (مہ + مَ)\, فرلا = -\ ۲ عہ \cdot آ\bar{} ے$$

یا

$$\int_{0}^{ل} مَ\, فرلا = -\int_{0}^{ل} مہ\, فرلا - ۲ عہ \cdot آ\bar{} ے$$

یا

$$مَ = -\frac{۱}{ل}\int_{0}^{ل} مہ\, فرلا - \frac{۲ عہ \cdot آ\bar{} ے}{ل}$$

مہ عموماً منفی ہوگا اور خماؤ کے زور کے اقل ہونے کے لیے مَ کی یہ قیمت مقدار میں مہ کی اعظم قیمت کے نصف کے مساوی ہونی چاہیے ۔

مثال ۱ ۔ ایک دربستہ شہتیر پر یکساں پھیلا ہوا بوجھ و فی اکائی فصل ہے ۔ سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے خماؤ کے معیار کے نقشے کا (جو مکافی ہوگا دیکھو شکل ۶۵) رقبہ

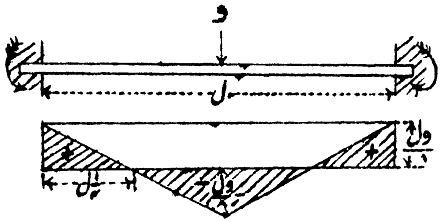
$$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۸}\, و ل^{۲} \times ل = \frac{۱}{۱۲}\, و ل^{۳}$$

اس لیے اوسط خماؤ کا معیار $\frac{۱}{۱۲}$ و ل^{۲} ہوگا ۔ شکل ۶۵ کے تمام معینوں کو بقدر $\frac{۱}{۱۲}$ و ل^{۲} کے گھٹانے سے بالکل وہی نقشہ حاصل ہوتا ہے جو شکل ۱۲۳ میں دکھایا گیا ہے ۔

مثال ۲ ۔ ایک دربستہ شہتیر پر وسطی بوجھ و ۔

سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۶۳ میں دکھایا گیا ہے ۔ اس کا اوسط ارتفاع $\frac{۱}{۲} \times \frac{و ل}{۴}$ یا $\frac{و ل}{۸}$ کے متناسب ہے ۔ اس لیے دربستہ شہتیر کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۱۲۷ کے

مطابق ہوگا ۔ نقاطِ انعطاف صریحاً سروں سے $\frac{۱}{۴}$ ل کے فاصلے پر ہیں،



شکل ۱۲۶

اور دونوں سروں پر اور وسط میں خماؤ کا معیار $\frac{و ل}{۸}$ ہے۔

صفحہ ۲۱۹ مبدار کو وسط میں یا ایک سرے پر دفعہ ۸۱ مساوات (۳) کا طریقہ استعمال کرنے سے اور علامتوں کا خیال رکھنے سے فرما دونوں حدوں پر صفر ہوتا ہے اور ما ایک حد پر، اور بوجھ کے تحت ڈرلا وسطی انصراف

$$= \frac{۱}{آ ے}\left\{\left(\frac{۱}{۲} \times \frac{و ل}{۸} \times \frac{ل}{۴}\right)\left(\frac{ل}{۲} - \frac{۱}{۳}\,\frac{ل}{۴}\right) - \left(\frac{۱}{۲}\,\frac{و ل}{۸} \times \frac{ل}{۴}\right)\left(\frac{ل}{۴} \times \frac{۱}{۳}\right)\right\}$$

$$= \frac{و ل^{۳}}{۱۹۲\, آ ے}$$

۸۷ ۔ **دربستہ شہتیر کسی لداؤ کے ساتھ**[۱] ۔ دفعہ گزشتہ کی طرح اور اسی ترقیم کے ساتھ اگر آ اور ے مستقل ہوں تو

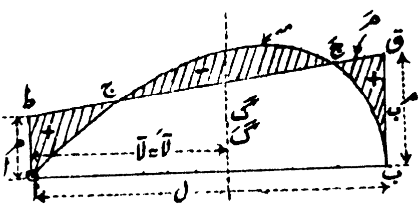
[۱] ۔ اس صورت کو حل کرنے کا ایک متبادل طریقہ مصنف کی کتاب "نظریۂ تعمیر" میں دیا گیا ہے۔

$$\left.\begin{aligned} &\int_{0}^{\text{ل}} (\text{مہ} + \text{مَہ})\ \text{فرلا} = 0 \\ \text{یا}\quad &\text{سا} + \text{سَا} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

یا مَ کی قیمت (۷) دفعہ ۸۵ سے لے کر رکھنے سے

$$\int_{0}^{\text{ل}} \left\{ \text{مہ} + \text{م}_{\text{ا}} + (\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}) \frac{\text{لا}}{\text{ل}} \right\} \text{فرلا} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

لداؤ کے متشاکل نہ ہونے کی وجہ سے $\text{م}_{\text{ب}}$ ضروری نہیں کہ $\text{م}_{\text{ا}}$ کے مساوی ہو اور رقبہ سَا مستطیل نہیں بلکہ ایک منحرف ہوگا (شکل ۱۲۸) اور رقبوں سا اور ـ سَا کی مساوات تثبیت کے دونوں جفتوں $\text{م}_{\text{ا}}$ اور $\text{م}_{\text{ب}}$ کو معلوم کرنے کے لیے ناکافی ہے۔ لیکن ایک اور ربط حاصل کرنے کے



شکل ۱۲۸

لیے ہم دفعہ ۸۱ کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ اس طرح ایک سرے مثلاً ا شکل ۱۲۸ کو مبداء لینے سے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{مہ} + \text{مَہ}}{\text{ے آ}}$$

لا سے ضرب دے کر حدود صفر اور ل کے درمیان تکمل بالحصص کرنے سے

$$\left(\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{ما}\right)_{\cdot}^{\text{ل}}=\frac{1}{\text{آ سے}}\int_{\cdot}^{\text{ل}}(\text{مہ}+\text{مَر})\,\text{لا فرلا}$$

$$=\frac{1}{\text{آ سے}}\left(\int_{\cdot}^{\text{ل}}\text{مہ لا فرلا}+\int_{\cdot}^{\text{ل}}\text{مَر لا فرلا}\right)$$

یا
$$\text{آ سے}\left(\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{ما}\right)_{\cdot}^{\text{ل}}=\text{س}\,\bar{\text{لا}}+\text{سَ}\,\bar{\text{لا}}'$$

جہاں لاَ اور لاَ´ رقبوں س اور سَ کے مراکزِ ہندسی کے فاصلے مبداء سے ہیں - اب رقم

$$\left(\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{ما}\right)_{\cdot}^{\text{ل}}$$

صریحاً صفر ہے کیونکہ اس کا ہر ایک حصّہ دونوں حدوں لا = ل اور لا = ۰ پر صفر ہوتا ہے - اس لیے

$$\text{س}\,\bar{\text{لا}}+\text{سَ}\,\bar{\text{لا}}'=\cdot=\int_{\cdot}^{\text{ل}}\text{مہ لا فرلا}+\int_{\cdot}^{\text{ل}}\text{مَر لا فرلا}\quad\ldots\ldots\ldots(3)$$

صفحہ ۲۲۰ یعنی رقبوں س اور سَ کے باہم خود مساوی ہونے کے علاوہ سروں کے گرد اُن کے معیار بھی مقدار میں باہم مساوی ہیں، یا بالفاظِ دیگر ان کے مرکزِ ہندسی ایک ہی انتصابی خط میں ہونگے (دیکھو شکل ۱۲۸ب) -

صریحاً شکل ۱۲۸ب سے، رقبہ ا ط ق ب یا سَ $=\frac{\text{م}_{\text{ا}}+\text{م}_{\text{ب}}}{2}\times\text{ل}$

اس لیے (۱) سے

$$\frac{\text{م}_{\text{ا}}+\text{م}_{\text{ب}}}{2}\times\text{ل}=-\text{س}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

اور منحرف کو وتر ط ب کے ذریعے مثلثوں میں تقسیم کرکے ا (شکل ۱۲۸ب) کے گرد معیار لینے سے :-

$$\text{مر لآ} = \left(\tfrac{1}{2}\,\text{مر}_{\text{ا}} \times \text{ل} \times \tfrac{1}{3}\,\text{ل}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\,\text{مر}_{\text{ب}} \times \text{ل} \times \tfrac{2}{3}\,\text{ل}\right)$$

$$= \tfrac{1}{6}\,\text{ل}^{2}\left(\text{مر}_{\text{ا}} + 2\,\text{مر}_{\text{ب}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

یا (۳) سے
$$\tfrac{1}{6}\,\text{ل}^{2}\left(\text{مر}_{\text{ا}} + 2\,\text{مر}_{\text{ب}}\right) = -\,\text{مر لآ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

یا
$$\text{مر}_{\text{ا}} + 2\,\text{مر}_{\text{ب}} = -\frac{6}{\text{ل}^{2}} \times \text{مر لآ}$$

اور (۴) سے
$$\text{مر}_{\text{ا}} + \text{مر}_{\text{ب}} = -\frac{2}{\text{ل}} \times \text{مر}$$

اس طرح
$$\text{مر}_{\text{ب}} = \frac{2\,\text{مر}}{\text{ل}} - \frac{6\,\text{مر لآ}}{\text{ل}^{2}}$$

یا
$$= \frac{2\,\text{مر}}{\text{ل}}\left(1 - \frac{3\,\text{آ}}{\text{ل}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

اور
$$\text{مر}_{\text{ا}} = 6\,\frac{\text{مر لآ}}{\text{ل}^{2}} - 4\,\frac{\text{مر}}{\text{ل}}$$

یا
$$= \frac{2\,\text{مر}}{\text{ل}}\left(\frac{3\,\text{آ}}{\text{ل}} - 2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

اس طرح تثبیت کے معیار خماؤ کے معیار کے نقشے کے رقبے (مر) کی اور ایک سہارے کے گرد اس کے معیار (مر لآ) کی یا ایک سہارے سے اس کے مرکز ہندسی کے فاصلے کی رقوم میں معلوم ہوگئے۔ اب منحرف ا ط ق ب (شکل ۱۲۸ء) کھینچا جاسکتا ہے اور اس منحرف کے اور سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے خماؤ کے معیار کے نقشے کے معینوں کے فرق سے دربستہ شہتیر کے خماؤ کے معیار حاصل ہونگے۔ حاصل نقشہ شکل ۱۲۸ء میں سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ علامتوں کے متعلق دفعہ ،، کی

قرار داد کی رُو سے مہ کی ان قیمتوں کے لیے جو اُوپر وار تقعر پیدا کریں رقبہ
س کو منفی سمجھنا چاہیے - اگر لداؤ ایسا ہو کہ اس سے پیدا ہونے والے
خماؤ کے معیار کا رقبہ اور اس کا معیار آسانی سے محسوب ہو سکتے ہیں تو
مب اور مم جبری یا حسابی طور پر مساواتوں (۶) اور (۷) سے حاصل ہوسکتے
ہیں اور پھر کسی اور مقام کا خماؤ کا معیار دفعہ ۸۵ کی مساوات (۸) سے حاصل
ہوسکتا ہے - غیر منتظم لداؤ کی صورت میں یہ عمل ترسیماً کیا جاسکتا ہے -
مقدار س × لآ اس صورت میں لآ معلوم کیے بغیر مبداء ۱ کو قطب مان کر
ایک "مشتق رقبے" کے ذریعے آسانی سے حاصل ہوسکتی ہے جیسا کہ
دفعہ ۶۸ شکل ۵۵ میں کیا گیا ہے -

جب حاصل خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل ہو جائے تو دفعہ ۸۲ کے
دونوں ترسیمی طریقوں میں سے کوئی بھی طریقہ اختیار کر کے شہتیر کے کسی
نقطے پر ڈھال اور انصراف معلوم کرسکتے ہیں - اس میں رقبوں کی
علامتوں کے اختلاف کا خیال رکھا جائے اور ڈھال اور انصراف دونوں
کے منحنی سروں پر صفر سے شروع کیے جائیں - یا دفعہ ۸۱ (ب) اور (ج) کے
طریقے اختیار کیے جاسکتے ہیں - اس میں خماؤ کے معیار کے نقشے کے
رقبوں سے ڈھال محسوب کرتے وقت یا ان رقبوں کے معیاروں سے انصراف
محسوب کرتے وقت مختلف علامتوں کا خیال رکھا جائے - جب خماؤ کا معیار
معلوم ہو جائے تو دربستہ شہتیر کے ڈھال، انصراف، وغیرہ، معلوم کرنے
کا مسئلہ صرف سہارے ہوئے شہتیر سے بھی آسان ہوتا ہے کیونکہ
سروں کے ڈھال عموماً صفر ہوتے ہیں - غیر متناکل بوجھ کے تحت دربستہ شہتیر
کے جزی زور کا نقشہ بالکل اسی طرح بدلتا ہے جس طرح متناظر آزادانہ سہارے
ہوئے شہتیر کی صورت میں بدلتا ہے کیونکہ $\left(\frac{\text{فرق}}{\text{فرلا}} = \text{و}\right)$، لیکن سروں
پر کے ردِّ عمل مختلف ہونگے، جیسا کہ مساوات (۴) دفعہ ۸۵ میں دکھایا
گیا ہے - ایک ردِّ عمل (مب) بقدر $\frac{1}{ل}$ (مب - مم) کے بڑھ جائیگا اور

دوسرا ($\text{م}_{\text{ب}}$) بقدر اسی مقدار کے گھٹ جائیگا لیکن یہ مقدار مثبت یا منفی ہوسکتی ہے ۔

اگر شہتیر کے سرے اس طرح دربستہ ہوں کہ سروں کے ڈھال صفر نہ ہوں تو مساوات (۱) حسب ذیل ہوجاتی ہے :-

$$\text{مر} + \text{مَر} = \text{آے} \left(\text{ع}_{\text{ب}} - \text{ع}_{\text{ا}} \right)$$

جہاں $\text{ع}_{\text{ب}}$ اور $\text{ع}_{\text{ا}}$ سروں ب اور ا کے ثابت ڈھال ہیں اور مثبت سمجھے جائینگے اگر دائیں طرف بجوار ہوں (بالعموم ان کی علامتیں مختلف ہونگی) ۔ اس طرح مساوات (۳) حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{مر}\,\bar{\text{لا}} + \text{مَر}\,\bar{\text{لا}}' = \text{آے} \cdot \text{ل} \cdot \text{ع}_{\text{ب}}$$

اور $\text{م}_{\text{ب}}$ اور $\text{م}_{\text{ا}}$ کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی :-

$$\text{م}_{\text{ب}} = \frac{2\,\text{مر}}{\text{ل}} - \frac{6\,\text{مر}\,\bar{\text{لا}}}{\text{ل}^2} + \frac{2\left(2\,\text{ع}_{\text{ب}} + \text{ع}_{\text{ا}}\right)\text{آے}}{\text{ل}}$$

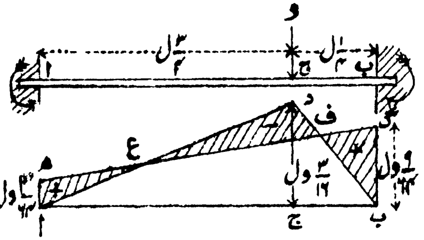
$$\text{م}_{\text{ا}} = \frac{6\,\text{مر}\,\bar{\text{لا}}}{\text{ل}^2} - \frac{4\,\text{مر}}{\text{ل}} - 2\,\frac{\left(\text{ع}_{\text{ب}} + 2\,\text{ع}_{\text{ا}}\right)\text{آے}}{\text{ل}}$$

(رقبہ مر کے منفی ہونے کی وجہ سے) دونوں سروں کا ڈھال وسط کی طرف ہونے کی صورت میں $\text{م}_{\text{ا}}$ اور $\text{م}_{\text{ب}}$ کی یہ قیمتیں (۶) اور (۷) سے کم ہونگی الا اس کے کہ $\text{ع}_{\text{ب}}$ اور $\text{ع}_{\text{ا}}$ مقدار میں بہت نا مساوی ہوں ۔ ایک دی ہوئی تراش سے جھکاؤ کی زیادہ سے زیادہ مضبوطی حاصل کرنے کے لیے یہ ضروری ہوگا کہ دونوں تثبیت کے معیاروں $\text{م}_{\text{ب}}$ اور $\text{م}_{\text{ا}}$ کو آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے اعظم خماؤ کے معیار کے نصف کے مساوی اور مخالف بنایا جائے ۔ اس کے لیے سروں کے جو ڈھال درکار ہونگے اُن کا حساب آسان ہے لیکن عملاً اُن کو حاصل کرنا

مشکل ہے۔

مثال ۱۔ فصل ل کے ایک در بستہ شہتیر پر ایک بوجھ و ایک سرے سے $\frac{1}{4}$ ل کے فاصلے پر ہے۔ خماؤ کے معیار کا نقشہ، نقاطِ انعطاف، بوجھ کے نیچے انصراف، اور اعظم انصراف کا محل اور مقدار معلوم کرو۔

آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کی صورت میں ج پر خماؤ کا معیار (شکل ۱۲۹) $\frac{3}{4}$ و × $\frac{1}{4}$ ل = $\frac{3}{16}$ و ل ہوگا۔ تب خماؤ کے معیار کے نقشے کو دو حصّوں ا د ج اور ج د ب میں تقسیم کرکے ا پر مبداء لینے اور اوپر کی ترقیم اختیار کرنے سے



شکل ۱۲۹

س آ = −{($\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{4}$ ل × $\frac{3}{16}$ ول × $\frac{2}{3}$ × $\frac{3}{4}$ ل) + ($\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$ ل × $\frac{3}{16}$ ول) ($\frac{3}{4}$ ل + $\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{4}$ ل)} = − $\frac{7}{128}$ ول^{3} صفحہ ۲۲۲

س = − $\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{16}$ ول × ل = − $\frac{3}{32}$ ول^{2}

اور (۶) سے م$_{ب}$ = ول (− $\frac{3}{16}$ + $\frac{21}{64}$) = + $\frac{9}{64}$ ول

م$_{ا}$ = ول (− $\frac{21}{64}$ + $\frac{3}{8}$) = + $\frac{3}{64}$ ول

اب حاصل خماؤ کے معیار کے نقشے کو خط گ ھ شکل ۱۲۹ کے ذریعے مکمل کیا جاسکتا ہے۔

ب کے گرد معیار لینے سے —

$$\frac{۱}{۴}\,\text{ول} - م_{ا} \times \text{ل} + \frac{۳}{۶۴}\,\text{ول} = \frac{۹}{۶۴}\,\text{ول}$$

$$م_{ا} = \frac{۵}{۳۲}\,\text{و}$$

$$م_{ب} = \frac{۲۷}{۳۲}\,\text{و}$$

اس سے جزی قوت کا نقشہ کھینچ لیا جاسکتا ہے۔

بڑے حصے اج میں ا کو مبداء لینے سے

$$م = -\frac{۱}{۴}\,\text{ولا}$$

$$م + مَ = م + م_{ا} + \frac{\text{لا}}{\text{ل}}\left(م_{ب} - م_{ا}\right)$$

$$= -\frac{۱}{۴}\,\text{ولا} + \frac{۳}{۶۴}\,\text{ول} + \frac{۳}{۳۲}\,\text{ولا}$$

$$= \text{و}\left(\frac{۳}{۶۴}\,\text{ل} - \frac{۵}{۳۲}\,\text{لا}\right)$$

یہ $\text{لا} = \frac{۳}{۱۰}\,\text{ل}$ کے لیے صفر ہوتا ہے جس سے نقطۂ انعطاف ع حاصل ہوگا (شکل ۱۲۹)۔

چھوٹے حصے ج ب کے لیے

$$م = -\frac{۳}{۴}\,\text{و}\,(\text{ل} - \text{لا})$$

$$م + مَ = -\frac{۳}{۴}\,\text{و}\,(\text{ل} - \text{لا}) + \frac{۳}{۶۴}\,\text{ول} + \frac{۳}{۳۲}\,\text{ولا}$$

$$= \text{و}\left(-\frac{۴۵}{۶۴}\,\text{ل} + \frac{۲۷}{۳۲}\,\text{لا}\right)$$

یہ $\text{لا} = \frac{۵}{۶}\,\text{ل}$ کے لیے صفر ہوتا ہے جس سے نقطۂ انعطاف ف

حاصل ہوگا۔

دائیں طرف بجوار ڈھال کو مثبت لینے سے ا سے ج تک

$$\text{ع} = \frac{\text{و}}{\text{آ ے}}\int_{0}^{\text{لا}}\left(-\frac{5}{32}\,\text{لا} + \frac{3}{64}\,\text{ل}\right)\text{فرلا} = \frac{\text{و}}{64\,\text{آ ے}}\left(-5\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ل لا}\right)$$

یہ لا = $\frac{3}{5}$ ل کے لیے صفر ہوتا ہے جس سے اعظم انصراف کا محل حاصل ہوگا۔ خماؤ کے معیار کے نقشے، شکل ۱۲۹، کو ایک نظر دیکھنے سے ظاہر ہوگا کہ ا سے اس کا فاصلہ نقطۂ انعطاف ع کے ا سے فاصلے کا دوگنا ہے۔

ج پر جہاں لا = $\frac{3}{4}$ ل :—

$$\text{ع}_{\text{ج}} = \frac{\text{و ل}^2}{64\,\text{آ ے}}\left(-5\times\frac{9}{16} + \frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{1024}\cdot\frac{\text{و ل}^2}{\text{آ ے}}$$

ج سے ب تک ڈھال

$$\text{ع} = \text{ع}_{\text{ج}} + \frac{\text{و}}{\text{آ ے}}\int_{\frac{3}{4}\text{ل}}^{\text{لا}}\left(-\frac{45}{64}\,\text{ل} + \frac{27}{32}\,\text{لا}\right)\text{فرلا}$$

$$= -\frac{9}{1024}\,\frac{\text{و ل}^2}{\text{آ ے}} + \frac{\text{و}}{64\,\text{آ ے}}\left(-45\,\text{ل لا} + 27\,\text{لا}^2\right)\Big|_{\frac{3}{4}\text{ل}}^{\text{لا}}$$

جو $\frac{3}{4}$ ل اور ل کے درمیان کسی قیمت کے لیے صفر نہیں ہوتا۔

ا سے ج تک انصراف

$$\text{ما} = \int \text{ع فرلا} = \frac{\text{و}}{64\,\text{آ ے}}\int_{0}^{\text{لا}}\left(-5\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ل لا}\right)\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{و}}{64\,\text{آ ے}}\left(-\frac{5}{3}\,\text{لا}^3 + \frac{3}{2}\,\text{ل لا}^2\right)$$

ج پر جہاں لا = $\frac{3}{4}$ ل :—

صفحہ ۲۲۳

$$\text{ما}_{\text{ج}} = +\frac{۹}{۴۰۹۶}\,\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{ا ے}}$$

$$\text{لا} = \tfrac{۳}{۵}\,\text{ل پر} \qquad \text{ما}_{\text{اعظم}} = +\frac{۹}{۳۲۰۰}\cdot\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{ا ے}}$$

$$\text{لا} = \tfrac{\text{ل}}{۲}\,\text{پر} \qquad \text{ما} = +\frac{۱}{۳۸۴}\cdot\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{ا ے}}$$

ج سے ب تک انصراف

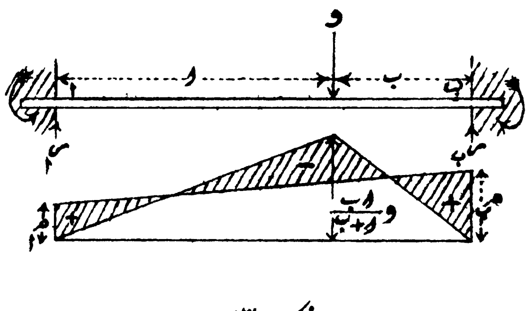
$$\text{ما} = \text{ما}_{\text{ج}} + \int_{\frac{۳}{۴}\text{ل}}^{\text{لا}} \text{ع فرلا} = +\frac{۹}{۴۰۹۶}\cdot\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{ا ے}} + \frac{\text{و}}{۶۴\,\text{ا ے}}\int_{\frac{۳}{۴}\text{ل}}^{\text{لا}} (۱۸\,\text{ل}^{۲}$$

$$-\,۵۴\,\text{ل لا} + ۲۷\,\text{لا}^{۲})\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{و}}{۶۴\,\text{ا ے}}\left\{+\frac{۹}{۶۴}\text{ل}^{۳} + (۱۸\,\text{ل}^{۲}\,\text{لا} - \frac{۵۴}{۲}\,\text{ل لا}^{۲} + ۹\,\text{لا}^{۳})_{\frac{۳}{۴}\text{ل}}^{\text{لا}}\right\}$$

$$= \frac{۹\,\text{و}}{۱۲۸\,\text{ا ے}}(۲\,\text{لا}^{۳} - ۵\,\text{ل لا}^{۲} + ۴\,\text{ل}^{۲}\,\text{لا} - \text{ل}^{۳})$$

مثال ۲ — یہ زیادہ عام مسئلہ کہ ایک بوجھ و ایک دربستہ شہتیر پر



شکل ۱۳۰

ایک سہارے ا سے فاصلہ ا پر اور دوسرے سہارے ب سے فاصلہ ب پر

رکھا ہوا ہے بالکل اسی طرح حل کیا جاسکتا ہے۔

اگر ا > ب اور ا کو مبدا لیا جائے (شکل نمبر ۱۳۰) تو

$$\text{م}_{\text{ا}} = \frac{\text{و ا ب}^2}{(\text{ا}+\text{ب})^2} \quad ، \quad \text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{و ا}^2\text{ب}}{(\text{ا}+\text{ب})^2}$$

$$\text{ر}_{\text{ا}} = \text{و}\,\frac{\text{ب}^2(\text{۳ا}+\text{ب})}{(\text{ا}+\text{ب})^3} \quad ، \quad \text{ر}_{\text{ب}} = \text{و}\,\frac{\text{ا}^2(\text{ا}+\text{۳ب})}{(\text{ا}+\text{ب})^3}$$

نقاطِ انعطاف یہ ہونگے:-

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}}{\text{۳ا}+\text{ب}}(\text{ا}+\text{ب}) \quad \text{اور} \quad \text{لا} = \frac{\text{ا}+\text{۲ب}}{\text{ا}+\text{۳ب}}(\text{ا}+\text{ب})$$

بوجھ کے نیچے ڈھال

$$\text{ع} = -\frac{\text{و ا}^2\text{ب}^2(\text{ا}-\text{ب})}{\text{۲ آ ے}(\text{ا}+\text{ب})^3}$$

صفر ڈھال اور اعظم انصراف کا محل یہ ہوگا:- صفحہ ۲۲۴

$$\text{لا} = \frac{\text{۲ا}}{\text{۳ا}+\text{ب}}(\text{ا}+\text{ب})$$

اور جب کہ ب = ۰ تو یہ $\frac{۲}{۳}$ (ا + ب) ہو جائیگا یعنی اعظم انصراف دربستہ شہتیر میں ہمیشہ فصل کے وسطی ثلث کے اندر رہتا ہے۔

بوجھ کے نیچے انصراف

$$\text{ا} = \frac{\text{و ا}^3\text{ب}^3}{\text{۳ آ ے}(\text{ا}+\text{ب})^3}$$

جو آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کا $\frac{\text{اب}}{(\text{ا}+\text{ب})^2}$ گنا ہے۔

$$\text{اعظم انصراف} = \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{و ا}^3\text{ب}^2}{(\text{۳ا}+\text{ب})^2\,\text{آ ے}}$$

اور فصل کے وسط میں انصراف $= \dfrac{\text{و ب}^{2}\,(3\,\text{ا} - \text{ب})}{48\,\text{آ ے}}$

۸۸۔ متغیر تراش کے دربستہ شہتیر ——— دفعہ ۸۳ میں ہم اس پر غور کر چکے ہیں کہ متغیر تراش کا سادہ شہتیروں کے انصراف پر کیا اثر پڑتا ہے اور دفعہ ۸۷ میں مستقل تراش کے دربستہ شہتیروں سے بحث کی گئی ہے۔ اس لیے مختصراً یہ بتا دینا کافی ہوگا کہ مقدار آ مستقل نہ ہو تو دفعہ ۸۷ کے عمل میں کیا ترمیم کرنی پڑیگی۔ یہ ترمیم اس پر مشتمل ہے کہ سارے عمل میں م کی بجائے $\frac{\text{م}}{\text{آ}}$ کو متغیر سمجھا جائے۔ اس طرح اگر وہی ترقیم اختیار کی جائے تو چونکہ ڈھال کی مجموعی تبدیلی صفر ہے اس لیے

$$\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{فر}^{2}\text{یا}}{\text{فرلا}^{2}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ے}}\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{مہ} + \text{مَ}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ے}}\int_{0}^{\text{ل}} \Big[\frac{\text{مہ}}{\text{آ}} + \frac{1}{\text{آ}}\Big\{\text{م}_{\text{ا}} + (\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}})\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\Big\}\Big]\,\text{فرلا} = 0$$

$$\text{یا}\ \int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{مہ}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} + \text{م}_{\text{ا}}\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{فرلا}}{\text{آ}} + \frac{\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}}{\text{ل}}\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} = 0 \quad \ldots\ldots\ (1)$$

نیز، چونکہ بلندی کی مجموعی تبدیلی صفر ہے اس لیے $\left(\text{لا}\,\frac{\text{فریا}}{\text{فرلا}} - \text{یا}\right)_{0}^{\text{ل}}$ صفر ہوگا یعنی

$$\frac{1}{\text{ے}}\int_{0}^{\text{ل}} \left(\frac{\text{مہ} + \text{مَ}}{\text{آ}}\right)\text{لا فرلا} = \frac{1}{\text{ے}}\int_{0}^{\text{ل}} \Big[\frac{\text{مہ}}{\text{آ}} + \frac{1}{\text{آ}}\Big\{\text{م}_{\text{ا}} + (\text{م}_{\text{ا}} - \text{م}_{\text{ب}})\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\Big\}\Big]\,\text{لا فرلا} = 0$$

$$\text{یا}\ \int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{مہ لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} + \text{م}_{\text{ا}}\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}}{\text{ل}}\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{لا}^{2}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} = 0 \quad \ldots\ldots\ (2)$$

یعنی منحنیوں $\frac{\text{مہ}}{\text{آ}}$ اور $\frac{\text{مَ}}{\text{آ}}$ کے تحت کے رقبے مساوی ہونگے اور ان کے

مرکزِ ہندسی ایک ہی انتصابی خط میں ہونگے۔ لیکن منحنی $\frac{مہ}{آ}$ عام طور پر خطِ مستقیم نہیں ہوگا اس لیے ان دونوں مساواتوں کی دوسری اور تیسری رقمیں ایسی سادہ شکل میں تحویل نہیں ہوتیں جیسی کہ آ کے مستقل ہونے کی صورت میں ہوتی ہیں۔ مہ اور آ، لا کے معلومہ تفاعل ہوں تو مساواتوں (۱) اور (۲) کی ہر رقم کو علٰحدہ علٰحدہ تکمل کیا جاسکتا ہے۔ اس سے دو سادہ ہمزاد مساواتیں حاصل ہونگی جن میں مجہول مقداریں $م_ا$ اور $\frac{1}{ل}(م_ا - م_ب)$ ہیں۔ جب یہ حل ہوجائیں تو $م_ا$ اور $م_ب$ معلوم ہوجائینگے۔ صفحہ ۲۲۵

اگر مہ بے قاعدہ طور پر بدلے، یا اوپر کے تکمل بہت دقت طلب ہوں تو مقداروں $\frac{مہ\,لا}{آ}$ اور $\frac{مہ}{آ}$ کا تکمل ترسیمی طور پر کیا جاسکتا ہے یعنی اس طرح کہ فصل کو اساس مان کر $\frac{مہ\,لا}{آ}$ اور $\frac{مہ}{آ}$ کے منحنی کھینچے جائیں اور ان کا رقبہ صفر سے ل تک معلوم کیا جائے۔

اور اگر آ کسی ایسے اختیاری لیکن مختص طریقے پر بدلے کہ اس کو لا کے تفاعل کے طور پر بیان نہ کیا جاسکے، یا اس سے اوپر کے تکمل تکلیف دہ ہوجائیں تو (۱) اور (۲) کی تینوں مقداروں کا تکمل ترسیماً کیا جائے یعنی منحنیوں

$$\frac{مہ}{آ}،\ \frac{ا}{آ}،\ \frac{لا}{آ}،\ \frac{مہ\,لا}{آ}،\ \frac{لا}{آ}\ \text{اور}\ \frac{لا^۲}{آ}$$

کو فصل کے اساس پر کھینچ کر ان کا رقبہ صفر سے ل تک معلوم کیا جائے۔ اس کے لیے صرف پانچ عمل درکار ہونگے کیونکہ تیسرا اور پانچواں منحنی ایک ہی ہیں۔ آسانی کے لیے یہ کیا جاسکتا ہے کہ $\int_0^ل \frac{لا^۲}{آ}\,فرلا$ کی قیمت کے لیے $\int_0^ل \frac{لا}{آ}\,فرلا$ کو اسے اس کے مرکزِ ہندسی کے فاصلے سے ضرب دیا جائے یا رقبہ

$\int_{\cdot}^{\text{ل}} \frac{\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا}$ کا معیار دفعہ ۶۸ کے "مشتق رقبے والے" طریقے سے لیا جائے۔

اسی طرح کا عمل منحنیوں ($\frac{\text{لا}}{\text{آ}}$ اور $\frac{1}{\text{آ}}$) اور ($\frac{\text{مہ لا}}{\text{آ}}$ اور $\frac{\text{مہ}}{\text{آ}}$) کے لیے بھی درست ہوگا۔

دیکھو چونکہ مہ + مہَ کی جبری قیمت لی گئی ہے اس لیے (۱) اور (۲) کی پہلی رقمیں منفی ہونگی۔

جب $\text{م}_{\text{ا}}$ اور $\text{م}_{\text{ب}}$ معلوم ہو چکیں لیکن خماؤ کے معیار کا نقشہ اُسی طرح کھینچا جا سکتا ہے جس طرح آ کے مستقل ہونے کی صورت میں کھینچا جاتا ہے۔ حاصل خماؤ کے معیار کے نقشے کا حاصل رقبہ ضروری نہیں کہ صفر اور نہ ا یا ب کے گرد اس کے معیار کا صفر ہونا ضروری ہے۔

اگر سروں ا اور ب کے ڈھال (شکل ۱۲۸) صفر نہ ہوں بلکہ زاویوں $\text{عہ}_{\text{ا}}$ اور $\text{عہ}_{\text{ب}}$ پر ثابت ہوں تو ان کو دائیں طرف بخوار ہونے کی صورت میں مثبت سمجھنے سے مساوات (۱) کی بائیں جانب سے ($\text{عہ}_{\text{ب}} - \text{عہ}_{\text{ا}}$) ہو جائیگی۔ $\text{عہ}_{\text{ا}}$ اور $\text{عہ}_{\text{ب}}$ بالعموم مخالف علامتوں کے ہونگے۔ اور مساوات (۲) کی بائیں جانب سے ل $\text{عہ}_{\text{ب}}$ ہو جائیگی۔ مبدا، ا پر ہے۔

خاص صورت — اگر لداؤ فصل کے وسط کے گرد متشاکل ہو اور آ کی قیمتیں بھی فصل کے وسط کے گرد متشاکل ہوں تو چونکہ $\frac{\text{مہ}}{\text{آ}}$ اور $\frac{\text{مہَ}}{\text{آ}}$ کے نقشوں کے مرکزِ ہندسی دونوں سروں سے $\frac{\text{ل}}{2}$ کے فاصلے پر ہونگے اس لیے

$\text{م}_{\text{ا}} = \text{م}_{\text{ب}}$ ' اور مساوات (۱) حسبِ ذیل ہو جائیگی:-

$$\int_{\cdot}^{\text{ل}} \frac{\text{مہ}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} + \text{م}_{\text{ا}} \int_{\cdot}^{\text{ل}} \frac{\text{فرلا}}{\text{آ}} = \cdot$$ عنو ۲۲۶

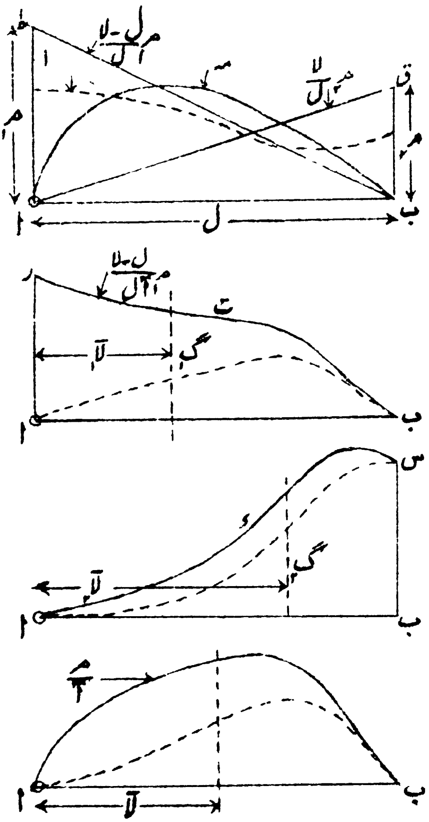
$$\text{م}_{\text{ا}} = \text{م}_{\text{ب}} = -\int_{\cdot}^{\text{ل}} \frac{\text{مہ}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} \div \int_{\cdot}^{\text{ل}} \frac{\text{فرلا}}{\text{آ}}$$

اور چونکہ شہتیر فصل کے وسط میں اُفقی ہے اس لیے

$$م_۱ = م_۲ = -\int_{۰}^{\frac{ل}{۲}} \frac{م}{آ} فرلا \div \int_{۰}^{\frac{ل}{۲}} \frac{فرلا}{آ}$$

جس میں مبدا، سرے پر یا وسط میں لیا جائے جس میں بھی سہولت ہو۔

ترسیمی طریقے کی متبادل شکل ـــــ ترسیمی حل کے لیے اوپر کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو رقبوں اور رقبوں کے معیاروں کی مساواتوں کی شکل میں رکھنے کے لیے سہولت اس میں ہوگی کہ حسب ذیل عمل کیا جائے یعنی ثبت کے دونوں جھکنوں سے علیحدہ علیحدہ بحث کرو اور ان کے اثرات کو جمع کرو۔ بالفاظ دیگر مَ کو دو حصوں میں تقسیم کرو اور منحرف ا ط ق ب شکل ۱۲۸ کے معینوں کو مثلثوں ا ط ب اور ط ق ب یا ا ط ب اور ا ق ب کے معینوں کا حاصل جمع سمجھو۔ اس طرح



شکل ۱۳۱

ا کو مبدا لے کر فاصلہ لا پر

$$\text{م} = \text{م}_{\text{ا}} \frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{ل}} + \text{م}_{\text{ب}} \cdot \frac{\text{لا}}{\text{ل}}$$

اور

$$\frac{\text{م}}{\text{آ}} = \text{م}_{\text{ا}} \frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{آ}\,\text{ل}} + \text{م}_{\text{ب}} \cdot \frac{\text{لا}}{\text{آ}\,\text{ل}}$$

فرض کرو کہ $\text{م}_{\text{ا}} = \text{ع}\,\text{م}_{۱}$ اور $\text{م}_{\text{ب}} = \text{ب}\,\text{م}_{۲}$ جہاں $\text{م}_{۱}$ اور $\text{م}_{۲}$ مثبت کے جفتوں کی کوئی مساوی یا غیر مساوی مفروضہ قیمتیں ہیں۔ خطوط ط ب اور ق ا کھینچو جو $\text{م}_{۱} \frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{ل}}$ اور $\text{م}_{۲} \frac{\text{لا}}{\text{ل}}$ کو تعبیر کریں جیسا کہ شکل ۱۳۱ء میں دکھایا گیا ہے۔
اور ہر ایک معین کو آ سے تقسیم کر کے منحنی ر ت ب اور س ک ا یا

$$\text{م}_{۱} \frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{آ}\,\text{ل}} \quad \text{اور} \quad \text{م}_{۲} \frac{\text{لا}}{\text{آ}\,\text{ل}}$$

حاصل کرو جیسا کہ شکل ۱۳۱ء میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ منحنیوں $\frac{\text{م}_{۱}}{\text{آ}} \cdot \frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{ل}}$ اور $\frac{\text{م}_{۲}}{\text{آ}} \cdot \frac{\text{لا}}{\text{ل}}$ کے تحت کے رقبے علی الترتیب $\text{س}_{۱}$ اور $\text{س}_{۲}$ ہیں اور ان کے مراکزِ ہندسی کے فاصلے مبداء ا سے $\bar{\text{لا}}_{۱}$ اور $\bar{\text{لا}}_{۲}$ ہیں۔ فرض کرو کہ صرف س اور $\bar{\text{لا}}$ آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے منحنی $\frac{\text{مہ}}{\text{آ}}$ سے متعلق ہیں۔ تب چونکہ دربستہ شہتیر میں ڈھال کی تبدیلی صفر ہے اس لیے $\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{مہ} + \text{م}}{\text{آ}}\, \text{فرلا} = 0$ یا

$$\text{س} + \text{ع}\,\text{س}_{۱} + \text{ب}\,\text{س}_{۲} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور چونکہ لیول کی تبدیلی صفر ہے اس لیے

$$\int_{0}^{\text{ل}} \frac{(\text{مہ} + \text{م})\,\text{لا}}{\text{آ}}\, \text{فرلا} = 0$$

یا $\quad س_۱ \times \bar{ل}_۲ + عہ\, س_۱\, \bar{ل}_۱ + بہ\, س_۲\, \bar{ل}_۲ = ۰$ ....(۴)

ہمزاد مساواتوں (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ معلوم ہوجائینگے ۔ پیمانے بہت آسان ہونگے اور ان میں صرف خماؤ کے معیار کا پیمانہ اہم ہے کیونکہ مساواتوں کی ہر رقم میں آ ایک ہی حیثیت سے شریک ہوتا ہے اور عہ اور بہ محض نسبتیں ہیں ۔

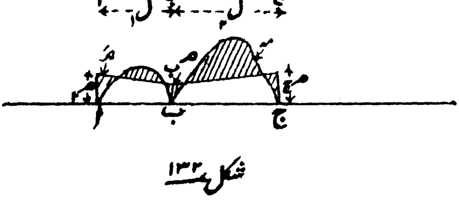
مساوات (۴) کو جو رقبوں کے معیاروں کی رقوم میں ہے سہولت کے لیے رقبوں کی رقوم میں تحویل کیا جاسکتا ہے اور وہ اس طرح کہ مبدا، ا کو قطب لے کر تینوں منحنیوں کے تحت کے رقبوں کے پہلے مشتق رقبے لیے جائیں (دفعہ ۶۸) ۔

اگر سروں کے ڈھال صفر نہ ہوں تو مساواتوں (۳) اور (۴) کی بائیں جانبیں دی ہونگی جو (۱) اور (۲) کے لیے بیان ہوئی ہیں ۔

۸۹ مسلسل شہتیر — تین معیاروں کا مسئلہ

— اگر شہتیر دو سے زیادہ سہاروں پر ٹکا ہوا ہو اور ایک سے زیادہ فصلوں پر چھایا ہوا ہو تو ایسے شہتیر کو مسلسل شہتیر کہتے ہیں ۔ سروں پر سہارے ہوئے اور کسی درمیانی نقطے پر ٹھونی دار شہتیروں پر غور کیا جاچکا ہے (دفعات ۷۸ اور ۸۰)، اور وہ مسلسل شہتیروں کی سادہ خصوصی صورتیں تھیں ۔

پہلے مسلسل شہتیروں کی ایک سادہ صورت پر غور کرو ۔ فرض کرو کہ ا ب اور ب ج (شکل ۱۳۲) ایک مسلسل شہتیر کے دو متصل فصل ہیں جن کے طول ل۱ اور ل۲ ہیں اور جن پر علی الترتیب یکساں پھیلے ہوئے بوجھ و۱ اور و۲ فی اکائی طول ہیں ۔ تب ہر ایک فصل کے لیے



شکل ۱۳۲

دفعہ ۸۵ کی طرح، خماؤ کا معیار دو معیاروں کا جبری مجموعہ ہے ایک وہ جو آزاد سہاروں کی صورت میں ہوتا ہے اور دوسرا وہ جو سہاروں کے تثبیت کے معیاروں کی وجہ سے ہے۔ یعنی مساوات (۸) دفعہ ۸۵ کی طرح

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{مہ} + \text{مَ}$$

جس میں مَ کی علامت عام طور پر مہ کے مخالف ہوگی۔ پہلے اس مساوات کو فصل ب ج پر استعمال کرو۔ ب کو مبدا اور لا کو دائیں طرف مثبت لو۔ صفحہ ۲۲۵
تب مہ $= -\frac{\text{و}}{2}(\text{ل}_2\,\text{لا} - \text{لا}^2)$ اور اس کو منفی سمجھا جائیگا جب کہ اس سے اوپر وار تقعر پیدا ہو۔ اور مساواتوں (۷) اور (۸) دفعہ ۸۵ سے

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = -\frac{\text{و}}{2}\text{ل}_2\,\text{لا} + \frac{\text{و}}{2}\text{لا}^2 + \text{م}_\text{ب} + (\text{م}_\text{ج} - \text{م}_\text{ب})\frac{\text{لا}}{\text{ل}_2} \quad \ldots\ldots (1)$$

اور تکمل کرنے سے

$$\text{آ ے}\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{و}}{4}\text{ل}_2\,\text{لا}^2 + \frac{\text{و}}{6}\text{لا}^3 + \text{م}_\text{ب}\,\text{لا} + (\text{م}_\text{ج} - \text{م}_\text{ب})\frac{\text{لا}^2}{2\,\text{ل}_2} + \text{آ ے ع}_\text{ب} \quad \ldots (2)$$

جہاں $\text{ع}_\text{ب}$ ڈھال $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت ب پر ہے جہاں لا = ۰

دوبارہ تکمل کرنے سے اور لا = ۰ پر ما = ۰ رکھنے سے

$$\text{آ ے ما} = -\frac{\text{و ل}_2}{12}\text{لا}^3 + \frac{\text{و}}{24}\text{لا}^4 + \frac{\text{م}_\text{ب}}{2}\text{لا}^2 + (\text{م}_\text{ج} - \text{م}_\text{ب})\frac{\text{لا}^3}{6\,\text{ل}_2} + \text{آ ے ع}_\text{ب}\,\text{لا} + 0 \quad (3)$$

لا = ل_2 پر ما = ۰ اس لیے یہ قیمتیں رکھ کر ل_2 پر تقسیم کرنے سے

$$\text{آ ے ع}_\text{ب} = \frac{\text{و ل}_2^3}{24} - \frac{\text{م}_\text{ب}\,\text{ل}_2}{2} - \frac{(\text{م}_\text{ج} - \text{م}_\text{ب})\,\text{ل}_2}{6}$$

یا

$$6\ \text{آ ے ع}_\text{ب} = \frac{\text{و ل}_2^3}{4} - 2\,\text{م}_\text{ب}\,\text{ل}_2 - \text{م}_\text{ج}\,\text{ل}_2 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

اب، ب کو مبدا لے کر، اس طرح فصل ب ا سے بحث کریں

جس میں لا بائیں طرف مثبت ہو تو (عب کی علامت کی تبدیلی کے ساتھ) اُوپر کی طرح

$$-\text{٦}\,\text{آ}\,\text{ے}\,\text{ع}_{\text{ب}} = \frac{\text{و}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{\text{ا}}^{\text{٣}}}{\text{٤}} - \text{٢}\,\text{م}_{\text{ب}}\,\text{ل}_{\text{ا}} - \text{م}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{\text{ا}} \quad\ldots\ldots\ldots\ (\text{٥})$$

(۴) اور (۵) کو جمع کرنے سے

$$\text{م}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{\text{ا}} + \text{٢}\,\text{م}_{\text{ب}}(\text{ل}_{\text{ا}} + \text{ل}_{\text{٢}}) + \text{م}_{\text{ج}}\,\text{ل}_{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}(\text{و}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{\text{ا}}^{\text{٣}} + \text{و}_{\text{٢}}\,\text{ل}_{\text{٢}}^{\text{٣}}) = \text{٠} \quad -(\text{٦})$$

یہ کلیپی ران[ل] کا تین معیاروں کا مسئلہ زیر بحث سادہ لداؤ کے لیے ہے۔
اگر ن سہارے ہوں اور ن۔ افصل ہوں یعنی ا ب ج کی طرح دو دو متصل فصلوں کے ن ۔۲ جوڑے ہوں تو (۶) کی جیسی ن ۔۲ مساواتیں لکھی جاسکتی ہیں۔ ن سہاروں کے ن معیاروں کو معلوم کرنے کے لیے دو اور مساواتیں درکار ہونگی اور یہ شہتیر کے سروں کی حالت کے علم سے حاصل ہوتی ہیں مثلاً اگر سرے آزادانہ سہارے ہوئے ہوں تو دونوں سروں پر خماؤ کے معیار صفر ہونگے۔

اگر ایک سرا مثلاً ا افقاً ثابت ہو تو عا = ۰ اور سرے کے فصل کے لیے (۵) کی طرح کی مساوات یہ ہوگی

$$\text{٢}\,\text{م}_{\text{ا}} + \text{م}_{\text{ب}} - \frac{\text{و}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{\text{ا}}^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \text{٠}$$

جب ہر ایک سہارے پر کا خماؤ کا معیار معلوم ہو جائے تو ہر ایک سہارے کا ردِ عمل اِس طرح معلوم ہوسکتا ہے کہ مختلف سہاروں کے گرد اندرونی اور بیرونی قوتوں کے معیاروں پر غور کیا جائے، یا مساوات (۴) دفعہ ۸۵ سے جزی قوت ا کے ذرا دائیں جانب

$$\text{ق}_{\text{ا}} = \frac{\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}}{\text{ل}} - \frac{\text{و}\,\text{ل}}{\text{٢}}$$ جو نیچے وار مثبت ہوگی۔

[ل] (Clapeyron)

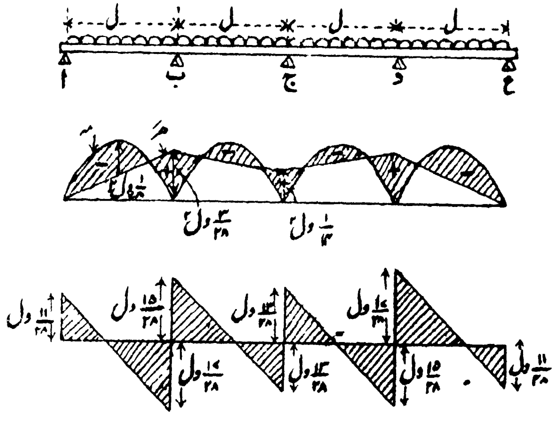
صفحہ ۴۲۶

جب اس طرح ہر ایک سہارے کے پاس دونوں جانبوں کی جزی قوت معلوم ہوجائے تو سہارے پر دباؤ ان دونوں جزی قوتوں کے جبری فرق کے مساوی ہوگا۔ چونکہ جزی قوت سہاروں پر عام طور پر علامت بدلتی ہے اس لیے ردِ عمل کی مقدار عموماً سہارے کے دونوں جانبوں کی جزی قوتوں کا بلا لحاظ علامت مجموعہ ہوگا۔

مثال ۱۔ ایک شہتیر کے پانچ سہارے اور چار مساوی فصل ہیں اور بوجھ سارے طول میں یکساں پھیلا ہوا ہے۔ سہاروں پر کے خماؤ کے معیار، ردِ عمل، وغیرہ، معلوم کرو۔

چونکہ سرے آزاد ہیں (شکل ۱۳۲) اس لیے $م_ا = ۰$ اور $م_ع = ۰$

اور تشاکل سے صریحاً $م_د = م_ب$



شکل ۱۳۲

حصوں ا ب ج اور ب ج د پر تین معیاروں کی مساوات (۶) کا استعمال کرنے سے

$$0 + 2\,\text{م}_{\text{ب}} \times 2\,\text{ل} + \text{م}_{\text{ج}} \times \text{ل} - \frac{1}{2}\,\text{و}\text{ل}^{3} = 0$$

اور $$\text{م}_{\text{ب}} \times \text{ل} + 2\,\text{م}_{\text{ج}} \times 2\,\text{ل} + \text{م}_{\text{ب}} \times \text{ل} - \frac{1}{2}\,\text{و}\text{ل}^{3} = 0$$

اس لیے $$4\,\text{م}_{\text{ب}}\,\text{ل} + \text{م}_{\text{ج}}\,\text{ل} - \frac{1}{2}\,\text{و}\text{ل}^{3} = 0$$

اور $$4\,\text{م}_{\text{ب}}\,\text{ل} + 8\,\text{م}_{\text{ج}}\,\text{ل} - \text{و}\text{ل}^{3} = 0$$

$$7\,\text{م}_{\text{ج}}\,\text{ل} = \frac{1}{2}\,\text{و}\text{ل}^{3}$$

$$\text{م}_{\text{ج}} = \frac{1}{14}\,\text{و}\text{ل}^{2}$$

$$\text{م}_{\text{ب}} = \frac{3}{28}\,\text{و}\text{ل}^{2} = \text{م}_{\text{د}}$$

ب کے گرد معیار لینے سے

$$-\text{س}_{\text{ا}} \times \text{ل} + \frac{\text{و}\text{ل}^{2}}{2} = \frac{3}{28}\,\text{و}\text{ل}^{2}$$

$$\text{س}_{\text{ا}} = \frac{11}{28}\,\text{و}\text{ل} = \text{س}_{\text{ع}}$$

ج کے گرد معیار لینے سے

$$\frac{22}{28}\,\text{و}\text{ل}^{2} + \text{س}_{\text{ب}} \times \text{ل} - 2\,\text{و}\text{ل}^{2} = -\frac{1}{14}\,\text{و}\text{ل}^{2}$$

$$\text{س}_{\text{ب}} = \frac{8}{7}\,\text{و}\text{ل} = \text{س}_{\text{د}}$$

$$\text{س}_{\text{ج}} = 4\,\text{و}\text{ل} - \frac{11}{14}\,\text{و}\text{ل} - \frac{16}{7}\,\text{و}\text{ل} = \frac{13}{14}\,\text{و}\text{ل}$$

شکل ۱۳۲ کے لیے جزی قوت کا نقشہ آسانی سے اس طرح کھینچا جا سکتا ہے کہ ا پر $\frac{11}{28}$ ول قائم کریں، اور معینوں کو شرح و فی اکائی طول کے ساتھ گھٹائیں جس سے ب پر بقدر ول کے گھٹ کر قیمت $-\frac{17}{28}$ ول ہوگی۔ یہاں اس کو بقدر $\frac{8}{7}$ ول کے بڑھائیں۔ اسی طرح ہر فصل میں ہموار شرح و کے ساتھ گھٹائیں صفحہ

اور ہر سہارے پر بقدر اس سہارے کے ردِ عمل کے بڑھائیں۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ (شکل ۱۳۳ ہ) آسانی سے اس طرح کھینچا جاسکتا ہے کہ ہر فصل پر اعظم معین ⅛ ول² کے مکافی کھینچے جائیں اور سہاروں پر معین مہ، مہ_ج، مہ کھینچ کران کے سروں کو خطوطِ مستقیم سے ملائیں۔ تب مہ اور مہ کا جبری مجموعہ شکل ۱۳۳ ہ کے سایہ دار رقبے کے انتصابی معینوں سے حاصل ہوگا۔ کسی فصل کے اندر خماؤ کے معیار کے لیے ایک جبری جملہ مساوات (۸) دفعہ ۸۵ کی رُو سے حسبِ ذیل ہوگا (اوپر وار تحدب کے لیے مثبت ہوگا)۔

فصل ا ب، مبدار ا :—

مہ = − و/۲ (ل لا − لا²) + ۳/۲۸ ول لا = − و لا/۲ (۱۱/۱۴ ل − لا)

فصل ب ج، مبدار ب :—

مہ = − و/۲ (ل لا − لا²) + ۳/۲۸ ول² − ۱/۲۸ ول لا

= − و/۲ (۵/۲۴ ل لا − ۳/۱۴ ل² − لا²)

مثال ۲ — ایک مسلسل گرڈر ا ب ج د تین فصلوں اب = ۶۰ فٹ، ب ج = ۱۰۰ فٹ، ج د = ۴۰ فٹ پر چھایا ہوا ہے۔ ان فصلوں پر یکساں پھیلے ہوئے بوجھ علی الترتیب ا ٹن، ۲ ٹن، ۳ ٹن فی طولی فٹ ہیں۔ اگر گرڈر کی تراش عمودی سارے طول میں مستقل ہو تو سہاروں ب اور ج پر خماؤ کے معیار اور ہر سہارے پر دباؤ معلوم کرو۔

حصہ ا ب ج کے لیے

۰ + ۳۲۰ مہ_ب + ۱۰۰ مہ_ج = ۱/۴ × ۱۰۰۰ (۲۱۶ + ۲۰۰۰) = ۵۵۴۰۰۰

اس لیے ۱۶ مہ_ب + ۵ مہ_ج = ۲۷۷۰۰ ٹن فٹ

حصہ ب ج د کے لیے

۱۰۰ مہ_ب + ۲۸۰ مہ_ج + ۰ = ۱/۴ × ۱۰۰۰ (۱۹۲ + ۲۰۰۰)

یا　　　$۵\, م_{ب} + ۱۴\, م_{ج} = ۲۷۴۰۰$ ٹن فٹ

اس طرح　　　$م_{ب} = ۱۲۶۰٫۳$ ٹن فٹ

اور　　　$م_{ج} = ۱۵۰۷٫۰$ ٹن فٹ

ب کے گرد معیار لینے سے $ر_{۱} \times ۶۰ - ۶۰ \times ۳۰ = -۱۲۶۰٫۳$

$ر_{۱} = ۹$ ٹن

ج　،،　،،　$۱۶۰ \times ۹ + ۱۰۰\, ر_{ب} - ۶۰ \times ۱۳۰ - ۲۰۰ \times ۵۰$

$= -۱۵۰۷$

$ر_{ب} = ۱۴۸٫۵$ ٹن

ج　،،　،،　$۴۰\, ر_{د} - ۱۲۰ \times ۲۰ = -۱۵۰۷$

$ر_{د} = ۲۲٫۳$ ٹن

ب　،،　،،　$۱۴۰ \times ۲۲٫۳۰ + ۱۰۰\, ر_{ج} - ۱۲۰ \times ۱۲۰ - ۲۰۰ \times ۵۰$

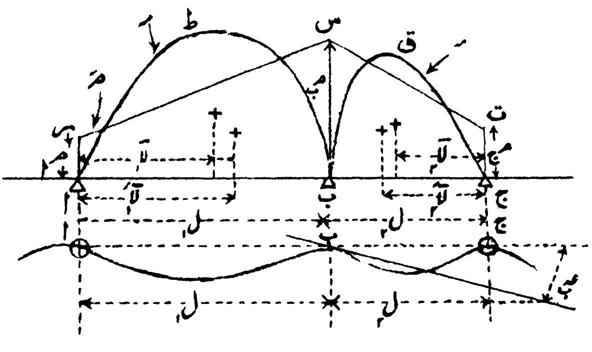
$= -۱۲۶۰$

$ر_{ج} = ۲۰۰٫۱$ ٹن

۹۰۔ **مسلسل شہتیر، کوئی لداؤ** — کوئی دو متصل فصلوں اب $= ل_{۱}$ اور ب ج $= ل_{۲}$ (شکل ۱۳۴ الف) کے لیے خماؤ کے معیار کے نقشے اط ب اور ب ق ج اس مفروضے پر کھینچو کہ ہر ایک فصل پر ایک علٰحدہ آزادانہ سہارا ہوا شہتیر چھایا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ رقبہ اط ب $= ر_{۱}$ اور ا سے اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ $= \overline{لا}_{۱}$، اس طرح ا کے گرد اس رقبے کا معیار $= ر_{۱}\, \overline{لا}_{۱}$۔ فرض کرو کہ رقبہ ب ق ج $= ر_{۲}$ اور ج سے اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ $= \overline{لا}_{۲}$، اس طرح ج کے گرد معیار $= ر_{۲}\, \overline{لا}_{۲}$۔ دفعہ ۷۷ میں اختیار کی ہوئی،

اور اس کے بعد سے استعمال کی ہوئی، علامتوں کے مطابق رقبے $س_۱$ اور $س_۲$ نچوار لداؤ کے لیے منفی ہونگے کیونکہ نچوار لداؤ سے نچوار تحدب پیدا ہوتا ہے جس کے متناظر خماؤ کے معیار کو منفی مانا گیا ہے)۔ دفعہ ۸۵ کی طرح منحرف ا ر س ب اور ب س ت ج کھینچو جو تثبیت کے جفتوں سے پیدا ہونے والے خماؤ کے معیار مَ کو تعبیر کریں۔ فرض کروکہ ان منحرفوں کے رقبے $سَ_۱$ اور $سَ_۲$ ہیں، اور ان کے مراکزِ ہندسی کے فاصلے علی الترتیب ا اور ج سے $\bar{لا}_۱$ اور $\bar{لا}'_۲$ ہیں۔ صفحہ ۲۳۱

ا کو مبدا مان کر لا کو ب کی طرف مثبت لیں اور حدود لا = $ل_۱$ اور لا = ۰ کے درمیان مساوات (۳) دفعہ ۸۱ کے طریقے کو استعمال کریں تو چونکہ سہارے ا اور ب ایک ہی لیول پر ہیں اس لیے



شکل ۱۳۲

$$\left(لا\,\frac{فرما}{فرلا} - ما\right)_{۰}^{ل_۱} = ل_۱\,ع_ب = \frac{۱}{آ\,سے}\int_{۰}^{ل_۱}(م + مَ)\,لا\,فرلا$$

$$= \frac{۱}{آ\,سے}\left(س_۱\,\bar{لا}_۱ + سَ_۱\,\bar{لا}'_۱\right) \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

جہاں $ع_ب$ سہارے ب پر کا ڈھال $\frac{فرما}{فرلا}$ ہے۔

اب ج کو مبدار مانیں اور لا کو ب کی طرف مثبت لیں تو چونکہ ج اور ب ایک ہی لیول پر ہیں اس لیے

$$\left(لا \frac{ف ر ا}{ف لا} - ا\right)_{ب}^{ل_2} = ل_2 ع_ب = \frac{1}{آ ے}\left(س_2 \bar{لا}_2 + سَ_2 \bar{لا}'_2\right) \ldots\ldots (2)$$

(۱) اور (۲) سے ب پر کے ڈھال کی قیمت لے کر اور علامت بدل کر مساوی رکھنے سے کیونکہ لا کی سمت مخالف ہے :۔

$$\frac{س_1 \bar{لا}_1 + سَ_1 \bar{لا}'_1}{ل_1} = - \frac{س_2 \bar{لا}_2 + سَ_2 \bar{لا}'_2}{ل_2} \ldots\ldots\ldots (3)$$

لیکن دفعہ ۸۷ (۴ و) کی طرح ۲ اس کو ملا کر ا کے گرد معیار لینے سے

$$سَ_1 \bar{لا}'_1 = \frac{ل_1^2}{6}\left(م_1 + 2 م_ب\right)$$

اور اسی طرح $$سَ_2 \bar{لا}'_2 = \frac{ل_2^2}{6}\left(م_ج + 2 م_ب\right)$$

صفحہ ۳۲ اس لیے (۳) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے :۔

$$\frac{س_1 \bar{لا}_1}{ل_1} + \frac{س_2 \bar{لا}_2}{ل_2} + \frac{1}{6} م_1 ل_1 + \frac{1}{3} م_ب (ل_1 + ل_2) + \frac{1}{6} م_ج ل_2 = 0$$

یا $$\frac{6 س_1 \bar{لا}_1}{ل_1} + \frac{6 س_2 \bar{لا}_2}{ل_2} + م_1 ل_1 + 2 م_ب (ل_1 + ل_2) + م_ج ل_2 = 0 \ldots (4)$$

یہ تین معیاروں کی مساوات کی عام شکل ہے جس کی دفعہ گزشتہ کی مساوات (۶) ایک خاص صورت ہے جو $س_1 = -\frac{2}{3} \frac{و ل_1^2}{8} \times ل$ اور $\bar{لا}_1 = \frac{ل_1}{2}$، وغیرہ، رکھنے سے عام شکل سے آسانی سے اخذ ہو سکتی ہے۔ رقبے $س_1$ اور $س_2$ منفی لیے جائینگے کیونکہ اُوپر وار تقعر پیدا کرتے ہیں۔ ن سہاروں کے شہتیر کے لیے ربط (۴) سے ن − ۲ مساواتیں

حاصل ہوتی ہیں، اور باقی ضروری دو سروں کے سہاروں کی کیفیت سے حاصل ہونگی۔ اگر کوئی سرا اُفقاً ثابت ہو تو اُس سرے کے متصل فصل کے معیاروں کی مساوات دفعہ ۲۸۰ کے طریقے سے حاصل ہوگی۔ مثلاً اگر ا اُفقاً ثابت ہو اور پہلا فصل اب ہو تو ب کے گرد رقبوں کا معیار لینے سے دفعہ ۲۸۰ کی مساوات (۵) کے مماثل ذیل کی مساوات حاصل ہوتی ہے:۔

$$2\,\text{م}_{\text{ا}} \times \text{م}_{\text{ب}} + \frac{6\,\text{س}_1(\text{ل}_1 - \bar{\text{لا}}_1)}{\text{ل}_1^2} = 0$$ (جس میں س_1 عموماً منفی ہوگا)

اگر دونوں سرے اُفقاً ثابت ہوں تو دوسرے سرے کے لیے بھی اسی طرح کی ایک مساوات حاصل ہوگی۔ اگر ایک سرا مثلاً ا سہارے ب کی طرف نچوار ڈھال $\text{ع}_{\text{ا}}$ پر ثابت ہو تو اس مساوات کی بائیں جانب صفر کی بجائے $-\frac{6\,\text{آ}\,\text{ے}\,\text{ع}_{\text{ا}}}{\text{ل}}$ ہوگی۔ اگر کوئی سرا آخری سہارے سے برآویختہ ہو تو آخری سہارے پر جھکاؤ کا معیار برآمدہ بیرم کے طریقے سے حاصل ہوگا۔

اگر ایک یا زیادہ سہارے دھنسیں، سہارا ب سہارے ا سے بقدر صہ_1 کے اور ج سے بقدر صہ_2 کے نیچے ہو جائے تو (۱) اور (۲) میں ایک رقم ما کے متناظر شریک ہوگی اور اس طرح (۳) حسبِ ذیل ہو جائیگی:۔

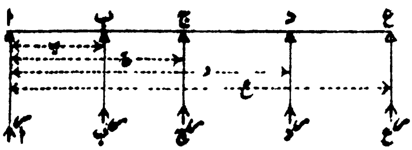
$$\frac{\text{س}_1\bar{\text{لا}}_1 + \text{سَ}_1\bar{\text{لا}}'_1 + \text{آ}\,\text{ے}\,\text{صہ}_1}{\text{ل}_1} = -\frac{\text{س}_2\bar{\text{لا}}_2 + \text{سَ}_2\bar{\text{لا}}'_2 + \text{آ}\,\text{ے}\,\text{صہ}_2}{\text{ل}_2} \quad \ldots (۱۳\text{ا})$$

اور (۴) حسبِ ذیل ہو جائیگی

$$\frac{6\,\text{س}_1\bar{\text{لا}}_1}{\text{ل}_1} + \frac{6\,\text{س}_2\bar{\text{لا}}_2}{\text{ل}_2} + \text{م}_{\text{ا}} \times \text{ل}_1 + 2\,\text{م}_{\text{ب}}(\text{ل}_1 + \text{ل}_2) + \text{م}_{\text{ج}} \times \text{ل}_2$$

$$+\,6\,\text{آ}\,\text{ے}\left(\frac{\text{صہ}_1}{\text{ل}_1} + \frac{\text{صہ}_2}{\text{ل}_2}\right) = 0 \quad (۵)$$

ولسن کا طریقہ ۔۔۔ مسلسل شہتیروں کے عام مسائل حل کرنے کا ایک سادہ اور زیرک طریقہ ڈاکٹر جارج وِلسن[1] نے شائع کیا ہے جو اس پر مشتمل ہے کہ ہر سہارے پر تمام سہارنے والی قوتوں سے پیدا ہونے والے اُوپر وار انصراف کو ہر سہارے پر بوجھ کی وجہ سے بغیر درمیانی سہاروں کے شہتیر میں پیدا ہونے نچوار انصراف کے مساوی رکھا جائے ۔ اس طرح کرنے سے سروں کے سوا باقی تمام سہاروں کے ردِّ عمل معلوم کرنے کے لیے کافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ۔ یہ معلوم کر لینے کے بعد سروں کے ردِّ عمل حسبِ معمول اس طرح معلوم کیے جائیں گے کہ ایک سرے کے گرد تمام اوپروار اور نچوار قوتوں کے معیار لیے جائیں اور آزاد سروں کی صورت میں ان کے جبری حاصل جمع کو صفر کے مساوی رکھا جائے ۔ ایک معین مثال کے طور پر
صفحہ ۴۳۳
فرض کرو کہ شہتیر پانچ نقطوں ا، ب، ج، د، ع پر سہارا ہوا ہے جو سب ایک ہی لیول پر ہیں شکل ۱۳۵ ۔ فرض کرو کہ ا سے ب، ج، د، ع کے فاصلے علی الترتیب ب، ج، د، ع ہیں اور فرض کرو کہ اگر شہتیر ا اور ع پر آزادانہ سہارا ہوا ہوتا تو بوجھ کی وجہ سے ا، ب، ج، د، ع پر انصراف



شکل ۱۳۵

ہا، ہب، ہج، ہد، ہع ہوتے ۔ یہ انصراف دفعات ۷۸، ۸۰، ۸۱ یا ۸۲ کے طریقے سے محسوب ہو سکتے ہیں بلحاظ اس کے کہ شہتیر کا لداؤ کس طرح کا ہے۔
اب فرض کرو کہ اگر شہتیر سروں پر سہارا ہوا ہوتا تو ب پر اُوپر وار

[1] Proc. Roy. Soc., Vol. 62, Nov., 1807

ایک پونڈ یا ایک ٹن یا قوت کی کسی اَور اکائی کی وجہ سے ب، ج، د پر انصراف

$\text{}_{ب}ص_{ب}$، $\text{}_{ب}ص_{ج}$، $\text{}_{ب}ص_{د}$ علی الترتیب ہوتے۔

اور ج پر اکائی قوت کی وجہ سے

$\text{}_{ج}ص_{ب}$، $\text{}_{ج}ص_{ج}$، $\text{}_{ج}ص_{د}$ علی الترتیب

اور د پر اکائی قوت کی وجہ سے

$\text{}_{د}ص_{ب}$، $\text{}_{د}ص_{ج}$، $\text{}_{د}ص_{د}$ علی الترتیب ہوتے۔

تب چونکہ تمام سہارے صفر سطح پر ہیں اس لیے اگر ب، ج، د کے ردِّعمل علی الترتیب $س_{ب}$، $س_{ج}$، $س_{د}$ ہوں تو سروں پر سہارے ہوئے شہتیر کے لیے ب، ج، د پر کے اُوپر وار اور نیچوار انصرافوں کو مساوی رکھنے سے

$$م_{ب} = (س_{ب} \times \text{}_{ب}ص_{ب}) + (س_{ج} \times \text{}_{ج}ص_{ب}) + (س_{د} \times \text{}_{د}ص_{ب}) \quad \ldots\ldots(۶)$$

$$م_{ج} = (س_{ب} \times \text{}_{ب}ص_{ج}) + (س_{ج} \times \text{}_{ج}ص_{ج}) + (س_{د} \times \text{}_{د}ص_{ج}) \quad \ldots\ldots(۷)$$

$$م_{د} = (س_{ب} \times \text{}_{ب}ص_{د}) + (س_{ج} \times \text{}_{ج}ص_{د}) + (س_{د} \times \text{}_{د}ص_{د}) \quad \ldots\ldots(۸)$$

دیکھو $\text{}_{ج}ص_{ب} = \text{}_{ب}ص_{ج}$، $\text{}_{د}ص_{ب} = \text{}_{ب}ص_{د}$، $\text{}_{ج}ص_{د} = \text{}_{د}ص_{ج}$ جو دفعہ ۸۰ کی مساوات (۷) میں ب کو لا میں، لا کو ب میں، اور و کو ا+ب−لا میں تبدیل کرنے سے ظاہر ہوگا۔

(۶)، (۷)، (۸) تین سادہ ہمزاد مساواتیں ہیں۔ ان سے $س_{ب}$، $س_{ج}$، $س_{د}$ معلوم ہوسکتے ہیں۔ $س_{ع}$ کو ا کے گرد معیاروں کی مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$س_{ع} \times ع$ = (ا کے گرد کُل بوجھ کا معیار) − ب × $س_{ب}$ − ج × $س_{ج}$ − د × $س_{د}$

اور $ر_ا$ = کل بوجھ - $ر_ب$ - $ر_ج$ - $ر_د$ - $ر_ع$

دفعہ ۸۰ کے آخر میں جو مشق دی گئی ہے وہ اس طریقے کی ایک سادہ مثال ہے۔ اس میں صرف ایک سہارا ہے اور اس طرح صرف ایک سادہ مساوات حل کرنی ہوتی ہے۔

وِلسن کا طریقہ اُن صورتوں میں جبری حسابات کے لیے اختیار کیا جاسکتا ہے جن میں لداؤ سادہ ہو اور اس طرح اُوپر وار اور نچوار انصراف آسانی سے محسوب ہوسکیں۔ لیکن یہ غیر منتظم لداؤ کے لیے بھی اُتنا ہی قابلِ اطلاق ہے جن میں متعدد نقاط کے نچوار انصراف ترسیم کے ذریعے ایک واحد عمل کے ذریعے حاصل ہوجاتے ہیں۔

جب سب ردِّ عمل معلوم ہوجائیں تو کسی مقام پر خماؤ کا معیار اور جزی قوت اُن کی تعریفات (دفعہ ۵۶) کی مدد سے بالراست محسوب ہوسکتے ہیں۔

صفحہ ۲۳۴ اس طریقے میں ظاہر ہے کہ کسی سہارے کی دھسن کا بہت آسانی کے ساتھ لحاظ رکھا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر سہارا ب بقدر ایک معلومہ مقدار کے دھنسے تو دھسن کی مقدار کو مساوات (۶) کی دائیں جانب سے منہا کرلینا چاہیے۔

اگر شہتیر کا ایک سرا ثابت ہو تو انصرافوں کو اس طرح حاصل کرلینا چاہیے کہ شہتیر ایک تھونی دار برآمدہ بیرم ہے (دفعات ۷۹ اور ۸۱)۔ اگر دونوں سرے ثابت ہوں تو دفعات ۸۶ اور ۸۷ کا اطلاق کرنا چاہیے۔

مثال ۱ ۔ دفعہ ۸۹ کی مثال ۱ کے ردِّ عمل ولسن کے طریقے سے حاصل کرو۔ شکل ۱۳۳ کو استعمال کریں تو شہتیر کو صرف ا اور ج پر سہارا ہوا سمجھ کر ا کو مبداء لینے سے مساوات (۹) دفعہ ۸۰ کی رُو سے

$$م_ب = \frac{ول^۲}{۲۴ آ ے}(۱-۸+۶۴) = \frac{۵۷}{۲۴}\frac{ول^۲}{آ ے} = م_د$$ تشاکل کی رُو سے

اور مساوات (۱۱) دفعہ ۸۷ کی رُو سے

$$م_ج = \frac{۵}{۳۸۴}\,\frac{۲۵۶ ل^۲}{آ ے} = \frac{۱۰}{۳}\,\frac{ول^۲}{آ ے}$$

اور مساواتوں (۷) اور (۸) دفعہ ۸۰ کے استعمال سے تھونیوں کی وجہ سے اُوپر وار انصراف حسبِ ذیل ہونگے :-

$$\text{ب پر} = \frac{ل^۳}{آ ے}\left\{\frac{س_ب \times ۹ \times ۱}{۳ \times ۴} - \frac{س_ج \times ۲}{۴}\left(\frac{۱}{۶} - \frac{۴}{۶} - \frac{۴}{۳}\right) - \frac{س_د}{۴}\left(\frac{۱}{۶} - \frac{۹}{۶} - \frac{۳}{۳}\right)\right\}$$

$$= \frac{ل^۳}{آ ے}\left(\frac{۴}{۳} س_ب + \frac{۱۱}{۱۲} س_ج\right)$$ ، کیونکہ تشاکل سے $س_ب = س_د$

$$\text{اور ج پر} = \frac{ل^۳}{آ ے}\left\{-\frac{۲ س_ب \times ۲}{۴}\left(\frac{۴}{۳} - \frac{۹}{۶} - \frac{۳}{۳}\right) + \frac{س_ج \times ۱۶}{۱۲}\right\}$$

$$= \frac{ل^۳}{آ ے}\left(\frac{۱۱}{۱۶} س_ب + \frac{۴}{۳} س_ج\right)$$

ب اور ج پر اوپر وار اور نچوار انصراف کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{۵۷}{۲۴} ول = \frac{۴}{۳} س_ب + \frac{۱۱}{۱۲} س_ج$$

$$\frac{۱۰}{۳} ول = \frac{۱۱}{۶} س_ب + \frac{۴}{۳} س_ج$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$س_ب = س_د = \frac{۵}{۷} ول \quad \text{اور} \quad س_ج = \frac{۱۳}{۱۴} ول$$

$$س_ا = س_ع = \frac{۱}{۲}\left(۴ ول - ۲ \times \frac{۵}{۷} ول - \frac{۱۳}{۱۴} ول\right) = \frac{۱۱}{۲۸} ول$$

$$\text{م}_{\text{ب}} = -\frac{11}{28}\,\text{ول}^2 + \frac{\text{ول}^2}{2} = \frac{3}{28}\,\text{ول}^2$$

$$\text{م}_{\text{ج}} = 2\,\text{ول}^2 - \frac{8}{7}\,\text{ول}^2 - \frac{11}{28}\,\text{ول} \times 2\,\text{ل} = \frac{1}{14}\,\text{ول}^2$$

خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے وہی ہونگے جو شکل ۱۳۳ میں دکھائے گئے ہیں اور کسی مقام کا خماؤ کا معیار آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

مثال ۲۔ ایک ۳۰ فٹ لمبا مسلسل شہتیر سروں پر سہارا ہوا ہے اور اس کو بائیں سرے سے ۱۰ فٹ اور ۲۲ فٹ کے فاصلے پر سروں کے لیول میں تھونی دی گئی ہے۔ اس پر بائیں سرے سے ۷ فٹ، ۱۴ فٹ، اور ۲۴ فٹ کے فاصلے پر ۵ ٹن، ۷ ٹن اور ۶ ٹن کے بوجھ عمل کرتے ہیں۔ تھونیوں پر خماؤ کے معیار، چاروں سہاروں کے ردِ عمل، اور نقاطِ انعطاف معلوم کرو۔

پہلے، تین معیاروں کی عام مساوات سے حصہ صفحہ ۲۳۵
ا ب ج (شکل ۱۳۶) کے لیے دفعہ ۹۰ کی ترقیم سے
ا ب پر کے خماؤ کے معیار کے نقشے کے رقبے کا معیار ا کے گرد۔

$$\text{س}_1\bar{\text{آ}}_1 = \left(\frac{1}{2}\times 7\times\frac{21}{2}\times\frac{2}{3}\times 7\right) + \left(\frac{1}{2}\times 3\times\frac{21}{2}\times 8\right)$$

$$= \frac{343}{2} + 126 = 297{,}5 \text{ ٹن (فٹ)}^3$$

ب ج پر کے خماؤ کے معیار کے نقشے کے رقبے کا معیار ج کے گرد۔

$$\text{س}_2\bar{\text{آ}}_2 = \left(\frac{1}{2}\times 4\times\frac{56}{3}\times\frac{23}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\times 8\times\frac{56}{3}\times\frac{16}{3}\right)$$

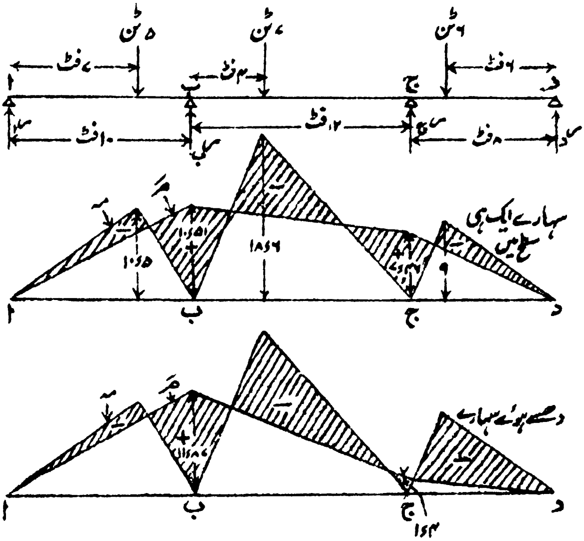
$$= \frac{3136}{9} + \frac{3584}{9} = 746{,}6 \text{ ٹن (فٹ)}^3$$

اس کو دفعہ ۷۷ کے آخر میں اختیار کی ہوئی علامتوں کی رُو سے منفی لینا چاہیے۔ تب چونکہ $\text{م}_{\text{ا}} = 0$ اس لیے مساوات (۴) دفعہ ۹۰ سے:-

$$-(۲۹٫۷۵\times۶)-\frac{۷۴۶٫۶\times۶}{۱۲}+۰+۲م_{ب}\times۲۲+۱۲م_{ج}=۰$$

یا

$$۴۴م_{ب}+۱۲م_{ج}=۵۵۱٫۸۳ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (۹)$$



شکل ۱۲۶

حصہ ب ج د کے لیے —

ب کے گرد $س_{۱}\bar{ا}_{۱}=(\frac{۱}{۲}\times۴\times\frac{۵۶}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times۴)+(\frac{۱}{۲}\times۸\times\frac{۵۶}{۳}\times\frac{۲۰}{۳})$

$=۵۹۷٫\dot{۳}$

د کے گرد $س_{۲}\bar{ا}_{۲}=(\frac{۱}{۲}\times۲\times۹\times\frac{۲۰}{۳})+(\frac{۱}{۲}\times۶\times۹\times۴)=۱۶۸$

ان کو منفی لینا چاہیے۔ اور $م_{د}=۰$ اس لیے (۴) سے

$$-\frac{۵۹۷٫\dot{۳}\times۶}{۱۲}-\frac{۱۶۸\times۶}{۸}\times۱۲م_{ب}\times۲م_{ج}\times۲۰+۰=۰$$

یا $۱۲\,\text{م}_{\text{ب}} + ۴۰\,\text{م}_{\text{ج}} = ۴۲۴۴٫۶$ .... (۱۰)

اور مساواتوں (۹) اور (۱۰) سے

$\text{م}_{\text{ب}} = ۱۰٫۵۱$ ٹن فٹ ، $\text{م}_{\text{ج}} = ۷٫۴۶$ ٹن فٹ

صفحہ ۲۳۶

ب کے بائیں طرف معیار لینے سے —

$۵ \times ۳ - ۱۰\,\text{س}_{\text{ا}} = ۱۰٫۵۱$ $\text{س}_{\text{ا}} = ۰٫۴۴۹$ ٹن

ج کے بائیں طرف معیار لینے سے —

$۵ \times ۱۵ + ۷ \times ۸ - ۲۲ \times ٫۴۵ - ۱۲\,\text{س}_{\text{ب}} = ۷٫۴۶$

$\text{س}_{\text{ب}} = ۹٫۴۷۱$ ٹن

ج کے دائیں طرف معیار لینے سے

$۶ \times ۲ - ۸\,\text{س}_{\text{د}} = ۷٫۴۶$ $\text{س}_{\text{د}} = ٫۵۶۷$ ٹن

$\text{س}_{\text{ج}} = ۵ + ۷ + ۶ - ٫۴۵ - ۹٫۴۷ - ٫۵۷ = ۷٫۵۱$ ٹن

نقاطِ انعطاف — ا کو مبداء لے کر اوپر وار تحدب کو مثبت خماؤ مانیں تو ۵ ٹن کے بوجھ سے ب تک خماؤ کا معیار

$= ۵(\text{لا} - ۷) - ۰٫۴۴۹\,\text{لا} = ۴٫۵۵۱\,\text{لا} - ۳۵$

جو لا = ۷٫۶۹ فٹ پر صفر ہوتا ہے۔

ب سے ۷ ٹن کے بوجھ تک خماؤ کا معیار

$= ۴٫۵۵۱\,\text{لا} - ۳۵ - ۹٫۴۷۱(\text{لا} - ۱۰)$

$= ۵۹٫۷۱ - ۴٫۹۲\,\text{لا}$

جو لا = ۱۲٫۱۴ فٹ پر صفر ہوتا ہے۔

۷ ٹن کے بوجھ سے ج تک خماؤ کا معیار

= ۷۱٫۵۹ − ۹۲٫۴ لا + ۷ (لا − ۱۴)

= ۳۸٫۲۹ − ۲٫۰۸ لا

جو لا = ۱۸٫۵ فٹ پر صفر ہوتا ہے۔

ج سے ۶ ٹن کے بوجھ تک خماؤ کا معیار ـــ

= ۲٫۰۸ لا − ۳۸٫۲۹ − ۷٫۵۱ (لا − ۲۲)

= ۱۲۶٫۶۹ − ۵٫۴۳ لا

جو لا = ۲۳٫۴ فٹ پر صفر ہوتا ہے۔

دوسرے، ولسن کے طریقے سے ـــ صرف سروں پر سہارے ہوں تو مساواتوں (۷) اور (۱۰) دفعہ ۸۰ کی رو سے ب پر نچوار انصراف

$$= -\frac{1}{6\,\text{آ}\,\text{ے} \times 30}\Big[\{5\times 7\times 20\,(400-529-322)\}$$

$$+\{7\times 16\times 10\,(100-448-196)\}$$

$$+\{6\times 6\times 10\,(100-576-288)\}\Big]$$

یعنی $\text{ب} = \frac{1}{180\,\text{آ}\,\text{ے}}\,(315700 + 609280 + 275040) = \frac{1200020}{180\,\text{آ}\,\text{ے}}$

$$\text{ب ج} = -\frac{1}{6\,\text{آ}\,\text{ے} \times 30}\Big[\{5\times 7\times 8\,(64-529-322)\}$$

$$+\{7\times 14\times 18\,(64-256-448)\}$$

$$+\{6\times 6\times 22\,(484-576-288)\}$$

یعنی $\text{ب ج} = \frac{1}{180\,\text{آ}\,\text{ے}}\,(220360 + 501760 + 300960) = \frac{1023080}{180\,\text{آ}\,\text{ے}}$

صرف سروں پر سہارے ہوں تو ب اور ج پر کی تھونیوں کی

وجہ سے اوپر وار انصراف

ب پر = ۱ / (۶ آ ے × ۳۰) [{۲ سب × ۱۰۰ × ۴۰۰} + {- سج × ۸ × ۱۰

(۳۵۲ - ۴۸۴ - ۱۰۰)}]

= ۱ / (۱۸۰ آ ے) (۸۰۰۰۰ سب + ۵۸۸۸۰ سج)

صفحہ ۲۴۷

ج پر = ۱ / (۶ آ ے × ۳۰) [{- سب × ۱۰ × ۸ (۴۰۰ - ۴۰۰ - ۶۴)}

+ {۲ سج × ۶۴ × ۴۸۴}]

= ۱ / (۱۸۰ آ ے) (۵۸۸۸۰ سب + ۶۱۹۵۲ سج)

ب اور ج پر اوپر وار اور نچوار انصراف کو مساوی رکھنے سے :-

۸۰۰۰۰ سب + ۵۸۸۸۰ سج = ۱۲۰۰۰۲۰ .... (۱۱)

۵۸۸۸۰ سب + ۶۱۹۵۲ سج = ۱۰۲۳۰۸۰ .... (۱۲)

ان سے حاصل ہوتا ہے

سب = ۹ء۴۷ ٹن اور سج = ۱۵ء۷ ٹن

جس سے سابقہ نتائج کی تصدیق ہوتی ہے۔ سروں کے ردِ عمل، سہاروں پر کے خماؤ کے معیار، اور نقاطِ انعطاف کے محل بالراست نہایت آسانی سے نکل آتے ہیں (دیکھو شکل ۱۳۶ے)۔

مثال ۳ — اگر مثال ۲ کے مسلسل شہتیر کی تراش کا معیارِ جمود ۳۰۰ انچ اکائیاں ہو اور سہارا ب ۱/۲۰ انچ اور سہارا ج ۱/۱۰ انچ دھنسے تو سہاروں پہ خماؤ کے معیار اور ردِ عمل معلوم کرو۔ ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ۔

پہلے، وِلسن کے طریقے سے ـــ بوجھ کی وجہ سے ب پر عمودار انصراف

= ۱/(آ ے) × ۱۲۰۰۰۲۰/۱۸۰ فٹ اگر آ اور ے فٹ اور ٹن میں ہوں

اور = ۱۷۲۸/(آ ے) × ۱۲۰۰۰۲۰/۱۸۰ انچ اگر آ اور ے انچ کی اکائی میں ہوں

تھونیوں کی وجہ سے ب پر جو اوپر وار انصراف ہوگا وہ اس سے ۰٫۰۵ انچ کم ہونا چاہیے۔ اس لیے

۱۷۲۸/(۱۸۰ آ ے) (۸۰۰۰۰ مب + ۵۸۸۸۰ مج) = ۱۷۲۸/(۱۸۰ آ ے) (۱۲۰۰۰۲۰) − ۰٫۰۵

یا آ = ۳۰۰ اور ے = ۱۳۰۰۰ رکھنے سے (۱۱) کے متناظر

۸۰۰۰۰ مب + ۵۸۸۸۰ مج = ۱۲۰۰۰۲۰ − ۲۰۳۱۲ = ۱۱۷۹۷۰۸ ......(۱۳)

اور ج پر ۱ انچ دھسن کا لحاظ رکھنے سے (۱۲) کے متناظر

۵۸۸۸۰ مب + ۶۱۹۵۲ مج = ۱۰۲۳۰۸۰ − ۴۰۶۲۵ = ۹۸۲۴۵۵ ......(۱۴)

سادہ مساواتوں (۱۳) اور (۱۴) سے

مج = ۶٫۱۳ ٹن اور مب = ۱۰٫۲۳ ٹن

ا کے گرد معیاروں کی مساوات سے مد = ۱۷٫۳۳ ٹن

د " " " " ما = ۱٫۳۱ ٹن

صفحہ ۲۳۸ دوسرے، تین معیاروں کی عام مساوات سے ـــ دفعہ ۹۰ کی مساوات (۵) سے (۹) کے متناظر ایک مساوات بنائی جا سکتی ہے جس کی اکائیاں ٹن (فٹ)² ہونگی۔ انچ کی اکائی استعمال

کرنے سے یہ مساوات حسبِ ذیل ہو جائیگی :-

$$۱۴۴\,(۴۴\,\text{م}_{\text{ب}} + ۱۲\,\text{م}_{\text{ج}}) + ۶ \times ۱۳۰۰۰ \times ۳۰۰ \left(\frac{۰٫۰۵}{۱۲۰} - \frac{۰٫۰۵}{۱۴۴}\right) = ۱۴۴ \times ۵۵۱٫۸۳$$

یا

$$۴۴\,\text{م}_{\text{ب}} + ۱۲\,\text{م}_{\text{ج}} = ۵۵۱٫۸۳ - ۱۱٫۳ \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱۵)$$

اور (۱۰) کے متناظر

$$۱۲\,\text{م}_{\text{ب}} + ۴۰\,\text{م}_{\text{ج}} = ۴۲۴٫۶ - \frac{۳۰۰ \times ۱۳۰۰۰ \times ۶}{۱۴۴}\left(\frac{۰٫۰۵}{۱۴۴} + \frac{۰٫۱}{۹۶}\right)$$

یا

$$۱۲\,\text{م}_{\text{ب}} + ۴۰\,\text{م}_{\text{ج}} = ۱۹۹ \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱۶)$$

(۱۵) اور (۱۶) سے

م ب = ۱۱٫۸۷ ٹن فٹ ، م ج = ۱٫۴۰۴ ٹن فٹ

ب کے بائیں جانب معیار لینے سے س ا = ۱۳٫۱ ٹن

ج کے دائیں " " " س د = ۱٫۳۳ "

ب " " " " " س ج = ۱۳٫۹۶ "

ج " بائیں " " " س ب = ۱۰٫۲۳ "

جس سے سابقہ نتائج کی تصدیق ہوتی ہے -

خماؤ کے معیاروں کا نقشہ شکل ۱۳۶ کے نچلے حصے میں دکھایا گیا ہے - دیکھو ب ، ج پر اور ۶ ٹن کے بوجھ کے نیچے خماؤ کے معیار کی مقدار میں اُستوار سہاروں کے مقابلے میں شدید تغیر واقع ہوا ہے - نیز ج کے دائیں اور بائیں طرف کے نقاطِ انعطاف کے محل بھی بدل گئے ہیں جس کی وجہ سے شہتیر کے کچھ طول پر خماؤ کے معیار کی علامت بدل گئی ہے - یہ سب تغیرات سہاروں ب اور ج کی خفیف دھسن کی وجہ سے ہے -

۹۱۔ متغیر تراش کے مسلسل شہتیر ۔۔۔ دفعہ گزشتہ کے طریقوں کا اطلاق اُن صورتوں پر بھی ہو سکتا ہے جن میں تراش کا معیارِ جمود آ فصل کے طول میں مستقل نہ ہو۔ پہلے طریقے میں حسبِ ذیل ترمیم کرنی ہوگی۔ مساوات (۱) دفعہ ۹۰ حسبِ ذیل ہو جائیگی:-

$$\text{ل}\,\text{عب} = \frac{1}{\text{ہ}} \int_0^{\text{ل}_1} \frac{\text{مہ} + \text{مَ}}{\text{آ}}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ہ}} \left(\text{س}_1 \bar{\text{لا}}_1 + \text{سَ}_1 \bar{\text{لا}}'_1\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

جہاں س_1 اور $\bar{\text{لا}}_1$، وغیرہ، منحنیوں $\frac{\text{مَ}}{\text{آ}}$، وغیرہ، کے رقبوں سے متعلق ہیں۔

علامات کے مفہوم میں اس طرح کی ترمیم کر لینے سے مساوات (۳) دفعہ ۹۰ صحیح رہتی ہے۔ لیکن اس کو تکملی شکل میں بھی یوں لکھا جاسکتا ہے:-

$$\frac{1}{\text{ل}_1}\left(\int_0^{\text{ل}_1} \frac{\text{مہ}\,\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} + \int_0^{\text{ل}_1} \frac{\text{مَ}\,\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا}\right) = -\frac{1}{\text{ل}_2}\left(\int_0^{\text{ل}_2} \frac{\text{مہ}\,\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} + \int_0^{\text{ل}_2} \frac{\text{مَ}\,\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

جس میں دائیں جانب کے لیے مبدا ر ا ہے اور بائیں جانب کے لیے ج۔

دائیں جانب کے لیے:- صفحہ ۲۳۹

$$\text{مَ} = \text{م}_{\text{ا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ل}_1}\left(\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}\right)$$

جس میں لا، ب کی طرف مثبت ہے۔ بائیں جانب کے لیے:-

$$\text{مَ} = \text{م}_{\text{ج}} + \frac{\text{لا}}{\text{ل}_2}\left(\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ج}}\right)$$

جس میں لا، ب کی طرف مثبت ہے۔ اس طرح (۲) کو لکھ سکتے ہیں:-

$$\frac{1}{\text{ل}_1}\left\{\int_0^{\text{ل}_1} \frac{\text{مہ}\,\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} + \text{م}_{\text{ا}} \int_0^{\text{ل}_1} \frac{\text{لا}}{\text{آ}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}}{\text{ل}_1} \int_0^{\text{ل}_1} \frac{\text{لا}^2}{\text{آ}}\,\text{فرلا}\right\}$$

$$= -\frac{۱}{ل_۲}\left\{\int_{۰}^{ل_۲}\frac{مہ\,لا}{آ}\,فرلا + م_ج\int_{۰}^{ل_۲}\frac{لا}{آ}\,فرلا + \frac{م_ب - م_ج}{ل_۲}\int_{۰}^{ل_۲}\frac{لا^۲}{آ}\,فرلا\right\} \quad ...(۳)$$

اگر مہ اور آ (دونوں مبداؤں سے) لا کے سادہ تفاعلوں کے طور پر بیان ہوسکیں تو اوپر کے تکمل بغیر کسی دِقت کے معلوم ہوسکتے ہیں اور (۳) ایک سادہ مساوات ہوگی جس میں دو نا معلوم مقداریں ہونگی $م_ا$ اور $م_ب$ ۔ ن سہاروں کے شہتیر کے لیے اس ربط (۳) سے ن - ۲ مساواتیں حاصل ہونگی، اور ن سہاروں کے ن خماؤ کے معیاروں کو معلوم کرنے کے لیے باقی مطلوبہ دو مساواتیں حسب سابق سروں کی تثبیت کی کیفیت سے حاصل ہونگی ۔

اگر مقداریں $\frac{مہ\,لا}{آ}$ ، $\frac{لا}{آ}$ ، $\frac{لا^۲}{آ}$ ، وغیرہ، آسانی سے تکمل نہ ہوسکیں تو ان کے منحنی کھینچ کر دفعہ ۸۸ کی طرح ان کے تکمل ترسیماً معلوم کیے جا سکتے ہیں - اور دیکھو $\frac{۱}{ل}\int_{۰}^{ل}\frac{مہ\,لا}{آ}$ فرلا ایک ایسے رقبے سے تعبیر ہوتا ہے جو، دفعہ ۶۸ کی طرح، منحنی $\frac{مہ}{آ}$ سے، قطب ا کے ساتھ، مشتق کیا گیا ہو۔ اور یہی دوسرے منحنیوں کے متعلق درست ہے ۔

ترسیمی طریقے کی متبادل شکل ۔ ہم ترسیمی حل کے لیے اوپر کی مساواتوں کو دفعہ ۸۸ کی طرح ایک سہل شکل میں بیان کرسکتے ہیں اس طرح کہ کسی سہارے سے متصل جو دو فصل ہوں اُن پر اس کے معیار کا جو اثر ہوتا ہے اُس سے ہر ایک سہارے کے لیے علیحدہ بحث کی جائے ۔ یہ اس کا مترادف ہے کہ منحرف ا ر س ب (شکل ۱۳۴) کو دو مثلثوں ا ر ب اور ا س ب کا مجموعہ سمجھا جائے اور اسی طرح منحرف ب س ت ج کو بھی ۔ ا کو مبداء لینے سے

$$\text{مر} = \frac{\text{ل}_1 - \text{لا}}{\text{ل}_1} \times \text{م}_1 + \frac{\text{لا}}{\text{ل}_1}\, \text{مب}$$

$$\frac{\text{مر}}{\text{آ}} = \frac{\text{ل}_1 - \text{لا}}{\text{ل}_1 \text{آ}_1} \times \text{م}_1 + \frac{\text{لا}}{\text{ل}_1 \text{آ}_1} \times \text{مب}$$

ج کو مبدا لینے سے —

$$\text{مر} = \frac{\text{ل}_2 - \text{لا}}{\text{ل}_2} \times \text{مج} + \frac{\text{لا}}{\text{ل}_2} \times \text{مب}$$

$$\frac{\text{مر}}{\text{آ}} = \frac{\text{ل}_2 - \text{لا}}{\text{ل}_2 \text{آ}_2} \times \text{مج} + \frac{\text{لا}}{\text{ل}_2 \text{آ}_2} \times \text{مب}$$

صفحہ ۲۴۳ اب فرض کرو کہ $\text{م}_1 = \text{عہ}\ \text{م}_1$

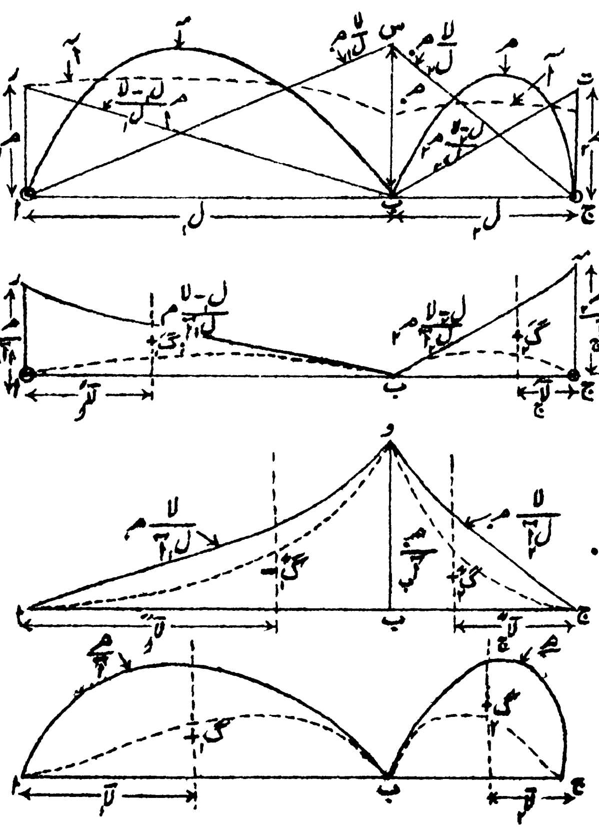
$\text{مب} = \text{بہ}\ \text{مب}$

$\text{مج} = \text{جہ}\ \text{م}_2$

جہاں م_1، مب، م_2 خماؤں کے معیاروں کی کوئی مفروضہ مساوی یا غیر مساوی قیمتیں علی الترتیب ا، ب، ج کے لیے ہیں۔ خطوط ا س اور ب ر کھینچو (شکل ۱۳۷) جن کے معین مبدا ا کے ساتھ $\frac{\text{لا}}{\text{ل}_1}\text{مب}$ اور $\frac{\text{ل}_1 - \text{لا}}{\text{ل}_1}\text{م}_1$ کو تعبیر کریں۔ نیز خطوط ج س اور ب ت کھینچو جو مبدا ج کے ساتھ

$\frac{\text{لا}}{\text{ل}_2}\text{مب}$ اور $\frac{\text{ل}_2 - \text{لا}}{\text{ل}_2}\text{م}_2$ کو تعبیر کریں۔

ان چار منحنیوں کے معینوں کو آ کی متغیر قیمتوں سے تقسیم کرو اور اس طرح منحنی ا و اور ب، ج و اور ب ی حاصل کرو جیسا کہ



شکل ۱۳۷

شکل ۱۳۷ میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ منحنیوں ا ب اور ا و ب کے تحت کے رقبے علی الترتیب رَ اور رً ہیں اور ان کے مراکزِ ہندسی کے

اُفقی فاصلے ا سے لاَ اور لاً ہیں۔ فرض کرو کہ فصل ا ب پر منحنی مم کے تحت کا رقبہ س۱ ہے اور اس کے مرکزِ ہندسی کا اُفقی فاصلہ ا سے لا۱ ہے۔

فرض کرو کہ منحنیوں ج ی ب اور ج و ب کے تحت کے رقبے جَ اور جً ہیں اور ان کے مراکزِ ہندسی کے اُفقی فاصلے ج سے لاَج اور لاًج ہیں اور فصل ب ج پر منحنی مم کے تحت کا رقبہ س۲ اور ج سے اس کے مرکزِ ہندسی کا اُفقی فاصلہ لا۲ ہے۔

تب (۳) دفعہ ۹۰ کے تناظر حاصل ہوگا:۔

$$\frac{س_۱ لا_۱ + عہ رَ لاَ_۱ + بہ رً لاً_۱}{ل_۱} = - \frac{س_۲ لا_۲ + جہ جَ لاَ_ج + بہ جً لاً_ج}{ل_۲} \quad .... (۴)$$

یہ تین معیاروں کی مساوات کی ایک شکل ہے جس میں نامعلوم مقداریں عہ، بہ، اور جہ ہیں اور مساواتوں کی مطلوبہ تعداد حسبِ سابق دو دو متصل فصلوں سے اور سروں کے سہاروں کی کیفیت سے حاصل ہوگی۔

مساوات (۴) کو سہولت کے ساتھ رقبوں کی مساوات میں اس طرح تحویل کیا جاسکتا ہے کہ ان چھ منحنیوں کے تحت کے رقبوں کے "پہلے مشتق رقبے" لیے جائیں (دیکھو دفعہ ۶۸)۔ فصل ا ب پر کے منحنیوں کے لیے قطب ا پر اور ب ج والوں کے لیے ج پر لینا ہوگا (دیکھو نقطہ دار منحنی شکل ۱۳۷ب)۔ اس طریقے میں دفعہ ۹۰ کی طرح سہاروں کی دھسن کا آسانی سے لحاظ رکھا جاسکتا ہے اور وہ اس طرح کہ دفعہ ۹۰ کی مساوات (۱۳) میں جو آ سے صہ اور آ سے صہ استعمال کیے گئے ہیں اُن کی بجائے یہاں مساوات (۴) میں سے صہ اور سے صہ استعمال کیے جائیں۔

گرڈر کے سرے کسی میلان پر ثابت ہوں تو اس کا بھی لحاظ رکھا جاسکتا ہے جیسا کہ دفعہ ۹۰ میں، دفعہ ۸۷ کے آخر میں، اور دفعہ ۸۸ کے آخر میں بتایا گیا ہے۔

وِلسن کا جو طریقہ ہے کہ مسلسل شہتیر کو صرف سروں پر سہارا ہوا مان کر سہاروں کے نقاط پر بوجھ سے پیدا ہونے والے نیچے وار انصراف کو سہاروں کی قوتوں سے پیدا ہونے والے اوپر وار انصراف کے مساوی رکھا جائے یہ طریقہ متغیر آ کی صورت میں استعمال ہوسکتا ہے بشرطیکہ یہ انصراف دفعہ ۸۳ کے اصولوں کے مطابق معلوم کیے جائیں۔ عموماً انصراف معلوم کرنے کے لیے ترسیمی طریقے زیادہ آسان ہونگے۔ ایک عددی مثال کی پوری تفصیل ڈاکٹر وِلسن کے پرچے میں ملیگی جس کا حوالہ دیا جاچکا ہے۔ اس میں انصراف ایک بالکل نئے ترسیمی طریقے سے معلوم کیے گئے ہیں۔

۹۲ - مسلسل شہتیروں کے فوائد اور نقصانات

اشکال ۱۳۳ اور ۱۳۶ کے معائنے سے اور مسلسل گرڈروں کے خماؤ کے معیار کے دیگر نقشوں کے معائنے سے جو طالب علم نے کھینچے ہوں یہ نظر آئیگا کہ عموماً (۱) شہتیر کے اندر اعظم خماؤ کا معیار مسلسل شہتیر کی صورت میں کم ہوتا ہے بہ نسبت اس کے کہ فصل یہی رہیں اور شہتیر سہاروں پر کاٹ دیا گیا ہو، (۲) جبری علامت کو نظر انداز کرکے اوسط خماؤ کا معیار پورے شہتیر کے لیے مسلسل شہتیر کی صورت میں کم ہوتا ہے اور اس طرح خماؤ کی مزاحمت کے لیے کم مادہ درکار ہوتا ہے، (۳) مسلسل شہتیر میں بیرونی بوجھ سے پیدا ہونے والے خماؤ کا معیار سہاروں سے دُور اعظم نہیں ہوتا بلکہ سہاروں پر اعظم ہوتا ہے۔ اس طرح اگر گرڈروں میں تراش متغیر رکھی جائے تو بھاری تراش کو ایسے مقام پر رکھنا نہیں پڑتا جہاں خود اس کے اثر سے کوئی بڑا خماؤ کا معیار پیدا ہوجائے۔

اس کے برخلاف یہ نقصانات ہیں کہ ایک یا زیادہ سہاروں میں اگر خفیف سی دھسن واقع ہو تو اس سے خاص خاص تراشوں پر خماؤ کے معیار اور خماؤ کے زوروں میں شدید تغیرات واقع ہو سکتے ہیں اور نیز خاصے بڑے طول کے حصوں پر خماؤ کے معیار اور خماؤ کے زوروں کی علامت بدل جاسکتی ہے جس کی وجہ سے نقاطِ انعطاف کا محل تبدیل ہو جائیگا۔ یہ باتیں کسی سہارے کے لیول کی خفیف سی تبدیلی سے بھی پیدا ہو سکتی ہیں اور اس طرح یہ مسلسل گرڈروں کے بڑے نقائص ہیں۔ ساختہ گرڈروں کی صورت میں ایک اور عملی نقص یہ ہے کہ ساخت یا تجدید کے دوران میں تسلسل کی حالت پیدا کرنا اور قائم رکھنا اور یہ معلوم کرنا کہ کس حد تک یہ بات حاصل ہوئی ہے، مشکل ہے۔ لدے ہوئے مسلسل گرڈر بالعموم دو متصل سہاروں کے درمیان دو نقاطِ انعطاف واقع ہوتے ہیں۔ اگر ان نقاط پر گرڈر کو مسلسل رکھنے کی بجائے اس کو قبضہ لگا دیا جائے تو ان پر خماؤ کا معیار صفر رہیگا اور بوجھ کی تبدیلی یا کسی سہارے کی دھسن سے خماؤ کے معیار اور خماؤ کے زوروں کی علامت تبدیل نہیں ہوتی۔ برآمدہ بیرمی پُل کا یہی اصول ہے (دیکھو مصنف کی کتاب "نظریۂ تعمیر")۔ قبضوں کے درمیان کے حصے سروں پر سادہ سہارے ہوئے شہتیر کی حالت میں ہونگے اور پایوں سے لگے ہوئے حصے تقریباً برآمدہ بیرم ہونگے جن کے سروں پر وہ سادہ سہارے ہوئے شہتیر رکھے ہوئے ہیں۔ صفر خماؤ کے معیار کے نقاط کے ثابت ہونے کی وجہ سے، خماؤ کے معیار کے نقشے بہت آسان ہوجاتے ہیں۔

سوالات نمبر ۷

۱۔ ایک شہتیر سروں پر مضبوطی کے ساتھ چنا ہوا ہے اور اس پر ۲۰ فٹ فصل پر ۱۲ ٹن کا بوجھ یکساں پھیلا ہوا ہے۔ اگر تراش کا معیارِ جمود ۲۲۰ انچ اکائیاں ہو اور گہرائی ۱۲ انچ ہو تو خماؤ کے زور کی اعظم حدت اور انعراف

معلوم کرو۔ (سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)

۲ - ایک دربستہ شہتیر پر ایک منقسم بوجھ ہے جس کی حدت ایک سرے پر صفر ہے اور ہمواری کے ساتھ بڑھتے ہوئے دوسرے سرے پر فی اکائی طول اعظم و ہوگئی ہے۔ دونوں سروں پر خماؤ کے معیار اور سہارنے والی قوتیں اور اعظم انصراف کا محل معلوم کرو۔

۳ - فصل ل کے ایک دربستہ شہتیر پر دو بوجھ و ہیں جو سہاروں سے ۱/۴ ل کے فاصلوں پر ہیں۔ سہاروں پر اور وسط میں خماؤ کا معیار، وسط میں اور بوجھوں کے نیچے انصراف، اور نقاطِ انعطاف معلوم کرو۔

۴ - فصل ل کے ایک دربستہ شہتیر پر ایک بوجھ و ایک سرے سے فاصلہ ۱/۴ ل پر ہے۔ سہاروں پر خماؤ کے معیار اور ردِ عمل، وسط میں اور بوجھ کے تحت انصراف، اعظم انصراف کا محل اور مقدار اور نقاطِ انعطاف کا محل معلوم کرو۔

۵ - ۲۰ فٹ فصل کے ایک دربستہ شہتیر پر ۵، ۵ ٹن کے دو بوجھ بائیں سہارے سے ۵ فٹ اور ۱۳ فٹ کے فاصلے پر ہیں۔ سہاروں پر خماؤ کے معیار معلوم کرو۔

۶ - فصل ل کے ایک دربستہ شہتیر پر یکساں حدت و فی اکائی طول کا ایک بوجھ نصف فصل پر پھیلا ہوا ہے۔ دونوں سہاروں پر خماؤ کا معیار، نقاطِ انعطاف، اعظم انصراف کا محل اور مقدار معلوم کرو۔

۷ - ایک دربستہ شہتیر کی تراش کا معیارِ جمود وسط میں آ۱ ہے اور ہموار طور پر بدل کر دونوں سروں پر ۱/۲ آ۱ ہوتا ہے۔ فصل کے وسط میں ایک بوجھ و ہو تو سروں اور وسط میں خماؤ کا معیار اور وسط میں انصراف معلوم کرو۔

۸ - گزشتہ سوال کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ بوجھ و فصل پر یکساں پھیلا ہوا ہو۔

۹ - ایک مسلسل شہتیر سروں پر ٹکا ہوا ہے اور دو درمیانی سہاروں پر سہارا ہوا ہے جو سروں کے لیول میں ہیں۔ اس طرح شہتیر کے تین مساوی فصل ہوگئے ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ل ہے۔ اگر شہتیر پر ایک یکساں

پھیلا ہوا بوجھ و فی اکائی طول ہو تو سہاروں پر خماؤ کے معیار اور ردِّ عمل معلوم کرو۔

۱۰ ۔ ایک مسلسل شہتیر ۳۰ فٹ، ۴۰ فٹ اور ۲۰ فٹ کے تین متصل فصلوں پر چھایا ہوا ہے اور ان فصلوں پر علی الترتیب ۲، ۱ اور ۳ ٹن فی طولی فٹ کے بوجھ ہیں۔ ہر ایک سہارے پر خماؤ کا معیار اور دباؤ معلوم کرو۔ خماؤ کے معیار اور جزی قوت کے نقشے کھینچو۔

۱۱ ۔ ۲۰ فٹ طول کا ایک مسلسل شہتیر سہاروں ا، ب، ج، اور د پر ٹکا ہوا ہے جو سب ایک لیول پر ہیں۔ ا ب = ۸ فٹ، ب ج = ۷ فٹ، ج د = ۵ فٹ۔ اس شہتیر پر ا سے ۳، ۱۱، اور ۱۸ فٹ کے فاصلوں پر علی الترتیب ۷، ۶، اور ۸ ٹن کے بوجھ ہیں۔ ب اور ج پر خماؤ کے معیار اور ا، ب، ج اور د کے ردِّ عمل معلوم کرو۔ خماؤ کے معیار کا نقشہ کھینچو۔ (نتائج کی تصدیق کے لیے دفعہ ۹۰ کے دونوں طریقے استعمال کرو)۔

۱۲ ۔ سوال ۹ کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ (ا) شہتیر کا ایک سرا مضبوطی سے دربستہ ہو (ب) دونوں سرے دربستہ ہوں۔

۱۳ ۔ سوال ۱۱ کو اِس صورت کے لیے حل کرو کہ سرا ا اُفقاً ثابت ہو۔

۱۴ ۔ سوال ۱۱ کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ سہارا ب بقدر ۱/۲ انچ کے دھنسے۔ آ = ۹۰ (انچ)^۴ اور ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ۔

صفحہ ۳۴۴

آٹھواں باب

خماؤ کے ثانوی یا ذیلی اثرات

۹۳ - شہتیروں کی بازگشتگی ـــ اگر ایک شہتیر لچک کی حد کے اندر خم ہو تو اس کے مادے میں خماؤ کے تنشی اور فشاری زور کی مختلف حدتیں پیدا ہوتی ہیں اور اس طرح اِس میں لچکدار فسادی توانائی موجود ہوتی ہے (دفعہ ۴۱)، یعنی شہتیر ایک کمانی ہوتا ہے اگرچہ ایک صلب کمانی ہو - خمیدگی کی مجموعی بازگشت (دیکھو دفعہ ۴۲) مختلف طریقوں پر محسوب ہوسکتی ہے - اس کو آسانی کے لیے حسبِ ذیل شکل میں بیان کرسکتے ہیں :-

$$\text{ج} \times \frac{\text{ف}^{2}}{\text{ے}} \times \text{شہتیر کے مادے کا حجم} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

جہاں ف شہتیر کے اندر پیدا ہونے والے زور کی اعظم حدت ہے اور ج ایک عددی سر ہے جو شہتیر کے لداؤ اور سہاروں کی کیفیت پر منحصر ہوتا ہے لیکن ہمیشہ $\frac{1}{2}$ سے کم ہوتا ہے - اس کی یہ قیمت $\frac{1}{2}$ اُس وقت ہوتی ہے جب کہ زور یکساں منقسم ہو (دیکھو دفعہ ۴۲)- اگر شے کی لچک کی حد پر زور کی حدت ز ہو تو شہتیر کی برداشتی بازگشتگی

$$\text{ج} \times \frac{\text{ز}^{2}}{\text{ے}} \times \text{حجم}$$

ہوگی۔ کسی قسم کے شہتیر پر اگر صرف ایک مرتکز بوجھ و ہو تو بازگشتگی صریحاً

$$= \tfrac{1}{2} \times \text{و} \times (\text{بوجھ کے نقطۂ عمل کا انصراف}) \quad .... \quad (۲)$$

مثلاً ایک برآمدہ بیرم کے سرے پر بوجھ و ہو تو سرے پر انصراف

$$\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{۳ آ ے}} \quad (\text{دیکھو (۲) دفعہ ۷۹})$$

ہوتا ہے۔ اس لیے بازگشتگی

$$\text{ج} \times \frac{\text{ف}^{2}}{\text{ے}} \times \text{حجم} = \tfrac{1}{2} \times \frac{\text{و}^{2}\text{ل}}{\text{۳ آ ے}}$$

اگر شہتیر مستطیلی تراش کا ہو جس کا عرض ض اور گہرائی ق ہو تو

$$\text{ف} = \text{و ل} \div \tfrac{1}{6}\,\text{ض ق}^{2}$$

اور $\text{حجم} = \text{ض ق ل}$

اور $\text{آ} = \tfrac{1}{12}\,\text{ض ق}^{3}$ صفحہ ۲۴۵

اس لیے $\text{ج} = \tfrac{1}{18}$ اور $\text{بازگشتگی} = \tfrac{1}{18} \cdot \frac{\text{ف}^{2}}{\text{ے}}\,\text{ض ق ل}$ .... (۳)

کسی شکل کی تراش کے لیے اگر تعدیلی محور کے گرد گردشی نصف قطر گ ہو تو چونکہ

$$\text{ف} = \text{و ل} \div \frac{\text{۲ آ}}{\text{ق}} \quad \text{اور تراش کا رقبہ} = \text{آ} \div \text{گ}^{2}$$

اس لیے (۱) سے :-

$$\text{بازگشتگی} = \text{ج} \times \frac{\text{و}^{۲}\,\text{ل}^{۲}\,\text{ق}^{۲}}{۴\,\text{آ}^{۲}\,\text{ے}} \times \frac{۱}{\text{ح}^{۲}} \times \text{ل} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\text{و}^{۲}\,\text{ل}^{۳}}{۳\,\text{آ}\,\text{ے}}$$

اس طرح $\text{ج} = \frac{۲}{۳}\left(\frac{\text{گ}}{\text{ق}}\right)^{۲}$ اور $\text{بازگشتگی} = \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{گ}^{۲}}{\text{ق}^{۲}} \times \frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ے}} \times \text{جحم}$

مثلاً مستطیلی تراش کے لیے $\left(\frac{\text{گ}}{\text{ق}}\right)^{۲} = \frac{۱}{۱۲}$، معیاری I تراشوں کے لیے $\frac{\text{گ}}{\text{ق}}$ بالعموم تقریباً ۴ء ہوتا ہے۔

صریحاً ایک وسطی مرتکز بوجھ اُٹھانے والے سادہ سہاروں کے شہتیر کے لیے بھی اوپر کے عددی سر وغیرہ درست رہینگے۔

اگر تمام ابعاد انچوں میں ہوں اور بوجھ کی اکائی ٹن ہو تو بازگشتگی ٹن انچوں میں ہوگی۔

اگر دفعہ ۷ کی ترقیم کے ساتھ شہتیر کے ایک چھوٹے طول فرلا پر خماؤ کا معیار م ہو، اور ڈھال کی تبدیلی فرعہ ہو تو اس ٹکڑے کی لچکدار فسادی توانائی

$$= \frac{۱}{۲}\,.\,\text{م}\,.\,\text{فرعہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

اور ایک محدود طول کی بازگشتگی

$$= \frac{۱}{۲}\int \text{م}\ \text{فرعہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

جس کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں :-

$$\frac{۱}{۲}\int \text{م}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\int \text{م}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\int \frac{\text{م}^{۲}}{\text{آ}\,\text{ے}}\,\text{فرلا} \ldots (۶)$$

یا، اگر آ ے مستقل ہو تو

$$\frac{۱}{۲\,\text{آ}\,\text{ے}}\int \text{م}^{۲}\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

خماؤ کے معیار کا نقشہ معلوم ہو تو ان جملوں سے کسی شہتیر کی بازگشتگی معلوم ہو سکتی ہے ۔ اگر ایک یکساں تراش اور طول ل کا شہتیر "سادہ خماؤ" کے تحت ہو (دیکھو دفعات ۶۱ اور ۷۶)، جس میں خماؤ کا معیار اور انحنا مستقل ہونگے تو (۴) یا (۷) سے بازگشتگی

= ½ م × انتہائی مماسوں کے میلان کی تبدیلی = ½ $\frac{\text{م}^2\text{ل}}{\text{اے}}$ ...... (۸)

اگر اس شہتیر کی تراش مستطیلی ہو اور عرض ض اور گہرائی ق ہو تو ف = م ÷ ⅙ ض ق² اور شکل (۱) میں (۷) کی مدد سے بازگشتگی صفحہ ۲،۲۶

= ج × $\frac{\text{ف}^2}{\text{ے}}$ × حجم یا ج × $\frac{36\,\text{م}^2}{\text{ے ض}^2\text{ق}^4}$ × ض ق ل = ½ $\frac{\text{م}^2\text{ل} \times 12}{\text{ے ض ق}^3}$

اس لیے ج = ⅙ ، اور بازگشتگی = ⅙ $\frac{\text{ف}^2}{\text{ے}}$. ض ق ل

یہی عددی سر (⅙) ایسے مستطیلی شہتیروں کے لیے بھی درست ہوگا جن کی خماؤ کی مضبوطی یکساں ہو، یعنی جن میں کھال کے زور کی اعظم حدت ف ہر تراش پر ایک ہی ہو اور جو دائرے کی قوسوں میں خم ہوں ۔ دائری تراشوں کے لیے متناظر عددی سر ⅛ ہے ۔

منقسم بوجھ و فصل کے فی اکائی طول کی صورت میں (۲) کے متناظر بازگشتگی

= ½ ∫ و ما فرلا .... (۹)

جہاں ما مبداء سے فاصلہ لا پر انصراف ہے ۔

شہتیر کے انصراف کی تحسیب بازگشتگی کی مدد سے ــــ

مساوات (۲) میں لچکدار فسادی توانائی کو محسوب کرنے کے لیے انصراف کو استعمال کیا گیا ہے ۔ اس طرح اگر بازگشتگی (۵) یا (۷) سے خماؤ کے

معیاروں سے محسوب کی جائے تو بازگشتگی سے انصراف حاصل ہو سکینگے۔ مثلاً ایک سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر ایک غیر مرکزی بوجھ و کی صورت پر غور کرو جو دفعہ ۸۰ میں دی گئی ہے۔ دفعہ ۸۰ اور شکل ۱۱۶ کی ترقیم اختیار کریں اور دونوں سروں کو باری باری سے مبدا لیں اور پورے فصل پر تکمیل کریں تو (۷) سے

$$\frac{1}{2}\times \text{ماج}\times \text{و} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{م}^2}{\text{آے}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2\,\text{آے}}\int_{0}^{\text{ا}}\left(\frac{\text{ب و}}{\text{ا}+\text{ب}}\,\text{لا}\right)^2\text{فرلا}$$

$$+\frac{1}{2\,\text{آے}}\int_{0}^{\text{ب}}\left(\frac{\text{ا و}}{\text{ا}+\text{ب}}\,\text{لا}\right)^2\text{فرلا}$$

جس سے

$$\text{ماج} = \frac{\text{و ا}^2\,\text{ب}^2}{3\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{آے}}$$

جو (۸) دفعہ ۸۰ کے مطابق ہے۔

ایک اور مثال کے طور پر دفعہ ۸۷ اور شکل ۱۱۲ع کی صورت (ب) لو یعنی سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر یکساں پھیلا ہوا بوجھ و فی اکائی فصل اس شہتیر میں ہر ایک سہارے سے فاصلہ لا پر

$$\text{م} = \frac{\text{و}}{2}\left(\text{ل لا} - \text{لا}^2\right)\quad (\text{دیکھو شکل ۶۵ع})$$

ایک سرے سے فاصلہ ا پر انصراف معلوم کرنے کے لیے اس تراش پر ایک بہت چھوٹا وزن و رکھ دینے کے اثر پر غور کرو۔ اس سے ایک مزید خماؤ کا معیار پیدا ہوگا جو سرے سے طول ا کے اندر فاصلہ لا پر

$$\text{آے}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\ \text{یا}\ \text{آے}\,\frac{\text{فرھ}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ل}-\text{ا}}{\text{ل}}\cdot\text{و}\cdot\text{لا}$$

ہوگا۔ اس لیے اس حصے میں

$$\text{فرھ} = \frac{\text{ل}-\text{ا}}{\text{ل}}\cdot\frac{\text{و لا}}{\text{آے}}\,\text{فرلا}$$

اور اسی طرح باقی حصّے میں دوسرے سرے سے فاصلہ لا پر

$$\text{فرعہ} = \frac{\text{وَ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{و لا}}{\text{آ ے}}\ \text{فرلا}$$

صفحۂ ۳۲۴ اس لیے (۵) سے و کی وجہ سے پورے شہتیر کی فسادی توانائی کا اضافہ

$$= \frac{1}{2}\int \text{م فرعہ} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{و}}{\text{آ ے ل}} \times \frac{\text{وَ}}{2}\Big\{(\text{ل} - \text{وَ})\int_{0}^{\text{وَ}} (\text{ل لا}^2 - \text{لا}^3)\ \text{فرلا}$$

$$+\ \text{وَ}\int_{0}^{\text{ل} - \text{وَ}} (\text{ل لا}^2 - \text{لا}^3)\ \text{فرلا}\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{و ما}$$

تحویل کرنے سے، $\text{ما} = \frac{\text{و وَ}(\text{ل} - \text{وَ})}{24\ \text{آ ے}}(\text{ل}^2 + \text{ل وَ} - \text{وَ}^2)$

جو وَ کی بجائے لا لکھنے پر (۹) دفعہ ۸۷ کے مطابق ہو جاتا ہے۔

اس کی ہر قسم کے شہتیر کے لیے تعمیم کر سکتے ہیں، و = اکائی اور فرض کرو کہ کسی خاص تراش پر جہاں انصراف ما ہے اکائی وزن رکھنے سے کسی تراش پر خماؤ کا معیار مَ پیدا ہوتا ہے، تب

$$\text{فرعہ} = \frac{\text{مَ}}{\text{آ ے}}\ \text{فرلا}$$

اور $\frac{1}{2} \times 1 \times \text{ما} = \frac{1}{2}\int \text{م فرعہ} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{م مَ}}{\text{آ ے}}\ \text{فرلا}$

یا $\text{ما} = \int \frac{\text{م مَ}}{\text{آ ے}}\ \text{فرلا}$ .... (۱۰)

اس میں تکمل شہتیر کے سارے طول پر ہوگا اور اگر ضرورت ہو تو اس کو چند حصّوں میں تقسیم کر کے مناسب مبدا لینے چاہییں۔ انصراف کی ایک خاص صورت یہ ہوگی کہ ایک اکیلا بوجھ و ہو تب م = و مَ اور

$\text{ما} = \text{و}\int \frac{\text{مَ}^2}{\text{آ ے}}\ \text{فرلا}$ .... (۱۱)

گاڑیوں کی کمانیاں — کسی گاڑی کی کمانی کی بازگشتگی جس کی ساخت دفعہ ۸۳ شکل ۱۲۲ء کے مطابق ہو

$$= \frac{۱}{۶} \times \frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ے}} \times (\text{شے کا حجم})$$

مساوات (۱۱) دفعہ ۸۳ سے اِس کی تصدیق ہوسکتی ہے۔ کیونکہ بازگشتگی —

$$\text{ج} \times \frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ے}} \times \text{حجم} = \frac{۱}{۲} \times \text{و} \times \text{انصراف} = \frac{۱}{۲} \times \text{و} \times \frac{۳}{۸} \frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{ن ے ض ق}^{۳}}$$

اور مساوات (۱۰) دفعہ ۸۳ سے

$$\text{ف} = \frac{۳}{۲} \frac{\text{و ل}}{\text{ن ض ق}^{۲}}$$

ف کی یہ قیمت درج کرنے سے

$$\text{ج} \times \frac{۹}{۴} \frac{\text{و}^{۲}\text{ل}^{۲}}{\text{ن}^{۲}\text{ض}^{۲}\text{ق}^{۴}} \times \frac{۱}{\text{ے}} \times \frac{\text{ن ض ق ل}}{۲} = \frac{۳}{۱۶} \frac{\text{و}^{۲}\text{ل}^{۲}}{\text{ن ے ض ق}^{۳}}$$

یعنی $\text{ج} = \frac{۱}{۶}$، اور بازگشتگی $= \frac{۱}{۶} \frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ے}} \times \text{حجم}$ یا $\frac{۱}{۱۲} \frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ے}}\,\text{ن ض ق ل}$

یا برداشتنی بوجھ کے تحت بازگشتگی $= \frac{۱}{۶} \times \frac{\text{ز}^{۲}}{\text{ے}} \times$ کمانی کا حجم، جہاں ز کھنچاؤ کے زور کی حدت لچک کی حد پر ہے۔ فولاد کے لیے ز کی قیمت بالعموم ۱۲ سے ۱۵ ٹن فی مربع انچ تک ہوگی اور ے کی ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ اس طرح برداشتنی بازگشتگی تقریباً ۰۰۲ء انچ ٹن، یا ۵ انچ پونڈ فی مکعب انچ فولاد ہوگی۔

مثال — مستطیلی تراش کا ایک شہتیر سروں پر سہارا ہوا ہے، اور اس پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے۔ بازگشتگی کو زور کی اعظم حدت اور شہتیر کے حجم کی رقوم میں معلوم کرو۔

شکل ۶۵ کی ترقیم میں

$$\text{م} = \frac{\text{و}}{۲}(\text{ل لا} - \text{لا}^{۲})$$

صفحہ ۱۴۶ اور (۷) سے مجموعی بازگشتگی

$$= \frac{۱}{۲\,\text{آ ے}}\int \text{م}^{۲}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲\,\text{آ ے}}\cdot\frac{\text{و}^{۲}}{۴}\int_{0}^{\text{ل}}(\text{ل}^{۲}\,\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{ل}\,\text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۴})\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{و}^{۲}\,\text{ل}^{۵}}{۲۴۰\,\text{آ ے}}$$

اگر شہتیر کا عرض ض اور گہرائی ق ہو تو زور کی اعظم حدت ف جو وسط میں واقع ہوگی $= \frac{۱}{۸}\,\text{و ل}^{۲} \div \frac{۱}{۶}\,\text{ض ق}^{۲} = \frac{۳}{۴}\,\frac{\text{و ل}^{۲}}{\text{ض ق}^{۲}}$

اس طرح $\text{ج} \times \frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ے}} \times \text{حجم}$ یا $\frac{\text{ج}}{\text{ے}} \times \frac{۹}{۱۶} \times \frac{\text{و}^{۲}\,\text{ل}^{۴}}{\text{ض}^{۲}\,\text{ق}^{۴}} \times \text{ض ق ل}$

$$= \frac{\text{و}^{۲}\,\text{ل}^{۵} \times ۱۲}{۲۴۰\,\text{ے ض ق}^{۳}}$$

اس طرح $\text{ج} = \frac{۴}{۴۵}$ اور بازگشتگی $= \frac{۴}{۴۵} \times \frac{\text{ف}^{۲}}{\text{ے}} \times \text{حجم}$

اس کو اس طرح بھی حاصل کر سکتے تھے کہ تکملی

$$\frac{۱}{۲}\int_{0}^{\text{ل}} \text{و ما فرلا}$$

کی قیمت ما کے لیے دفعہ ۸۷ کا جملہ (۹) استعمال کرکے حاصل کی جاتی۔

۱۹۳- صدمے سے پیدا ہونے والی خمیدگی —— اگر ایک دھکا بوجھ مثلاً ایک گرتا ہوا وزن ایک سلاخ پر عرضاً عمل کرے اور خمیدگی پیدا کرے اور زور اور فساد کی متناسبیت کی حدود سے تجاوز واقع نہ ہو تو انصراف کی انتہا پر سلاخ کی فسادی توانائی یا بازگشتگی

تصادم کے فوراً بعد کی بوجھ اور سلاخ کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ (اگر کچھ ہو) کے مساوی ہوگی۔ اگر سلاخ کا جمود بوجھ کے مقابلے میں قابل نظر اندازی ہو اور سہارے استوار ہوں تو تصادم سے توانائی بالحرکت کا نقصان قابل نظر اندازی ہوگا اور سلاخ کی بازگشتگی بوجھ کے تصادم سے پہلے کی توانائی بالحرکت کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو کہ سلاخ سروں پر آزادانہ سہاری ہوئی ہے اور اس کا فصل ل ہے اور بوجھ و بلندی ع سے اس کے وسط پر گرتا ہے (شکل ۱۱۱)۔ فرض کرو کہ صہ = ماج = وسطی دھکا بوجھ و کے تحت انصراف، اور فرض کرو کہ معادل سکونی بوجھ ف ہے، یعنی وہ مرکزی بوجھ جو یہی انصراف اور یہی خماؤ کا معیار پیدا کرے۔ تب (۴) دفعہ ۸۷ سے

$$\text{صہ} = \frac{\text{ف ل}^{3}}{\text{۴۸ آ ے}} \quad \text{یا} \quad \text{ف} = \frac{\text{۴۸ آ ے صہ}}{\text{ل}^{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اگر سلاخ کا وزن نظر انداز کیا جاسکے تو و کے کام کو انصراف کے بعد کی بازگشتگی کے مساوی رکھنے سے

$$\text{و}\,(\text{ع} + \text{صہ}) = \tfrac{1}{2}\,\text{ف صہ} = \frac{\text{۲۴ آ ے صہ}^{2}}{\text{ل}^{3}}$$

یا،

$$\text{و}\left(\text{ع} + \frac{\text{ف ل}^{3}}{\text{۴۸ آ ے}}\right) = \frac{1}{96}\,\frac{\text{ف}^{2}\,\text{ل}^{3}}{\text{آ ے}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{ف}^{2} - \text{۲ و ف} - \frac{\text{۹۶ آ ے و ع}}{\text{ل}^{3}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \text{ف} &= \text{و} + \sqrt{\text{و}^{2} + \frac{\text{۹۶ آ ے و ع}}{\text{ل}^{3}}} \\ \text{اور} \quad \text{ف} - \text{و} &= \pm\sqrt{\text{و}^{2} + \frac{\text{۹۶ آ ے و ع}}{\text{ل}^{3}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

صفحہ ۲۲۹

اور اگر ع کے مقابلے میں صہ خفیف ہو تو

$$\text{ف} - \text{و} = \text{ف} = \sqrt{\frac{\text{۹۶ آ ے و ع}}{\text{ل}^{۳}}} \quad ....(۴)$$

سلاخ کے جمود کے لیے تصحیح ـــ اگر سلاخ کا اثر خفیف ہو لیکن نظر انداز نہ کیا جا سکے تو بطور تخمینے کے یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ انصراف وہی شکل اختیار کرتا ہے جو ایک مرتکز سکونی بوجھ کی صورت میں ہوتا۔ تب (۲) اور (۴) دفعہ ۸، شکل ۱۱۱ سے

$$\frac{\text{ما}}{\text{ماج}} = ۱ - ۶\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)^{۲} + ۴\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)^{۳} \quad ....(۵)$$

تب اگر ی = سلاخ کے مرکز کی رفتار تصادم کے فوراً بعد، تو مرکز سے فاصلہ لا پر رفتار = $\text{ی} \times \frac{\text{ما}}{\text{ماج}}$ ـ اب تصادم سے پہلے اور بعد کے مجموعی معیارِ حرکت کو مساوی رکھنے سے اگر و = سلاخ کا وزن فی اکائی طول تو

$$\text{و} \times \sqrt{\text{۲ ج ع}} = \text{و ی} + ۲\,\text{و}\,\frac{\text{ی}}{\text{ماج}} \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}\text{ل}} \text{ما فرلا}$$

(۵) سے ما کی قیمت مندرج کرنے سے

$$\left.\begin{array}{l} \text{و}\sqrt{\text{۲ ج ع}} = \text{ی}\left(\text{و} + \frac{۵}{۸}\,\text{و ل}\right) \\ \text{یا} \quad \text{ی} = \dfrac{۱}{۱ + \frac{۵}{۸}\frac{\text{و ل}}{\text{و}}} \times \sqrt{\text{۲ ج ع}} \end{array}\right\} \quad ......(۶)$$

اب تصادم کے بعد توانائی بالحرکت اور کام کے مجموعے کو فساوی توانائی کے اضافے کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{۱}{۲}\frac{و}{ج}\cdot ی^{۲}+۲\times\frac{۱}{۲}\frac{و}{ج}\cdot\frac{ی^{۲}}{ما^{۲}}\int_{\cdot}^{\frac{۱}{۲}ل} ما^{۲}\,فرلا+و\times صہ+۲و\int_{\cdot}^{\frac{۱}{۲}ل} ما\,فرلا$$

$$=\frac{۱}{۲}ف\times صہ+۲و\int_{\cdot}^{\frac{۱}{۲}ل} ما\,فرلا\quad..........(۷)$$

یا (۵) اور (۱) کی مدد سے

$$ف^{۲}-۲ف\cdot و-\frac{۴۸\,آ\,ے}{ل}\cdot\frac{ی^{۲}}{ج}\left(و+\frac{۱۷}{۳۵}\,ول\right)=۰\quad ..(۸)$$

(۶) سے ی کی قیمت رکھ کر حل کرنے سے

$$ف=و+\sqrt{و^{۲}+\frac{۹۶\,آ\,ے\,ع\,و}{ل^{۳}}\times\frac{۱+\frac{۱۷}{۳۵}\cdot\frac{ول}{و}}{\left(۱+\frac{۵}{۸}\cdot\frac{ول}{و}\right)}}\quad .....(۹)$$

صفحہ ۵۰ ف ۔ و وہ مقدار ہے جس کے بقدر تصادم کا بوجھ سکونی بوجھ و سے بڑھا ہوا ہے ۔ و کے ساتھ اس کی نسبت و کے بڑھنے سے گھٹتی ہے، اور تصادم کے خماؤ کا زور سکونی خماؤ کے زور کے ساتھ یہی نسبت رکھتا ہے ۔ اگر ع کے مقابلے میں صہ نظر انداز کیا جا سکے تو (۷) میں رقم و۔صہ کو حذف کرنے سے عمل آسان ہو جاتا ہے اور (۹) میں علامتِ جذر کے اندر کی پہلی رقم ($و^{۲}$) غائب ہو جاتی ہے ۔

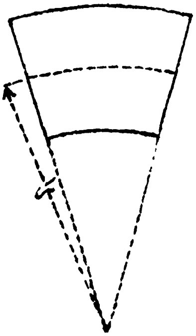
ثابت سرے ـــ اگر سلاخ دونوں سروں پر سمت میں ثابت ہو اور اس کے سروں کے وسط میں ایک بوجھ و کا دھکا پڑے تو (۵) کی جگہ دفعہ ۸۶ کے نتائج استعمال کرنے سے عددی سر $\frac{۱۷}{۳۵}$ کی بجائے $\frac{۱۳}{۳۵}$، اور $\frac{۵}{۸}$ کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ حاصل ہوتا ہے ۔

برآمدہ بیم ـــ اگر برآمدہ بیم کے آزاد سرے پر ایک گرتے ہوئے وزن و کا دھکا پڑے تو (۵) کی بجائے دفعہ ۹۷ کے نتائج

استعمال کرنے سے عددی سر $\frac{۱}{۴۵}$ کی بجائے $\frac{۳۳}{۱۴۰}$ اور $\frac{۵}{۸}$ کی بجائے $\frac{۳}{۸}$ حاصل ہوتا ہے۔

بوجھ کے نقاطِ عمل کے عام محل ــــ عام صورتوں میں سلاخ کے جمود کا اثر اوپر کے طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے :- ان کے لیے دفعات ۷۹، ۸۰ اور ۸۷ (مثال ۲) کے نتائج استعمال کرنے ہونگے، اور تکمل کو حدود کے مناسب حصوں میں تقسیم کرنا ہوگا۔

۹۴ - **عرضی انحنا** ــــ اگر ایک افقی شہتیر اس طرح خمیدہ ہو کہ اوپر وار مقعر ہوجائے تو اوپر کے ریشے فشار میں ہونگے اور نیچے کے کھنچاؤ میں، جس کی وجہ سے جانبی پھیلاؤ اور سکڑاؤ پیدا ہوگا یعنی شہتیر کا اوپر کا حصہ چوڑا اور نیچے کا پتلا ہوجائیگا۔ یہ جانبی فساد (دفعات ۱۲ اور ۱۹) طولی فساد کے متناسب ہونے کی وجہ سے تعدیلی سطح سے فاصلے کے متناسب ہونگے اور طولی خماؤ کے ساتھ عرضی خماؤ واقع ہوگا۔ فسادوں سے عرضی انحنا کی مقدار بالکل اُسی طرح معلوم ہوسکتی ہے جس طرح طولی انحنا معلوم ہوتا ہے (دفعات ۶۱ تا ۶۳)۔ عرضی فساد طولی فساد کے $\frac{۱}{م}$ ہوتے ہیں جہاں $\frac{۱}{م}$ پوائے سن[1] کی نسبت ہے اور اس طرح عرضی انحنا طولی انحنا کا $\frac{۱}{م}$ ہوگا۔ اس طرح اگر عرضی انحنا کا نصف قطر $ر_۱$ ہو (شکل ۱۳۸) تو



شکل ۱۳۸

$$\frac{۱}{ر_۱} = \frac{۱}{م\, ر} \quad \text{یا} \quad ر_۱ = م\, ر$$

جہاں $ر$ طولی انحنا کا نصف قطر ہے۔

[1] Poisson

یہاں یہ فرض کیا گیا ہے کہ عرضی حرکت کو آزادی ہے اور ویسی ہی آزادی جیسی کہ طولی فساد کے متعلق دفعہ ۱۶۱ میں فرض کی گئی تھی یعنی یہ کہ متصل پرتوں سے کوئی مزاحمت پیش نہیں آتی ۔ یہ ایسی تراشوں کے لیے تقریباً صحیح ہے جن کی گہرائی عرض سے زیادہ ہو چوڑی چپٹی پٹیوں کے لیے صحیح نہیں ۔ بہت چوڑے شہتیروں میں عرضی انحنا تقریباً معدوم ہوتا ہے سوائے کناروں کے قریب کے جہاں جانبی فساد کو واقع ہونے کے لیے آزادی رہتی ہے ۔ یہ قریب قریب ایسی صورت ہے جس میں جانبی فساد کو ایک سمت میں روک دیا جائے اور اس صورت کے لیے لچک کا مقیاس معمولی راست مقیاس کی ایک ترمیم یافتہ شکل ہوگی (دیکھو دفعہ ۲۱) ۔ صفحہ ۵۱ء

دفعہ ۱۹ کی مساواتیں استعمال کریں تو چونکہ س_1 کی سمت شہتیر کا طول ہے اور س_2 کی سمت عرض، اور ف_3 صفر ہے اس لیے دفعہ ۱۹ کی مساوات (۱) سے

$$\text{س}_1 = \frac{\text{ف}_1}{\text{ے}} - \frac{\text{ف}_2}{\text{م ے}}$$

اور دفعہ ۱۹ کی مساوات (۲) سے

$$0 = \frac{\text{ف}_2}{\text{ے}} - \frac{\text{ف}_1}{\text{م ے}}$$

اس طرح $$\text{س}_1 = \frac{\text{ف}_1}{\text{ے}}\left(1 - \frac{1}{\text{م}^2}\right) = \frac{\text{ف}_1(\text{م}^2 - 1)}{\text{م}^2\,\text{ے}}$$

یا $$\text{ف}_1 = \text{س}_1 \times \text{ے}\,\frac{\text{م}^2}{\text{م}^2 - 1}$$

اس طرح مقدار $\frac{\text{م}^2}{\text{م}^2 - 1}\,.\,\text{ے}$

لچک کا ایک ترمیم یافتہ مقیاس ہے جو م = ۴ کی صورت میں ے کا

$\frac{۱۶}{۱۵}$ گنا ہوگا، اور ان صورتوں میں طولی خمیدگی کے انصراف ان انصرافوں کے صرف $\frac{۱۵}{۱۶}$ گنا ہوتے ہیں جن کی جانبی فساد کے آزاد ہونے کی صورت میں توقع کی جاتی ہے۔

مثال — لوہے کا ایک ٹکڑا جس کی تراش مستطیلی ۴ انچ چوڑی اور $\frac{۱}{۲}$ انچ موٹی ہے ۳ فٹ باہمی فصل کے اُفقی سہاروں پر رکھا گیا ہے اور تراش کا بڑا ضلع اُفقی ہے۔ ۲۰۰ پونڈ کا ایک بوجھ وسط میں رکھا گیا ہے۔ وسطی انصراف ۱۴۹، انچ ہے۔ پھر تختی کو سہاروں پر اس طرح رکھا گیا کہ بڑا ضلع انتصابی ہو اور اس صورت میں ۲۰۰۰ پونڈ کے ایک مرکزی بوجھ سے ۰۲۵، انچ کا وسطی انصراف پایا گیا۔ اس شے کے لیے پوائی سن کی نسبت معلوم کرو۔

پہلی وضع میں $آ = \frac{۱}{۱۲} \times ۴ \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲۴}$

ضابطہ (۴) دفعہ ۸۷ کو ترمیم یافتہ مقیاس کے ساتھ استعمال کرنے سے

$$\frac{م^۲}{م^۲-۱} . ے = \frac{۳۶ \times ۳۶ \times ۳۶ \times ۲۰۰}{،۱۴۹ \times \frac{۱}{۲۴} \times ۴۸} = ۳۱۳۱۲۷۵۰$$

اور دوسری وضع میں $آ = \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۲} \times ۶۴ = \frac{۸}{۳}$

$$ے = \frac{۳ \times ۳۶ \times ۳۶ \times ۳۶ \times ۲۰۰۰}{،۰۲۵ \times ۸ \times ۴۸} = ۲۹۱۶۰۰۰۰$$

سابقہ نتیجے کو اس سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{م^۲}{م^۲-۱} = ۱،۰۷۳۸ \text{ ، } م^۲ = \frac{۱،۰۷۳۸}{،۰۷۳۸} = ۱۴،۵۵$$

$$م = ۳،۸۱ \qquad \frac{۱}{م} = ،۲۶۳$$

۹۵۔ جزی فساد میں لچکدار توانائی — جزی بازگشتگی۔

کسی شے میں لچک کی حد کے اندر جزی فساد واقع ہو تو راست زور اور فساد

کی طرح اس صورت میں بھی لچکدار فسادی توانائی جمع ہوتی ہے ۔ جزی زور کی سادہ تقسیم کے لیے بازگشتگی یا لچکدار فسادی توانائی آسانی سے محسوب ہو سکتی ہے ۔ فرض کرو کہ شکل ۹ الف ایک شے کو تعبیر کرتی ہے جس کا طول ل نقشے کے مستوی کے علی القوائم ہے اور اس میں چہرے ب ج پر جزی زور کی یکساں حدت ج عمل کرتی ہے جس سے جزی فساد فہ اور انصراف ب بً پیدا ہوتا ہے ۔ صفحہ ۵۲

تب بازگشتگی صریحاً

$$= \frac{1}{2} \times (\text{قوت}) \times \text{فاصلہ} = \frac{1}{2} \times (\text{ب ج} \times \text{ل} \times \text{ج}) \times \text{ب بً}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ل} \times \text{ج} \times \text{ا ب} \times \text{فہ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ل} \times \text{ا ب} \times \frac{\text{ج}^2}{\text{س}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\text{ج}^2}{\text{س}} \times \text{حجم یا } \frac{1}{2} \frac{\text{ج}^2}{\text{س}} \text{ فی اکائی حجم}$$

جہاں س اُستواری کا مقیاس ہے ۔

یکساں پھیلے ہوئے راست زور کی بازگشتگی کے لیے جو جملہ $\frac{1}{2}\frac{\text{ف}^2}{\text{ے}}$ فی اکائی حجم ہے اُس کے ساتھ اس کی مماثلت کو نوٹ کرو ۔

۹۶ ۔ شہتیر کا انصراف جزی کی وجہ سے ―― باب ۶ میں خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے جو معمولی انصراف محسوب کیے گئے ہیں اُن کے علاوہ کسی دی ہوئی صورت میں (سوائے سادہ خماؤ کی صورت کے) (دفعہ ۶۴) ایک مزید انصراف اُفقی شہتیر کی عرضی تراشوں پر کے انتصابی جزی زور کی وجہ سے ہوگا ۔ باب ۶ کے حسابات میں اس کا لحاظ نہیں رکھا گیا ۔ اس کی مقدار چند سادہ صورتوں کے لیے ہم یہاں محسوب کرینگے ۔

ایک برآمدہ بیرم کی صورت میں جس کا طول ل ہے اور جس کے سرے پر بوجھ و ہے (شکل ۵۹)، اگر جزی قوت ق (= و) انتصابی تراشوں پر یکساں منقسم ہوتی تو آزاد سرے پر جزکی وجہ سے انصراف حسبِ ذیل ہوتا۔
ل × (جزی فساد کا زاویہ)

یا $\quad$ فہ × ل = $\frac{ج}{س}$ ل یا $\frac{و ل}{م ن}$

جہاں م تراش کا رقبہ ہے۔ اگر تراش مستطیلی ہو جس کا عرض ض اور گہرائی ق ہو تو یکساں تقسیم کی صورت میں انصراف $\frac{و ل}{ض ق س}$ ہوتا۔

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۱۷) کہ تراش پر جزی زور یکساں منقسم نہیں ہوتا بلکہ تعدیلی سطح پر اعظم ہوتا ہے اور بالائی اور نچلے کناروں پر صفر ہوتا ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہے کہ انصراف $\frac{و ل}{م س}$ سے زیادہ ہوتا ہے۔ ہم اس کی مقدار کا کچھ اندازہ خاص خاص صورتوں میں دفعہ ۱۷ کی محسوبہ جزی زور کی تقسیم کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔ لیکن یہ یاد رہے کہ یہ حسابات سادہ خماؤ کے نظریے پر مبنی ہیں (دیکھو دفعہ ۴۴)، اور صرف تقریبی ہیں۔ اگرچہ خماؤ سے پیدا ہونے والے انصراف سادہ (یعنی برنولی آئیلر کے) نظریے سے کافی صحت کے ساتھ حاصل ہو جاتے ہیں لیکن جز سے پیدا ہونے والے انصراف دفعہ ۱۷ میں حاصل کی ہوئی جزی زور کی تقسیم سے اتنی صحت کے ساتھ حاصل نہیں ہوتے۔ اس لیے اگر جزی انصراف کا بہت صحیح اندازہ مطلوب ہو تو مناسب ہوتا ہے کہ سان وینان کے دقیق نظریے (دیکھو دفعہ ۴۴) کے ذریعے نتائج کی جانچ کر لی جائے۔ لیکن اکثر عملی صورتوں میں جزی انصراف خماؤ کے

St. Venant ا.

انصراف کے مقابلے میں قابلِ نظر اندازی ہوتا ہے ۔ جزمی زور کی تقسیم کو صفحہ ۲۵۳
دفعہ ۱۷ کے مطابق مان کر اور تراش کی ایک پتلی اور تعدیلی محور کے متوازی پٹی کے اندر مستقل مان کر جزی انصراف چند ایسی صورتوں کے لیے معلوم کیے جائینگے جن میں جزی قوت یکساں ہے اور جن کے لیے خماؤ کا سادہ نظریہ تقریباً صحیح ہے (دیکھو دفعہ ۶۴)۔

مستطیلی تراش کا برآمدہ بیرم ۔ سرے پر بوجھ و عرض ض ہے اور گہرائی ق ہے ۔ طول ل، عرض ض اور موٹائی فرما کی ایک طولی پٹی تعدیلی سطح کے متوازی اور اس سے فاصلہ ما پر لو۔ اس کے اندر جمع شدہ فسادی توانائی جزکی وجہ سے

$$= \frac{1}{2}\frac{ج^2}{س} \times ض \times ل \times فرما$$ (دیکھو دفعہ ۹۵)

اور (۴) دفعہ ۱۷ سے

$$ج = \frac{6\,ق}{ض\,ق^3}\left(\frac{ق^2}{4} - ما^2\right)$$

جہاں ق = و (سرے کا بوجھ)

اس لیے $$ج^2 = \frac{36\,و^2}{ض^2\,ق^6}\left(\frac{ق^4}{16} + ما^4 - \frac{ق^2\,ما^2}{2}\right)$$

برآمدہ بیرم کی مجموعی جزی بازگشتگی

$$= \frac{ض\,ل}{2\,س}\int_{-\frac{ق}{2}}^{\frac{ق}{2}} ج^2\,فرما = \frac{18\,و^2\,ل}{س\,ض\,ق^6}\int_{-\frac{ق}{2}}^{\frac{ق}{2}}\left(\frac{ق^4}{16} - \frac{ق^2\,ما^2}{2} + ما^4\right)فرما \quad (1)$$

یا $$\frac{36\,و^2\,ل}{س\,ض\,ق^6}\left(\frac{ما\,ق^4}{16} - \frac{ما^3\,ق^2}{6} + \frac{ما^5}{5}\right)_{۰}^{\frac{ق}{2}} = \frac{3}{5}\,\frac{و^2\,ل}{س\,ض\,ق}$$

اگر آزاد سرے پر جزکی وجہ سے انصراف صہ ہو تو جزی بازگشتگی

$$\frac{1}{2}\times و \times صہ = \frac{3}{5}\,\frac{و^{2} ل}{س\, ض\, ق}$$ ، اس طرح

$$صہ = \frac{6}{5}\,\frac{و ل}{س\, ض\, ق} = \frac{6}{5} \times \frac{\text{ج کی اوسط قیمت}}{س} \times (ل)$$

جو یکساں منقسم جزی زور کی صورت سے ۲۰ فی صدی زیادہ ہے۔

اسی طرح ایک سروں پر سادہ سہارے ہوئے شہتیر کا طول ل ہو اور ایک مرکزی بوجھ و ہو تو ل کی بجائے $\frac{ل}{2}$ اور و کی بجائے $\frac{و}{2}$ رکھنے سے جزی انصراف

$$= \frac{3}{10}\,\frac{و ل}{س\, ض\, ق}$$

یا خماؤ اور جزکی وجہ سے مجموعی انصراف صفحہ ۲۵۴

$$= \frac{و ل^{3}}{48\, آ\, ے} + \frac{3}{10}\,\frac{و ل}{س\, ض\, ق} = \frac{و ل^{3}}{4\, ے\, ض\, ق^{3}}\left\{1 + \frac{6}{5}\,\frac{ے}{س}\left(\frac{ق}{ل}\right)^{2}\right\}$$

جو $\frac{ے}{س} = \frac{5}{2}$ لینے سے حسبِ ذیل ہوجاتا ہے :-

$$\frac{و ل^{3}}{4\, ے\, ض\, ق^{3}}\left\{1 + 3\left(\frac{ق}{ل}\right)^{2}\right\}$$

اور برآمدہ بیرم کے لیے

$$\frac{4\, و ل^{3}}{ے\, ض\, ق^{3}}\left\{1 + \frac{3}{4}\left(\frac{ق}{ل}\right)^{2}\right\}$$

اگر $\frac{ل}{ق}$ بڑی مقدار ہو، جیسا کہ عملاً عام طور پر ہوگا، تو دوسری رقم قابلِ نظرانداز ہوگی۔ جزی انصراف کا یہ جملہ سان ونان[1] کے حاصل

[1] St. Venant

کیے ہوئے زیادہ صحیح حلے سے کچھ زیادہ مختلف نہیں بشرطیکہ گہرائی کے مقابلے میں عرض زیادہ نہ ہو۔

مدوّر تراش ـــ مدور تراش کے برآمدہ بیرم میں تراش کے اندر افقی سمت میں جزی زور کی حدت یکساں پھیلی ہوئی فرض کریں اور انتصابی تغیر کو (۵) دفعہ ۷۱ کے مطابق مانیں یعنی

$$\text{ج} = \frac{۴\,\text{ق}}{۳\pi\,\text{ر}^۲}\,\text{جم}^۲\,\text{طہ}$$

جہاں ما = ر جب طہ، ی = ۲ ر جم طہ، فرما = ر جم طہ فرطہ (دیکھو شکل ۹۹ء) تو (۱) کے متناظر تکملی بازگشتگی

$$= ۲ \times \frac{\text{ل}}{۲\,\text{س}} \times \frac{۱۶\,\text{و}^۲}{۹\pi^۲\,\text{ر}^۴}\, ۲\,\text{ر}^۲ \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^۴\,\text{طہ فرطہ} = \frac{۵}{۹}\,\frac{\text{و}^۲\,\text{ل}}{\pi\,\text{س}\,\text{ر}^۲}$$

$$= \tfrac{۱}{۲}\,\text{و صہ}$$

اس لیے $\text{صہ} = \frac{۱۰}{۹}\,\frac{\text{و}}{\pi\,\text{ر}^۲} \times \frac{\text{ل}}{\text{س}} = \frac{۱۰}{۹} \times \frac{\text{ج کی اوسط قیمت}}{\text{س}} \times \text{ل}$

اور طول ل میں مجموعی انصراف

$$= \frac{\text{و ل}^۳}{۳\,\text{ے ع}} + \frac{۱۰}{۹}\cdot\frac{\text{و}}{\pi\,\text{ر}^۲} \times \frac{\text{ل}}{\text{س}} = \frac{۶۴\,\text{و ل}^۳}{۳\pi\,\text{ق}^۴\,\text{ے}}\left\{۱ + \frac{۵}{۲۴}\cdot\frac{\text{ے}}{\text{س}}\left(\frac{\text{ق}}{\text{ل}}\right)^۲\right\}$$

یا $\frac{۶۴\,\text{و ل}^۳}{۳\pi\,\text{ق}^۴\,\text{ے}}\left\{۱ + \frac{۲۵}{۴۸}\left(\frac{\text{ق}}{\text{ل}}\right)^۲\right\}$ اگر $\frac{\text{ے}}{\text{س}} = \frac{۵}{۲}$

سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے انصراف ـــ

$$= \frac{۴\,\text{و ل}^۳}{۳\pi\,\text{ق}^۴\,\text{ے}}\left\{۱ + \frac{۵}{۹}\,\frac{\text{ے}}{\text{س}}\left(\frac{\text{ق}}{\text{ل}}\right)^۲\right\}$$

یا $\frac{۴\,\text{و ل}^۳}{۳\pi\,\text{ق}^۴\,\text{ے}}\left\{۱ + \frac{۲۵}{۱۲}\left(\frac{\text{ق}}{\text{ل}}\right)^۲\right\}$ اگر $\frac{\text{ے}}{\text{س}} = \frac{۵}{۲}$

یہاں بھی دوسری رقمیں قابلِ نظر اندازی ہیں سوائے اس صورت کے

کہ شہتیر طول میں بہت چھوٹا ہو۔ اگر شہتیر بہت چھوٹا ہو تو جزی زور کی تقسیم نامعلوم ہے اور غالباً دفعہ ۱۷ کی تقسیم اور یکساں تقسیم کے درمیان ہوگی۔

پھیلے ہوئے بوجھ ــــ پھیلے ہوئے بوجھ کی صورت میں سادہ خماؤ کے نظریے کا اتنی صحت کے ساتھ اطلاق نہیں ہوتا جتنا کہ سارے طول میں انتصابی جزی قوت کے مستقل ہونے کی صورت میں ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۶۴)۔ لیکن اگر اس سے قطع نظر کریں تو طول فرلا کے ایک ٹکڑے کی جزی فسادی بازگشتگی یہ ہوگی :- صفحہ ۲۵۵

$$\frac{1}{2}\,\frac{ج^2}{س} \times ی \times فرما \times فرلا$$

اگر ی اور ما ، لا کے تفاعل نہ ہوں یعنی اگر شہتیر کی تراش اس کے سارے طول میں مستقل ہو تو توانائی کے جملے کو لا کے لحاظ سے تکمل کرنے کے لیے صرف یہ کرنا ہوگا کہ برآمدہ بیرم کی بازگشتگی کی سابقہ قیمتوں کو نسبت

$$\int_0^ل ق^2\, فرلا : ل و^2$$

سے ضرب دینا ہوگا۔ مثلاً و فی اکائی طول کے یکساں پھیلے ہوئے بوجھ کی صورت میں آزاد سرے سے فاصلہ لا پر ق^2 = و^2 لا^2 ، اس لیے یہ نسبت

$\frac{1}{3}$ و^{2}ل^3 : ل و^2 یا $\frac{1}{3}\left(\frac{ول}{و}\right)^2$ ہوگی یعنی پھیلے ہوئے بوجھ کا اثر سرے کے مرتکز بوجھ کے اثر کا $\frac{1}{3}$ ہوگا۔ صریحاً یہی نسبت سروں پر آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے بھی درست ہوگی اگر اس میں یکساں طور پر پھیلے ہوئے بوجھ اور وسطی مرتکز بوجھ کے اثرات کا مقابلہ کیا جائے۔

I تراش کے گرڈر ــــ جزی انصراف جن صورتوں میں اہمیت حاصل کرتا ہے وہ مختلف ساختہ تراشوں کی ہیں جو گرڈروں میں اختیار کی جاتی ہیں خاص کر جب کہ گہرائی طول کے لحاظ سے بڑی ہو۔ مثلاً I تراش میں سیپٹے میں جزی زور کی حدت (دیکھو دفعہ ۱۷)

تراش کے اوسط جزی زور کی حدت سے بہت زیادہ ہوتی ہے - بڑے ساختہ گرڈروں میں مجموعی انصراف کا ایک موٹا سا تخمینہ کرنے کا ایک عام طریقہ یہ ہے کہ جزی کی رعایت سے سے کی قیمت اس کی معمولی قیمت سے ۲۵ فی صدی کم کرکے معمولی خماؤ کا انصراف محسوب کیا جائے۔

کوئی تراش - کسی ٹھوس تراش کے لیے (۱) کی بجائے لچکدار توانائی کی مساوات حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\tfrac{1}{\text{۲}}\,\text{وصہ} = \frac{\text{ل}}{\text{۲س}} \int_{-\frac{\text{ق}}{\text{۲}}}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \text{ج}^{2}\,\text{ی فرما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

جہاں ی تراش کا عرض گہرائی ما پر ہے جیسا کہ دفعہ ۱۷ میں ہے۔

اور $\text{ج} = \dfrac{\text{ق}}{\text{۲ی}} \displaystyle\int_{\text{ما}}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \text{مای فرما}$ دفعہ ۱۷ کی طرح[1] - اس طرح فسادی توانائی

$$\tfrac{1}{\text{۲}}\,\text{وصہ} = \frac{\text{ل}}{\text{۲س}} \int_{-\frac{\text{ق}}{\text{۲}}}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \left\{ \frac{\text{ق}^{2}}{\text{۴ی}^{2}} \left(\int_{\text{ما}}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \text{مای فرما} \right)^{2} \right\} \text{فرما} \quad \ldots\ldots (\text{۳})$$

---

[1] متغیر تراش کی صورت میں ج کی بجائے وہ قیمت مندرج کرو جو دفعہ ۱۷ کے پہلے حاشیہ میں دی گئی ہے اور $\frac{\text{ق}}{\text{۲}}$ کی بجائے ما، لکھو جو مستقل نہیں بلکہ کسی تراش میں ما کی انتہائی قیمت ہے، اور (۲) کی بائیں جانب کی بجائے یہ لکھو۔

$$\frac{1}{\text{۲س}} \int^{\text{ل}} \left\{ \int_{-\text{ما}}^{\text{ما}} \text{ج}^{2}\,\text{ی فرما} \right\} \text{فرلا}$$

یہ معلوم ہوسکتا ہے اگر آ اور ما، بطور لا (شہتیر کا طول) کے تفاعلوں کے معلوم ہوں۔ اس سے زیادہ عام نتیجہ حاصل کرنے کا ایک اس سے مختلف طریقہ پروفیسر سلوکم (Slocum) نے فرانکلن انسٹی ٹیوٹ کے رسالہ اپریل ۱۹۱۱ء میں دیا ہے۔

ربط ۲۵۶ اور ایسے برآمدہ بیرم کے لیے جو تراشوں کے تعدیلی محوروں کے گرد تشاکل ہو اور جس کے سرے پر بوجھ و ہو اور اس طرح ق = و :-

$$\frac{1}{2}\,\text{و}\,\text{مہ} = \frac{\text{و}\,\text{ل}}{\text{۴}^{\text{۲}}\,\text{س}} \int_{\cdot}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \frac{1}{\text{ی}} \left(\int_{\text{ما}}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \text{ما ی فرما} \right)^{2} \text{فرما}$$

اور

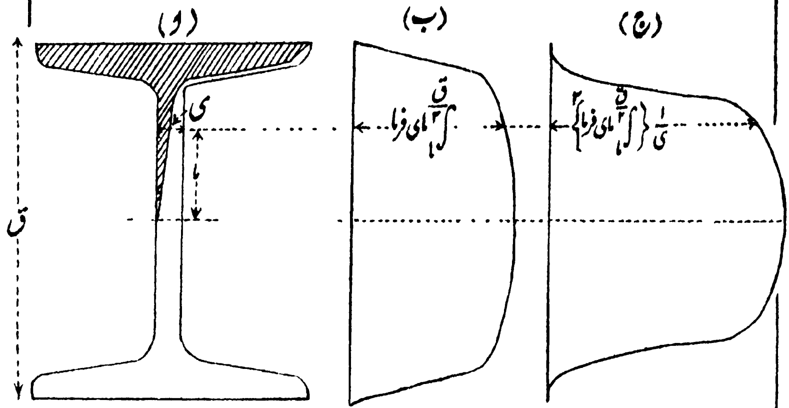
$$\text{صہ} = \frac{\text{۲}\,\text{و}\,\text{ل}}{\text{۴}^{\text{۲}}\,\text{س}} \int_{\cdot}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \frac{1}{\text{ی}} \left(\int_{\text{ما}}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \text{ما ی فرما} \right)^{2} \text{فرما}$$

فصل ل کے ایک سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے جس پر ایک وسطی بوجھ و ہو انصراف اوپر کے جملے کا $\frac{1}{4}$ ہوگا۔

ایسی تراشوں کے لیے جن میں عرض (ی) تعدیلی سطح سے فاصلہ (ما) کا ایک سادہ تفاعل نہ ہو کوئی ترسیمی طریقہ زیادہ سہل ہوگا۔ ج کی قیمتیں دفعہ ۱۷ اور شکل ۱۰۱ کی مدد سے حاصل ہوسکتی ہیں۔ تب شکل ۱۰۱ کی طرح ایک نقشہ کھینچا جاسکتا ہے جس کے معین شکل ۱۰۱ کے معینوں کا مربع لے کر تراش کے متناظر عرض سے ضرب دینے سے $\text{ج}^{2} \times \text{ی}$ کے متناسب ہونگے۔ اس نقشے کا مجموعی رقبہ $\int_{-\frac{\text{ق}}{\text{۲}}}^{\frac{\text{ق}}{\text{۲}}} \text{ج}^{2}\,\text{ی فرما}$ کو تعبیر کریگا اور اس سے انصراف حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً برآمدہ بیرم کا انصراف اس کو $\frac{\text{ل}}{\text{مس}}$ سے ضرب دیتے[لہ] اور و سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا۔ اگر ج کا نقشہ

[لہ] متغیر تراش کے شہتیر کی صورت میں شہتیر کے طول کو چھوٹے چھوٹے طولوں مف ل میں تقسیم کرو، اور ہر ایک کے لیے $\int_{\text{ما}}^{\text{ما}} \text{ج}^{2}\,\text{ی فرما}$ تقریباً معلوم کرو۔ ہر ایک کو مف ل سے ضرب دے کر ان کے حاصل جمع کو مس و سے تقسیم کرو تو انصراف حاصل ہوگا۔ (دیکھو گزشتہ حاشیہ)۔

مطلوب نہ ہو تو حسبِ ذیل عمل آسان ہوگا (دیکھو شکل ۱۳۹) - تراش کے لیے



شکل ۱۳۹

معمولی مقیاسی شکل کھینچو جیسا کہ (و) میں دکھایا گیا ہے اور ایک نقشہ (ب) کھینچو جو شہتیر کی گہرائی کے اساسی خط پر ج کی بجائے ج × ی کو تعبیر کرے - مساوات (۳) دفعہ ا سے معلوم ہوتا ہے کہ تعدیلی محور سے فاصلہ ما پر

$$ج ی = \frac{و}{ا} \times (\text{مقیاسی شکل کا رقبہ ما اور } \frac{ق}{۲} \text{ کے درمیان})$$

صفحہ ۲۵۷ اِس مساوات سے معین (ب) شکل (و) میں رقبے ناپنے سے معلوم ہوسکتے ہیں - اس نقشہ (ب) کے معینوں کا مربع لے کر ہر ایک کو عرض ی سے تقسیم کرو اور ان کو گہرائی ق کے اساس پر نقشہ (ج) کے معینوں کے طور پر ترسیم کرو - اس نقشہ (ج) کا رقبہ حسب سابق $\int_{-\frac{ق}{۲}}^{\frac{ق}{۲}}$ ج۲ ی فرما کو

تعبیر کریگا اور انصراف (دیکھو اوپر کی مساوات (۲)) اس طرح معلوم ہوگا کہ اسے $\frac{\text{ل}}{\text{س}}$ سے ضرب دیں اور برآمدہ بیرم کے لیے جس کے سرے پر بوجھ و ہو و سے تقسیم کریں، اور طول ل کے سروں پر سہارا دیے ہوئے اور وسطی بوجھ و کے شہتیر کی صورت میں اس کا $\frac{۱}{۴}$ لیں بشرطیکہ ج ی معلوم کرنے کے لیے و استعمال کیا گیا ہو۔ اور اگر حقیقی جزئی قوت $\frac{\text{و}}{۲}$ استعمال کی گئی ہو تو $\frac{۱}{۴}$ نہیں بلکہ $\frac{۱}{۲}$ لیں۔

ظاہر ہے کہ اس کی ضرورت نہیں کہ نقشہ (ب) کو فی الواقع مرتسم کیا جائے۔

پیمانے — شکل ۱۳۹ (ا) پوری جسامت پر کھینچی گئی ہے اس لیے مقیاسی شکل کا عرض $\frac{۲\,\text{ما}}{\text{ق}} \times \text{ی}$ کو تعبیر کریگا۔ اگر (ا) کی مقیاسی شکل کے رقبے کے ط مربع انچ کو (ب) میں معین کے انچ سے تعبیر کیا گیا ہو تو یہ معین $\int_{۰}^{\frac{\text{ق}}{۲}}$ ما ی فرما کو ۱ انچ = ط × $\frac{\text{ق}}{۲}$ (انچ)^{۳} کے پیمانے پر تعبیر کرینگے۔ اگر (ب) کے معینوں کا جو انچوں میں ہیں مربع لے کر آسانی کے لیے کسی عدد ن سے تقسیم کیا گیا اور پھر شکل (ج) میں انچوں میں مرتسم کیا گیا تو شکل (ج) کا رقبہ $\int_{-\frac{\text{ق}}{۲}}^{\frac{\text{ق}}{۲}} \frac{۱}{\text{ن}} \left(\int_{۰}^{\frac{\text{ق}}{۲}} \text{ما ی فرما}\right)^{۲}$ فرما کو ۱ مربع انچ = ن (ط × $\frac{\text{ق}}{۲}$)^{۲} کے پیمانے پر تعبیر کریگا اور اکائیاں (انچ)^{۶} ہونگی۔

کسی شہتیر مثلاً برآمدہ بیرم کا انصراف حاصل کرنے کے لیے

صرف اتنا ضروری ہے کہ اس نتیجے کو جو (انچ)^{۶} میں ہے $\frac{و ل}{آ س}$ سے ضرب دیا جائے جس کی اکائی (انچ)$^{-۵}$ ہے بشرطیکہ ل، آ اور س کے لیے طول کی اکائی انچ استعمال کی گئی ہو۔ اس طرح حاصل ضرب سے انصراف انچوں میں حاصل ہوگا۔ وسطی بوجھ کے شہتیر کے لیے جزوِ ضربی $\frac{۱}{۴} \frac{و ل}{آ^۲ س}$ ہوگا۔ شکل ۱۳۹ کو پوری جسامت پر کھینچا جائے تو برطانوی معیاری شہتیر کی تراش نمبر ۱ کو تعبیر کرتی ہے جس کے لیے ق = ۶ انچ، آ = ۱۱۶ء۳۴ (انچ)^{۴}، اور پیٹا ۱۴ء انچ موٹا ہے: نقشہ (ج) کا رقبہ ۷۶۱ (انچ)^{۶} کو تعبیر کرتا ہے، اور برآمدہ بیرم کا جزی انصراف ۱۶ء۴ $\frac{و ل}{س}$ انچ ہوگا۔

نوکدار کونوں کے I شہتیر کا (جیسا کہ شکل ۱۰۰ میں دکھایا گیا ہے) جزی انصراف دو حصوں پر تکمیل کرنے سے حاصل ہوسکتا ہے جن کے لیے عرض مستقل ہے (دیکھو ذیل کی مثال)، اور اس طریقے کو کوروں اور پیٹے کی اوسط موٹائی کی قیمت لے کر کسی I تراش کے لیے بطور ایک تقرب کے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ ذیل میں ایک مثال دی جاتی ہے۔

صفحہ ۲۵۸ I تراشوں کے لیے آسان تقرب — خماؤ کے سادہ نظریے کے پورے طور پر درست نہ ہونے کی وجہ سے ان حسابات میں سے کسی کو بھی بالکل صحیح نہیں کہا جاسکتا اس لیے شاید سب میں آسان تقرب لینا ہی بہترین ہو اور وہ تقرب یہ ہے کہ جزی انصراف یہ فرض کرکے معلوم کیا جائے کہ ساری جزی قوت پیٹے پر پڑتی ہے اور یکساں تقسیم کے ساتھ پڑتی ہے۔ اس طرح برآمدہ بیرم کے لیے

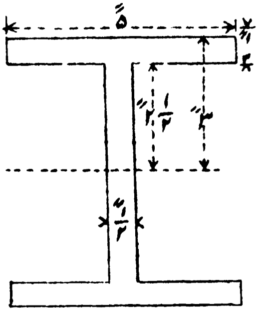
$$صہ = \frac{و ل}{م س}$$

اور سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے

$$\text{صد} = \frac{\text{و ل}}{\text{۴ سا ص}}$$

جہاں سا پیٹے کا رقبہ ہے اور ل شہتیر کا طول ہے - تمام خطی اکائیاں ایک ہی مثلاً انچ ہوں۔

مثال — ایک برآمدہ بیرم I تراش کا ہے جس کی گہرائی ۶ انچ اور عرض ۵ انچ ہے اور کوروں اور پیٹے کی موٹائی ½ انچ ہے - سرے پر ایک بوجھ ہے - جز اور خماؤ سے انصرافوں کی نسبت معلوم کرو۔



شکل ۱۴۰

$\frac{\text{ے}}{\text{س}} = \frac{۵}{۲}$ ، $\text{آ} = ۴۳٫۱۲۵ \ (\text{انچ})^۴$

و (دیکھو شکل ۱۴۰)۔

کوروں میں —

$$\text{ج} = \frac{\text{و}}{\text{آ}} \int_{\text{ما}}^{۳} \text{ما فرما} = \frac{\text{و}}{۲\,\text{آ}} \left(۹ - \text{ما}^۲\right)$$

$$\text{ج}^۲ = \frac{\text{و}^۲}{۴\,\text{آ}^۲} \left(۸۱ - ۱۸\,\text{ما}^۲ + \text{ما}^۴\right)$$

پیٹے میں —

$$\text{ج} = \frac{\text{و}}{\frac{1}{2}\,\text{آ}} \left(\int_{۲\frac{1}{2}}^{۳} ۵\,\text{ما} \cdot \text{فرما} + \int_{\text{ما}}^{۲\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2}\,\text{ما فرما} \right) = \frac{۲\,\text{و}}{\text{آ}} \left(\frac{۱۳۵}{۱۶} - \frac{\text{ما}^۲}{۴} \right)$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{آ}} \left(\frac{۱۳۵}{۸} - \frac{\text{ما}^۲}{۲} \right)$$

$$\text{ج}^2 = \frac{\text{و}^2}{2\text{آ}^2}\left(\frac{18225}{64} - \frac{135}{8}\,\text{ما}^2 + \frac{\text{ما}^4}{4}\right)$$

تعدیلی محور کی دونوں جانبوں کو لینے سے مجموعی جزی بازگشتگی (۲) کی رُو سے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{وصہ} = \frac{\text{ل}}{2\text{س}}\int_{-3}^{3}\text{ج}^2\,\text{ی فرما} = 2\,\frac{\text{ل}}{2\text{س}}\left\{\frac{5\,\text{و}^2}{4\,\text{آ}^2}\int_{2\frac{1}{2}}^{3}\left(81 - 18\,\text{ما}^2 + \text{ما}^4\right)\text{فرما}\right.$$

$$\left.+\frac{\text{و}^2}{2\,\text{آ}^2}\int_{0}^{2\frac{1}{2}}\left(\frac{18225}{64} - \frac{135}{8}\,\text{ما}^2 + \frac{\text{ما}^4}{4}\right)\text{فرما}\right\}$$

$$\text{صہ} = \frac{2\,\text{ل}\,\text{و}}{\text{س}\,\text{آ}^2}\left(314{,}5 + 1{,}65\right) = \frac{632\,\text{ول}}{\text{آ}^2\,\text{س}}$$

$$= 0{,}340\,\frac{\text{ول}}{\text{س}}$$

(یہ شکل ۱۳۹ کے لیے دیے ہوئے نتیجے کے بہت قریب ہے اور اِس سے اسی تناسب میں کم ہے جس میں اِس کا پٹا اُس کے پٹے سے موٹا ہے۔ آ دونوں میں تقریباً مساوی ہے۔)

$$\frac{\text{جز}}{\text{خاؤ}}\ \text{انصرافوں کی نسبت} = \frac{632\,\text{ول}}{\text{آ}^2\,\text{س}} \times \frac{3\,\text{آ}\,\text{ے}}{\text{ول}^2}$$

$$= \frac{1896}{\text{آ}}\cdot\frac{\text{ے}}{\text{س}}\times\frac{1}{\text{ل}^2}$$

اور آ = ۴۳٫۱۲۵ اور $\frac{\text{ے}}{\text{س}} = \frac{5}{2}$ لینے سے یہ نسبت تقریباً $\frac{110}{\text{ل}^2}$ ہوتی ہے۔ فصل ل کے سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے یہ نسبت $\frac{240}{\text{ل}^2}$ ہوگی، اور اگر فصل گہرائی کا ۱۰ گنا یعنی ۶۰ انچ ہو تو نسبت $\frac{240}{3600}$ یعنی ۱۲ فی صدی سے صفحہ ۲۵۹

کچھ زیادہ ہوگی۔

سوالات نمبر ۹

۱۔ ایک فولادی پٹی ۱ انچ چوڑی اور $\frac{1}{4}$ انچ موٹی ایک ۸ فٹ قطر کے چرخ پر لپیٹی گئی ہے۔ دھات کے اندر زور کی حدت اور بازگشتگی فی طولی فٹ معلوم کرو اگر ے $= 30 \times 10^6$ پونڈ فی مربع انچ۔

۲۔ $\frac{1}{16}$ انچ قطر کا فولادی تار ایک ۵ فٹ قطر کے چرخ پر لپیٹا گیا ہے۔ تار کے اندر جمع شدہ کام فی مکعب انچ اور فی طولی فٹ معلوم کرو۔ ے $= 30 \times 10^6$ پونڈ فی مربع انچ۔

۳۔ ایک مدور سلاخ میں جو سروں پر سہاروں پر ٹکی ہوئی ہو اور وسط میں ایک بوجھ اٹھائے ہوئے ہو لچکدار توانائی فی مکعب انچ معلوم کرو۔ جواب کو تناؤ کے زور کی اعظم حدت اور راست لچک کے مقیاس کی رقوم میں بیان کرو۔

۴۔ اگر بے خطر تناؤ کے زور کی حدود فولاد اور ایش لکڑی کے لیے نسبت ۸:۱ میں ہوں، اور لچک کے راست مقیاس نسبت ۲۰:۱ میں ہوں تو تناؤ کی ایک ہی حالت کے تحت فولاد اور ایش کی برداشتنی بازگشتگی فی مکعب انچ کا مقابلہ کرو۔ اگر فولاد کا وزن ۴۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہو اور ایش کا ۵۰ پونڈ فی مکعب فٹ تو دونوں کے مساوی وزنوں کی برداشتنی بازگشتگی کا مقابلہ کرو۔

۵۔ اگر ایک گاڑی کی کمانی میں زور کی بے خطر حد ۱۰ ٹن فی مربع انچ ہو تو ۱ انچ ٹن توانائی کو برداشت کرنے کے لیے کتنے مکعب انچ شے درکار ہوگی اگر ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ اگر سب میں لمبی تختی ۶ فٹ ۶ انچ لمبی ہو اور تختیاں ۴ انچ چوڑی اور $\frac{1}{2}$ انچ موٹی ہوں تو کتنی تختیاں درکار ہونگی۔ برداشتنی بوجھ، برداشتنی انصراف اور ابتدائی نصف قطرِ انحنا کیا ہوگا۔

۶ — I تراشش کا ایک شہتیر ۲۰ انچ گہرا اور $7\frac{1}{2}$ انچ چوڑا ہے - پیٹے اور کوروں کی موٹائی علی الترتیب ۰٫۶ انچ اور ۱ انچ ہے - اگر ۲۰ فٹ کے فصل کے وسط میں ایک بوجھ لگایا گیا ہو تو معلوم کرو کہ مجموعی انصراف کا تقریباً کونسا حصہ جز کی وجہ سے ہوگا اگر نسبت $\frac{\text{ے}}{\text{س}}$ = ۲٫۵ -

نواں باب

راست زور اور خماؤ کے زور

صفحہ ۲۶۰

۹۷ - خماؤ کے اور راست زور ملے ہوئے ـــــ یہ اکثر ہوتا ہے کہ ایک ستون یا بندھن سلاخ کی تراش پر جس پر ایک طولی دباؤ یا کھنچاؤ عمل کر رہا ہو اس کے علاوہ خماؤ کے زور بھی عمل کرتے ہیں ، اور ستون یا بندھن سلاخ میں ایک محوری مستوی کے اندر خمیدگی واقع ہوتی ہے - یا یہ کہ ایک شہتیر کی تراش پر جو خماؤ کی مزاحمت کر رہا ہو سروں کے دباؤ یا کھنچاؤ کی وجہ سے ایک مزید راست زور پیدا ہو اور یہ اس طرح ہو سکتا ہے کہ شہتیر پر سب بوجھ عرضی نہ ہوں جیسا کہ باب ۴ اور ۵ میں فرض کیا گیا تھا بلکہ ایسے ہوں کہ شہتیر کو داب روک یا بندھن بھی بنائیں - بہر صورت کسی تراش کے کسی نقطے پر زور کی حاصل طولی حدت تناؤ یا فشار کے راست زور اور خماؤ سے پیدا ہونے والے راست زور کا جبری مجموعہ ہوگی - اگر سرے کے ایک بوجھ کی وجہ سے کسی تراش کے کسی نقطے پر زور کی حدت ف ہو تو

$$ف = ف_{٠} + ف_{خ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

جہاں ف سرے کا مجموعی بوجھ بٹے تراش کا رقبہ ہے اور ف خ خماؤ کے زور کی حدت ہے جو خماؤ کے معیار سے حاصل ہوگی جس طرح کہ دفعہ ۶۳ میں خالص عرضی لداؤ کے لیے محسوب کی گئی ہے۔ اس کی علامت تراش کے ایک حصے میں وہی ہوگی جو ف کی ہے اور دوسرے حصے میں مخالف علامت ہوگی۔ اگر ف خ کی اعظم قیمتیں ف سے بڑی ہوں تو تراش میں ایک مقام پر زور کی حدت ف علامت بدلیگی، لیکن زور تراش کے مرکزِ ہندسی پر صفر نہیں ہوگا جیساکہ خالص عرضی قوتوں کے زیرِ عمل شہتیر میں ہوتا ہے۔ مزید راست زور ف کے اثر سے تعدیلی سطح کا محل بدل جاتا ہے یا بعض اوقات وہ تراش سے بالکل غائب ہوجاتی ہے۔

۹۸۔ خارج المرکز طولی بوجھ — اگر ایک منشوری سلاخ پر راست بوجھ کا خطِ عمل سلاخ کے محور کے متوازی ہو اور تراش کے ایک محورِ تشاکل کو تراش کے مرکزِ ہندسی سے فاصلہ ھ پر ملے تو سلاخ کے محور کے اور خارج المرکز بوجھ کے خطِ عمل کے مستوی میں خماؤ واقع ہوتا ہے۔ مثلاً شکل ۱۴۱ ایک سلاخ کی تراش کو تعبیر کرتی ہے۔ بوجھ ب نقطہ ج میں سے گزرتا ہے اور ہ تراش کا مرکزِ ہندسی ہے۔ فرض کرو کہ س تراش کا رقبہ ہے، اور ما فاصلہ ہ د ہے جو مرکزِ ہندسی ہ سے انتہائی کنارے د کا سمت ہ ج میں ہے اور فرض کرو کہ ہ ج کے علی القوائم مرکزی محور ف گ کے گرد تراش کا معیارِ جمود آ ہے تب

راست تناؤ یا فشار $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ یا ف کے علاوہ تراش پر ایک خماؤ کا معیار

م = ب × ھ ہوگا اور ف گ سے فاصلہ ما پر کسی نقطہ پر زور کی حدت صفحہ ۲۶۱

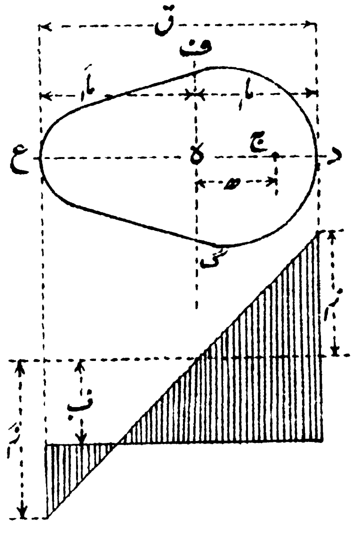
$$\text{ف} = \text{ف}_{\text{ب}} + \text{ف}_{\text{خ}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{\text{ب} \times \text{ھ} \times \text{ما}}{\text{آ}} \quad (\text{دفعہ ۶۳})$$

یا چونکہ آ = س گ۲، جہاں گ، ف گ کے گرد گردشی نصف قطر ہے اس لیے

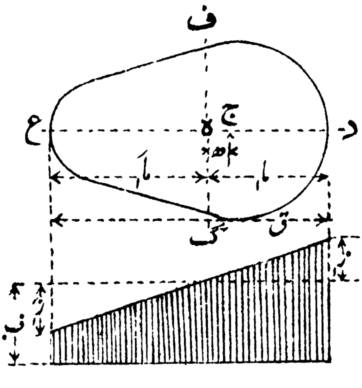
$$\text{ف} = \frac{\text{ب}}{\text{ر}} + \frac{\text{ب ھ ما}}{\text{ر گ}^2} = \frac{\text{ب}}{\text{ر}}\left(1 + \frac{\text{ھ ما}}{\text{گ}^2}\right) \text{ یا}$$

$$\text{ف ب}\left(1 + \frac{\text{ھ ما}}{\text{گ}^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ما اُن نقطوں کے لیے مثبت ہوگا جو ف گ کے اُسی طرف ہوں جس طرف ج ہے اور دوسری جانب کے لیے منفی ہوگا۔ زور کی حدت ما کے ساتھ ہموار طور پر بدلیگی جیسا کہ اشکال ۱۴۱، ۱۴۲ میں دکھایا گیا ہے۔



شکل ۱۴۱



شکل ۱۴۲

زور کی انتہائی حدتیں تراش کے کناروں پر حسبِ ذیل ہونگی:-

ف ب + زر اور ف ب - زر

جہاں $ز_۱$ اور $زَ_۱$، $ف_ع$ کی مخالف انتہائی قیمتیں ہیں، یا اگر $ما_۱$ اور $مَا_۱$ مرکزِ ہندسی ھ سے انتہائی کناروں کے فاصلے ہوں تو زور کی انتہائی حدتیں حسبِ ذیل ہونگی :—

$$ف = ف_ب \left(۱ + \frac{ھ\, ما_۱}{گ^۲}\right) \text{ اور } ف = ف_ب \left(۱ - \frac{ھ\, مَا_۱}{گ^۲}\right) \quad \ldots\ldots (۲)$$

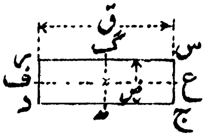
جو انتہائی کناروں د اور ع پر ہونگی ۔ د مرکزِ ہندسی کے اُس طرف ہے جس طرف ج ہے، اور ع دوسری جانب ۔ اگر تراش ف گ کے گرد متشاکل ہو تو

$$ما_۱ = مَا_۱ = \frac{ق}{۲}$$

صریحاً ف = ۰ جب کہ $ما = -\frac{گ^۲}{ھ}$ اس لیے اگر یہ فاصلہ تراش کے رقبے کے اندر ہو، یعنی اگر $\frac{گ^۲}{ھ} < مَا_۱$ جو مرکزِ ہندسی سے ج کے مخالف کنارے ع کا فاصلہ ہے تو زور علامت بدلیگا ۔ ف گ کے متوازی اور اس سے فاصلہ $\frac{گ^۲}{ھ}$ پر ج کی مخالف جانب ایک محور کھینچا جائے تو اس کو تراش کا تعدیلی محور کہا جاسکتا ہے کیونکہ یہ تراش کے رقبہ کا ایسی سطح کے ساتھ خطِ تقاطع ہے جس میں راست طولی زور صفر ہے ۔ $ھ > \frac{گ^۲}{مَا_۱}$ کی صورت میں زور کی ہموار متغیر حدت شکل ۱۴۱ میں دکھائی گئی ہے ۔ اگر $\frac{گ^۲}{ھ} > مَا_۱$ یعنی اگر $ھ < \frac{گ^۲}{مَا_۱}$ تو زور ساری تراش میں ف کی قسم ہی کا ہے ۔ زور کی یہ ہموار متغیر تقسیم شکل ۱۴۲ میں دکھائی گئی ہے ۔ دیکھو اگر بوجھ قابلِ لحاظ خروج المرکز کے ہوں تو ڈھلے لوہے جیسی دھاتیں جو فشار میں مضبوط ہیں فشاری بوجھ کے تحت آخرکار تناؤ کی وجہ سے ٹوٹتی ہیں ۔

صفحہ ۶۳

مستطیلی تراش ——— اگر تراش مستطیلی ہو جس کا عرض ض اور گہرائی ق ہو جیسا کہ شکل ۱۴۳ میں دکھایا گیا ہے تو اس مطلب کے لیے کہ ساری تراش پر زور ایک ہی علامت کا ہو حاصل بوجھ کے خطِ عمل کا مرکزِ ہندسی میں کے خط گ ھ سے سمت ہ ع میں انحراف حسبِ ذیل سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے ———



شکل ۱۴۳

$$ھ = گ^2 \div ما = \frac{1}{12} ق^2 \div \frac{ق}{2} = \frac{ق}{6}$$

اسی نتیجے سے چنائی کے لیے (جس میں تناؤ جائز نہیں رکھا جاتا) وہ مشہور عام قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ مستطیلی جوڑ پر حاصل دباؤ جوڑ کے مرکزی خط سے موٹائی کے $\frac{1}{6}$ کے اندر یعنی وسطی ثلث کے اندر واقع ہونا چاہیے۔ انہی شرائط کے تحت سمت ہ گ میں انتہائی انحراف $\frac{1}{6}$ ض ہونا چاہیے۔

کسی تراش کا قلب ——— اگر بوجھ کا خطِ عمل تراش کے دونوں مرکزی خطوط میں سے کسی پر بھی نہ ہو تو خماؤ غیر متشاکل ہوگا اور اس کو آسانی کے لیے دفعہ ۱۶۸ کی طرح دو خاص محوروں کے مستویوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر ب کا خطِ عمل ربع گ ہ ع س میں ایسے نقطے میں سے گزرے جس کے محدد محوروں ہ ع اور ہ گ کے حوالے سے لا اور ما ہوں جو علی الترتیب ع اور گ کی طرف مثبت ناپے جائیں تو خماؤ کا معیار ہ ع کے گرد ب × ما اور ہ گ کے گرد ب × لا ہوگا، اور تراش کے کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر زور حسبِ ذیل ہوگا:

$$ف = \frac{ب}{ض\,ق} + \frac{ب\,ما\,ماَ}{\frac{1}{12} ق\,ض^3} + \frac{ب\,لا\,لاَ}{\frac{1}{12} ض\,ق^3}$$

$$= \frac{12\,ب}{ض\,ق}\left(\frac{1}{12} + \frac{ما\,ماَ}{ض^2} + \frac{لا\,لاَ}{ق^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اس کی اقل قیمت صریحاً ہمیشہ د پر ہوگی جہاں $\text{لاَ} = -\frac{\text{ق}}{2}$ اور $\text{ماَ} = -\frac{\text{ض}}{2}$ اور یہ قیمتیں درج کرنے سے ف کی اقل قیمت

$$= \frac{6\,\text{ب}}{\text{ض}\,\text{ق}}\left(\frac{1}{6} - \frac{\text{ما}}{\text{ض}} - \frac{\text{لا}}{\text{ق}}\right)$$

یہ عین صفر ہوگا اگر

$$\frac{\text{ما}}{\text{ض}} + \frac{\text{لا}}{\text{ق}} = \frac{1}{6}\text{، یا } \text{ما} = -\frac{\text{ض}}{\text{ق}}\,\text{لا} + \frac{\text{ض}}{6}$$

صفحہ ۶۳ یہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو ہ گ پر کے نقطے $\frac{\text{ض}}{6}$ اور ہ ع پر کے نقطہ $\frac{\text{ق}}{6}$ کو ملاتا ہے۔ مستطیل کے دیگر رُبعوں میں اسی طرح کی حدیں حاصل ہونگی اور اس طرح ساری تراش کے اندر زور کی ایک ہی علامت ہونے کی شرط یہ ہوئی کہ حاصل بوجھ کا نقطۂ عمل اُس معین کے اندر واقع ہو جس کے وتر ع ف اور گ ھ پر ہیں اور ان کے طول علی الترتیب $\frac{\text{ق}}{3}$ اور $\frac{\text{ض}}{3}$ ہیں۔ یہ معین تراش کا قلب کہلاتا ہے۔

مدور تراش ـــ ایک مدور تراش کی صورت میں جس کا نصف قطر س ہو وہ انحراف جس سے تراش کے احاطے کے ایک نقطے پر زور عین صفر ہو اور اس کے بالکل مقابل نقطے پر اوسط حدت کی دُگنی حدت ہو حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$\text{ھ} = \text{گ}^2 \div \text{س} = \frac{\text{س}^2}{4} \div \text{س} = \frac{1}{4}\,\text{س}$$

اور ایک کھوکھلی مدور تراش کے لیے جس کا اندرونی نصف قطر ر اور بیرونی نصف قطر س ہو انحراف حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$\text{ھ} = \frac{\text{س}^2 + \text{ر}^2}{4\,\text{س}}$$

جو پتلی نلی کی صورت میں حد ½ س کے قریب پہنچتا ہے۔

دیگر تراشیں — صریحاً (۳) کی ایک زیادہ عام شکل یہ ہوگی:۔

$$\text{ف} = \frac{\text{ب}}{\text{س}}\left(1 + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{گ}_{\text{لا}}^{2}} + \frac{\text{لا لاَ}}{\text{گ}_{\text{ما}}^{2}}\right) \qquad \text{(۴)}$$

جہاں $\text{گ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{ما}}$ تراش کے رقبے کے گردشی نصف قطر علی الترتیب محاور لا اور ما کے گرد ہیں۔ اور کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر زور صفر ہونے کے لیے

$$\frac{\text{ما ماَ}}{\text{گ}_{\text{لا}}^{2}} + \frac{\text{لا لاَ}}{\text{گ}_{\text{ما}}^{2}} = -1 \qquad \text{(۵)}$$

اگر تراش ایک متشاکل I تراش ہو جس کا عرض لا کی سمت میں ض اور گہرائی ما کی سمت میں ق ہو تو چاروں کونے صفر زور کی حد کے نقطے ہونگے، اور اس طرح تراش کے اندر زور کی علامت تبدیل نہ ہونے کے لیے مرکزِ ہندسی سے بوجھ کے انحراف کی حدود حسبِ ذیل خط سے

$$\text{ما} = -\frac{\text{گ}_{\text{لا}}^{2}}{\text{گ}_{\text{ما}}^{2}} \times \frac{\text{ض}}{\text{ق}}\,\text{لا} - \frac{2\,\text{گ}_{\text{لا}}^{2}}{\text{ق}} \qquad \text{(۶)}$$

اور تین اَور خطوط سے حاصل ہونگی جو مل کر ایک معین بنائینگے جس کے وتر تراش کے خاص محاور ہونگے۔ اور بہت سی اَور تراشوں کے لیے بھی جن کے احاطوں کے گرد کثیر الاضلاع کھینچے جا سکیں اسی طرح کی حدود قائم کی جا سکتی ہیں۔

متشاکل I تراش کے لیے جیسی کہ شکل ۲۰۸ ہے اگر تراش کے انتصابی خاص محور کو محور ہ ما لیا جائے تو ایک کونے کے محدد یہ ہونگے:۔

$$\text{لاَ} = \frac{\text{ض}}{2} \quad \text{اور} \quad \text{ماَ} = \frac{\text{ق}}{2}$$

اگر بوجھ کے مرکز کے محدد لا، ما ہوں تو (۴) سے اکائی زور حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$\text{ف} = \frac{\text{ب}}{\text{س}}\left(\text{۱} + \frac{\text{لا ض}}{\text{گ}^{\text{۲}}_{\text{ا}}} + \frac{\text{ما ق}}{\text{گ}^{\text{۲}}_{\text{ل}}}\right)$$

صفحہ ۲۶۴

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{ب}}} - \text{۱} = \frac{\text{ما ق}}{\text{گ}^{\text{۲}}_{\text{ل}}} + \frac{\text{لا ض}}{\text{گ}^{\text{۲}}_{\text{ا}}} \quad \text{..........} \quad (\text{۷})$$

$\frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{ب}}}$ کی مختلف قیمتوں کے لیے مساوات (۷) سے خطوطِ مستقیم کا ایک سلسلہ تعبیر ہوگا جن پر بوجھ کا مرکز واقع ہوگا - ان خطوط کا میلان محور ط ل سے زاویہ طہ ہوگا جس کے لیے

$$\text{مس طہ} = -\frac{\text{گ}^{\text{۲}}_{\text{ل}}}{\text{گ}^{\text{۲}}_{\text{ا}}} \times \frac{\text{ض}}{\text{ق}} \quad \text{..........} \quad (\text{۸})$$

اور مساوات (۶) ف کی خاص قیمت ف = ۰ کے لیے ہے - تراش کے کونے پر $\frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{ب}}}$ کی ایک خاص قیمت کے لیے بوجھ کے خروج المرکز کی اقل قیمت اُس وقت واقع ہوگی جب کہ مرکز ہندسی اور بوجھ کے مرکز کو ملانے والا خط مساوات (۷) سے تعبیر ہونے والے خطوط کے علی القوائم ہو، یعنی محور ط ل سے ایسا زاویہ بنائے جس کا مماس یہ ہو:-

$$\frac{\text{گ}^{\text{۲}}_{\text{ا}}}{\text{گ}^{\text{۲}}_{\text{ل}}} \times \frac{\text{ق}}{\text{ض}} \quad \text{..........} \quad (\text{۹})$$

خارج المرکز بوجھوں کی عام مثالیں ان میں ملتی ہیں :- بندھن سلاخیں جو کسی رکاوٹ کی وجہ سے "خمدار" رکھی جائیں، بعض مشینوں مثلاً متکانی انجنوں کے فریم، فولادی تعمیروں کے ارکان، اور ہر قسم کے ستون - لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ خاص کر ستونوں کی صورت میں، اگر خم واقع ہو تو ستون کے طول میں انحراف ایک متغیر مقدار ہوتی ہے - لیکن اکثر یہ ہوتا ہے کہ جن ستونوں کا طول ان کے تراشی ابعاد سے

تناسب سے چھوٹا ہو اور جن میں محور سے حاصل دباؤ کا انحراف ھ ایک خاص مقدار ہو ان میں ھ کا یہ تغیر قابلِ نظرانداز ہوتا ہے۔

حمالوں کے آنکڑے ـــــ ضابطے (۱) اور (۲) حمالوں کے آنکڑوں اور جوڑک آنکڑوں میں کھنچ کی وجہ سے انتہائی زور معلوم کرنے کے لیے اکثر استعمال ہوتے ہیں۔ ان میں بوجھ کا محور آنکڑے کی وسطی تراش کے مرکزِ ہندسی سے خاصے فاصلے پر ہوتا ہے۔ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ بہت بڑے انحنا کے آنکڑوں کے خماؤ کے لیے مستقیم شہتیر کا نظریہ استعمال کرنا غلط ہے۔ اس نظریے کے استعمال سے آنکڑے کی اندرونی جانب کا تنشی زور (تقریباً ۵۰ فی صدی) کم حاصل ہوتا ہے اور بیرونی جانب کے فشار کا بیش اندازہ ہوتا ہے۔ اس مبحث سے دفعہ ۱۳۲ میں بحث کی گئی ہے۔

شہتیروں کے سروں کی چنائی کی نشستیں ـــــ اگر ہم فرض کریں کہ برآمدہ بیرم یا دربستہ شہتیر پر دیواریں جو قوتیں لگاتی ہیں وہ مشتمل ہوتی ہیں ایک یکساں اوپروار دباؤ پر جو مجموعی انفصالی ردِعمل ر کے مساوی ہے اور مساوی اوپروار اور نچوار دباؤں پر جن کی حدت طول میں ہموار طور پر اس طرح بدلتی ہے کہ نشست کے مرکز پر صفر ہوتی ہے اور سروں پر اعظم اور اس طرح ان سے ایک جفت یا تثبیت کا معیار پیدا ہوتا ہے تو اس مفروضے کی بنا پر چنائی پر دباؤ کی اعظم حدت ضابطہ (۱) کے استعمال سے حاصل ہوسکتی ہے۔ اگر شہتیر کا (مستقل) عرض ض ہو اور نشست کا طول ق ہو تو ف = ر / (ض ق)۔ اگر نشست بہت لمبی نہ ہو تو نشست کے دباؤں کا معیار نشست کے مرکزِ ہندسی کے گرد تقریباً وہی ہوگا جو دیوار میں داخلے کے مقام پر خماؤ کا معیار ہے۔ اس سے دراصل ر × ق/۲ کے بقدر زیادہ ہوگا۔ مثال کے طور پر ایک برآمدہ بیرم کی صورت پر غور کرو جس کا

طول ل ہے اور جس کے سرے پر بوجھ و ہے (شکل ۵۹) -

صفحہ ۲۶۵ معیار و $\left(\text{ل} + \frac{\text{ق}}{۲}\right)$ ہوگا - اس کو ب × ھ کی بجائے اور مر کی

بجائے ض ق اور $\frac{\text{مرگ}^۲}{\text{ما}}$ کی بجائے $\frac{۱}{۶}$ ض ق^۲ کو (۱) یا (۲)

میں درج کرنے سے دیوار کے داخلے پر دباؤ کی انتہائی حدت

$$\text{ف}_{\text{اعظم}} = \frac{\text{و}}{\text{ض ق}} + \frac{۶\,\text{و}\left(\text{ل} + \frac{\text{ق}}{۲}\right)}{\text{ض ق}^۲} = \frac{۲\,\text{و}}{\text{ض ق}}\left(۲ + \frac{۳\,\text{ل}}{\text{ق}}\right)$$

جس سے دباؤ کی اعظم حدت معلوم ہوگی اگر ق معلوم ہو، یا اگر نشست کے پھیلاؤ کے زور کی کامی حدت مختص کردی گئی ہو (مثلاً ۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ) تو نشست کا مطلوبہ طول ق معلوم ہوسکتا ہے۔

مثال ۱ — ایک مستطیلی تراش میں جو ۲ انچ چوڑی اور ۱ انچ موٹی ہے ایک ۱۰ ٹن کی کھینچ کا محور تراش کے مرکز سے موٹائی کی سمت میں بقدر $\frac{۱}{۱۰}$ انچ کے ہٹا ہوا ہے، اور چوڑائی کے وسط میں ہے۔ انتہائی زوروں کی حدیں معلوم کرو۔

خماؤ کے انتہائی زور یہ ہونگے:—

$$\text{ز} = \frac{\text{ھ}}{\text{مق}} = \frac{۱۰ \times \frac{۱}{۱۰}}{۱ \times ۲ \times \frac{۱}{۶}} = ۳ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

جو تراش کے ایک لمبے کنارے پر تناؤ ہوگا اور ایک پر فشار - ان میں تناؤ

$$\frac{۱۰}{۲} = ۵ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

کو جبری طور پر جمع کرنا چاہیے - اس لیے مرکز ہندسی سے کھینچ جس جانب منحرف ہے اُس جانب انتہائی تناؤ

$$= ۵ + ۳ = ۸ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

اور مقابل کنارے پر تناؤ

$$= 5 - 3 = 2 \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

یہاں مرکزِ ہندسی سے موٹائی کے $\frac{1}{10}$ انحراف سے زور کی اعظم حدت اوسط سے ۶۰ فی صدی زیادہ ہوجاتی ہے۔

مثال ۲ — ایک چھوٹے ڈھلے لوہے کے ستون کا بیرونی قطر ۸ انچ ہے۔ دھات کی موٹائی ۱ انچ ہے اور بوجھ ۲۰ ٹن کا ہے۔ اگر بوجھ ستون کے مرکز سے $1\frac{3}{4}$ انچ ہٹا ہوا ہو تو زور کی انتہائی حدتیں معلوم کرو۔ کتنے انحراف سے تناؤ عین پیدا ہونے کو ہوگا۔

$$\text{تراش کا رقبہ} = \frac{\pi}{4}(64 - 36) = 22.0 \text{ مربع انچ}$$

$$\text{خماؤ کی مزاحمت کا معیار} = 20 \times 1\frac{3}{4} = 35 \text{ ٹن انچ}$$

اس لیے خماؤ کے زور کی انتہائی حدتیں

$$= 35 \div \frac{\pi}{32} \cdot \frac{8^4 - 6^4}{8} = \frac{32 \times 8 \times 35}{2800 \times \pi}$$

$$= 1.017 \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

$$\text{مزید فشاری زور} = \frac{20}{22} = 0.909 \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

$$\text{اس لیے اعظم فشاری زور} = 1.017 + 0.909 = 1.926 \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

اور اقل فشار $= 0.909 - 1.017 = -0.108$ یعنی 0.108 ٹن فی مربع انچ تناؤ۔

اگر خارج المرکز بوجھ کی مقابل جانب کے کنارے پر زور عین صفر ہو تو انحراف

$$= 1.75 \times \frac{0.909}{1.017} = 1.56 \text{ انچ}$$ صفحہ ۴۶۶

مثال ۳ ـ متشاکل I تراش کے ایک چھوٹے کھم پر اس کے محور کے متوازی ایک ایسا دباؤ عمل کرتا ہے جو اگر محور پر عمل کرتا تو زور ۲ ٹن فی مربع انچ ہوتا ہے۔ اگر تراش کی گہرائی ۹ انچ، عرض ۷ انچ، رقبہ ۱۷٫۰۶ مربع انچ اور خاص معیارِ جمود ۲۲۹٫۵ (انچ)^{۴} اور ۴۶٫۳ (انچ)^{۴} ہوں جن میں سے اول الذکر معیارِ جمود عرض کی سمت کے محور کے گرد ہو تو وہ خروج المرکز معلوم کرو جو ۱۰ ٹن فی مربع انچ کا زور پیدا کرنے کے لیے درکار ہوگا۔

$$\text{گ}_{\text{لا}}^{۲} = \frac{\text{آ}_{\text{لا}}}{\text{ر}} = \frac{۲۲۹٫۵}{۱۷٫۰۶} = ۱۳٫۴۵$$

$$\text{گ}_{\text{ما}}^{۲} = \frac{۴۶٫۳}{۱۷٫۰۰} = ۲٫۷۱۴$$

اور مساوات (۷) میں $\frac{\text{ف}}{\text{ف.}} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$

اس لیے ایک کونے میں یہ اعظم زور پیدا کرنے کے لیے دباؤ کے مرکز کا طریق حسبِ ذیل ہوگا:-

$$۵ - ۱ = ۴ = \frac{۴٫۵\ \text{ما}}{۱۳٫۴۵} + \frac{۳٫۵\ \text{لا}}{۲٫۷۱۴}$$

$$\text{یا}\quad \text{ما} = -۳٫۸۵۴\ \text{لا} - ۱۱٫۹۶$$

اس طریق کا میلان اُفقی خاص محور کے ساتھ

$$= \text{مس}^{-۱}(-۳٫۸۵۴) = ۱۸۰ - ۷۵٫۵۵ = ۱۰۴٫۴۵^{\circ}$$

اور لا = ۰ کے لیے ما = - ۱۱٫۹۶ انچ

اس لیے مرکزِ ہندسی سے اس خط کا فاصلہ

$$= ۱۱٫۹۶\ \text{جم}\ ۷۵٫۵۵^{\circ} = ۳٫۰۰\ \text{انچ}$$

اور اس کی سمت اُفقی محور سے ۵۴ء۴۸° کا زاویہ بنائیگی۔ اگر دباؤ کا مرکز I تراشش کے اُفقی محور پر ہوتا تو اسی انتہائی زور کو پیدا کرنے کے لیے مطلوبہ انحراف

$$= \frac{11.96}{3.854} = 3.1 \text{ انچ}$$

۱۹۸۔ **ش کثیر الاضلاع** ـــ غیر متشاکل خماؤ میں (خواہ یہ خارج المرکز طولی بوجھ سے، یا عرضی بوجھ سے، یا ایک خالص معیار یاجفت سے پیدا ہو) پیدا ہونے والے انتہائی زوروں سے بحث کرنے کا ایک کارآمد طریقہ اب یہاں آسانی سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ دفعہ ۱۴۷ کی مساوات (۱) کی رُو سے اور اُس دفعہ اور شکل ۱۰۸ ا کی ترقیم کی مدد سے وہ خماؤ کا زور جو مستوی ہ مائیں کے ایک خماؤ کے معیار مر سے (اشکال ۱۰۸ ا اور ۱۴۳ ا) کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر پیدا ہو (جو شکل ۱۴۳ ا میں ق سے دکھایا گیا ہے) حسب ذیل ہوگا:

$$\text{ف}_{\text{خ}} = \text{مر}\left(\frac{\text{ماَ جم عہ}}{\text{آ}_{\text{لا}}} - \frac{\text{لاَ جب عہ}}{\text{آ}_{\text{ما}}}\right) \quad \cdots\cdots (۱)$$

یا

$$\text{ف}_{\text{خ}} = \text{مر} \div \frac{\text{آ}_{\text{لا}}\,\text{آ}_{\text{ما}}}{\text{ماَ}\,\text{آ}_{\text{ما}}\,\text{جم عہ} - \text{لاَ}\,\text{آ}_{\text{لا}}\,\text{جب عہ}} \quad \cdots\cdots (۲)$$

یا

$$\text{ف}_{\text{خ}} = \frac{\text{مر}}{\text{ش}} \text{، فرض کرو} \quad \cdots\cdots (۳)$$

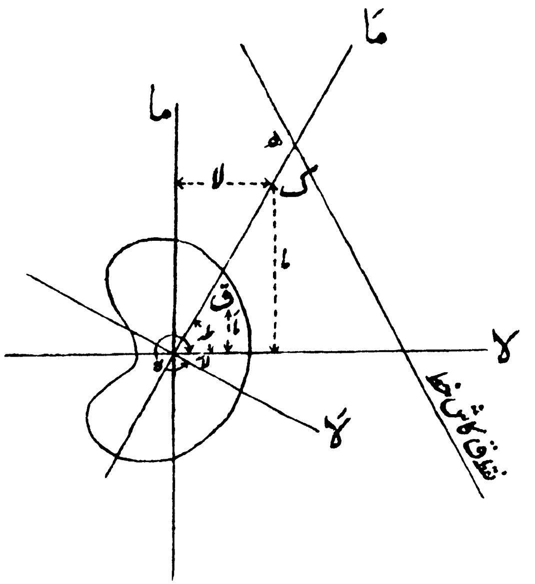
جہاں ش تراش کا مقیاس ہے (جس کی ایک خاص قیمت دفعہ ۶۳ کا مقیاس مق ہے جو عہ = ۰ کے لیے حاصل ہوتا ہے) صفحہ ۲۶۷

$$\text{ش} = \frac{\text{آ}_{\text{لا}}\,\text{آ}_{\text{ما}}}{\text{ماَ}\,\text{آ}_{\text{ما}}\,\text{جم عہ} - \text{لاَ}\,\text{آ}_{\text{لا}}\,\text{جب عہ}}$$

$$= \frac{\text{س}\,\text{گ}^2_{\text{لا}}\,\text{گ}^2_{\text{ما}}}{\text{ماَ}\,\text{گ}^2_{\text{ما}}\,\text{جم عہ} - \text{لاَ}\,\text{گ}^2_{\text{لا}}\,\text{جب عہ}} \quad \cdots\cdots (۴)$$

جہاں سا شہتیر یا ستون کا تراشی رقبہ ہے۔
اگر خماؤ کے معیار مر کا مستوی ہ لا سے زاویہ طہ بنائے تو ہم لکھ سکتے ہیں مہ = طہ - ۹۰°، اور مساوات (۴) میں یہ اندراج کرکے دونوں جانبوں کا متکافی لینے سے

$$\frac{1}{ش} = \frac{1}{سا}\left(\frac{\acute{ما}\ جب\ طہ}{گ^2_{لا}} + \frac{\acute{لا}\ جم\ طہ}{گ^2_{ما}}\right) \cdots\cdots\cdots (5)$$



شکل ۱۴۳ ۔ ۱

یہ ایک ایسے خطِ مستقیم کی قطبی مساوات ہے جس تک سمتی نیم قطر کا طول محور ہ لا سے زاویہ طہ پر ش ہے۔ ہ لا سے اس خطِ مستقیم کے

زاویہ کا مماس

$$= -\frac{\text{گ}^{2}_{\text{لا}}}{\text{گ}^{2}_{\text{ما}}} \times \frac{\text{لاَ}}{\text{ماَ}} \quad \text{یا} \quad -\frac{\text{آ}_{\text{لا}}}{\text{آ}_{\text{ما}}} \times \frac{\text{لاَ}}{\text{ماَ}} \qquad \text{(٦)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{اور} \quad \text{ہما پر مقطوعہ} = +\frac{\text{ر گ}^{2}_{\text{لا}}}{\text{ماَ}} \quad \text{یا} \quad -\frac{\text{آ}_{\text{لا}}}{\text{ماَ}} \\ &\text{اور} \quad \text{ہلا پر مقطوعہ} = \frac{\text{ر گ}^{2}_{\text{ما}}}{\text{لاَ}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{آ}_{\text{ما}}}{\text{لاَ}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(٧)}$$

ان کی مدد سے اس خط کو آسانی سے کھینچ سکتے ہیں اور ہلا سے صفحہ ۲۶۸
خماؤ کے مستوی کے کسی میلان طہ کے لیے ش کی قیمت ناپ سکتے ہیں۔ یہ خط (٧) یا (٦) اور (٧) سے معین ہوتا ہے اور صریحاً صرف ق کے محل (لاَ، ماَ) پر اور تراش کی شکل اور جسامت پر منحصر ہے اور خماؤ کے مستوی ہماَ کے محل طہ پر منحصر نہیں۔ اس کو آسانی کے لیے نقطہ ق کا "ش خط" کہا جا سکتا ہے۔ اس طرح مستوی ہماَ یا ہک میں کے ایک خماؤ کے معیار مَ سے نقطہ ق پر پیدا ہونے والے خماؤ کے زور کو معلوم کرنے کے لیے صرف یہ کرنا ہوگا کہ مقطوعہ یا سمتی نیم قطر ہھ کو ناپ لیا جائے جس سے ش کی قیمت حاصل ہوگی اور اس کو مساوات (٣) میں درج کیا جائے۔ اگر سمتی نیم قطر ق کے ش خط کے متوازی لیا جائے یعنی (٦) کی رو سے اگر

$$\text{مس طہ} = -\frac{\text{گ}^{2}_{\text{لا}}}{\text{گ}^{2}_{\text{ما}}} \times \frac{\text{لاَ}}{\text{ماَ}} \quad \text{یا} \quad -\frac{\text{آ}_{\text{لا}}}{\text{آ}_{\text{ما}}} \times \frac{\text{لاَ}}{\text{ماَ}} \qquad \text{(٨)}$$

تو صریحاً سمتی نیم قطر لا متناہی طول کا ہوگا کیونکہ اس صورت میں ق تراش کے تعدیلی محور پر ہوگا جو (٦) دفعہ ۴، ۹ کے مطابق ہے۔
اگر کوئی تراش ایک ایسے کثیر الاضلاع سے گھری ہو جس میں

متداخل زاویے نہ ہوں (یعنی اندر کو دبا ہوا نہ ہو) تو اس کثیر الاضلاع کے راس ایسے نقاط ہونگے جو کھچاؤ کی مختلف سمتوں کے لیے تراش کے انتہائی نقاط ہونگے اور اس طرح یہ اعظم کھچاؤ کے زور کے ریشوں میں ہونگے - ہر ایک راس کے لیے باری باری سے ش خط کھینچے جائیں تو ان سے ایک کثیر الاضلاع بنیگا جس کو پروفیسر جانسن[ل] نے "ش کثیر الاضلاع" کے نام سے موسوم کیا ہے - جب کسی خاص تراش کے لیے ش کثیر الاضلاع کھینچ لیا جائے تو چونکہ تمام انتہائی (اور دیگر) نقاط پر کھچاؤ کا زور ف‌خ مساوات (۳) کی رُو سے سمتی نیم قطر ش کے بالعکس متناسب ہے اس لیے (ہ کی قربت کا خیال ترک کرکے) آسانی سے معلوم کیا جاسکتا ہے کہ ایک دیا ہوا معیار م کس مستوی میں عمل کرے کہ کسی نقطے پر کھچاؤ کا زور ف‌خ اعظم ہو اور ف‌خ کی اس قیمت (یعنی $\frac{\text{م}}{\text{ش}}$) کو نہایت آسانی سے ش کو پیمانے پر ناپ کر حاصل کرسکتے ہیں[ع]-

اور اسی طرح آسانی سے تراش میں وہ نقطہ اور کھچاؤ کا وہ مستوی معلوم کرسکتے ہیں جن سے م کی ایک دی ہوئی قیمت سے

ل "یکساں تراش کی سیدھی سلاخ کے عام جھکاؤ کی تحلیل"

Trans. Am. Soc. of Civil Engineers, Vol. l vi (1906) p. 169

ع ش کی اقل قیمت ظاہر ہے کہ اُس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ سمتی نیم قطر ش خط کے علی القوائم ناپا جائے، یعنی

$$\text{مس ط} = + \frac{\text{گ}^2_{\text{ب}}}{\text{گ}^2_{\text{ا}}} \times \frac{\text{بَا}}{\text{لَا}}$$

یہ ضروری نہیں کہ سمت ہ ق ہو - یہ اسی صورت میں سمت ہ ق پر منطبق ہوگا کہ گ‌ا = گ‌ب، یعنی تراش دوگونہ متشاکل ہو -

خماؤ کا زور تراش میں کسی جگہ ممکنہ اعظم ہو - یہ دونوں چیزیں اس طرح معلوم ہونگی کہ ہ سے ش کثیر الاضلاع کے نزدیک ترین ضلع پر عمود کھینچا جائے -

اگر تراش ایسی ہو کہ اس کے احاطے کے کچھ حصے منحنی ہوں اور ان میں ایسے نقاط آتے ہوں جو خماؤ کے خاص خاص مستویوں کے لیے انتہائی نقطے ہوتے ہیں (مثلاً شکل ۱۰۸ ب میں دی ہوئی تراش) تو منحنی احاطے کو ایک اندرونی (یا بیرونی) کثیر الاضلاع کی انتہائی شکل سمجھا جا سکتا ہے - اس طرح کے کثیر الاضلاع کے ہر ایک راس کے متناظر ش کثیر الاضلاع میں ایک ضلع ہوگا اور اگر اندرونی کثیر الاضلاع
صفحہ ۲۶۹ کے متواتر راس بہت قریب قریب لیے جائیں تو متواتر ش خطوط کے ڈھال اور محل بہت قریب قریب ہونگے اور انتہا میں یہ ش کثیر الاضلاع کا ایک منحنی ضلع ہونگے - اگر ضرورت ہو تو اس طرح کے منحنی ضلع کو تقریبی طور پر کھینچا جا سکتا ہے لیکن ایسی تراشوں میں جیسی کہ نامساوی زاویے، Z سلاخیں، T سلاخیں، وغیرہ، ہیں عموماً یہ کافی ہوگا کہ بیرونی کونوں کو گول کی بجائے نوکدار سمجھا جائے -

(۴) سے ظاہر ہے کہ ش کے ابعاد طول کی تیسری قوت ہیں مثلاً (انچ)۳ - اکثر اس میں سہولت ہوگی کہ تراش کو پوری جسامت پر اور ش کثیر الاضلاع کو ۱ انچ کو ایک (انچ)۳ کے پیمانے پر کھینچا جائے، اگرچہ ان مکعب اور خطی مقداروں کے واسطے دوسرے پیمانے بھی اختیار کیے جا سکتے ہیں -

کثیر الاضلاع کھینچنے کا ایک آسان طریقہ یہ ہے کہ ہر ایک ش خط کو اُس کے مقطوعوں کی مدد سے کھینچا جائے جو (۷) سے حاصل ہوتے ہیں - اور ہر ایک ش خط کو چھوٹے حرف سے تعبیر کیا جائے جو اس کے متناظر احاطے پر کے نقطے کے بڑے حرف کے متناظر ہو - کثیر الاضلاع کا ہر راس اُن دو چھوٹے حروف سے

تعبیر ہوگا جو اس راس پر ملنے والے اضلاع کے حروف ہیں۔

کسی تراش کے لیے شش کثیرالاضلاع کھینچنے کا ایک اور طریقہ یہ ہے کہ اُس کے راسوں یعنی اُن متواتر شش خطوط کے تقاطِ تقاطع کا محل معین کیا جائے جو تراش کے بیرونی کثیرالاضلاع کے راسوں کے لیے کھینچے جائیں۔ یہ محددوں کے حسبِ ذیل ضابطوں کی مدد سے کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ ا ب تراش کے بیرونی کثیرالاضلاع کا ایک ضلع ہے اور ا کے محدد (لا_و، ما_و) اور ب کے (لا_ب، ما_ب) ہیں تب نقطہ ا کے شش خط کی مساوات (۵) یہ ہوگی:-

$$\text{ما} = -\frac{\text{گ}^2_{\text{ما}}}{\text{گ}^2_{\text{لا}}} \times \frac{\text{لا}_{\text{و}}}{\text{ما}_{\text{و}}}\,\text{لا} + \frac{\text{س}\,\text{گ}^2_{\text{ما}}}{\text{ما}_{\text{و}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

اور ب کے متناظر خط سے اس کا نقطۂ تقاطع (لا_وب، ما_وب) حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\text{لا}_{\text{وب}} = \frac{\text{آ}_{\text{ما}}(\text{ما}_{\text{ب}} - \text{ما}_{\text{و}})}{\text{لا}_{\text{و}}\text{ما}_{\text{ب}} - \text{لا}_{\text{ب}}\text{ما}_{\text{و}}} \ \text{یا}\ \frac{\text{س}\,\text{گ}^2_{\text{ما}}(\text{ما}_{\text{ب}} - \text{ما}_{\text{و}})}{\text{لا}_{\text{و}}\text{ما}_{\text{ب}} - \text{لا}_{\text{ب}}\text{ما}_{\text{و}}} \quad \ldots\ldots (10)[1]$$

$$\text{ما}_{\text{وب}} = \frac{\text{آ}_{\text{لا}}(\text{لا}_{\text{و}} - \text{لا}_{\text{ب}})}{\text{لا}_{\text{و}}\text{ما}_{\text{ب}} - \text{لا}_{\text{ب}}\text{ما}_{\text{و}}} \ \text{یا}\ \frac{\text{س}\,\text{گ}^2_{\text{لا}}(\text{لا}_{\text{و}} - \text{لا}_{\text{ب}})}{\text{لا}_{\text{و}}\text{ما}_{\text{ب}} - \text{لا}_{\text{ب}}\text{ما}_{\text{و}}} \quad \ldots\ldots (11)[1]$$

---

[1] اگر ہ لا اور ہ ما تراش کے خاص محور نہیں (جیسا کہ یہاں فرض کیا گیا تھا) جن کے لیے ج (لا ما فرما فرلا) = ۰ تو لا_وب، ما_وب کی قیمتیں حسبِ ذیل ہونگی:-

$$\text{لا}_{\text{وب}} = \frac{\text{آ}_{\text{ما}}(\text{ما}_{\text{ب}} - \text{ما}_{\text{و}}) + (\text{لا}_{\text{و}} - \text{لا}_{\text{ب}})\,\text{ج}(\text{لا ما فرلا فرما})}{\text{لا}_{\text{و}}\text{ما}_{\text{ب}} - \text{لا}_{\text{ب}}\text{ما}_{\text{و}}}$$

$$\text{ما}_{\text{وب}} = \frac{\text{آ}_{\text{لا}}(\text{لا}_{\text{و}} - \text{لا}_{\text{ب}}) - (\text{ما}_{\text{و}} - \text{ما}_{\text{ب}})\,\text{ج}(\text{لا ما فرلا فرما})}{\text{لا}_{\text{و}}\text{ما}_{\text{ب}} - \text{لا}_{\text{ب}}\text{ما}_{\text{و}}}$$

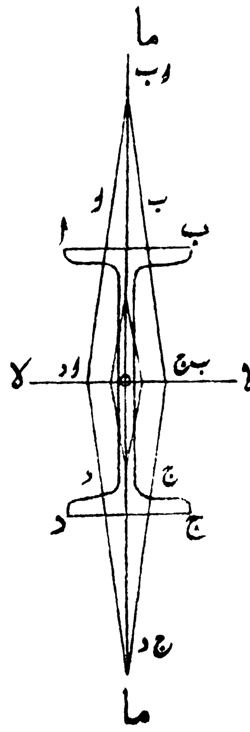
اس میں ج (لا ما فرلا فرما) صفر نہیں۔ بعض جدولوں میں معلومات اِس طرح دی جاتی ہیں کہ لا_و، ما_و کی ان عام قیمتوں کو ملحوظ رکھنا بہتر ہوتا ہے۔ لیکن برطانوی معیاری تراشوں کے متعلق جو اعداد و شمار دیے جاتے ہیں اُن میں اتنی باتیں موجود رہتی ہیں کہ آسان ضابطے (۱۰) اور (۱۱) اختیار کیے جاسکیں جن میں حسابی عمل بہت کم ہوتا ہے لیکن اگرچہ محوروں کے ایک جوڑے کے لیے (جو ضروری نہیں کہ خاص محور ہوں) لا_آ، ما_آ وغیرہ کی قیمتیں جدولوں سے سادہ تفریق کی مدد سے یا اس کے بغیر حاصل ہوسکتی ہیں لیکن بعض اوقات ان کو ناپنا ضروری ہوتا ہے۔

صفحہ ۲۷۰

(۵) یا (۷) سے تعبیر ہونے والے ش خط اور دفعہ ۹۸ کی مساوات (۵) سے تعبیر ہونے والے خط کی مشابہت کو نوٹ کرو۔ دونوں خطوط کا ڈھال وہی ہے جو (۶) میں دیا گیا ہے، لیکن دفعہ ۹۸ کا خط (۵) مقطوعوں (۷) کی بجائے حسب ذیل مقطوعے بناتا ہے :-

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{گ^2_{ا}}{ما} \text{ محور ۵ ما پر} \\ \text{اور} \quad -\frac{گ^2_{ب}}{لا} \text{ محور ۵ لا پر} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۲)$$

اس طرح قلب کے احاطے کے اضلاع ش کثیر الاضلاع کے اضلاع کے متوازی ہونگے لیکن مبداء کی مقابل جانبوں میں ہونگے۔ قلب اور ش کثیر الاضلاع اس طرح مشابہہ شکلیں ہونگی اور ش کثیر الاضلاع کی بجائے قلب کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت میں ش معلوم کرنے کے لیے قلب کے اُس سمتی نیم قطر کو جو زیر بحث نقطے کی مقابل جانب ہے تراش کے رقبے ر سے ضرب دینا ہوگا یا یہ کیا جاسکتا ہے کہ پیمانے میں حسبہٖ ترمیم کرلی جائے۔ شکل ۱۴۳ ب میں ایک برطانوی معیاری شہتیری تراش اب ج د (نمبر ۸، ۶ × ۳) کے لیے ش کثیر الاضلاع دکھایا



شکل ۱۴۳ ب

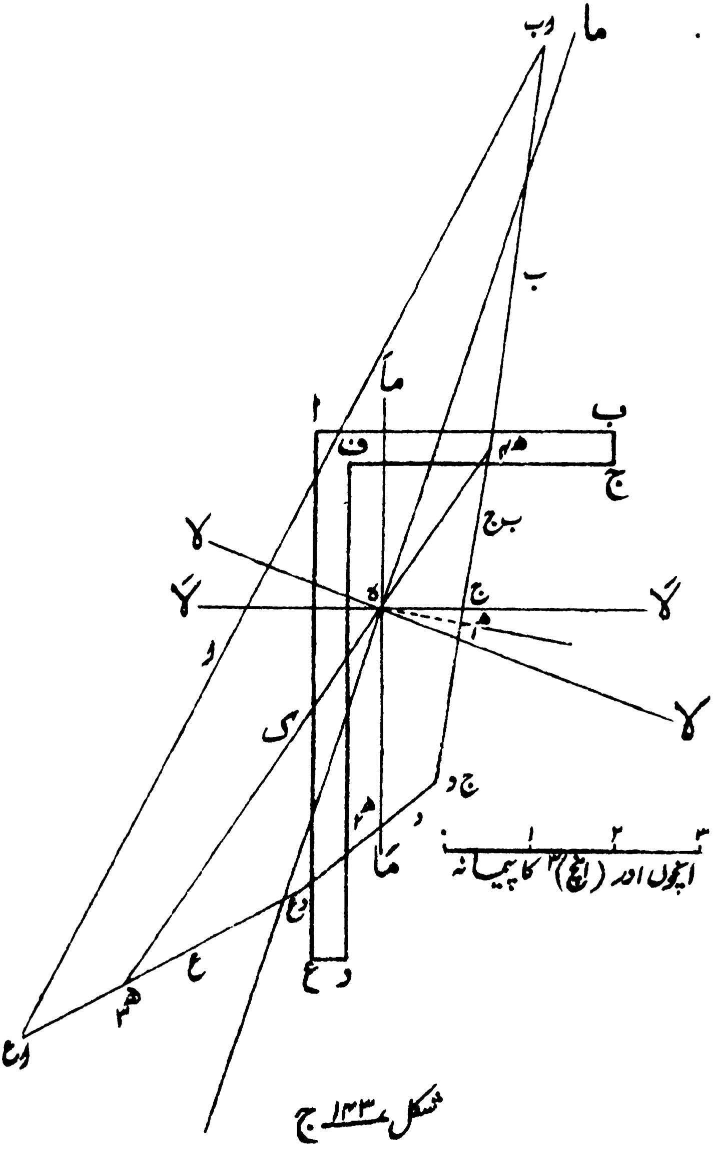
گیا ہے۔ ضلع ل نقطہ ا کے متناظر ہے، اور اسی طرح۔ ضابطوں (۱۱) اور (۱۰) میں لا = - لا اور ما = ماب رکھنے سے یہ بالکل ضابطہ (۷) بن جاتے ہیں اور اس کے مقطوعوں سے کثیر الاضلاع کے اضلاع آسانی سے کھینچ لیے جا سکتے ہیں۔

ایسی صورت میں مقطوعے در اصل تراش کے خاص مقیاس مق (دفعہ ۶۳) ہوتے ہیں جو فولاد کی تراشوں کی جدولوں میں دیے جاتے ہیں۔ اندرونی یعنی چھوٹا معین تراش کے قلب کو تعبیر کرتا ہے۔

ش کثیر الاضلاع کی ایک زیادہ کارآمد مثال شکل ۱۴۳ ج میں ایک ۶" × ۳½" × ۳/۸" کے برطانوی معیاری زاویے کے لیے دکھائی گئی ہے۔ د، ف، اور ج پر کے کونے آسانی کے لیے نوکدار فرض کیے گئے ہیں۔ یہ کثیر الاضلاع اس طرح کھینچا گیا کہ جدولوں میں دی ہوئی تفصیل کی مدد سے زاویہ کی تراش ا ب ج ف د ع اور محاور ہ لا اور ہ ما کھینچے گئے۔ اور پھر معیاری جدولوں سے خاص محاور ہ لا اور ہ ما کا محاور ہ لاَ اور ہ ماَ کے ساتھ میلان ۹° (یا سن ۱ ۳۴۴ء) حاصل کر کے محاور ہ لا اور ہ ما کھینچے گئے۔ پھر نقشے سے ہ لا اور ہ ما کے حوالے سے ا، ب، ج، د اور ع کے محدد ناپ کر ش کثیر الاضلاع کے راسوں کو ضابطوں (۱۰) اور (۱۱) سے محسوب کیا گیا۔ ان نتائج کی جانچ ضابطہ (۷) سے حاصل ہونے والے مقطوعوں کے ذریعے کی گئی۔

اگر ضرورت ہو تو زیادہ صحیح نتیجہ اس طرح حاصل کیا جا سکتا ہے کہ شکل ۱۴۱ ب کی طرح ج اور د پر گولائی بنائی جائے اور ان کا مشترک مماس کھینچ کر خط ج د کی بجائے، اس مشترک مماس کو تراش کے بیرونی کثیر الاضلاع کا ایک ضلع سمجھا جائے۔ لیکن تمام عملی مقاصد کے لیے بیرونی کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کافی صحیح ہے۔ ش کثیر الاضلاع (شکل ۱۴۳ ج) سے فوراً نظر آ جائیگا کہ خماؤ کی اقل مزاحمت (مع × ش) خماؤ کے ایسے مستوی میں ہوگی جو ہ لا اور ہ لا کے درمیان ہے اور ش کی

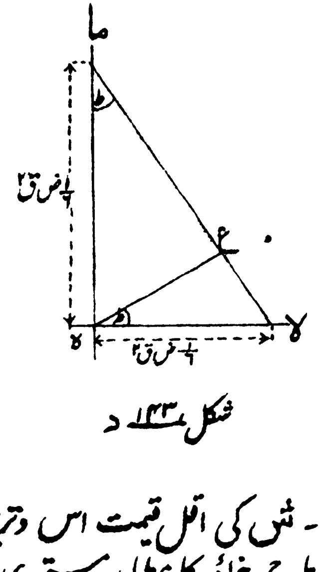
صفحہ ۱۷۱ اقل قیمت صریحاً اس طرح حاصل ہوگی کہ ہ سے خط ج پر عمود ہ ھ ڈالا جائے۔



شکل ۱۴۳ ج

ذیل کی مثالوں سے چند مسائل میں ش کثیر الاضلاع کی آسانی اور اس کا کار آمدپن واضح ہوگا۔ مزید مثالیں پروفیسر جانسن[1] کے پرچے میں (جس کا حوالہ دیا جاچکا ہے) اور پروفیسر بیتھو[2] کے ایک پرچے میں ملینگی۔

مثال ۱۔ ایک شہتیر کی تراش مستطیلی ہے جس کا عرض ض اور گہرائی ق ہے۔ اس کے لیے خماؤ کے مستوی کا وہ محل معلوم کرو جس سے ایک دیے ہوئے خماؤ کے معیار سے خماؤ کا زیادہ سے زیادہ زور پیدا ہو اور وہ خماؤ کا معیار معلوم کرو جو خماؤ کا زور ف پیدا کرے۔ نیز وہ اعظم زور معلوم کرو جو خروج المرکز ھ کے ایک طولی دباؤ د سے پیدا ہو۔



شکل ۱۴۳ د

شکل ۱۴۳ د میں اس معین کا ربع دکھایا گیا ہے جس کی پوری شکل اس مستطیلی تراش کا ش کثیر الاضلاع ہے۔ اس قائم الزاویہ مثلث کا وتر تراش کے ایک کونے کا ش خط ہے۔ ش کی اقل قیمت اس وتر پر ھ سے عمود ھ ع سے تعبیر ہوگی۔ اس طرح خماؤ کا مطلوبہ مستوی وہ مستوی ہے جو شہتیر کے محور میں سے اور ھ ع میں سے گزرے یعنی چھوٹے محور خاص ھ لا سے زاویہ طہ بنائے جو شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ مس ۱ ض/ق کے مساوی ہے۔ نیز ھ ع سے ش کی حسب ذیل قیمت تعبیر کریگی :-

---

[1] Prof. L. J. Johnson

[2] Betho

$$\text{ش} = \frac{1}{6}\,\frac{\text{ض}^2\,\text{ق}^2}{\sqrt{\text{ض}^2+\text{ق}^2}}$$

اس طرح خماؤ کا زور فخ پیدا کرنے کے لیے اقل خماؤ کا معیار حسبِ ذیل درکار ہوگا:۔

$$\text{م} = \frac{\text{فخ}}{6}\,\frac{\text{ض}^2\,\text{ق}^2}{\sqrt{\text{ض}^2+\text{ق}^2}}$$

(دیکھو شہتیر کے محور اور تراش کے چھوٹے محور میں سے گزرنے والے مستوی میں عمل کرکے اسی زور فخ کو پیدا کرنے کے لیے مطلوبہ خماؤ کا معیار $\frac{\text{فخ}}{6} \times \text{ض}\,\text{ق}^2$ ہوگا جو اوپر کی اقل قیمت کا $\sqrt{1+\left(\frac{\text{ض}}{\text{ق}}\right)^2}$ گنا ہے۔)

نیز اگر خارج المرکز دباؤ د اسی موثر ترین محل میں عمل کرے یعنی محوری مستوی ہ ع میں تو اس کا معیار د ھ ہوگا اور اس سے خماؤ کا زور $\frac{\text{د ھ}}{\text{ش}} = \frac{6\,\text{د ھ}\sqrt{\text{ض}^2+\text{ق}^2}}{\text{ض}^2\,\text{ق}^2}$ راست زور $\frac{\text{د}}{\text{ض ق}}$ کے علاوہ پیدا ہوگا۔ اس طرح زور کی اعظم حدت

$$= \frac{\text{د}}{\text{ض ق}}\left(1 + \frac{6\,\text{ھ}\sqrt{\text{ض}^2+\text{ق}^2}}{\text{ض ق}}\right)$$

مثال ۲ — وہ خماؤ کا معیار معلوم کرو جو ایک زاویئی تراش ۶" × ۴½" × ⅜" تراش کے ہر علی القوائم مستوی میں برداشت کر سکے بغیر اس کے کہ خماؤ کا زور ۶ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہو۔ صفحہ ۲۶۳

شکل ۱۴۳ ج پیمانہ ۱" = ایک (انچ) پر کھینچا جائے تو اس سے سب میں چھوٹا عمود ہ ھ = ۰٫۹۴ انچ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح ش کی اقل قیمت = ۰٫۹۴ (انچ)^3 اور (۳) سے

$$\text{م} = 6 \times 0.94 = 5.64 \ \text{ٹن انچ}$$

(اس کا مقابلہ دفعہ ۹۴، ۱ کی مثال ۱ سے کرو جس میں خماؤ کا معیار زاویے کی لمبی ٹانگ کے متوازی ہ میں سے گزرنے والے مستوی میں عمل کرتا تھا - ہ ھہ = ۲٫۶۵۴ (انچ)^{۳} اور اس سے معیار ۶ × ۲٫۶۵۴ = ۱۵٫۹۲ ٹن انچ حاصل ہوتا ہے - اگر کونوں د اور ج کو گول کر دیا جائے جیسا کہ شکل ۱۰۱ ب میں ہے اور ش کثیر الاضلاع میں اس گولائی کا خیال رکھا جائے تو معیار پورا ۱۵ ٹن انچ حاصل ہوتا ہے -)

مثال ۳ — ایک تعمیری رکن پر جو ۶" × ۳½" × ⅝" کے زاویے سے بنایا گیا ہے ۱۰۰۰۰ پونڈ کا دباؤ ایک نقطہ ک پر (شکل ۱۴۳ ج) عمل کرتا ہے جو اع میں ۱ سے ۲⅜" فاصلہ پر کے نقطہ کے محاذی اور $\frac{۳}{۱۶}$" ہٹ کر ہے — تراش میں اعظم فشاری اور کششی اکائی زور معلوم کرو۔

اس خارج المرکز دباؤ سے پیدا ہونے والے خماؤ کے معیار کا مستوی ہ ک ہوگا جو ع خط کو ھہ پر ملیگا، اور ہ ھہ پیمانے پر ۵٫۱۵ (انچ)^{۳} ہوتا ہے اور ہ ک = ۱٫۶۸ انچ - اس لیے (۳) سے

$$ف_خ = \frac{م}{ش} = \frac{۱٫۶۸ \times ۱۰۰۰۰}{۵٫۱۵} = ۳۲۶۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

جو فشاری زور ہے کیونکہ ہ ھہ مبدا ہ کے اسی جانب ہے جس طرف ک ہے - اور اوسط راست زور

$$= \frac{د}{رقبہ} = \frac{۱۰۰۰۰}{۳٫۴۲۲} = ۳۰۸۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اس لیے (۱) دفعہ ۹۷ سے ع پر

$$\text{اعظم فشاری اکائی زور} = ف_خ + ف = ۳۲۶۰ + ۳۰۸۰$$

$$= ۶۳۴۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

ک ہ کے مزدوجہ میں طول ہ ھہ پیمانے پر = ۲٫۱۷ (انچ)^{۳}

اس لیے ب پر :-

$$\text{تنشی } ف_{خ} = \frac{۱٫۶۸ \times ۱۰۰۰۰}{۲٫۱۷} = ۷۸۵۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اس لیے ب پر

اعظم تنشی اکائی زور = ۷۸۵۰ - ۳۰۸۰ = ۴۷۷۰ پونڈ فی مربع انچ

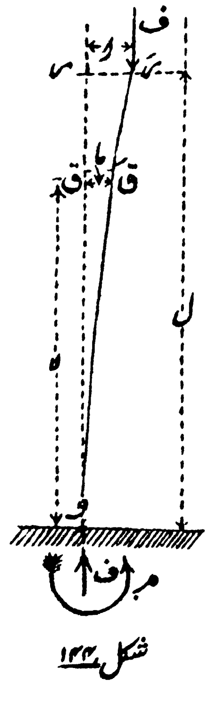
کہ وہ اغلب مقام ہے جہاں زاویئی سلاخ پر $\frac{۳}{۸}$" کی کلی تختی سے دھکیل منتقل ہوگا -

۹۹ - ستون اور داب روک ـــــ یہ اصطلاحیں اشیا کے ایسی منشوری اور دیگر مشابہ شکلوں کے ٹکڑوں کے لیے استعمال ہوتی ہیں جو فشاری زور کے تحت ہوں - یکساں منقسم فشاری زور کے اثرات سے باب ۲ میں اس مفروضے کے تحت بحث کی گئی تھی کہ داب روک کا طول بڑا نہیں - ایک چھوٹے منشوری ٹکڑے پر خماؤ اور فشار کے اجتماع سے پیدا ہونے والے ہموار متغیر زور سے دفعات ۹۷ اور ۹۸ میں بحث کی گئی ہے - اب وہ صورتیں باقی ہیں جن میں داب روک چھوٹا نہیں، جن میں داب روک ایک مرکزی یا خارج المرکز بوجھ کے تحت خم ہوکر ناکارہ ہوتا ہے - ان صورتوں کے لیے نظری حساب دو قسم کا ہے: پہلی قسم تصوری صورتوں کا صحیح صحیح حساب ہے جو عملی طور پر تقریباً بھی واقع نہیں ہوتیں - دوسری قسم آزمایشی (empirical) حساب کی ہے جو کسی نظریے پر مبنی تو نہیں لیکن نظری طور پر معقول اور قابلِ قبول ثابت کیا جا سکتا ہے اور تجربات کے بہت مطابق ہے - ذیل کے دفعات میں دونوں قسم کے حسابات سے بحث کی جائیگی اور ہر ایک کی خامیاں بتائی جائینگی، لیکن داب روکوں میں معلومہ بوجھوں کے تحت پیدا ہونے والے زور اور فساد کسی طریقے سے بھی اس صحت کے ساتھ نہیں معلوم کیے جاسکتے جو شہتیروں یا بندھن سلاخوں میں ممکن ہے اور اس کی وجہ بتائی جائیگی -

صفحہ ۲۷۴

ٹھیک محوری لداؤ کی تصوری صورت میں مسئلہ وہ فاصل بوجھ معلوم کرنے کا ہے جو لچک کی غیر قائمیت پیدا کرے اس قسم کے مسئلوں کو کئی طریقوں سے حل کیا جاسکتا ہے لیکن دفعہ آئندہ کے شروع میں جو طریقہ دیا گیا ہے وہ عام ترین اور آسان ترین ہے - یہ اس پر مشتمل ہے کہ وہ بوجھ معلوم کیا جائے جس کے تحت داب روک اگر ذرا سا ہٹا دیا جائے تو بوجھ کے اور داب روک کو واپس لانے والی لچکدار قوتوں کے تحت تعادل تعدیلی میں ہوگا -

۱۰۰ - آئیلر کا نظریہ — لمبے ستون — یہ نظریہ ایسے ستونوں کے لیے ہے جو اپنے تراشی ابعاد کے تناسب سے بہت زیادہ لمبے ہیں، جو بالکل سیدھے اور وصف میں بالکل متجانس ہیں، اور جن میں فشاری بوجھ بالکل محور پر لگائے گئے ہیں - ان تصوری حالات کے لیے ثابت کیا گیا ہے کہ ستون ایسے بوجھ کے تحت خم ہوکر ناکارہ ہوگا جو اسی تراش کے چھوٹے ستون کے کچل بوجھ سے بہت کم ہوگا، اور یہ کہ اس فاصل بوجھ کے پڑنے تک ستون سیدھا رہیگا - صریحاً یہ نظریہ ایسے چھوٹے ستونوں کے لیے درست نہیں ہوگا جن میں خم آور بوجھ سے پہلے لچک کی حد آجائے -



شکل ۱۴۲

خم کھانے کی مزاحمت کی طاقت بڑی حد تک سروں کی حالت پر منحصر ہے یعنی اس پر کہ سرے ثابت ہیں یا آزاد۔ ثابت سرے سے مراد یہ ہے کہ سرا اس طرح سہارا یا چٹکی کیا گیا ہو کہ اس نقطے پر داب روک کی سمت کو مقید کردے جس طرح کہ دربستہ شہتیر میں ہوتا ہے۔ اور آزاد سرے سے مراد یہ ہے کہ سرا گول کیا ہوا یا چُول دار یا قبضہ دار ہو اور داب روک کی خمیدگی کی وجہ سے کوئی زاویئی وضع اختیار کرسکے۔ اگر داب روک کو ایک قسم کے سروں کی صورت میں ناکارہ کرنے والا بوجھ معلوم ہوجائے تو سروں کے دیگر حالات کے لیے متناظر بوجھ اس سے اخذ کیے جاسکتے ہیں۔ صفحہ ۲۷۵

صورت ا۔ شکل ۱۴۴ء — ترقیم شکل کے مطابق۔ فرض کرو کہ غیر قائمیت بوجھ ف کے تحت واقع ہوتی ہے اور ف کے اور اپنی ذاتی لچکدار مزاحم قوتوں کے زیرِ عمل ستون ایک منحنی کی شکل میں تعادل میں ہے۔ ایک سرا و ثابت ہے اور دوسرا سرا جو ابتدا میں ما پر ہے عرضاً حرکت کرسکتا ہے اور کوئی زاویئی وضع اختیار کرسکتا ہے۔ و پر ظاہر ہے کہ تثبیت کی وجہ سے ستون پر ایک بیرونی معیار (م = ف × ا) اور ایک طولی ردِ عمل ف واقع ہوگا۔ ثابت سرے و کو مبداء لیں اور لا کو داب روک کی ابتدائی وضع و ما پر ناپیں اور خمیدگی کے انحراف ما کو و ما کے علی القوائم ناپیں تو اگر خماؤ کے معیار کو ابتدائی وضع و ما کی طرف تحدب کی صورت میں مثبت سمجھیں تو نقطہ ق پر خماؤ کا معیار ف (ا - ما) ہوگا۔ تب راست فشار کے اثرات کو نظرانداز کرنے سے اور معمولی عرضی خماؤ کی مساواتوں کو استعمال کرنے سے

$$\frac{م}{آ ے} = \frac{ف(ا - ما)}{آ ے} = \frac{ق^{۲} ما}{ق لا^{۲}}$$ (تقریباً جیساکہ دفعہ ،، میں ہے)

جہاں $\bar{\text{آ}}$ تراش کا کم سے کم معیارِ جمود ہے جس کو سارے طول میں مستقل فرض کیا گیا ہے۔

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}} \times \text{ما} = \frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}} \times \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس مشہور تفرقی مساوات کا حل یہ ہے[1]:-

$$\text{ما} = \text{ا} + \text{ب جم}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}}} \times \text{لا} + \text{ج جب}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}}} \times \text{لا} \quad \ldots\ldots (۲)$$

جہاں ب اور ج تکمل کے مستقل ہیں جو سروں کے حالات سے معلوم ہونگے۔ اب موجودہ صورت میں ما = ۰ جب کہ لا = ۰ اس لیے

$$۰ = \text{ا} + \text{ب} + ۰ \quad \text{یا} \quad \text{ب} = -\text{ا}$$

اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ جب کہ لا = ۰ اس لیے (۲) کو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \sqrt{\frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}}}\left(-\text{ب جب}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}}}\,\text{لا} + \text{ج جم}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}}}\,\text{لا}\right)$$

اور $۰ = \sqrt{\frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}}}\left(-۰ + \text{ج}\right)$ اس لیے ج = ۰

اور اس طرح (۲) یہ ہوگئی

$$\text{ما} = \text{ا}\left(۱ - \text{جم لا}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲\text{ا})$$

اس سے جیبوں یا جیب التماموں کی شکل میں انصراف تعبیر ہوتا ہے اور یہ لا = ل تک لا کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ آزاد سرے لا = ل پر ما = ا اس لیے

$$\text{ا} = \text{ا} - \text{ا جم ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\bar{\text{آ}}\,\text{ے}}}$$

[1] دیکھو لیمب کا "صغاری احصا" دفعہ ۱۸۲

یا
$$ر جم ل \sqrt{\frac{ف}{آ ے}} = ۰$$

صفحہ۲۷۶ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ یا تو ر = ۰ یا جیب التمام صفر ہے۔ پہلی صورت میں صریحاً خماؤ واقع نہیں ہوگا۔ لیکن اگر خماؤ واقع ہو تو دوسری صورت ہوگی یعنی

$$جم ل \sqrt{\frac{ف}{آ ے}} = ۰ \quad \text{.............} (۳)$$

اور
$$ل \sqrt{\frac{ف}{آ ے}} = \frac{\pi}{۲} \text{ یا } \frac{۳\pi}{۲} \text{ یا } \frac{۵\pi}{۲} \text{، وغیرہ}$$

ان میں سے پہلی قیمت $\frac{\pi}{۲}$ لینے سے جس سے ف کی اقل قیمت حاصل ہوتی ہے :-

$$ل^۲ \frac{ف}{آ ے} = \frac{\pi^۲}{۴}$$

یا
$$ف = \frac{\pi^۲ آ ے}{۴ ل^۲} \quad \text{.............} (۴)$$

اس سے تہدیمی کا بوجھ حاصل ہوتا ہے، اور لمبے ستون کی صورت میں یہ فشاری زور کی لچک کی حد سے بہت کم ہوگا۔ تراش کا مستقل رقبہ ر ہو اور اقل گردشی نصف قطر گ ہو تو آ کی بجائے ر . گ^۲ لکھنے سے :-

$$ف = \frac{\pi^۲ ر ے}{۴} \left(\frac{گ}{ل}\right)^۲$$

یا فشاری زور کی اوسط حدت

$$ف_۰ = \frac{ف}{ر} = \frac{\pi^۲ ے}{۴} \left(\frac{گ}{ل}\right)^۲ \quad \text{.............} (۵)$$

مساوات (۱) سے ف کی قیمت حاصل کرنے میں ما کے منحنی کی

شکل یعنی مساوات (۲) ہم کو اپنے سابقہ علم سے معلوم تھی لیکن اگر اس علم سے کام نہ بھی لیا جائے اور کوئی اور معقول شکل فرض کرلی جائے تب بھی نتیجہ زیادہ مختلف نہیں ہوگا۔ مثلاً اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ $ما = \frac{و لا^۲}{ل^۲}$ جو سروں کی شرائط

$$لا = ۰ \text{ پر } ما = ۰ \text{ اور } \frac{فر ما}{فر لا} = ۰$$

اور

$$لا = ل \text{ پر } ما = و$$

کو پورا کرتا ہے تو مساوات (۱) یہ ہو جائیگی:-

$$م = آ ے \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} = ف (و - ما) = ف و \left(۱ - \frac{لا^۲}{ل^۲}\right)$$

دو بار تکمل کرنے سے اور مستقلوں کے صفر ہونے کی وجہ سے

$$آ ے . ما = ف . و \left(\frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۴}{۱۲ ل^۲}\right) + ۰$$

$$لا = ل \text{ پر } آ ے . و = ف . و . ل^۲ \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۱۲}\right) = \frac{۵}{۱۲} ف و ل^۲$$

اور

$$ف = \frac{۱۲}{۵} \frac{آ ے}{ل^۲} = ۲{،}۴ \frac{آ ے}{ل^۲}$$

نیز اس عمل سے حقیقی قیمت (۴) کا تقرب سرعت کے ساتھ اس طرح حاصل ہوسکتا ہے کہ اوپر کی قیمتوں سے $ما = ۱{،}۲ \left(\frac{لا^۲}{ل^۲} - \frac{لا^۴}{۶ ل^۴}\right)$ و لکھیں اور اسی عمل کو ایک یا متعدد بار کریں یہاں تک کہ ف کی متواتر قیمتیں بہت زیادہ مختلف نہ ہوں[1]۔

[1] متواتر تقرب کے اس طریقے اور اس کے خاص فوائد کو مصنف نے ایک مقالہ "تصوری لمبے ستونوں کے لیے فاصل بوجھ" میں پوری طرح واضح کیا ہے (رسالہ انجینیرنگ ۱۴۳۔ اپریل ۱۹۱۲ء)۔

تقریبی نتیجہ حاصل کرنے کا ایک اَور متبادل طریقہ یہ ہے کہ ف کے کیے ہوئے کام یعنی ف $\left(\int_0^{\text{ل}} \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} \, \text{فرلا} - \text{ل} \right)$ کو لچکدار فسادی توانائی $\frac{1}{2} \int_0^{\text{ل}} \frac{\text{م}^2}{\text{آ ے}} \, \text{فرلا}$ کے مساوی رکھیں جو (۷)، دفعہ ۹۳ سے حاصل ہوتی ہے، $\text{ما} = \frac{\text{ولا}^2}{\text{ل}^2}$ کے مفروضے سے اس طرح قیمت $\text{ف} = ۲٫۵ \frac{\text{آ ے}}{\text{ل}^2}$ حاصل ہوتی ہے جس کی طالب علم تصدیق کرسکتا ہے۔

صورت ۲ — شکل $\frac{۱۴۵}{\text{ے}}$ — دونوں سرے چولوں میں یا بے رگڑ قبضوں میں یا کوئی زاویئی وضع اختیار کرنے کے لیے اور کسی طرح آزاد - اگر داب روک کے نصف طول پر غور کیا جائے تو اس کے سرے اور لداؤ صریحاً صورت ۱ کی شرائط کو پورا کرتے ہیں - اس لیے نہدیمی بوجھ صفحہ ۲۷۷

$$\text{ف} = \frac{\pi^2 \, \text{آ ے}}{۴ \left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^2} = \frac{\pi^2 \, \text{آ ے}}{\text{ل}^2} \qquad \text{(۶)}$$

اور
$$\text{فب} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}} = \pi^2 \, \text{ے} \left(\frac{\text{گ}}{\text{ل}}\right)^2 \qquad \text{(۷)}$$

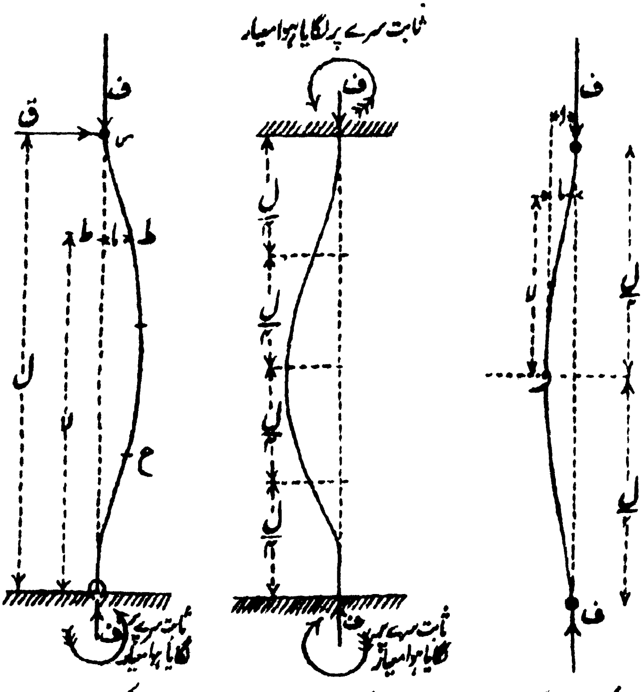
صورت ۳ - شکل $\frac{۱۴۶}{\text{ے}}$ — دونوں سرے محل اور سمت میں ثابت - اگر داب روک کے طول کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو صریحاً ہر ایک حصہ سروں کی اور لداؤ کی اسی حالت میں ہوگا جو صورت ۱ کی ہے - اس لیے اس صورت کا تہدیمی بوجھ

$$\text{ف} = \frac{\pi^2 \, \text{آ ے}}{۴ \left(\frac{\text{ل}}{۴}\right)^2} = \frac{۴ \pi^2 \, \text{آ ے}}{\text{ل}^2} \qquad \text{(۸)}$$

اور　$ف = \frac{ف}{س^۲} = ۴ \pi^۲ ے \left(\frac{گ}{ل}\right)^۲$ ....(۹)

اس طرح دونوں سروں پر ثابت تصوری داب روک دونوں سروں پر آزادانہ قبضہ دار داب روک سے ۴ گنا مضبوط ہوتا ہے۔　صفحہ

صورت ۴ - شکل ۱۴۷ — ایک سرا و استوارانہ ثابت، اور دوسرا سرا س بے رگڑ قبضہ دار، یعنی کسی زاویئی وضع کو اختیار



شکل ۱۴۷　　شکل ۱۴۶　　شکل ۱۴۵

کرنے کے لیے آزاد لیکن جانباً حرکت کرنے کے لیے آزاد نہیں۔ ظاہر ہے کہ جب خمیدگی واقع ہوگی تو قبضے پر ایک اُفقی قوت ق ظہور میں آئیگی کیونکہ جانبی حرکت یہاں روک دی گئی ہے۔ مبداء و پر لو۔ اگر

اُن معیاروں کو مثبت سمجھا جائے جو و س کی طرف تحدب پیدا کریں تو نقطہ ط پر خماؤ کا معیار ق (ل - لا) - ف × ما ہوگا - اس طرح

$$\text{آ ے}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{ق}\,(\text{ل} - \text{لا}) - \text{ف ما}$$

یا

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \frac{\text{ف}}{\text{آ ے}} \times \text{ما} = \frac{\text{ق}}{\text{آ ے}}\,(\text{ل} - \text{لا})$$

اس کا حل یہ ہوگا :—

$$\text{ما} = \text{ب جم لا}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} + \text{ج جب لا}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} + \frac{\text{ق}}{\text{ف}}\,(\text{ل} - \text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

حسب سابق مستقلوں کو اس طرح معلوم کر سکتے ہیں :—

$$\text{لا} = ۰ \text{ پر ما} = ۰ \text{ سے } ۰ = \text{ب} + ۰ + \frac{\text{ق}}{\text{ف}}\,\text{ل}$$

اور

$$\text{ب} = -\frac{\text{ق}}{\text{ف}}\,\text{ل}$$

$$\text{لا} = ۰ \text{ پر } \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰ \text{ سے } ۰ = ۰ + \text{ج}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} - \frac{\text{ق}}{\text{ف}}$$

اور

$$\text{ج} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}}\sqrt{\frac{\text{آ ے}}{\text{ف}}}$$

ان قیمتوں کو (۱۰) میں درج کرنے سے لا کی ہر قیمت کے لیے :—

$$\text{ما} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}}\left(-\text{ل جم لا}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} + \sqrt{\frac{\text{آ ے}}{\text{ف}}}\,\text{جب لا}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} + \text{ل} - \text{لا}\right)$$

لا = ل پر ما = ۰ رکھنے سے

$$\text{٠} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}}\left(\text{-ل جم ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} + \sqrt{\frac{\text{آ ے}}{\text{ف}}}\,\text{جب ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}\right)$$

اس لیے یا تو ق = ٠ جس صورت میں خمیدگی واقع نہ ہوگی اور یا

$$\text{مس ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} = \text{ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}$$

یہ $\text{ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}$ کی ایک مساوات ہے جو ایسی جدول کی مدد سے آسانی سے حل ہو سکتی ہے جس میں مماسوں کی قیمت اور زاویوں کی نیم قطری قیمت دی گئی ہو۔ ف کی اقل قیمت (ف = ٠ کو چھوڑ کر) کے لیے حل تقریباً حسبِ ذیل ہے :-

$$\text{ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} = \text{۴٫۵ نیم قطری}$$

جس سے $\text{ف} = ۲۰\tfrac{۱}{۴}\,\frac{\text{آ ے}}{\text{ل}^{۲}}$ ....(۱۱)

اور $\text{ب} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} = ۲۰\tfrac{۱}{۴}\,\text{ے}\left(\frac{\text{گ}}{\text{ل}}\right)^{۲}$ ....(۱۲)

ما کی معلومہ قیمتوں کو ابتدائی مساوات میں درج کرکے $\frac{\text{فز}^{۲}\text{ما}}{\text{فز لا}^{۲}}$ کو صفحہ ۹

صفر کے مساوی رکھنے سے تقریباً $\text{۴٫۵} = \text{مس}\,\frac{\text{۴٫۵ لا}}{\text{ل}}$ حاصل ہوتا ہے جس کا حل لا = ل یا لا = ۰٫۳۰ ل ہے یعنی نقطۂ انعطاف ع (شکل نمبر ۱۴۷) و سے تقریباً ۰٫۳ ل اور ما سے ۰٫۷ ل تقریباً کے فاصلے پر ہے۔ اس طرح تقریباً ۳۵٫ طول صورت ا کی حالت میں ہے۔

ہر صورت میں داب روک کی انتہائی مضبوطی اس کے طول کے

مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ اور اُوپر کی چار صورتوں کے باہمی مقابلے سے ظاہر ہوتا ہے کہ اشکال ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶ اور ۱۴۷ کے داب روکوں کی مضبوطیاں علی الترتیب ۱، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$ اور (تقریباً) ۲۰۵ کے مربعوں کے بالعکس متناسب ہیں۔ اور یہ کسریں طول کی وہ کسریں ہیں جو ایک نقطۂ انعطاف اور ایک اقل انحنا کے نقطے کے درمیان ہیں۔ اس طرح ان کی مضبوطیاں علی الترتیب ۱، ۴، ۱۶ اور تقریباً ۸ کے تناسب میں ہونگی۔

۱۰۱۔ آئیلر کے ضابطوں کا استعمال — چونکہ حقیقی داب روک دفعہ ۱۰۰ کی تصوری صورتوں سے کئی ایک باتوں میں مختلف ہوتے ہیں اس لیے دفعہ ۱۰۰ کے ضابطوں میں معمولی قدرِ سلامتی کے علاوہ کوئی ایسا جزو شریک کرنا چاہیے جو ان اختلافات کی رعایت رکھ سکے۔ تصوری صورتوں سے ذرا سے اختلاف کا بھی بہت بڑا اثر ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۰۴)۔

"ثابت" اور "آزاد" سرے — اکثر حقیقی داب روک سروں کے بالکل ثابت یا بالکل آزاد ہونے کی شرط ٹھیک پوری نہیں کرینگے اور آئیلر کے ضابطوں کے استعمال میں اس کی رعایت رکھنی چاہیے۔ سرے پر ایک چوڑی چپٹی کور ہو جو استوار بنیاد کو بولٹ کی گئی ہو تو یہ بڑی حد تک کاملاً "ثابت" ہوگا۔ اور اگر سرا کسی تعمیر کے ایک حصے کو کسی طرح کے کیل جوڑ کے ذریعے جوڑا گیا ہو تو یہ تقریباً "آزاد" حالت میں ہوگا۔ سروں کی بندش کی دیگر صورتیں ایسی ہوسکتی ہیں کہ داب روک کی مضبوطی دفعہ ۱۰۰ کی دو تصوری صورتوں کے درمیان ہو، اور بعض اوقات یہ ممکن ہے کہ بندش کی ان صورتوں کی وجہ سے خماؤ کے مختلف مستویوں میں حالات مختلف ہوجائیں۔

لچکدار ناکارگی — صریحاً آئیلر کے ضابطے ایسے

چھوٹے داب روکوں پر عائد نہیں ہوتے جو دفعہ ۱۰۰ میں دی ہوئی قیمتوں کے واقع ہونے سے پہلے فشاری زور کے نقطۂ مغلوبیت پر پہنچ کر ناکارہ ہوجاتے ہیں۔ مثلاً ایک نرم فولاد کے داب روک پر غور کرو جو دونوں صورتوں پر آزادانہ قبضہ دار ہے (صورت ۲، دفعہ ۱۰۰)، اور سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ اور نقطۂ مغلوبیت ۲۱ ٹن مربع انچ لو۔ تب چھوٹے سے چھوٹا طول جس پر ضابطہ (۷) کا اطلاق ممکن ہے ایسا ہونا چاہیے کہ

$$\text{ف} = \text{۲۱} = \pi^2 \times \text{۱۳۰۰۰} \times \left(\frac{\text{گ}}{\text{ل}}\right)^2$$

یعنی ل = تقریباً ۸۰ گ جو ٹھوس مدور تراش کی صورت میں تقریباً ۲۰ قطر اور ایک پتلی نلی کی صورت میں ۲۸ قطر ہوگا۔ چونکہ اِن قاعدوں میں صرف بہت لمبے داب روکوں پر غور کیا گیا ہے اس لیے یہی توقع کی جاسکتی ہے کہ ناکارگی کے بوجھ کے لیے یہ اُس وقت تک صحیح قیمتیں نہیں دینگے جب تک کہ طول اُس اوپر کی قیمت سے بہت بڑا نہ ہو۔ اِن سے چھوٹے داب روکوں پر آئیلر کے ضابطوں کا اطلاق نہیں ہوتا اور اگر استعمال کیے گئے تو ظاہر ہے کہ اُن سے ناکارگی کے بوجھ کی حقیقی سے بہت زیادہ قیمت حاصل ہوگی۔ لیکن یہ چھوٹے اور اوسط طول کے داب روک تعمیروں اور مشینوں میں بہت کثرت سے واقع ہوتے ہیں۔ آزادانہ قبضہ دار سروں کے نرم فولاد اور ڈھلے لوہے کے ستونوں کے لیے ف کی جو قیمتیں (۷) دفعہ ۱۰۰ سے حاصل ہوتی ہیں وہ شکل ۱۴۸ میں دکھائی گئی ہیں۔

۱۰۲ - رینکن کے اور دیگر آزمایشی ضابطے — صفو

رینکن — ایسے داب روک کے لیے جو اتنا چھوٹا ہو کہ اس میں خمیدگی تقریباً ناممکن ہو انتہائی فشاری بوجھ یہ ہوگا:—

$$\text{ف}_{\text{ن}} = \text{ز}_{\text{ن}} \times \text{س} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

جہاں س تراش کا رقبہ ہے اور زن فشاری زور کی انتہائی حدت ہے۔ اس مقدار (زن) کو تجربے کے ذریعے معلوم کرنا مشکل ہے (دیکھو دفعات ۳۶ اور ۳۷) کیونکہ چھوٹے نمونوں میں عرضی پھیلاؤ کی رگڑ کی وجہ سے جو مزاحمت ہوتی ہے اس کی وجہ سے فشار کی طولی مزاحمت بڑھ جاتی ہے اور لمبے نمونوں میں خم ہوجانے کی وجہ سے ناکارگی واقع ہوجاتی ہے۔ بہتر یہی ہوگا کہ زن کی قیمت فشاری مغلوبیت کے زور کی حدت کے مساوی لے لی جائے۔

بہت لمبے داب روک کے لیے انتہائی بوجھ آئیلر کے قاعدوں سے (دیکھو دفعہ ۱۰۰) خاصی صحت کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ بوجھ فو سے تعبیر ہوتا ہے۔ تب دونوں آزاد سروں کے داب روک کے لیے (صورت ۲ دفعہ ۱۰۰):—

$$\text{ف}_{\text{و}} = \frac{\pi^2 \,\text{آ}\,\text{ے}}{\text{ل}^2} = \pi^2 \,\text{ے}\,\text{س} \left(\frac{\text{گ}}{\text{ل}}\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اب اگر کسی طول ل اور تراش س کے داب روک کا خم آور بوجھ ف ہو تو مساوات

$$\frac{1}{\text{ف}} = \frac{1}{\text{ف}_{\text{ن}}} + \frac{1}{\text{ف}_{\text{و}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

سے صریحاً ف کی ایسی قیمت حاصل ہوگی جو بہت چھوٹے داب روک کے لیے صحیح ہوگی کیونکہ اس صورت میں $\frac{1}{\text{ف}_{\text{و}}}$ قابلِ نظر اندازی ہوگا اور اس طرح ف بہت تقریباً = فن ہوگا، اور نیز یہ مساوات بہت لمبے داب روک کے لیے بھی صحیح قیمت دیگی کیونکہ اس صورت میں $\frac{1}{\text{ف}_{\text{ن}}}$ بمقابلہ $\frac{1}{\text{ف}_{\text{و}}}$ کے بہت خفیف ہوگا اور اس طرح ف بہت تقریباً

= $ف_ر$ ہوگا۔ نیز چونکہ ایک مستقل رقبہ ر کے ساتھ طول ل کے بڑھنے سے ف کا تغیر تدریجی ہونا چاہیے اس لیے یہ معقول معلوم ہوتا ہے کہ کسی طول کے داب روک کے لیے مساوات (۳) کو صحیح تسلیم کیا جائے۔

دونوں آزاد سروں کے داب روک کے لیے مساوات (۳) کو یوں لکھ سکتے ہیں:۔

$$ف = \frac{1}{\frac{1}{ز_ن \times ر} + \frac{ل^2}{\pi^2 آ ے}} = \frac{ز_ن \times ر}{1 + \frac{ز_ن \times ل^2}{\pi^2 ے گ^2}}$$

$$= \frac{ز_ن \times ر}{1 + و\left(\frac{ل}{گ}\right)^2} \qquad \cdots\cdots (۴)$$

جہاں $و = \frac{ز_ن}{\pi^2 ے}$ جو ایک دی ہوئی شے کے لیے مستقل ہوگا، یا اگر تراش پر فشاری زور کی اوسط حدت $ف_ب$ ہو تو

$$ف_ب = \frac{ف}{ر} = \frac{ز_ن}{1 + و\left(\frac{ل}{گ}\right)^2} \qquad \cdots\cdots (۵)$$

دونوں سروں پر "ثابت" داب روک کی صورت میں یہ مستقل $\frac{و}{۴}$ ہوگا اور ایسے داب روک کی صورت میں جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر ڈھال میں آزاد ہو یہ مستقل تقریباً $\frac{و}{۲}$ ہوگا[۱] اور ایسے داب روک کے لیے جس کا ایک سرا ثابت اور دوسرا سمت اور محل ہر لحاظ سے آزاد ہو یہ مستقل ۴و ہوگا (دیکھو صورتیں ۳، ۴، دفعہ ۱۰۰)۔ صفحہ ۱۰۱

[۱] $\frac{و}{۲}$ زیادہ آسان اور زیادہ صحیح ہے بہ نسبت $\frac{۴و}{۹}$ کے جو بعض اوقات دی جاتی ہے (دیکھو صورت ۴ دفعہ ۱۰۰)۔

یہ رینکن کے داب روکوں کے قاعدے ہیں۔ یہ دراصل آزمائشی ہیں اور ان کے نتائج $\frac{ل}{ق}$ کی مختلف قیمتوں کے داب روکوں پر کیے ہوئے تجربات کے نتائج سے بہت مطابقت رکھتے ہیں۔ اس ضابطے کے مستقل انہی تجربات سے حاصل کیے جاتے ہیں، ہے اور چھوٹے طول کے نمونے سے حاصل ہونے والے نن سے نہیں حاصل کیے جاتے۔

مساوات (۴) میں ز اور $\frac{نن}{\pi^2 ے}$ کی جو قیمتیں ہیں ان کو "نظری" مستقل کہا جاسکتا ہے۔ عملاً ایسے قبضہ دار سروں کے لیے جو رگڑ سے پاک نہ ہوں اور جو اس وجہ سے خمیدگی کی مزاحمت کریں ا صریحاً $\frac{نن}{\pi^2 ے}$ سے کم ہوگا۔

گارڈن کا قاعدہ ـــــ رینکن کا قاعدہ دراصل ایک پرانے قاعدے کی ترمیم یافتہ شکل ہے۔ یہ قاعدہ گارڈن کا وضع کیا ہوا تھا اور حسبِ ذیل ہے:۔

$$ف = \frac{نن \times س}{1 + ج\left(\frac{ل}{ق}\right)^2} \qquad \text{(۶)}$$

جہاں ق تراش کا اقل عرض یا قطر اقل گردشی نصف قطر کی سمت میں ہے، اور ج ایک مستقل ہے جو نہ صرف مختلف اشیا اور سروں کی تثبیت کے لیے مختلف ہوگا بلکہ تراش کی شکل پر بھی منحصر ہوگا۔ رینکن کے مستقل و کے ساتھ اس کا ربط یہ ہے:۔

$$\frac{ج}{ق^2} = \frac{و}{\pi^2} \quad یا \quad ج = و\left(\frac{ق}{\pi}\right)^2$$

مثلاً نصف قطر س کی ٹھوس مدور تراش میں ق = ۲.۰ س اگ = $\frac{س}{۲}$،

اس طرح ج = ۱۶ ا

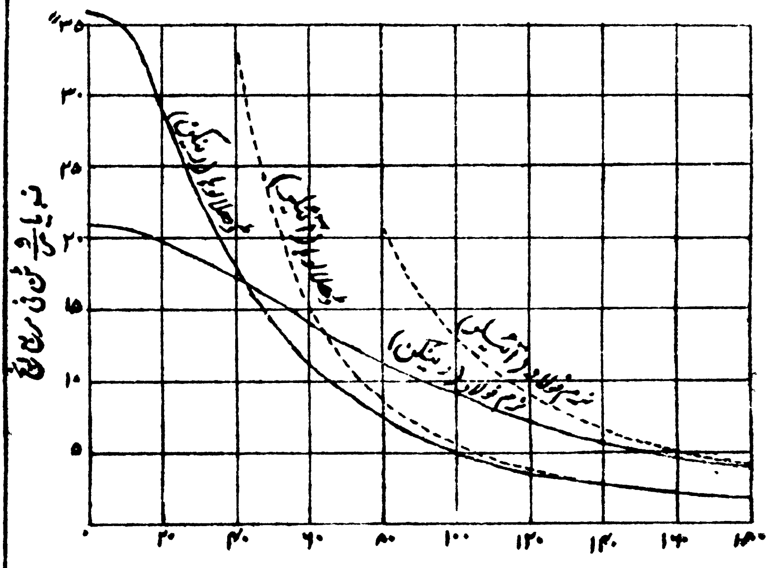
رینکن اور گارڈن کے ضابطوں سے "قیاسی طور پر" اخذ کیے ہوئے قاعدے اکثر پیش کیے گئے ہیں لیکن یہ ایک غیر صحیح مفروضے پر مبنی ہیں یعنی یہ کہ چونکہ خالص عرضی بوجھوں کے تحت شہتیر کا انصراف لچک کی حد کے اندر طول کے مکعب کے بالراست متناسب ہوتا ہے اس لیے یہ بات سروں کے بوجھوں کے لیے اور لچک کی حد کے باہر بھی درست رہیگی۔

رینکن کے مستقل — رینکن کے ضابطے میں معمولاً ن، اور ا کی جو قیمتیں تسلیم کی گئی ہیں وہ حسب ذیل ہیں:—

شے	ن ٹن فی مربع انچ	ا
نرم فولاد	۲۱	$\frac{1}{7500}$
پٹواں لوہا	۱۶	$\frac{1}{9000}$
ڈھلا لوہا	۳۶	$\frac{1}{1600}$

پٹواں اور ڈھلے لوہے کے لیے اوپر کے مستقل وہ ہیں جن کو رینکن نے بطور اوسط قیمتوں کے پیش کیا ہے اور جو بہت کثرت کے ساتھ اختیار کی گئی ہیں۔ اگر ن کو نقطۂ مغلوبیت کے مساوی لیا جائے تو نرم فولاد کے لیے اوپر کی قیمت سے کم قیمت حاصل ہوگی اور مشینری فولاد کی کئی قسموں کے لیے اوپر کی قیمت سے بڑی قیمت حاصل ہوگی کیونکہ ا بھی تقریباً اسی نسبت سے بدلیگا۔ رینکن کے ضابطے (۵) سے اور یہ کے مستقلوں سے ف کی جو قیمت حاصل ہوگی وہ بالکل آزاد سروں کے بہت لمبے ستونوں کے لیے عموماً آئیلر کے "تصدیقی" داب روک سے اور اس طرح مناسب قیمت سے زیادہ ہوگی کیونکہ ا کی قیمتیں (جو عموماً

ایسے تجربات سے اخذ کی جاتی ہیں جن میں سرے پورے طور پر آزاد نہیں ہوتے) "نظری قیمت" $\frac{\text{نت}}{\pi^2}$ سے کم حاصل ہوتی ہیں۔ رینکن کے ضابطے سے اور اوپر کے مستقلوں سے نرم فولاد اور ڈھلے لوہے کے مختلف طولوں کے آزاد سروں کے داب روکوں کے لیے انتہائی بوجھ پر واقع ہونے والی زور کی جو حدتیں (یعنی بوجھ فی اکائی رقبہ) حاصل ہوتی ہیں وہ شکل ۱۴۸ میں دکھائی گئی ہیں۔



نسبت $\frac{ل}{گ}$

شکل ۱۴۸۔ داب روکوں کی انتہائی مضبوطی

ضابطے کا انتخاب — اگر نسبت $\frac{ل}{گ}$ تقریباً ۱۵۰ سے زیادہ ہو تو شکستی بوجھ معلوم کرنے کے لیے آئیلر کی قیمتیں اختیار کی جا سکتی ہیں اور زور کی اوسط حدت کے ساتھ قدرِ سلامتی فولاد اور ڈھلواں لوہے

کے لیے ۵، ڈھلے لوہے کے لیے ۶، اور چوبینے کے لیے ۱۰ اختیار کرکے کامی بوجھ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ اس سے چھوٹے داب ردکوں کے لیے رینکن کا ضابطہ اور اس کے ساتھ فولاد کے لیے قدرِ سلامتی ۳ یا ۴ اختیار کی جا سکتی ہے۔

امریکی پل کمپنی (American Bridge Co.) کی تخصیصات میں مردہ بوجھ کے لیے جائز بوجھ پونڈ فی مربع انچ تراش حسبِ ذیل بتایا گیا ہے:—

$$ف = \frac{۱۵۰۰۰}{۱ + \frac{۱}{۱۳۵۰۰}\left(\frac{ل}{ح}\right)^۲} \quad \text{(نرم فولاد کے لیے)}$$

اور

$$ف = \frac{۱۷۰۰۰}{۱ + \frac{۱}{۱۱۰۰۰}\left(\frac{ل}{ح}\right)^۲} \quad \text{(اوسط فولاد کے لیے)}$$ صفحہ ۲۸۴

جہاں ل کسی تعمیری داب ردک کا طول اس کے سروں کی کیلوں کے مرکزوں کے درمیان ہے۔

آئیلر کے ضابطے میں خوبی یہ ہے کہ جہاں بھی اس کو جائز طور پر استعمال کیا جا سکے وہاں اس کو بالراست استعمال کر سکتے ہیں یعنی ایک دیے ہوئے بوجھ کے لیے ضروری تراشی رقبہ دفعہ ۱۰۰ کی مساوات (۴)، (۶)، (۸) یا (۱۱) سے راست حاصل کر سکتے ہیں۔

رینکن کا ضابطہ (اور آئیلر کے ضابطے کو چھوڑ کر دوسرے ضابطے بھی) تراش کے دیے ہوئے رقبے اور شکل کے لیے کامی یا انتہائی بوجھ معلوم کرنے کے لیے تو سہل ہیں لیکن ایک دیے ہوئے بوجھ کو برداشت کرنے کے لیے مطلوبہ تراش کے ابعاد ان سے راست حاصل نہیں ہو سکتے بلکہ ایک بُعد کے مربع کی مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے۔

جانسن کا مکافی ضابطہ ـــ جانسن نے ایک آزمائشی ضابطہ اختیار کیا ہے :ـــ

$$ف = ز_ن - ب \left(\frac{ل}{گ}\right)^{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

جس کو $\frac{ل}{گ}$ کے اساس پر ترسیم کریں تو ایک مکافی حاصل ہوتا ہے۔ اس میں $ز_ن$ فشاری نقطۂ مغلوبیت ہے اور ب ایک مستقل ہے جس کا اس طرح تعین کیا جاتا ہے کہ یہ مکافی ف کی آئیلر کی قیمتوں سے ترسیم کیے ہوئے منحنی کو مماس ملے۔ سروں پر بالکل "آزاد" داب روک کی صورت میں اس سے ب = $\frac{ز_ن^{2}}{۴\pi^{2}ے}$ حاصل ہوگا، اور رگڑ کی وجہ سے جانسن اِس سے چھوٹی قیمتیں کیل دار سروں کے لیے $\frac{ز_ن^{2}}{۴۶ ے}$ اور چپٹے سروں کے لیے $\frac{ز_ن^{2}}{۱۰۰ ے}$ اختیار کرتا ہے۔ آئیلر کے منحنی کو مس کرنے کے بعد $\frac{ل}{گ}$ کی قیمتوں کے لیے آئیلر کے منحنی کو اختیار کرنا چاہیے اور کیل دار یا چپٹے سرے رگڑ کی وجہ سے خمیدگی کی جو مزاحمت کرتے ہیں اُس کی رعایت سے دفعہ ۱۰۰ کے جملہ (۷) میں ترمیم کرکے کیل دار سروں کے لیے ۱۶ ے $\left(\frac{گ}{ل}\right)^{2}$ اور چپٹے سروں کے لیے ۲۵ ے $\left(\frac{گ}{ل}\right)^{2}$ کر دیتے ہیں۔ یہ قیمتیں تجربوں کے نتائج پر مبنی ہیں۔ جانسن کے ضابطے کی شکل رینکن کے ضابطے سے کسی قدر سہل تر ہے۔

۱۰۳۔ تجربات کے ساتھ مقابلہ —— داب روکوں کی انتہائی مضبوطی کے متعلق مختلف حالات کے تحت بہت کثرت سے تجربات کیے گئے ہیں اور اِن مختلف نتائج کی مناسبت سے مختلف آزمائشی ضابطے وضع کیے گئے ہیں۔ جب کبھی لداؤ اور تثبیت تصوری حالات کے قریب رہے نتائج میں باہم بہت مطابقت رہی اور آزمائشی جبری ضابطوں کے بھی مطابق رہے جیسی کہ توقع کی جا سکتی ہے لیکن عملی داب روکوں میں جو مشینوں اور تعمیروں میں استعمال ہوتے ہیں یہ حالات نہیں پائے جاتے اور ان عملی داب روکوں اور تصوری داب روکوں میں فرق یہ ہوتا ہے کہ عملی داب روکوں میں کامل سیدھا پن اور مادے کا متجانس پن نہیں ہوتا اور دباؤ کم و بیش خارج المرکز ہوتا ہے اور سروں کی آزادی یا تثبیت بھی تصوری داب روک سے مختلف ہوتی ہے۔ کامی حالات کے تحت جو تجربات کیے گئے ہیں اُن کے نتائج بہت مختلف ہیں اور کسی ضابطے کے ذریعے، خواہ وہ آزمائشی ہو یا کسی طرح کا، اس کا ایک موٹے اندازے سے زیادہ نہیں کیا جا سکتا کہ کسی دی ہوئی صورت میں کس بوجھ پر ناکارگی واقع ہوگی[1]۔ اس وجہ سے تجویز کے کاموں میں سب آزمائشی ضابطے برابر ہیں اور استعمال کے لیے بہترین ضابطہ وہ ہے جو سہل ترین ہو۔ بہر صورت ضابطے کے مستقل $\frac{ل}{ح}$ کی قیمتوں کی ایک (چھوٹی) وسعت سے اخذ کیے گئے ہونگے جس کے اندر تجرباتی معلومات میسر آ سکتی ہیں۔ مثلاً خطِ مستقیم کی شکل کا ضابطہ صفحہ ۲۸۱

$$ف = ز - (مستقل \times \frac{ل}{ح})$$

جہاں ف بوجھ فی اکائی تراشی رقبہ ہے اور ز ایک مستقل ہے $\frac{ل}{ح}$ کی چھوٹی وسعتوں کے اندر کامی یا شکستی زور کی حدیں دے سکتا ہے۔

تجربے سے معلوم ہوا ہے کہ جن داب روکوں پر بوجھ محوری مقصود ہے

---

[1] تجرباتی تحقیقات، عددی خطِ مستقیم کے ضابطے اور ساختہ داب روکوں کی شکل اور تناسب کے حوالے مصنف کی کتاب "تعمیروں کا نظریہ" میں دیے گئے ہیں۔

اُن میں بھی خمیدگی اعظم انتہائی بوجھ سے بہت پہلے شروع ہوجاتی ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ بوجھ فی الحقیقت ٹھیک ٹھیک محوری نہیں ہوتا اور بعض اور مفروضات بھی پورے نہیں ہوتے جن پر آئیلر اور رینکن کے قواعد مبنی ہیں۔ اس طرح ایسے لمبے ستون پر خارج المرکز بوجھ کے اثرات کا مسئلہ پیش آجاتا ہے جس کی خمیدگی نظرانداز نہیں کی جاسکتی (جیسی کہ ایک بہت چھوٹے ستون میں کی جاتی ہے) اور جس میں اعظم خماؤ کا معیار زیادہ تر اُس بڑھے ہوئے خروج المرکز کی وجہ سے ہوتا ہے جو خمیدگی کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس مسئلے سے ہم دفعہ آیندہ میں بحث کریں گے۔

چھوٹے داب روکوں کی (محوری طور پر لدے ہونے پر بھی) ناکارگی کی ایک دلچسپ عقلی توجیہ ساؤتھ ول[1] نے پیش کی ہے۔ وہ آئیلر کے نظریے میں ترمیم کرکے اس بات کی رعایت رکھتا ہے کہ لچک کی حد کے باہر خمیدگی میں فساد کے لحاظ سے زور کے بڑھنے کی شرح داب روک کے مقعر پہلو میں ینگ کے مقیاس (مے) سے بہت کم ہوتی ہے اور محدب پہلو میں اس کے گھٹنے کی نسبت تقریباً مے کے مساوی ہوتی ہے۔ مربع تراش کے داب روکوں کے متعلق اس نے نتیجہ یہ حاصل کیا

$$\frac{\text{ل}'}{\text{ل}} = \frac{\text{۲}}{\text{۱} + \sqrt{\frac{\text{مے}}{\text{مےَ}}}}$$

جہاں لَ اُس داب روک کا طول ہے جس کا تہدیمی بوجھ عملی طور پر وہ حاصل ہو جو طول ل کے لیے آئیلر کے ضابطے سے حاصل ہوتا ہے اور مےَ خمیدگی میں مقعر پہلو پر زور اور فساد کے بڑھنے کی نسبت ہے۔ یہ نتیجہ ٹھوس مدور تراش اور پتلی نلی نما تراش کے لیے بھی تقریباً درست ہے۔ اس ترمیم یافتہ نظریے سے جو نتائج محسوب ہوتے ہیں وہ اُن بہترین تجربات سے بہت مطابق ہوتے ہیں

[1] "داب روکوں کی مضبوطی" رسالہ انجینیرنگ ۲۳ اگست ۱۹۱۲ء۔ تجرباتی توثیق رابرٹسن سے حاصل ہوتی ہے۔ دیکھو "داب روکوں کی مضبوطی" انسٹیٹیوشن آف سول انجینیرز منتخب پرچہ، ۲۸ (۱۹۲۵ء)۔

Southwell

جن میں لداؤ کی کیفیت تصوری لداؤ کے قریب ہو۔

مثال ۱۔— ایک نرم فولاد کا داب روک جس کو دونوں سروں پر قبضہ دیا گیا ہے T تراش کا ہے جس کا رقبہ ۳٫۶۳۴ مربع انچ اور اقل معیارِ جمود ۴٫۷۰ (انچ)^۴ ہے۔ رینکن کے ضابطے سے اس کے ۶ فٹ طول کے لیے خم آور بوجھ معلوم کرو اگر انتہائی کچل مضبوطی ۲۱ ٹن فی مربع انچ لی جائے۔

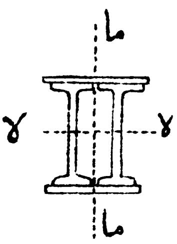
$$\text{اقل گردشی نصف قطر کا مربع} = \frac{۴٫۷}{۳٫۶۳۴} = ۱٫۲۹۳\ (\text{انچ})^۲$$

$$\left(\frac{\text{ل}}{\text{گ}}\right)^۲ = \frac{۷۲ \times ۷۲}{۱٫۲۹۳} = ۴۰۰۰$$

صفحہ ۲۸۵ متن کتاب میں دیا ہوا مستقل یعنی $\frac{۱}{۷۵۰۰}$ استعمال کرنے سے —

$$\text{ف} = \frac{۲۱ \times ۳٫۶۳۴}{\frac{۴۰۰۰}{۷۵۰۰} + ۱} = \frac{۱۵}{۲۳} \times ۳٫۶۳۴ \times ۲۱ = ۴۹٫۷\ \text{ٹن}$$

مثال ۲— ایک فولادی ستون کا جس کی شکل شکل ۱۴۹ میں دی گئی ہے تراشی رقبہ ۳۹٫۸۸ مربع انچ ہے اور اقل گردشی نصف قطر ۳٫۸۴ انچ ہے۔ دونوں سرے ثابت ہیں اور طول ۴۰ فٹ ہے۔ اس کا خم آور بوجھ (۱) آئیلر[له] کے ضابطے سے (۲) رینکن کے ضابطے سے معلوم کرو (ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔



شکل ۱۴۹

ائیلر کے ضابطے سے :—

$$\text{ف} = \frac{۴\pi^۲ \times ۱۳۰۰۰ \times ۳۹٫۸۸ \times (۳٫۸۴)^۲}{۴۸۰ \times ۴۸۰} = ۱۳۰۷\ \text{ٹن}$$

رینکن کے ضابطے سے اور دیے ہوئے مستقلوں کے استعمال سے :—

$$\text{ف} = \frac{۳۹٫۸۸ \times ۲۱}{\frac{۴۸۰ \times ۴۸۰}{۳۰۰۰۰ \times ۳٫۸۴ \times ۳٫۸۴} + ۱} = \frac{۳۹٫۸۸ \times ۲۱}{۱٫۵۲۰} = ۵۵۱\ \text{ٹن}$$

له Euler

مثال ۳۔ ۲۰ فٹ طول اور دونوں سرے ثابت اور کھوکھلی مدور تراش کے ایک ڈھلے لوہے کے ستون کی دھات کی ضروری موٹائی معلوم کرو جس کا بیرونی قطر ۸ انچ ہے۔ محوری بوجھ ۸۰ ٹن آنے والا ہے اور کچل بوجھ اس سے ۶ گنا ہونا چاہیے۔

فرض کرو کہ ق مطلوبہ اندرونی قطر انچوں میں ہے۔

$$\text{تب تراشی رقبہ} = \frac{\pi}{4}\left(8^2 - ق^2\right)$$

اور

$$ا^2 = \frac{\pi}{64}\left(8^4 - ق^4\right)$$

$$گ^2 = \frac{1}{16}\left(8^2 + ق^2\right)$$

شکستی بوجھ ۴۸۰ ٹن ہونا چاہیے۔ اس لیے رینکن کے ضابطے میں دفعہ ۱۰۲ کے مستقل استعمال کرنے سے

$$480 = \frac{\frac{\pi}{4}\left(8^2 - ق^2\right) \times 36}{1 + \frac{16 \times 240 \times 240}{6400\left(8^2 + ق^2\right)}} = \frac{9\pi\left(8^4 - ق^4\right)}{208 + ق^2}$$

$$ق^4 + 17ق^2 - 560 = 0$$

$$ق^2 = 16.65 \text{،} \quad ق = 4.08''$$

$$\text{دھات کی موٹائی} = \frac{8 - 4.08}{2} = 1.96 \text{ یا تقریباً ۲ انچ}$$

۱۰۴۔ لمبے ستون خارج المرکز بوجھ کے تحت

چونکہ آئیلر کے ضابطے صرف ایسے داب روکوں پر قابلِ اطلاق ہیں جو کامل محوری طور پر لدے ہوئے ہوں اس لیے یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ اگر بوجھ کے نقطۂ عمل پر خروج المرکز م ہو تو کیا ترمیم لازم آتی ہے۔ شے کے اندر لچک متغیر ہو یا داب روک میں پہلے سے انحنا ہو تو ان کا بھی اسی طرح کا اثر ہوگا اور ان کے لیے صرف یہ فرض کرنا کافی ہے کہ ان سے م کی قیمت بڑھ جاتی ہے۔ صورت ۱ دفعہ ۱۰۰ پر غور کرو۔ اگر ف سرے ب پر (شکل ۱۵۸) ...

صفحہ ۲۸۶ مرکز سے فاصلہ ھ پر۔ (اور اُس خاص محور پر جس کے علیٰ القوائم محور کے گرد آ کی قیمت اقل حاصل ہوئی ہے) لگایا جائے تو نقطہ قَ پر خماؤ کا معیار ف (ا + ھ - ما) ہوگا اور مساوات (۱) دفعہ ۱۰۰ حسبِ ذیل ہو جائیگی :-

$$\frac{\text{فز}^2\,\text{ما}}{\text{فزلا}^2} + \frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}\cdot\text{ما} = \frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}(\text{ا}+\text{ھ}) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۱)$$

اور دفعہ ۱۰۰ کا حل (۲ ل) حسبِ ذیل ہو جاتا ہے :

$$\text{ما} = (\text{ا}+\text{ھ})\left(۱ - \text{جم لا}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}}\right) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۲)$$

اور لا = ل ہو

$$\text{ما} = \text{ا} = (\text{ا}+\text{ھ})\left(۱ - \text{جم ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}}\right)$$

$$\text{یا}\quad \text{ا جم ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}} = \text{ھ}\left(۱ - \text{جم ل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}}\right)$$

$$\text{ا} = \text{ھ}\left(\text{قطل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}} - ۱\right) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۳)$$

مبداء ھ پر لداؤ کا خروج المرکز

$$= \text{ا} + \text{ھ} = \text{ھ قطل}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۴)$$

اور اِس طرح مبداء پر خماؤ کا معیار خمیدگی کی وجہ سے قطل $\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}}$ گنا ہو گیا۔ ھ پر خماؤ کا معیار = ف (ا+ھ) = ف ھ قطل $\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}}$ جو اس وقت تک کہ زور کی حدت فساد کے متناسب ہو ایک متشاکل تراش میں مساوی اور مخالف خماؤ کے زور پیدا کریگا جن کی حدت

---

[1] خارج المرکز لداؤ کی زیادہ عام صورت جس میں حامل دھکیل کا خط کسی تراش کو اس کے دونو صدر محوروں میں سے کسی پر بھی نہ قطع کرے یہاں دی ہوئی صورت سے کچھ زیادہ مشکل نہیں۔ ھ کے دو اجزائے ترکیبی استعمال کیے جائینگے اور زور اعظم حاصل ترکیبی خروج المرکز وں سے دفعہ ۹۰ کے (۴) اور (۶) سے لکھے جا سکتے ہیں (دیکھو ذیل میں ۱۰۱)

$$\text{نہ} = \frac{\text{ف ہ}}{\text{م ق}}\ \text{قطل ہا}\ \sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} = \frac{\text{ف ہ ق}}{\text{۲ آ}}\ \text{قطل ہا}\ \sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}$$

جہاں ق تراشش کی گہرائی خماؤ کے مستوی میں، یعنی اقل گردشی نصف قطر کی سمت میں ہے۔ اگر تراشش غیر متشاکل ہو تو $\frac{\text{ق}}{\text{۲}}$ کی بجائے مات اور مات استعمال کرنا چاہیے (دیکھو دفعہ ۶۳)۔ اس طرح (۱) دفعہ ۹۷ کی رُو سے اعظم فشاری زور

$$\text{ف} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}} + \frac{\text{ف ہ ق}}{\text{۲ گ}^2\ \text{ر}}\ \text{قطل ہا}\ \sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}$$

$$= \frac{\text{ف}}{\text{ر}}\left\{\text{۱} + \frac{\text{ہ ق}}{\text{۲ گ}^2}\ \text{قطل ہا}\ \sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{۵})$$

جو دفعہ۔ اکی طرح لاتناہی ہو جائیگا جب کہ

$$\text{ل ہا}\ \sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} = \frac{\pi}{\text{۲}}$$

یا

$$\text{ف} = \frac{\pi^2\ \text{آ ے}}{\text{۴ ل}^2}$$

نیز

$$\frac{\text{ف}}{\text{ر}} = \frac{\text{ف}}{\text{۱} + \frac{\text{ہ ق}}{\text{۲ گ}^2}\ \text{قطل ہا}\ \sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{۶})$$ صفحہ ۴۸۷

اور اگر $\text{ن}_\text{ن}$ شے کی کچل مضبوطی ہو یعنی مثلاً فشاری نقطۂ مغلوبیت پر زور کی حدت ہو تو خمیدگی کی وجہ سے ناکارگی پر

$$\text{ف}_\text{ب} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}_\text{ن}}{\text{۱} + \frac{\text{ہ ق}}{\text{۲ گ}^2}\ \text{قطل ہا}\ \sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{۷})$$

دونوں سروں پر آزاد ستون کی صورت میں (صورت ۲ دفعہ ۱۰۰ اور شکل ۱۴۵) سروں کے دباؤ میں خروج المرکز ہ ہو تو ل کی بجائے $\frac{\text{ل}}{\text{۲}}$ لکھنے سے (۴) یہ ہو جاتی ہے :—

$$\text{و} + \text{ھ} = \text{ھ}\ \text{قط}\ \frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} \ \cdots\cdots\cdots (\text{۸})$$

اور (۵) یہ ہوجاتی ہے :-

$$\text{ف} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}}\left(\text{۱} + \frac{\text{ھ ق}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}}\ \text{قط}\ \frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}\right) \cdots\cdots\cdots (\text{۹})$$

اور فشاری مغلوبیت پر ناکارگی کے لیے (۷) یہ ہوجاتی ہے :-

$$\text{ف}_{\text{ب}} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}} = \frac{\text{نس}}{\text{۱} + \frac{\text{ھ ق}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}}\ \text{قط}\ \frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}}$$

$$= \frac{\text{نس}}{\text{۱} + \frac{\text{ھ ق}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}}\ \text{قط}\ \frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{فس}}{\text{گ}^{\text{۲}}\ \text{ے}}}} \cdots\cdots\cdots (\text{۱۰})$$

حسابات کے لیے یہ یاد رکھنا سہولت سے خالی نہ ہوگا کہ نرم فولاد کی صورت میں سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ لینے سے زاویہ $\frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{گ}^{\text{۲}}\ \text{ے}}}$ نیم قطری = بہت تقریباً $\frac{\text{ل}}{\text{۸گ}}\sqrt{\text{ف}}$ درجے جب کہ ف ٹن فی مربع انچ میں ہو۔

دفعہ ۹۸ کی مساوات (۷) کی صورت میں جو زیادہ عام ہے (۱۰) حسب ذیل ہوجائیگی :-

$$\text{ف}_{\text{ب}} = \frac{\text{نس}}{\text{۱} + \frac{\text{ھ}_{\text{ی}}\ \text{ق}}{\text{۲گ}_{\text{ی}}^{\text{۲}}}\ \text{قط}\ \frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{گ}_{\text{ی}}^{\text{۲}}\ \text{ے}}} + \frac{\text{ھ}_{\text{ا}}\ \text{ض}}{\text{۲گ}_{\text{ا}}^{\text{۲}}}\ \text{قط}\ \frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{گ}_{\text{ا}}^{\text{۲}}\ \text{ے}}}} \cdots\cdots (\text{۱۰ا})$$

جہاں $\text{ھ}_{\text{ی}}$ اور $\text{ھ}_{\text{ا}}$ تراش کے دونوں خاص محاور کے لحاظ سے خروج المرکز کے اجزائے ترکیبی یعنی بوجہ نقطے کے محدد ہیں اور $\text{گ}_{\text{ی}}$ اور $\text{گ}_{\text{ا}}$ متناظر خاص محوروں کے گرد گردشی نصف قطر ہیں اور ض اعظم عرض ہے جو

گہرائی ق کے علی القوائم ناپا گیا ہے۔

ترقیم میں جو ذرا سا فرق ہو گیا ہے اس کی رعایت رکھیں تو ل = ۰ کے لیے (۵) اور (۹) تحویل ہو کر دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) کی شکل میں آجاتے ہیں۔ خمیدگی کی وجہ سے خماؤ کے زور کا اضافہ اُسی وقت اہم ہوتا ہے جب کہ طول قابلِ لحاظ ہو۔

اسی طرح ل = ۰ کے لیے (۱۰) تحویل ہو کر (۷) دفعہ ۱۹۸ کی شکل میں آجاتا ہے کیونکہ اس صورت میں قاطع کی قیمت اکائی ہوگی۔

صفحہ ۲۸۸ اگر ناکارگی تناؤ کی وجہ سے واقع ہو جیسا کہ ڈھلے لوہے میں عام ہے تو (۹) کے متناظر زور کی اعظم حدت

$$ف = \frac{ف}{ر}\left(\frac{ھ ق}{۲ ح^{۲}}\ \text{قط}\ \frac{ل}{۲}\sqrt{\frac{ف}{ے آ}} - ۱\right) \quad \cdots\cdots\cdots (۱۱)$$

ہوگی۔ اور اگر شکستگی پر تنشی زور کی حدت کی حد $ز_ت$ ہو تو تناؤ کی وجہ سے ناکارگی پر اوسط فشاری زور (۱۰) کی بجائے حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\left.\begin{aligned} ن_ب = \frac{ف}{ر} &= \frac{ز_ت}{\frac{ھ ق}{۲ ح^{۲}}\ \text{قط}\ \frac{ل}{۲}\sqrt{\frac{ف}{ے آ}} - ۱} \\ &= \frac{ز_ت}{\frac{ھ ق}{۲ ح^{۲}}\ \text{قط}\ \frac{ل}{۲ح}\sqrt{\frac{ف}{ے ۲}} - ۱} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (۱۲)$$

مساواتوں (۹) اور (۱۱) سے ایک دیے ہوئے ابعاد، بوجھ اور خروج المرکز کے داب روک کے فشاری اور تنشی زور کی انتہائی حدتیں معلوم ہو سکتی ہیں، یا وہ خروج المرکز معلوم ہو سکتا ہے جو ایک مخصوص زور پیدا کرے۔

یہاں بھی صریحاً ف لاتناہی ہو جائیگا اگر $ف = \frac{\pi^{۲} آ ے}{ل^{۲}}$ جیسا کہ

آئیلر کے نظریے میں ہوتا ہے جس میں ھ = ۰۔ لیکن ان مساواتوں سے معلوم ہوتا ہے کہ ھ صفر نہ ہو تو ف انتہائی فشاری یا تنشی مضبوطی کی قیمت کو ف کی ایسی قیمتوں کے لیے پہنچ جاتا ہے جو آئیلر کی فاصل قیمتوں سے بہت پست ہوتی ہیں۔ طالب علم کے لیے یہ فائدے سے خالی نہ ہوگا کہ ایک دی ہوئی تراش اور مختلف خروج المرکزوں کے لیے ف اور ف کی قیمتوں کو ترسیم کرے اور ہر صورت میں دیکھے کہ ف کے ساتھ ف کس طرح بڑھتا ہے۔

دیے ہوئے ابعاد اور دیے ہوئے خروج المرکز ھ کے داب روک کے لیے انتہائی بوجھ ف (یا ف)، جو ایک دی ہوئی زور کی انتہائی حدت زن یا زن کے لیے مساوات (۱۰) یا (۱۲) کو پورا کرے، آزمائش کے ذریعے یا اس طرح معلوم ہوسکتا ہے کہ دونوں میں سے کسی مساوات کی طرفین کی قیمتوں کے فرق کو ف کی قیمتوں کے اساسی خط پر ترسیم کریں اور معلوم کریں کہ ف کی کس قیمت کے لیے معین صفر ہوتا ہے۔ ف کی قیمت آزمائش سے معلوم کرتے وقت آسانی کے لیے $\frac{ل}{۲}\sqrt{\frac{ف}{آ ے}} = \frac{\pi}{۲}\sqrt{\frac{ف}{ف_ر}}$ لکھ لیا جائے جہاں

$ف_ر = \frac{\pi^۲ آ ے}{ل^۲}$، اور زاویہ کی قیمت درجوں میں $۹۰\sqrt{\frac{ف}{ف_ب}}$ ہوگی۔

شکل نمبر ۱۵۰ میں ف کی انتہائی قیمتیں نرم فولاد کے، مدور تراش کے اور مختلف طولوں کے داب روکوں کے لیے دکھائی گئی ہیں۔ ان میں مختلف خروج المرکز لیے گئے ہیں اور زن = ۲۱ ٹن فی مربع انچ لیا گیا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مثلاً طول = ۲۰ قطر کے داب روکوں میں قطر کے $\frac{۱}{۱۰}$ خروج المرکز سے تصوری داب روک سے برداشت ہونے والا بوجھ بہت کچھ گھٹ جاتا ہے۔ نیز یہ کہ $\frac{۱}{۱۰}$ قطر کا خروج المرکز ہو تو $\frac{۱}{۱۰}$ قطر کے مزید خروج المرکز سے مضبوطی کچھ ایسی زیادہ نہیں گھٹتی۔

یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ عملی تجویز کے مقاصد کے لیے اس قسم کے منحنی اُن منحنیوں سے زیادہ مختلف نہیں جو دفعہ ۱۰۲ کے آزمائشی قاعدوں سے حاصل ہوتے ہیں اور نیز نمونے میں اُس تصویری صورت سے بھی زیادہ مختلف نہیں جو ساوتھ ول کی تصحیح سے حاصل ہوتی ہے۔

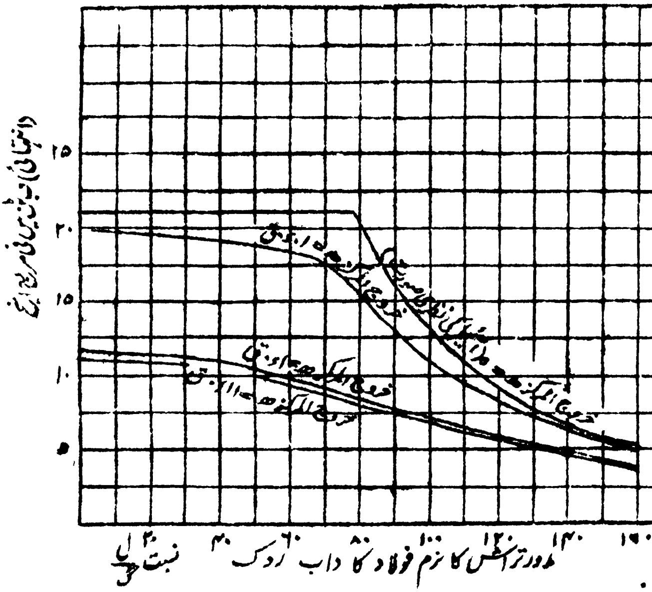
داب روک کا طول، بوجھ اور خروج المرکز، اور تراش کی شکل دی ہوئی ہو اور زی اور زیہ کی قیمت مختص کردی گئی ہو جن سے زور نہیں بڑھنا چاہیے تو تراش کے مطلوبہ ابعاد معلوم کرنے کے لیے اوپر کی مساواتوں کو آزمائش کے ذریعے یا ترسیم کے ذریعے حل کرسکتے ہیں اگر ہر اور گ (یا آ) کو ق کی رقوم میں لکھ لیا جائے یعنی ہر^2 = ج × ق^2 اور گ^2 = ج × ق^2 (یا آ = ج × ق^2)، جہاں ج اور ج (یا ج) مستقل ہیں جو تراش عمودی کی شکل پر منحصر ہیں۔ آزمائش سے حل کرنے میں نامعلوم مقدار کا ایک پہلا تقرب اس طرح حاصل ہوسکتا ہے کہ قاطع کو ایک کے مساوی لیا جائے جیسا کہ دفعہ ۹۸ میں ہے۔ اس کے بعد نتیجے کی مزید تصحیح آسان ہے۔ پروفیسر[1] سمتھ نے دکھایا ہے کہ اگر اس طرح کے بہت سے مسائل حل کرنے کے ہوں تو حسابات میں اس طرح آسانی پیدا کی جاسکتی ہے کہ منحنیوں کا ایک سلسلہ کھینچ لیا جائے جو مختلف خروج المرکزوں کے متناظر ہوں اور تراش کی ہر شکل کے لیے درست ہوں۔ صفحہ ۲۸۹

پروفیسر[2] باسکوئن نے لداؤ کے خروج المرکز، ستونوں کے ٹیڑھے پن اور اِن کے اندر لچک کے مقیاس کے تغیر کی صورتوں سے خاصی تفصیل کے ساتھ بحث کی ہے۔ اور مشورہ دیا ہے کہ ستونوں کی تجویز میں اس طرح کے احتمالی نقائص کو زور کے اندازے کی بنا قرار دی جائے۔

مساواتوں (۹) اور (۱۰) سے معلوم ہوگا کہ بوجھ ف کے بڑھنے سے زور کی اعظم حدت اس کے تناسب سے زیادہ بڑھتی ہے کیونکہ زور کا جو حصہ خماؤ کی وجہ سے ہے وہ بڑھتے ہوئے بوجھ کے علاوہ خروج المرکز

[1] Prof. P. H. Smith [2] Prof. O. H. Basquin

کے ساتھ بھی بڑھتا ہے جو خود بھی بوجھ کے بڑھنے سے جھکاؤ کے ساتھ بڑھتا ہے ۔ اس طرح اگر حسبِ معمول قدرِ سلامتی سے مراد کُل زور کی



شکل نمبر ۱۵۱ داب روکوں کا خارج المرکز لداؤ۔

انتہائی حدت (مثلاً نقطۂ مغلوبیت پر) اور زور کی اعظم حدت کی نسبت لی جائے تو متناظر بوجھوں کی یعنی ناکارگی اور عملی بوجھوں کی نسبت اس سے کم ہوگی ۔ اس نکتے کو دفعہ ہذا کے آخر میں مثالوں ۳ اور ۴ میں واضح کیا گیا ہے ۔ صفحہ ۴۹۰

ایک لمبی بندھن سلاخ کی صورت میں جس پر خارج المرکز بوجھ ہو زور کی اعظم حدتیں سروں کی تراشوں پر ہوتی ہیں جہاں خروج المرکز ہ ہوگا۔ وسط میں خروج المرکز صرف ہ قطر $\frac{ل}{۲}$ $\sqrt{\frac{ف}{ے}}$ ہوگا۔

تقریبی طریقہ ـــــ پروفیسر پیری[1] نے دکھایا ہے کہ مثلثی تفاعل قاطع $\frac{ل}{۲}\sqrt{\frac{ف}{آ ے}}$ (یا قطع $\frac{\pi}{۲}\sqrt{\frac{ف}{ف_ر}}$، جہاں $ف_ر = \frac{\pi^۲ آ ے}{ل^۲}$ آئیلر کی ف کی فاصل قیمت جب کہ ھ = ۰) کی بجائے تقریبی طور پر ذیل کا جبری تفاعل رکھا جاسکتا ہے:-

$$\frac{۱٫۲}{۱-\frac{ف}{ف_ر}} \quad یا \quad \frac{۱٫۲}{۱-\frac{ف ل^۲}{\pi^۲ آ ے}}$$

اس میں عددی سر ۱٫۲ ایک اوسط قیمت ہے جو $\frac{ف}{ف_ر}$ کی وسعت ۵ء۰ تا ۹ء۰ پر قابلِ اطلاق ہے اور کامی بوجھوں کے لیے صحیح قیمت سے اِس کا انحراف حفاظت کی جانب ہے۔ $\frac{ف}{ف_ر}$ کی قیمت $\frac{۱}{۵}$ کے لیے جو داب روک کا ایک عام کامی بوجھ ہے یہ عددی سر ۱٫۰۵ ہوتا ہے۔ جبری تفاعل مندرج کرنے سے مساوات (۹) حسبِ ذیل ہوجاتی ہے:-

$$ف_ا = \frac{ف}{ر}\left(۱ + \frac{\frac{۱٫۲ ھ ق}{ک^۲}}{۱-\frac{ف ل^۲}{\pi^۲ آ ے}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۳)$$

جس کو ایک بڑی بہتری شکل میں یوں لکھ سکتے ہیں:-

$$\left(\frac{ف_ا ر}{ف}-۱\right)\left(۱-\frac{ف}{ف_ر}\right) \quad یا \quad \left(\frac{ف_ا}{ف_ن}-۱\right)\left(۱-\frac{ف_ن ل^۲}{\pi^۲ ے ک^۲}\right)$$

$$= ۱٫۲\frac{ھ ق}{ک^۲} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۴)$$

اور (۱۱) حسبِ ذیل ہوجاتی ہے:-

[1] Prof: Perry.

$$\text{ف} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}}\left(\frac{\frac{\text{۱٫۲ ھ ق}}{\text{۲ گ}^{۲}}}{\text{۱} - \frac{\text{ف ل}^{۲}}{\text{۱۲ ا ے}}} - \text{۱}\right) \qquad \text{(۱۵)}$$

جو حسبِ ذیل شکل میں آجاتی ہے:—

$$\left(\frac{\text{ف ر}}{\text{ن}} + \text{۱}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{و}}}\right) \text{ یا } \left(\frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{ب}}} + \text{۱}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{ف ل}^{۲}}{\text{۱۲ ے ک}^{۲}}\right)$$

$$= \text{۱٫۶} \frac{\text{ھ ق}}{\text{ک}^{۲}} \qquad \text{(۱۶)}$$

حسبِ سابق (۱۴) اور (۱۶) سے ایسے داب روک کے انتہائی زور کی حدیں معلوم ہوسکتی ہیں جن کے ابعاد، بوجھ، اور خروج المرکز معلوم ہوں۔ یا تنشی یا فشاری زور کی حدت کی ایک دی ہوئی حد کے اندر جائز خروج المرکز معلوم کیا جاسکتا ہے۔ نیز اگر داب روک کے ابعاد، زور کی اعظم بے خطر حدت اور خروج المرکز دیے ہوئے ہوں تو بوجھ ف بالراست محسوب ہوسکتا ہے کیونکہ یہ مساوات درجہ دوم (۱۴) یا (۱۶) کی اصل ہوگی (بمطابقت اس کے کہ تخصیص شدہ حد فشاری زور کی ہے یا تنشی زور کی یعنی ف = ن یا ن)۔ صفحہ ۲۹۱

اگر داب روک کا طول اور شکل معلوم ہوں تو ایک دیے ہوئے بوجھ اور خروج المرکز اور زور کی حد کے لیے تراش کے ابعاد اس طرح معلوم ہوسکتے ہیں کہ (۱۴) یا (۱۶) میں حسبِ سابق ر = ج ق^۲، گ^۲ = ج ق^۲ آ = ج م ق^۲ = ج ج ق^۲ لیا جائے جہاں ج اور ج م مستقل ہیں۔ چونکہ ف متناسب ہے ق^۲ کے اس لیے یہ مساواتیں ق میں صریحاً چھٹے درجے کی ہونگی اور ق کو مساوات (۱۴) یا (۱۶) سے (بمطابقت اس کے کہ تخصیص شدہ حد فشاری ہے یا تنشی) آزمائش یا ترسیم کے ذریعے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ آزمائش سے حل کرنے میں ایک پہلا تقرب (آ) بعد

لینے سے حاصل ہوسکتا ہے جس سے مساوات (۱۴) مساوات (۱) دفعہ ۹۸ کی شکل میں آجاتی ہے - اگر ہ کو ق کی ایک کسر کے طور پر دیا گیا ہو تو مساوات ق^{۲} کی ایک مساوات درجہ سوم ہوگی -

تقریبی حل کو (۱۰) اور (۱۲) کے زیادہ صحیح قاعدوں سے جانچ کر اُن کے لحاظ سے تصحیح کر لی جا سکتی ہے -

پروفیسر پیری نے داب روکوں میں پہلے سے کوئی انحنا ہو تو اس کو جیب التمام کے منحنی کی شکل کا مان کر ایک پرچے میں جس کا اوپر حوالہ دیا گیا ہے یہ دکھایا ہے کہ ابتدائی انحنا ایسے خروج المرکز کے معادل ہے جو داب روک کے وسط میں صحیح سیدھی وضع سے اعظم انحراف کے تقریباً مساوی ہے - اس کی اس طرح تصدیق ہوسکتی ہے کہ ان میں ہ کی بجائے

ہ جم $\frac{\pi}{۲}\frac{لا}{ل}$ درج کریں - اس کے ساتھ شرائط یہ ہونگی کہ لا = ۰ پر

ما = ۰ اور $\frac{فرما}{فرلا} = ۰$ اور لا = ل پر ما = و - اس طرح اعظم خماؤ کا معیار

ف (۱ + م) ہوگا جو مساوی ہے

$$\frac{ف\ م}{۱ - \frac{ف}{ف_{۰}}}$$

کہ جہاں $ف_{۰} = \frac{\pi^{۲}\ آ\ ے}{ہ\ ل^{۲}}$ - دیگر صورتوں کے لیے بھی اسی طرح کی قیمتیں درست ہونگی - صرف $ف_{۰}$ میں دفعہ ۱۰۰ کے مطابق ترمیم کرنی ہوگی -

مثال ۱ — ایک ڈھلے لوہے کے ستون کا بیرونی قطر ۸ انچ ہے - دھات کی موٹائی ۱ انچ ہے - ستون پر بوجھ ۲۰ ٹن ہے - اگر ستون ۳۰ فٹ لمبا ہو اور دونوں سروں پر استوارانہ ثابت ہو تو

دھات میں زور کی انتہائی حدتیں معلوم کرو اگر بوجھ کا مرکز ستون کے محور سے ۱ ۳/۴ انچ کے فاصلے پر ہو۔ ستون میں تناؤ پیدا کرنے کے لیے کتنا خروج المرکز عین کافی ہوگا۔ (ے = ۵۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

بہت چھوٹے ستون کے لیے متناظر سوال مثال ۲ دفعہ ۹۸ میں حل کیا گیا ہے اور اس کے نتائج سے کام لیا جاسکتا ہے :-

ف = ۹۰۹ر ٹن فی مربع انچ

گ۲ = ۱/۱۶ (۸۲ + ۶۲) = ۲۵/۴

خماؤ کا زور حسب ذیل نسبت میں بڑھ جائیگا :-

قط ل/م √(ف/اے) = قط ل/م √(ف/(ے گ۲)) = قط ۴۸۰/۴ √(۴ × ۹۰۹ر/۲۵ × ۵۰۰۰)

= قط ۶۴۶ر = قط ۳۷° = ۱ر۲۵

اس طرح خماؤ کے زور کی حدت صفحہ ۲۹۲

= ۱ر۰۱۷ × ۱ر۲۵ = ۱ر۲۷ ٹن فی مربع انچ

اعظم فشاری زور = ۱ر۲۷ + ۹۰۹ر = ۲ر۱۸ ٹن فی مربع انچ

اعظم تنشی زور = ۱ر۲۷ - ۹۰۹ر = ۳۶ر ٹن فی مربع انچ

یعنی اس صورت کا تقریباً ۲ گنا جس میں جھکاؤ کی وجہ سے خروج المرکز میں اضافہ نہ ہوا ہو۔

اگر خروج المرکز عین اتنا ہے کہ ستون میں تناؤ پیدا کرے تو اس کی مقدار

= ۱ر۷۵ × ۹۰۹ر/۱ر۲۷ = ۱ر۲۵ انچ

مثال ۲ — ایک مرکب ستون اس تراشش کا ہے جو شکل ۱۴۹ میں دکھائی گئی ہے۔ اس کا گردشی نصف قطر ما ما کے گرد ۳ر۸۴ انچ ہے اور ۷۷ کے متوازی عرض ۱۴ انچ ہے۔ ستون کا طول ۲۲ فٹ

ہے اور اس کو دونوں سروں پر آزاد سمجھا جائے۔ اگر بوجھ فی مربع انچ تراش ۴ ٹن ہو تو حاصل قوت کا خط سروں پر محور ما ما سے کتنا انحراف کرسکتا ہے بغیر اس کے کہ فشاری زور ۶ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہو۔ حاصل دباؤ خط لالا پر ہے۔ بہت چھوٹے ستون میں یہ خروج المرکز کتنا ہو سکتا ہے۔ (ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

صریحاً (۹) کی رُو سے خماؤ کے زور کی حدت ۶ − ۴ = ۲ ٹن فی مربع انچ ہونی چاہیے۔ اس لیے اگر ھ خروج المرکز ہو تو

۴ھ ق / ی² قط (ل/۲ √(ف / ے ی)) = ۲

یا (۱۴ × ھ × ۴) / ((۳٫۸۴)² × ۲) قط (۱۹۲/۳٫۸۴ √(۴/۱۳۰۰۰)) = ۲

یا ھ(۱٫۸۹۷ قط ۵٫۰۳°) = ۲٫۹۷ ھ = ۲

اس لیے ھ = ٫۶۷۵ انچ

بہت چھوٹے ستون کی صورت میں جس میں جھکاؤ قابل نظر اندازی ہو ھ کی مطلوبہ قیمت صریحاً حسب ذیل ہوگی:۔

ھ × ۱٫۸۹۷ = ۲ ، ھ = ۱٫۰۵۵ انچ

اس کے لیے مساوات دفعہ ۹۸ کی مساوات (۱) کی شکل اختیار کر لیتی ہے کیونکہ قاطع تقریباً اکائی ہے۔

(۱۴) سے حاصل شدہ حل کے ساتھ مقابلہ دلچسپی سے خالی نہ ہوگا:۔

ھ × ۱۴/۱۴٫۷۵ × ۲٫۶ = ((۴ × ۱۰۰۰۰)/(π² ۱۳۰۰۰) − ۱)(۶/۴ − ۱)

ھ = ٫۶۰۵ انچ

یہ سابقہ نتیجے سے کم ہے کیونکہ (۱۴) میں جو عددی سر ۲٫۶ لایا گیا ہے وہ

انتہائی زور سے اتنے کم اوسط زور کے لیے بہت بڑا ہے۔ یہ حدی سر حذف کر دیا جائے تو تقریبی طریقے کے ذریعے ۲۰ فی صدی بڑی قیمت یعنی ھ = ۲۶٫۷ حاصل ہوتی ہے جو بہت بڑی ہے اور اس کی غلطی حفاظت کی مخالف جانب ہے۔

مثال ۳۔ بوجھ فی مربع انچ تراش معلوم کرو جو مثال ۲ میں دی ہوئی تراش کا ستون ۸×۸ سے $1\frac{1}{2}$ انچ کے خروج المرکز پر برداشت کرسکے۔ ستون ۲۸ فٹ لمبا ہے اور دونوں سروں پر آزاد ہے۔ اعظم فشاری زور ۶ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے۔ نیز اگر انتہائی فشاری مضبوطی ۲۱ ٹن فی مربع انچ ہو تو انتہائی بوجھ فی مربع انچ تراش معلوم کرو۔ (ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔ صفحہ ۲۱۳

پہلے تقریبی طریقہ استعمال کرنے سے (۱۴) سے حاصل ہوگا:-

$$\left(\frac{6}{\text{ف}_{\text{ب}}}-1\right)\left\{1-\frac{\text{ف}}{13000\times\pi^{2}}\left(\frac{12\times 28}{3.84}\right)^{2}\right\}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{2}\times\frac{14}{(3.84)^{2}}$$

$$(6-\text{ف}_{\text{ب}})(1-0.059\,\text{ف}_{\text{ب}})=0.858\,\text{ف}_{\text{ب}}$$

یا

$$\text{ف}_{\text{ب}}^{2}-37.13\,\text{ف}_{\text{ب}}+102=0$$

اس لیے

$$\text{ف}_{\text{ب}}=2.95 \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

(۹) سے اِس کی جانچ کرنے سے

$$2.95\left(1+\frac{3}{2}\times\frac{14}{14.75\times 2}\,\text{قط}\,\frac{168}{3.84}\sqrt{\frac{2.95}{13000}}\right)$$

$$=2.95\,(1+0.715\,\text{قط}\,37.8^{\circ})=5.62 \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

بجائے ۶ ٹن فی مربع انچ کے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ ۲٫۹۵ کسی قدر کم ہے۔ آزمائش سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ف}_{\text{ب}}=3.12 \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

سے مساوات (۹) پوری ہوتی ہے اور اس طرح یہی جائز بوجھ فی مربع انچ تراش ہوا۔ اوپر کے عمل میں ۶ ٹن فی مربع انچ کی بجائے ۱۲ ٹن فی مربع انچ مندرج کرنے سے خم آور بوجھ ۸،۲ ٹن فی مربع انچ تراش حاصل ہوتا ہے۔ اب دیکھو کہ اگرچہ زور کی حدت کے لحاظ سے قدرِ سلامتی $\frac{21}{6} = 3\frac{1}{2}$ ہے لیکن انتہائی اور کامی بوجھ کی نسبت صرف $\frac{8.2}{3.12} = 2.63$ ہے۔

مثال ۴۔ ایک مدور تراش کا فولادی داب روک ۵۰ انچ لمبا اور دونوں سروں پر قبضہ دار ہے۔ ضروری قطر معلوم کرو تاکہ اگر ۱۵ ٹن کا دباؤ سروں پر داب روک کے محور سے بقدر $\frac{1}{4}$ قطر کے منحرف ہو تو اعظم فشاری زور ۵ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔ اگر فولاد کا فشاری نقطۂ مغلوبیت ۲۰ ٹن فی مربع انچ ہو تو داب روک کا خم آور بوجھ معلوم کرو۔ (سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

$$\text{گ} = \frac{\text{ق}}{4}\ ،\ \text{ر} = \frac{\pi\,\text{ق}^2}{4}\ ،\ \text{ھ} = \frac{\text{ق}}{10}$$

تقویبی مساوات (۱۴) استعمال کرنے سے

$$\left(\frac{5\pi\,\text{ق}^2}{15\times4} - 1\right)\left(1 - \frac{2500\times64\times15}{\pi^2\times13000\times\pi\,\text{ق}^4}\right) = .6\times\frac{\text{ق}}{10}\times\frac{16\times\text{ق}}{\text{ق}^2} = .96$$

$$\left(.2616\,\text{ق}^2 - 1\right)\left(1 - \frac{5.88}{\text{ق}^4}\right) = .96$$

$$\text{ق}^6 - 7.5\,\text{ق}^4 - 5.88\,\text{ق}^2 + 22.5 = 0$$

یہ ق² میں ایک مساوات درجہ سوم ہے جس کا حل آزمائش سے حسبِ ذیل ہے:—

$$\text{ق}^2 = 7.91$$

$$\text{ق} = 2.81 \text{ انچ}$$

مساوات (۹) سے اس کی جانچ کریں تو

$$\frac{۴ \times ۱۵}{۶۹ \times ۳۲}\left(۱ + \frac{۱۶}{۲۰}\ \text{قط}\ ۴۸۴۴ء\right) = ۵۸ء۴$$

بجائے ۵ ٹن فی مربع انچ کے ۔

آزمائش سے ق = ۲٫۷ انچ تقریباً ۔

ف = ۲۰ ٹن فی مربع انچ پر ناکارگی واقع ہونے کے لیے ق کی یہ قیمت استعمال کریں تو (۱۴) سے

$$\left(\frac{۲۰}{\text{ف}} - ۱\right)\left(۱ - \frac{۵۵۰۰\ \text{ف}}{۱۲۸۰۰۰}\right) = ۹۶ء$$

ف = ۸ء۱۵ ٹن فی مربع انچ

اور (۹) سے آزمائش کے ذریعے

ف = ۸ء۳۴ ٹن فی مربع انچ

داب روک پر مجموعی بوجھ —

$$۸ء۳۴ \times \frac{۲۲}{۷} \times (۲٫۷)^۲ = ۸ء۴۴\ \text{ٹن}$$

اس طرح دیکھو قدرِ سلامتی زور کی اعظم حدت کے حساب سے $\frac{۲۰}{۵} = ۴$، لیکن خم آور بوجھ اور کامی بوجھ کی نسبت $= \frac{۸ء۴۴}{۱۵} = ۳ء۲۲$

۱۰۵ ۔ داب روک اور بندھن سلاخیں جانبی بوجھوں کے ساتھ

— اگر ایک منشوری شے پر محوری اور جانبی دونوں طرح کی قوتیں عمل کریں تو اس کو یا تو ایک شہتیر سمجھا جاسکتا ہے جس پر ایک محوری بوجھ بھی ہے، اور یا ایک داب روک یا بندھن سلاخ جس پر جانبی خماؤ کی قوتیں بھی ہیں ۔ کسی تراش پر زور کی حدت مساوات (۱) دفعہ ۹۷ کے بموجب خماؤ کے زور اور اس راست زور کا جبری حاصل جمع ہوگا جو محوری جاذ بغیر جانبی قوتوں کے پیدا کرے ۔

ایسے شہتیر میں جس میں ایک بہت محدود انصراف واقع ہوسکتا ہو یعنی جو اپنے تراشی ابعاد کے تناسب سے بہت لمبا نہ ہو، خماؤ کے زور کو

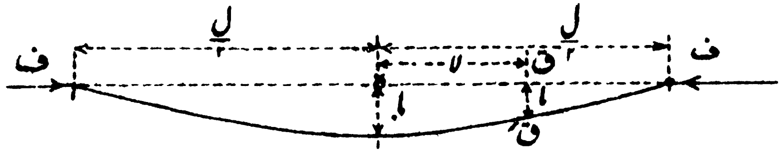
بس اتنا سمجھا جاسکتا ہے جو صرف عرضی بوجھوں سے پیدا ہو - البتہ اگر شہتیر اپنی تراش کے تناسب سے طویل ہو تو طولی قوت جو حقیقی طور پر محوری صرف سروں پر ہوگی دوسرے مقامات پر اپنے خروج المرکز کی وجہ سے خاصا خماؤ کا زور پیدا کرےگی اور جانبی بوجھوں سے پیدا ہونے والے انصراف کو زیادہ یا کم کرنے میں بڑا حصہ لیگی بلحاظ اس کے کہ یہ دباؤ ہے یا کھنچاؤ - اس صورت میں کسی تراش پر خماؤ کے زور اُن دو خماؤ کے زوروں کے جبری حاصل جمع ہونگے جن میں سے ایک عرضی بوجھوں سے پیدا ہوں اور دوسرے طولی قوتوں کے خروج المرکز کی وجہ سے - سوائے اُس صورت کے سلاخ بہت لمبی ہو یا یہ کہ طولی قوت بہت بڑی ہو عام طور پر خماؤ کے معیار کا ایک بہت تقریبی تقرب اس طرح حاصل ہوسکیگا کہ اُن دو معیاروں کا جبری حاصل جمع لیا جائے جن میں سے ایک عرضی قوتوں کی وجہ سے ہو اور دوسرا طولی قوت کے خروج المرکز کی وجہ سے، اس مفروضے کے ساتھ کہ انصراف یا خروج المرکز صرف عرضی بوجھوں کی وجہ سے ہے - ان تقربات کے تحت کسی مسئلے کے حل سے بحث کی جاچکی ہے - عرضی بوجھوں کی وجہ سے خماؤ کا زور باب ۴ اور ۵ کی طرح محسوب ہوگا، انصراف باب ۶ کی طرح اور خارج المرکز طولی قوت سے پیدا ہونے والے زور دفعہ ۹۸ کی رُو سے محسوب ہونگے - اب صرف اُن صورتوں سے بحث کرنا باقی ہے جن میں سروں کے دباؤ یا کھنچاؤ انصراف کو قابلِ لحاظ طور پر متاثر کریں اور جہاں اس وجہ سے اوپر کا تقرب جائز نہ ہو - ان سے ذیل کی دو دفعات میں بحث کی گئی ہے اور کسی تناسب کے ابعاد کے ارکان کے زور معلوم کیے گئے ہیں، اور یہ بھی بتایا گیا ہے کہ کن حالات میں سادہ تقریبی حل تقریباً صحیح ہوگا۔

بند ۲۹۵

۱۰۶ - داب روک جانبی بوجھ کے ساتھ[1] ——— فرض کرو کہ ل ایک یکساں داب روک کا طول ہے جو دونوں سروں پر آزادانہ قبضہ دار ہے اور ایک بوجھ د فی اکائی طول اُٹھائے ہوئے ہے - فرض کرو کہ سروں کا دھکیل جو دونوں سروں پر تراشش کے مرکزِ ہندسی میں سے

[1] اس مسئلہ کے حل کی [illegible] کے لیے دیکھو پیپرڈ و پرچرڈ (Pippard & Pritchard) [illegible] کی "جہازوں کی تعمیر" (مطبوعہ لانگمنس) دفعہ ۹۰ اور وہ حوالے جو اس میں مذکور ہیں۔

گزرتا ہے ف ہے ۔ مبداء ہ دونوں سروں کے وسط میں لو (شکل ۱۵۱)
اور سروں کے مراکزِ ہندسی کو ملانے والے خط کو محور لا مانو ۔ نقطہ قَ پر خماؤ کا



شکل ۱۵۱

معیار جانبی بوجھ کی وجہ سے $\frac{\text{و}}{۲}\left(\frac{\text{ل}^۲}{۴} - \text{لا}^۲\right)$ اور سروں کے دھکیل ف کی وجہ سے ف × ما ہوگا ۔ چونکہ دونوں معیار داب روک کے ابتدائی محل کی طرف تقعر پیدا کرتے ہیں اس لیے ان کا حاصل جمع $-\text{آے}\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}$ کے مساوی ہوگا جہاں آ تراش کا (مستقل) معیارِ جمود ایسے محور کے گرد ہے جو مرکزِ ہندسی میں سے گزرتا ہے اور خمیدگی کے مستوی کے علی القوائم ہے ۔ اس طرح

$$\text{آے}\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = -\frac{\text{و}}{۲}\left(\frac{\text{ل}^۲}{۴} - \text{لا}^۲\right) - \text{ف} \times \text{ما} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + \frac{\text{ف}}{\text{آے}} \times \text{ما} = -\frac{\text{و}}{۲\,\text{آے}}\left(\frac{\text{ل}^۲}{۴} - \text{لا}^۲\right) \quad \ldots\ldots (۲)$$

اس مساوات کا حل حسبِ ذیل ہے :-

$$\text{ما} = \frac{\text{و}}{۲\,\text{ف}}\text{لا}^۲ - \frac{\text{و}\text{ل}^۲}{۸\,\text{ف}} - \frac{\text{و}\,\text{آے}}{\text{ف}^۲} + \text{ا جم}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}\,\text{لا}$$

$$+ \text{ب جب}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اس کے ساتھ شرائط یہ ہیں کہ لا = ۰ پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$ اور لا = $\frac{\text{ل}}{2}$ پر

ما = ۰ ۔ ان کے اندراج سے

$$\text{ب} = 0 ، \text{ا} = \frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}^2} \text{ قط } \frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}$$

اس لیے $$\text{ما} = \frac{\text{و}}{2\,\text{ف}}\text{لا}^2 - \frac{\text{و ل}^2}{8\,\text{ف}} - \frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}^2}$$

$$\left(1 - \text{قط } \frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} \text{ جم } \sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}\,\text{لا}\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

اور مبدا پر $$\text{ما}_\text{ہ} = -\frac{\text{و ل}^2}{8\,\text{ف}} - \frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}^2}\left(1 - \text{قط } \frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}\right) \quad \ldots\ldots (5)$$

اور ہ پر اعظم خماؤ کا معیار

$$-\text{ص}_\text{ہ} = \text{ف} \times \text{ما}_\text{ہ} + \frac{1}{8}\text{و ل}^2 = \frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}}\left(\text{قط } \frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} - 1\right) \quad \ldots (6)$$

$$\text{یا } -\text{ص}_\text{ہ} = \frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}}\left(\text{قط } \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{ف}_\text{و}}} - 1\right) \quad \ldots\ldots (7)$$

جہاں $\text{ف}_\text{و} = \frac{\pi^2 \text{آ ے}}{\text{ل}^2}$ ، یعنی تصوری داب روک کے لیے آئیلر کی انتہائی قیمت (صورت ۲، دفعہ ۱۰۰) ۔ اگر ف = $\text{ف}_\text{و}$ تو $\text{ص}_\text{ہ}$ اور $\text{ما}_\text{ہ}$ لاتناہی ہوجاتے ہیں ۔

اگر (۶) میں حسبِ ذیل پھیلاؤ

$$\text{قط ط} - 1 = \frac{\text{ط}^2}{\lfloor 2} + \frac{5\,\text{ط}^4}{\lfloor 4} + \frac{61\,\text{ط}^6}{\lfloor 6} + \frac{1385\,\text{ط}^8}{\lfloor 8} + \text{وغیرہ}$$ ، استعمال

کیا جائے تو (۶) حسبِ ذیل ہوجاتی ہے :-

$$-\text{م}_\text{ر} = \frac{\text{و ل}^2}{8}\Big\{1 + \frac{5\pi^2}{48}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ف}_\text{ر}}\right) + \frac{61\pi^4}{5760}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ف}_\text{ر}}\right)^2$$

$$+ \frac{277\pi^6}{258048}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ف}_\text{ر}}\right)^2 + \text{وغیرہ}\Big\} \quad \ldots\ldots (8)$$

یا

$$-\text{م}_\text{ر} = \frac{\text{و ل}^2}{8} + \frac{5}{384}\,\frac{\text{و ل}^4}{\text{ا ے}} \times \text{ف}\Big\{1 + \frac{61\pi^2}{600}\,\frac{\text{ف}}{\text{ف}_\text{ر}}$$

$$+ \frac{277\pi^4}{26880}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ف}_\text{ر}}\right)^2 + \text{وغیرہ}\Big\} \quad \ldots\ldots (9)$$

اِن دو شکلوں (۸) اور (۹) سے وہ ربط معلوم ہوتا ہے جو دفعہ گزشتہ میں بیان کیے ہوئے تقریبی طریقے کو خماؤ کا معیار محسوب کرنے کے زیادہ صحیح طریقے کے ساتھ ہے۔ دونوں مساواتوں (۸) اور (۹) میں پہلی رقم صرف جانبی بوجھوں کے خماؤ کے معیار کو تعبیر کرتی ہے۔ (۹) کی دوسری رقم محوری دھکیل ف کا اور صرف عرضی بوجھ سے پیدا ہونے والے انحراف $\frac{5}{384}\,\frac{\text{و ل}^4}{\text{ا ے}}$ کا (دیکھو (۱۱) دفعہ ۶۸) حاصل ضرب ہے۔ لمبے سے لمبے داب روک میں بھی $\frac{\text{ف}}{\text{ف}_\text{ر}}$ تقریباً $\frac{1}{5}$ سے زیادہ نہ ہوگا اور چھوٹے داب روکوں میں تو بہت چھوٹا ہوگا۔ اس طرح ظاہر ہے کہ تقریبی طریقے میں جس میں (۹) کی پہلی دو رقمیں لی جاتی ہیں کوئی ایسی بڑی خطا واقع نہیں ہوگی۔

مساوات (۱) کا ایک تقریبی حل اس طرح حاصل ہوسکتا ہے کہ $\frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}^2}{4} - \text{لا}^2\right)$ کی بجائے اس سے ایک بہت مشابہ جملہ $\frac{\text{و ل}^2}{8}\,\text{جم}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$ لکھیں جس سے حسبِ ذیل نتیجہ حاصل ہوگا:—

$$\text{م} = \frac{\text{و ل}^2}{8}\cdot\frac{\text{جم}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}}{\text{ف}_\text{ر} - \text{ف}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\text{ما}_{\text{ہ}} = \frac{\text{و ل}^{2}}{8\,(\text{ف}_{1} - \text{ف})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$-\,\text{م}_{\text{ہ}} = \frac{1}{8}\,\text{و ل}^{2}\,\frac{\text{ف}_{1}}{\text{ف}_{1} - \text{ف}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

اب خواہ خماؤ کا معیار دفعہ گزشتہ کے تقریبی طریقوں سے محسوب کیا گیا ہو جو چھوٹے داب روکوں کے لیے قابلِ استعمال ہیں خواہ (۷) سے یا (۱۲) سے کیا گیا ہو' بہرحال خماؤ کے زور کی حدت بلا لحاظ علامت دفعہ ۶۳ کی رُو سے حسبِ ذیل ہوگی :- دفعہ ۲۹۷

$$\text{ف}_{\text{ع}} = \frac{\text{م}_{\text{ہ}}\,\text{ما}}{\text{آ}} = \frac{\text{م}_{\text{ہ}}}{\text{مق}} = \frac{\text{م}_{\text{ہ}}\,\text{ق}}{2\,\text{آ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

جہاں ما متشاکل تراش میں نصف گہرائی $\frac{\text{ق}}{2}$ کے مساوی ہوگا اور مق تراش کا مقیاس ہے - اس لیے مساوات (۱) دفعہ ۹۷ کی رو سے فشاری زور کی اعظم حدت

$$\text{ز}_{\text{ن}} = \frac{\text{م}_{\text{ہ}}}{\text{مق}} + \text{ف} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{م}_{\text{ہ}}\,\text{ق}}{2\,\text{آ}} + \text{ف} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

جہاں ف تراش پر فشاری زور کی اوسط حدت ہے یعنی $\frac{\text{ف}}{\text{ر}}$ کے مساوی ہے جہاں ر تراش کا رقبہ ہے اور خماؤ کا معیار مثبت لیا گیا ہے -
اور تنشی زور کی اعظم حدت

$$\text{ز}_{\text{ت}} = \frac{\text{م}_{\text{ہ}}}{\text{مق}} - \text{ف} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{م}_{\text{ہ}}\,\text{ق}}{2\,\text{آ}} - \text{ف} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

جو منفی ہونے کی صورت میں فشاری زور کی اقل حدت کو تعبیر کریگا - اگر تراش متشاکل نہ ہو تو تنشی اور فشاری خماؤ کے زور مساوی نہیں ہونگے اور ان کو مساوات (۶) دفعہ ۶۳ کی رو سے معلوم کیا جا سکتا ہے -
ضابطہ (۱۴) سے ایسے داب روک کی تراش کے ابعاد محسوب

کرنے کا ایک بالواسطہ طریقہ ہاتھ آتا ہے جس کی شکل دی گئی ہو اور جس کو زور کی اعظم حدت کی ایک مختص حد کے اندر رہ کر دیے ہوئے محوری اور جانبی بوجھ برداشت کرنے ہوں ۔ چونکہ یہ طریقہ بالواسطہ ہے جس میں آزمائش کی مدد لینی ہوتی ہے اس لیے ابعاد کا ایک پہلا تقرب حاصل کرنے کے لیے $\text{م} = \frac{1}{8}\,\text{ول}^2$ استعمال کیا جا سکتا ہے اور پھر زیادہ صحیح ضابطے (۱۴) کے ذریعے، جس میں م مساوات (۷) یا (۱۲) کو پورا کرتا ہے، نز کی قیمتوں کی جانچ کرکے تصحیح کی جا سکتی ہے ۔

جانبی بوجھ کے داب روک کی ایک دلچسپ صورت حرّاکے کے ملاپ ڈنڈے میں پیش آتی ہے ۔ جانبی بوجھ وہ ہے جو ڈنڈے کے مادے کی مرکز گریز قوت کی وجہ سے ہے ۔ اس طرح و تراش کے رقبے کے متناسب ہوگا ۔ تراش کا رقبہ اکثر I کی شکل کا ہوتا ہے اور ڈنڈا عموماً وسط سے سروں کی طرف گاؤدم ہوتا ہے ۔ ایسی صورت میں اگر محوری بوجھ ٹھیک ٹھیک معلوم ہو جائیں تو بھی صحیح حساب ناممکن نہیں تو پیچیدہ ضرور ہوتا ہے ۔ البتہ خماؤ کے زور کا ایک عمدہ تخمینہ اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ اس متغیر تراش کے شہتیر پر صرف جانبی بوجھوں سے پیدا ہونے والا خماؤ کا معیار اور انصراف دفعہ ۸۳ کی طرح معلوم کیے جائیں اور وسطی خماؤ کے معیار کو بقدر اس مقدار کے بڑھا دیا جائے جو محوری دھکیل کی وجہ سے ہے ۔

اگر داب روک پر یکساں پھیلے ہوئے بوجھ کی بجائے وسط میں ایک جانبی بوجھ و ہو تو مساوات (۲) یہ ہو جائیگی :-

$$\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{ف}}{\text{آے}} \times \text{ا} = -\frac{\text{و}}{\text{۲آے}}\left(\frac{\text{ل}}{\text{۲}} - \text{لا}\right) \quad \text{.....(۱۶)}$$

$$\text{ا}_{\text{ع}} = \frac{\text{و}}{\text{۲ف}}\sqrt{\frac{\text{آے}}{\text{ف}}}\;\text{مس}\;\frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}} - \frac{\text{ول}}{\text{۴ف}} \quad \text{.....(۱۷)}$$ صفحہ ۲۹۸

$$-\text{م}_{\text{ع}} = \frac{\text{و}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{آے}}{\text{ف}}}\;\text{مس}\;\frac{\text{ل}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}$$

اور دوسری صورتیں ایک مضمون میں ملینگی جو فلوسافیکل میگزین (جون ۱۹۰۹ء) میں شائع ہوا۔

۱۰۷۔ بندھن سلاخ جانبی بوجھوں کے ساتھ —

ترقیم بالکل دفعہ گزشتہ کی رہیگی صرف یہ کرنا ہوگا کہ داب روک کی بجائے بندھن سلاخ ہونے کی وجہ سے ف کی علامت تبدیل کردینی ہوگی۔ اس طرح مساوات (۲) دفعہ ۱۰۶ یہ ہوجائیگی :—

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}-\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}\times\text{ما}=-\frac{\text{و}}{2\,\text{آ ے}}\left(\frac{\text{ل}^2}{4}-\text{لا}^2\right)\;\ldots\ldots(1)$$

اور اگر تثبیت کے حالات دفعہ گزشتہ کی طرح ہوں تو حل یہ ہوگا :—

$$\text{ما}=-\frac{\text{و}}{2\,\text{ف}}\text{لا}^2+\frac{\text{ول}^2}{8\,\text{ف}}-\frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}^2}$$

$$\left(1-\text{قطز ہ}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}\,\frac{\text{ل}}{2}\;\text{جمز ہ}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}\,\text{لا}\right)\;\ldots\ldots\ldots(2)$$

اور

$$-\text{مہ}=\frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}}\left(1-\text{قطز ہ}\,\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}}\right)$$

$$=\frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}}\left(1-\text{قطز ہ}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{و}}}}\right)\;\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

اگر (۱) میں سابقہ اندراج $\frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}^2}{4}-\text{لا}^2\right)$ کی بجائے $\frac{1}{8}$ ول^2 جم $\frac{\text{لا}}{\text{ل}}$ π کیا جائے تو $-\text{مہ}=\frac{1}{8}\,\text{ول}^2\,\frac{\text{ف}_{\text{و}}}{\text{ف}+\text{ف}_{\text{و}}}$ حاصل ہوگا جو اس طرح بھی حاصل ہوسکتا ہے کہ (۳) کو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{و}}}$ کی بڑھتی ہوئی قوتوں میں پھیلایا جائے۔ پھیلاؤ میں سر متبادلاً تقریباً ۱+ اور ۱− ہونگے۔

خماؤ اور محوری کھنچاؤ سے پیدا ہونے والی زور کی حدتیں دفعہ گزشتہ کی طرح محسوب ہوسکتی ہیں - مہ کی علامت سے قطع نظر کے کرنے سے

$$\text{ن}_{\text{ت}} = \frac{\text{م}}{\text{مق}} + \text{ف}_{\text{ب}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

$$\text{ن}_{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\text{مق}} - \text{ف}_{\text{ب}}$$ (جو مثبت یا منفی ہوسکتا ہے) .... (۵)

اگر بندھن سلاخ پر پھیلا ہوا بوجھ نہ ہو بلکہ ایک وسطی جانبی[ے] بوجھ و ہو تو دفعہ ۱۰۶ کی مساوات (۱۶) یہ ہوجائیگی :-

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} - \frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}} \times \text{ما} = -\frac{\text{و}}{2\,\text{آ}\,\text{ے}}\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right) \quad \dots\dots \quad (6)$$

اور

$$\text{ما}_{\text{ه}} = \frac{\text{و ل}}{4\,\text{ف}} - \frac{\text{و}}{2\,\text{ف}}\sqrt{\frac{\text{آ}\,\text{ے}}{\text{ف}}}\;\text{مسنر}\;\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}}$$

اور

$$-\text{م}_{\text{ه}} = \frac{\text{و}}{2}\sqrt{\frac{\text{آ}\,\text{ے}}{\text{ف}}}\;\text{مسنر}\;\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ}\,\text{ے}}}$$

صفحہ ۲۹۹ اور دوسری صورتیں فلوسافیکل میگزین جون ۱۹۰۸ء کے ایک مضمون میں ملینگی -

مثال ۱ - فولاد کی ایک مدور سلاخ کا قطر ۱ انچ اور طول ۱۰ فٹ ہے - اس کے دونوں سروں کے مرکزوں پر محوری قوتیں لگائی گئی ہیں اور اس کو افقی وضع میں آزادانہ سہارا گیا ہے - اس طرح اس پر اس کے ذاتی وزن (۰٫۲۸ پونڈ فی مکعب انچ) کا جانبی بوجھ ہے - سلاخ میں فشاری اور تنشی زور کی اعظم حدت معلوم کرو (ل) ایک ۵۰۰ پونڈ کے محوری دھکیل کے ساتھ (ب) ۵۰۰ پونڈ کے ایک محوری کھنچاؤ کے ساتھ (ج) بغیر کسی محوری قوت کے - ($\text{ے} = 30 \times 10^6$ پونڈ فی مربع انچ) -

$$\text{ف}_{\text{ر}} = \frac{\pi^2 \times 30 \times 10^6 \times \pi}{64 \times 120 \times 120} = 1010 \text{ پونڈ}$$

ے Lateral

و = ۰٫۲۸ × $\frac{\pi}{4}$ = ۰٫۲۲ پونڈ فی طولی انچ

(ا) خماؤ کے زور کی اعظم حدت (۷) اور (۱۳) دفعہ ۱۰۶ کی رُو سے حسبِ ذیل ہوگی :—

$$\text{فخ} = \frac{\text{م}}{\text{مق}} = \frac{\text{و آ ے}}{\text{ف مق}}\left(\text{قط}\ \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{ف}_1}} - 1\right)$$

اور چونکہ

$$\frac{\text{آ}}{\text{مق}} = \frac{1}{2}\ \text{انچ}$$

اس لیے

$$\text{فخ} = \frac{22}{100} \times \frac{30 \times 10^6}{2 \times 500}\left\{\text{قط}\,(90 \times 0.7036)^\circ - 1\right\}$$

$$= 6600 \times 1.2274 = 8100\ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\text{فب} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} = \frac{500}{0.7854} = 637\ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

اعظم فشاری زور نی = ۸۱۰۰ + ۶۳۷ = ۸۷۳۷ پونڈ فی مربع انچ

اعظم تنشی زور نے = ۶۳۷ − ۸۱۰۰ = ۷۴۶۳ پونڈ فی مربع انچ

(ب) خماؤ کے زور کی اعظم حدت (۳) دفعہ ۱۰۷ کی رُو سے

$$= \frac{\text{و آ ے}}{\text{ف مق}}\left(1 - \text{قطز}\ \frac{\pi}{2} \times 0.7036\right) = 6600\,(1 - \text{قطز}\ 1.1042)$$

$$\text{فخ} = 6600 \times 0.404 = 2666\ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\text{نے} = 637 + 2666 = 3303\ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\text{نی} = 637 - 2666 = 2029\ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\text{(ج)}\quad \text{نے} = \text{نی} = \frac{\text{م}}{\text{مق}} = \frac{1}{8} \times \frac{22}{100} \times \frac{32 \times 120 \times 120}{\pi}$$

$$= 4030\ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

مثال ۲ — معلوم کرو کہ مثال ۱ کے ۵۰۰ پونڈ کے سروں کے

دھکیل محور سے کتنے فاصلے پر لگائے جائیں کہ زور کی حدت ممکنہ طور پر کم ہو۔
فرض کرو کہ دھکیل کا مطلوبہ خروج المرکز محور سے نیچے کو ھ ہے۔
تب دفعہ ۱۰۶ کی مساوات (۱) میں معیار ف × ھ کا اضافہ کرنے سے

$$\text{آے}\,\frac{\text{فز}^2\text{م}}{\text{فزلا}^2} = -\frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}^2}{4}-\text{لا}^2\right)-\text{ف}\times\text{م}+\text{ف}\times\text{ھ}$$

اس کا حل دفعہ ۱۰۶ کی طرح ہوگا اور وسط میں

صفحہ ۳

$$\text{م} = -\frac{\text{ول}^2}{8\text{ف}}-\left(\frac{\text{و آے}}{\text{ف}^2}-\text{ھ}\right)\left(1-\text{قط}\,\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}\right)$$

اور $\text{سر} = \text{ف}(\text{م}-\text{ھ})+\frac{\text{ول}^2}{8}$

$$= \frac{\text{و آے}}{\text{ف}}\left(\text{قط}\,\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}-1\right)-\text{ف ھ قط}\,\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}$$

جو اوپر وار تقعر پیدا کریگا اگر پہلی رقم دوسری سے بڑی ہو۔ اور سروں پر اُوپر وار تحدب پیدا کرنے والا معیار

$$= \text{ف}\times\text{ھ}$$

خماؤ کے معیار کے نقشے یا اوپر کے جملوں پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ھ کے بڑھنے سے خماؤ کے معیار کی مقدار سروں پر صفر سے بڑھتی ہے اور وسط میں گھٹتی ہے۔ اس لیے خماؤ کا معیار، خماؤ کا زور اور زور کم سے کم ہونے کے لیے سروں اور وسط کے خماؤ کے معیار مقدار میں مساوی اور علامت میں مخالف ہونے چاہییں یعنی

$$\text{ف ھ} = \frac{\text{و آے}}{\text{ف}}\left(\text{قط}\,\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}-1\right)-\text{ف ھ قط}\,\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}$$

$$\text{اس لیے ھ} = \frac{\text{و آے}}{\text{ف}^2}\times\frac{\text{قط}\,\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}-1}{\text{قط}\,\frac{\text{ل}}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آے}}}+1}$$

اور $\text{زن} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} + \frac{\text{ف}\times\text{ھ}}{\text{مق}} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} + \frac{\text{د آ ے}}{\text{ف مق}} \times \left(\frac{\text{قط}\,\frac{\text{ل}}{۲}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} - ۱}{\text{قط}\,\frac{\text{ل}}{۲}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{آ ے}}} + ۱} \right)$

مثال ا کی عددی قیمتیں استعمال کرنے سے

$$\text{ھ} = \frac{۲۲}{۱۰۰} \times \frac{۶۰\times۳۰}{۲۵۰۰۰} \times \frac{\pi}{۶۴} \times \frac{۱٫۲۲۷۴}{۳٫۲۲۷۴} = ٫۴۹۲ \text{ انچ}$$

اور چونکہ $\text{ف}_\text{خ}$ کی قیمت خروج المرکز کی وجہ سے نسبت ۱ : ۳٫۲۲۷۴ میں گھٹ گئی ہے اس لیے

$$\text{زن} = ۶۳۷ + \frac{۸۱۰۰}{۳٫۲۲۷۴} = ۶۳۷ + ۲۵۰۷$$

$= ۳۱۴۴$ پونڈ فی مربع انچ

مثال ۳ ـ ایک جڑاکے کا ملاپ ڈنڈا ۱۰۰ انچ طول اور I تراش کا ہے جس کا رقبہ $۶\frac{۳}{۴}$ مربع انچ، اور معیارِ جمود ایک مرکزی اُفقی محور کے گرد ۱۰ (انچ)^۴ ہے اور گہرائی $۴\frac{۱}{۲}$ انچ ہے۔ ڈنڈے میں اعظم دھکیل (جس کا ملاپ پہیے کی اعظم چیک سے اندازہ کیا گیا ہے) ۱۷ ٹن ہے اور جانبی بوجھ جو ڈنڈے کے جمود کی وجہ سے ہے پوری رفتار پر ۲۴ پونڈ فی طولی انچ ہے۔ ڈھکیلوں پر رگڑ کو نظر انداز کرکے سلاخ میں اعظم فشاری زور کا اندازہ کرو۔ (ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

$$\text{ف}_\text{و} = \frac{۱۰ \times \pi^۲ \times ۱۳۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۱۲۸٫۳ \text{ ٹن}$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف}_\text{و}} = \frac{۱۷}{۱۲۸٫۳} = ٫۱۳۲۶$$

صفحہ ۳۰۱

$$\text{وسط میں خماؤ کا معیار} = \frac{\text{و آ ے}}{\text{ف}}\left(\text{قط}\ \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{و}}}} - ۱\right)$$

$$= \frac{۱۰ \times ۱۳۰۰۰ \times ۲۴}{۱۶ \times ۲۲۴۰}\left(\text{قط}\ ۳۲،۷۷^{\circ} - ۱\right)$$

$$= ۸۲ \times ۱،۸۹ = ۱۵،۵\ \text{ٹن انچ}$$

$$\text{ف}_{\text{خ}} = \frac{۹ \times ۱۵،۵}{۴ \times ۱۰} = ۳،۴۹\ \text{ٹن فی مربع انچ}$$

$$\text{ف}_{\text{ب}} = \frac{۱۶}{۶،۳۵} = ۲،۵۲ \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\text{ز}_{\text{ن}} = ۶،۰۱ \quad \text{"} \quad \text{"}$$

بطور تنقیح کے، وسط میں خماؤ کا معیار دوسرے طریقے سے (جو دھکیلوں کی کامی قیمتوں کے لیے بہت تقریباً صحیح ہے) -

$$= \frac{۱}{۸}\ \text{ول}^{۲}\ \frac{\text{ف}}{\text{ف}_{\text{و}} - \text{ف}} = ۴،۱۳ \times \frac{۱}{،۸۹۶۴}$$

$$= ۱۵،۴۵\ \text{ٹن انچ}$$

۱۰۷ و - متغیر تراش کے ستون ــــ دفعہ ۱۰۰ میں کسی داب روک یا ستون کے انصرافی منحنی کی عام شکل خماؤ کی تفرقی مساوات (۱) کو حل کر کے حاصل کی گئی تھی اور یہ مساوات ایک سرے کے اختیاری انصراف (ا) کی رقوم میں لکھی گئی اور حل کی گئی - اس عام حل سے اور سروں کے ڈھال اور انصراف کی کیفیت سے فاضل بوجھ کی قیمت اخذ کی گئی - خماؤ کی تفرقی مساوات کو حل کرنے کی بجائے اگر انصرافی منحنی کی ایک شکل

فرض کر لی جائے تو خماؤ کی مساوات کو دو بار تکمل کر کے سرے پر حاصل ہونے والے انصراف کو مفروضہ انصراف کے مساوی رکھنے سے فاصل بوجھ کی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔ یہ امر کہ آیا یہ حقیقی قیمت کا ایک عمدہ تقرب ہے یا نہیں اس پر موقوف ہے کہ منحنی کی مفروضہ شکل حقیقی شکل کا معقول تقرب ہے یا نہیں۔ اگر ایسی شکل فرض کی جائے جو سروں کی شرائط کو پورا کرے تو بالعموم عمدہ تقرب آسانی سے حاصل ہوجائیگا۔ سادہ عام صورتوں کے لیے اس طریقے میں کوئی خاص خوبی نہیں۔ اس کا فائدہ یہ ہے کہ ایسی صورتوں کا حل اس کی مدد سے آسانی سے ممکن ہوجاتا ہے جن میں تراش داب روک کے محور کے طول میں مستقل نہ ہو اور یہ صورتیں دفعہ ۱۰۰ کے طریقے سے بہت مشکل سے حل ہونگی بلکہ بعض اوقات حل ہی نہیں ہوسکینگی۔ اس کے علاوہ حل کے ذریعے انصراف کی مفروضہ شکل کی تصحیح کی جاسکتی ہے اور اس طرح ایک نزدیک تر تقرب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کی وجہ سے پہلے تقرب کی قیمت کو جانچنا ممکن ہوتا ہے اور اگر ضرورت ہو تو اس عمل کی تکرار سے جیسا چاہیں ویسا قریبی تقرب حاصل کرسکتے ہیں۔ اس طریقے کی تفصیلات اور مثالیں مصنف کے لکھے ہوئے پرچوں میں دی گئی ہیں۔

ایک اور تقریبی طریقہ جو آزمائش اور تصحیح پر مبنی ہے اور جو کسی معلومہ طور پر متغیر تراش کے داب روکوں کے لیے قابل استعمال ہے یہاں مختصر طور پر شکل ۱۴-۳ کی صورت کے حوالے سے بیان کیا جائیگا۔ فاصل بوجھ ف کی ایک آزمائشی قیمت کسی طریقے سے مثلاً آمیلر کے ضابطہ (۳ہ) دفعہ ۱۰۰ سے معلوم کی جاسکتی ہے اور آزاد سرے کا کوئی اختیاری انصراف ح فرض کیا جاسکتا ہے (اس کو آسانی کے لیے اکائی لیا جاسکتا ہے)۔ اب اگر داب روک کو چند مثلاً ۱۰ مساوی طولوں میں تقسیم کریں تو خمیدہ شہتیروں کے ربطوں (باب ۶) کی مدد سے ۱۰ نقطوں پر ڈھال (م یا فرما/فرلا) اور ضو ۱۲-۳ انصراف ما کو تقریبی طور پر ح کی رقوم میں معلوم کرنا ممکن ہے اور وہ

اس طرح کہ ثابت ہو ے ۵ سے جہاں فرلا اور ما دونوں صفر ہیں ۳ تک ڈھال اور انحراف کے مسلسل اضافے مفھ اور مفما معلوم کیے جائیں اور اگر ف کے متعلق صحیح قیاس کیا گیا ہو تو ۳ پر ما کی قیمت ا حاصل ہوگی۔ اگر ا سے زیادہ حاصل ہو تو معلوم ہوا کہ ف کی آزمائشی قیمت بہت زیادہ لی گئی۔ ایک آزمائشی قیمت اس سے کافی کم لیں تو ما کی آخری قیمت ا سے کم حاصل ہوگی۔ اگر ضرورت ہو تو مزید آزمائش کے ذریعے حقیقی قیمت کا نزدیک تر تقرب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہ مختلف مقداریں ترسیماً (باب ۷ کی طرح) حاصل ہوسکتی ہیں یا اس طرح کہ اضافوں کو ذیل کی جدول کی طرح ترتیب دیں اور جدول کے بازو کے ربط استعمال کریں۔

لا	آ	م/آ	مفھ	ھ	مفما	ما	
۰	آ۰	—	—	—	—	۰	مفلا = اول
اول	آ۱	—	—	—	—	—	م = ف (ا - ما)
۲ءل	آ۲	—	—	—	—	—	مفھ = م/آ مفلا
۳ءل	آ۳	م۳/آ۳	—	ھ۳	—	ما۳	مفما = ھ مفلا
وغیرہ							

مفھ اور ھ کی قیمتیں لا = اول، ۲ءل، ۳ءل، وغیرہ کے وسط کی تراشوں پر محسوب کی جاسکتی ہیں۔ کسی تراش مثلاً لا = ۲۵ءل پر مفھ محسوب کرنے کے لیے ھ کی مناسب قیمت ۲ءل پر کی ہوگی یعنی ف (ا - ی)، لا = ۲۵ءل پر ھ کی قیمت لا = ۳ءل پر مفما کی قیمت محسوب کرنے کے لیے منفعل ہوگی اور علی ہذالقیاس۔

ایک عددی مثال مصنف کے لکھے ہوئے ایک مضمون میں ملیگی

اور ایک اسی کے مشابہ طریقے کا بیان بیرآسٹو اور اسٹڈمن نے شائع کیا ہے۔
گاؤدم داب روکوں کے متعلق مزید معلومات ہوائیات (Aeronautics) کی مشیر کمیٹی کی رپورٹ نمبر ۳۴۳ اور ۳۶۳ میں ملینگی جو بارلنگ اور ولز کی لکھی ہوئی ہیں۔ نیز یہ کمیٹی کی رپورٹ بابتہ ۱۹۱۷-۱۸ء میں بھی مل سکتی ہیں۔

۱۰۷ ب۔ منقسم محوری بوجھ —— اگر محوری بوجھ ستون کے طول پر پھیلا ہوا ہو تو اس کا فاصل بوجھ انصرافی منحنی کی ایک شکل فرض کرنے سے اور اگر ضرورت ہو تو نتائج کی مسلسل تصحیح کرتے جانے سے حاصل ہوگا۔ اس تصحیح کا بیان دفعہ ۱۰۷ ا میں مختصراً سمجھایا گیا ہے۔ تفصیل اور مختص مثالیں مصنف کے لکھے ہوئے ایک مضمون میں ملینگی۔

۱۰۷ ج۔ پتلے نلواں داب روک یا کھم —— اگر کسی داب روک کی دیوار اس کے قطر کے مقابلے میں بہت پتلی ہو تو ناکارگی اس طرح واقع ہوسکتی ہے کہ یا تو زور نقطۂ مغلوبیت کو پہنچ جائے یا دیواروں میں مقامی لچکدار غیر قائمیت اور ناکارگی ایک موج کی شکل میں یا جھریوں کے طور پر پیدا ہو جن سے فصوص کا ایک سلسلہ بن جائے اور بوجھ اتنا نہ ہو کہ داب روک کے طول میں بحیثیت مجموعی جھکاؤ پیدا ہو۔ مختلف ریاضیاتی اور تجرباتی تحقیقاتوں سے معلوم ہوتا ہے کہ ناکارگی ان میں سے ایک وجہ سے ہوگی بشرطیکہ دیوار کی موٹائی کی نسبت نصف قطر کے ساتھ ایک مقررہ قیمت سے کم ہو جو شے کے طبعی خواص پر منحصر ہوتی ہے۔ فشاری زور کی وہ حدت جو دیوار میں جھریاں پیدا کر کے مقامی ناکارگی پیدا کرتی ہے ینگ کے مقیاس کے اور دیوار کی موٹائی اور نلی کے نصف قطر کی نسبت کے متناسب ہوتی ہے۔ نوٹ ۳۰۳

سوالات نمبر ۹

۱۔ ایک چھوٹے ڈھلے لوہے کے ستون پر جس کا بیرونی قطر ۹ انچ اور اندرونی قطر

Bairstow ^۱ Stedman ^۲ Barling ^۳ Wells ^۴

۵ انچ ہے۔ بوجھ ۱۲ ٹن ہے اور اس دھکیل کا محور تراش کے مرکز سے ½ انچ کے فاصلے پر سے گزرتا ہے۔ فشاری زور کی اعظم اور اقل حدت معلوم کرو۔

۲۔ ایک بندھن سلاخ میں جس کی گہرائی ۴ انچ اور چوڑائی ½۱ انچ ہے کھنچاؤ کا محور تراش کے مرکز سے ½ انچ کے فاصلے پر گزرتا ہے اور گہرائی کے وسط میں ہے۔ اس تراش پر تنشی زور کی اعظم اور اقل حدت معلوم کرو۔ مجموعی کھنچاؤ ۲۴ ٹن ہے۔

۳۔ ایک حالہ کا انتصابی ستون I تراش کا ہے جس کی گہرائی پیٹے کے متوازی ۲۵ انچ ہے، رقبہ ۲۴ مربع انچ اور کوروں کے متوازی ایک مرکزی محور کے گرد معیارِ جمود ۳۰۰۰ (انچ)^4 ہے۔ اگر ۱۰ ٹن کا ایک بوجھ ستون کی تراش کے مرکزِ ہندسی سے افقاً ۱۴ فٹ کے نیم قطری فاصلے پر اُٹھایا گیا ہو تو ستون میں فشاری اور تنشی زور کی اعظم حدتیں معلوم کرو۔

۴۔ اگر چنائی کے ایک استوانی ستون کا قطر ۳ فٹ ہو اور اس پر ہوا کا اُفقی دباؤ ۵۰ پونڈ فی فٹ بلندی ہو تو کامل لچک مان کر معلوم کرو کہ ستون کو کس بلندی تک تعمیر کیا جا سکتا ہے کہ قاعدے میں تناؤ نہ پیدا ہو۔ چنائی کا وزن ۱۴۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہے۔

۵۔ نرم فولاد کے ایک داب روک کا طول ۵ فٹ اور تراش T نما ہے جس کا رقبہ ۴.۷۷ مربع انچ اور اقل معیارِ جمود ۶.۰۷ (انچ)^4 ہے۔ داب روک کے سرے آزادانہ قبضہ دار ہیں۔ اگر کچل مضبوطی ۲۱ ٹن فی مربع انچ اور رینکن کے ضابطے میں مستقل ا کی قیمت $\frac{1}{7500}$ لی جائے تو داب روک کے لیے انتہائی بوجھ معلوم کرو۔

۶۔ سوال ۵ میں دی ہوئی تراش کے ساتھ داب روک کا زیادہ سے زیادہ طول معلوم کرو جو آزاد قبضہ دار سروں کے ساتھ ۴ ٹن فی مربع انچ تراش کا کامی بوجھ برداشت کر سکے۔ کامی بوجھ خم آور بوجھ کا ¼ ہو اور مستقل حسبِ سابق لیے جائیں۔

۷۔ ایک نرم فولاد کے کھم کا تراشی رقبہ [illegible] مربع انچ ہے اور اس کی

قلی شکل ۱۵۱ کے مطابق ہے - اقل گردشی نصف قطرہ ۰ء۳ انچ ہے - طول ۲۴ فٹ ہے اور دونوں سرے ثابت ہیں - رینکن کے ضابطے سے دفعہ ۱۰۲ کے مستقل استعمال کرکے خم آور بوجھ معلوم کرو۔

۸ - سوال ۷ کے ستون کے لیے انتہائی بوجھ اس صورت کے لیے معلوم کرو کہ ایک سرا ثابت اور ایک آزاد ہو۔

۹ - ایک ڈھلے لوہے کے ستون کے لیے شکستی بوجھ معلوم کرو جس کا بیرونی قطر ۸ انچ، اندرونی قطر ۶ انچ، طول ۲۰ فٹ اور سرے ثابت ہیں - رینکن کے مستقل استعمال کرو۔

۱۰ - نرم فولاد کے ایک داب روک کا کامی بوجھ معلوم کرو جس کا طول ۱۲ فٹ ہے اور جو $6'' \times 4'' \times \frac{1}{2}''$ کی دو T تراشوں سے مرکب ہے جن کے ۶ انچہ آڑے حصے پیٹھ سے پیٹھ ملا کر رکھے گئے ہیں، داب روک دونوں سروں پر ثابت ہے - کامی بوجھ رینکن کے ضابطے سے حاصل ہونے والے خم آور بوجھ کا $\frac{1}{4}$ لیا جائے۔

۱۱ - ایک فولادی داب روک کے لیے انتہائی بوجھ معلوم کرو جس کی تراش سوال ۱۰ کی طرح ہے، اور جس کا طول ۸ فٹ اور دونوں سرے آزادانہ قبضہ دار ہیں۔

۱۲ - ڈھلے لوہے کے ایک ستون میں دھات کی ضروری موٹائی معلوم کرو جس کا طول ۱۵ فٹ، بیرونی قطر ۹ انچ اور دونوں سرے ثابت ہیں اور جس کو ۵۰ ٹن کا بوجھ اٹھانا ہے - انتہائی بوجھ اس کا ۶ گنا رہے۔

۱۳ - ڈھلے لوہے کے ایک ستون کا بیرونی قطر معلوم کرو جس کا طول ۲۰ فٹ، دھات کی موٹائی ۱ انچ اور دونوں سرے ثابت ہیں - خم آور بوجھ ۴۸۰ ٹن ہونا چاہیے۔

۱۴ - سوال ۱ کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ ستون ۱۰ فٹ لمبا ہو، ایک سرا ثابت ہو اور دوسرا کامل جانبی آزادی رکھتا ہو۔ (ر = ۰۰۰ء۵ ٹن فی مربع انچ) صفحہ ۳۰۲

۱۵ - سوال ۵ میں رینکن کے ضابطے سے جو انتہائی بوجھ حاصل ہوتا ہے

وہ داب روک کے سروں پر کس خروج المرکز کے ساتھ عمل کرے (خروج المرکز اقل گردشی نصف قطر کی سمت میں اور T کے آڑے حصے کی طرف ہونا چاہیے) کہ سیدھے متجانس داب روک میں اس پورے بوجھ تک کال لچک تسلیم کرکے فشاری زور ۱۲ ٹن فی مربع انچ کو پہنچے۔ تراش کے مرکزِ ہندسی سے فشاری کنارے تک فاصلہ ۱۶۹۸ء انچ ہے۔ (سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

۱۶ ۔ سوال ۱۵ میں معلوم کیے ہوئے خروج المرکز اور ۱۶ ٹن فی مربع انچ تراش کے بوجھ کے ساتھ داب روک کا طول کتنا رکھا جاسکتا ہے کہ فشاری زور کی اعظم حدت ۲۱ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔ اس صورت میں زور کی اقل حدت کیا ہوگی۔ مرکزِ ہندسی سے تناؤ کے کنارے کا فاصلہ ۳۱۰۳۲ انچ ہے۔

۱۷ ۔ وہ بوجھ معلوم کرو جو سوال ۷ میں دی ہوئی تراش کے ۱۲ فٹ طول کے اور دونوں سروں پر آزادانہ قبضہ دار کھم میں انتہائی فشاری زور ۲۱ ٹن فی مربع انچ پیدا کریگا۔ تراش کی گہرائی اقل گردشی نصف قطر کی سمت میں ۱۶ انچ ہے اور تراش کے مرکز سے بوجھ کا انحراف ۱۶ انچہ گہرائی کی سمت میں ۱ انچ ہے۔ (سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

۱۸ ۔ سوال ۱۵ کا ستون کتنا بوجھ برداشت کریگا اگر ایک سرے پر ثابت ہو اور دوسرے پر پوری جانبی آزادی رکھتا ہو۔ ستون کا طول ۱۰ فٹ، لداؤ کا خروج المرکز ½ انچ اور اعظم تنشی زور ۸ ٹن فی مربع انچ لیا جائے۔ فشاری زور کی اعظم حدت کیا ہوگی۔ (سے = ۵۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

۱۹ ۔ نرم فولاد کے ایک داب روک کا ضروری قطر معلوم کرو جس کا طول ۵ فٹ اور دونوں سرے آزادانہ قبضہ دار ہیں اور جس کو ۱۲ ٹن کا دباؤ محور سے ⅒ قطر کے ایک ممکن انحراف کے ساتھ برداشت کرنا ہے۔ اعظم فشاری زور ۶ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے۔ (سے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ)۔

۲۰ ۔ سوال ۱۸ کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ انحراف ۱ انچ ہو۔

۲۱ ۔ فولاد کی ایک مدور سیدھی سلاخ جس کا طول ۵ فٹ اور قطر ۱ انچ ہے ایک افقی وضع میں رکھی گئی ہے اور سرے آزادانہ سہارے گئے ہیں۔ اگر دونوں سروں پر ۲۰۰۰ پونڈ کا ایک محوری دباؤ لگایا جائے تو سلاخ میں زور کی

انتہائی حدتیں معلوم کرو - فولاد کا وزن ۰٫۲۸ پونڈ فی مکعب انچ لیا جائے - (ے = ۳۰ × 10^6 پونڈ فی مربع انچ) -

۲۲ - معلوم کرو کہ گزشتہ سوال میں ۲۰۰۰ پونڈ کے دھکیل کا کتنا خروج المرکز سلاخ میں اعظم فشاری زور کو ممکنہ اقل قیمت پر لائیگا اور یہ زور کی حدت معلوم کرو -

۲۳ - ایک حرّاکہ ملاپ ڈنڈے کی تراش مستطیلی ۲½ انچ گہری اور ۱¼ انچ چوڑی ہے - سلاخ میں اعظم دھکیل کا اندازہ ۱۰ ٹن اور اعظم جمودی اور جاذبی بوجھ کا اندازہ ۱۷ پونڈ فی انچ طول ہے - ڈنڈے کا طول مرکزوں کے درمیان ۸ فٹ ۴ انچ ہے - کیلوں کی رگڑ کو نظر انداز کرکے ڈنڈے میں زور کی اعظم حدت کا تخمینہ کرو -

جوابات

سوالات نمبر ۱ (صفحہ ۵۲)

(۱) ۳٫۹۶ ٹن فی مربع انچ، ۱۳٫۰۰ ٹن فی مربع انچ، ۱٫۹۸ ٹن فی مربع انچ۔

(۲) ۲۰° ۵۴½′، ۲٫۶۲ ٹن فی مربع انچ، ۲٫۸۰ ٹن فی مربع انچ۔

(۳) ۳٫۲۷ ٹن فی مربع انچ، ۳٫۶۰ ٹن فی مربع انچ۔

(۴) ۰٫۰۳۱۸ انچ۔

(۵) ۲۳۲۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ، ۳٫۳۸۸۔

(۶) ۳٫۵ ٹن فی مربع انچ، ٫۸۶۶ ٹن فی مربع انچ، ۳٫۶۰ ٹن فی مربع انچ مستوی سے ۷۶° ۵′ کے زاویے پر۔

(۷) ۳۲٫۵° اور ۳٫۵۴ ٹن فی مربع انچ، یا ۷۲° اور ۲٫۲۷ ٹن فی مربع انچ۔

(۸) ۴٫۵۸ ٹن فی مربع انچ مستوی سے ۹٫۴۰°، ۴ ٹن فی مربع انچ۔

(۹) ۸٫۱۲ ٹن فی مربع انچ، مستوی کا عماد ۵ ٹن والے زور کے محور سے ۳۸° کا زاویہ بناتا ہوا۔

(۱۰) ۶٫۶۵ ٹن فی مربع انچ، مستوی کا عماد ۵ ٹن والے زور کے محور سے ۲۲½° کا زاویہ بناتا ہوا۔

(۱۱) ۴٫۸۲۸ ٹن فی مربع انچ تنشی اور تراش سے ۲۲½° بنانے والے مستوی پر۔

۲۸٫۸ ٹن فی مربع انچ فشاری اور تراشش سے ½ ۴۲° بنانے والے مستوی پر۔

(۱۲) ۴٫۱۶ اور ۳٫۱۶ ٹن فی مربع انچ۔

(۱۳) ۴٫۳۷۵ ٹن فی مربع انچ۔

(۱۴) $\frac{م^2 - م - ۱}{م(م - ۱)}$

(۱۵) $\frac{م^2 - ۱}{م^2}$

(۱۶) $\frac{۱}{۲۰۰۰}$ کا اضافہ۔

(۱۷) ۱۹۵۵۶ پونڈ فی مربع انچ (فولاد)، ۱۰۲۲۲ پونڈ فی مربع انچ (پیتل)، ۴۸٫۸۹ فی صدی۔

سوالات نمبر۲ (صفحہ ۱۱۳)

(۱) ۳۲٫۴ اور ۲۱٫۶ ٹن فی مربع انچ، ۲۳٫۱۵ فی صدی، ۱۳٫۲۰ ٹن فی مربع انچ۔

(۲) (ا) ۱۵٫۷۷ ٹن (ب) ۶٫۹۱ ٹن

(۳) ۱۰٫۲۹ ٹن فی مربع انچ۔

(۴) (ا) ہر ایک میں ۴۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ (ب) ۱۱۰۸۰ پونڈ فی مربع انچ (فولاد)، ۸۴۴ پونڈ فی مربع انچ (پیتل)، ۹۲٫۳ فی صدی۔

(۵) ۲٫۱۱ ٹن فی مربع انچ۔

سوالات نمبر۳ (صفحہ ۱۷۶)

(۱) ۴۱٫۰۳ انچ ٹن۔

(۲) ۶۲۰ انچ پونڈ۔

(۳) ۲۷۶۰ اور ۱۶٫۲۶ انچ پونڈ۔

(۴) ۸ ٹن فی مربع انچ ، ۰٫۰۴۳۸ انچ ، ۴٫۰۶ ٹن۔

(۵) (ا) ۵۵ ٹن ، ۴٫۰۷ مربع انچ (ب) ۲۵ ٹن : ۱٫۸۵ مربع انچ۔

(۶) ۵٫۴۶ ٹن فی مربع انچ۔

(۷) ۳٫۵۰ انچ۔

(۸) ۱۲٫۶۸ ٹن فی مربع انچ ، ۳۰ فی صدی زیادہ۔

سوالات نمبر ۴ (صفحہ ۲۱۷)

(۱) ۱۵۸ ٹن فٹ ، ۲۰ ٹن ، ۵۰ ٹن فٹ ، ۱۴ ٹن۔

(۲) ۲۶۵۰ پونڈ فٹ۔

(۳) ۸ ٹن فٹ ، بائیں سرے سے ۶ فٹ ، ۹٫۷۵ ٹن فٹ۔

(۴) بائیں سہارے سے ۱۰٫۹۵۸ فٹ ، ۱٫۸۸ ٹن فٹ ، ۸۷ ٹن فٹ۔

(۵) $\frac{۱}{۳۴}$ ل فٹ ، $\frac{و\,ل^{۲}}{۳۴۹}$ ٹن فٹ ، ۴٫۱۰ فٹ ، ۵٫۱۴ ٹن فٹ۔

(۶) ا سے ۶٫۷۱۱ فٹ۔

(۷) ا سے ۱٫۱۳ فٹ۔

(۸) ۳۲ اور ۴۰ ٹن فٹ ، سہاروں سے ۵٫۰۳ فٹ۔

(۹) سروں سے ۰٫۲۰۷ ل اور ۰٫۲۹۳ ل۔

(۱۰) ۶٫۴ ٹن فٹ ، ۵٫۰ ٹن فٹ ، بائیں سہارے سے ۹٫۴ فٹ ، دائیں سہارے سے ۴٫۷۴ فٹ۔

(۱۱) ۱۳ ٹن فٹ ، بائیں سہارے سے ۲٫۸۹ فٹ ، دائیں سہارے سے ۱٫۴۶ فٹ۔

(۱۲) ۴٫۸ ٹن فی مربع انچ۔

(۱۳) ۲۱۷٫۵ ٹن انچ۔
(۱۴) ۱۵٫۶۲۵ ٹن ، ۷٫۸۱۲ ٹن۔
(۱۵) ۹۳۷٫۵ فٹ ، ۲۵۳٫۲ ٹن انچ۔

سوالات نمبر ۵ (صفحہ ۲۸۹)

(۱) ۱۴۷۰ پونڈ فی مربع انچ ، ۶۰۹٫۵ فٹ۔
(۲) ۳$\frac{۱}{۲}$ انچ۔
(۳) ۱۳۱٫۱ انچ۔
(۴) ۱٫۴۱۴
(۵) ۱۲ فٹ۔
(۶) ۱۱۳٫۲۷
(۷) ۷ ٹن فی مربع انچ۔
(۸) ۲۱۷۵۰ پونڈ انچ۔
(۹) ۵٫۹۶ (انچ)^{۴}
(۱۰) ۴٫۵۷ انچ ، ۹۳۰ (انچ)^{۴} ، ۶۳۴۱٫۱ ٹن ، ۱٫۹۵ ٹن فی مربع انچ۔
(۱۱) ۱۴۳۷ پونڈ ، ۶۹۳۰ پونڈ فی مربع انچ۔
(۱۲) ٫۶۳ مربع انچ ، ۳۸۶ پونڈ۔
(۱۳) ۴٫۶۷ مربع انچ۔
(۱۴) ٫۵۶۵ مربع انچ ، ۱۴۵۸۰ پونڈ فی مربع انچ۔
(۱۵) ۳ مربع انچ ، ۱۸۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ۔
(۱۶) ۹۵۸۰ پونڈ فی مربع انچ ، ۱۰۳۰۰۰ پونڈ انچ۔
(۱۷) ۳۵۱۹۰۰ پونڈ انچ ، ۱۸۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ۔
(۱۸) ۱٫۸۶۷
(۱۹) ۵٫۸۰ ٹن فی مربع انچ ، ۳٫۹۳۔

(۲۱) ۴۳٫۶۸ ٹن فی مربع انچ تناؤ تراش سے ۵۳° ۴۴' پر ، ۲٫۶۰ ٹن فی مربع انچ تراش سے ۳۶° ۴۶' پر ۔
(۲۲) ۱۵٫۳۴ ٹن انچ ۔

سوالات نمبر ۶ (صفحہ ۳۵۶)

(۱) ٫۰۷۳ انچ ۔
(۲) ۴٫۹۶ ٹن ، ۴٫۷۴ ٹن فی مربع انچ ، ۷٫۹۴ ٹن ، ۳٫۷۹ ٹن فی مربع انچ ۔

(۳) $\frac{1}{384}\,\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{آ ے}}$ ، $\dfrac{\frac{\text{و}}{2}}{1+\frac{48\,\text{آ ے}}{\text{ص ل}^{3}}}$

(۴) فصل کے مرکز سے (تقریباً) ۳ انچ ، ٫۲۶۲ انچ ۔

(۵) $\frac{5}{2}$ و ، $\frac{7}{96}\,\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{آ ے}}$ ۔

(۶) $\frac{5}{16}$ و ، $\frac{5}{32}$ و ل ، $\frac{3}{16}$ و ل ، آزاد سرے سے $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ل ،
$\frac{1}{48\sqrt{5}}\,\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{آ ے}}$ ، ٫۲۰۳۸ و ۔

(۷) $\frac{19}{32}$ ۔

(۸) $\frac{1}{30}\,\frac{\text{و ل}^{4}}{\text{آ ے}}$ ۔

(۹) ٫۱۳۴ انچ ، ٫۱۴۸ انچ ، مرکز سے ۹٫۲۵ انچ ، ٫۱۴۸ انچ ۔
(۱۰) ۹٫۱۸ ٹن ، ۳٫۳ ٹن ۔
(۱۱) مرکز سے ۸٫۸ انچ ، ٫۳۴۲ انچ ۔
(۱۲) ۱۲٫۰۸۳ ٹن (مرکز) ، ۳٫۹۵۸ ٹن (سرے)

(۱۳) ء۳۱۴ ، ء۶۸

(۱۴) ء۲۹ ، ء۳۳۷ ، ء۶۴۴

(۱۵) $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۱۲}{۱۹}$

(۱۶) ء۰۱۸۶ انچ ، ء۲۲۴ انچ ، ء۰۱۸۱ انچ (اوپر وار) ، ۷۸ء۹ فٹ۔

(۱۷) ء۰۹۸۸ ، ء۰۷۳ انچ (اوپر وار) ، ء۴۰۹ انچ ، د سے ۴ء۱۶۳ فٹ بائیں طرف۔

(۱۸) ء۵۴۴ $\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{آ ے}}$ ۔

(۱۹) ۲ء۹۸ انچ۔

(۲۰) ء۰۲۴۱ $\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{آ ے}}$

(۲۱) ء۰۱۵۳ $\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{آ ے}}$

(۲۲) ۴ ، ء۴۰۹۶ انچ ، ۱۷۶ انچ۔

(۲۳) ۲ء۳۵ ٹن ، ۱۶ء۹۲ ٹن فی مربع انچ۔

سوالات نمبر ۷ (صفحہ ۴۱۸)

(۱) ۶ء۵۵ ٹن فی مربع انچ ، ء۱۵۲ انچ۔

(۲) $\frac{۱}{۳۰}$ و ل^{۲} ، $\frac{۱}{۲۰}$ و ل^{۲} ، $\frac{۳}{۲۰}$ و ل ، $\frac{۷}{۲۰}$ و ل ، مرکز سے ء۰۲۵ ل۔

(۳) $\frac{۲}{۹}$ و ل ، $\frac{۱}{۹}$ و ل ، $\frac{۵}{۶۴۸}$ $\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{آ ے}}$ ، $\frac{۱}{۱۶۲}$ $\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{آ ے}}$ ، سروں سے $\frac{۲}{۹}$ ل۔

(۴) $\frac{۲}{۲۷}$ ول ، $\frac{۴}{۲۷}$ ول ، $\frac{۷}{۲۷}$ و ، $\frac{۲۰}{۲۷}$ و ، $\frac{۵}{۱۲۹۶}\frac{\text{ول}^{۳}}{\text{آ ے}}$ ،
$\frac{۸}{۲۱۸۷}\frac{\text{ول}^{۳}}{\text{آ ے}}$ ، ہلکے سرے سے $\frac{۴}{۷}$ ل ، $\frac{۱۶}{۳۹۶۹}\frac{\text{ول}^{۳}}{\text{آ ے}}$ ،
ہلکے سرے سے $\frac{۲}{۷}$ ل اور $\frac{۴}{۵}$ ل -

(۵) ۲۲٫۰۲۵ ٹن فٹ (بایاں) ، ۱۹٫۳۷۵ ٹن فٹ (دایاں) -

(۶) $\frac{۱۱}{۱۹۲}$ ول^{۲} اور $\frac{۵}{۱۹۲}$ ول^{۲} ، بھاری سرے سے ٫۱۸۲ ل
اور $\frac{۱۳}{۱۸}$ ل ، بھاری سرے سے ٫۴۴۳ ل ، ٫۰۰۱۳۴ $\frac{\text{ول}^{۴}}{\text{آ ے}}$ -

(۷) ٫۱۱۰۸ ول ، ٫۱۳۹۲ ول ، ٫۰۰۷ $\frac{\text{ول}^{۳}}{\text{آ ے}}$ -

(۸) ٫۰۷۵۹ ول ، ٫۰۴۹۱ ول ، ٫۰۰۳۷ $\frac{\text{ول}^{۳}}{\text{آ ے}}$ -

(۹) ۰ ، $\frac{۱}{۱۰}$ ول^{۲} ، $\frac{۱}{۱۰}$ ول^{۲} ، ۰ ، $\frac{۴}{۱۰}$ ول ، $\frac{۱۱}{۱۰}$ ول ،
$\frac{۱۱}{۱۰}$ ول ، $\frac{۴}{۱۰}$ ول -

(۱۰) ۰ ، ۱۷۵ ٹن فٹ ، ۱۲۵ ٹن فٹ ، ۰ ، ۲۴٫۱۶ ٹن ،
۵۷٫۰۸۳ ٹن ، ۵۵ ٹن ، ۲۳٫۷۵ ٹن -

(۱۱) ب پر ۷٫۴۲۹ ٹن فٹ ، ج پر ۴٫۹۱۳ ٹن فٹ ، ا ، ب ،
ج ، د پر علی الترتیب ۳٫۴۵ ، ۷٫۳۴ ، ۶٫۳۹ ، ۳٫۸۲ ٹن -

(۱۲) (ا) ثابت سرے سے $\frac{۹}{۱۰۴}$ ول^{۲} ، $\frac{۱}{۱۳}$ ول^{۲} ، $\frac{۱۱}{۱۰۴}$ ول^{۲} ،
$\frac{۳۵}{۱۰۴}$ ول ، $\frac{۲۵}{۲۶}$ ول ، $\frac{۵۹}{۵۲}$ ول ، $\frac{۴۱}{۱۰۴}$ ول (ب) ہر ایک پر ۰ ،

$\frac{۱}{۱۲}$ ول۲ ، سروں پر $\frac{\text{ول}}{۲}$ و اندرونی سہاروں پر ول ۔

(۱۳) ا ، ب ، ج ، د پر علی الترتیب ۱۹۳ء۶ و ۱۶۶۱ء۵ و ۴۸۶ء۵ و . ٹن فٹ ، ۱۴۴ء۴ و ۶۰ء۳ و ۶۸۴۳ء و ۳ء۷۰۳ ٹن ۔
(۱۴) ۲۶۹۴ اور ۸ء۶۵ ٹن فٹ ، ۴ء۰۱ و ۵ء۶۰ و ۸ء۳۲ و ۳ء۰۷ ٹن ۔

سوالات نمبر ۸ (صفحہ ۴۴۸)

(۱) ۱۵۶۲۵ پونڈ فی مربع انچ ، ۸۱۵ء انچ پونڈ ۔
(۲) ۵ء۴۳ اور ۱۵ء انچ پونڈ ۔
(۳) $\frac{۱}{۲۴}$ $\frac{\text{ف}^۲}{\text{ے}}$
(۴) ۳ء۲ : ۱ ، ۱ : ۳ ۔
(۵) ۷۰ء۸ مکعب انچ ، ۱. ، ۸۵۴ء ٹن ، ۲ء۳۴ انچ ، ۲۷ فٹ انچ
(۶) ۴ء۷ فی صدی ۔

سوالات نمبر ۹ (صفحہ ۵۲۶)

(۱) ۱ء۹۳۶ اور ۸۴۴ء ٹن فی مربع انچ ۔
(۲) ۵ء۶ اور ۲ء۴ ٹن فی مربع انچ ۔
(۳) ۷ء۳۱۷ اور ۶ء۵۸۳ ٹن فی مربع انچ ۔
(۴) ۱۴ء۸۵ فٹ ۔
(۵) ۷ء۲۸ ٹن ۔
(۶) ۴ فٹ ۶ء۶ انچ ۔

(۷) ۹۸۹ ٹن ۔
(۸) ۳۵۴ ٹن ۔
(۹) ۳۲۴ ٹن ۔
(۱۰) ۳۶٫۶ ٹن ۔
(۱۱) ۱۲۱٫۳ ٹن ۔
(۱۲) ٫۴۸ انچ ۔
(۱۳) ۹٫۵ انچ ۔
(۱۴) ۲٫۴۴۱ اور ٫۳۳۹ ٹن فی مربع انچ ۔
(۱۵) ٫۳۰۹ انچ ۔
(۱۶) ۴۶٫۳ انچ ، ٫۳۴ ٹن فی مربع انچ ۔
(۱۷) ۷۷۰ ٹن ۔
(۱۸) ۱۹٫۰۶ ٹن ، ۵٫۴۲ ٹن فی مربع انچ ۔
(۱۹) ۲٫۲۷۵ انچ ۔
(۲۰) ۱۳٫۲ ٹن ، ۴٫۰۶ ٹن فی مربع انچ ۔
(۲۱) ۴۵۷۱ اور ۵۱۱ پونڈ فی مربع انچ فشار
(۲۲) ٫۰۳۰۸ انچ ، ۳۱۷۳ پونڈ فی مربع انچ ۔
(۲۳) ۶٫۸۱ ٹن ۔

فہرستِ اصطلاحات

مضبوطیٔ اشیاء۔ حصۂ اول

انگریزی	اُردو
A.	
"Age"	عمر
Aircraft	طیارہ سازی۔ ہوابازی
Alpha, Beta & Gamma iron	عہ بہ اور جہ لوہا
Annealed	تپا زمانا
Asymptote	متقارب
B.	
Bending moment	خمیدگی کا معیارِ اثر
Bessemer steel	بسیمر فولاد
Breaking load	شکستی فولاد
Bronze	کانسی
Buckling load	خم آور بوجھ
Built-in beam	وابستہ شہتیر
Built-up girder	ساختہ گرڈر
Bulb angle	گرہ دار زاویہ
C.	
Cantilever	برآمدہ بیرم
Collapsing load	تہدیمی بوجھ
Compressive stress	فشاری زور
Conjugate axes	مزدوج محور
Contraflexure	انعطاف۔ تعاکسِ خمیدگی
Core or Kernel	قلب
Corrosion	تآکل
Coupled wheel	ملاپہیہ۔ ملاپ پہیہ
Coupling hooks	جوڑک آنکڑے
Coupling rod	ملاپ ڈنڈا
"Creeping"	رینگنا
Crippling load	خم آور بوجھ
Crushing load	کچل بوجھ

انگریزی	اردو
D.	
Dead load	ساکن یا مُردہ بوجھ
Delta metal	ڈیلٹا دھات یا تردھات
Downward	نیچوار
Ductility	تمدّد
E.	
Eccentricity	خروج المرکز
Elongation	تطویل
Empirical	آزمائشی
Exponential relation	قوت نمائی ربط
Extensometer	امتداد پیما
F.	
Failure	ناکارگی
Fatigue	تھکن
Ferrous metal of alloy	آہنی دھات یا بھرت
Finish	تکمیل
Fixing couples	تثبیتی جفت
Flange	کور
Flexure	خم
Fluctuating stress	متغیر زور
Fluctuation	تغیر۔ اتار چڑھاؤ
Fluidity	سیالی۔ سیالیت
Fracture	شکستگی
Funicular Polygon	رسیمانی کثیر الاضلاع
G.	
Grit	موٹی ریت
Gross load	مجموعی بوجھ
Gusset plate	گلی تختی
H.	
Hardening	سختاؤ
Hysteresis	پسماندگی
I.	
Impact	تصادم
Ingot	کندا
Intensity of stress	زور کی حدّت
Internal Combustion engine	اندرونی احتراقی انجن
Isotropic	متساوی السموت
L.	
Lateral loads	جانبی بوجھ
Limiting stress	انتہائی زور
Link Polygon	کڑیوں کا کثیر الاضلاع
Live load	متحرک بوجھ یا وزن
Load	بوجھ۔ بار
Loading	لداؤ
Locomotive	حرّاکہ

اردو	انگریزی
	M.
متورق	Malleable
اعظم زور	Maximum stress
فلزنگاری	Metallography
نرم فولا	Mild steel
مقوّے	Millboard
اقل زور	Minimum stress
انشقاق کا مقیاس	Modulus of rupture
	N.
خالص	Net
تعدیلی سطح	Neutral surface
غیر آہنی بھرت	Non-ferrous alloy
تطبیع	Normalising
	O.
برآویختہ سرے	Overhanging ends
بیش فساد	Overstrain
	P.
مکافی شانے	Parabolic spandril
سکتے	Pauses
گوہرین	"Pearlitic"
جائز بوجھ	Permissible load
فاسفر کانسی یا نحاس	Phospher-bronze
کیل جوڑ	Pin-joint
گھائی	Pitch
سطح پیما	Planimeter
پیکر پذیری	Plasticity
نقاط انعطاف	Points of contraflexure
برداشتنی بوجھ	Proof load
برداشتنی بازگشتگی	Proof resilience
برداشتنی تنشی زور	Proof tensile stress
تھونی دار	Propped
گھل ملانے کی بھٹی	Puddling furnace
	R.
گردشی نصف قطر	Radius of gyration
متکافی انجن	Reciprocating engine
بازیابی	Recovery
متداخل زاویے	Re-entrant angles
بازگشتگی	Resilience
برقراری	Retention
تعاکسی حد	Reversal limit
	S.
نوشادر	Sal-ammoniac
دندانہ دار منحنی کنگرہ دار منحنی	Serrated Curve

انگریزی	اردو
Shearing stress	جزئی زور
Sinking Prop	دھسان تھونی
Slag	خُبث ۔ تیل
Spandril	کمان شانہ
"Squirting"	پچکارنا
Stainless steel	بے داغ فولاد
Strain	فساد
Strain-hardening	فساد سختائی
Stress	زور
Structural strut	تعمیری داب روک
Strut	داب روک
Subsidence	دھسن
T.	
Tempering	آب دینا
Tenacious	مستحکم
Tenacity	تنشی استحکام
Tensile strain	تنشی فساد
Testing machine	امتحانی مشین جانچ کل یا مشین
Thrust	دھکیل ۔ دباؤ
Tie-bar	بندھن سلاخ

انگریزی	اردو
Tool steel	اوزاری فولاد
Transverse curvature	عرضی انحنا
Treatment (of gun metal)	(توپ فولاد کا) عمل تیاری
Tubular section	نلی نما تراش
U.	
Uniformly distributed load	یکساں منقسم بوجھ
Upward	اوپر وار
V.	
Vector polygon	سمتی کثیر الاضلاع
Vertical web	انتصابی پیٹا
W.	
web	پیٹا
Welding	تپا جوڑنا
Working load	کامی بوجھ
Y.	
Yielding	مغلوبیت
Yield point	نقطۂ مغلوبیت

اشاریہ

مضبوطیٔ اشیاء۔ حصۂ اول

پہلا باب تا نواں باب

اغلاط نامہ

مضبوطیٔ اشیاء (حصۂ اول)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۲	۵	پٹوان	پٹواں
۱۶	آخر سطر حاشیہ	Poissons	Poisson's
۱۹	شکل ۱۲		ف۲ اوپر کی طرف
۳۰	۱۷	"مور"	"موڑ"
۳۸	شکل ۲۱	ف	ف۳ دائیں طرف
۴۴	فٹ نوٹ	یٓ	بٓ
۵۸	۲۴	موک	ھوک
۷۶	شکل ۳۱	پٹوان	پٹواں
۸۵	″	ممنوں	ٹنوں
۸۷	شکل کے نیچے	۰٫۰۳	۰٫۰۲
۱۰۰	۲	تکستگی	شکستگی
۱۳۸	فٹ نوٹ	Unwirn	Unwin
۱۴۳	″		(Pearlitic)لے
۱۴۸	۱۰	دلچپسی	دلچسپی
۱۶۰	زیر حاشیہ	Spangenbery	Spangenberg
۱۶۷	حاشیہ	صفحہ ۱۶	صفحہ ۹۹
۱۷۶	۱۵	سلاخ	سلاخ کی
۱۸۲	شکل ۵۹	م۱ + و۰ لا	م۱ = و۰ لا
۱۸۳	″ ۶۱	ق۱ + ولا	ق۱ = ولا
۱۸۹	″ ۶۸		√(ل۲ ۔ (س/۲)۲)
۲۷۳	″ ۱۰۵		م/آ
۲۸۶	″ ۱۰۸	م ۲٫۸	م ۳٫۸
۳۱۰	″ ۱۱۴		و
۳۲۰	آخری سطر	جائے	جائے اور
۳۲۱	حاشیہ	صفحہ ۱۸۱	صفحہ ۱۸۷
۳۲۲	شکل ۱۱۶ کے نیچے	ح	ج

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۲۲	شکل ۱۱۷	۲ ٹن	۳ ٹن	۴۲۴	۸	۲۶ مر۲	۳۶ مر۳
۳۲۶	۶	مدکورہ	مذکورہ	۴۶۵	۱۸	Civll	Civil
۳۳۱	۵	لاعو	لاعم	〃	۲۲	ک	گ
۳۳۲	۱۹		۱/۲ و	۴۶۶	۱۵	کولوں	کونوں
۳۳۳	شکل ۱۳۰	و۲	و۲	۴۶۹	۲۵	اور لا	اور لا
〃	،	طہ	طہ	۴۷۳	۱۸	۳،۴۲۲	۳،۴۲۲
۳۴۱	۸	م ن، ف۱ ق	م ن ف۲ ق	〃	۲۲	۲،۱۷	۲،۱۷
۳۴۳	۱۱	سمتوں	سمتیوں	۴۸۸	آخری سطر	۳ س	۲ س
۳۴۶	۱	تکملیوں	تکملوں	۴۹۷	〃		(۱۰ ر)
۳۴۸	۵	= ۱۶ ول۲ / ۲ ے	= ۱۶ ول۲ / آ ے	۴۹۸	۱۳	ف ب = ف/ر = ک	ف ب = ف/ر = ف
۳۵۱	۳	و / ۲ ے	و / آ ے	۴۹۹	۶	گ ۲ ے	گ۲ ے
۳۵۴	۹	ابتداء	ابتدا،	〃	۸	لیعنے	یعنے
۳۶۶	۹	آ ے ـ صہ	آ ے ۔ صہ	۵۰۲	زیر حاشیہ	P. H. Smith	R. H. Smith
۳۸۱	شکل ۱۳۹	۲/۹۴ ول	۳/۹۴ ول	۵۰۳	شکل نمبر ۱۵۱		آئیلر
〃	۸	او ج	ا د ج	۵۰۴	۱۱	فا	ف
۴۱۵	شکل ۱۳۷	دوسری مہ/۱۲	مہ/۱۱	۵۰۶	۱۳ و ۱۴	ھ	ھ۱
〃	〃	گ	گت۱	۵۱۹	۱۵	جانی	جانبی
〃	،	آخری مر	مر/آ	۵۲۲	۸	حزلکے	حز۲ اکے
				۵۲۵	۱۱	اول	اول