UNIVERSAL
LIBRARY
OU_220436
UNIVERSAL
LIBRARY

*

530.1 L36R V2
Laue, Max. von.
Relativitätstheorie V1
1921, V2 1923.

25-4-46 P 40

OUP—24—4-69—5,000

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No. 530.1 L36R Accession No. 17470

Author Laue Dr M Von.

Title Relativitäts theorie

This book should be returned on or before the date last marked below.

Vol II.

2 JUL 1971

DIE WISSENSCHAFT

Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik

Herausgegeben von Prof. Dr. EILHARD WIEDEMANN

BAND 68

Die Relativitätstheorie

Von

Dr. M. von Laue

Prolessor Mir theoretische Physik an der Universitat Merlin

Zweiter Band:

Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft

Zweite umgearbeitete Auflage

Mit 25 Abbildungen

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.

1923

Die Relativitätstheorie

Von

Dr. M. von Laue
Professor für theoretische Physik an der Universitat Berlin

Zweiter Band:
Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft

Zweite umgearbeitete Auflage

Mit 25 Abbildungen



Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
1923

Alle Rechte vorbehalten

Copyright, 1923. by Friedr. Viewep & Sohn Akt.-Ges., Braunochweig, Germany

Vorwort.

Bewundert viel und viel gescholten — so steht die allgemeine Relativitätstheorie heute da. Die lautesten Schreier auf beiden Seiten haben dabei gemeinsam, daß sie von ihr herzlich wenig verstehen. Und doch, gibt es irgend einen Zweig der Wissenschaft, dem man nicht mit Redensarten, sondern nur mit harter Arbeit beikommt, so ist es diese Theorie. Wir widmen unser Buch denen, die sich ihr Verständnis erarbeiten wollen.

Es gibt schon eine ganze Reihe guter, zum Teil vortrefflicher Bücher über unseren Gegenstand. Wir erwähnen von populären Darstellungen neben Einsteins bekannter Schrift die wohlgelungene Arbeit von F. Kirchberger („Was kann man ohne Mathematik von der Relativitätstheorie verstehen", Karlsruhe 1921), von mathematischen das hochbedeutende Werk von H. Weyl („Raum, Zeit, Materie", Berlin 1921) und von philosophischen das glänzend geschriebene Buch von E. Cassirer („Zur Einsteinschen Relativitätstheorie", Berlin 1921). Aber von einem Physiker gibt es bisher kein streng wissenschaftliches Buch von einiger Vollständigkeit darüber; und wir möchten meinen, daß nur ein Physiker die Schwierigkeiten ganz nachempfinden und zu beheben wenigstens versuchen kann, welche die große Mehrzahl seiner Eachgenossen zurzeit noch von der allgemeinen Relativitätstheorie fernhält. Diese Schwierigkeiten liegen bei einer Gruppe zum Teil sehr bedeutender Männer, die in Lenard ihren Wortführer gefunden hat, in den gedanklichen Grundlagen der neuen Theorie. Sie stehen ihnen mit

Empfindungen gegenüber, welche man nicht unpassend mit Goethes Abneigung gegen die Newtonsche Optik verglichen hat. Die meisten wissen sich aber dieser Theorie gegenüber keinen bestimmten Standpunkt zu sichern, weil sie ihr mangels hinreichender Bekanntschaft mit nicht-euklidischer Geometrie und der zugehörigen Tensorrechnung nicht nahe genug zu kommen vermögen. Und gerade den letzteren möchte dies Buch helfen. Es möchte ihnen in Teil III die mathematischen Hilfsmittel zusammenstellen, welche dem Physiker im allgemeinen hierzu fehlen, weil er sie bisher in seiner Wissenschaft nicht brauchte. In Teil IV gehen wir über dies unmittelbare Ziel sogar noch etwas hinaus, indem wir Teile der nicht-euklidischen Geometrie vortragen, welche für die angestrebte physikalische Anwendung nicht unmittelbar erforderlich wären. Aber wir dachten dabei an den Satz, daß man von einer Sache eigentlich zu wenig weiß, wenn man gerade nur das weiß, was man unbedingt braucht. Auch steht es ja dem Leser frei, diesen Teil zu überschlagen.

In den späteren, physikalischen Teilen haben wir besonderen Wert auf die Beispiele zur Theorie gelegt, namentlich auf diejenigen, bei denen man die Gleichungen des Schwerefeldes streng lösen kann. Denn ohne solche Beispiele kann man sich in keine Theorie wirklich einleben. Doch konnten wir dabei nicht so weit gehen, daß wir nun die ganze vorhandene Literatur ausgeschöpft hätten. Manche Arbeiten, zum Teil recht wertvolle, konnten wir nur kurz anführen. Immerhin hoffen wir, den Leser so weit zu geleiten, daß er nun zum Studium der einschlägigen Originalarbeiten gerüstet ist.

Wie es sich gehört, haben wir uns bemüht, das mathematische Gewand der Theorie möglichst elegant zu gestalten. Und uns hat dabei ein Ausspruch, den man Boltzmann zuschreibt, man solle die Eleganz den Schneidern überlassen, nicht stören können. Denn sie hat ihren Wert; sie erst macht eine Theorie übersichtlich, und damit eigentlich erst für Forschung und Lehre verwendbar. Trotzdem wird der Leser in Teil V

eine Reihe von Gleichungen mit recht unschönen Minuszeichen bemerken. Wir haben das in dieser Auflage nicht mehr ändern können; denn als wir die Wurzel des Übels erkannten, war der Druck schon zu weit vorgeschritten. Sie liegt in dem Vorzeichen der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k,$$

wie Einstein es eingeführt und bisher wohl alle Autoren benutzt haben. Danach ist $d\tau^2$ für raumartige Linienelemente negativ. Dies zwingt nämlich, in den Zusammenhang der Viererkraft F mit dem Raumvektor $\mathfrak{F}$ der Kraftdichte ein Minuszeichen einzuführen, je nach Wahl entweder bei den kontravarianten oder bei den kovarianten Komponenten. Beides hat unangenehme Folgen. Wir haben uns für die erstere Möglichkeit entschieden und dies folgerichtig durchgeführt. Eine gründliche Abhilfe ist nur durch Änderung des Vorzeichens der Maßbestimmung möglich; wir beabsichtigen, sie bei der ersten Gelegenheit vorzunehmen.

Wieweit das Buch seine Zwecke erreicht, darüber muß natürlich der Leser urteilen. Wir wären von ihnen aber gewiß weiter entfernt geblieben, als es der Fall ist, hätten wir uns nicht der Unterstützung einer Reihe bedeutender Mathematiker zu erfreuen gehabt. Vor allem hat D. Hilbert die Ausarbeitung seiner Vorlesung über die Grundlagen der Physik zur Verfügung gestellt, aus der sehr viel in unser Buch übergegangen ist. Anhang I ist aus einem Brief von F. Schur hervorgegangen. Sonst habe ich mich vielfach des Rates von L. Bieberbach, G. Hamel und besonders E. Hilb bedienen können. Ich möchte den genannten Kollegen auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

In Herrn Max Gut (jetzt in Zürich) fand ich einen Korrektor, welcher nicht nur den Druck, sondern auch die ganze Darstellung einer höchst sorgfältigen, in jede Einzelheit eindringenden Durchsicht unterzog.

Als Einstein die Feldgleichungen der Schwere gefunden hatte, schrieb er einmal an Sommerfeld: „Sie werden von der Theorie überzeugt sein, wenn Sie sie studieren." Der Verfasser dieses Buches stand ihr anfangs recht skeptisch gegenüber und begann deswegen erst recht spät mit der Arbeit an ihm. Aber je mehr er sich in sie hineindachte, um so mehr hat er von dieser ihr innewohnenden Überzeugungskraft empfunden — trotzdem er auch jetzt noch der Ansicht ist, daß diese Theorie bisher weder eine so sichere Bestätigung an der Erfahrung noch eine solche innere Geschlossenheit gefunden hat, wie die beschränkte Relativitätstheorie damals, als er den ersten Band schrieb. Dies Buch ist keine Reklameschrift; und doch wollen wir den Wunsch nicht verhehlen, daß die Theorie auch in der vorliegenden Fassung etwas von dieser Überzeugungskraft auf den Leser ausüben möge.

Berlin, Mai 1921.

Dr. **M. v. Laue.**

Vorwort zur zweiten Auflage.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage hat sich an der allgemeinen Relativitätstheorie und dem Maße ihrer Anerkennung nicht viel geändert; nur ist die mathematische Literatur darüber wesentlich bereichert und, was uns wichtiger erscheint, die Beobachtungen, welche für Einsteins Rotverschiebung der Spektrallinien sprechen, haben sich vermehrt. Trotzdem ist die zweite Auflage gründlich umgearbeitet; wie der Verfasser meint, aus vertieftem Verständnis heraus. Das zeigt sich zwar nicht in der Anlage des Ganzen, wohl aber in recht vielen Einzelheiten.

Einmal ist, um nur einiges hervorzuheben, der Schönheitsfehler im Vorzeichen der Maßbestimmung beseitigt, auf den wir im Vorwort der ersten Auflage hinwiesen. Sodann ist die Tensoranalysis (§ 9) neu aufgebaut auf die Begriffe der ko- und der kontravarianten Differentiation und durch Einführung der „Wellenausdrücke" in dem neu eingefügten §11 erweitert, deren Wert sich bei der Integration der Maxwellschen Gleichungen zeigt. Beide Änderungen sind auf Rat von Herrn Dr. W. Gordon und unter Benutzung einer demnächst erscheinenden Arbeit von ihm eingeführt. Die wichtigste Änderung aber dürfte in der Aufnahme von Einsteins kosmologischen Ideen (§ 27) liegen, die schon vorher durch Einführung des λ-Gliedes in die Feldgleichungen der Schwere vorbereitet wird.

Allen Fachgenossen, welche den Verfasser auf Mängel der ersten Auflage aufmerksam gemacht oder sonst durch ihren Rat gefördert haben, sei auch hier sein Dank ausgesprochen.

Berlin, Dezember 1922.

Dr. **M. v. Laue.**

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort V
Inhaltsverzeichnis IX

I. Unser empirisches Wissen und die bisherigen Theorien über die Schwerkraft.

§ 1. Die Erfahrungstatsachen 1
§ 2. Die älteren Theorien der Schwere 12

II. Die allgemeine Relativitätstheorie.

§ 3. Das allgemeine Relativitätsprinzip 17
§ 4. Die Notwendigkeit nicht-euklidischer Geometrie 25
§ 5. Der Ausdruck für das Linienelement im Drei- und im Vierdimensionalen 32

III. Weltvektoren und -tensoren in a Riemannschen Räumen.

§ 6. Vektor- und Tensorulgebra 37
a) Kontravariante und kovariante Koordinaten 37
h) Vektoren 40
c) Tensoren zweiten Ranges 41
d) Der Tensor der Maßbestimmung und die allgemeine lineare Koordinaten transformation 45
e) Tensoren höheren Ranges 47
f) Vollständig antisymmetrische Tensoren 51
g) Übergang zur Maßbestimmung $ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx^i\, dx^k$ mit veränderlichen Koeffizienten 58
h) Der Übergang von Welt- zu Raumtensoren 59
§ 7. Geodäsie in Riemannschen Räumen 62
a) Die geodätischen Linien 62
b) Beispiele 65
c) Nullinien 68
d) Die Transformation der Drei-Zeiger-Symbole 69
e) Die g-Klammern und die Determinante g 70

Seite

§ 8. Die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen . . . 72
a) Riemannsche Koordinaten 72
b) Die Parallelverschiebung eines Vektors 77
§ 9. Vektor- und Tensoranalysis 80
a) Ko- und kontravariante Differentiation 80
b) Divergenzbildungen 84
c) Rotationsbildungen 88
d) Wiederholung der ko- und kontravarianten Differentiation . 86
e) Integralsätze 88
f) Gaußsche Koordinaten 89
§ 10. Der Riemann-Christoffelsche Tensor 90
a) Endliche Parallelverschiobungen 90
b) Ein Kreisprozeß 91
c) Das invariante Kennzeichen der euklidischen Geometrie . . 93
d) Die kovarianten Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors 95
e) Der Tensor $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ ist divergenzfrei 98
f) Die Sonderstellung des Riemann-Christoffelschen Tensors 99
§ 11. Fortsetzung der Tensoranalysis 103

IV. Die einfachsten nichteuklidischen Geometrien.

§ 12. Einiges über Flächentheorie 108
a) Das invariante Krümmungsmaß 108
b) Die „Parallelverschiebung" auf krummen Flächen 111
c) Flächen konstanten Krümmungsmaßes 115
d) Polarkoordinaten 118
e) Sphärische Flächen und elliptische Geometrie der Ebene . . 120
f) Die pseudosphärischen Flächen 128
§ 13. Die Cayleyeche Maßbestimmung 124
a) Die hyperbolische Geometrie der Ebene 125
b) Die elliptische und die euklidische Geometrie der Ebene . . 183 -
c) Elliptische und hyperbolische Geometrie im Raum 134

V. Die Grundgesetze der Physik in der allgemeinen Relativitätstheorie.

§ 14. Allgemeine Bemerkungen 139
§ 15. Das elektromagnetische Feld 146
a) Die Maxwellsehen Gleichungen 146
b) Folgerungen 15o
c) Die Spannungen 155
§ 16. Die Grundgleichung der Dynamik und der freie Fall 158
a) Die Weltlinie des freien Körpers 158
b) Abstreifung der Voraussetzung der Spannungsfreiheit . . . 160
c) Maßbestimmung und Schwerefeld 161
d) Die Transformation der Feldkomponenten 163

Seite

e) Die „Zentrifugalkraft" 164
f) Die Mitwirkung anderer Kräfte 165
§ 17. Die Erregung des Schwerefeldes durch die Materie und seine Spannungen 168
a) Die Differentialgleichungen des Schwerefeldes 168
b) Die Erhaltungssätze 170
c) Die Erhaltung der Energie und des Impulses 174
d) Die Trägheit der Energie 178

TL Anwendungen der Grandgesetze auf besondere Fälle.

§ 18. Statische Felder 180
a) Die Koordinatenwahl 180
b) Die *g*-Klammern und der Krümmungstensor des statischen Schwerefeldes 181
c) Elektrostatik 187
d) Die Erhaltung der Sehwingungszahl des Lichtes bei der Fortpflanzung 187
§ 19. Die Planetenbewegung und die Rotverschiebung der Spektrallinien 189
a) Die Newtonsche Theorie der Planetenbewegung als Näherung 189
b) Die Veränderlichkeit der Masse im Schwerefeld 191
c) Die Rotverschiebung der Spektrallinien 192
d) Zahlenangaben 193
§ 20. Weitere genäherte Lösungen der Feldgleichungen 193
a) Über eine Variation der g_{ik} 193
b) Die Wellengleichung als Folge der Feldgleichungen 195
c) Ebene Schwerewellen 197
d) Ein Beispiel für uneigentliche Wellen 199

VII. Strenge Lösungen der Feldgleichungen in Einsteins Theorie der Schwere.

§ 21. Das Prinzip der kleinsten Wirkung 202
a) Für den materiefreien Raum 202
b) Einführung der Invarianten *R* 203
c) Die Variationsprinzipe bei Anwesenheit von Materie 205
d) Die Funktion *M* für das elektromagnetische Feld 206
§ 22. Das Schwerefeld des ruhenden Massenpunktes 209
a) Der Maßtensor 209
b) Erörterung der Formel (200) 214
c) Die geodätischen Linien 217
§ 23. Die Perihelbewegung des Merkur 218
§ 24. Lichtstrahlen im Schwerefeld des Massenpunktes 224
§ 25. Das Schwerefeld in einer Flüssigkeitskugel 228
§ 26. Das Schwerefeld der elektrischen Punktladung 235
a) Die Maßbestimmung 235
b) Erörterung der Maßbestimmung 237

VIII. Weiterbildung der Relativitätstheorie.

scite.

§ 27. Die Einführung des λ-Gliedes in die Einsteinschen Feldgleichungen . . . 239
a) Einsteins sphärischer Kosmos . . . 239
b) Ableitung der Maßbestimmung (243) aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung . . . 241
c) Rechtfertigung der Maßbestimmung (243) aus den Differentialgleichungen des Schwerefeldes . . . 242
d) Die Lösungen der Feldgleichungen von de Sitter und Weyl 244
e) Vereinigung der Lösungen von Einstein und Weyl . . . 246
f) Die astronomischen Folgerungen, die sich aus den Maßbestimmungen (243) und (250) ziehen lassen . . . 248
g) Die Erhaltungssätze . . . 250
§ 28. Mies Theorie der Materie in der beschränkten Relativitätstheorie 254
§ 29. Mies Theorie der Materie in der allgemeinen Relativitätstheorie 261

Anhang.

Anhang I (zu § 5) . . . 266
Anhang II (zu § 5) . . . 268
Anhang III (zu § 8a) . . . 270
Anhang IV (zu § 10) . . . 272
Literatur . . . 278
Zusammenstellung der Hauptformeln . . . 285

I. Unser empirisches Wissen und die bisherigen Theorien über die Schwerkraft.

§ 1. Die Erfahrungstatsachen.

Es gibt in der Außenwelt wenige so auffällige Tatsachen, wie die Schwere; darum spielt sie auch schon in den Anfängen der wissenschaftlichen Physik eine große Rolle. Obwohl eigentlich ein Fremdkörper in der klassischen Dynamik — sie steht ihr nicht näher als etwa die elektrodynamischen Kräfte —, gilt sie seit Galilei und Newton immer als das Musterbeispiel einer Kraft, und der historische Zusammenhang ist ein so enger, daß der schönste Beweis für die klassische Dynamik, die so gut wie vollständige Deutung der Planetenbewegung, zugleich den Beweis des Newtonschen Anziehungsgesetzes mit enthält. Unter dem Newtonschen Anziehungsgesetz aber verstehen wir hier nicht nur, daß die Schwerkraft K zwischen zwei Blassenpunkten von den trägen Massen m_1 und m_2 in ihrer Verbindungslinie liegt und dem Quadrat des Abstandes r_{12} umgekehrt proportional ist, sondern auch den Satz, daß in der Gleichung

$$K = C \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Konstante C den von der Beschaffenheit der beiden Körper (der chemischen Zusammensetzung, dem Aggregatzustand, der Temperatur, der elektrischen Ladung usw.) völlig unabhängigen, universellen Wert

$$C = 6{,}675 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{g^{-1} \cdot cm^3 \cdot sec^{-2}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

hat Man kann von den trägen Massen die schweren Massen M_1 und M_2 unterscheiden, die aus der Gleichung

$$K = \frac{M_1 M_2}{r_{12}^2}$$

zu definieren wären, ähnlich wie man aus dem Coulombschen Gesetz die Elektrizitätsmenge definiert. Daß dann beide Massen für jeden Stoff in dem gleichen Zusammenhang

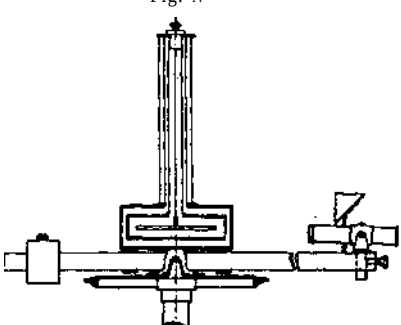
$$M = \sqrt{C}\, m$$

miteinander stehen, bezeichnen wir als den Satz von der Äquivalenz der trägen und der schweren Masse.

Über das Newtonsche Anziehungsgesetz war die physikalische Forschung einschließlich der astronomischen Beobachtung bis vor kurzem nicht hinausgekommen. Nur hat der Laboratoriumsversuch den Äquivalenzsatz mit immer größerer Genauigkeit geprüft und z. B. auch die Frage im Sinne der Verneinung entschieden, ob bei einem Kristall die Schwerkraft nach verschiedenen Richtungen verschieden wirkt. Bei der grundlegenden Wichtigkeit des genannten Satzes wollen wir auf seine Bestätigungen etwas näher eingehen.

Als ersten, aber recht rohen Beweis dafür hat man stets das gleich rasche Fallen aller Körper im luftleeren Raum angeführt. Schon Newton verbesserte ihn, indem er statt des freien Falls den Fall auf einer Kreisbahn, also die Pendelschwingungen heranzog. Im 19. Jahrhundert hat Bessel diese Versuche zu großer Vollendung gebracht und gezeigt, daß etwaige Schwankungen in dem Verhältnis C der trägen und schweren Masse von Stoff zu Stoff sicher unter einem 60 000tel seines Wertes liegen. Der Sonderstellung der radioaktiven Körper wegen hat Southerns[1]) 1910 Uranoxyd auf diese Art untersucht, ohne dabei etwas anderes zu finden. Die bei weitem besten Versuche aber verdanken wir Eötvös[2]) und Zeeman[3]), welche die Torsionswage benutzten.

Fig. 1.

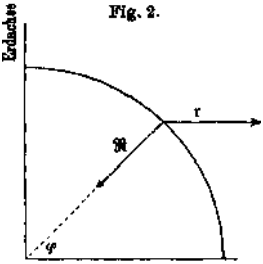


Bei diesem Apparat trägt ein feiner, am einen Ende aufgehängter Faden einen zu ihm nahezu senkrechten Balken; er hält ihn in der Mitte (Fig. 1). Die Torsionselastizität des Fadens bestimmt seine Ruhelage. An den Enden des Balkens sind die Körper befestigt, welche man in ihrem Verhältnis $M/m = \alpha$ vergleichen will. Ruht der Apparat gegen die Erde, so wirkt auf den ersten Körper die Schwerkraft

$$\mathfrak{K}_1 = M_1 \gamma \mathfrak{R},$$

wobei γ den absoluten Betrag der Kraft bedeutet, die ein Körper gleicher Art von der schweren Masse 1 erfährt und R den Einheits-

vektor in der Richtung vom Beobachtungsort zum Erdmittelpunkt (Fig. 2); sodann wirkt auf ihn die Zentrifugalkraft als Folge der täglichen Drehung der Erde, und sie berechnet sich aus der trägen Masse m_1 der Drehungsgeschwindigkeit ω und dem Halbmesser a der Erde, der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes und dem senkrecht von der Erdachse zum Beobachtungsort weisenden Einheitsvektor $\mathfrak{r}$ nach der Gleichung:



$$\mathfrak{K}_1' = m_1 a \omega^2 \cos\varphi \,.\, \mathfrak{r}.$$

Auf den anderen Körper wirken die Kräfte:

$$\mathfrak{K}_2 = M_2 \gamma \mathfrak{R},$$
$$\mathfrak{K}_2' = m_2 a \omega^2 \cos\varphi \,.\, \mathfrak{r}.$$

M_1 und M_2 und ebenso m_1 \und m_2 sind jedenfalls sehr nahe einander gleich. Die Schwerpunkte beider Körper aber stehen vom Drehpunkt des Wagebalkens ab um die Vektoren $\pm \mathfrak{b}$. Das Drehmoment der vier Kräfte um diesen Punkt ist dann:

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{K}_1' - \mathfrak{K}_2']$$
$$= \gamma (M_1 - M_2) [\mathfrak{b}\,\mathfrak{R}] + a\omega^2 \cos\varphi (m_1 - m_2) [\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}].$$

Andererseits muß die Spannung des Fadens, die in seiner eigenen Richtung liegt, die Summe dieser Kräfte aufheben. Der Einheitsvektor, welcher in der Fadenrichtung nach unten weist, ist somit:

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'}{|\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'|} = \frac{\gamma (M_1 + M_2)\mathfrak{R} + a\omega^2 \cos\varphi (m_1 + m_2) \,.\, \mathfrak{r}}{|\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'|}$$

und nach den Rechnungsregeln α, β, γ *) hat das Drehmoment in derselben Richtung die Komponente

$$(\mathfrak{N}\mathfrak{F}) = \frac{\gamma a \omega^2 \cos\varphi (M_1 + M_2)(m_1 + m_2)}{|\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'|} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) (\mathfrak{b}, [\mathfrak{r}\mathfrak{R}])$$

Hier setzen wir nun $M_1 = \alpha_1 m_1$, $M_2 = \alpha_2 m_2$. Ist $\alpha_1 = \alpha_2$, so ist die berechnete Komponente von $\mathfrak{N}$ gleich Null. Entwickeln wir nach steigenden Potenzen von $\alpha_2 - \alpha_1$, so finden wir in erster Näherung

$$(\mathfrak{N}\mathfrak{F}) = \frac{\gamma (m_1 + m_2)^2 a \omega^2 \cos\varphi}{2|\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'|} (\mathfrak{b}, [\mathfrak{r}\mathfrak{R}]) (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Innerhalb dieser Näherung kann man dann unter Einführung des Mittelwertes α von α_1 und α_2 und unter Vernachlässigung von Gliedern mit ω^4, ω^6 usw. den Nenner gleich

$$2\gamma (M_1 + M_2) = 2\alpha (m_1 + m_2) \gamma$$

*) Zitiert nach Bd. I.

setzen, woraus dann

$$(\mathfrak{N}\,\mathfrak{F}) = \frac{m_1 + m_2}{2}\, a\,\omega^2 \cos\varphi\,(\mathfrak{b}, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}])\,\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$$

folgt. Dieser Ausdruck hat seinen größten Wert, wenn b auf der Ebene der Einheitsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{N}$ senkrecht steht, und zwar ist dann nach Fig. 2:

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{b}\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}]) &= \pm|\mathfrak{b}|\sin\varphi, \\ (\mathfrak{N}\,\mathfrak{F}) &= \frac{m_1 + m_2}{2}\,|\mathfrak{b}|\, a\,\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

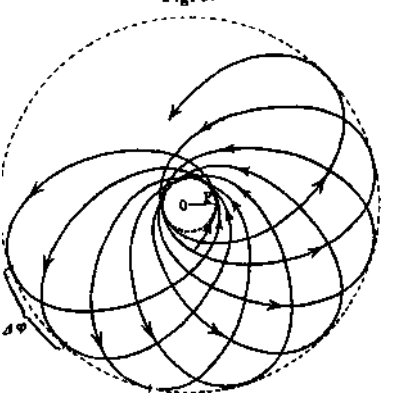
Da jene Ebene die des Meridians ist, wird man also den Wagebalken möglichst in die Ost—West-Richtung stellen. Man beobachtet zunächst mit Spiegel und Skala (Fig. 1) die Einstellung des Balkens gegen das Gehäuse, in dem der Faden hängt. Sodann dreht man das Gehäuse um den Winkel π und wiederholt diese Beobachtung. Infolge der Drehung haben die beiden Körper ihre Rolle vertauscht, so daß Gleichung (3) jetzt ein Drehmoment derselben Größe, aber entgegengesetzten Vorzeichens ergibt, als das erste Mal. Wenn dieses Moment nicht Null ist, so muß demnach der Faden in beiden Fällen um entgegengesetzte gleiche Winkel tordiert sein. Der Unterschied gibt ein Maß für die relative Schwan $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$ les Verhältnisses beider Massen.

Einen Unterschied der beiden Einstellungen haben weder Eötvös noch Zeeman gefunden. Aus der Empfindlichkeit des Apparates schloß Eötvös, daß bei Messing, Glas, Antimonit und Kork die relativen Unterschiede von ahöchstens 5.10^{-8} betragen, ein Ergebnis, welches Zeeman auf Quarz und das radioaktive Uranylnitrat $[UO_2(NO_3)_2 + 6\,H_2O]$ ausdehnte. Letzterer untersuchte auch, ob sich α ändert, wenn man einen Kristall (Quarz) in verschiedenen Lagen gegen die Erde bringt; wenn dabei Unterschiede auftreten, so sind sie kleiner als 3.10^{-8}.

Wir sagten oben, die astronomische Forschung sei über das Newtonsche Anziehungsgesetz nicht hinausgekommen. Immerhin hat aber die in der Genauigkeit stets gesteigerte Durchforschung des Planetensystems eine wenn auch recht unscheinbare Unstimmigkeit mit der auf diesem Gesetz fußenden Theorie der Planetenbewegung ergeben. Die Planeten bewegen sich infolge ihrer gegenseitigen Störungen ja nicht auf einfachen Kepplerellipsen, sondern auf recht verwickelten Bahnen, die sich nur wegen der Geringfügigkeit der gegenseitigen Beeinflussung als langsam veränderliche Ellipsen auffassen lassen. Eine dieser Veränderungen besteht in einer Drehung

der Ellipse in ihrer Ebene (Fig. 3 zeigt dies in stark übertriebenem Maße), bei welcher jeder Punkt der Ellipse mit derselben Winkelgeschwindigkeit einen Kreis um die Sonne beschreibt. Das gilt auch für den sonnenfernsten und den sonnennächsten Punkt, das Perihel und das Aphel. Man nennt deswegen diese Veränderung Perihelbewegung. Sie hat sich bei allen Planeten nach der Theorie der Störungen, also nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz, zahlenmäßig richtig berechnen lassen. Die Unterschiede zwischen Theorie und Beobachtung dürften innerhalb der Fehlergrenzen liegen. Nur beim Merkur ist ein unerklärter Rest übrig geblieben [Le Verrier, 1859[4])], der Sinn dieser Drehung stimmt mit dem Umlaufssinn desPlaneten überein, die Größe betrug nach Newcomb[4a]) 41,25 Bogen Sekunden im Jahrhundert.

Fig. 3.



Wäre nun die Newtonsche Theorie der Schwere sonst in jeder Beziehung befriedigend, so strebte man sie dieser geringen Abweichung wegen wohl nicht zu verlassen. Eher müßte man diese durch neue Annahmen über die Massenverteilung in der Sonne oder ihrer Umgebung zu beheben suchen, wie z.B. v.Seeliger[5]) sie durch eine Wolke kosmischen Staubes hat erklären wollen. Aber es war doch gewiß ein bemerkenswertes Ereignis, als 1915 Einsteins allgemeine Relativitätstheorie die Perihelbewegung des Merkur (d. h. deren unerklärten Rest) ohne jede neue Annahme, einfach aus der Theorie des Zweikörperproblems, zu 42,89 Sekunden zu berechnen gestattete *[§ 23]*[5a]). Später hat freilich Grossmann[5b]) eine Neuberechnung aus den Beobachtungen vorgenommen, als deren Ergebnis er höchstens 38 Sekunden hinstellt, was mit Einsteins theoretischem Wert nicht mehr innerhalb der Beobachtungsfelder übereinstimmt. Bauschinger[5c]) hingegen spricht in einer Betrachtung über den Anschluß des aus Fixsternbeobachtungen empirisch-statistisch ermittelten Inertialsystems an das Inertialsystem, welches sich

aus der Beobachtung der Planetenbewegung ergibt, als Ergebnis aus, daß Einsteins Theorie diesen Anschluß besser als die Newtonsche ermöglicht. Eine Kritik an derartig subtilen, den äußersten wissenschaftlichen Takt erfordernden Rechnungen ist nur Astronomen von Fach möglich. Wir müssen endgültige Klärung von der Zukunft erwarten — wie auch sonst in manchen Fragen der allgemeinen Relativitätstheorie.

Was die rein empirische Forschung über die Schwere herausgebracht hat, ist hiermit im wesentlichen angegeben; in Anbetracht der großen, durch reichlich zwei Jahrhunderte dafür aufgewandten Arbeit könnte man das Ergebnis als einigermaßen dürftig zu bezeichnen versucht sein. Doch ist diese Dürftigkeit selbst wieder eine Tatsache, welche Einsteins Theorie zu erklären haben wird. Sie leistet dies durch den Nachweis, daß Newtons Theorie sich aus ihr als eine vortreffliche Näherung ergibt (§ 19). Darüber hinaus hat sie zwei Tatsachen vorausgesagt. Es sind das zwei feine Effekte, die dicht an der Grenze der heutigen Meßgenauigkeit liegen; man versteht deshalb sehr gut, daß sie sich nicht von selbst der Beobachtung aufdrängten. Erst auf diese Theorie hin hat man Beobachtungen angestellt, welche das Dasein beider Erscheinungen heute schon recht wahrscheinlich machen.

Der erste dieser „Einstein-Effekte" besteht darin, daß jede Spektrallinie, welche von der Sonne entsandt wird, eine Vergrößerung ihrer Wellenlänge um das $2,1.10^{-6}$ fache ihres normalen, an einer irdischen Lichtquelle gemessenen Wertes aufweist; alle Spektrallinien sind somit „nach Rot verschoben", wie man in einer eigentlich nur für das sichtbare und ultraviolette Gebiet gültigen Sprechweise sagt. Das ist natürlich keine Sondereigenschaft der Sonne, vielmehr muß jeder Himmelskörper von ähnlicher Masse und Größe, also jeder Fixstern, eine entsprechende Verschiebung hervorrufen. Die Schwierigkeiten der Prüfung beruhen darauf, daß sich die große Mehrzahl aller Spektrallinien durch viele Umstände, besonders durch Veränderungen von Temperatur und Druck, in ihrer Lage beeinflussen läßt. Zum Glück gibt es am violetten Ende des sichtbaren Spektrums Banden, die dem Stickstoff zugehören (fälschlich als -Cyanbanden bezeichnet), welche gegen solche Einflüsse nur sehr wenig empfindlich sind. Im Laboratorium lassen sie sich in Emission herstellen, im Sonnenspektrum treten sie in Absorption auf.

An ihnen, sowie an den Linien des Eisens, haben Schwarzschild[6]), St. Johns und Babcock[7]), Eveurshed und Royds[8]) das Sonnenspektrum mit dem einer irdischen Lichtquelle verglichen. Alle

Linien zeigten dabei Verschiebungen, freilich von recht wechselnder Größe, manche sogar nach kürzeren Wellenlängen hin. Doch beweisen die Messungen zunächst nicht viel. Einmal nämlich sind die irdischen Vergleichsspektren nicht hinreichend genau bekannt, weil auch bei dem Laboratoriums versuch viele Ursachen, die man manchmal nicht vollständig kennt, eine geringe Linienverschiebung hervorrufen. Ein Beispiel dafür bietet die Untersuchung von St. John und Babcock (1917), bei welcher der Eisenbogen, von einer Störung durch die Nähe der Pole befreit, für die Eisenlinien Wellenlängen liefert, aus denen sich beim Vergleich mit den entsprechenden Sonnenlinien durchweg eine Rotverschiebung der letzteren ergibt. Im Mittel beträgt die relative Verrückung $1{,}6 \cdot 10^{-6}$, liegt also dem theoretischen Wert von $2{,}1 \cdot 10^{-6}$ recht nahe. Sodann scheint, wie Grebe und Bachern[9]) zeigten, eine Linie mit unsymmetrischer Helligkeitsverteilung, wenn sie wie bei der Sonne als Absorptionslinie auftritt, schon deswegen an einer etwas anderen Stelle zu liegen, als in einem Emissionsspektrum. Der Beobachter wird nämlich auf den Mittelpunkt der in ihrer ganzen Breite ziemlich gleich dunklen Absorptionslinie, dagegen auf das nicht damit zusammenfallende Helligkeitsmaximum der Emissionslinie einstellen. Und wenn auch diese scheinbare Verschiebung vollkommen innerhalb der Linienbreite liegt, so kommt sie für diese feinen Messungen dennoch in Betracht; denn die gesuchte Verschiebung ist von derselben Größenordnung. Auch kann die Nachbarschaft anderer, nicht dem Stickstoff angehörender und deswegen durch Druck und Temperatur beeinflußter Linien die Messungen ungenau machen. Deshalb treffen die genannten Forscher eine Auswahl von neun Linien der genannten Banden; bei diesen liefern ihre eigenen Messungen, sowie die ihrer Vorgänger die in der folgenden Tabelle 1 zusammengestellten Ergebnisse. Als Mittel aus allen hier mitgeteilten 23 Einzel werten findet man

$$\Delta\lambda/\lambda = 1{,}85 \cdot 10^{-6}$$

statt des theoretischen $2{,}1 \cdot 10^{-6}$.

Sodann haben Grebe und Bachern[10]) noch ein anderes Verfahren eingeschlagen. Da alle scheinbaren Verschiebungen, welche die Linien dieser Banden durch Unsymmetrie ihres Baues oder durch ihre Nachbarschaft erfahren können, nach Seiten der kürzeren Und der längeren Wellen gleiche Wahrscheinlichkeit haben, müssen sie bei einer Mittelung über viele Linien herausfallen, so daß dann nur die wirkliche gemeinsame Verschiebung durch die Schwerewirkung übrig bleibt. Auch bei diesem Verfahren, angewandt auf 100 Linien,

Tabelle 1.

λ in	Relative Verschiebung $\Delta\lambda/\lambda$			
	nach Grebe u. Bachern	nach Schwarzschild	nach St. John	nach Evershed u. Royds
3,873 504.10-6	2,0.10-6	1,7. 10^{-6}	—	—
3,866 960	4,0	3,0	—	—
3,864 438	1,0	1,7	1,3. 10-6	2,0. 10^{-6}
3,863 533	1,7	—	0,7	2,5
3,861 847	1,7	2.0	—	—
3,857 063	1,7	2,0	1,0	—
3,852 541	1,7	2,7	1,7	—
3,848 979	1,0	—	—	—
3,844 378	2,0	1,7	0,7	—
Mittel	1,87	2,11	1,08	2,25

ergab sich eine gute Übereinstimmung mit Einsteins Voraussage. Wieder einen anderen Weg ist Pérot[11]) gegangen. Er untersuchte im Laboratorium den geringen Einfluß, den der Druck auf die Cyanbanden ausübt, mit der Pérot-Fabryschen Interferenzmethode. Die Linien verschieben sich ein wenig nach Rot, wenn der Druck abnimmt. Astrophysikalische Erwägungen machen wahrscheinlich, daß in den Schichten der Sonne, in welchen die Linie 4197 absorbiert wird, der Druck so gut wie Null ist. Der Vergleich dieser Absorptionslinie im Sonnenspektrum mit der irdischen Emissionslinie bei sehr tiefen Drucken ergibt aber eine relative Rotverschiebung der ersteren, vom Betrage 2,1. 10^{-6}. Dieser Wert ist aber noch beeinflußt, und zwar vergrößert, durch den Doppeleffekt infolge des Hinabsinkens der absorbierenden Dämpfe ins Innere der Sonne. Trotzdem erscheint die Übereinstimmung mit der Theorie recht gut.

Sicherer noch dürfte Pérots Prüfung der Linie b_1 des Magnesiums sein. Ihre relative Lage zur sogenannten Linie b_2 gibt ein Maß für den Druck. Aus dem Sonnenspektrum kann man somit entnehmen, wie groß der Druck in der absorbierenden Schicht ist, und findet ihn so gut wie Null. Vergleicht man, nun die genannte Linie im Sonnenspektrum mit der entsprechenden im Laboratorium bei tiefem Druck herstellbaren, so findet man wieder eine Übereinstimmung innerhalb **der** Fehlergrenzen.

Schließlich haben Buisson und Fabry[12]) an 22 Eisenlinien zwischen 4000 und 4500 A.-E. eine mittlere Rotverschiebung von

$1{,}8 \cdot 10^{-6}$, bei 10 Eisenlinien zwischen 5100 und 5500 Å.-E. $2{,}4 \cdot 10^{-6}$ gefunden. Trotzdem bleibt hier noch Raum für viele weitere Untersuchungen; erst dann können wir vielleicht von einer Sicherstellung dieses Einstein-Effekts reden.

An den Spektren der Fixsterne kann man die theoretische Formel für die Verschiebung nicht im gleichen Sinne prüfen, weil man die dazu erforderliche Kenntnis der Masse nur selten, die der Durchmesser wohl nie mit der notwendigen Genauigkeit besitzt. Die Deutung der Beobachtungen wird überdies dadurch unsicher, daß sich über die gesuchte Verschiebung noch der Dopplereffekt der meist auch nicht bekannten Bewegung des Sternes gegen das Sonnensystem überlagert. Nur in den Fällen, in denen ein Stern mit Nebelmassen physisch verbunden ist und so mit ihnen die Bewegung gemein hat, läßt sich der Dopplereffekt am Nebelspektrum rein beobachten und dann für das Sternspektrum in Abzug bringen, weil in dem Nebel die Materie so dünn ist, daß dort kein in Betracht kommender Schwereeinfluß zu erwarten ist. So findet Freundlich[13]) bei den Sternen des Orionnebels eine Verschiebung der Linien gegen das Nebelspektrum fast durchweg nach Rot. Sie beträgt (relativ gemessen) im Mittel 2.10^{-6}, und alle Einzelwerte sind von derselben Größenordnung. Ferner findet Freundlich bei 10 Sternen, welche allem Anschein nach von Caiciumdämpfen umgeben sind, zwischen der Lage gewisser Calciumlinien im Stern- und im Dampf-Spektrum einen Unterschied vom richtigen Vorzeichen und derselben Größenordnung. Es erscheint durchaus glaubhaft, daß es sich hier um den in Rede stehenden Einstein-Effekt handelt.

Noch weit bedeutungsvoller aber für die Entscheidung über die Richtigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie ist der andere „Einstein-Effekt", der in der Ablenkung des Lichtes von der geraden Bahn im Schwerefelde besteht. Denn die Rotverschiebung konnten auch manche der Schweretheorien erklären, welche auf dem Boden der Lorentz-Transformation stehen blieben (vgl. § 2). Dagegen mußten diese notwendig den Lichtstrahl im leeren Raum als Gerade ergeben. Nun ist freilich diese Ablenkung so gering, daß man nur beim Schwerefeld eines so großen Himmelskörpers, wie der Sonne, etwas davon zu merken hoffen kann. Sterne also, deren Licht auf dem Wege zu uns nahe an der Sonne vorbei muß, müssen danach nicht an ihrem wahren Ort am Himmel uns sichtbar werden, sondern eine kleine Abweichung davon zeigen. Bedeutet in Fig. 4 die Kurve *DCBA* den von einem Stern auf die Erde gelangenden Lichtstrahl, so stellt der Beobachter in *A* sein Fernrohr in die Gerade *AD'*, welche

ihn in *A* berührt. Ohne die Krümmung, welche jene Kurve infolge der Nähe der Sonne zeigt, wäre die Gerade *D"A*, welche zur Asymptote der Kurve parallel ist, der Lichtstrahl desselben Sternes zur Erde. Der Winkel *D'AD"* mißt also die Ablenkung, sie rückt den Stern scheinbar von der Sonne fort, da die Kurve *DCBA* ihre konkave Seite ihr zukehrt. Für den Fall, daß der Strahl unmittelbar an der Sonne vorüberführt, sollte der Winkel nach der Theorie 1,75 Bogensekunden betragen, mit wachsendem Abstande sollte er umgekehrt proportional zu ihm abnehmen.

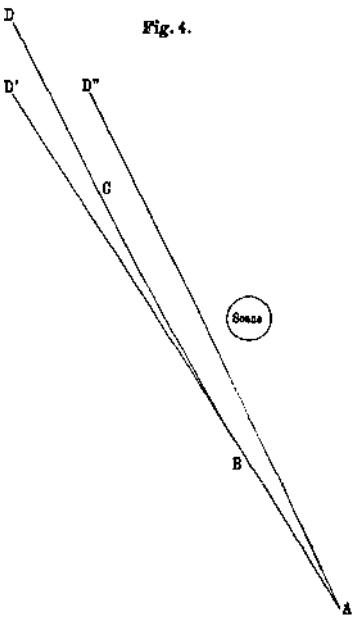


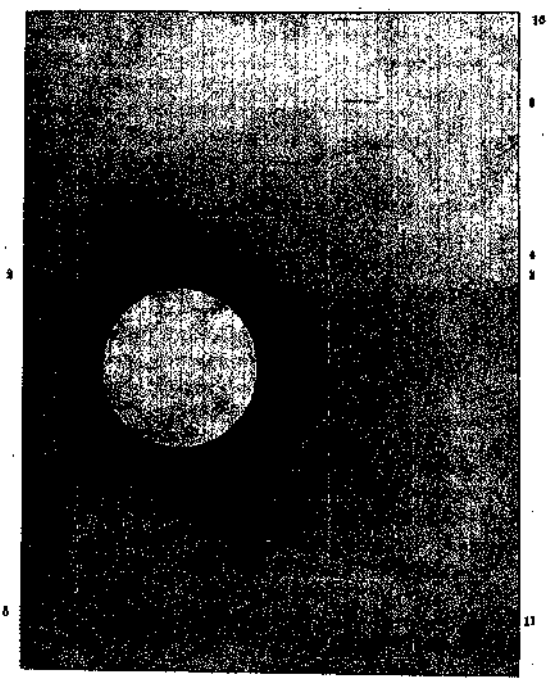
Fig. 4.

Nun können wir Sterne so nahe der Sonne, wie zu solchen Beobachtungen notwendig, nur bei vollständigen Sonnenfinsternissen sehen. Eine Finsternis im August 1914, zu der mehrere astronomische Expeditionen, u. a. eine deutsche nach Südrußland ausgerüstet waren, verstrich infolge des Ausbruchs des Weltkriegs ungenützt. Bei der nächsten Gelegenheit, am 29. Mai 1919, haben mehrere englische Expeditionen photographische Aufnahmen von der Sonne und ihrer Umgebung gemacht, wie Fig. 5 eine zeigt; die eine war in Sobral im nördlichen Brasilien, die andere auf der Insel Prinzipe vor der Küste von Kamerun. Diese Aufnahmen wurden dann verglichen mit Aufnahmen derselben Himmelsgegend, zu einer Zeit, da die Sonne von ihr weit absteht. Natürlich waren das Messungen schwierigster Art, bei denen jeder einzelne Schritt schärfster Kritik unterworfen werden mußte. Handelt es sich doch bei den Verschiebungen auf der Platte um Hundertstel eines Millimeters. Das Ergebnis zeigt Tabelle 2. In ihr sind die beobachteten Sterne mit gewissen, auch in Fig. 5 vermerkten Nummern bezeichnet, dazu die Verschiebungen in zwei

zueinander senkrechten Richtungen nach der Beobachtung und nach der Theorie.

Eine noch bessere Übersicht aber verschafft uns wohl Fig. 6, in welcher das Reziproke der Sternabstände vom Sonnenmittelpunkt als Abszissen, die radialen Ablenkungen in Sekunden als Ordinaten auf-

Fig. 5.



Totale Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919.

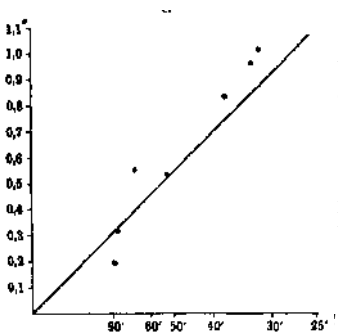
Wiedergabe einer der sieben in Sobral (Brasilien) während der Finsternis gemachten Aufnahmen.

getragen sind. Nach der Theorie muß der Zusammenhang zwischen diesen Größen linear, also durch eine Gerade gegeben sein; sie ist ausgezogen. Die wirklich beobachteten Ablenkungen sind als Punkte eingetragen. In Anbetracht der Schwierigkeit der Messungen muß

Tabelle 2.

Nummer des Sternes	Verschiebung in Bogensekunden			
	in der Richtung von Osten nach Westen		in der Richtung von Süden nach Norden	
	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
11	— 0,19	— 0,22	+ 0,16	+ 0,02
5	— 0,29	— 0,31	— 0,46	— 0,43
4	— 0,11	— 0,10	+ 0,83	+ 0,74
3	— 0,20	— 0,12	+ 1,00	+ 0,87
6	— 0,10	+ 0,04	+ 0,57	+ 0,40
10	— 0,08	+ 0,09	+ 0,35	+ 0,32
2	+ 0,95	+ 0,85	— 0,27	— 0,09

man die Übereinstimmung für recht befriedigend erklären. Bestätigt sie sich endgültig, so stellt Einsteins Voraussage der Lichtablenkung einen der größten Triumphe des menschlichen Geistes dar.



Doch haben wir natürlich bisher darüber keine vollständige Sicherheit. Es erheben sich immer noch gewisse Zweifel, ob nicht eine weit ausgedehnte Atmosphäre der Sonne die Ursache der Ablenkung ist. Fig. 5 zeigt freilich, daß in der sichtbaren Sonnenkorona allein Stern Nr. 2 liegt. Stärker spricht gegen solche Annahme das Fehlen jeglicher Absorption am Licht der Sterne. Hätte dies einen langen Weg in Gasen zurücklegen müssen, so wäre es doch wohl mindestens stark geschwächt. Auch daß die theoretische Abhängigkeit der Ablenkung von der Entfernung den Tatsachen einigermaßen entspricht, kann man dagegen anführen, denn eine Ablenkung durch Gase dürfte kaum gerade dies Gesetz zur Folge haben. Immerhin bleibt hier wie bei der Linienverschiebung noch Raum für viele weitere Untersuchungen.

§ 2. Die älteren Theorien der Schwere.

Gegen das Newtonsche Anziehungsgesetz haben sich schon früher zwei Einwendungen erhoben, ein mehr mathematischer und ein eigentlich physikalischer. Wir beginnen mit ersterem.

Nimmt man die Zahl aller Weltkörper als unendlich groß an, so führt, wie Neumann[1]) und v. Seeliger[2]) bemerkt haben, das Newtonsche Gesetz zu Schwierigkeiten. Es liefert dann je nach den Umständen unendlich große Kräfte oder gestattet überhaupt keinen bestimmten Wert für sie anzugeben. Der Versuch, das Anziehungsgesetz (1) zu

$$K = C \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} e^{-a r_{12}}$$

zu erweitern, wobei *a* eine neue, positive Konstante bedeutet, hilft zwar hierüber hinweg, kommt aber in Widersprüche mit den Beobachtungen über die Perihelbewegungen der Planeten.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz behandelt sodann die Schwere als eine Fernwirkung, welche zu ihrer Übertragung von Körper zu Körper keiner Zeit bedarf; denn das r_{12} im Nenner der Formel (1) bedeutet den Abstand in demselben Zeitpunkt, für welchen die Kraft berechnet werden soll. Die klassische Potentialtheorie der Schwere mit ihrer Poisson-Laplaceschen Differentialgleichung ist nur eine mathematische Umformung dieses Gesetzes, also auch eine Fernwirkungstheorie. Trotz der unzweifelhaft großen Erfolge dieser Theorie scheint sich kein Physiker von Bedeutung jemals bei diesem Fernwirkungsstandpunkt wirklich beruhigt zu haben. Newton selbst schrieb gelegentlich die Worte: „Daß die Gravitation der Materie wesentlich inhärent und anerschaffen sein sollte, so daß ein Körper auf einen anderen wirken könnte auf die Entfernung hin durch den leeren Raum, ohne die Vermittlung von irgend etwas, durch welches ihre Aktion und Kraft von einem zum anderen geleitet werden könnte, das ist nach meinem Dafürhalten eine so große Absurdität, daß ich glaube, kein Mensch, welcher in philosophischen Dingen eine genügende Denkfähigkeit hat, kann jemals darauf verfallen[3])." Und so tauchten von Newtons Zeiten an immer wieder Versuche auf, die Übertragung der Schwerkraft zu veranschaulichen. Elastizitätstheorie, Hydrodynamik, kinetische Vorstellungen mußten dazu herhalten. Seit freilich die Relativitätstheorie uns gelehrt hat, daß der leere Raum von allem Substantiellen, auch vom „Äther", völlig frei ist, müssen alle diese mechanischen Theorien als überholt gelten.

Gar nicht in Betracht kommt ein Vorschlag von Gerber[4]), das Newtonsche Anziehungspotential durch einen die Lichtgeschwindigkeit *c* enthaltenden Faktor zu erweitern. Zwar ergibt er ohne weiteres die Perihelbewegung des Merkur; doch sind die physikalischen Vorstellungen, mit denen Gerber seinen Potentialansatz begründen will, soweit sie nicht überhaupt gänzlich verschwommen sind, vollständig

falsch angewandt; von einer physikalischen Erklärung, d. h. dem Herstellen eines Zusammenhanges mit anderen Tatsachen, kann man bei ihm überhaupt nicht sprechen.

Wichtiger sind für uns die elektrodynamischen Theorien der Schwere. Die formale Übereinstimmung zwischen dem Newtonschen und dem Coulombsehen Gesetz legt ja den Gedanken nahe, die Maxwellsche Theorie, und zwar am besten in der H.A. Lorentzschen Fassung als Elektronentheorie, so auf die Schwere zu übertragen, daß man die Elektrizitätsmenge durch die wägbare Masse ersetzt. Da diese Theorie den Fernwirkungsgedanken in der Elektrodynamik beseitigt hat, leistete diese Übertragung dasselbe für die Schwere. Nur muß dann, da sich zwei Massen im Gegensatz zu gleichnamigen Elektrizitätsmengen anziehen, die ponderomotorische Kraft mit den beiden Feldvektoren ($\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Elektrodynamik) und der Geschwindigkeit durch eine Gleichung verknüpft werden, die sich von der Formel

$$\mathfrak{F} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\right)$$

(vgl. Bd. I, Gl. IX a) durch das vor die rechte Seite zu setzende Minuszeichen unterscheidet. Die notwendige Folge ist, daß dann auch die den Maxwellsehen Spannungen entsprechenden Spannungen des Schwerefeldes, dessen Energiedichte und Energieströmung, kurz alle die Größen, welche die Relativitätstheorie zum Welttensor T zusammenfaßt, in ihrer Verknüpfung mit den Feldvektoren [vgl. Bd. I, S. 112 oben) das umgekehrte Vorzeichen erhalten. Da im elektromagnetischen Felde die Energiedichte $W = -Tu$ notwendig positiv ist, würde sie also im Schwerefeld notwendig negativ. Man veranschaulicht sich dies leicht am Beispiel zweier Massenpunkte. Zwei gleichartige elektrische Punktladungen haben in unendlicher Entfernung voneinander keine Energie der Wechselwirkung; die gesamte elektrische Energie ist vielmehr die Summe der Eigenenergien ihrer beiden Felder. Doch erhält die Energie der Wechselwirkung einen positiven Betrag, sowie man die Ladungen auf endliche Entfernungen bringt, weil dabei mechanische Arbeit in Feldenergie umgewandelt wird. Umgekehrt wird bei der Annäherung zweier Massenpunkte dem Schwerefeld Energie der Wechselwirkung entzogen; und wenn mari diese bei unendlichem Abstand gleich Null annimmt, was wohl kaum zu umgehen ist, so ist sie in allen anderen Fällen negativ. Schon Maxwell[5]) hat aus diesem Grunde die Übertragung der Elektrodynamik verworfen. Abraham[6]) hat später darauf hingewiesen, daß ein schwingender Massenpunkt nach dieser Theorie statt **der**

Dämpfung, welche ein schwingendes Elektron infolge der Energieausstrahlung erleidet, eine immer neue Anregung infolge von „Einstrahlung" erfahren müßte; der Ruhezustand wäre danach kein stabiles Gleichgewicht, da die geringste Schwingung um ihn von selbst ihre Amplitude vergrößern müßte.

Diese Einwände treffen auch eine Theorie von H. A. Lorentz, welche nach einem von Mossotti und Zöllner ausgesprochenen Gedanken die Schwerewirkungen unmittelbar auf die elektrischen zurückführt, indem sie der Anziehung ungleichnamiger Elektrizitäten unter sonst gleichen Umständen einen etwas größeren Betrag zuschreibt, als der Abstoßung gleichnamiger[7]).

Ein mächtiger Anreiz zur theoretischen Erforschung der Schwere ging von dem Relativitätsprinzip der Lorentz-Transformation bald nach seiner Entdeckung aus. Hier war doch zum erstenmal klar bewiesen, daß sich alle physikalischen Wirkungen, also auch die Schwere, durch den leeren Raum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten müßten (vgl. Bd. I, § 7). Die astronomische Forschung hatte nie etwas anderes einwandfrei nachzuweisen vermocht, als daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wenn es eine gibt, gegen die Relativgeschwindigkeiten der Himmelskörper sehr groß ist. Außerdem ergänzte die Forderung, daß die Gesetze der Schwere gegen die Lorentz-Transformation invariant sein sollen, ein wenig die so mangelhafte Erfahrungskenntnis. So stellte Minkowski in einer seiner grundlegenden Arbeiten[8]) ein Elementargesetz für die Wirkung zweier Massenpunkte aufeinander auf, das, abgesehen von der Vorzeichenumkehrung, einfach die Übertragung des entsprechenden Gesetzes für Elektronen war. Da letzteres dem Relativitätsprinzip genügt, tut dies auch das erstere. Doch ist diese Theorie eigentlich unvollständig, insofern sie die Gesetze des Schwerefeldes nicht ausspricht. Da diese sich wohl nur durch die entsprechende Übertragung der ganzen Elektronentheorie gewinnen lassen, verfällt dieser Gedanke den schon oben erwähnten Einwänden. Schon vorher hatte Poincaré[9]) ein allgemeineres Elementargesetz für die Schwereanziehung aufgestellt, das ebenfalls dem Relativitätsprinzip genügte und als Sonderfall das Minkowski sche enthielt. Die zugehörigen Feldgleichungen hatte Poincaré nicht angegeben, so daß sich nicht beurteilen läßt, ob alle in seinem allgemeinen Gesetz enthaltenen Möglichkeiten von diesen Einwänden getroffen werden. Aber vielleicht wegen dieses Mangels hat diese Theorie nie weitere Verbreitung erlangt. Demselben Urteil verfällt eine Erweiterung des Anziehungsgesetzes durch de Wisniewski[10]), welcher in Gleichung (1) unter der

Annahme, daß m_1 ruht, m_2 eine Geschwindigkeit q hat, zu r_{12}^3 noch den Faktor $\sqrt{1 - q^2/c^2}$ hinzufügen will.

Übrigens liefert gerade die Relativitätstheorie einen weiteren Grund gegen jede Übertragung der Elektrodynamik. Diese führte nämlich entsprechend dem aus den Maxwellschen Gleichungen folgenden Gesetz von der Erhaltung der Elektrizitätsmenge (vgl. Bd. I, § 4 und 5) zum Erhaltungssatz für die schwere Masse. Die Relativitätstheorie lehrt aber die Trägheit der Energie, derzufolge (vgl. Bd. I, Abschnitt VII) die träge Masse, sofern ein Körper sich überhaupt für die Mechanik durch diesen einfachen Begriff kennzeichnen läßt, zum ganz überwiegenden Teil (ein kleiner Bruchteil kann von Spannungen herrühren) durch seinen Energieinhalt bestimmt, also gewiß veränderlich ist. Danach könnte das Verhältnis beider Massen beim gleichen Körper nicht immer dasselbe sein, also erst recht nicht bei verschiedenen Körpern stets den gleichen Wert haben. Und doch zeigen die Versuche von Eötvös und Zeeman (§ 1) mit großer Genauigkeit, daß dies Verhältnis ein universelles ist. Bei radioaktiven Körpern ist die beobachtbare Energieveränderung verhältnismäßig am größten (vgl. Bd. I, §28). Wir sollten also in diesem Zusammenhang gerade bei ihnen am ehesten einen abweichenden Wert dafür vermuten. Und dies ist der Grund, aus welchem Southerns und Zeeman radioaktive Stoffe mit zu ihren Versuchen über das Aquivalenzprinzip heranzogen (vgl. § 1).

Unter dem Einfluß der Relativitätstheorie, aber nicht in voller Übereinstimmung mit ihr, stehen zwei Schweretheorien von Abraham[11]), von der manche Züge, wie z. B. die Abhängigkeit der trägen Masse vom Schwerepotential, später von Nordström übernommen sind und sich mutatis mutandis auch in der allgemeinen Relativität wiederfinden. Doch liegen sie abseits des uns vorgezeichneten Weges. Die Gedanken von Mie[12]) aber sind in ihren besten Zügen mit in die letztere Theorie übergegangen, so daß wir sie in § 28 und 29 darzustellen haben werden. Es mag schon hier erwähnt werden, daß auch dabei von einem Zusammenhang zwischen Schwere und Elektrodynamik die Rede ist, freilich von einem ganz anders gearteten, als in den soeben erwähnten Theorien.

Die beste Einfügung der Lehre von der Schwerkraft in die „beschränkte" Relativitätstheorie, wie wir die auf der Lorentztransformation beruhende im folgenden nennen wollen, verdanken wir wohl Nordström[13]). Seine Theorie liefert (in ihrer zweiten, verbesserten Fassung), abgesehen von dem Newtonschen Anziehungsgesetz für statische Felder, den Äquivalenzsatz als streng gültig für vollkommene,

statische Systeme und als eine allen Beobachtungen gerecht werdende Näherung für alle anderen Körper. Damit genügt sie den älteren Erfahrungstatsachen über die Schwerkraft. Sie vermeidet ferner grundsätzlich negative Energiedichten im Schwerefelde und stimmt überdies in der Rotverschiebung der Spektrallinien auf der Sonne vollständig mit der allgemeinen Relativitätstheorie und somit in gleichem Maße wie sie mit den neuesten Messungen überein. Dagegen ist sie nicht imstande, von der Perihelbewegung des Merkur eine so einfache Deutung aus dem Zweikörperproblem zu geben, wie Einsteins Theorie; sie führt zwar auch zu einer Perihelbewegung, wie das überhaupt wohl jede das Newtonsche Gesetz als Näherung enthaltende Schweretheorie tut, doch diese fällt viel zu klein und im Richtungssinne falsch aus. Vor allem aber kann sie die Ablenkung des Lichtes in der Nähe der Sonne nicht erklären; denn sie muß ja, wie jede andere auf dem Boden der beschränkten Relativitätstheorie bleibende Theorie, der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume einen unveränderlichen Wert geben. Abweichungen des Lichtstrahles von der Geraden können aber nach dem Huyghenssehen Prinzip, das bekanntlich mit der Elektrodynamik im Einklang steht, nur bei räumlich veränderlicher Lichtgeschwindigkeit auftreten. Oder, anders gesprochen, die erzeugenden Weltlinien des Minkowskischen Vor- und Nachkegels sind in dieser Theorie notwendig gerade. Besonders die Ablenkungsbeobachtung hat uns veranlaßt, in diesem zweiten Bande ausschließlich Einsteins Lehre von der Schwere vorzutragen. Diese hat zudem noch vor allen anderen den Vorzug, wie die beschränkte Relativitätstheorie vor der Lorentzsehen „Absoluttheorie" von 1904 (vgl. Bd. I, § 5, Schlußbemerkungen); nämlich ein tiefgehendes und umfassendes Prinzip als Grundlage, das Prinzip der allgemeinen Relativität.

IL Die allgemeine Relativitätstheorie.

§ 3. Das allgemeine Relativitätsprinzip.

Die „beschränkte" Relativitätstheorie, welche nur eine Gruppe gleichförmig und translatorisch gegeneinander bewegter Bezugssysteme als berechtigte ansieht, setzt gleich der Newtonschen Mechanik und der gesamten daran anschließenden Physik das Dasein eines von allen Körpern unabhängigen Inertialsystems voraus; sie schließt dann

aus den Naturgesetzen auf das Dasein der anderen. Daß diese Annahme logisch zulässig ist, haben wir schon in § la des ersten Bandes betont. Trifft sie nämlich in der Wirklichkeit zu, so kann man dieses Bezugssystem durch physikalische Versuche fern von allen Körpern feststellen. Dadurch unterscheidet es sich grundsätzlich von dem Lichtäther älterer elektrodynamischer Theorien, der sich jeder Beobachtung entzog. Aber freilich sind dies nur Gedankenversuche, denn wir sind ja mit allen Beobachtungen an der Natur beschränkt auf Räume innerhalb des Fixstern Systems. Könnten wir uns von dessen vielen großen Massen wesentlich weiter entfernen, fielen unsere Versuche nicht vielleicht ganz anders aus ? So konnten Mach und Einstein den Gedanken fassen, daß die Vorzugsstellung jener Gruppe von Inertialsystemen keine Grundtatsache, sondern dadurch bedingt wäre, daß die Massen des Fixsternsystems in einem dieser Systeme im großen und ganzen ruhen; daß aber grundsätzlich, d. h. wenn man von diesem „'Zufall" absieht, alle denkbaren Bezugssysteme gleichberechtigt wären, also auch solche, die sich gegen die Inertialsysteme beschleunigt oder mit Drehungen oder sonst irgendwie bewegen. Bei Mach war dieser Gedanke nur ein skeptischer Einwand gegen die damals ganz allgemeine, wenngleich nicht immer bewußte Annahme eines Inertialsystems. Einstein sieht einen Hinweis der Natur auf die allgemeine Gleichberechtigung in dem Gesetz von der Äquivalenz der trägen und der schweren Masse.

Denken wir uns nämlich einen Physiker in einem Kasten, dessen Wände ihn in jeder Beziehung von der Außenwelt abschließen. Er nimmt eine Zeitlang an allen Körpern im Innern das Streben wahr, sich in einer bestimmten Richtung gegen die Wände in Bewegung zu setzen. Läßt man sie frei, so „fallen" sie in dieser Richtung, und zwar alle mit der gleichen Beschleunigung gegen die Wände. Er hat dann für diese Beobachtung zwei ganz verschiedene Deutungen: Entweder: „Der Kasten wird gegen ein Bezugssystem, in welchem der Trägheitssatz gilt, gleichförmig beschleunigt; wodurch, kann ich nicht wissen, solange mir der weitere Ausblick fehlt. Das »Fallen« der Körper beruht einfach auf ihrem Beharren in der Geschwindigkeit, welche sie zuletzt hatten, als sie am Kasten fest saßen; ihre gemeinsame Fallbeschleunigung ist, abgesehen von der Richtung, nichts anderes, als die Beschleunigung des Kastens." Oder: „Mein Kasten ruht in einem Inertialsystem, befindet sich aber in einem Schwerefeld. Daß die Körper mit gleicher Beschleunigung fallen, erklärt sich einmal aus der Proportionalität zwischen Anziehungskraft und schwerer Masse, andererseits aus der Proportionalität zwischen dieser

und der trägen Masse, also aus der Äquivalenz beider Massen. Wodurch das Schwerefeld erzeugt ist, kann ich nicht erfahren, solange mich die Wände von allem außen Befindlichen abschließen." Natürlich sind auch Deutungen möglich, bei denen beide Gesichtspunkte gemischt auftreten. Ohne das Äquivalenzgesetz wäre es aber nur die erste.

Wir wollen denselben Gedanken an einem anderen Beispiel ausführen. Wir fahren in einem Eisenbahnzug auf idealen, stoßfreien Schienen, immer in derselben Richtung *a*, mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Es ist uns geläufig, daß die Auffassung, unser Abteil ruhe, aber die ganze Umgebung komme uns entgegen, ebenso zulässig ist, wie die soeben angewandte. Nun aber bremst der Zug: alle Gegenstände im Abteil zeigen ein Streben, sich dessen vorderer Wand zu nähern. Hier sagte die bisherige physikalische Auffassung, „Darin zeigt sich die Trägheit der Körper, die ihren bisherigen Bewegungszustand gegen ein Inertialsystem beizubehalten streben". Aber wir können geradeso gut sagen: „Es ist ein Schwerefeld in bezug auf das Koordinatensystem entstanden, das die Wände unseres Abteils bestimmen, und zwar hat es die Richtung *a*. In der Tat bewirkt es bei der Umgebung, die uns bisher entgegenkam, eine Verlangsamung ihrer Geschwindigkeit gegen das Abteil; die Umgebung beginnt in der Richtung *a* zu fallen, und wenn sich ihre verschiedenen Teile dabei nicht gegeneinander bewegen, so liegt das eben an dem gleichen raschen Fall aller Körper, d. h. wieder an dem Äquivalenzsatz".

Man kann nun natürlich weiter fragen nach der Ursache, welche den Zug verhindert, die allgemeine Fallbewegung mitzumachen. Nun, diese Ursache liegt in der Bremsung der Räder; sie wirkt genau wie die Beine eines Insekts, das an einem frei fallenden Körper gerade mit solcher Geschwindigkeit herumklettert, daß es bezüglich des Koordinatensystems in Ruhe bleibt. Im übrigen kommen wir in § 21 nochmals auf dieses Beispiel zurück.

Betrachten wir noch ein anderes Beispiel: Das ungestrichene System sei eines der gewöhnlichen Inertialsysteme. Die Zeit lassen wir ungeändert ($x'^4 = x^4$), die Raumkoordinaten x'^1 aber führen wir als kartesische Koordinaten in ein Achsenkreuz ein, welches sich gegen das erstere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w dreht. Damit ein Massenpunkt in ihm ruht, muß eine Zentripetalkraft auf ihn wirken, welche, so sagen wir vom Standpunkt des ungestrichenen Systems aus, sein auf der Trägheit beruhendes Streben zur geradlinig-gleichförmigen Bewegung aufhebt und ihm die mit der Drehung verbundene Beschleunigung erteilt. Ein gespannter Faden mag diese Kraft ausüben. Auch im gestrichenen Koordinatensystem gibt es diese

Kraft, denn die Spannung des Fadens ist eine von unserer Betrachtungsweise unabhängige Tatsache; sie läßt sich aber nicht aus einer Beschleunigung erklären, da es keine solche gibt. Wohl aber tritt bei der Transformation ein neues Schwerefeld im gestrichenen System auf. Um die Kraft, welche es ausübt, aufzuheben, ist die Zentripetalkraft notwendig.

Wir schließen aus dieser Betrachtung: Soweit' es sich lediglich um die Fallerscheinungen in einem begrenzten Baumgebiet handelt*), sind Ruhen in einem Inertialsystem mit homogenem Schwerefeld und Ruhen in einem dagegen beschleunigten System ohne ein solches Feld ununterscheidbar. Beide Arten von Systemen sind — für diese Vorgänge — gleichberechtigt, nur muß man beim Übergang vom einen zum anderen auch die Schwerkraft transformieren, und findet dabei in dem einen Koordinatensystem den Wert Null für sie.

Für die ältere, auf Newton zurückgehende Auffassung bestand zwischen träger und schwerer Masse ein begrifflicher Unterschied. Die Proportionalität zwischen ihnen, aus der sich durch Änderung des Maßsystems Gleichheit machen ließe, stand da als eine Tatsache, die man durchaus anerkannte, aber nicht tiefer zu deuten vermochte. Die neue Auffassung, die die allgemeine Relativitätstheorie bringt, sieht in dieser Äquivalenz Wesensgleichheit. Es ist dieselbe Eigenschaft der Körper, welche sich entweder als Trägheit oder als Schwere äußert. Der Unterschied dazwischen liegt einzig und allein in der Betrachtungsart, welche man wählt. Darin besteht Einsteins Lösung für das „Rätsel der Schwerkraft". Nicht mehr als ein Fremdkörper steht die Schwere jetzt der Mechanik gegenüber, sondern sie wird ein wesentlicher Bestandteil davon, so daß man die Mechanik gar nicht ohne Rücksicht auf das Schwerefeld formulieren kann (§ 16). An die Stelle des ersten Newton schen Axioms, demzufolge sich ein freier Körper geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, tritt der Satz: Ein freier Körper

Aber diese beiden Betrachtungsarten wären doch nicht ganz gleichwertig, wenn sie es nur den Fallerscheinungen gegenüber wären. Sie werden es erst durch den Grundsatz: Dieselben Transformationen,

*) Wir wollen sogleich hier betonen, daß wir im allgemeinen ein Schwerefeld nur in einem Raum-Zeit-Bereich forttransformieren können, der — mathematisch gesprochen —-unendlich klein ist. Das ganze Schwerefeld der Sonne etwa läßt sich nicht durch Wahl des Koordinatensystems beseitigen.

denen gegenüber die Fallgesetze invariant sind, lassen auch alle anderen Naturgesetze unverändert; der erwähnte Beobachter mag noch so viele und noch so geschickt gewählte mechanische, optische und elektrische Versuche zu Hilfe nehmen, niemals kann er zwischen den genannten Deutungen unterscheiden. Welches aber sind diese Transformationen? Die allgemeine Relativitätstheorie antwortet: Alle Naturgesetze lassen sich so in mathematischer Form auf drei räumliche Koordinaten x^1, x^2, x^3 und eine Zeitkoordinate x^4 beziehen, daß sie gegen beliebige Transformationen

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad i = 1, 2, 3, 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

invariant sind, wenn nur die Funktionen f umkehrbar eindeutig und regulär sind*), eine von Null verschiedene Funktionaldeterminante haben und schließlich der vierten Koordinate die Zeitartigkeit, den drei anderen die Raumartigkeit wahren.

Das physikalische Weltbild der Antike gab dem einzelnen Raumpunkt physikalische Selbständigkeit und legte ihm dementsprechend auch besondere Kräfte bei. Diese Kräfte bewirkten das Streben der Körper nach ihren „natürlichen Orten", wie sich Luft und Feuer nach „oben" drängen, während schwere Massen nach „unten" sinken. Diesen Standpunkt überwand Kopernikus. Man kann seine Leistung als das Relativitätsprinzip des Ortes benennen. Das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik und das der Lorentz-Transformation bezog sich auf die Geschwindigkeiten, die ersten Differentialquotienten des Ortes nach der Zeit; man kann für jeden Massenpunkt, der eine konstante Geschwindigkeit hat, Koordinatensysteme angeben, in denen er* dauernd ruht. Die obige Überlegung relativiert zunächst in ähnlichem Sinne die Beschleunigung, d. h. die zweiten Differentialquotienten. Das allgemeine Relativitätsprinzip endlich relativiert die Bewegung überhaupt, man kann jeden Massenpunkt dauernd „auf Ruhe" transformieren.

Diese Relativität jeglicher Bewegung ist durchaus kein neuer Gedanke. Kant[1]) z. B. hat ihn gelegentlich mit einer Schärfe betont, über die man nicht mehr hinausgehen kann. Und seit Newtons Zeiten ist aus ihm mehr als einmal ein Widerspruch gegen die

*) Unter regulären Funktionen versteht man in der mathematischen Physik solche, welche endlich und stetig sind und beliebig viele, endüohe und stetige Differentialquotienten haben. An einzelnen Flächen lassen wir Unstetigkeiten zu.

Newtonsche Mechanik hergeleitet worden. Doch konnte der Widerspruch nicht durchdringen, solange man für Zentrifugalkräfte und ähnliche Tatsachen keine die Newtonsche ersetzende Erklärung geben konnte. Das ist erst Einstein gelungen durch die Transformation der Schwere, welche deren Feld „relativiert", d. h. beim Übergang von einem Bezugssystem zum anderen verändert, ähnlich wie schon die beschränkte Relativitätstheorie das elektromagnetische Feld „relativiert" hat.

Betrachten wir nun die Transformationen (4) etwas genauer. Zu ihnen gehören auch solche, in denen weder x^4 noch x'^4 auftritt, die somit, lediglich die drei räumlichen Koordinaten transformieren. Schon aus diesem Grunde dürfen wir bei den drei räumlichen x nicht ausschließlich an kartesische Koordinaten denken, wie wir es in der beschränkten Relativitätstheorie im allgemeinen taten. Vielmehr müssen wir uns darin die weitgehendste Freiheit vorbehalten. Auch die Vorstellung zweier starren Achsenkreuze, die sich irgendwie gegeneinander bewegen, hätte nicht die erforderliche Allgemeinheit. Denn da wir der Art, wie x^4 in (4) auftritt, keine Beschränkung auferlegt haben, müssen wir das gestrichene Koordinatensystem im allgemeinen als gegenüber dem ungestrichenen deformierbar betrachten. Eine Eindeutigkeit schreiben wir der Transformation zu, damit jedem Raum-Zeit-Punkt x^1, x^2, x^3, x^4 ein Punkt x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 und umgekehrt entspricht. Regularität setzen wir voraus, damit jedem zusammenhängenden Raum-Zeit-Gebiet in den x ein zusammenhängendes Gebiet in den x' entspricht, sowie, damit wir überhaupt die Differentialgleichungen, als die wir uns die Naturgesetze vorstellen, von einem auf das andere System übertragen können. Schließlich muß die Funktionaldeterminante von Null verschieden sein, damit wir sicher sind, daß die x' vier voneinander unabhängige Funktionen der x darstellen, sich also zur Darstellung einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit eignen. Sonst aber stellen in der vierdimensionalen „Welt", wenn wir in ihr die x als rechtwinkelige Koordinaten im Sinne Minkowskis annehmen (siehe Bd. I, § 8), die Räume $x'^4 = const$ ganz beliebige dreidimensionale Gebilde dar.

Die Zeitkoordinate x^4 nehmen wir in allen Bezugssystemen als reell an. Sie entspricht insofern der Größe $u = ct$ der beschränkten Relativitätstheorie. Doch braucht sie im Gegensatz zu u ebensowenig wie die der drei anderen x von der Dimension einer Länge zu sein*). Die Forderung, daß x^4 stets zeitartig ist, bedeutet: In der beschränkten

*) Siehe hierzu § 14.

Relativitätstheorie mußte die positive Zeitachse durch den Weltpunkt *0* in dem Gebiet „jenseits" von *0* liegen, welches durch den Nachkegel von den anderen Teilen der „Welt" geschieden war. (Siehe Bd. I, § 8, besonders Fig. 6.) Alle Punkte des genannten Gebietes stellen Ereignisse dar, welche Wirkungen des Ereignisses *0* sein können, während die Punkte „diesseits von *O*" nur als Ursachen für *0* in Betracht kommen und die Punkte des „Zwischengebietes" in keinem ursächlichen Zusammenhang mit *0* stehen können. Auch hier werden wir jedem Punkte einen Vor- und einen Nachkegel zuordnen und ein Gebiet „jenseits von *O*" durch ihn abgrenzen können (§ 7 b). Sollen ursächliche Beziehungen zwischen Ereignissen eine vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung haben, so dürfen wir trotz aller sonstigen Allgemeinheit nur solche Systeme als berechtigt zulassen, bei denen für jeden Punkt *0* die Richtung des wachsenden x^4 in das Gebiet jenseits hineinführt. Diese Einschränkung macht das Kausalitätsprinzip notwendig. Eine Transformation, die wie $x'^4 = -x^4$ die Richtung der Zeit einfach umkehrte, ist damit ausgeschlossen.

Im Gegensatz dazu sollen die Koordinaten x'^1, x'^2, x'^3 stets raumartig sein. Mathematisch bedeutet dies: Ein Linienelement, welches einem Raume $x^4 = const$ in der Welt angehört, soll, wenn es von dem, Weltpunkt *0* ausgeht, in dessen Zwischen gebiet hineinweisen, oder, wie wir sagen wollen, es soll eine Strecke sein. (Jeden Baum $x^4 = const$ nennen wir infolgedessen einen Strecken raum.) Die physikalische Bedeutung aber liegt darin, daß ein Massenpunkt, wenn er im gestrichenen System ruht, gegen das ungestrichene unter allen Umständen eine geringere Geschwindigkeit haben soll, als das Licht sie am gleichen Orte besitzt. • Daß beide Aussagen das gleiche bedeuten, mag sich der Leser vorläufig am Beispiel der beschränkten Relativitätstheorie klar machen. Damit ist also z.B. ein starres Achsenkreuz, welches die tägliche Drehung der Erde mitmacht, ausgeschlossen. Denn ein in ihm ruhender Punkt hätte bei hinreichendem Abstand von der Erdachse ganz gewiß Überlichtgeschwindigkeit gegen das doch gewiß berechtigte Koordinatensystem, das wir gewöhnlich in der Astronomie benutzen. Wohl aber darf man Teile davon benutzen, die der Erdachse hinreichend nahe liegen, und muß dann durch geeignete Wahl der Koordinaten dafür sorgen, daß entferntere Teile eine immer geringere Drehgeschwindigkeit bekommen, was bei einem deformierbaren Achsenkreuz ja möglich ist.

Man hat gegen diesen Vorschlag, die Drehgeschwindigkeit des einen Systems, mit abnehmendem Abstand von der Drehachse zu

verringern, eingewandt, daß in ihm zwei zur Drehachse senkrechte Koordinatenachsen sich immer mehr aufwickeln, wie ein Faden zum Knäuel, und daß das doch ein immer weniger einfaches Koordinatensystem ergäbe. Es ist aber unseres Erachtens gar nicht ausgemacht, daß man für alle Raum-Zeit-Bereiche dasselbe Koordinatensystem benutzen muß. Läßt man aber Unstetigkeiten zu, so kann man entweder in einem bestimmten Abstand von der Achse das neue System vollständig in das alte übergehen lassen, während es sich weiter innen mit konstanter Geschwindigkeit dreht, oder man kann auch ein und dasselbe so drehende System immer nur für passend gewählte endliche Zeiträume benutzen und dann zu einem dritten umspringen, welches nun die Bewegung des vorher benutzten wiederholt.

Das Zeitmaß können wir durch die Transformation (70) noch in ganz willkürlicher, auch von Raumpunkt zu Raumpunkt verschiedener Weise abändern. Die Möglichkeit, trotzdem die Naturgesetze in invaria'nter Form auszusprechen, beruht darauf, daß die Bestimmungsstücke des Schwerefeldes in alle Naturgesetze eingehen und bei jeder Transformation der vier Koordinaten eine entsprechende Transformation erfahren. Wir könnten uns also in unserem Laboratorium eine große Zahl ganz verschieden schnell gehender Uhren aufstellen und jede davon als für ihren Standpunkt richtig erklären. Ob die Benutzung eines solchen Koordinatensystems zweckmäßig wäre, ist freilich eine ganz andere, aber von den grundsätzlichen Erörterungen auszuschließende Frage. Aus allen Aussagen über beobachtbare Tatsachen müssen die Unterschiede der Koordinatensysteme natürlich insofern herausfallen, als sich diese Aussagen durch die Koordinatentransformation eindeutig miteinander ableiten lassen, wie wir es ja im kleineren Umfange schon in der beschränkten Relativitätstheorie gesehen haben.

Im Gegensatz zu dieser weitgehenden Willkür steht nun der Begriff der Eigenzeit als der invarianten Länge einer zeitartigen Weltlinie. Sie messen wir mit Uhren, die, unmittelbar nebeneinander gestellt, den gleichen Gang zeigen. Daß diese, an verschiedenen Stellen im gleichen Koordinatensystem ruhend, gegen die Systemzeit x^4/c noch verschieden gehen können, versteht sich bei der weitgehenden Willkür in der Definition der Zeitveränderlichen x^4 von selbst.

Ebensowenig wie x^4 eine unmittelbare physikalische Bedeutung hat, haben die drei anderen Koordinaten eine solche. Welche Entfernung z. B. zwei Punkte haben, die bei demselben x^4 sich in den x^1, x^2, x^3

um dx^1, dx^2,dx^3 unterscheiden, das läßt sich allgemein nicht sagen. Wir sehen das schon in euklidischen Verhältnissen beim Übergang von den gewohnten rechtwinkelig geradlinigen zu irgendwelchen krummlinigen Koordinaten, etwa Polarkoordinaten. Aber in der bisherigen Physik und ihrer euklidischen Geometrie haben wir in den rechtwinkelig-geradlinigen Koordinaten insofern Normalkoordinaten, als wir in ihnen unmittelbar die physikalisch zutreffende Entfernung zweiter Punkte angeben können. Indem die allgemeine Relativitätstheorie von derartigen Normalkoordinaten vollständig absieht, entkleidet sie nach einem Ausspruch Einsteins: „den Raum (wie auch die Zeit) des letzten Restes physikalischer Gegenständlichkeit".

Überlegt man sich, welche Bedeutung die Koordinaten dann überhaupt noch behalten, so muß man sagen: Eine außerordentlich geringe. Sie sind eigentlich nur noch eine Art, Raum-Zeit-Punkte zu benennen, und wie jede Namengebung in hohem Maße willkürlich. Sie haben ihr Vorbild in den willkürlichen Koordinaten, welche zuerst Gauß auf krummen Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum eingeführt hat.

Nun braucht man aber eine Maßbestimmung, d. h. eine Formel, nach der man aus den Koordinaten zweier Punkte ihren Abstand berechnet. Und diese gewinnt die allgemeine Relativitätstheorie durch die Forderung: Den Abstand zweier Raumpunkte mißt ein im Ruhezustand an sie angelegter physikalischer Maßstab.

§ 4. Die Notwendigkeit nichteuklidischer Geometrie.

Wie in § 3 erwähnt, dürfen wir in beschränkter Ausdehnung ein „gestrichenes" Koordinatensystem benutzen, welches sich gegen das in der Astronomie gebräuchliche „ungestrichene" mit konstanter Geschwindigkeit dreht. Dies Beispiel soll uns nun zu einer grundsätzlich wichtigen Erkenntnis verhelfen.

Wir haben ebenfalls schon gesagt, daß wir Strecken, welche in diesem „gestrichenen" System ruhen, mit daneben ruhenden Maßstäben auszumessen haben. Das sind wir ja schon aus der beschränkten Relativitätstheorie her gewohnt. Gewiß können wir hier wie dort auch andere Maßstäbe benutzen, aber dann müssen wir das Ergebnis der .Messung in geeigneter Weise umrechnen. Nun messen wir in dem gestrichenen System unseres Beispiels einmal den Halbmesser eines Kreises um die Drehachse, das andere Mal dessen Umfang. Wir wollen uns das Ergebnis vom ungestrichenen System aus klar machen. Dann ist zu sagen: Bei der Messung des Halb-

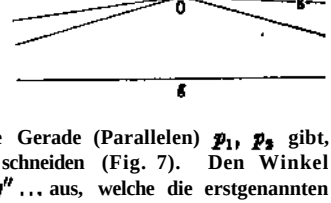
messers hat der Maßstab keine Geschwindigkeit in seiner Längsrichtung, daher auch keine Lorentz-Kontraktion. Er gibt somit für die Länge des Halbmessers einen Wert, der auch für das ungestrichene System richtig ist. Aber wenn wir ihn an den Umfang legen, so zeigt sich die Lorentz-Kontraktion, und er gibt somit, vom ungestrichenen System aus beurteilt, für jeden Teil des Umfanges eine zu große Maßzahl an. Nun ist im ungestrichenen System, wenn wir in ihm die euklidische Geometrie als gültig betrachten, das Verhältnis Umfang zu Halbmesser 2π. Im gestrichenen System ist somit dieses Verhältnis größer als 2π, und das heißt: es kann dort die Maßbestimmung, wie sie die allgemeine Relativitätstheorie fordert, nicht der euklidischen Geometrie entsprechen.

Schon die beschränkte Relativitätstheorie trieb eine von der euklidischen abweichende Geometrie, wenn sie als Weltkoordinaten x, y, z und die reelle Veränderliche $u = ct$ benutzte. Aber der Unterschied ging nicht sehr tief, er verschwand ganz, sowie man zu $l = ict$ überging; deshalb nennen wir jene Geometrie pseudoeuklidisch. Und in allen Streckenräumen $u = const$ blieb die euklidische Geometrie vollständig bestehen. Da nun die vierdimensionale Betrachtungsart uns nie mehr war als ein wertvolles Hilfsmittel, das aber die physikalische und erkenntnistheoretische Seite der Sache nicht berührte, so konnten wir ziemlich kurz darüber hinweggehen. Hier aber stoßen wir auf die Folgerung aus unseren Grundsätzen, daß auch in dem dreidimensionalen Raume, in den wir die Außenwelt einordnen, die euklidische Geometrie nicht streng und allgemein gelten kann. Und das zwingt uns zu einer eingehenderen Betrachtung über die Berechtigung anderer Geometrien an sich und in ihrer Anwendung auf die Physik.

Die Geometrie Euklids beruht auf einer Anzahl von Axiomen, die ihr Urheber für keines Beweises bedürftig, sondern als unmittelbar einleuchtend ansah. Nahm man sie an, so folgte daraus alles übrige logisch — oder sollte doch wenigstens daraus folgen. Und durch zwei Jahrtausende galt dies Beispiel als der Beweis, daß der menschliche Geist zu einer erfahrungsunabhängigen und deswegen schlechthin notwendigen Erkenntnis befähigt wäre. In diesem Sinne verwendet auch Kant, entsprechend dem mathematischen Wissen seiner Zeit, die Mathematik einschließlich der euklidischen Geometrie als einen wesentlichen Grundstein seiner Erkenntnislehre. Aber gerade diese scharfe Betonung des Apriorischen und Zwingenden der euklidischen Geometrie rief den Widerspruch hervor. Schon

lange hatten sich Mathematiker von dem Parallelenaxiom Euklids nicht befriedigt gefühlt und versucht, es zu beweisen, d. h. auf die anderen Axiome zurückzuführen. Dies Axiom aber sagt aus: Zu jeder Geraden kann man durch einen ihr nicht angehörenden Punkt eine und nur eine andere Gerade ziehen, welche mit ihr in einer Ebene liegt und sie nirgends (oder nur im Unendlichen) schneidet. Freilich waren diese Beweisversuche alle vergeblich. Gauß, der sich selbst noch an ihnen, beteiligt hat, erkannte wohl als erster ihre Aussichtslosigkeit, indem er eine Geometrie schuf, die sich von der bukiidischen nur durch das Fallenlassen des Parallelenaxioms unterschied. Doch dies ist erst nach seinem Tode bekannt geworden. Vor der Öffentlichkeit haben zuerst der Kusse Lobatschewski und de beiden Ungarn Bolyai, Vater und Sohn, um 1830 eine Geometrie vertreten, bei welcher es in der Ebene zu jeder Geraden g durch jeden außer ihr liegenden Punkt 0 zwei andere Gerade (Parallelen) p_1, p_2 gibt, welche erstere im Unendlichen schneiden (Fig. 7). Den Winkel zwischen ihnen füllen Gerade g', g'' ... aus, welche die erstgenannten überhaupt nicht schneiden. Daß sich diese „hyperbolische" Geometrie, wie man sie nennt, widerspruchsfrei durchführen läßt, hat F. Klein um 1870 bewiesen, indem er sie unmittelbar auf die als widerspruchsfrei anerkannte euklidische in dem Sinne zurückführte, daß jedem Satz der hyperbolischen ein Satz der euklidischen entspricht. Wir gehen darauf in §. 13 näher ein.' Damit war dann überzeugend dargetan, daß das Parallelenaxiom weder auf die anderen zurückführbar, noch an sich a priori gewiß ist.

Fig. 7.



Viel Gemeinsames mit ihr hat die „elliptische" Geometrie, bei welcher es aber im Gegensatz zu den bisher genannten überhaupt keine parallelen Geraden gibt. Vielmehr schneiden sich alle Geraden einer Ebene. Und auch diese Geometrie ist in sich widerspruchsfrei, also mathematisch berechtigt (§ 12 und 13).

In der euklidischen Geometrie ist der Abstand zweier Punkte mit den kartesischen Koordinaten

$$x^1, x^2, x^3 \quad \text{und} \quad x^1 + dx^1,\ x^2 + dx^2,\ x^3 + dx^3$$

einfach

$$da = \sqrt{dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}},$$

in den beiden anderen genannten Geometrien tritt an die Stelle dieser Formel

$$da^2 = a_1 dx^{12} + a_2 dx^{22} + a_3 dx^{32},$$

wobei die Koeffizienten bestimmte einfache Funktionen der x^4 sind, im hyperbolischen Falle andere als im elliptischen. Man kann den ganzen Unterschied dieser drei Geometrien geradezu aus der Formel für *da* entnehmen, ja überhaupt die ganze Geometrie auf ihr aufbauen. Nun tat Biemann 1864 den später für die allgemeine Relativitätstheorie grundlegend wichtig gewordenen Schritt, eine homogene quadratische Funktion der dx^1 mit beliebigen Funktionen der x^4 als Koeffizienten,

$$da^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4\,a)$$

als Quadrat des Linienelements anzusetzen. Man kann diesen Ansatz den verallgemeinerten pythagoräischen Satz nennen. Jede Wahl der Funktionen g_{ik} bestimmt eine besondere Art von Geometrie. Doch ändert sich die Geometrie nicht, wenn wir die Koordinaten transformieren und die g_{ik} dabei so umrechnen, daß die Maßbestimmung (4 a) invariant bleibt. Wir werden darauf in § 7 bis 10 ausführlich eingehen und wollen an dieser Stelle nur erwähnen, daß in diese ganze Entwicklung der Geometrie, von Euklid bis Riemann, nirgends etwas Physikalisches mit hineingesprochen hat. Rein aus gewissen Axiomen wurde geschlossen. Diese Axiome selbst sind gewiß nicht die einzig möglichen, der menschliche Geist kann auch andere schaffen. Aber bei ihrer Aufstellung bedarf er einer Entlehnung aus der Erfahrung ebensowenig wie etwa bei Schaffung des Begriffs der komplexen Zahl; die Geometrien sind daher alle a priori. Daß die Erfahrung in der psychologischen Wirklichkeit dabei eine Rolle gespielt hat und z. B. einem Euklid fälschlicherweise seine Axiome als die allein möglichen erscheinen ließ, dürfte wohl zutreffen, widerspricht dem aber nicht.

Fragen wir nun aber nach dem Recht, nichteuklidische Geometrie auf die Außenwelt in der Physik anzuwenden. Wir beginnen mit einem von Poincaré" und Schlick stammenden Gedankengange. Wir setzen zunächst die gewohnten euklidischen Verhältnisse in der Außenwelt voraus. Wir ziehen in ihr die drei Scharen von äquidistanten Ebenes-, welche zu den Koordinatenebenen eines kartesischen rechtwinkeligen Systems parallel sind. Durch Numerierung der Ebenen jeder Schar können wir dann für jeden

Punkt unmittelbar die Koordinaten x^1, x^2, x^3 bestimmen. Nun soll sich über Nacht, ohne daß wir es merken, die ganze Welt so umgestalten, daß sich das beschriebene Raumgitter in der verwickeltsten, unregelmäßigsten Weise verzerrt und verbiegt. Was der Kaum an wirklichen Dingen enthält, soll die Veränderung aber vollkommen mitmachen, so daß jeder physikalische Punkt seine Koordinaten x^1, x^2, x^3 behält. Was könnte der Physiker davon merken? Die Antwort kann nur lauten: Nichts. Man wird dies ohne weiteres für alle unmittelbaren Streckenmessungen, d. h. alle Vergleichungen mit einem Metermaßstab zugeben, weil sich ja dieser nach unseren Voraussetzungen mit geändert hat. Eher wird man an mittelbare physikalische Folgen dieser Umwandlung denken, die auffallen müßten. Es könnten, so wird man vielleicht meinen, z.B. die Erdanziehung, also die Fallbeschleunigung, die elastischen und elektrischen Konstanten der Körper bei der Messung andere Werte liefern. Aber auch diesen Einwand können wir widerlegen. Alle Messungen nämlich laufen in letzter Linie immer wieder auf Streckenmessungen hinaus. Das gilt für die Zeitbestimmungen — Ablesen der Zeigerstellung an Uhren — nicht weniger als für Gewichtsbestimmungen an einer Federwage oder für elektrische Strom- und Spannungsmessungen an Ampere- und Voltmetern oder Temperaturablesungen an einem Thermometer. Ist also wirklich unsere Annahme richtig, daß alle, also auch gleichzeitig am gleichen Orte liegende Strecken die genannte Dehnung zeigen, so ist von ihr schlechthin nichts zu merken.

Und daraus schließen wir weiter: Eine solche Verzerrung ist gar nicht wirklich. Gewiß ist es eine schwere philosophische Frage, was eigentlich „Wirklichkeit" bedeutet, und die Antwort wird auf sehr verschiedenen Wegen zu suchen sein, je nachdem es sich bei den Gegenständen der Mathematik oder der Physik oder bei anderen Dingen um die Wirklichkeit handelt. Aber in der Physik gibt es zum Glück ein verhältnismäßig einfaches Kennzeichen dafür in einem Satze, den Planck so geprägt hat: „Was sich messen läßt, ist auch wirklich". Man kann ihn nämlich auch ruhig umkehren: Was sich grundsätzlich jeder Messung entzieht, ist sicher nicht physikalisch wirklich. Und so werden wir auch hier dabei bleiben, daß die besprochene Verzerrung für die Physik gar nicht da ist. Sie bezieht sich auf ein Koordinatensystem, dessen Maßbestimmung der physikalischen Messung unzugänglich wäre und daher für die Physik nicht „natürlich" ist. Das dagegen verzerrte System besitzt unmittelbar die „natürlichen" Maßbestimmungen, die

man an Maßstäben ablesen kann und welche unter der obigen Voraussetzung die euklidische ist*).

Sehr anschaulich hat Helmholtz solche Verhältnisse geschildert, indem er annahm, wir spiegelten unsere Außenwelt in einem Konvexspiegel. Die gespiegelte Welt wird uns von unserer recht verschieden erscheinen. Z. B. hat sie ein Ende in der Brennebene des Spiegels, denn alle Gegenstände, die sich überhaupt spiegeln, selbst die fernsten Sterne, liegen vor dieser. Und trotzdem könnten wir unser Spiegelbild, falls auch dies Physik zu treiben anfinge, nie davon überzeugen, daß es eine andere Art von Geometrie habe als wir, denn in der Tat: Was wir auch tun mögen, um Strecken zu messen, immer wird ja das Spiegelbild die genau entsprechende Messung mit genau demselben Ablesungsergebnis vornehmen. Es entspricht eben jedem Zusammenfallen zweier Punkte bei uns ein Zusammenfallen der gleichbenannten Punkte im Spiegelbild. Allerdings, könnten wir unser Spiegelbild zu der Anerkennung bringen, daß sich seine Maßstäbe, die Spiegelbilder der unseren, bei der Überführung von einem Orte zum anderen verändern, entsprechend den Gesetzen, welche nach unserer geometrischen Optik zwischen Gegenstand und optischem Bild bestehen, so käme es zu einer von unserer verschiedenen Geometrie, welche, um nur einen Unterschied zu erwähnen, dem Raum eine bestimmte Fläche als Grenze zuweist. Aber wir können es nie zu dieser Anerkennung zwingen. Im Gegenteil wird es uns bei jedem Versuch dazu vor Augen halten, daß wir ihm eine durch Messungen nicht unmittelbar zu bestätigende, also nicht natürliche Geometrie aufnötigen wollen.

Diese Betrachtung ist ihrem Wesen nach aber unabhängig von der Voraussetzung, daß die natürliche Maßbestimmung in den Koordinaten x^1, x^2, x^3 die euklidische ist. Wie auch die an Maßstäben abzulesende Maßbestimmung beschaffen sein möge, immer ist eine Verzerrung, bei der jeder physikalische Punkt seine drei Werte x^1, x^2, x^3 behält, physikalisch unwirklich. Die beschränkte Relativitätstheorie verwirft den körperhaften Äther, weil sich dessen Bewegungszustand nicht beobachten läßt. Mit demselben Recht verwerfen wir

*) Dem entspricht nach einer mündlichen Bemerkung Einsteins, daß eine Eisenbahnkarte sich die Vereinfachung leisten darf, alle Teilstrecken geradlinig und ohne Bücksicht auf ihre wahre Länge zu zeichnen. Wenn sie nur die Knotenpunkte mehrerer Strecken richtig wiedergibt, so ermöglicht sie immer, in Verbindung mit dem Fahrplan (welcher noch die Zeitangaben liefern muß) die Anschlüsse richtig aufzufinden. Solange man sich auf das Aufsuchen solcher beschränkt, können ihre Ab; weichungen von der Geographie nie zur Wahrnehmung kommen.

jetzt jede Deutung der Koordinaten x^1, x^2, x^3, welche mehr enthält als sich aus jener Maßbestimmung entnehmen läßt. Die natürliche Maßbestimmung ist das einzig Wirkliche an den Koordinaten. Weil eben allen Messungen in der Außenwelt nichts anderes zugrunde liegt, als das Zusammenfallen gewisser physikalischer Punkte, so sind alle Umdeutungen, welche diese Koinzidenzen ungeändert lassen, ohne physikalischen Sinn. Die Koordinaten x^1, x^2, x^3 sind Namen für die Punkte, nichts anderes, und die Willkür, mit der wir sie ihnen geben, wollen wir im folgenden nur durch eine Rücksicht einschränken: Lassen wir zwei Punkte sich mehr und mehr nähern, so sollen die Werte ihrer entsprechenden Koordinaten stetig ineinander übergehen.

Damit ist dann schon gesagt, daß alle Koordinatensysteme, welche sich durch beliebige, aber stetige Transformationsformeln aus den x^1, x^2, x^3 gewinnen lassen, diesen im Grundsatz durchaus gleichwertig sind. Eine Ausnahmestellung könnte nur ein solches System einnehmen, in welchem die natürliche Maßbestimmung sich besonders einfach ausdrückte; wie etwa unter euklidischen Verhältnissen die rechtwinkelig kartesischen Systeme. Aber wir werden sehen (in § 8, Abschnitt a), daß es in der allgemeinen Riemannsehen Geometrie nichts ihnen Entsprechendes gibt.

Wir schließen aus diesen Betrachtungen: In rein mathematischem Sinne gibt es eine ganze Reihe verschiedener Geometrien, welche jede mit dem gleichen Recht als eine von jeglicher Erfahrung unabhängige Erkenntnis bestehet. Jede ist durch eine Maßbestimmung definiert. Nur darin irrte Kant, daß er die euklidische Geometrie für die einzige mathematisch mögliche hielt. Fragt man, welche von ihnen in der physikalischen Wirklichkeit gilt, so kann man darauf keine Antwort erhalten, ohne daß man physikalische Messungen vornimmt. Man kann nicht den Raum an sich ausmessen, sondern nur räumliche Beziehungen zwischen physikalischen Dingen bestimmen. Kant behält darin recht, daß der Raum kein von den Körpern unabhängiges, selbständiges Dasein führt; er ist nur ein Ordnungsprinzip, ein Schema, nach welchem der menschliche Geist die auf die Außenwelt bezüglichen Wahrnehmungen ordnet. Durch diese Forderung wird die Geometrie allerdings ein Teil der Physik, also auch Erfahrungswissenschaft. Denn niemand kann a priori wissen, welche Maßbestimmung diese Messungen ergeben. Nur als Erfahrungstatsache läßt sich behaupten, daß die euklidische Geometrie bestätigt wird, wie es die bisherige Physik tat; und deswegen ist eine solche Aussage immer nur mit einer gewissen, durch den Stand der physi-

kaiischen Forschung bedingten Genauigkeit richtig. Die allgemeine Relativitätstheorie geht eben über die bisher erreichte Genauigkeit hinaus, wenn sie nichteuklidische Geometrien mit in Betracht zieht Die Notwendigkeit dieses Schrittes hat sich in § 3 gezeigt.

Bei dieser Betrachtung haben wir von zeitlichen Veränderungen abgesehen, und deswegen genügt sie nicht,ganz für die Physik; wir müssen sie vielmehr auf die vier Dimensionen der Welt im Minkowskisehen Sinne ausdehnen. Das bringt aber keine Schwierigkeiten mit sich. Denn jede physikalisch beobachtbare Koinzidenz ist natürlich nicht nur eine räumliche, sondern auch ein zeitliches Zusammenfallen von Ereignissen, also von Weltpunkten. Die Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 eines solchen Punktes bilden nur dessen Namen, das einzig physikalisch Wirkliche an jedem Koordinatensystem ist die in ihm gültige, durch Messungen festzustellende Maßbestimmung für den räumlich zeitlichen Abstand zweier Weltpunkte. Alle Arten dieser Benennung, wenn sie nur die oben für den Raum ausgesprochene Stetigkeitsbedingung und die auf S. 21 erwähnten Forderungen für die Zeitartigkeit von x^4 sowie die Raumartigkeit von x^1, x^2, x^3 erfüllen, sind im Grundsatz gleichwertig, daher auch alle die Transformationen zulässig, welche wir in (4) erwähnten. Aus dieser Betrachtung rechtfertigt sich der Schritt, welchen wir auf S. 21 taten, indem wir von der Zulassung beschleunigter und rotierender Koordinatensysteme zur Zulassung aller Systeme taten, die nicht gegen die erwähnten geringfügigen Einschränkungen verstoßen.

Das allgemeine Relativitätsprinzip ist also nichts anderes als der Grundsatz, daß nur Koinzidenzen von Ereignissen beobachtbar und daher auch das einzige sind, worauf sich physikalische Realität gründen läßt. Wie die Maßbestimmung aussieht, läßt sich aus diesem Gedanken freilich noch nicht entnehmen, dazu muß man vielmehr noch den Gedanken von der Ersetzbarkeit der Schwerefelder durch Bescheunigungen hinzunehmen, der überhaupt erst jenes Prinzip für die Physik möglich macht. Das können wir erst im Teil V näher ausführen.

§ 5. Der Ausdruck für das Linienelement im Drei- und im* Vierdimensionalen.

Die allgemeine Relativitätstheorie beruht mathematisch, wie erwähnt, auf der Riemannsehen- Geometrie; sie setzt wie diese die für die räumlichen Verhältnisse den verallgemeinerten pytha-

gordischen Satz als Axiom an, demzufolge das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx^i dx^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

also eine homogene quadratische Funktion der Differentiale der Koordinaten ist. Für zwei Dimensionen hatte Gauß auf ihn seine Untersuchungen über krumme Flächen gegründet, und er hatte ihn dabei zurückgeführt auf den eigentlichen pythagoräischen Lehrsatz

$$ds^2 = dx^{1\,2} + dx^{2\,2} + dx^{3\,2}$$

der euklidischen Geometrie im dreidimensionalen Raum. Hier aber können wir die Rechtfertigung nicht einfach durch den Hinweis auf eine Mannigfaltigkeit von mehr Dimensionen geben. Vielmehr müssen wir fragen: Warum führt gerade der Ansatz (5) zu einer für die Physik passenden Geometrie? Ist dafür nicht irgend ein anderer Ansatz, etwa

$$ds^4 = \sum_{h,i,k,l=1}^{3} g_{hikl}\, dx^h dx^i dx^k dx^l$$

vorzuziehen *)?

Wie diese Frage zu beantworten ist, hat lange vor der Relativitätstheorie mit genialem Blick Helmholtz erkannt. Daß es keinen wirklich starren Körper gibt, war ihm natürlich bekannt. Aber er sagte sich mit Recht, daß an dieser Idee doch etwas Richtiges daran ist. Kennzeichen des starren Körpers wäre, daß es für jedes ihm angehörende Paar materieller Punkte, die die Koordinaten x und y haben mögen, einen in natürlichem Maß unveränderlichen Abstand

$$\Omega(x', y') = \Omega(y', x')$$

gibt. Erfahrungsgemäß ist aber ein solcher Körper noch frei beweglich; man kann von drei beliebig (nur nicht auf einer Geraden)

*) Fände man es zweckmäßig, Strecken auf der Erdoberfläche etwa nach der Zeit zu werten, die eine Truppe unter normalen Umständen zu ihrer Zurücklegung braucht, so wäre der Ansatz (5) schon aus dem Grunde nicht angemessen, weil danach die Strecken *AB* und *BA* gleich, während sie für die angedeutete Wertung doch im allgemeinen verschieden lang sind. Man müßte also einen anderen Ansatz suchen. Bas ergäbe dann eine von allem bekannten gänzlich abweichende, aber in sich geschlossene und widerspruchsfreie Geometrie. Größere Bedeutung hätte wohl schon der Plan, die nichteuklidische Maßbestimmung für die geometrische Optik, namentlich inhomogener Körper zu benützen, indem man als natürliches Längenmaß die Lichtwellenlänge wählt. Dazu reicht die Maßbestimmung (5) vollständig aus.

gewählten Punkten in ihm den ersten unbeschränkt an jeden Ort $x^i = a^i$ bringen, den zweiten noch an jeden Ort b^i auf einer Fläche $\Omega(a^i, x^i) = const$ und den dritten dann noch an jeden Ort auf der Kurve $\Omega(a^i, x^i) = const$ $\Omega(b^i, x^i) = const$. Man hat also zunächst sechs Freiheitsgrade, nach Festlegung eines Punktes noch drei, nach Festlegung zweier Punkte noch einen. Der Ansatz für Ω soll nun so gewählt werden, daß die drei Freiheitsgrade der Drehung um einen festen Punkt aus ihm abzuleiten sind. Die drei anderen Freiheitsgrade bei der Festlegung eines Punktes sind ja selbstverständlich. Freilich, wollte man diese Forderung für Körper von endlicher Ausdehnung stellen, so käme man notwendig auf eine der drei Geometrien zurück, die schon vor Riemann bekannt waren, die euklidische, die elliptische und die hyperbolische. Wir nehmen daher die Unterschiede der Koordinaten unendlich klein *). Dabei geht die Funktion Ω unmittelbar über in

$$da = \sqrt{F(dx^i)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die in F auftretenden Parameter sind dann noch beliebige Funktionen der x^i.

Einen materiellen Punkt des Körpers halten wir nun fest. Ein ihm benachbarter Punkt hat dann bei einer bestimmten Lage des Körpers die Koordinaten dx^i, bezogen auf den ersten. Bei einer Drehung um den festen Punkt erfahren sie eine Transformation

$$dx'^i = \sum_{k=1}^{3} a_k^i \, dx^k \qquad (i = 1, 2, 3). \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Forderung ist nun: Die neun Koeffizienten a_k^i hängen entsprechend den Freiheitsgraden der Drehung noch von drei unabhängigen Parametern ab. Die Funktion F soll so beschaffen sein, daß sie ihren Wert nicht ändert, wenn wir in ihr die dx^i durch die dx'^i ersetzen.

Um die Folgerungen aus dieser Forderung zu ziehen, schreiben wir für den Augenblick ξ^i für dx^i und deuten uns die drei ξ^i als homogene Koordinaten in einer Ebene, d. h.

$$u = \xi^1/\xi^3, \qquad v = \xi^2/\xi^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

*) Die Mathematiker haben hervorgehoben, daß man aus dem Dasein von sechs Freiheitegraden für endliche Teile des Körpers noch nicht auf ihr Vorhandensein für unendlich kleine Teile schließen dürfe. Schon deswegen müssen wir die letztere Aussage ausdrücklich als aus der Physik übernommenes Axiom einführen.

sollen in dieser rechtwinkelige Koordinaten sein. Die Transformation (7) ist dann eine Kollineation, sie überführt jede Gerade (die ja durch eine in den ξ^i homogene lineare Gleichung gegeben ist) wieder in eine Gerade. $F = 0$ ist die Gleichung einer reellen oder imaginären Kurve, und unsere Forderung nimmt nun die Gestalt an, daß diese Kurve bei dreifach unendlich vielen Kollineationen in sich selbst übergeht. Die projektive Geometrie zeigt, daß dafür nur reelle oder imaginäre Kegelschnitte in Betracht kommen*). Also muß F eine homogene quadratische Funktion der ξ^i oder, was dasselbe sagt, der dx^i sein. Damit ist der Ansatz (5) bis auf die Bemerkung bewiesen, daß da^2 eine positiv definite Form sein muß, weil es sonst Werte von der dx^i gäbe, für die $da^2 0$ wäre; es soll doch aber jedes Punktpaar in einem Streckenraum einen von Null verschiedenen, reellen Abstand haben.

Nun soll die Maßbestimmung für die vierdimensionale Welt für jeden Raum $x'^4 = const$, wobei nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip x'^4 eine beliebige Funktion der x^i ist, in die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^{3} g'_{ik}\, dx'^i\, dx'^k$$

übergehen. Dann muß sie selbst quadratisch sein:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \qquad (9)$$

wobei die g_{ik} beliebige reguläre Funktionen der vier x^i sind. Aber diese quadratische Form ist nicht mehr definit; sie ist negativ, wenn man $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ setzt, positiv definit bei $dx^4 = 0$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür lauten **):

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \; g_{44} < 0. \qquad (10)$$

(Sie lassen sich durch andere ersetzen, in denen der Zeiger 1 mit 2 oder 3 vertauscht ist; denn keiner von diesen hat etwas vor den anderen voraus.) Eine Folgerung aus ihnen besteht darin, daß jede Transformation, welche ds^2 rein durch Quadrate reeller dx^i darstellt, dem dx^4 einen negativen, den anderen Quadraten aber positive Faktoren verschafft („Trägheitsgesetz der quadratischen Formen").

*) Vgl. den Anhang I.
**) Vgl. den Anhang IL

Man kann die Größen g_{ik} im Prinzip messen, indem man die natürliche Länge einer Anzahl von Linienelementen bestimmt, die vom gleichen Punkte x^i nach Punkten $x^i + dx^i$ hinführen. Sind dies raumartige Strecken, so kann man an sie einen Maßstab anlegen, sind sie zeitartig, so muß man dazu eine Uhr benutzen, deren Bewegung durch die betreffende Weltlinie dargestellt ist.

Später werden wir sehen, daß die g_{ik} außer ihrer Bedeutung für die Maßbestimmung noch eine andere haben, nämlich als Potentiale des Schwerefeldes. Und wir werden dann auch die Regeln kennen lernen, nach denen sie aus der Masse und der Bewegung der vorhandenen Körper zu berechnen sind. So prägen also, wie Riemann in der Probevorlesung bei seiner Habilitation in Göttingen prophetisch aussprach, physikalische Tatsachen der Geometrie die Maßbestimmung auf, nämlich der Geometrie, welche die für die Physik „natürliche" ist. Die „bindenden Kräfte", denen er diese Wirkung zuschrieb, und deren Erforschung er mit vollem Recht aus der Mathematik in die Physik verwies, sind nach Einstein eben die Kräfte der Schwere.

„Die Entscheidung dieser Fragen" — so schließt Riemann seinen Vortrag — „kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt hat, ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführten, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird."

Die Relativitätstheorie ist Physik — „und man leistet ihr einen schlechten Dienst, wenn man ihre Ergebnisse vorschnell in "philosophische« oder gar spekulativ-metaphysische umzudeuten versucht. Die Theorie enthält keinen einzigen Begriff, der nicht aus den Denkmitteln der Mathematik und Physik ableitbar und in ihnen vollständig darstellbar wäre. Nur die volle Bewußtheit über eben diese Denkmittel sucht sie zu erringen, indem sie nicht nur Resultate der Messung darzustellen, sondern auch über die Form jeglicher physikalischer Messung und über ihre Bedingungen prinzipielle Klarheit zu gewinnen strebt" (Cassirer). Wenn sie dennoch so lebhaften philosophisch gerichteten Widerspruch erfährt, so möchten wir das zum Teil daraus erklären, daß es wohl erkenntnistheoretische Stand-

punkte geben mag, welche sich nicht mit ihr vertragen. Nimmt sie doch, um mit Einstein zu reden, dem Baum und der Zeit den letzten Rest physikalischer Gegenständlichkeit. Aber in einem Widerstreit zwischen Physik und einem philosophischen' System zieht letzteres meist den kürzeren. Es ist geradezu ein Kennzeichen für eine richtige Erkenntnistheorie, daß sie gegenüber allen Transformationen, welche das physikalische Weltbild im Laufe der Zeiten erfährt, invariant bleibt. Wir wollen unsere Überzeugung nicht verhehlen, daß Kants kritischer Idealismus (wenngleich nicht jeder Satz der „Kritik der reinen Vernunft") dieser Bedingung auch der allgemeinen Relativitätstheorie gegenüber genügt.

III. Weltvektoren und -tensoren in Riemannschen Räumen.

§ 6. Vektor- und Tensoralgebra.

In diesem Abschnitt müssen wir zunächst die im Kapitel IV des ersten Bandes für ein euklidisches oder pseudoeuklidisches Kontinuum von vier Dimensionen entwickelte Vektor- und Tensortheorie auf eins mit allgemeinerer Maßbestimmung übertragen. Wir beginnen mit der Algebra dieser Größen und haben dabei den Vorteil, daß wir zunächst an die früheren Ausführungen leicht anknüpfen können, indem wir in euklidischen Verhältnissen bleiben und nur statt der rechtwinkeligen Koordinaten schiefwinkelige einführen.

a) Kontravariante und kovariante Koordinaten[1]). Wir wollen hier zunächst statt von der pseudoeuklidischen Maßbestimmung in der vierdimensionalen Welt, von der in der beschränkten Relativitätstheorie die Rede ist, von der euklidischen Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_i dx^{i\,2} \qquad (11)^*)$$

in einer n-dimengionalen Mannigfaltigkeit ausgehen. Wie groß die Zahl n ist, ist belanglos; der Leser mag zunächst getrost an den

*) In allen folgenden Summen ist, sofern nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, über jeden unter dem Summenzeichen stehenden Zeiger, unabhängig von den anderen, von 1 bis zur Dimensionszahl n zu summieren; später also, won = 4 ist, von 1 bis 4.

Fall $n = 3$ denken. Dabei sind X^i rechtwinkelige Koordinaten. Führen wir an ihrer Stelle durch eine beliebige lineare Substitution die schief winkeligen Koordinaten x^i ein, so wird s^2 eine homogene quadratische Form der x^i, in welcher aber jetzt auch die Produkte verschiedener x^i vorkommen. Wir schreiben sie

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k \quad (g_{ik} = g_{ki}). \quad (12)$$

Die g_{ik} sind hier Konstanten. Nun denken wir uns die x^i so bestimmt, daß wir in den n Eichtungen, die wir den Koordinatenachsen geben wollen, n in ihrer Länge beliebige, Vektoren e_i ziehen, desgleichen vom Nullpunkt einen Vektor r zu dem zu bestimmenden Punkt; und setzen:

$$\mathfrak{r} = \sum_i x^i e_i. \quad (13)$$

Geometrisch bedeutet dies, daß wir diese Koordinaten durch fortgesetzte Parallelprojektion auf die genannten Achsen gewinnen, wie ja der Linienzug aus den Vektoren $x^1 e_1, x^2 e_2, \ldots$ angibt. Diese Koordinaten bezeichnen wir als kontravariant.

Ihnen gegenüber stellen wir die kovarianten Koordinaten x_i. Es gibt ein System von n Vektoren e_i^*, welches zu den Vektoren e_i reziprok ist, d. h. es sind die skalaren Produkte

$$(e_j^* e_k) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } j = k, \\ 0, \text{ wenn } j \text{ nicht gleich } k; \end{cases} \quad (14)$$

die letzteren Bedingungen sagen, daß z. B. e_1^* senkrecht steht auf allen Vektoren $e_2, e_3, \ldots e_n$, also auch auf der Mannigfaltigkeit (n— 1)ter Ordnung („Koordinatenebene"), welche durch sie bestimmt ist. Die Definition der kovarianten Koordinaten soll nun lauten:

$$\mathfrak{x} = \sum_k x_k e_k^*. \quad (15)$$

Der Linienzug $x_1 e_1^*, x_2 e_2^*, \ldots$ setzt sich aus Stücken zusammen, deren jedes zu (n—1) der Vektoren e_i senkrecht ist. Die kovarianten Koordinaten X_i entstehen also durch senkrechte Projektion des Raumpunktes auf die Koordinatenebenen. Für sie gilt eine ähnliche Maßbestimmung wie (12); wir schreiben:

$$s^2 = \sum_{ik} g^{ik} x_i x_k \quad (g^{ik} = g^{ki}). \quad (16)$$

g_{ik} g^{ik}.
e_i e_i^*.

absoluten Betrag des Vektors $\mathfrak{x}$, indem man jede dieser Gleichungen mit sich selbst skalar multipliziert, so findet man wegen *(12):*

$$\mathfrak{x}^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k = \sum (\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k^*) x^i x^k$$

und wegen (16)

$$\mathfrak{x}^2 = \sum_{ik} g^{ik} x_i x_k = \sum (\mathfrak{e}_i^* \mathfrak{e}_k^*) x_i x_k,$$

also:

$$g_{ik} = (\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k), \quad g^{ik} = (\mathfrak{e}_i^* \mathfrak{e}_k^*). \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Ist $gik = 0$, so stehen die ite und die kte Koordinatenachse aufeinander senkrecht. Den Zusammenhang zwischen den kovarianten und den kontravarianten Koordinaten, den wir bisher durch geometrische Konstruktion hergestellt haben, erhält man in algebraischer Form, wenn man die Identität

$$\mathfrak{x} = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i = \sum_i x_i \mathfrak{e}_i^*, \quad (18)$$

$\mathfrak{e}_k \qquad \mathfrak{e}_k^*$

$$x_k = \sum_i g_{ik} x^i, \quad x^k = \sum_i g^{ik} x_i. \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Die Determinante der *gik* bezeichnen wir mit *g.* Da das eine der Transformationssysteme (19) die Auflösung des anderen sein muß, ist g^{ik} der Quotient aus der *gik* zugeordneten Unterdeterminante und aus *g* selbst. Bekannte Determinantensätze sagen aus:

$$\sum_i g_{ik} g^{il} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = l, \\ 0, & \text{wenn } k \gtrless l, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} g^{11} g^{12} \ldots \\ g^{21} g^{22} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \frac{1}{g}. \quad (20)$$

Aus ihnen folgt u. a. für *n* Dimensionen:

$$\sum_{ik} g_{ik} g^{ik} = n \ldots \ldots \ldots \quad (20\,a)$$

Denn bei konstantem i liefert die Summation nach *k* den Wert 1, und die Summation nach *i* ver-w-facht dies.

Sind alle $g_{ii} = +1$, während alle *gik* mit verschiedenen Zeigern verschwinden, so fallen nach (19) die kontravarianten Koordinaten mit den kovarianten zusammen.

b) Vektoren. Wir reden zunächst von den Linienvektoren, die wir für eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit in Bd. I auch als Vierervektoren bezeichnet haben. Die Größen x^i und x_i, welche wir soeben als Koordinaten des Endpunktes des Vektors $\mathfrak{x}$ hinstellten, können wir natürlich auch als die Komponenten dieses Vektors bezeichnen. Und da wir jeden solchen Vektor P durch eine gerichtete Strecke darstellen können, übertragen sich die Gleichungen (19) auf dessen kontravarianten Komponenten P^i und die kovarianten Komponenten Pi wie folgt:

$$P_k = \sum_i g_{ik} P^i, \qquad P^k = \sum_i g^{ik} P_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Außerdem folgt daraus: **Bei einer Koordinatentransformation rechnen sich die Vektorkomponenten wie die entsprechenden Koordinaten um.**

Der absolute Betrag eines Vektors ist nach (12) und (16)

$$P^2 = \sum_{ik} g_{ik} P^i P^k = \sum_{ik} g^{ik} P_i P_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Indem man nach (19) eine der beiden Summationen ausführt, findet man auch:

$$P^2 = \sum_i P^i P_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Sind P und Φ zwei Vektoren, λ und μ zwei Skalare, so ist

$$\lambda P + \mu \Phi$$

ein Vektor*)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{ik} g_{ik} (\lambda P^i + \mu \Phi^i)(\lambda P^k + \mu \Phi^k) \\ &= \lambda^2 P^2 + \mu^2 \Phi^2 + 2 \lambda \mu \sum_{ik} g_{ik} P^i \Phi^k. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Daraus entnehmen wir im Hinblick auf (21) die folgenden Darstellungsarten des skalaren Produktes:

$$(P\Phi) = \sum_{ik} g_{ik} P^i \Phi^k = \sum_i P^i \Phi_i = \sum_k P_k \Phi^k = \sum_{ik} g^{ik} P_i \Phi_k \quad (25)$$

*) Es sei schon hier bemerkt, daß man in Riemannschen Mannigfaltigkeiten nur Vektoren am gleichen Ort durch Summation gleichnamiger Komponenten addieren und subtrahieren kann (s. § 8).

Bei der euklidischen Maßbestimmung (11) ist s^2 sowie das Quadrat des absoluten Betrages eines Vektors stets positiv. Also ist die quadratische Form (24) von und positiv
definit und deshalb

$$(P\Phi)^2 \leqq P^2 \cdot \Phi^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

für eine pseudoeuklidische Maßbestimmung für s^2 wäre dieser Schluß aber nicht zutreffend.

Die geometrische Definition des Vektors kann man im Anschluß hieran durch die algebraische Forderung ersetzen, daß für die Koordinaten x^k eines jeden Punktes

$$\sum_{ik} g_{ik} P^i x^k = \sum_{ik} g^{ik} P_i x_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

invariant ist. Diese Forderung sagt nämlich, wie bekannt, schon für orthogonale Transformationen rechtwinkeliger Koordinatensysteme dasselbe, wie die ursprüngliche Definition; und der Übergang zu der weit größeren Schar beliebiger Transformationen geradliniger Achsenkreuze, wie wir sie hier behandeln, kann ihren Inhalt keinesfalls beschränken.

Den Winkel zwischen zwei Vektoren P und Φ können wir wie früher auf ihr skalares Produkt und ihre absoluten Beträge nach der Formel

$$\cos(P, \Phi) = \frac{(P\Phi)}{\sqrt{P^2 \cdot \Phi^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

zurückführen. Bei euklidischer Maßbestimmung ist dieser Kosinus wegen (26) stets kleiner als 1, der Winkel also reell; im pseudoeuklidischen Fall kann es anders sein. Aus *(28)* folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{P^2 \cdot \Phi^2 - (P\Phi)^2}{P^2 \cdot \Phi^2} \\ &= \frac{\sum_{ik} g_{ik} P^i P^k \cdot \sum_{lm} g_{lm} \Phi^l \Phi^m - \sum_{il} g_{il} P^i \Phi^l \cdot \sum_{km} g_{km} P^k \Phi^m}{P^2 \cdot \Phi^2} \\ &= \frac{1}{P^2 \cdot \Phi^2} \sum_{iklm} (g_{ik} g_{lm} - g_{il} g_{km}) P^i P^k \Phi^l \Phi^m. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Ist 2 die Zahl der Dimensionen, so kann man dafür schreiben:

$$\sin\varphi = \pm \sqrt{\frac{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}{P^2 \cdot \Phi^2}} (P^1 \Phi^2 - P^2 \Phi^1). \quad \ldots \quad (29a)$$

c) Tensoren zweiten Ranges. In Bd. I, § 13, haben wir den symmetrischen Tensor im Hinblick auf rechtwinkelige Achsen-

kreuze dahin definiert, daß für beliebige Werte der rechtwinkeligen Koordinaten X_I und Y_i die Summe

$$\sum_{ik} T_{ik} X_i Y_k$$

einen Skalar darstellen soll*), und daß

$$T_{ik} = T_{ki}$$

ist. Auf die letztere Forderung verzichten wir hier.

Für die Benutzung schief winkeliger Koordinatensysteme erweitern wir diese Definition dahin, daß

$$\sum_{ik} T_{ik} x^i y^k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

gegenüber beliebigen linearen Transformationen invariant ist. Dabei treten die kovarianten Tensorkomponenten T_{ik} auf. Ersetzt man hier die x^i oder y^k durch *die* x_i bzw. *yk* nach (19), so bekommt dieselbe Bilinearform die Gestalt

oder

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{ik} T^i{}_k x_i y^k \quad \left(T^i{}_k = \sum_m g^{mi} T_{mk}\right), \\ &\sum_{ik} T_i{}^k x^i y_k \quad \left(T_i{}^k = \sum_m g^{mk} T_{im}\right); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

und wiederholt man das Verfahren, die Form

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{ik} T^{ik} x_i y_k \\ &\left(T^{ik} = \sum_m g^{mk} T^i{}_m = \sum_m g^{mi} T_m{}^k = \sum_{mn} g^{mi} g^{nk} T_{mn}\right). \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

In (32) treten die kontravarianten, in (31) die gemischten Komponenten des Tensors auf. Man kann übrigens in der Summe (30) für einen symmetrischen Tensor *(Tik = Tki)* $y^i = x_i$

*) Dies bezieht sich auf die vierte Auflage des ersten Bandes. In den früheren Auflagen definierten wir, daß für beliebige Werte der Koordinaten X_i die vier Ausdrücke

$$\sum_i T_{ik} X_i \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

Vektorkomponenten bilden sollen. Das kommt nach der Definition des Vektors in Abschnitt b) des vorliegenden Paragraphen aber auf dasselbe hinaus.

setzen, ohne daß die Definition des Tensors an Bestimmtheit verliert. Denn ist eine quadratische Form $Q(X^2)$ für alle möglichen x^i invariant, so gilt dasselbe von

$$Q[(x+y)^2] = Q(x^2) + Q(y^2) + 2\,Q(xy),$$

also auch von der zugehörigen Bilinearform $Q(xy)$.

Bildet man aus zwei Vektoren P und Φ $T_{ik} = P_i \Phi_k$, so sind dies die Komponenten des Tensorproduktes aus P und Φ. Denn

$$\sum_{ik} P_i \Phi_k x^i y^k = \left(\sum_i P_i x^i\right)\left(\sum_k \Phi_k y^k\right)$$

ist als Produkt zweier invarianten Summen selbst invariant. Doch ist dieser Tensor ein ganz besonderer, da ja — um nur von vier Dimensionen zu reden — zwischen seinen 16 Komponenten, welche durch die acht Komponenten von P und Φ bestimmt sind, notwendig acht Beziehungen bestehen. Diese Beziehungen, nicht aber die Tensoreigenschaft, gehen verloren, wenn man setzt:

$$T_{ik} = A_i A_k^* + B_i B_k^* + \Gamma_i \Gamma_k^* + \Delta_i \Delta_k^*, \quad \ldots \quad (33)$$

und es läßt sich leicht zeigen, daß sich jeder Tensor so durch acht Vektoren darstellen läßt. Schreiben wir nämlich die Vektoren A, B, Γ, Δ beliebig vor, doch so, daß ihre Determinante, $|A_1 B_2 \Gamma_3 \Delta_4|$, nicht verschwindet, so können wir zunächst für ein bestimmtes Koordinatensystem die vier Gleichungen (33), in welchem $k = 1$ ist, benutzen, um A_1^*, B_1^*, Γ_1^*, Δ_1^* zu berechnen. Entsprechend ermitteln wir darauf die anderen Komponenten dieser Vektoren. Die so gewonnene Kenntnis der Vektoren A^*, B^*, Γ^*, Δ^* gilt dann für jedes Koordinatensystem, weil sich die beiden Seiten der Gleichungen (33) nach der Voraussetzung, daß die T_{ik} einen Tensor bestimmen, in gleicher Weise transformieren. Den Inhalt der Gleichungen (33) kann man in die Worte kleiden: Ein Tensor läßt sich im Vierdimensionalen durch vier, im n-dimensionalen Raum durch n Paare tensoriell miteinander multiplizierter Vektoren bestimmen. Letzteres gilt nicht nur für die kovarianten Komponenten; vielmehr folgt aus (33) nach (31) und (32) für die gemischten und kontravarianten Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} T^i{}_k &= A^i A_k^* + B^i B_k^* + \Gamma^i \Gamma_k^* + \Delta^i \Delta_k^*, \\ T_k{}^i &= A_k A^{*i} + B_k B^{*i} + \Gamma_k \Gamma^{*i} + \Delta_k \Delta^{*i}, \\ T^{ik} &= A^i A^{*k} + B^i B^{*k} + \Gamma^i \Gamma^{*k} + \Delta^i \Delta^{*k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (33a)$$

Ferner ziehen wir aus (33) und (33a) den Schluß: Bei einer Koordinatentransformation rechnen sich die ko- und die kontravarianten Tensorkomponenten um wie die Quadrate und Produkte der ko- bzw. kontravarianten Koordinaten. Die gemischten Komponenten verhalten sich wie die Produkte aus je einer ko- und einer kontravarianten Koordinate. Nach (33a) und (26a) ist die Diagonalsumme

$$\sum_i T^i{}_i = \sum_i A^i A^*_i + \sum B^i B^*_i + \cdots = \sum_i A_i A^{*i} + \cdots = \sum_i T_i{}^i$$

eine Invariante, und zwar bis auf einen bedeutungslosen Zahlenfaktor die einzige lineare Invariante des Tensors; denn soll $\sum_i a^{(i)} T^i{}_i$ eine Invariante sein, so muß nach (33a) dasselbe für $\sum_i a^{(i)} A^i A^*_i$ usw. gelten. Da aber das skalare Produkt die einzige aus zwei verschiedenen Vektoren zu bildende Invariante ist, müssen alle Koeffizienten $a^{(i)}$denselben skalaren Wert besitzen.

Aus einem beliebigen Tensor T kann man durch die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) = A_{ik}, \qquad \tfrac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = \mathfrak{M}_{ik}$$

zwei neue Tensoren ableiten; denn sind

$$\sum_{ik} T_{ik} x^i . y^k \quad \text{und} \quad \sum_{ik} T_{ki} x^i y^k$$

Invarianten, so sind es auch die Summe und die Differenz davon. Wegen $A_{ik} = A_{ki}$ ist der Tensor A symmetrisch, wegen $\mathfrak{M}_{ik} = -\mathfrak{M}_{ki}$ ist $\mathfrak{M}$ antisymmetrisch; beide Eigenschaften sind vom Koordinatensystem unabhängig und beziehen sich auch auf die kontravarianten Komponenten, da

$$A^{ik} = \tfrac{1}{2}(T^{ik} + T^{ki}), \quad \mathfrak{M}^{ik} = \tfrac{1}{2}(T^{ik} - T^{ki})$$

ist. Der antisymmetrische Tensor hat in vier Dimensionen je 12 ko- und kontravariante Komponenten mit ungleichen Zeigern, welche sich paarweise entgegengesetzt gleich sind; die Komponenten $\mathfrak{M}_{ii}$ und $\mathfrak{M}^{ii}$ sind Null; beim Übergang zu einem rechtwinkeligen Achsensystem erkennt man, daß er dasselbe ist, was wir früher als Sechservektor bezeichnet haben. Geometrisch stellt er nach Bd. I, § 11c zwei zueinander senkrechte Flächenstücke nach Lage, Größe und Umlaufsinn dar.

Der Unterschied zwischen den gemischten Komponenten $T^i{}_k$ und $T_k{}^i$ fällt beim symmetrischen Tensor fort; man schreibt dann

einlach T_k^i. Beim antisymmetrischen Tensor, dem Sechservektor $\mathfrak{W}$, hingegen ist

$$\mathfrak{W}_k^i = \sum_j g_{jk} \mathfrak{W}^{ij} = -\sum_j g_{jk} \mathfrak{W}^{ji} = -\mathfrak{W}_k^i.$$

Das gilt auch noch, wenn die Zeiger *i* und *Je* einander gleich werden; die Komponenten $\mathfrak{W}_i^i = -\mathfrak{W}_i^i$ verschwinden keineswegs.

d) Der Tensor der Maßbestimmung und die allgemeine lineare Koordinatentransformation. Da in den Maßbestimmungen (12) und (16) s^2 eine gegen alle linearen Transformationen der Koordinaten invariante Größe sein soll, stellen die *gut* und die g^{ik} die ko- und kontra Varianten Komponenten des symmetrischen Tensors der Maßbestimmung dar. Dessen gemischte Komponenten sind nach (31) und (20), sofern sie zwei gleiche Indizes tragen, 1, sonst 0; man führt für sie mit Nutzen das Zeichen δ_k^i ein.

Diese Erkenntnis ermöglicht uns nun, den Zusammenhang aufzusuchen, der beim, Übergang von einem geradlinig-schief winkeligen Achsenkreuz zum anderen zwischen den Transformationsformeln für die kontra- und die kovarianten Koordinaten besteht. Wir geben diese Transformationen für die kontravarianten Koordinaten in der Form

$$x^m = \sum_i \alpha_i^m x'^i \quad \text{bzw.} \quad x'^i = \sum_m \beta_m^i x^m, \quad \ldots \quad (34)$$

Dazu müssen zwischen den Koeffizienten α und ß die Beziehungen

$$\sum_m \alpha_i^m \beta_m^j = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \gtrless j \end{cases} \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

bestehen. Nun ist nach (19) und der entsprechenden Gleichung für das gestrichene System

$$x_k = \sum_m g_{km} x^m = \sum_{im} g_{km} \alpha_i^m x'^i = \sum_{ilm} g_{km} \alpha_i^m g'^{il} x'_l.$$

Nach dem Satze, daß sich Tensorkomponenten wie Koordinatenprodukte umrechnen, gilt aber:

$$g^{il} = \sum_{no} \beta_n^i \beta_o^i g^{no},$$

folglich:

$$x_k = \sum_{ilmno} g_{km} \alpha_i^m \beta_n^i \beta_o^i g^{no} x'_l.$$

Hier summieren wir zunächst, unter Beachtung von (36), nach i:

$$x_k = \sum_{l\,m\,a} g_{km} g^{m\,a} \beta_a^l x_l';$$

sodann, unter Berücksichtigung von (20), nach *m:*

$$x_k = \sum_i \beta_k^i x_i'. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

Nach (35) müssen die Umkehrungen lauten:

$$x_i' = \sum_k \alpha_i^k x_k. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36\,a)$$

Bei der Umrechnung der kovarianten Koordinaten vom ungestrichenen, auf das gestrichene System treten also dieselben Koeffizienten auf, wie bei der Umrechnung der kontravarianten vom gestrichenen auf das ungestrichene, und umgekehrt. Da wir die Vektor- und Tensortransformation auf Koordinatentransformation zurückführen konnten, überträgt sich dieser Satz unmittelbar auf deren ko- und kontravariante Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} T_{ik} &= \sum_{l\,m} \beta_i^l \beta_k^m T_{l\,m}', \qquad T_{ik}' = \sum_{l\,m} \alpha_i^l \alpha_k^m T_{l\,m}, \\ T^i{}_k &= \sum_{l\,m} \alpha_l^i \beta_k^m T'^l{}_m, \qquad T'^i{}_k = \sum_{l\,m} \beta_l^i \alpha_k^m T^l{}_m. \end{aligned}\right\} \quad (36\,b)$$

Die Determinante der α_i^k bezeichnen wir mit *A*, die der kovarianten Komponenten T_{ik} eines beliebigen Tensors mit $|T_{ik}|$. Nach (36 b) folgt dann durch zweimalige Anwendung des für Determinanten geltenden Multiplikationssatzes

$$\left|T_{ik}'\right| = A \left|\sum_n \alpha_k^n T_{in}\right| = A^2 \left|T_{ik}\right|. \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

A ist zugleich die Funktionaldeterminante der x^i nach den x'^i. Nennen wir *dX* das über einen unendlich kleinen, aber beliebig geformten vierdimensionalen Bereich erstreckte Integral $\int dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$, so gilt nach einem Satz über bestimmte Integrale die Gleichung

$$dX = |A| dX' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37\,a)$$

oder nach der auf die Determinante *g* angewandten Gleichung (37):

$$\sqrt{g}\, dX = \sqrt{g'}\, dX'. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Dies ist also eine Invariante, und zwar das Volumen $d\Sigma$ des betrachteten Bereichs, wie der Übergang zu den benutzten rechtwinkeligen Koordinaten X, beweist. Das Zeichen + gilt, wenn $A > 0$,ist, sonst —. g ist in dem rechtwinkeligen System X^i nach (11) gleich + 1; da wir nur reelle Koordinatentransforniationen betrachten, ist g nach (37) in jedem System positiv. In der „Welt" der Relativitätstheorie gilt freilich statt (11) die pseudoeukKdische Maßbestimmung

$$s^2 = X^{1^2} + X^{2^2} + X^{3^2} - X^{4^2},$$

bei welcher $g = -1$ wird. Infolgedessen ist dann für jedes Koordinatensystem g negativ und wir müssen

$$\sqrt{-g}\, dX = \sqrt{-g'}\, dX' \quad \ldots\ldots \quad (38\,a)$$

als Volumen des Bereichs dX betrachten. Wir werden (38) in anderer Ableitung im Abschnitt f) wiederfinden.

e) Tensoren höheren Eanges. Es liegt nahe, die, Vektoren als Tensoren ersten Banges zu bezeichnen, die bisher als Tensoren schlechthin benannten Größen als solche zweiten Ranges, und ihnen dann Tensoren höheren Ranges an die Seite zu stellen. Einen Tensor wten Ranges definieren wir durch die Forderung, daß eine mfache Linearform

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} T_{i_1 i_2 \ldots i_m}\, x_{(1)}^{i_1} x_{(2)}^{i_2} \ldots x_{(m)}^{i_m}$$

für alle möglichen Werte der $x^i_{(m)}$ gegen alle Koordinatentransformationen invariant sein soll. Der Ansatz

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_m} = P_{i_1}^{(1)} P_{i_2}^{(2)} \ldots P_{i_m}^{(m)}, \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

in welchem die $P^{(i)}$ Vektoren bedeuten, genügt dieser Forderung, weil die genannte Linearform für ihn in' ein Produkt aus invarianten Summen $\sum_i P_i x^i \ldots$ zerfällt. Aber um den allgemeinsten Tensor $n$ten Ranges zu erhalten, muß man eine Reihe solcher Ausdrücke wie (39) summieren. Doch läßt sich das Transformationsgesetz der kovarianten Tensorkomponenten schon aus (39) entnehmen.

Natürlich hat derselbe Tensor auch kontravariante Komponenten,.

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_m} g^{i_1 k_1} g^{i_2 k_2} \ldots g^{i_m k_m}\, T_{k_1 k_2 \ldots k_m} \quad \ldots \quad (40)$$

und gemischte der verschiedensten Ordnung, insofern **jeder Zeiger unter Aufrechterhaltung der Zeigerfolge *)** in die **obere oder** untere Stellung gesetzt werden kann,-z. B.:

$$T^{i_1 \dots i_n}{}_{i_{n+1} \dots i_m} = \sum_{k_1 \dots k_n} g^{i_1 k_1} g^{i_n k_n} T_{k_1 \dots k_n, i_{n+1} \dots i_m} \qquad (40\,a)$$

Die Umkehrungen von (40) und (40a) lauten

$$\left.\begin{aligned} T_{i_1 i_2 \dots i_m} &= \sum_{k_1 k_2 \dots k_m} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \cdots g_{i_m k_m} T^{k_1 k_2 \dots k_m} \\ &= \sum_{k_1 \dots k_n} g_{i_1 k_1} \cdots g_{i_n k_n} T^{k_1 \dots k_n}{}_{i_{n+1} \dots i_m} \end{aligned}\right\} \qquad (40\,b)$$

Auch die Gleichung

$$T^{i_1 \dots i_n}{}_{i_{n+1} \dots i_m} = \sum_{k_{n+1} \dots k_m} g_{i_{n+1} k_{n+1}} \cdots g_{i_m k_m} T^{i_1 i_2 \dots i_m}$$

sei hier angeführt. Der Ansatz (39) läßt sich also auf kontravariante und gemischte Tensorkomponenten einfach dadurch übertragen, daß man auf beiden Seiten der Gleichung dieselben Zeiger in die obere Stellung bringt.

Aus dem Ansatz (39), seiner Verallgemeinerung durch Addition mehrerer solcher Produkte, und seiner Übertragung auf kontravariante und gemischte Tensorkomponenten, folgt die Regel: Multipliziert man alle Komponenten eines Tensors mit allen Komponenten eines Vektors, so findet man alle Komponenten eines Tensors von einem um Eins erhöhten Range. Dabei bleiben alle Zeiger der Tensor- und Vektorkomponenten in ihrer oberen oder unteren Stellung erhalten. Also z. B.:

$$T^{\alpha}{}_{\beta} P^{\nu} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\nu}, \qquad T^{\alpha}{}_{\beta} P_{\gamma} = T^{\alpha}{}_{\beta\gamma}.$$

Multipliziert man einen Tensor *n*ten mit einem *m* ten Ranges, so findet man einen Tensor (m + n)ten Ranges.

Während die Multiplikation von Tensoren zu solchen höheren Ranges führt, ermöglicht die „Verjüngung eines Tensors" den Übergang vom n ten zum (n—2)ten Rang. Sie besteht darin, daß man in einer gemischten Komponente einen oberen einem unteren

*) Beim Tensor wten Ranges, gibt es hinter dem Zeichen *T* *T m* Stellen für Zeiger. An jeder Stelle kann der hingehörende Zeiger noch oben oder unten stehen.

Zeiger gleich setzt und Dach diesem summiert. Nach (39) findet man dabei z. B.

$$\sum_k T^{k i_2 \cdots i_m}{}_{k i_{m+2} \cdots i_n} = P^{(1) i_2} \cdots P^{(m) i_m} P^{(m+2)}_{i_{m+2}} \cdots P^{(n)}_{i_n} \sum_k P^{(1) k} P^{(m+1)}_k .$$

Da die Summe auf der rechten Seite invariant ist, wird so in der Tat ein Tensor geschaffen, dessen Rang um 2 kleiner ist, als der des Ausgangstensors. Dies bleibt bestehen, wenn der erste Tensor nicht durch ein Produkt aus Vektoren, sondern nur durch eine Summe solcher Produkte darzustellen ist. Bei einem Tensor zweiten Ranges ist z. B., wie wir schon oben sahen, $\sum_k T^k_k$ Tensor vom Range Null, d. h. ein Skalar.

Die Verjüngung ist der einzige Weg, durch lineare Kombination der Komponenten eines Tensors vom nten zu einemTensor vom(n—2)tenRange zu gelangen; soll nämlich

$$\sum_k a^{(k)} T^{k i_2 \cdots i_m}{}_{k i_{m+2} \cdots i_n}$$

einen Tensor (n — 2)ten Ranges definieren, so muß

$$\sum_k a^{(k)} \sum_i T^{k i_2 \cdots i_m}{}_{k i_{m+2} \cdots i_n} \Phi^{(2)}_{i_2} \cdots \Phi^{(m)}_{i_m} \Phi^{(m+2) i_{m+2}} \cdots \Phi^{(n) i_n},$$

wobei $\sum_i$ die Summation nach allen auftretenden Zeigern i_p andeutet, für beliebige Vektoren Φ ein Skalar sein. Die Summe $\sum_i$ stellt aber einen Tensor zweiten Ranges dar, und da für diesen die Diagonalsumme die einzige lineare Invariante bildet, müßten die $a^{(k)}$ alle denselben skalaren Wert besitzen.

Aus einem Vektor *Y* und dem antisymmetrischen Tensor (Sechservektor) $\mathfrak{M}_{kl}$ bilden wir z. B. den Tensor dritten Ranges

$$T^j_{kl} = Y^j \mathfrak{M}_{kl}$$

und verjüngen ihn nach den Zeigern *j* und *l*. So entsteht der Vektor

$$\Phi_k = \sum_l Y^l \mathfrak{M}_{kl} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

den wir nach Bd. I, § 11 als das vektorielle Produkt aus *Y* und $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Er ist, wie man schon dort erwähnt, senkrecht zu *Y;* denn das skalare Produkt

$$(Y \Phi) = \sum_k Y^k \Phi_k = \sum_{kl} Y^k Y^l \mathfrak{M}_{kl}$$

verschwindet, weil die Doppelsümme aus Paaren sich aufhebender Summanden, z. B. $Y^1 Y^2 \mathfrak{W}_{12}$ und $Y^2 Y^1 \mathfrak{W}_{21}$, ergibt.

Auch Tensoren höheren Ranges können in einem oder mehreren Paaren ihrer Zeiger symmetrisch oder antisymmetrisch sein. Ist α, β ein solches Paar, so ändert sich beim symmetrischen Tensor nichts, beim antisymmetrischen nur das Vorzeichen, wenn man β an die Stelle hinter dem Zeichen T setzt, an welcher anfangs α stand, und α umgekehrt an die Stelle, welche β ursprünglich einnahm. Dabei muß aber jeder obere Zeiger oben, jeder untere unten bleiben. D. h. also

$$T^{\alpha\beta\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \pm T^{\beta\alpha\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots}$$

$$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \sum_i g_{\beta i} T^{\alpha i\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \pm \sum_i g_{\beta i} T^{i\alpha\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \pm T_{\beta}{}^{\alpha\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots}$$

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \sum_i g_{\alpha i} T^{i}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \pm \sum_i g_{\alpha i} T_{\beta}{}^{i\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \pm T_{\beta\alpha}{}^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots}$$

Das obere Vorzeichen gilt immer für den symmetrischen, das untere für den antisymmetrischen Tensor. Diese Umformungen erbringen den Beweis, daß die verschiedenen, diesen Tensoren zugeschriebenen Eigenschaften auseinander hervorgehen.

Man kann die oben gegebene Tensordefinition noch in manche andere, ihr gleichwertige Form kleiden. Sind z. B. die

$$A^j = \sum_{i_1 \ldots i_m} T^j_{i_1 i_2 \ldots i_m} P^{(1)i_1} P^{(2)i_2} \ldots P^{(m)i_m}$$

kontravariante, oder die

$$B_j = \sum_{i_1 \ldots i_m} T_j^{i_1 i_2 \ldots i_m} P^{(1)}_{i_1} P^{(2)}_{i_2} \ldots P^{(m)}_{i_m}$$

kovariante Vektorkomponenten, wie wir auch die Vektoren $P^{(1)}$ bis $P^{(m)}$ wählen mögen, so folgt daraus die Tensoreigenschaft der $T^j_{i_1 \ldots i_m}$ oder der $T_j^{i_1 \ldots i_m}$. Denn bilden wir mittels eines beliebigen neuen Vektors p(m +1)

$$\sum A^i P^{(m+1)}{}_i \text{ und } \sum B_j P^{(m+1)j},$$

so können wir diese Eigenschaft aus der obigen Definition erschließen. Desgleichen genügt die Forderung, daß die

$$A^j_k = \sum T^j_{k i_1 i_2 \ldots i_m} P^{(1)i_1} P^{(2)i_2} \ldots P^{(m)i_m}$$

für beliebige Vektoren P die gemischten Komponenten eines Tensors zweiten Ranges darstellen.

Das Produkt aus einem Tensor mit $\sqrt{g}$ (bei euklidischer) oder $\sqrt{-g}$ (bei der pseudoeuklidischen Maßbestimmung der Relativitätstheorie) bezeichnet man als **Tensordichte**. Ihre Bedeutung liegt darin, daß ihr Produkt mit dX, dem Produkt aus den Differentialen dx^i, einen Tensor bildet; denn nach (38) oder (38a) ist $\sqrt{\pm g}\, dX$ ein Skalar.

f) **Vollständig antisymmetrische Tensoren** nennen wir solche, deren Komponenten in jedem Zeigerpaar antisymmetrisch sind. Für den Tensor zweiten Ranges ergibt diese Definition nichts Neues, wohl aber beim Tensor dritten oder höheren Ranges.

Vollständig antisymmetrische Tensoren dritten Ranges haben in vier Dimensionen im wesentlichen vier kontra Variante und vier kovariante Komponenten; erstere lauten

$$T^{234}, \quad T^{341}, \quad T^{412}, \quad T^{123};$$

alle anderen, soweit sie nicht wegen zweier gleichen Zeiger Null sind, stimmen mit ihnen entweder ganz oder bis aufs Vorzeichen überein. Zyklische Vertauschung der Zeiger ändert nichts, weil sie hier, bei einer ungeraden Zahl von Zeigern, durch zwei paarweise Vertauschungen zu ersetzen ist. Sie lassen sich immer durch drei Vektoren Φ, Ψ, X nach dem Determinantenschema

$$T^{ijk} = \sum \pm \Phi^i \Psi^j X^k \quad \ldots\ldots\ldots (41a)$$

darstellen und haben als geometrisches Abbild einen Raum mit Schraubensinn (Bd.I, § 11c). Bei der Koordinatentransformation (34) gehorchen die kontravarianten Komponenten den Umrechnungsformeln

$$T^{234} = A_1^1 T'^{234} + A_2^1 T'^{341} + A_3^1 T'^{412} + A_4^1 T'^{123}, \quad \ldots (42)$$

wenn die A_i^m die Unterdeterminanten der Determinante A der Koeffizienten α_i^m bedeuten. Bei den orthogonalen Transformationen, wie sie die beschränkte Relativitätstheorie ausschließlich benutzt, gilt nach Bd.I, § 9:

$$A_i^m = \alpha_i^m,$$

und die Gleichung (42) geht in die Transformation für den Vektorkomponenten über. Deswegen konnten wir in Bd. I diese Tensoren wie Vierervektoren behandeln, während wir sie hier wohl davon unterscheiden müssen.

Ein **vollständig antisymmetrischer Tensor** vierten Ranges hat in vier Dimensionen nur je eine von Null verschiedene kontra-

Variante und kovariante Komponente. Erstere schreibt sich, ganz wie man will,

$$T^{1234} = T^{2314} = \cdots = -T^{2134} = -T^{2341} = \cdots$$

Allgemein gesprochen ist $T^{ijkl} = +T^{1234}$, wenn die Reihenfolge *ijkl* aus der Folge 1234 durch eine gerade Permutation hervorgeht, im anderen Falle muß das negative Vorzeichen gesetzt werden. Dieser Tensor ist gleich der Determinante aus vier Vektoren und entspricht geometrisch dem von jenen Vektoren aufgespannten vierdimensionalen Parallelepiped. Dementsprechend lautet seine Transformation ähnlich der Gleichung (37a), nämlich

$$T'^{1234} = A\,T'^{1234}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Bei der Lorentztransformation war $A = 1$, also dieser Tensor ein Skalar.

Vollständig antisymmetrische Tensoren fünften oder höheren Ranges gibt es in vier Dimensionen nicht, denn die höchste Rangzahl fällt mit der der Dimensionen zusammen.

Formel (40 b), welche die kontra- in die kovarianten Komponenten umwandelt, erhält für vollständig antisymmetrische Tensoren sehr viel einfachere Gestalt. Die dreireihigen Unterdeterminanten von g haben wir schon mit g^{ik} benannt. Bezeichnen wir die zweireihigen mit $g^{\alpha\delta}_{\sigma\vartheta}$, so lauten sie nämlich

$$\left.\begin{aligned} T_{23} &= g^{14}_{14}T^{23} + g^{24}_{14}T^{31} + g^{34}_{14}T^{12} \\ &\quad + g^{23}_{14}T^{14} + g^{31}_{14}T^{24} + g^{12}_{14}T^{34} \quad \text{usw.}, \\ T_{234} &= g(g^{11}T^{234} + g^{12}T^{341} + g^{13}T^{412} + g^{14}T^{123}) \quad \text{usw.}, \\ T_{1234} &= g\,T^{1234}. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Die Umkehrung der zweiten dieser Gleichungen lautet nach (20)

$$T^{234} = \frac{1}{g}(g_{11}T_{234} + g_{12}T_{341} + g_{13}T_{412} + g_{14}T_{123}). \quad \ldots \quad (44')$$

Bildet man aus einem antisymmetrischen Tensor zweiten Ranges T_{ik} und einem Vektor P die Ausdrücke

$$T_{ikl} = P_i\Phi_{kl} + P_k\Phi_{li} + P_l\Phi_{ik}, \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

so definieren diese einen Tensor dritten Ranges, welcher vollständig antisymmetrisch ist. Man überzeugt sich leicht, daß $T_{ikl} = -T_{lik}$ ist. Der neue Tensor fällt in der beschränkten Relativitätstheorie mit einem Viervektor, nämlich mit dem Vektorprodukt eines Vierer-

vektors mit einem Sechservektor, zusammen. Ist T_{ikl} vollständig antisymmetrisch, so hat der Tensor

$$T_{1234} = P_1 T_{234} - P_2 T_{341} + P_3 T_{412} - P_4 T_{123} \quad (45\,a)$$

dieselbe Eigenschaft*).

Jeder Tensor zweiten Ranges hat die Invariante

$$\frac{1}{2}\sum_{ik} T_{ik} T^{ik}.$$

Denn in dieser Summe wird der Tensor vierten Banges $T_{ik} T^{lm}$ zweimal verjüngt, sein Rang also um *2x2* verringert. Bei einem antisymmetrischen Tensor oder Sechservektor $\mathfrak{M}$ ist dies das Quadrat seines absoluten Wertes; denn nach Bd. I, § 10e wird er bei Einführung eines rechtwinkeligen Achsenkreuzes, in welchem man zwischen kontra- und kovarianten Komponenten nicht zu unterscheiden braucht, gleich

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}_{14}^2 + \mathfrak{M}_{24}^2 + \mathfrak{M}_{34}^2 + \mathfrak{M}_{23}^2 + \mathfrak{M}_{31}^2 + \mathfrak{M}_{12}^2.$$

Diese Invariante läßt sich unter Benutzung der Formel

$$\mathfrak{M}_{ik} = \sum_{kl} g_{il} g_{kk} \mathfrak{M}^{lk} = \sum_{kl} g_{kl} g_{ki} \mathfrak{M}^{kl}$$

und der Antisymmetrieeigenschaft folgendermaßen umformen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}^2 &= \frac{1}{2}\sum_{ik} \mathfrak{M}_{ik}\mathfrak{M}^{ik} = -\frac{1}{2}\sum_{kikl} g_{kk} g_{il} \mathfrak{M}^{kl}\mathfrak{M}^{ik} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{kikl} g_{kl} g_{ki} \mathfrak{M}^{kl}\mathfrak{M}^{ik} = \frac{1}{4}\sum_{kikl} (g_{kl} g_{ki} - g_{kk} g_{il})\,\mathfrak{M}^{kl}\mathfrak{M}^{ik}. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

*) In der letzten Formel muß zunächst der Wechsel des Vorzeichens auffallen, besonders, da für orthogonale Transformationen *Tikl* durch einen Vektor darzustellen und T_{1234} offenbar dessen skalares Produkt mit P ist. Der Grund ist folgender: Im Dreidimensionalen wird der durch drei Vektoren gegebene Schraubensinn bei deren zyklischer Vertauschung nicht geändert. Legt man aber in vier Dimensionen vier (nicht in einem dreidimensionalen Raum liegenden) Vektoren einen „Schraubensinn" bei, so verändert er sich bei zyklischer Vertauschung, weil eine solche durch eine ungerade Zahl von Vertauschungen je zweier Indizes ersetzt werden kann. Geben wir also im Raum des Tensors T_{ikl} drei Vektoren *A*, *B*, T, so haben deren Komponenten im Koordinatenraum 234 mit der Komponente P_1 zusammen einen anderen Schraubensinn, also ihre Komponenten im Raum 341 zusammen mit P_2. Rein algebraisch findet man dasselbe, wenn man T_{1234} als Determinante $\Sigma \pm P_1 \Phi_2 \Psi_3 X_4$ aus vier Viervektoren darstellt. Setzt man dann $T_{ikl} = \Sigma \pm \Phi_i \Psi_k X_l$, so folgt Formel (45 a)

Dasselbe läßt sich auch aus (44) schließen*). Aus zwei Sechservektoren läßt sich entsprechend der Formel (94) im Bd. I das skalare Produkt bilden:

$$(\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}) = \frac{1}{2}\sum_{ik} \mathfrak{F}_{ik}\,\mathfrak{G}^{ik}.$$

Der vollständig antisymmetrische Tensor dritten Ranges hat als Invariante den Ausdruck**):

$$\frac{1}{6}\sum_{ikl} T_{ikl}\,T^{ikl} = T_{234}\,T^{234} + T_{342}\,T^{342} + T_{423}\,T^{423} + T_{123}\,T^{123}. \quad (46a)$$

Verlegt man durch Transformation die drei Vektoren, durch welche sich T^{ikl} darstellen läßt, in den Raum $x^4 = const$, so geht er nach (44) über in:

$$g\,g^{44}\,(T^{123})^2.$$

Dies ist, abgesehen vom Vorzeichen, das Quadrat des von den Vektoren ausgespannten dreidimensionalen Parallelepipeds. $g.\,g^{44}$ ist die Determinante, welche aus den g_{ik} ohne den Zeiger 4 gebildet ist. Also hat die letzte Aussage denselben Inhalt wie Gleichung (38), nur daß dabei die Zahl der Dimensionen gleich 3 ist.

Der vollständig antisymmetrische Tensor vierten Ranges besitzt die Invariante***)

$$\frac{1}{24}\sum_{iklm} T_{iklm}\,T^{iklm} = T_{1234}\,T^{1234}.$$

Infolgedessen ist nach (44)

$$\sqrt{\pm g}\,T^{1234} = \pm\frac{1}{\sqrt{\pm g}}\,T_{1234}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46b)$$

---

*) In zwei Dimensionen vereinfacht sich die Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms aus den Vektoren P und Φ zu:

$$|[P\Phi]| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,(P^1\Phi^2 - P^2\Phi^1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46')$$

vergleiche hierzu (29 a).

**) Der Divisor 6 ist hinzugefügt, weil dasselbe Produkt $T_{123}\,T_{123}$ z. B. entsprechend den Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 sechsmal in der Summe auftritt.

***) Der Divisor 24 entspricht den 24 Permutationen der Zahlen 1 bis 4.

das Volumen des von ihnen ausgespannten vierdimensionalen Parallelepipeds; das stimmt zu Gleichung (38).

Das Produkt eines antisymmetrischen Tensors zweiten Ranges mit sich selbst, welches wir in Bd. I, § 10e, als sein skalares Produkt bezeichnen konnten, nämlich die Größe

$$2\,(T_{14}\,T_{23} + T_{24}\,T_{31} + T_{34}\,T_{12}) = T_{1234},$$

liefert hier einen vollständig antisymmetrischen Tensor vierten Ranges. Nach (46 b) erhalten wir also eine Invariante, wenn wir sie durch $\sqrt{\pm g}$ dividieren. Setzen wir nunmehr

$$T^{*mn} = \frac{1}{\sqrt{\pm g}}\,T_{op}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46\,c)$$

(die Ziffernfolge *mnop* muß aus 1234 durch eine gerade Zahl von Vertauschungen hervorgehen) so nimmt diese Invariante die Form an:

$$\begin{aligned} &T_{14}\,T^{*14} + T_{24}\,T^{*24} + T_{34}\,T^{*34} \\ &+ T_{23}\,T^{*23} + T_{31}\,T^{*31} + T_{12}\,T^{*12} = \frac{1}{2}\sum_{ik} T_{ik}\,T^{*ik}. \end{aligned}$$

Dieselbe Invariante läßt sich aber nach (46b) auch schreiben:

$$\pm\sqrt{\pm g}\,T^{1234} = +\,2\,(T^{14}\,T^{23} + T^{24}\,T^{31} + T^{34}\,T^{12})\sqrt{\pm g}.$$

Setzen wir hier

$$T^{*}_{mn} = \pm\sqrt{\pm g}\,T^{op}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46\,d)$$

so wird

$$\begin{aligned} &T^{14}T^{*}_{14} + T^{24}T^{*}_{24} + T^{34}T^{*}_{34} \\ &+ T^{23}T^{*}_{23} + T^{31}T^{*}_{31} + T^{12}T^{*}_{12} = \frac{1}{2}\sum_{ik} T^{ik}\,T^{*}_{ik}. \end{aligned}$$

Die durch (46 c) und (46 d) eingeführten Größen T^{*ik} und T^{*}_{ik} sind danach Komponenten desselben Sechservektors, und zwar ist dieser, wie die Einführung orthogonaler Koordinaten und der Vergleich mit Bd. I, § 10e beweist, zum Sechservektor T dual.

Dividiert man die Tensorkomponente T_{1234} in (45 a) durch $\sqrt{\pm g}$ oder multipliziert man die kontra Variante Komponente desselben Tensors mit $\pm\sqrt{\pm g}$, so erhält man die zwei Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pm g}}\,(P_1\,T_{234} - P_2\,T_{341} + P_3\,T_{412} - P_4\,T_{123}) \\ &= \pm\sqrt{\pm g}\,(P^1\,T^{234} - P^2\,T^{341} + P^3\,T^{412} - P^4\,T^{123}) \end{aligned}\right\} \quad (46\,e)$$

für dieselbe Invariante) aus denen man schließt, daß

$$\Gamma^{i} = \frac{1}{\sqrt{\pm g}}\,T_{klm}, \qquad \Gamma_{i} = \pm\sqrt{\pm g}\,T^{klm} \quad \ldots \quad (46\,f)$$

Komponenten eines Vektors sind (die Reihenfolge *iklm* muß durch eine gerade Zahl von Vertauschungen aus 1234 hervorgehen). Dieser steht auf dem Kaum, welchen T_{klm} darstellt, senkrecht. Denn stellt man diesen Tensor nach (41 a) durch drei. Vektoren Φ, Ψ, X dar, so liefert das skalare Produkt $\sum_i \Gamma_i \Phi$ eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen, also Null, und ebenso verschwinden $\sum_i \Gamma_i \Psi^i$ und $\sum_i \Gamma_i X^i$; diese Vektoren liegen aber in dem Raum, den *Tuim* darstellt. Das Quadrat des absoluten Betrages von Γ,

$$\sum_i \Gamma_i \Gamma^i = \sum_{klm} T^{klm} T_{klm},$$

ist gleich dem Quadrat des Inhalts jenes Raumes. Denn die Summe nach *k, l, m,* in der hier jede Kombination *k l rn* nur einmal auftritt, hat denselben Wert wie $-\sum_{ikl} T_{ikl} T^{ikl}$ (46 a). Die Invariante (46 e) ist danach das skalare Produkt *(P T),* d. h. gleich dem Inhalt des Raumes T_{ikl} multipliziert mit der nach seiner Normalen genommenen Komponente P^n. Man bezeichnet den Vektor Φ als die duale Ergänzung von T_{ikl}.

g) Übergang zur Maßbestimmung $ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$ mit veränderlichen Koeffizienten. Die quadratische Form (12) mit konstanten g_{ik} läßt sich stets durch eine lineare Transformation in eine Summe $\Sigma \pm X^{i2}$ verwandeln, wobei die Zahl *n* der X^i mit der der x^i übereinstimmt. Wir gehen aber jetzt zur Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} dx^i dx^k \quad \ldots\ldots \quad (46\,g)$$

mit veränderlichen g_{ik} über, und fragen, ob sie sich durch eine Substitution

$$z^j = z^j(x^i)$$

für alle Werte der Koordinaten in eine Quadratsumme

$$\sum_{j=1}^{m} \pm dz^{j2}$$

verwandeln läßt, und wie groß die Zahl *m* der Veränderlichen z^j sein muß. Nun folgt aus den Transformationsgleichungen

$$dz^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z^j}{\partial x^i} dx^i, \quad dz^{j2} = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial z^j}{\partial x^k} dx^i dx^k,$$

also

$$\sum_{j=1}^{m} \pm dz^{j2} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i,k=1}^{n} \pm \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial z^j}{\partial x^k} dx^i dx^k.$$

Damit dies identisch in den n Differentialen dx^i in die Ausgangsformel (46 g) übergeht, müssen die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Bedingungen erfüllt sein:

$$g_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \pm \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial z^j}{\partial x^k};$$

und dazu gehören im allgemeinen auch $\frac{1}{2}n(n+1)$ Funktionen z^j. Wollen wir also eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Maßbestimmung (46 g) in einen euklidischen oder pseudoeuklidischen Raum einbetten, so müssen wir diesem im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n+1)$ Dimensionen geben. Für $n = 2$ ist dieser Kaum somit dreidimensional; man kann jede Fläche in einem dreidimensionalen euklidischen Kaum unterbringen. Aber will man einen beliebigen Raum (n = 3) in einer euklidischen Mannigfaltigkeit einlagern, so muß man dieser 6, und bei $n = 4$ sogar 10 Dimensionen geben.

Mit dem letzten Fall wollen wir uns jetzt beschäftigen. Unsere vierdimensionale Mannigfaltigkeit wird im allgemeinen natürlich eine gekrümmte, d. h. durch sechs nichtlineare Gleichungen zwischen den # gegebene „Fläche" sein. Man wird aber in einem ihrer Punkte eine „Tangentenebene" von vier Dimensionen an sie legen können, welche die Gesamtheit der Tangenten aller in ihr liegenden und durch den hervorgehobenen Punkt führenden Kurven enthält. Diese Tangentenebene ist es, von der wir bisher gesprochen und in der wir die Maßbestimmung (11) angesetzt hatten. Die Koordinatenachsen sind die Tangenten von Kurven $x^2 = x^3 = x^4 = 0$, $x^3 = x^4 = x^1 = 0$, usw. Ein Vektor im nichteuklidischen Kontinuum ist somit durch eine Strecke gegeben, welche in der Tangentenebene liegt; natürlich muß diese das Kontinuum in dem Punkte berühren, auf welchen sich der Vektor bezieht. Selbstverständlich kann man die die Vektoren darstellenden Strecken, da es auf den Proportionalitätsfaktor nicht ankommt, stets unendlich klein wählen, und dann, da die Tangentenebene im unendlich kleinen mit dem Kontinuum zusammenfällt, den Vektor als unendlich kleine Strecke im Riemannschen Kontinuum selbst deuten. Da wir die Tensoren jeden Ranges auf Vektoren zurückführen konnten, ist damit auch für diese eine Deutung geschaffen. Die *gik*, welche in unseren Gleichungen bisher auftraten, sind diejenigen Werte, welche im Berührungspunkt 'für unser Kontinuum gelten. Abzuändern brauchen wir nur die Koordinatentransformationen (34), (36) und (36a), und zwar insofern, als wir mit linearen Beziehungen zwischen gestrichenen und ungestrichenen

Koordinaten in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr auskommen. Wir können diese daher nur für die Differentiale dx^i und dx_i gelten lassen, und müssen statt dessen schreiben:

$$dx^m = \sum_i \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} dx'^i, \quad dx'^i = \sum_m \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} dx^m.$$

Das hat zur Folge, daß überall α_i^m durch $\partial x^m/\partial x'^i$ und β_m^i durch $\partial x'^i/\partial x^m$ ersetzt wird. Für eine gemischte Komponente eines Tensors höheren Banges lautet daher die Transformation:

$$\left.\begin{aligned} & T^{i_1 \dots i_n}{}_{i_{n+1} \dots i_m} \\ = \sum_{k_1 \dots k_m} & \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{k_n}} \frac{\partial x'^{k_n+1}}{\partial x^{i_n+1}} \cdots \frac{\partial x'^{k_m}}{\partial x^{i_m}} T'^{k_1 \dots k_n}{}_{k_{n+1} \dots k_m} \end{aligned}\right\} \quad (47)^*)$$

Sonderfälle davon sind:

$$\left.\begin{aligned} P^i = \sum_k \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} P'_k, \quad P^i = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} P'^k \\ T_{ik} = \sum_{mn} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T'_{mn} \end{aligned}\right\} \quad (47a)$$

Wir müssen aber auf einen wichtigen Unterschied gegenüber dem Fall der konstanten g_{ik} aufmerksam machen. Dort konnten

---

*) Für § 7 führen wir hier noch an: Aus der Transformationsformel

$$\sum_{ikl} \frac{\partial x'^o}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} T^i{}_{kl} = T'^o{}_{mn}$$

folgt der umkehrbare Schluß:

$$\sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} T^j{}_{kl} = \sum_o \frac{\partial x^j}{\partial x'^o} T'^o{}_{mn},$$

indem man die erste Gleichung mit $\frac{\partial x^j}{\partial x'^o}$ multipliziert und nach o summiert. Denn es gelten die Identitäten

$$\sum_o \frac{\partial x'^o}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^o} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } i = j, \\ 0, \text{ wenn } i \text{ von } j \text{ verschieden ist.} \end{cases}$$

Man entnimmt "dies aus der Analogie zu (35) oder aus der in den dx^j identischen Beziehung:

$$dx^j = \sum_o \frac{\partial x^j}{\partial x'^o} dx'^o = \sum_{oi} \frac{\partial x^j}{\partial x'^o} \frac{\partial x'^o}{\partial x^i} dx^i.$$

wir neben den kontravarianten Koordinaten als ihnen gleichberechtigt die kovarianten einführen. Ob wir von der Maßbestimmung (12) oder (16) ausgingen, war im Grunde belanglos, da man von der einen stets zur anderen gelangen kann. Hier, bei veränderlichen *gik*, haben wir die Koordinaten, die uns nichts weiter als Namen der Punkte sind (vgl. § 4), als kontravariant eingeführt; wir hätten sie auch als kovariant bezeichnen und deswegen mit unteren Zeigern schreiben können. Nachdem wir aber einmal diese Bestimmung getroffen haben, können wir nun kovariante Koordinaten nicht mehr einführen; denn sie müßten nach Analogie von (19) durch die Differentialgleichungen

$$dx_k = \sum_i g_{ik}\, dx^i$$

gegeben sein. Diese aber lassen sich für beliebige Funktionen *gik* nicht integrieren. Nur in unendlich kleinen Bereichen, in denen die Differentiale der kontravarianten Koordinaten diese selbst zu vertreten imstande sind, können wir noch von kovarianten Koordinaten reden.

h) Der Übergang von Welt- zu Raumtensoren. Jeder Vierervektor *P* und jeder Welttensor *T* bestimmt in seinen kontravarianten Komponenten, welche den Zeiger 4 nicht tragen, die kontravarianten Komponenten eines Raumvektors oder eines Raumtensors gleichen Ranges. Denn bei der Transformation

$$\left.\begin{aligned} x'^1 &= x'^1(x^1, x^2, x^3), & x'^2 &= x'^2(x^1, x^2, x^3),\\ x'^3 &= x'^3(x^1, x^2, x^3), & x'^4 &= x^4 \end{aligned}\right\} \quad \cdots (48)$$

gilt

$$P'^i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} P^l, \quad T'^{ik} = \sum_{l,m=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} T^{lm} \text{ usw. } i,k = 1,2,3.$$

Die entsprechende Bemerkung trifft für die kovarianten Komponenten ohne den Zeiger 4 zu.

Bei jedem Tensor zweiten Ranges bestimmen die drei Komponenten, welche den Zeiger 4 nur einmal tragen, Raum Vektoren, und zwar die kontravarianten Komponenten T^{i4} die kontravarianten Komponenten eines Vektors $\mathfrak{T}$, die kovarianten Komponenten T_{i4} auch die kovarianten Komponenten eines Vektors $\mathfrak{U}$. Denn bei der Transformation (48) ist

$$T'^{i4} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} T^{l4}, \quad T'_{i4} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} T_{l4}.$$

Die Komponenten T^{4i} und T_{4i} bestimmen zwei andere Vektoren.

Setzt man $P^i = \mathfrak{A}^i$, $P_i = \mathfrak{B}_i$ ($i = 1, 2, 3$), so sind aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keineswegs derselbe Kaumvektor. Vielmehr unterscheiden sich die Formeln

$$\mathfrak{B}_i = P_i = \sum_{l=1}^{4} g_{il} P^l$$

und

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{l=1}^{3} g_{il} \mathfrak{A}^l = \sum_{l=1}^{3} g_{il} P^l$$

durchaus wesentlich. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist, lautet:

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0; \quad \cdots \quad (49)$$

aus ihr folgt unmittelbar

$$g^{14} = g^{24} = g^{34} = 0, \quad g^{44} = \frac{1}{g_{44}} \quad \cdots \quad (49\,a)$$

Das bedeutet nach Gleichung (17), daß man die Zeitachse überall auf den Streckenräumen senkrecht stehen läßt.

Ebensowenig stimmen im allgemeinen die aus den T^{i4} und T_{i4} gewonnenen Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ überein. Aber unter den Bedingungen (49), die dafür hinreichend und notwendig sind, wird

$$\mathfrak{G}_i = T_{i4} = \sum_{l,m=1}^{4} g_{il} g_{4m} T^{lm} = g_{44} \sum_{l=1}^{3} g_{il} T^{l4} = g_{44} \sum_{l=1}^{3} g_{il} \mathfrak{F}^{l4}$$

$$= g_{44} \mathfrak{F}_i,$$

also

$$\mathfrak{G} = g_{44} \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{F} = g^{44} \mathfrak{G},$$

und weiter bestimmt derselbe Vektor dann auch die gemischten Komponenten $T^i{}_4$ und $T_i{}^4$; denn;

$$T^i{}_4 = \sum_{l=1}^{4} g_{l4} T^{il} = g_{44} T^{i4} = g_{44} \mathfrak{F}^i,$$

$$T_i{}^4 = \sum_{l=1}^{4} g^{l4} T_{il} = g^{44} T_{i4} = g^{44} \mathfrak{G}_i = \mathfrak{F}_i.$$

Zwischen den Raumtensoren $\mathfrak{A}^{ik} = T^{ik}$ und $\mathfrak{B}_{ik} = T_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3$) besteht im allgemeinen wiederum kein Zusammenhang; dagegen fallen sie unter den Voraussetzungen (49) zusammen; denn:

$$\mathfrak{B}_{ik} = \sum_{l,m=1}^{4} g_{il} g_{km} T^{lm} = \sum_{l,m=1}^{3} g_{il} g_{km} \mathfrak{A}^{lm} = \mathfrak{A}_{ik}.$$

Für die gemischten Komponenten hingegen gilt:

$$T^i_k = \sum_{l=1}^{4} g_{kl}\, T^{il} = \sum_{l=1}^{3} g_{kl}\, \mathfrak{T}^{il} = \mathfrak{T}^i_k,$$

$$T^k_i = \sum_{l=1}^{4} g^{kl}\, T_{il} = \sum_{l=1}^{3} g^{kl}\, \mathfrak{T}_{il} = \mathfrak{T}_i{}^k.$$

Die Bedingungen (49) führen also in dem Zusammenhang zwischen Welt- und Raumtensoren bedeutende Vereinfachungen ein. Deswegen sei schon hier erwähnt — was wir erst in § 9d beweisen werden —, daß man sie bei jeder Maßbestimmung durch Einführung „Gaußscher" Koordinaten erfüllen kann.

Für diese Koordinatensysteme kann man den Sachverhalt mittels eines zur x^4-Achse parallelen Einheitsvektors Y, für den also die Gleichungen

$$Y^i = 0,\ Y_i = \sum_k g_{ik}\, Y^k = 0 \text{ für } i = 1, 2, 3,\ Y_4 Y^4 = -1$$

gelten, folgendermaßen ausdrücken: Sei *P* ein beliebiger Vierervektor, dann stellt

$$A_i = P_i + (YP)\, Y_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49\,\mathrm{b})$$

seine drei Komponenten im Raum $x^4 = 0$ dar; denn es ist

$$A_1 = P_1,\ A_2 = P_2,\ A_3 = P_3,\ A_4 = 0.$$

Sei T_{ik} ein beliebiger unsymmetrischer Tensor, so gibt der Vektor

$$B_i = \sum_k T_{ik}\, Y^k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49\,\mathrm{b}')$$

seine drei Komponenten T_{i4} an; denn es ist

$$B_1 = T_{14}\, Y^4 \text{ usw.},\quad B_4 = 0.$$

Das Vektorprodukt *[YB]* mit den Komponenten

$$[YB]_{i4} = T_{i4},\quad [YB]_{ik} = 0,\quad (i, k = 1, 2, 3) \ldots \quad (49\,\mathrm{c})$$

stellt ein Flächenstück dar, welches die x^4-Richtung enthält, und der unsymmetrische Tensor

$$\Psi_{ik} = T_{ik} - [YB]_{ik} = T_{ik} + \sum_j (T_{jk}\, Y_i - T_{ji}\, Y_k)\, Y^j \quad (49\,\mathrm{d})$$

mit den Komponenten

$$\Psi_{i4} = 0,\quad \Psi_{ik} = T_{ik},\quad (i, k = 1, 2, 3) \ldots \quad (49\,\mathrm{e})$$

stellt die drei räumlichen Komponenten von *Tik* dar.

§ 7. Geodäsie in Riemannschen Bäumen.

Wir nehmen, um es zu wiederholen, jetzt die Maßbestimmung (9) für das Linienelement

$$d\,s^2 = \sum_{ik} g_{ik}\,dx^i\,dx^k$$

an, und setzen dabei die g_{ik} als reguläre Funktionen der vier Koordinaten voraus, die keinen anderen Bedingungen unterworfen sind, als den Ungleichungen (10).

Die folgenden Ausführungen sind zum großen Teil von der Zahl der Koordinaten und diesen Bedingungen unabhängig. Wenn wir daher anschauliche Beispiele für unsere Ergebnisse suchen, dürfen wir vielfach zu zwei Dimensionen hinabsteigen und, um dies Kontinuum als Fläche im euklidischen Raum deuten zu können, da^2, was wir dann für ds^2 schreiben, als positiv definit ansehen. Dann ist aber die entsprechende Determinante $g > 0$.

a) Die geodätischen Linien. Eine Kurve in unserem Kontinuum geben wir uns durch die Parameterdarstellung $x^i = x^i(p)$. Die ersten und zweiten Ableitungen dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\dot{x}^i$ und $\ddot{x}^i$. Eine Linie, welche bei festem Anfangs- und Endpunkt

$$\int \sqrt{f}\,dp \quad \left[f = \left(\frac{ds}{dp}\right)^2 = \sum_{ik} g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k\right] \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

zu einem Extremum macht, heißt eine geodätische Linie.

Sollen wir im allgemeinen ein Integral

$$\int F(x^i, \dot{x}^i)\,dp$$

zum Extremum machen, so müssen die Funktionen $x^i(p)$ den Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0$$

genügen, welche ja aus der Theorie des Hamiltonschen Prinzips in der Mechanik wohl bekannt sind.

Wenden wir sie auf den vorliegenden Fall $F = \sqrt{f}$ n , so lauten sie, da

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = f^{-1/2} \sum_k g_{ik} \dot{x}^k, \quad \frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{1}{2} f^{-1/2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k$$

ist:

$$f^{-3/2} \left\{ -\frac{df}{dp} \sum_k g_{ik} \dot{x}^k + 2f \frac{d}{dp} \left(\sum_k g_{ik} \dot{x}^k \right) - f \sum_{jk} g_{jki} \dot{x}^j \dot{x}^k \right\} = 0. \quad (50a)$$

Zur Abkürzung haben wir dabei

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g_{jki}$$

gesetzt.

Die Gleichungen vereinfachen sich, wenn wir als Parameter eine zur Bogenlänge *s* proportionale Größe nehmen. Denn dabei wird

$$f = C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

wo C eine Konstante bedeutet. Da die Form ds^2 indefinit ist, könnte diese Konstante auch den Wert Null haben, doch schließen wir diesen Sonderfall zunächst aus. Dann können wir in den Lagrangeschen Gleichungen das Glied mit *df/dp* streichen und die Faktoren $f^{-1/2}$ fortlassen:

$$2 \frac{d}{dp} \left(\sum_k g_{ik} \dot{x}^k \right) - \sum_{jk} g_{jki} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Zu diesen Differentialgleichungen zweiten Grades, deren Zahl mit der der x^i übereinstimmt, tritt dann noch die Differentialgleichung (51), welche nach (50) vom ersten Grade ist. Doch verträgt sie sich mit jenen, weil sie aus ihnen hervorgeht. Multipliziert man nämlich (52) mit $\dot{x}^i$, so folgt durch Summation nach dem Zeiger i:

$$2 \left[\frac{d}{dp} \left(\sum_{ik} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k \right) - \sum_{ik} g_{ik} \ddot{x}^i \dot{x}^k \right] - \sum_{ijk} g_{jki} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0.$$

Die beiden letzten Summen geben zusammen $-df/dp$, die erste ist gleich $2df/dp$. Also ist $df/dp = 0$; $f = C$ ist somit ein Integral den Gleichungen (52) und man kann eine der Gleichungen (52) durch (51) ersetzen. Diese Regel erfährt eine Ausnahme, wenn man Kurven untersucht, bei denen ein x^i konstant ist, weil man, um (51) zu beweisen, (52) mit $\dot{x}^i$ erweitern mußte.

Für die Durchrechnung von Beispielen ist es meist zweckmäßiger, von einem anderen Variationsproblem auszugehen. Soll nämlich

$$\int f \, dp$$

ein Extremum werden, so lauten dafür die Lagrangeschen Gleichungen;

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0,$$

und das ist dasselbe wie (52) *).

Um die Gleichungen (52) auf ihre Normalform zu bringen, führen wir die Differentiation nach p aus und dividieren durch 2:

$$\sum_k g_{ik}\ddot{x}^k + \sum_{jk} g_{ikj}\dot{x}^j\dot{x}^k - \frac{1}{2}\sum_{jk} g_{jki}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

Da die Summationszeiger j und k dieselben Werte durchlaufen, können wir sie miteinander vertauschen und somit

$$\sum_{jk} g_{ikj}\dot{x}^j\dot{x}^k = \sum_{jk} g_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k = \frac{1}{2}\sum (g_{ikj} + g_{ijk})\dot{x}^j\dot{x}^k$$

setzen. Führen wir dann zur Abkürzung die Zeichen

$$\left[\begin{matrix} jk \\ i \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \quad \cdots\cdots \quad (53)$$

ein, so finden wir:

$$\sum_k g_{ik}\ddot{x}^k + \sum_{jk}\left[\begin{matrix} jk \\ i \end{matrix}\right]\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

Um nun noch die verschiedenen $\ddot{x}^k$ zu trennen, multiplizieren wir dies mit g^{il} und addieren nach i unter Berücksichtigung von (20); dann treten die „Christoffeischen Dreizeiger-Symbole" oder „g-Klammern"

$$\left\{\begin{matrix} jk \\ l \end{matrix}\right\} = \sum_i g^{il}\left[\begin{matrix} jk \\ i \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\sum_i g^{il}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \quad (54)$$

*) Für die kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes auf ‚einer reibungsfreien, festen Fläche verlangt das Hamiltonsche Prinzip in seiner für die Newtonsche Mechanik gültigen Fassung, daß bei vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(g_{11}\dot{x}^{1\,2} + 2g_{12}\dot{x}^1\dot{x}^2 + g_{22}\dot{x}^{2\,2})\,dt = 0$$

wird. Bedenkt man, daß des Energieprinzips wegen die Geschwindigkeit dabei konstant bleiben muß, so kann man die Zeit t zum Parameter p des Texte» proportional betrachten und erkennt dann, daß die Bahn eine geodätische Linie der Fläche bildet.

auf, und die Differentialgleichungen der geodätischen Linie erhalten die Form:

$$\ddot{x}^l + \sum_{jk} \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix} \right\} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad \ldots \ldots \quad (55)$$

Wie die $\left[\begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix} \right]$ sind die g-Klammern $\left\{ \begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix} \right\}$ in den beiden oberen Zeigern symmetrisch. Letztere sind lineare Kombinationen der ersten Ableitungen der g_{ik}, deren Koeffizienten wieder algebraische Funktionen der g_{ik} selbst darstellen. Da es bei n Koordinaten $\frac{1}{2}n(n+1)$ Kombinationen jk gibt, ist ihre Zahl $\frac{1}{2}n^2(n+1)$; bei n = 4 also 40, 18 bei $n = 3$ und 6 bei $n = 2$. Diese Zahl stimmt mit der der $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ überein; deshalb kann man diese aus den g-Klammern berechnen. Dazu hat man einmal die Gleichungen (54) umzukehren;

$$\left[\begin{matrix} j\,k \\ m \end{matrix} \right] = \sum_l g_{lm} \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix} \right\}, \quad \ldots \ldots \quad (56)$$

sodann aber mittels der aus (53) hervorgehenden Identität

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \left[\begin{matrix} i\,l \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right] \quad \ldots \ldots \quad (57)$$

zu setzen:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \sum_m \left(g_{im} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} + g_{km} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ m \end{matrix} \right\} \right). \quad \ldots \ldots (57a)$$

b) Beispiele. Sind die g_{ik} konstant, im übrigen beliebig, so werden die Gleichungen (55) der geodätischen Linie einfach $\ddot{x}^l = 0$, also $x^l = ap + b$, und danach sind die geodätischen Linien Gerade; wir finden die euklidischen Verhältnisse. Nehmen wir als weiteres Beispiel eine Kugel vom Halbmesser A im dreidimensionalen euklidischen Raum, so können wir für einen Punkt auf ihr die kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten zurückführen durch die Transformation:

$$x = A \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = A \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = A \cos\vartheta.$$

Das Linienelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ hat somit, wenn es auf der Kugel liegt, den Ausdruck

$$ds^2 = A^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2),$$

was dem Wertsystem $g_{11} = A^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = A^2 \sin^2\vartheta$ entspricht. Statt die sechs g-Klammern hieraus nach (54) zu berechnen, ziehen wir vor, das Variationsproblem

$$\int (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2) \, d\mathfrak{p} = \text{Extrem.}$$

zu lösen und die zugehörigen Differentialgleichungen auf die Form (55) zu bringen. Sie lauten hier zunächst

$$\frac{d}{dp}(\dot{\vartheta}) - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = 0, \quad \frac{d}{dp}(\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}) = 0, \qquad (58)$$

also nach Ausführung der Differentiation nach p:

$$\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = 0, \quad \ddot{\varphi} + 2\operatorname{ctg}\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi} = 0.$$

Danach müssen die g-Klammern die Werte haben:

$$\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\} = \operatorname{ctg}\vartheta, \quad \left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\} = 0.$$

Von den ersten Integralen entnehmen wir das eine,

$$\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

unmittelbar aus (58). Das zweite liefert uns ohne Rechnung die allgemeine Regel, daß $f = C$ ein Integral der Lagrangeschen Gleichungen für das Extremum von $\int f\,dp$ ist; es lautet somit

$$\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = b.$$

Die Elimination von $\dot{\varphi}$ aus beiden ergibt für ϑ als Funktion von p die Differentialgleichung:

$$\dot{\vartheta}^2 = b - \frac{c^2}{\sin^2\vartheta}.$$

Um ϑ als Funktion von φ zu bestimmen, dividieren wir dies durch die quadrierte Gleichung (59) und führen dann $\Theta = \operatorname{ctg}\vartheta$ als neue Veränderliche ein:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\sin^4\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{b}{c^2} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} = \frac{b}{c^2} - 1 - \Theta^2.$$

Daraus folgt unter Einführung einer neuen Bezeichnung für $\frac{b}{c^2}$

$$\Theta = \alpha\sin(\varphi + \beta)$$

oder

$$\cos\vartheta = \sin\vartheta\,(C\cos\varphi + B\sin\varphi);$$

$$z = Cx + By.$$

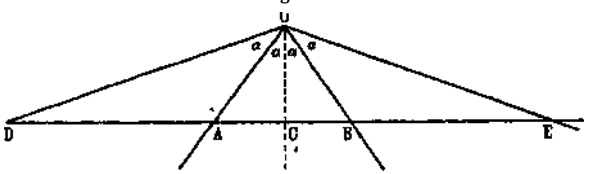
Die geodätischen Linien sind also die Schnitte der Kugel mit Ebenen, die ihren Mittelpunkt enthalten, d. h. größte Kreise.

Eine geodätische Linie ist durch einen Punkt und die Richtung in ihm vollständig bestimmt. Bei einer Drehfläche ist daher die Meridiankurve stets geodätische Linie. Wiche nämlich eine

geodätische Linie, welche sie berührt, im weiteren Verlaufe von ihr ab, so müßte es aus Symmetrie eine zweite sie im gleichen Punkt berührende, aber nach der anderen Seite von ihr abweichende geodätische Linie geben — im Widerspruch zu dem soeben ausgesprochenen Satz.

Verbiegt man ein Flächenstück ohne Dehnung, so bleiben alle auf ihm liegenden Strecken in der Länge erhalten, d. h. es bleibt die Maßbestimmung $ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ erhalten. Infolgedessen behalten auch die geodätischen Linien ihre Eigenschaft. Nun lassen sich Stücke einer Ebene z. B. zu Kreiszylindern verbiegen. Bei diesen sind daher alle Schraubenlinien geodätische Linien, einschließlich der Grenzfälle des Grundkreises und der erzeugenden Geraden.

Fig. 8.



In einer Ebene ziehen wir die Halbstrahlen *OA* und *OB*, welche sich unter dem Winkel 2α schneiden. Die Punkte *A* und *B* sollen von 0 gleiche Abstände haben. Wir schneiden die Ebene längs eines nicht im Winkel $2a$ liegenden Halbstrahles durch *0* auf und rollen sie so zu einem Kreiskegel mit *0* als Spitze zusammen, daß *0A* auf *0B*, also *A* auf *B* fällt. Ist nun wie in Fig. 8 $\alpha < \frac{1}{3}\pi$, so liefert die Gerade *AB*, welche in C ihren kleinsten Abstand von *0* hat, eine geodätische Linie, die, von *C* aus nach beiden Seiten symmetrisch verlaufend, sich in den zusammenfallenden Punkten *A* und *B* selbst schneidet. Wäre dagegen $\alpha > \frac{1}{3}\pi$, so wäre die Strecke *AB* durch den Schnitt getrennt und diese Gerade lieferte beim Aufrollen Stücke verschiedener geodätischer Linien; keine solche Linie schnitte dann sich selbst. Ist aber nicht nur $\alpha < \frac{1}{3}\pi$, sondern sogar $\alpha < \frac{1}{4}\pi$, so gibt es (siehe die Figur) zwei Gerade *OD* und *OE*, welche mit *OC* den Winkel 2α bilden und von *AB* in den von *0* gleichweit entfernten Punkten D und *E* geschnitten werden. Beim Zusammenrollen der Ebene zum Kegel fällt *D* auf *E*. In diesem Fall schneidet sich also jede geodätische Linie des Kefireis, mit Ausnahme der erzeugenden Geraden, zweimal. Wäre $\alpha < \pi/6$, so gäbe es drei derartige Schnitte usw.

c) **Nullinien.** Da ds^2 eine indefinite quadratische Form ist, gibt es in unserer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit reelle Linienelemente von der Länge Null. **Kurven**, die sich aus solchen zusammensetzen, heißen Nullinien. Sie sind aus der Differentialgleichung

$$\sum_{ik} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0$$

zu entnehmen. Und da in dieser vier zu bestimmende Funktionen des Parameters p auftreten, könnte es zunächst scheinen, als wären bei der Nullinie noch drei Funktionen willkürlich zu wählen. Dem ist nicht ganz so, weil der Parameter p selbst keine Bedeutung hat und ohne weiteres durch eine willkürliche Funktion $\varphi(p)$ ersetzt werden kann. Aber trotzdem bleiben noch zwei willkürliche Funktionen übrig, wie man sogleich sieht, wenn man etwa x^4 als Parameter nimmt. Denn dann enthält die Differentialgleichung drei zu bestimmende Funktionen, es bleiben somit zwei willkürlich zu wählen. In diesem Sinn ist das Problem der Nullinien **unter** bestimmt. Man sieht das auch am Beispiel der beschränkten Relativitätstheorie; jede Weltlinie, welche einer Geschwindigkeit vom Betrage c entspricht, ist in ihr Nullinie, und dabei können wir deren Projektion auf den xyz-Raum der „Welt", d. h. die Bahn im dreidimensionalen Raum, noch beliebig vorschreiben.

Im Gegensatz dazu sind die geodätischen Linien durch ihre Differentialgleichungen (55) bis auf acht Konstante vollständig bestimmt. Es können somit nicht alle Nullinien geodätisch sein, wie ja z. B. in der beschränkten Relativitätstheorie nur gerade Weltlinien geodätisch sind. Wohl aber gibt es unter den Nullinien auch geodätische. Denn die Differentialgleichungen der letzteren haben, wie in (51) gezeigt, stets als ein erstes Integral die Gleichung

$$\sum_{ik} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = C;$$

und man kann diese Konstante auch gleich Null setzen. Freilich lassen sich die geodätischen Nullinien im Gegensatz zu allen anderen geodätischen Linien nicht aus dem Variationsprinzip (50)

$$\delta \int \sqrt{f}\, dp = 0, \quad f = \left(\frac{ds}{dp}\right)^2$$

herleiten; denn beim Übergang von (50a) zu (52) mußten wir f als von Null verschieden ansehen. Wohl aber gilt auch für die geodätischen Nullinien jenes andere Variationsprinzip:

$$\delta \int f\, dp = 0.$$

Durch einen Punkt *0* gehen noch zweifach unendlich viele geodätische Nullinien; denn von den acht Integrationskonstanten ist eine bedeutungslos, da der Parameter *p* um einen Faktor verändert werden kann, vier sind durch diesen Punkt und eine durch $C = 0$ festgelegt. Sie bilden dessen Vor- und Nachkegel, mit dem einzigen Unterschied gegen früher, daß dieser Doppelkegel nicht mehr gerade Linien, sondern gekrümmte Kurven zu Erzeugenden hat (siehe Bd. I, § 8). Dieser Doppelkegel scheidet das Zwischengebiet, in welchem jedes von *0* ausgehende Linienelement einen reellen Betrag ds hat, von dem Gebiete diesseits 0, in welchem solchem Linienelement ein negativ imaginäres, und dem jenseits 0, in welchem ihm ein positiv imaginäres *ds* entspricht. Die Forderung von § 3, daß jede Transformation den drei ersten x^i die Baumartigkeit wahren soll, aber dem x^4 die Zeitartigkeit, kommt also vollständig auf die Gültigkeit der Ungleichungen (10) für die *gik* hinaus.

d) Die Transformation der Drei-Zeiger-Symbole. Die *g*- Klammern erhalten in der Theorie der Schwere eine besonders wichtige Rolle. Darum fragen wir hier nach ihrer Umrechnung von einem Koordinatensystem aufs andere. Wir gehen davon aus, daß die Gleichungen (55) für die geodätischen Linien in jedem Bezugssystem gelten müssen. Nun ist aber, wenn wir die x^i als Funktionen der x'^i gegeben denken:

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dp} = \sum_m \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{dx'^m}{dp},$$

$$\ddot{x}^i = \frac{d^2x^i}{dp^2} = \sum_o \frac{\partial x^i}{\partial x'^o} \frac{d^2x'^o}{dp^2} + \sum_{m\,n} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^n} \frac{dx'^m}{dp} \frac{dx'^n}{dp}.$$

Setzt man diese Werte für alle Differentialquotienten in (55) ein und ersetzt man zugleich $\ddot{x}'^0$ nach (55) durch eine Summe, so findet man:

$$\sum_{m\,n} \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^n} + \sum_{j\,k} \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} - \sum_o \left\{ \begin{matrix} m\,n \\ o \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x^i}{\partial x'^o} \right] \dot{x}'^m \dot{x}'^n = 0.$$

Dabei ist $\left\{ \begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix} \right\}$ eine aufs ungestrichene System, $\left\{ \begin{matrix} m\,n \\ o \end{matrix} \right\}'$ eine aufs gestrichene System bezogene g-Klammer. Nun kann man für eine geodätische Linie in einem Punkt noch die Richtung vorschreiben.

Man kann also die dx'^l/dp noch willkürlich vorschreiben und doch muß die letzte Gleichung immer richtig bleiben. Daraus schließen wir auf das Verschwinden des Faktors von $\dot{x}'^m \dot{x}'^n$:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^n} + \sum_{jk} \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} m\,n \\ k \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}. \quad (60)$$

Diese Christoffeischen Formeln enthalten die Transformation der *g*-Klammern. Bei linearen („affinen") Transformationen der Koordinaten fällt der zweite Differentialquotient fort, und der Vergleich mit (47) zeigt dann, daß sie sich wie die in den oberen Zeigern kovarianten, in den unteren kontra Varianten Komponenten eines Tensors dritten Banges verhalten (vgl. die Anmerkung dazu). Aber im allgemeinen gilt das nicht. Man bezeichnet solche Größen als Affintensoren. Sie haben nicht die invariante Natur wie ein Tensor. Deswegen können wir auch Koordinatensysteme finden, in denen wenigstens für einen Punkt sämtliche g-Klammern Null sind, wie wir in § 8 beweisen werden. Wohl aber stellt die linke Seite von (60) eine kontravariante Vektorkomponente dar. Bezeichnet man sie nämlich mit A^l, und berechnet man den entsprechenden Ausdruck für das gestrichene System, so findet man einfach

$$A'^i = \left\{ \begin{matrix} m\,n \\ i \end{matrix} \right\}'.$$

Gleichung (60) sagt also aus:

$$A^l = \sum_i A'^i \frac{\partial x^l}{\partial x'^i},$$

und dies ist in der Tat die Vektortransformation.

e) Die g-Klammern und die Determinante *g*. Nach (20) ist $\sum_k g^{ik} g_{jk}$ jedenfalls eine unveränderliche Zahl. Infolgedessen ist

$$\sum_k g^{ik} d g_{jk} = - \sum_k g_{jk} d g^{ik}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

mag nun *i* gleich j sein oder nicht Wir multiplizieren (61) einmal mit g^{jl} und summieren nach j, das andere Mal mit g_{ul} und summieren nach t:

$$d g^{il} = - \sum_{jk} g^{ik} g^{jl} d g_{jk} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61a)$$

$$d g_{jl} = - \sum_{ik} g_{ul} g_{jk} d g^{ik}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61b)$$

Gleichung (61 a) dividieren wir durch dx^m. Nach (57) und (54) finden wir:

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial x^m} = -\sum_j g^{jl} \left\{ \begin{matrix} j m \\ i \end{matrix} \right\} - \sum_k g^{ik} \left\{ \begin{matrix} k m \\ l \end{matrix} \right\},$$

oder auch in Analogie zu (57 a)

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\sum_j \left(g^{jk} \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} + g^{ij} \left\{ \begin{matrix} j l \\ k \end{matrix} \right\} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (61\,c)$$

Andererseits folgt aus der Definition der Ausdrücke g. g^{ik} als Unterdeterminanten von g nach einem bekannten Determinantensatz:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = g \cdot g^{ik}; \quad \frac{dg}{g} = \sum_{ik} g^{ik} dg_{ik} = -\sum_{ik} g_{ik} dg^{ik}.$$

Die beiden letzten Gleichungen lassen sich schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} d[\log(-g)] = \frac{1}{\sqrt{-g}} d\left(\sqrt{-g}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{ik} g^{ik} dg_{ik} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ik} g_{ik} dg^{ik}. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Nun dividieren wir durch dx^l und setzen den Wert (61c) für $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x}$ ein:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^l} = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \begin{matrix} i l \\ i \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \begin{matrix} j l \\ j \end{matrix} \right\}.$$

Beide Summen bedeuten dasselbe; also:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^l} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} i l \\ i \end{matrix} \right\}. \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (62\,a)$$

Schließlich folge $\frac{1}{2} \sum_{ik} g_{ik} d\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right) = d\left(\sqrt{-g}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (62\,b)$

Wir haben hier $\sqrt{-g}$ geschrieben, weil g in der Relativitätstheorie notwendig negativ ist. Bei einer Maßbestimmung, bei welcher g positiv ausfällt, kann man statt dessen ohne weiteres $\sqrt{g}$ setzen.

§ 8. Die Parallelverschiebung in Riemann sehen Räumen.

a) Riemannsche Koordinaten. In der euklidischen Geometrie bevorzugt man geradlinige, d. h. auf geodätische Linien bezogene Koordinaten, weil in ihnen im Gegensatz zu den krummlinigen der Tensor der Maßbestimmung konstant ist. In der Riemannschen Geometrie kann es derartige Koordinaten nicht geben; wären die g_{ik} unveränderlich, so hätten wir ja gerade den euklidischen Fall. Aber man kann wenigstens für einen beliebigen Punkt *P* Koordinatensysteme finden, in welchen die *gik* in dem genannten Punkt keine von Null verschiedenen ersten Differentialquotienten $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ haben, zugleich verschwinden nach (54) auch die g-Klammern. Sie heißen geodätische Koordinatensysteme.

Um ein Beispiel für solche Koordinaten zu finden, wählen wir zunächst ein beliebiges Koordinatensystem. Es habe im Punkt *P* den Maßtensor $\overset{0}{g}_{ik}$. Wir ziehen durch ihn die (n — 1) fache Schar der geodätischen Linien. Jede von ihnen bestimmen wir durch die n Konstanten c^i, deren Verhältnisse die Verhältnisse zwischen den $\dot{x}^i$ im Punkt *P* angeben $[c^1 : c^2 : c^3 \ldots = (\dot{x}^1)_P : (\dot{x}^2)_P : (\dot{x}^3)_P \ldots]$, zwischen denen wir aber noch die Beziehung

$$\sum_{ik} \overset{0}{g}_{ik} c^i c^k = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

festsetzen. Ein Punkt *Q* habe längs der geodätischen Linie *PQ* gemessen den Abstand *p* von *P;* verstehen wir unter den c^i die dieser Linie entsprechenden Werte, so geben wir ihm nunmehr die Koordinaten

$$x^i = c^i p. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Die in (64) eingeführten x^i sind Riemannsche Koordinaten, bezogen auf den Punkt *P* ($x^i = 0$). Da in ihnen für jede geodätische Linie durch *P* $\dot{x}^i = 0$ ist, muß im Nullpunkt *P,* in welchem sie sich alle kreuzen, nach (55) die Summe

$$\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right\} \dot{x}^k \dot{x}^l = \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right\} c^k c^l \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

für alle Wertesysteme der c^i verschwinden. Das ist nur möglich, wenn dort die g-Klammern, also nach (57a) auch die $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ verschwinden. Riemannsche Koordinaten für den Punkt *P* bilden somit ein für ihn geodätisches System.

Wendet man auf Riemannsche Koordinaten eine homogene lineare Transformation an, so gelangt man wieder zu solchen; denn die Gleichungen (64), durch welche wir sie eingeführt haben, bleiben dabei in ihrer Form erhalten. Umgekehrt sind lineare Transformationen die einzigen, welche dies leisten. Dagegen lassen sich geodätische Koordinatensysteme auch noch auf andere Arten ineinander umrechnen. Ist das System x^i für P geodätisch, so führt z. B. die Substitution

$$x^i = x'^i + \frac{1}{6}\sum_{klm} \alpha^i_{klm} x'^k x'^l x'^m + \text{Glieder höherer Ordnung}, \qquad (66)$$

in welcher man die unteren Zeiger von α^i_{klm} ohne weiteres miteinander vertauschen kann, wieder zu einem geodätischen System. In der Tat ist dann

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} = \delta^i_m + \frac{1}{2}\sum_{k,l} \alpha^i_{klm} x'^k x'^l, \quad \ldots\ldots \quad (66a)$$

$$g'_{mn} = \sum_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^n} g_{ik}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66b)$$

also für P, da dort die x^i wie die x'^i verschwinden:

$$g'_{mn} = g_{mn}.$$

Und weiter wird in P

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^n} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66c)$$

also fallen nach (66b) daselbst auch die $\frac{\partial g'_{mn}}{\partial x'^p}$ fort. Es gibt demnach mehr geodätische als Riemannsche Koordinatensysteme für einen Punkt. Begreiflicherweise, denn ein geodätisches System muß gewissen Forderungen in der Umgebung des hervorgehobenen Punktes genügen, Riemannsche Koordinaten hingegen nach (64) für das ganze Kontinuum, oder wenigstens endliche Teile davon.

Daß es geodätische Systeme gibt, d. h. solche, in denen die g-Klammern verschwinden, beweist uns (vgl. § 7), daß diese Symbole keinen Tensorcharakter tragen. Sonst könnten sie nicht in einem System verschwinden, ohne daß dies für alle Systeme gilt.

Soll eine geodätische Linie im Nullpunkt des beliebigen Koordinatensystems x'^i die Richtung

$$(\dot{x}'^i)_{x'^i=0} = c^i$$

haben, so ist nach der Differentialgleichung (55) dort

$$(x'^i)_{x^i=0} = -\sum_{kl}\left\{\begin{matrix}k\,l\\ i\end{matrix}\right\}' c^k c^l.$$

Es gilt dann die folgende Reihenentwicklung der x'^i nach Potenzen der vom Nullpunkt an gemessenen Bogenlänge *p:*

$$x'^i = c^i p - \frac{p^2}{2}\sum_{kl}\left\{\begin{matrix}k\,l\\ i\end{matrix}\right\}' c^k c^l + \cdots$$

Die $x^i = c^i . p$ sind aber nach (64) Riemannsche Koordinaten des Anfangspunktes. Die Formeln

$$x'^i = x^i - \frac{1}{2}\sum_{kl}\left\{\begin{matrix}k\,l\\ i\end{matrix}\right\}' x^k x^l + \cdots$$

oder ihre Umkehrungen

$$x^i = x'^i + \frac{1}{2}\sum_{kl}\left\{\begin{matrix}k\,l\\ i\end{matrix}\right\}' x'^k x'^l + \cdots \quad \cdots \quad (66\,d)$$

stellen somit die Transformation beliebiger in Riemannsche, oder genauer, in geodätische Koordinaten dar. Denn der Unterschied zwischen den Riemannsehen und anderen geodätischen Koordinaten könnte sich erst in den Gliedern dritter Ordnung zeigen *).

Nach (64) sind die geodätischen Linien durch den hervorgehobenen Punkt durch lineare homogene Gleichungen zwischen den Riemannschen Koordinaten bestimmt. Doch sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß auch in diesen Koordinaten geodätische Linien, die nicht durch den hervorgehobenen Punkt gehen, im allgemeinen nicht durch lineare Beziehungen darzustellen sind. Daß man alle geodätischen Linien im gleichen System linear darstellen kann, ist ein Ausnahmefall, welcher nur in der euklidischen, der elliptischen und hyperbolischen Geometrie (vgl. § 12 u. 13) vorkommt.

Auf der im euklidischen Raum gelegenen Kugelfläche vom Halbmesser A führen wir zunächst, wie üblich, Polabstand ϑ und Azimut φ als Koordinaten ein. Für den Pol $\vartheta = 0$ sind dann

$$x^1 = A\vartheta\cos\varphi, \qquad x^2 = A\vartheta\sin\varphi$$

Riemannsche Koordinaten. Denn $A.\vartheta = a$ ist die Bogenlänge der vom Pol ausgehenden größten Kreise, und außerdem ist für dieses System, da sich die Kreise $x^1 = 0$ und $x^2 = 0$ im Pol senkrecht schneiden, in diesem die Maßbestimmung $da^2 = dx^{12} + dx^{22}$, woraus man entnimmt:

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0,$$

*) Dasselbe beweist man leicht aus den Christoffeischen Formeln (60).

so daß die Konstanten der letzten Gleichungen auch der Forderung (63) genügen. Geodätische, aber nicht mehr Riemannsche Koordinaten wären z. B.:

$$x = A \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y = A \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Denn für sie gilt die Maßbestimmung

$$ds^2 = A^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$
$$= \frac{1}{A^2 - x^2 - y^2}\,[(A^2-y^2)dx^2 + (A^2-x^2)dy^2 + 2xy\,dx\,dy].$$

Die g_{ik}, welche man hieraus abliest, haben im Pol $x = y = 0$ in der Tat verschwindende erste Ableitungen.

Ein Beispiel für geodätische Koordinaten auf beliebigen Flächen gibt § 12 a.

Wir haben bisher so gesprochen, als wäre ds^2 eine positiv definite quadratische Form. Das ist nun gerade in der Relativitätstheorie nicht der Fall; vielmehr ist für alle zeitartigen geodätischen Linien die Bogenlänge p rein imaginär, und wir müssen, in Übereinstimmung mit (64) die c^i ebenfalls imaginär wählen, um zu reellen Koordinaten für die Punkte diesseits und jenseits von p zu gelangen. Trotz dieses Unterschiedes zwischen den genannten Weltgebieten und dem Zwischengebiet schließen sich die Koordinaten, die man so findet, am Nullkegel von P stetig aneinander, und man gelangt so zu einem einheitlichen Riemannschen Koordinatensystem.

Um dies zu zeigen, machen wir zunächst durch eine homogene lineare Transformation

$$\mathfrak{g}_{44} = -1, \quad \mathfrak{g}_{11} = \mathfrak{g}_{22} = \mathfrak{g}_{33} = +1, \quad \text{die anderen } \mathfrak{g}_{ik} = 0.$$

Wir verfahren dann genau so, als wollten wir den Beweis für die pseudoeuklidische Geometrie der beschränkten Relativitätstheorie führen.

Für einen Punkt x^i des Zwischengebiets befriedigen wir nämlich Gleichung (63) durch den Ansatz:

$$c^1 = \mathfrak{Cof}\,\varphi \cos\vartheta, \qquad c^2 = \mathfrak{Cof}\,\varphi \sin\vartheta \cos\chi,$$
$$c^3 = \mathfrak{Cof}\,\varphi \sin\vartheta \sin\chi, \quad c^4 = \mathfrak{Sin}\,\varphi.$$

Definieren wir nun einen Winkel $\psi < \frac{\pi}{4}$ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\psi = \mathfrak{Tg}\,\varphi,$$

so folgt nach (64);

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= p\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\varphi + \mathfrak{Sin}^2\varphi}\cos\psi\cos\vartheta, \\ x^2 &= p\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\varphi + \mathfrak{Sin}^2\varphi}\cos\psi\sin\vartheta\cos\chi, \\ x^3 &= p\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\varphi + \mathfrak{Sin}^2\varphi}\cos\psi\sin\vartheta\sin\chi, \\ x^4 &= p\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\varphi + \mathfrak{Sin}^2\varphi}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \quad (66\,d')$$

Für einen Punkt x^i jenseits von P können wir der Gleichung (63) genügen, indem wir

$$\left.\begin{aligned} c^1 &= \sqrt{-1}\,\mathfrak{Sin}\,\Phi\cos\vartheta, & c^3 &= \sqrt{-1}\,\mathfrak{Sin}\,\Phi\sin\vartheta\cos\chi, \\ c^2 &= \sqrt{-1}\,\mathfrak{Sin}\,\Phi\sin\vartheta\sin\chi, & c^4 &= \sqrt{-1}\,\mathfrak{Cof}\,\Phi \end{aligned}\right\} \quad (66\,e)$$

machen. Führen wir dann einen Winkel $\Psi > \frac{\pi}{4}$ durch die Gleichung:

$$tg\,\Psi = \mathfrak{Cotg}\,\Phi$$

ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} X^1 &= \sqrt{-1}\,p\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\Phi + \mathfrak{Sin}^2\Phi}\cos\Psi\cos\vartheta, \ldots \\ X^4 &= \sqrt{-1}\,p\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\Phi + \mathfrak{Sin}^2\Phi}\sin\Psi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (66f)$$

Jetzt sollen sich ψ und Ψ mehr und mehr ihrem gemeinsamen Grenzwert $\frac{\pi}{4}$ nähern. Dann wird φ bzw. Φ über alle Grenzen wachsen und gleichzeitig p immer näher an Null rücken. Wir wollen beide Grenzübergänge so führen, daß in beiden Gebieten $\sum x^{i2}$ bzw. $\sum X^{i2}$ den gleichen reellen Wert r^2 behält. Dann haben

$$p\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\varphi + \mathfrak{Sin}^2\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{-1}\,p\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\Phi + \mathfrak{Sin}^2\Phi}$$

dabei denselben reellen Wert r, und es streben x^i und X^i demselben Grenzwert zu. Damit ist die Stetigkeit der Koordinaten am Nachkegel bewiesen. Für den Vorkegel zeigt man sie, indem man zunächst

$$c^4 = -\sqrt{-1}\,\mathfrak{Cof}\,\Phi$$

setzt.

In dem genannten Grenzfall wird $\cos\psi = \sin\psi$ und $\cos\Psi = \sin\Psi$, so daß nach (66 d') oder (66 f) die Gleichung

$$x^{12} + x^{22} + x^{32} - x^{42} = 0 \quad \ldots \quad (66\,g)$$

besteht. Sie stellt den Nullkegel des Punktes P in den ihm zugehörigen rechtwinkeligen Riemannschen Koordinaten dar, wie auch die Geometrie beschaffen sein mag. Die geodätischen Nullinien sind nach (64) durch die Gleichungen

$$x^1 : x^2 : x^3 : x^4 = a^1 : a^2 : a^3 : a^4$$

dargestellt, wobei die Konstanten a^i der Beziehung

$$a^{11} + a^{22} + a^{33} - a^{44} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66\,h)$$

genügen. Verzichtet man auf die Bechtwinkeligkeit im Punkt P, so tritt an Stelle von *(66* g) und (66 h)

$$\sum_{ik} \bar{g}_{ik}\, x^i x^k = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{ik} \bar{g}_{ik}\, a^i a^k = 0.$$

b) Die Parallelverschiebung eines Vektors. Wir definieren einen Vektor durch die Forderung, daß alle seine Komponenten $A^{\prime i}$ im System x′ konstant sind. In einem anderen, ungestrichenen System sind nach den Transformationsformeln für Vektoren die

$$A^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial x^{\prime i}} A^{\prime i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66\,i)$$

dessen Komponenten. Für zwei Punkte, *P* und *Q*, deren Abstand im gestrichenen System durch den Zuwachs $dx^{\prime m}$ der Koordinaten bestimmt ist, beträgt dann der Unterschied der Komponente A^j im ungestrichenen System

$$dA^j = \sum_m dx^{\prime m} \frac{\partial A^j}{\partial x^{\prime m}} = \sum_{im} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{\prime i}\, \partial x^{\prime m}} A^{\prime i}\, dx^{\prime m};$$

und hier ist nach den Christoffelschen Formeln (60):

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{\prime i}\, \partial x^{\prime m}} = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\prime i}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{\prime m}} + \sum_k \left\{ \begin{matrix} i\,m \\ k \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x^j}{\partial x^{\prime k}}.$$

Nun sei aber das gestrichene System ein für den Punkt P geodätisches. Dann verschwinden, wie wir gesehen haben, in ihm die auf *P* bezogenen Drei-Zeiger-Symbole und wir finden

$$dA^j = -\sum_{iklm} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\prime i}} A^{\prime i} \frac{\partial x^l}{\partial x^{\prime m}}\, dx^{\prime m}$$

oder in Hinblick auf (66 i) und die Beziehung $\sum_m \frac{\partial x^l}{\partial x^{\prime m}}\, dx^{\prime m} = dx^l$:

$$dA^j = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ j \end{matrix} \right\} A^k\, dx^l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Jetzt definieren wir es als unendlich kleine Parallelverschiebung eines Vektors, wenn wir ihn von *P* so nach dem unendlich benachbarten Punkt *Q* verpflanzen, daß sich dabei seine Komponenten, bezogen auf ein für *P* geodätisches Koordinatensystem, nur in Größen höherer

Ordnung verändern. Welches der verschiedenen für P geodätischen Systeme wir dabei zugrunde legen, ist gleichgültig; nach (67) verschwindet dA^j immer, wenn die g-Klammern Null sind. Aber in nichtgeodätischen Systemen erleidet der Vektor A bei seiner Parallelverschiebung Änderungen an seinen kontravarianten Komponenten; welche, das lehrt Gleichung (67).

Diese Definition schließt sich den euklidischen Verhältnissen so eng als möglich an. Auch unter ihnen darf man ja die Parallelverschiebung, die uns dort wohl bekannt ist, nicht durch die Konstanz der Komponenten in irgend einem krummlinigen, sondern nur in einem geradlinigen Koordinatensystem festlegen. Diesem aber entspricht in einem Riemannsehen Raum das geodätische System. Damit hängt zusammen, daß sich die Komponentenänderungen dA^j keineswegs selbst als Vektorkomponenten auffassen lassen. Wären sie es, so wäre es unmöglich, sie durch passende Wahl der Koordinaten alle zum Verschwinden zu bringen. Nur für zwei im gleichen Punkt liegende Vektoren gilt der Satz von § 6, daß sich ihre Komponenten bei Addition und Subtraktion immer wieder zu Vektorkomponenten zusammenfügen.

Auch dieser Zug findet sich schon in der euklidischen Geometrie, sobald man krummlinige Koordinaten benutzt. Man führe in die euklidische Ebene etwa Polarkoordinaten r, ϑ ein und verschiebe einen zur Richtung der x-Achse, $\vartheta = 0$ dauernd parallelen Einheitsvektor (diese Angabe hat in dieser Geometrie, freilich auch nur in ihr, einen ganz bestimmten Sinn) um die Strecke dr, $d\vartheta$. Man sieht, daß $dA^r = -\sin\vartheta\, d\vartheta$, $dA^\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{r^2}dr - \frac{\cos\vartheta}{r}d\vartheta$. Denn es ist

$$A^r = \frac{\partial r}{\partial x}A^x = \cos\vartheta, \qquad A^\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}A^x = -\frac{\sin\vartheta}{r}.$$

Auch hier haben die Zuwächse nicht die Vektoreigenschaft, denn sie lassen sich ja durch Einführung geradliniger Koordinaten forttransformieren. Wenn man in der euklidischen Geometrie dennoch den Satz ausspricht, daß auch Vektoren an verschiedenen Orten in den Differenzen ihrer Komponenten einen neuen Vektor bestimmen, so denkt man dabei lediglich an die nach geradlinigen Koordinaten genommenen Komponenten; nur mit dieser Beschränkung gilt er.

Bei einer Parallelverschiebung bleiben nicht nur die kontravarianten, sondern auch die kovarianten Vektorkomponenten in geodätischen Systemen erhalten. Da die ersten Ableitungen der *gik*

im hervorgehobenen Punkt Null sind, schließt man dies [leicht **aus** der Gleichung

$$A^i = \sum_j g^{ij} A_j.$$

Infolgedessen bleibt für einen Vektor das Quadrat seines Betrages, $\sum_i A^i A_i$, für zwei Vektoren das skalare Produkt, $\sum_i A^i B_i$, und damit der Winkel zwischen ihnen erhalten. Diese Aussage gilt wegen der skalaren Natur dieser Größen aber für jedes Koordinatensystem und ermöglicht uns leicht, die (67) entsprechende Formel für kovariante Komponenten aufzustellen. Denn unterwerfen wir die Vektoren *A* und *B* einer gemeinsamen Parallelverschiebung, so ist nach der auf B^k angewandten Formel (67):

$$d\left(\sum_i A_i B^i\right) = \sum_i B^i dA_i + \sum_k A_k dB^k$$
$$= \sum_i B^i \left(dA_i - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ k \end{matrix} \right\} A_k dx^l\right),$$

und da dies für jeden Vektor *B* verschwinden muß, ist

$$dA_i = \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ k \end{matrix} \right\} A_k dx^l. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67a)$$

Natürlich sind auch die dA_i nicht Vektorkomponenten.

Verschieben wir den Vektor *A* nicht parallel, sondern unter Drehung, so sind die Ausdrücke

$$dA_i - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ k \end{matrix} \right\} A_k dx^l \quad \text{und} \quad dA^j + \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ j \end{matrix} \right\} A^k dx^l$$

nicht mehr Null. Wir könhen aber leicht zeigen, daß sie im Gegensatz zu den *dAi* und dA^j selbst Vektorkomponenten bilden. Dazu brauchen wir nach § 6 nur nachzuweisen, daß sie sich mit einem beliebigen Vektor *B* zu einem skalaren Produkt vereinigen lassen. Und diesen Nachweis führen wir, indem wir den Vektor *B* allein parallel verschieben und die Änderung des Skalars

$$\sum_j A^j B_j = \sum_i A_i B^i$$

berechnen, welche selbst ein (hier von Null verschiedener) Skalar ist. Dabei finden wir nämlich einmal wie oben, indem wir *dBi* nach (67) ausdrücken:

$$d\left(\sum_i A_i B^i\right) = \sum_i B^i \left(dA_i - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ k \end{matrix} \right\} A_k dx^l\right).$$

Ähnlich, aber unter Benutzung von (67a) für $d B_j$ läßt sieh schreiben:

$$d\left(\sum_j A_j B_j\right) = \sum_j B_j \left(dA^j + \sum_{kl} \left\{ {kl \atop j} \right\} A^k dx^l\right).$$

Derselbe Schluß läßt sich übrigens aus der Vektornatur der Unken Seite von (60) ziehen, da wir von dieser Formel hier ausgegangen sind.

Unter der Richtung einer Kurve verstehen wir den Einheitsvektor, dessen Komponenten zu den längs der Kurve genommenen Differentialen dx^i proportional sind. Ist ds das Differential der Bogenlänge, so sind also die Quotienten $\frac{dx^i}{ds}$ seine Komponenten. Dividieren wir in (67) durch ds, und setzen wir für A den Richtungsvektor, so finden wir

$$\frac{d^2 x^j}{ds^2} + \sum_{kl} \left\{ {kl \atop j} \right\} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0.$$

Diese Gleichungen stimmen mit den Differentialgleichungen (55) der geodätischen Linien überein. Es ist also ein Kennzeichen der geodätischen Linien, daß sie im Fortschreiten ihre Richtung parallel verschieben, also nicht ändern. Sie stehen auch hierin den Geraden der euklidischen Geometrie so nahe, wie das in allgemeinen Riemannsehen Räumen nur möglich ist. Dies ist sogar die anschaulichste allgemeingültige Eigenschaft der geodätischen Linien. Daß sie das in § 7 behandelte Variationsproblem lösen, ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend dafür, daß sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte bilden. Schon in der Flächentheorie ist dies nur unter gewissen Bedingungen der Fall. In der „Welt" der Relativitätstheorie gilt es um so weniger, als deren Linienelement nicht definit ist.

§9. Vektor- und Tensoranalysis.

a) Ko- und kontravariante Differentiation. Komponenten eines und desselben Tensors zweiten Ranges sind die Größen:

$$A_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial x^k} - \sum_l \left\{ {ik \atop l} \right\} P_l, \quad A^i_k = \frac{\partial P^i}{\partial x^k} + \sum_l \left\{ {kl \atop i} \right\} P^l. \quad (68)$$

Denn sind die dx^i die Komponenten einer Verschiebung vom Betrage ds, so sind

$$\sum_k A_{ik}\frac{dx^n}{ds} = \frac{dP_i}{ds} - \sum_{kl}\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\} P_l \frac{dx^n}{ds}$$

$$\sum_k A^i_k \frac{dx^k}{ds} = \frac{dP^i}{ds} + \sum_{kl}\left\{\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix}\right\} P^l \frac{dx^k}{ds}$$

nach den Schlußbemerkungen in § 8 Komponenten des gleichen Vektors. Man' bezeichnet die Komponenten dieses Tensors als die kovarianten Differentialquotienten des Vektors P und schreibt:

$$D_k P_i = \frac{\partial P_i}{\partial x^k} - \sum_l \left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\} P_l, \quad D_k P^i = \frac{\partial P^i}{\partial x^k} + \sum_l \left\{\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix}\right\} P^l \quad . \quad . \quad (69)$$

Verschwinden sie, so geht in der Umgebung des betrachteten Punktes das Vektorfeld durch Parallelverschiebung aus dem Vektor im genannten Punkt hervor; das Feld ist dann in diesem Punkt stationär. Die gewöhnliche Differentiation lieferte hier keinen Ausdruck von Tensorcharakter; doch geht für geodätische Koordinatensysteme die kovariante wegen des Verschwindens der Drei-Zeiger-Symbole in gewöhnliche Differentiation über.

Komponenten eines und desselben Tensors dritten Ranges bilden ferner die kovarianten Differentialquotienten eines Tensors zweiten Ranges:

$$\left.\begin{aligned} D_k T_{il} &= \frac{\partial T_{il}}{\partial x^k} - \sum_m \left\{\begin{matrix} kl \\ m \end{matrix}\right\} T_{im} - \sum_m \left\{\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix}\right\} T_{ml} \\ D_k T^l_i &= \frac{\partial T^l_i}{\partial x^k} + \sum_m \left\{\begin{matrix} km \\ l \end{matrix}\right\} T^m_i - \sum_m \left\{\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix}\right\} T^l_m \\ D_k T^{il} &= \frac{\partial T^{il}}{\partial x^k} + \sum_m \left\{\begin{matrix} km \\ l \end{matrix}\right\} T^{im} + \sum_m \left\{\begin{matrix} km \\ i \end{matrix}\right\} T^{ml} \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Es genügt, dies für den Fall zu beweisen, daß der Tensor T_{ik} durch Multiplikation zweier Vektoren P und Φ entsteht; denn auf den allgemeinen Fall, in welchem eine Reihe solcher Produkte zu summieren ist, überträgt sich dieser Beweis wegen des linearen Auftretens des Tensors T_{ik} ohne weiteres. Setzt man also

$$T_{il} = P_i \Phi_l, \quad T^l_i = P_i \Phi^l, \quad T^{il} = P^i \Phi^l,$$

so findet man

$$\left.\begin{aligned} D_k T_{ij} &= P_i\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x^k} - \sum_m \left\{\begin{matrix} k\,j \\ m \end{matrix}\right\} \Phi_m\right) + \Phi_j\left(\frac{\partial P_i}{\partial x^k} - \sum_m \left\{\begin{matrix} i\,k \\ m \end{matrix}\right\} P_m\right) \\ &= P_i \,.\, D_k \Phi_j + \Phi_j \,.\, D_k P_i \\ D_k T_i^j &= P_i\left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^k} + \sum_m \left\{\begin{matrix} k\,m \\ i \end{matrix}\right\} \Phi^m\right) + \Phi^j\left(\frac{\partial P_i}{\partial x^k} - \sum_m \left\{\begin{matrix} i\,k \\ m \end{matrix}\right\} P_m\right) \\ &= P_i \,.\, D_k \Phi^j + \Phi^j \,.\, D_k P_i \\ D_k T^{ij} &= P^i\left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^k} + \sum_m \left\{\begin{matrix} k\,m \\ i \end{matrix}\right\} \Phi^m\right) + \Phi^j\left(\frac{\partial P^i}{\partial x^k} + \sum_m \left\{\begin{matrix} k\,m \\ i \end{matrix}\right\} P^m\right) \\ &= P^i \,.\, D_k \Phi^j + \Phi^j \,.\, D_k P^i \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

und hier ist jedesmal eine Vektorkomponente mit einer Klammer multipliziert, welche nach (69) Komponente eines Tensors zweiten Ranges ist.

Durch Fortsetzung dieser Schlußweise, d. h. indem man den Tensor *m*ten Ranges als Produkt aus einem Vektor und einem Tensor *(m*—l)ten Ranges auffaßt, zeigt man die Tensornatur der kovarianten Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} D_k T_{hij} &= \frac{\partial}{\partial x^k}(T_{hij}) - \sum_m \left\{\begin{matrix} h\,k \\ m \end{matrix}\right\} T_{mij} - \sum_m \left\{\begin{matrix} i\,k \\ m \end{matrix}\right\} T_{hmj} \\ &\quad - \sum \left\{\begin{matrix} j\,k \\ m \end{matrix}\right\} T_{him} \\ D_k T_{hi}^{\ j} &= \frac{\partial}{\partial x^k}(T_{hi}^{\ j}) - \sum_m \left\{\begin{matrix} h\,k \\ m \end{matrix}\right\} T_{mi}^{\ j} - \sum_m \left\{\begin{matrix} i\,k \\ m \end{matrix}\right\} T_{hm}^{\ j} \\ &\quad + \sum_m \left\{\begin{matrix} m\,k \\ j \end{matrix}\right\} T_{hi}^{\ m} \\ D_k T^{hij} &= \frac{\partial}{\partial x^k}(T^{hij}) + \sum_m \left\{\begin{matrix} m\,k \\ h \end{matrix}\right\} T^{mij} + \sum_m \left\{\begin{matrix} m\,k \\ i \end{matrix}\right\} T^{hmj} \\ &\quad + \sum_m \left\{\begin{matrix} m\,k \\ j \end{matrix}\right\} T^{him} \end{aligned}\right\} \quad (71')$$

und allgemein:

$$\left.\begin{aligned} D_k T_{i_1 \dots i_m} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(T_{i_1 \dots i_m}\right) - \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{m} \left\{\begin{matrix} i_\lambda\,k \\ u \end{matrix}\right\} T_{i_1 \dots i_{\lambda-1}\,\mu\,i_{\lambda+1} \dots i_m} \\ D_k T^{i_1 \dots i_m} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(T^{i_1 \dots i_m}\right) + \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{m} \left\{\begin{matrix} \mu\,k \\ i_\lambda \end{matrix}\right\} T^{i_1 \dots i_{\lambda-1}\,\mu\,i_{\lambda+1} \dots i_m} \end{aligned}\right\} \quad (71a)$$

Die kovarianten Differentialquotienten der Formeln (69), (70), (71') und (71a) bilden, wie gezeigt, die Komponenten je eines und desselben Tensors. Deswegen kann man die Hebung eines Zeigers an dem differentiierten Tensor von der unteren in die obere Stellung oder umgekehrt dessen Senkung hinter dem Zeichen D_k der kovarianten Differentiation ebenso vornehmen, als stände dies Zeichen nicht da. Zum Beispiel:

$$D_k T^{i_1 \dots i_m}{}_{j_1 \dots j_n} = \sum_{l_1 \dots l_m} g^{i_1 l_1} \dots g^{i_m l_m} D_k T_{l_1 \dots l_m j_1 \dots j_n}$$

$$= \sum_{l_1 \dots l_n} g_{j_1 l_1} \dots g_{j_n l_n} D_k T^{i_1 \dots i_m l_1 \dots l_n}.$$

Wir können weiter nach derselben Regel das Zeichen k am D heben, wenn wir als kontravariante Differentialquotienten die Tensorkomponenten

$$D^k T^{i_1 \dots i_m}{}_{j_1 \dots j_n} = \sum_l g^{kl} D_l T^{i_1 \dots i_m}{}_{j_1 \dots j_n} \quad \dots \quad (71b)$$

definieren, welche natürlich demselben Tensor angehören, wie die kovarianten Differentialquotienten.

Auch für einen Tensor nullten Ranges, d. h. einen Skalar φ, führen wir der Gleichmäßigkeit wegen eine kovariante Differentiation ein, die sich freilich nicht von der gewöhnlichen unterscheidet; wir setzen:

$$D_k \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \Gamma_{\varrho \alpha} \delta^{\varrho}_{k} \varphi_{\alpha} \quad \dots \dots \quad (72)$$

Dies ist ein Vektor, weil

$$\sum_k D_k \varphi \frac{dx^k}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}$$

ein Skalar ist.

Da für ein geodätisches System bei allen Tensoren die kovariante in die gewöhnliche Differentiation übergeht, so gilt ein Satz, der sich auch schon in (71) äußert: Die kovariante — und ebenso die kontravariante — Differentiation eines Produktes aus Tensoren ist wie bei der gewöhnlichen Differentiation so auszuführen, daß man zunächst den ersten, dann den zweiten Faktor als konstant betrachtet und jedesmal den anderen differentiiert

b) Divergenzbildung. Diese geschieht, indem wir einen der Tensoren der kovarianten Differentiation verjüngen. Z. B. ist die Divergenz des Vektors P der Skalar

$$Div\,P = \sum_k D_k P^k = \sum_{ik} g^{ik} D_k P_i = \sum_i D^i P_i, \qquad (72\,a)$$

die Divergenz des Tensors zweiten Ranges T_{ik} der Vektor mit den Komponenten

$$Div_i T = \sum_k D_k T_i^k, \quad Div^i T = \sum_k D_k T^{ik}, \quad . \quad . \quad (72b)$$

die Divergenz des Tensors dritten Ranges T_{ijk} der Tensor zweiten Ranges

$$Div^{hi} T = \sum_k D_k T^{hik} \text{ usw.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72\,c)$$

Diese Begriffe sind uns zum Teil schon aus der beschränkten Relativitätstheorie bekannt; sie sind hier aber für den allgemeineren nichteuklidischen Fall veränderlicher g_{ik} definiert.

Führt man die angedeutete Operation an den Formeln (69), (70) und (71') aus, so kann man mit Hilfe von (62 a) die Summation nach k an den Drei-Zeiger-Symbolen $\left\{\begin{matrix} kl \\ k \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} km \\ k \end{matrix}\right\}$ ziehen. Man erhält für einen Vektor *):

$$Div\,P = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,P^k)}{\partial x^k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

für einen Tensor zweiten Ranges

$$\left.\begin{aligned} Div_i T &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,T_i^k\right)}{\partial x^k} - \sum_{kl} \left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\} T_l^k, \\ Div^i T &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,T^{ik})}{\partial x^k} + \sum_{kl} \left\{\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix}\right\} T^{lk} \end{aligned}\right\} \qquad (73a)$$

und für einen Tensor dritten Ranges z. B.

$$\left.\begin{aligned} Div^{ki} T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,T^{hik})}{\partial x^h} \\ + \sum_{mk} \left(\left\{\begin{matrix} mk \\ h \end{matrix}\right\} T^{mik} + \left\{\begin{matrix} mk \\ i \end{matrix}\right\} T^{hmk} \right). \end{aligned}\right\} \qquad (73a')$$

*) Im Hinblick auf die indefinite Maßbestimmung der Relativitätstheorie steht in den folgenden Formeln $\sqrt{-g}$; für eine definite müßte man natürlich $\sqrt{g}$ schreiben.

In der ersten der Gleichungen (73 a) liegt nach (54) die Uniformung nahe:

$$\sum_{kl}\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\} T_l^k = \sum_{klm} g^{lm} T_l^k \left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\sum_{km} T^{mk}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)$$

Bei einem symmetrischen Tensor liefert die Summation an den beiden letzten Differentialquotienten dasselbe; die dem zweiten entsprechende Summe geht nämlich durch die Vertauschung der Summationszeiger in die dem dritten entsprechende über und hebt sie auf. Daher

$$\mathit{div}_i T = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_k \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, T_i^k\right)}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\sum_{kl} T^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \qquad (73\,b)$$

oder nach (61b)

$$\mathit{div}_i T = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_k \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, T_i^k\right)}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\sum_{kl} T_{kl}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}. \qquad (73\,c)$$

Bei einem antisymmetrischen Tensor hingegen, d. h. bei einem Sechservektor $\mathfrak{M}$, vereinfachen sich die kontravarianten Komponenten der Divergenz zu:

$$\mathit{div}^i \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_k \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{ik}\right)}{\partial x^k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73\,d)$$

Wegen der Symmetrie der g-Klammern in den oberen Zeigern fällt nämlich die Doppelsumme in der zweiten Gleichung (73 a) fort. Aus demselben Grunde fallen die Doppelsummen fort, wenn wir an einem vollständig antisymmetrischen Tensor T^{hij} nach (73a') die Divergenz bilden. Es folgt somit:

$$\mathit{div}^{hi} T = \sum_k D_k T^{hik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_k \frac{\partial \sqrt{-g}\, T^{hik}}{\partial x^k}. \qquad (73\,d')$$

Von den Rechnungsregeln des ersten Bandes können wir schon hier die dortige Gleichung (116) für einen Skalar φ und einen Vektor P übertragen:

$$\mathit{Div}(\varphi P) = \varphi\, \mathit{Div} P + (P,\ \Gamma\varphi\alpha\delta\varphi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Setzt man in (73 a) für T_{ik} den Maßtensor g_{ik}, und denkt man sich die Determinante g und die g^{ik} durch die g_{ik} ausgedrückt, so gibt es in jener Formel keinen Summanden, der nicht einen ersten Differentialquotienten der gik als Faktor enthielte. In einem geodätischen System verschwinden aber die Differentialquotienten (§ 8). Also ist der Tensor der Malibestimmung divergenzfrei; oder

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{ik})}{\partial x^k} = -\sum_{kl} g^{kl}\left\{\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad (74')$$

c) Rotationsbildungen. Diese sind an allen den Tensoren möglich, welche eine einfache geometrische Bedeutung haben, nämlich dem Vektor, der nach § 6 eine Strecke, dem antisymmetrischen Tensor zweiten Ranges, welcher zwei zueinander senkrechte Flächenstücke, und dem vollständig antisymmetrischen Tensor dritten Ranges, welcher einen Raum darstellt. Man kombiniert, um sie zu definieren, kovariante Differentialquotienten so, daß vermöge der Antisymmetrie der betrachteten Tensoren und der Symmetrie der g-Klammern in ihren oberen Zeigern die g-Klammern fortfallen.

So ist bei einem Vektor P

$$\mathfrak{Rot}_{ik} P = D_i P_k - D_k P_i = \frac{\partial P_k}{\partial x^i} - \frac{\partial P_i}{\partial x^k} \quad \cdots \quad (74a)$$

[vgl. (69)] ein Sechservektor. Wenden wir weiter die erste der Formeln (70) auf ein Sechservektor an, vertauschen wir sodann die Zeiger *i, k, l* zyklisch und addieren alle drei Gleichungen, so kommen wir zu dem vollständig antisymmetrischen Tensor dritten Ranges, dessen Komponenten (nach Umstellung der Zeiger *k* und *l)* lauten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Rot}_{ikl} T &= D_i T_{kl} + D_l T_{ik} + D_k T_{li} \\ &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial T_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i}. \end{aligned}\right\} \cdots \quad (74b)$$

Hiermit endet für drei Dimensionen die Reihe der aufzuzählenden Operationen. Und zwar ersetzt die letztgenannte für einen Flächenvektor D_{ik} die gegenüber linearen Transformationen invariante *div* B. Für vier Dimensionen aber kommt noch eine (ebenfalls vollständig antisymmetrische) Rotation hinzu, nämlich die des vollständig antisymmetrischen Tensors $T_{ikl,}$ deren einzige Komponente sich nach (71') zu

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Rot}_{1234} T &= D_1 T_{234} - D_2 T_{341} + D_3 T_{412} - D_4 T_{123} \\ &= \frac{\partial T_{234}}{\partial x^1} - \frac{\partial T_{341}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{412}}{\partial x^3} - \frac{\partial T_{123}}{\partial x^4} \end{aligned}\right\} \cdots \quad (74\,c)$$

ergibt.

d) Wiederholung der ko- oder kontravarianten Differentiation ist bei einem Tensor deswegen möglich, weil sich bei jeder einzelnen dieser Operationen immer wieder ein Tensor ergibt. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Differentiation eines Skalars aber ist bei einer solchen Differentiation nach x^i, x^k, x^l ... die Vertauschung der Reihenfolge im allgemeinen unzulässig. Dieser Unterschied beruht darauf, daß schon bei der zweiten ko- oder kontravarianten Differentiation nach den Formeln (69), (70), (71') und (71 a)

Differentialquotienten der g-Klammern nach den Koordinaten auftreten, die sich auch in einem geodätischen System nicht zum Verschwinden bringen lassen, was doch bei den g-Klammern seihst stets möglich ist. Wir kommen in § 11 nochmals auf diesen Punkt zurück.

Eine Ausnahme bildet die nochmalige Differentiation eines Gradienten, da in diesem nach (72) keine g-Klammer auftritt; also:

$$D_i(D_k\varphi) = D_k(D_i\varphi), \quad D_i(D^k\varphi) = D^k(D_i\varphi); \quad . \quad . \quad (74c')$$

oder, da nach (72) und (74 a)

$$\mathfrak{Rot}_{kl}\,\Gamma\varphi \propto \delta\varphi = D_kD_i\varphi - D_iD_k\varphi,$$

ist

$$\mathfrak{Rot}\,\Gamma\varphi \propto \delta\varphi = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74d)$$

Nach (74a) tritt ferner in $\mathfrak{Rot}\,P$ keine g-Klammer auf, und deswegen nach (46 c) und (46 d) auch nicht in dem dazu dualen Sechservektor $\mathfrak{Rot}^*\,P$. Bei kovarianter Differentiation v $\mathfrak{Rot}^*\,P$ kann man deshalb ein geodätisches System zugrunde legen, mit dem Erfolg, daß erstens die kovariante in gewöhnliche Differentiation übergeht, und zweitens die Differentialquotienten der $\sqrt{\pm g}$ in (46 c) und (46 d) verschwinden. Dieselbe Rechnung, die in Bd. I zu Gleichung (112) führt, lehrt dann auch hier:

$$\Delta iv_i(\mathfrak{Rot}^*\,P) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74e)$$

Bildet man ferner nach (73) und (73 d) für einen Sechservektor $\mathfrak{M}$

$$Div\,\Delta iv\,\mathfrak{M} = \sum_{ik} D_iD_k\mathfrak{M}^{ik},$$

so kann man hier die Differentiationsfolge umkehren, weil in (73d) neben den Differentialquotienten kein Summand mit einer *g*-Klammer als Faktor auftritt:

$$\sum_{ik} D_iD_k\mathfrak{M}^{ik} = \sum_{ik} D_kD_i\mathfrak{M}^{ik}.$$

Wegen der Anti[illegible]

$$\sum_{ik} D_iD_k\mathfrak{M}^{ik} = -\sum_{ik} D_iD_k\mathfrak{M}^{ki}$$

und durch Ve

$$-\sum_{ik} D_iD_k\mathfrak{M}^{ki} = -\sum_{ik} D_kD_i\mathfrak{M}^{ik}.$$

Also ist diese Doppelsumme Null:

$$Div\,\Delta iv\,\mathfrak{M} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74f)$$

Ebenso folgt aus dem Fehlen von g- Klammern in (73 d') für einen vollständig antisymmetrischen Tensor T^{hij}:

$$\Delta iv^h \Delta iv\, T = \sum_{ik} D_i D_k T^{hik} = \sum_{ik} D_k D_i T^{hik} = 0. \qquad (74\,f')$$

Schließlich bestätigt man noch nach (74 a) und (74 b), sowie nach (74b) und (74c):

$$\varrho o \tau_{ikl}(\Re o t\, P) = 0, \quad \varrho o \tau_{ikl\,m}(\varrho o \tau\, \mathfrak{W}) = 0. \quad . \quad . \quad (74\,g)$$

Durch zweimalige Differentiation und nachfolgende Verjüngung bildet man die Tensoren

$$\left.\begin{aligned} \square\,\varphi &= \sum_k D^k(D_k\varphi) = \sum_k D_k(D^k\varphi) = Div\,\Gamma\varrho\,\alpha\,\ddot{o}\,\varphi, \\ \square\,P_i &= \sum_k D^k(D_k P_i), \\ \square\,T_{ij} &= \sum_k D^k(D_k T_{ij}) \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \qquad (74\,h)$$

Man sieht an diesen Definitionen, daß die Operation $\square$ („Laplacescher Operator") hier wie in der beschränkten Relativitätstheorie den Rang des Tensors, auf den man sie anwendet, nicht ändert. Rechnet man diese Ausdrücke aus, so ergibt sich z. B. nach (71b), (69) und (72)

$$\square\,\varphi = \sum_{ki} g^{ki}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k \partial x^i} - \sum_m \left\{ \begin{matrix} k\,i \\ m \end{matrix} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right). \quad . \quad . \quad (74\,i)$$

e)
$$\int Div\, P\, d\Sigma = \int \sum_k \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,P^k\right)}{\partial x^k}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

[vgl. (38)], erstreckt über einen beliebigen geschlossenen, vierdimensionalen Bereich, in welchem der Vektor P endlich und stetig bleiben soll, ist ein Skalar, da $Div\,P$ und $d\Sigma$ solche sind. Wie in euklidischen und pseudoeuklidischen Mannigfaltigkeiten läßt es sich auch hier durch partielle Integration in ein Integral über die Begı führen. Führt man nämlich an dem ersten Summanden $\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,P^1\right)}{\partial x^1}$ die Integration nach x^1 aus, so erhält man zwei Ausdrücke

$$\pm\sqrt{-g}\,P^1 dx^2 dx^3 dx^4.$$

Beide beziehen sich auf die Ausschnitte ans der Begrenzung, in welchem der über dem dreidimensionalen Element $dx^2dx^3dx^4$ errichtete vierdimensionale „Zylinder" durch sie hin durchstößt, und zwar der positive Term auf den bei höherem, der negative auf den bei niederem Wert x^1 gelegenen. (Wir machen hier die Annahme, daß jeder solcher Zylinder nur an zwei Stellen die Begrenzung schneidet; man befreit sich nachträglich von ihr, indem man, wie auch sonst beim Gaußsehen Satz, einen beliebigen Integrationsbereich in Teile zerlegt, welche ihr genügen.) Ein und dasselbe Element dS der Begrenzung liefert bei allen vier Integrationen den Beitrag

$$\sqrt{-g}\left(+P^1\int dx^2dx^3dx^4 \pm P^2\int dx^3dx^4dx^1 \pm P^3\int dx^4dx^1dx^2 \pm P^4\int dx^1dx^2dx^3\right),$$

wobei die Integrale (erstreckt über unendlich kleine, aber nicht gerade parallelepipedisch begrenzte Räume) seine Projektionen bedeuten auf die vier Räume $x^i = const$, welche durch einen Punkt von dS hindurchführen. Dieser Beitrag ist eine Invariante, da ja das ganze Begrenzungsintegral eine solche werden muß. Er hat ganz die Form (46 e) und stellt demgemäß den Inhalt $d5$, multipliziert mit der dazu senkrechten Komponente P^n, dar. Verstehen wir unter n die innere Normale, so muß er dasselbe Vorzeichen erhalten wie unter euklidischen Verhältnissen; also gilt auch hier der Gaußsche Satz:

$$Div\, P\, d\Sigma = -\int P^n dS. \qquad (75)$$

Trotzdem die Divergenz eines Tensors zweiter Ordnung hier nicht mehr durch die Summe von lauter Differentialquotienten gegeben ist [vgl. (73 a)], lassen sich vierfache Integrale über seine kovarianten Komponenten dennoch in Integrale über die Begrenzung verwandeln. In letzteren treten dann die kovarianten Komponenten des Tensors auf. Vergleiche darüber und über andere Integralsätze die bei der Literatur erwähnten Arbeiten von F. Jung, H. Lang und W. Pauli[1]).

f) Gaußsche Koordinaten. Der Begriff „Gradient" gestattet einen einfachen Beweis für die früher aufgestellte Behauptung, daß man bei jeder Art der Maßbestimmung solche Koordinaten einführen kann, in denen die $g_{ir}(i = 1,2,3)$ verschwinden. Setzen wir nämlich bei beliebiger Wahl der Funktion $(\varphi$ *)

$$x'^4 = \varphi(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

*) Nur muß die Richtung von $I^r \varrho = \delta \varphi$ zeitartig sein.

so muß ein Linienelement dx^1, dx^2, dx^3, dx^4, welches auf dem Raum $\varphi = const$ senkrecht steht, den Proportionen

$$\frac{dx^1}{\Gamma^1_{\varrho\alpha}\delta^\varrho\varphi} = \frac{dx^2}{\Gamma^2_{\varrho\alpha}\delta^\varrho\varphi} = \frac{dx^3}{\Gamma^3_{\varrho\alpha}\delta^\varrho\varphi} = \frac{dx^4}{\Gamma^4_{\varrho\alpha}\delta^\varrho\varphi}$$

genügen. Diese Differentialgleichungen haben nun drei voneinander unabhängige Lösungen, die wir in der Form

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = const, \qquad g(x^1, x^2, x^3, x^4) = const,$$
$$h(x^1, x^2, x^3, x^4) = const$$

annehmen wollen. Wir brauchen dann nur $x'^1 = f$, $x'^2 = g$, $x'^3 = h$ zu setzen, und haben damit ein Koordinatensystem, in welchem die eine Schar von Parameterkuryen auf den Räumen $x'^4 = const$ senkrecht steht. Infolgedessen ist hiernach [vgl. (17)]

$$g'_{14} = g'_{24} = g'_{34} = 0.$$

Der umgekehrte Weg, daß man die eine Schar von Parameterkurven vorgibt und dann die dazu senkrechten Räume aufsucht, ist dagegen im allgemeinen ungangbar, schon unter euklidischen Verhältnissen. Diese Kurven lassen sich nämlich als Kraftlinien eines Vierervektors P auffassen; es gibt im euklidischen Raum nur dann eine Funktion $\varphi(x^1, x^2, x^3, x^4)$, für welche mit einem integrierenden Faktor λ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \lambda P_i$$

gesetzt werden kann, wenn das Vektorprodukt

$$[P, \mathfrak{Rot}^* P] = 0$$

ist. Man macht sich ebenfalls am Beispiel der euklidischen Geometrie leicht klar, daß es nichts nützt, jene Parameterkurven als geodätische Linien zu wählen.

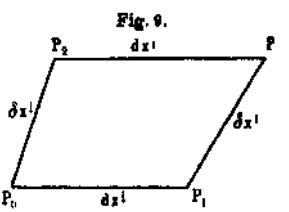
§ 10. Der Riemann-Christoffelsche Tensor.

a) Endliche Parallelverschiebungen. In § 8 haben wir die unendlich kleine Parallelverschiebung eines Vektors von einem Punkt P_0 nach P_1 betrachtet. Es bleiben dabei erhalten sein absoluter Betrag und sein skalares Produkt mit jedem gleichfalls über die Strecke P_0P_1 parallel verschobenen Vektor. Stellen wir nun in P_0 in einem System von Vektoren jeden durch eine unendlich kleine Strecke dar, so überträgt sich der von ihnen gebildete „Kompaß"

bei der genannten Parallelverschiebung wie ein starrer **Körper nach** P_1; denn es bleiben ja alle seine Abmessungen und Winkel erhalten. Von P_1 können wir ihn dann wieder durch Parallelverschiebung aller ihm angehörender Vektoren zu einem unendlich nahen Punkt P_2 verpflanzen. Die Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt schließlich die Parallelverschiebung über eine endliche Strecke eines beliebigen Kurvenzuges. Gehört letzterer einer geodätischen Linie an, so bleiben die Winkel dieser Linie mit den verschobenen Vektoren erhalten. Denn die Richtung einer solchen Kurve wird ja längs ihr selbst parallel verschoben und die Winkel zwischen parallel verschobenen Vektoren bleiben dieselben»

In euklidischen Verhältnissen gibt es in jedem Punkt P zu jedem Vektor in P_0 eine, und nur eine Parallele; diese bildet die Endlage des betreffenden Vektors, wenn wir ihn von P_0 nach P parallel verschieben; welchen Weg wir dabei einschlagen, ist gleichgültig. Wie verhält es sich damit in Riemannsehen Räumen?

Fig. 9.



b) Ein Kreisprozeß. In Fig. 9 verschieben wir den Mittelpunkt des Kompasses, d. h. den gemeinsamen Ausgangspunkt aller seiner Vektoren vom Punkt P_0 mit den Koordinaten x^i nach P_1 mit den Koordinaten $x^i + dx^i_0$, und zwar so, daß jeder Vektor eine Parallelverschiebung erfährt. Die kontravarianten Komponenten eines Vektors A ändern sich dabei nach (67) um

$$d_1 A^j = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\} A^k dx^l.$$

Dann verschieben wir ihn weiter von P_1 nach P, einem Punkt mit den Koordinaten $x^i + dx^i + \delta x^i$. Das ruft für A^j eine zweite Änderung

$$\delta_1 A^j = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\}_{a+da} \left(A^k + d_1 A^k \right) \delta x^l$$

kl

hervor. Nun führen wir ein **anderes Mal den Mittelpunkt von Po** über **P_2 (Koordinaten: $x^i + \delta x^i$) nach P, indem wir die Ver-**

Schiebungen um die δx^i und dx^i in der Reihenfolge vertauschen. Dann wäre der Gesamtzuwachs von A^j

$$\delta_2 A^j + d_2 A^j = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\} A^k \delta x^l$$

$$-\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\} \left(A^k - \sum_{mn} \left\{ \begin{matrix} mn \\ k \end{matrix} \right\} A^n \delta x^m \right) dx^l - \sum_{klm} \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\} A^k dx^l \delta x^m.$$

Umgekehrt ändert sich A^j bei einer Verschiebung von P über P_2 nach P_0 um $-\delta_2 A^j - d_2 A^j$. Umkreist der Mittelpunkt des Kompasses also das Viereck $P_0 P_1 P P_2$, so bleibt für A^j die Änderung

$$DA^j = d_1 A^j + \delta_1 A^j - d_2 A^j - \delta_2 A^j$$

$$= \sum_{klm} \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\} - \sum_n \left\{ \begin{matrix} ln \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} km \\ n \end{matrix} \right\} \right] A^k (dx^l \delta x^m - dx^m \delta x^l).$$

Hier vertauschen wir die Summationsbuchstaben l und m und addieren den so gefundenen Ausdruck:

$$DA^j = -\frac{1}{2} \sum_{klm} R^j_{klm} A^k (dx^l \delta x^m - dx^m \delta x^l) \quad \ldots \quad (76)$$

$$R^j_{klm} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} km \\ j \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\} + \sum_n \left[\left\{ \begin{matrix} ln \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} km \\ n \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} mn \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} kl \\ n \end{matrix} \right\} \right]. \quad (76a)$$

Die DA^j sind Differenzen zwischen Komponenten von Vektoren am gleichen Orte, also nach § 6 selbst Vektorkomponenten. Die R^j_{klm} sind somit nach (76), wo sie mit den kontravarianten Tensorkomponenten

$$A^k (dx^l \delta x^m - dx^m \delta x^l)$$

multipliziert auftreten, gemischte Komponenten eines Tensors vierten Ranges, des Riemann-Christoffeischen Tensors.

Dies lehrt uns Gleichung (76) in formaler Hinsicht. Sachlich aber beantwortet sie unsere Frage dahin, daß der „Kompaß" und somit auch die Vektoren bei Parallelverschiebung längs geschlossener Bahnen nicht wieder in die Anfangslage, sondern in eine dagegen gedrehte zurückkehrt *). Wir haben das zunächst zwar nur für ein

*) In einer Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen hebt diese Drehung einen anfangs in der durch die Verrückungen dx^i und ox^j bestimmten Fläche liegenden Vektor im allgemeinen aus dieser Fläche heraus. Die Drehungsachse steht also nicht auf ihr senkrecht. Hat die Mannigfaltigkeit nur zwei Dimensionen, so gilt für den Drehwinkel ein einfaches Gesetz (vgl. § IIb).

unendlich kleines (Quasi-) Parallelogramm gezeigt Wir wissen aber vom Stokosschen Satz der gewöhnlichen Vektortheorie in drei Dimensionen her, daß sich die Umkreisung einer endlichen Fläche von der Gesamtheit aller Umkreisungen aller ihr angehörigen Teilflächen nur dadurch unterscheidet, daß bei dem letzteren Verfahren alle zwei Teilflächen gemeinsamen Randkurven zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden, sich bei der Summation also aufheben. Darum läßt sich das Ergebnis ohne weiteres auf beliebige von Singularitäten freie Flächenstücke übertragen.

Das beweist uns ferner, was wir freilich schon ohnedem, wissen konnten, daß es nämlich in Riemannschen Räumen zu einem Vektor im Punkt *P* nicht in jedem Punkt *Q* eine „Parallele" gibt. Verschiebt man ihn allmählich von P nach *Q* parallel mit sich selbst im Sinne von § 8, so ist die Endlage durchaus von dem eingeschlagenen Wege abhängig. Wenn aber der Riemann-Christoffelsche Tensor verschwindet, dann, und nur dann, fällt diese Vieldeutigkeit fort, und man kann ohne weiteres zwei Vektoren in verschiedenen Punkten als gleichgerichtet bezeichnen; im allgemeinen aber hat eine solche Aussage keinen Sinn.

c) Das invariante Kennzeichen der euklidischen Geometrie. Die euklidische und pseudoeuklidische Geometrie haben wir früher dadurch gekennzeichnet, daß es in ihr Koordinaten gibt (nämlich die geradlinig genannten), in welchen der Maßtensor *gut* konstante Komponenten hat. Das System der x^{ik} gehöre dazu. Nun wird uns aber eine andere Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

mit veränderlichen g_{ik} vorgelegt, und wir sollen entscheiden, ob sie sich durch eine Transformation $x^i = f^i(x'^j)$ in die erstere überführen läßt. Dies ist notwendig und hinreichend, damit die durch sie bestimmte Geometrie euklidisch (oder pseudoouklidisch) ist

Angenommen, die Parallelverschiebung jedes Vektors führe in unserem *n*-dimensionalen Kontinuum zu einem vom Wege unabhängigen, also eindeutigen Ergebnis. Dann können wir folgendermaßen neben dem beliebigen Koordinatensystem x^i ein System x'^i konstruieren, daß wir von *n* beliebigen, aber linear unabhängigen, in einem Punkt gelegenen Vektoren $A^{(j)}$ ausgehen und jeden davon nach jedem anderen Punkt parallel verschieben. Jeder von diesen soll nun in jedem Punkt nach Richtung und Länge eine Koordinatenachse bestimmen, indem seine kontravariante Komponente nach einer

Koordinatenrichtung gleich 1, nach allen anderen Sichtungen 0 ist. In Gleichungen:

$$A^{(j)k} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } j = k, \\ 0, \text{ wenn } j \neq k. \end{cases}$$

Wie man sieht, hat diese Bestimmung nur unter der Voraussetzung einen Sinn, daß durch die Parallelverschiebung auch in jedem Punkt die Richtung von A^j eindeutig definiert ist.

Im Koordinatensystem x^i hat $A^{(j)}$ die kontravarianten Komponenten

$$A^{(j)i} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A^{(j)j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \quad \cdots \cdots \quad (78)$$

[n a (47a)]. ɜ i der Parallelverschiebung vom Punkt x^4 zum Punkt $x^i + dx^i$ ändern sie sich nach (67) um

$$dA^{(j)i} = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right\} A^{(j)k} dx^l,$$

so daß folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right) = -\sum_k \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}.$$

Diese Gleichungen fassen wir mit $\frac{\partial x^l}{\partial x'^m}$ zusammen; links entsteht

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)\frac{\partial x^l}{\partial x'^m} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^m},$$

so daß wir finden:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^m} = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^m}.$$

Nach den Christoffelschen Formeln (60) ist also

$$\sum_i \left\{ \begin{matrix} j\,m \\ i \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} = 0.$$

Die unter diese Formel fallenden Beziehungen, welche dieselben Zeiger j, m betreffen, bilden n homogene lineare Gleichungen für n g-Klammern $\left\{ \begin{matrix} j\,m \\ i \end{matrix} \right\}'$. Die Determinante dieses Systems

$$\pm \frac{\partial x^1}{\partial x'^i} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial x'^n},$$

kann nach (78) und wegen der Voraussetzung, daß die Vektoren $A^{(j)}$ linear unabhängig sind, nicht verschwinden. Also schließen wir auf das Verschwinden aller gestrichenen g-Klammern, und daraus gemäß (57 a) auf die Konstanz der g_{ik}. Eindeutigkeit der Parallelverschiebung

ist somit hinreichende Bedingung für die Gültigkeit euklidischer Geometrie. Da sie dafür gewiß auch notwendig ist, läßt sich der Satz aussprechen: Die euklidische Geometrie, einschließlich der pseudoeuklidischen, läßt sich unter allen auf dem pythagoräischen Ansatz (77) als Maßbestimmung beruhenden Geometrien entweder durch das Verschwinden des Riemann-Christoffelschen Tensors kennzeichnen oder durch das Parallelenaxiom*).

Verschwindet die durch *(69)* eingeführte kovariante Ableitung $D_K p_i$ eines Vektors P für einen Punkt in allen ihren Komponenten, so nennt man den Vektor, wie schon erwähnt, stationär in diesem Punkt; in dessen Umgebung läßt sich dann seine Richtung und Größe überall durch Parallelverschiebung von jenem Punkt her ableiten. Stationäre Vektorfelder von endlicher Größe gibt es aber nach diesem Satz nur in der euklidischen Geometrie.

d) Die kovarianten Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors. Wir berechnen sie aus (76a) nach der Formel

$$R_{iklm} = \sum_j g_{ij} R^j_{klm}.$$

Indem wir zunächst den Faktor *gij* in die Differentialquotienten mit hineinziehen, finden wir nach (56):

$$R_{iklm} = \frac{\partial}{\partial x^l}\begin{bmatrix} km \\ i \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^m}\begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix} + \sum_n \left[\begin{Bmatrix} kl \\ n \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial g_{in}}{\partial x^m} - \begin{bmatrix} mn \\ i \end{bmatrix} \right) - \begin{Bmatrix} km \\ n \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} - \begin{bmatrix} ln \\ i \end{bmatrix} \right) \right].$$

Die Faktoren der beiden g-Klammern lassen sich nach (57) vereinfachen. Machen wir dann an diesen g-Klammern nochmals von (54) Gebrauch, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} R_{iklm} &= \frac{\partial}{\partial x^l}\begin{bmatrix} km \\ i \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^m}\begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{np} g^{np} \left(\begin{bmatrix} im \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kl \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} km \\ p \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} \right\} \\ &\quad + \sum_{np} g^{np} \left(\begin{bmatrix} im \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kl \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} km \\ p \end{bmatrix} \right). \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

*) Bieten Beweis verdankt der Verfasser einer freundlichen Mitteilung von L. Bieberbach.

Man bestätigt hieran die Regeln:

$$R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{klim} = R_{lmik}, \quad \ldots \quad (79\,a)$$

$$R_{iklm} + R_{ilkm} + R_{iklm} = 0. \quad \ldots \quad (79\,b)$$

Weitere, von den angegebenen unabhängige algebraische Gleichungen bestehen zwischen den R_{ikim} nicht.

Das ermöglicht uns, die Zahl der von Null verschiedenen, linear unabhängigen, kovarianten Komponenten dieses Tensors zu bestimmen. Wir führen dies nur für vier Dimensionen durch. Zunächst kommen für die Zeigerpaare *ik* und *Im* nur die sechs Kombinationen 23, 31, 12, 34, 24, 14 in Betracht. Denn wären die Zeiger eines Paares einander gleich, so wäre das zugehörige R_{iklm} nach (79 a) Null. Ordnen wir die so gefundenen 36 Komponenten in eine quadratische Matrix, indem wir alle mit übereinstimmendem *ik* in die gleiche Zeile, mit übereinstimmendem *lm* in dieselbe Spalte schreiben, so finden wir aber nach (79a) symmetrisch zur einen Diagonalen je zwei gleiche Komponenten. Wir brauchen also nur die folgenden 21 Komponenten anzuführen:

2323	2331	2312	2334	2324	(2314)
	3131	3112	3134	(3124)	3114
		1212	(1234)	1224	1214
			3434	3424	3414
				2424	2414
					1414

Zwischen den drei eingeklammerten Komponenten besteht aber nach (79 b) die Gleichung

$$R_{1234} + R_{3124} + R_{2314} = 0. \quad \ldots \quad (79\,c)$$

Also hat der Riemann-Christoffelsche Tensor in vier Dimensionen je 20 von Null verschiedene und voneinander unabhängige ko- und kontravariante Komponenten.

Streichen wir in dem vorstehenden Schema alle Kombinationen, welche die Ziffer 4 enthalten, so bleiben sechs Komponenten, streichen wir auch alle, welche die Zahl 3 enthalten, so bleibt nur R_{1212}. In drei Dimensionen hat jener Tensor sechs, in zwei Dimensionen nur eine wesentliche ko- und ebensoviel kontravariante Komponenten*).

*) In n Dimensionen wäre diese Zahl $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

Durch Verjüngung finden wir, ausgehend von Formel (76a), den Tensor der Krümmung

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} &= \sum_m R^m_{klm} = \sum_{im} g^{im} R_{iklm} \\ &= \sum_m \left[\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\begin{matrix} km \\ m \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^m}\left\{\begin{matrix} kl \\ m \end{matrix}\right\}\right] + \sum_{mn}\left[\left\{\begin{matrix} kn \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} ln \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} kl \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} mn \\ n \end{matrix}\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Er ist symmetrisch; das lassen die Glieder der rechten Seite unmittelbar erkennen, abgesehen vom ersten. Nach (62a) aber hat dies den Wert

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\sum_m \left\{\begin{matrix} km \\ m \end{matrix}\right\} = \frac{\partial^2 (\log\sqrt{-g})}{\partial x^k \partial x^i},$$

ist also ebenfalls symmetrisch in *k* und *l*. Durch nochmalige Verjüngung kommt man zu der invarianten Krümmung

$$R = \sum_{kl} g^{kl} R_{kl} = \sum_{iklm} g^{im} g^{kl} R_{iklm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

In zwei Dimensionen, wo

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112},$$

die einzigen nicht verschwindenden Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors bilden, wird danach

$$R = 2\,(g^{12}{}^2 - g^{11} g^{22})\, R_{1212};$$

oder, da nach (20) die Determinante der g^{ik} das Reziproke von *g* ist

$$R_{1212} = -\tfrac{1}{2}\, g \,.\, R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81a)$$

Indem man nach (80) aus R_{1212} die R_{kl} unter Berücksichtigung der Beziehungen $g g^{11} = g_{22}$, $g g^{12} = -g_{12}$, $g g^{22} = g_{11}$ berechnet, bestätigt man schließlich:

$$R_{kl} = \tfrac{1}{2}\, g_{kl} \,.\, R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81b)$$

Hier bestimmt also allein die Invariante R die beiden Tensoren vollständig. Das ist in drei Dimensionen nicht mehr der Fall. Wohl aber bestimmen dann die sechs Komponenten R_{kl} die sechs Komponenten R_{iklm} gemäß den Auflösungen der Gleichungen (80) nach den letzteren. In vier und mehr Dimensionen läßt sich aber der Riemann-Christoffelsche nicht aus dem Krümmungstensor berechnen, denn ersterer hat weit mehr Komponenten. Somit kann man

nach Abschnitt e) dieses Paragraphen in * zwei Dimensionen das Verschwinden der Invarianten R, in drei Dimensionen das Verschwinden des Krümmungstensors als Kennzeichen der euklidischen Geometrie hinstellen. In vier und mehr Dimensionen aber muß man dabei an den Riemann-Christoffelschen Tensor selbst anknüpfen.

Der Krümmungstensor R_{kl} ist der einzige, welcher sich aus dem Riemann-Christoffelschen Tensor $R_{i\,k\,l\,m}$ durch Verjüngung ableiten läßt. In (80) haben wir nach den Zeigern i und m verjüngt. Man hätte wegen der in (79a) ausgesprochenen Symmetriebeziehungen ebensogut nach k und l verjüngen können. Eine Verjüngung nach i und l oder nach k und m liefert wegen (79 a) wieder der Krümmungstensor, nur mit umgekehrtem Vorzeichen; und die dann noch übrig bleibenden Möglichkeiten, nach f a n d k oder nach l und m zu verjüngen, liefern identisch Null.

e) Der Tensor $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \cdot R$ ist divergenzfrei. In einem geodätischen Koordinatensystem x^k nämlich, und zwar in dessen hervorgehobenen Punkt, hat die Divergenz des Tensors R_{ik} nach (73 a) wegen des Verschwindens der g- Klammern und der ersten Ableitungen der g_{ik} die kovariante Komponente mit dem Zeiger α:

$$\sum_k \frac{\partial R^k_\alpha}{\partial x^k} = \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial R_{\alpha l}}{\partial x^k} = \sum_{klm} g^{kl} g^{im} \frac{\partial R_{i\alpha lm}}{\partial x^k}.$$

Nach (79) folgt dafür:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{iklm} g^{kl} g^{im} \frac{\partial^3 g_{\alpha l}}{\partial x^k \partial x^i \partial x^m} - \frac{1}{2} \sum_{iklm} g^{kl} g^{im} \frac{\partial^3 g_{\alpha m}}{\partial x^k \partial x^i \partial x^l} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{iklm} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial^3 g_{im}}{\partial x^\alpha \partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^3 g_{kl}}{\partial x^\alpha \partial x^k \partial x^m} \right). \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Und hier heben sich die beiden ersten Summen fort; denn vertauscht man die Summationszeiger i mit k und l mit m, so geht die zweite in die erste über.

Sodann hat im gleichen Koordinatensystem die Divergenz des Tensors mit den Komponenten $-\frac{1}{2} R_{gik}$ als kovariante Komponente mit dem Zeiger a wegen der Divergenzfreiheit des Maßtensors einfach den Ausdruck

$$-\frac{1}{2} \sum_j \delta^j_\alpha \frac{\partial R}{\partial x^j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^\alpha};$$

denn nach § 6, d) sind die δ_k^i die gemischten Komponenten des Maßtensors; sie sind gleich 1 oder 0, je nachdem ihre Zeiger übereinstimmen oder nicht. Nach (81) und (79) folgt dann

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^a} = -\frac{1}{2}\sum_{iklm} g^{ik}\, g^{lm}\, \frac{\partial R_{iklm}}{\partial x^a}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{iklm} g^{lm}\, g^{ik}\left(\frac{\partial^3 g_{km}}{\partial x^a\, \partial x^i\, \partial x^l} - \frac{\partial^3 g_{kl}}{\partial x^a\, \partial x^i\, \partial x^m}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{iklm} g^{ik}\, g^{lm}\left(\frac{\partial^3 g_{il}}{\partial x^a\, \partial x^k\, \partial x^m} - \frac{\partial^3 g_{im}}{\partial x^a\, \partial x^k\, \partial x^l}\right).$$

Vertauscht man hier i und l mit k und m, so geht die erste Summe in die zweite über; beide zusammen vernichten gerade die noch übriggebliebene dritte Summe von (82).

f) Die Sonderstellung des Riemann-Christoffelsc^yj Tensors. Keine physikalische Theorie läßt sich zunächst ohne eine gewisse Willkür entwickeln, und man vermag meist erst hinterher, wenn man das Lehrgebäude ganz vor Augen hat, deren Maß zu beurteilen. So wird es uns in Abschnitt V auch bei Einsteins Lehre von der Schwerkraft, namentlich bei der Aufstellung der Dihe- rentialgleichungen des Schwerefeldes gehen. Um aber herein einzusehen, wie gering in diesem Falle die wollen wir hier einen Satz über die einzigartige Stellung des Tensors R_{iklm} entwickeln. Wir beweisen: Der Riemann-Christoffels che Tensor R_{iklm} ist in dem Sinn der einzige Ten **aus den g_{ik}, ihren ersten und zweiten Ableitungen btlden läßt, daß sich jeder andere Tensor, auf dieselben falls zutrifft, auf diesen zurückführen lassen muß.**

Zu diesem Zweck fassen wir ein Koordinatesystem Ins Auge, welches für den Aufpunkt P geodätisch und die Gesamtheit der Transformationen nach dem Schema (66) in § 8a:

$$x^i = x'^i + \frac{1}{6}\sum_{klm} a^i_{klm}\, x'^k x'^l x'^m$$

welches, wie dort gezeigt, ein derartiges Koordinatensystem in oin gleichartiges überführt. Dabei bleiben die g_{ik} und in reersten Ableitungen im Punkt P ungeändert, jene namlich gleich 1 oder 0 wen wir uns hier die bedeutungslose Voraussetzung einerpostiv definiten Maßbestimmung gestatten, diese alle gleich 0. Eben so angen dert bleibt jede Komponente jedes andere Tensors in Funkt. P, da ja

dort die Richtungen der Koordinatenachsen nicht verändert werden. Die Transformation der

$$\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} = g_{iklm} \quad (g_{iklm} = g_{kilm} = g_{ikml})$$

aber finden wir, indem wir die Gleichung

$$g'_{ik} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k} g_{\alpha\beta}$$

nach x'^l und x'^m differentiieren; für den Punkt *P* finden wir so:

$$g'_{iklm} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^l} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^m} g_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$+ \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x'^i \partial x'^l \partial x'^m} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^l} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^k \partial x'^l \partial x'^m} \right) g_{\alpha\beta}$$

oder

$$g'_{iklm} = g_{iklm} + a^l_{klm} + a^k_{ilm} \quad \ldots\ldots \quad (83)$$

Ist nun der obige Satz richtig, so müssen diese Transformationen für die Veränderung der *gikim* im Punkt *P* so viele Freiheitsgrade ergeben, als der Differenz zwischen der Zahl der *gwim* und der R_{iklm} entspricht. Mehr Freiheitsgrade sind unmöglich, weil ja die Konstanz je einer Komponente R_{iklm} eine Bindung für die Veränderungen der g_{iklm} ergibt. Ist jener Satz aber falsch, gibt es also noch andere, von den R_{iklm} unabhängige Tensoren, die den dortigen Bedingungen genügen, so muß die Zahl dieser Freiheitsgrade entsprechend kleiner sein.

Nun gibt es in vier Dimensionen 100 (in *n* Dimensionen $[\frac{1}{2} n^2 (n+1)^2]$ zweite Ableitungen g_{iklm}, da die Zeigerpaare *ik und im* je zehn [bzw. $\frac{1}{2} n (n+1)$] verschiedene Kombinationen durchlaufen. Nach Abschnitt d) dieses Paragraphen ist die Zahl der R_{iklm} 20 [bzw. $\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$]. Die Frage ist also: Geben die Transformationen (66) den g_{iklm} 80 [bzw. $\frac{1}{8} n^2 (n+1)(n+2)$] oder weniger Freiheitsgrade der Veränderung im Punkt *P*?

In jedem Koeffizienten a^i_{klm} der Koordinatentransformation *(66)* kann man die unteren Zeiger beliebig miteinander vertauschen, ohne daß der Koeffizient seinen Wert ändert, es können zwei oder auch alle drei denselben Wert haben. Infolgedessen gibt es 20 [bzw. $\frac{1}{6} n (n+1)(n+2)$] Kombinationen für die Tripel *klrn*, und da der obere Zeiger unabhängig davon jeden Wert annehmen kann, 80 [bzw. $\frac{1}{2} n^2 (n+1)(n+2)$] Koeffizienten a^i_{klm}. Diese sind in (83) zu 100 [bzw. $\frac{1}{2} n (n+1)^2$] Summen $a^l_{klm} + a^k_{ilm}$ zusammengetreten.

Natürlich sind darunter höchstens 80 [bzw. $\frac{1}{6} n^2 (n+1)(n+2)$] voneinander unabhängige Summen. Unsere Frage läßt sich also aussprechen: Ist die Zahl der unabhängigen Summen so groß oder kleiner? Gordon*) entscheidet sie wie folgt:

Seien *n*, o, p, *q* vier Ziffern aus der Reihe 1,2,3,4 (bzw. 1,2,..., n); sie brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein, können vielmehr sogar alle übereinstimmen. Aus der Zahl der Koeffizienten α^{i}_{klm} können wir dann die Gruppe

$$a^{n}_{opq},\quad a^{o}_{pqn},\quad a^{p}_{qno},\quad a^{q}_{nop}\quad \ldots\ldots \quad (84)$$

herausheben; ein Koeffizient dieser Gruppe ist wegen der unbeschränkten Vertauschbarkeit der unteren Zeiger vollständig durch die Angabe seines oberen Zeigers bestimmt. Bilden wir alle Kombinationen *nopq* (mit Wiederholungen) und die zugehörigen Gruppen, so erhalten wir jedenfalls alle überhaupt möglichen Koeffizienten α^{i}_{klm} und kein Koeffizient kommt in mehr als einer Gruppe vor. Nur könnten die Koeffizienten einer Gruppe noch zum Teil oder auch alle übereinstimmen. Wichtig ist nun: Jede der Summen $a^{i}_{klm} + a^{k}_{ilm}$ läßt sich nur aus Koeffizienten derselben Gruppe bilden; denn die Vertauschung des oberen Zeigers mit einem unteren führt nicht aus der Gruppe heraus. Man kann also jeder Gruppe (84) eine bestimmte Zahl von derartigen Summen so zuordnen, daß kein Glied einer dieser Summen in einer anderen Gruppe vorkommt. Bestehen also zwischen diesen Summen identische Relationen, so bestehen sie zwischen Summen, welche derselben Gruppe zugehören.

Benennen wir die Glieder einer Gruppe (84) zur Abkürzung in einer beliebigen Reihenfolge *mit* b_1, b_2, b_3, b_4, so gehören dieser Gruppe die Summen

$$s_1 = b_2 + b_3,\quad s_2 = b_3 + b_1,\quad s_3 = b_1 + b_2,$$
$$s_4 = b_1 + b_4,\quad s_5 = b_2 + b_4,\quad s_6 = b_3 + b_4$$

zu. Wegen der Identitäten $s_1 + s_4 = s_2 + s_5 = s_3 + s_6$ lassen sich s_5 und s_6 durch die vier anderen ausdrücken, nur diese sind noch auf ihre gegenseitige Abhängigkeit zu untersuchen.

Wie erwähnt, sind die vier Glieder der Gruppe (84) nicht notwendig voneinander verschieden; es hängt das davon ab, wie viele der Zeiger n, o, p, *q* einander gleich sind. Jedenfalls sind da folgende vier Möglichkeiten zu unterscheiden: Es besteht entweder zwischen den vier Größen $b_1 \ldots b_4$ kein Gleichheitszeichen,

*) Nach einer freundlichen persönlichen Mitteilung.

oder eins, oder zwei, oder drei. Im ersten dieser Fälle, wenn also die vier b_i alle verschiedene Werte haben, ist s_4 als die einzige der fraglichen Summen, die b_4 enthält, gewiß unabhängig von den drei anderen, und daß zwischen s_1, s_2, s_3 keine Beziehung besteht, beweist die Ausrechnung der Funktionaldeterminante $\frac{\partial (s_1\ s_2\ s_3)}{\partial (b_1\ b_2\ b_3)}$, welche sich gleich 2 ergibt. Im zweiten dieser Fälle können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b_3 = b_4$ annehmen; das hat die Identität $s_4 = s_1$ zur Folge, ändert aber nichts an der Unabhängigkeit von s_1, s_2, s_3. Im vierten Fall (drei Gleichheitszeichen) sind alle b_i und daher auch alle S_i untereinander gleich. Im dritten Fall aber (zwei Gleichheitszeichen) sind noch die Möglichkeiten zu sondern, daß entweder $b_1 = b_2 = b_3$, dagegen b_4 von ihnen verschieden ist — dann wird $s_1 = s_2 = s_3$ (= 2 b_1), aber $s_4 = b_1 + b_4$ ist von s_1 unabhängig — oder aber $b_1 = b_2, b_3 = b_4$, hingegen b_1 von b_3 verschieden ist —, dann wird $s_1 = s_2 = s_4$ (= $b_1 + b_3$), aber $s_3 = 2b_1$ bleibt davon unabhängig. Es stimmt demnach innerhalb jeder der Gruppen (84), also überhaupt die Zahl der unabhängigen Summen $a^i_{klm} + a^k_{ilm}$, mit der Zahl der voneinander verschiedenen Koeffizienten a^t_{kim} überein. D. h. es gibt in vier Dimensionen 80 [sonst $\frac{1}{6} n^2 (n+1)(n+2)$] unabhängige Summen, und diese treten auch in den Transformationsformeln (83) auf, da dort alle möglichen Summen dieser Art vorkommen. Und damit ist der obige Satz bewiesen.

Nach (79) enthält R_{iklm} die g_{iklm} linear. Will man daher einen Tensor zweiten Ranges aus den g_{ik}, ihren ersten und zweiten Ableitungen so aufbauen, daß die letzteren linear auftreten, so muß man dazu lineare Kombinationen der R_{iklm} wählen. In der Tensoralgebra (§ 6) haben wir nun als einzigen Weg, den Rang eines Tensors so herunterzusetzen, daß er linear auftritt und (außer den g^{kl},, welche aus den kovarianten die gemischten Komponenten machen) kein zweiter Tensor benutzt wird (aus den ersten Ableitungen allein läßt sich kein Tensor bilden, wie wir in § 7 und 8 sahen), die Verjüngung nachgewiesen. Wohl aber läßt sich der Rang eines Tensors heraufsetzen, indem man ihn mit den g_{kl} multipliziert. Nun führt nach dem Schlußsatz des Abschnitts d) die einmalige Verjüngung des Riemann-Christoffelschen Tensors eindeutig zum Krümmungstensor R_{kl}-, und zweimalige Verjüngung infolgedessen eindeutig zur invarianten Krümmung R. Aus letzterer läßt sich durch Multiplikation mit g_{kl} der Tensor $R.g_{kl}$ bilden. Und schließlich erfüllt auch noch der Tensor C_{gkl} mit einer beliebigen Invarianten C die Bedingung, nichts anderes als die oben genannten Größen und die

zweiten Ableitungen jedenfalls niobt nichtlinear zu enthalten. Wir schließen daraus, daß

$$A R_{kl} + B . R . g_{kl} + C g_{kl},$$

wobei A und B zwei weitere Invarianten sind, die einzige Form ist, unter welche alle Tensoren fallen, die der gestellten Bedingung genügen. Verlangen wir noch weiter, daß der Tensor auch divergenzfrei ist, so finden wir nach den Sätzen von der Divergenzfreiheit der Tensoren g_{kl} (vgl. § 9 b) und $R_{kl} - \frac{1}{2} R . g_{kl}$ [vgl. Abschnitt e) dieses Paragraphen] für ihn die Form:

$$A (R_{kl} - \tfrac{1}{2} R g_{kl}) + C g_{kl}.$$

§ 11. Fortsetzung der Tensoranalysis.

Wie in § 9 erwähnt, darf man bei zweimaliger kovarianter Differentiation die Reihenfolge der Differentiationen im allgemeinen nicht vertauschen. An Hand der Formel (76 a) können wir jetzt zeigen, daß dies eng mit dem wesentlichen Unterschied zwischen der Riemannsehen und der euklidischen Geometrie, nämlich mit dem Riemann-Christoffeischen Tensor zusammenhängt. Bei den erforderlichen Rechnungen legen wir ein geodätisches Koordinatensystem zugrunde, und können infolgedessen die zweite Differentiation jedesmal als eine gewöhnliche ausführen; denn die g-Klammern, welche den Unterschied zwischen beiden Operationen bedingen [siehe Gleichung (70) u. f.], verschwinden in solchem System. Bei der ersten Differentiation ist das aber unzulässig, weil ja die dabei erscheinenden (g-Klammern noch einmal zu differentiieren sind. In (76 a) verschwindet dann die Summe $\sum_m$.

Aus (69) folgt:

$$D_l (D_k P_i) = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^k \partial x^l} - \sum_m P_m \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\}.$$

Vertauschen wir hier die Zeiger k und l und subtrahieren die so entstehende Gleichung von dieser, so fällt der zweite Differentialquotient von P_i fort; es bleibt:

$$D_l (D_k P_i) - D_k (D_l P_i) = \sum_m P_m R^m_{ikl} \quad . \quad . \quad : \quad (85)$$

Nach § 9 a können wir beiderseits den Zeiger l in die obere Stellung heben:

$$D^l (D_k P_i) - D_k (D^l P_i) = \sum_m P_m R^m_{ik}{}^l \quad . \quad . \quad . \quad (85\text{ a})$$

Ebenso findet man aus (70):

$$D_l(D_k T_{ij}) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \sum_m \left(T_{mj} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ m \end{matrix} \right\} + T_{im} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} k\,j \\ m \end{matrix} \right\} \right),$$

$$D_l(D_k T_{ij}) - D_k(D_l T_{ij}) = \sum_m \left(T_{mj} R^m_{ikl} + T_{im} R^m_{jkl} \right); \quad (85\,b)$$

und allgemein aus (71a):

$$\left.\begin{aligned} & D_l(D_k A_{i_1 \ldots i_m}) - D_k(D_l A_{i_1 \ldots i_m}) \\ &= \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} A_{i_1 \ldots i_{\lambda-1}\, \mu\, i_{\lambda+1} \ldots i_m} R^\mu_{i_\lambda kl} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (85c)$$

Nach der ersten der Gleichungen (73 a) bilden wir unter Berücksichtigung von (74 a)

$$Div_i \mathfrak{Rot} P = \sum_k D^k(\mathfrak{Rot}_{ik}) = \sum_k D^k(D_i P_k) - \sum_m D^k(D_k P_i).$$

Für die zweite Summe dürfen wir nach (74 h) P_i schreiben.* Die erste aber formen wir nach (85 a) um in:

$$\sum_k D^k(D_i P_k) = \sum_k D_i(D^k P_k) + \sum_{km} P_m R^m{}_{ki}{}^k.$$

Nun ist aber nach (79 a) und (80)

$$\sum_k R^m{}_{kl}{}^k = + \sum_k R_l{}^k{}^m{}_k = - \sum_k R^k{}_l{}^m{}_k = - R_l{}^m,$$

und nach (72 a) und (72)

$$D_i \sum_k D^k P_k = \Gamma\varrho\, \alpha\, \delta_i\, Div\, P.$$

Also folgt:

$$Div_i \mathfrak{Rot} P = \Gamma\varrho\, \alpha\, \delta_i\, Div\, P - W P_i \quad \ldots \quad (85\,d)$$

wenn man den „Wellenausdruck für den Vektor P"

$$W P_i = \Box P_i + \sum_m P^m R_{im} \quad \ldots \quad (85'e)$$

setzt.

Für den Sechservektor gibt es eine ähnliche Umformung. Nach (72 c) und (74 b) bilden wir die Divergenz des Tensors $\varrho\sigma\tau_{ikl}\mathfrak{M}$:

$$Div_{ij}\, \varrho\sigma\tau\, \mathfrak{M} = \sum_k D^k D_k \mathfrak{M}_{ij} + \sum_k D^k D_j \mathfrak{M}_{ki} + \sum_k D^k D_i \mathfrak{M}_{jk}.$$

Rechts stehen drei Summen. Die erste ist nach (74 h) gleich $\square\, \mathfrak{W}_{ij}$. Auf die zweite wenden wir Formel (85 h) an:

$$D^k D_j \mathfrak{W}_{ki} = D_j D^k \mathfrak{W}_{ki} + \sum_l \mathfrak{W}_{li} R^l{}_{kj}{}^k + \sum_l \mathfrak{W}_{kl} R^l{}_{ij}{}^k,$$

so daß durch Ausführung der Stimulation nach k am ersten und zweiten Gliede rechts nach (72 h), (80) und den Symmetriebeziehungen (79 a)

$$\sum_k D^k D_j \mathfrak{W}_{ki} = - D_j \mathfrak{Div}_i \mathfrak{W} + \sum_l \mathfrak{W}_{li} R^l{}_j + \sum_{kl} \mathfrak{W}_{kl} R^l{}_{ij}{}^k$$

folgt. Die dritte der erwähnten Summen,

$$\sum_k D^k D_i \mathfrak{W}_{jk} = - \sum_k D^k D_i \mathfrak{W}_{kj},$$

geht aber aus der zweiten durch Vertauschung von i und j sowie Vorzeichenumkehr hervor. Also ergeben die beiden letzten Summen zusammen, da nach (79 a) und (79 b)

$$R^l{}_{ij}{}^k - R^l{}_{ji}{}^k = R^l{}_{ij}{}^k + R^l{}_j{}^k{}_i = - R^{kl}{}_{ij} = R^{kl}{}_{ij}$$

ist, und unter Hinblick auf (74 a):

$$\sum_k D^k D_j \mathfrak{W}_{ki} + \sum_k D^k D_i \mathfrak{W}_{jk}$$

$$= \mathfrak{Rot}_{ij} \mathfrak{Div} \mathfrak{W} + \sum_l (\mathfrak{W}_{li} R^l{}_j + \mathfrak{W}_{jl} R^l{}_i) + \sum_{kl} \mathfrak{W}_{kl} R^{kl}{}_{ij}.$$

Indem wir diesen Wert einsetzen, finden wir

$$\mathfrak{Div}_{ij} \mathfrak{Rot} \mathfrak{W} = \mathfrak{Rot} \mathfrak{Div} \mathfrak{W} + W \mathfrak{W} \quad . \; . \; . \quad (85\text{f})$$

sofern wir als den „Wellenausdruck für den Sechservektor M" den antisymmetrischen Tensor definieren:

$$W_{ij} \mathfrak{W} = \square\, \mathfrak{W}_{ij} + \sum_l (\mathfrak{W}_{li} R^l{}_j - \mathfrak{W}_{jl} R^l{}_i) + \sum_{kl} \mathfrak{W}_{kl} R^{kl}{}_{ij}. \quad (85\text{ g})$$

Um zum „Wellenausdruck WT für den vollständig antisymmetrischen Tensor T_{hij}" zu gelangen, bilden wir an letzterem nach (74c) die Rotation und an dieser nach § 9b die Divergenz:

$$\mathfrak{Div}_{hij} \mathfrak{Rot} T = \sum_k D^k \varrho_{hijk} T$$

$$= \sum_k D^k D_h T_{ijk} - \sum_k D^k D_k T_{hij} + \sum D^k D_j T_{khi} - \sum_k D^k D_i T_{jkh}.$$

Rechts stehen vier Summen, von denen die zweite nach (74 h) gleich $-\Box T_{hij}$ ist. Die beiden letzten schreiben wir:

$$\sum_k D^k D_j T_{khi} = \sum_k D^k D_j T_{hik}, \quad -\sum_k D^k D_i T_{jkh} = \sum_k D^k D_i T_{jhk},$$

sie gehen dann aus der ersten durch zyklische Vertauschung der Zeiger h, i, j hervor. In der ersten aber setzen wir nach (85 c)

$$D^k D_h T_{ijk} = D_h D^k T_{ijk} + \sum_m (T_{mjk} R^m{}_{ih}{}^k + T_{imk} R^m{}_{jh}{}^k + T_{ijm} R^m{}_{kh}{}^k),$$

also

$$\sum_k D^k D_h T_{ijk} = D_h \mathit{div}_{ij} T - \sum_m T_{ijm} R^m{}_h - \sum_{km} T_{ikm} R^m{}_{jh}{}^k + \sum_{km} T_{jkm} R^m{}_{ih}{}^k.$$

Fügen wir zur Berücksichtigung der dritten und vierten Summe zu diesen Termen die hinzu, welche daraus durch zyklische Vertauschung der *h*, i, *j* entstehen, so so den wir ein Glied, das lautet:

$$D_i \mathit{div}_{jh} T + D_h \mathit{div}_{ij} T + D_j \mathit{div}_{hi} T = \varrho \sigma \tau_{ijh} \mathit{div} T.$$

Die sechs dabei auftretenden Doppelsummen nach k und *m* fassen wir zu drei Paaren zusammen, von denen eins lautet:

$$\sum_{km} T_{jkm} (R^m{}_{ih}{}^k - R^m{}_{hi}{}^k) = \sum_{km} T_{jkm} (R^m{}_{ih}{}^k + R_h{}^m{}_i{}^k) = -\sum_{km} T_{jkm} R_{ih}{}^{mk} = \sum_{km} T_{jkm} R_{ih}{}^{km},$$

während die beiden anderen daraus durch zyklische Vertauschung der Zeiger hervorgehen. Wir finden also schließlich:

$$\mathit{div}\, \varrho \sigma \tau\, T = \varrho \sigma \tau\, \mathit{div} T - W T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85\,\mathrm{h})$$

wenn der vollständig antisymmetrische Tensor

$$W_{hij} T = \Box T_{hij} + \sum_k (T_{hik} R^k{}_j + T_{jhk} R^k{}_i + T_{ijk} R^k{}_h) - \sum_{km} (T_{hkm} R_{ij}{}^{km} + T_{jkm} R_{hi}{}^{km} + T_{ikm} R_{jh}{}^{km}) \quad (85\,\mathrm{i})$$

ist.

Setzen wir in (85 d) $P = \Gamma \varrho \alpha \delta \varphi$, so ergibt sich links wegen (74 d) der Wert Null. Nach der ersten der Formeln (74 h) findet sich durch Gleichsetzen der beiden rechts entstehenden Glieder:

$$\Gamma \varrho \alpha \delta \Box \varphi = W \Gamma \varrho \alpha \delta \varphi$$

oder, wenn wir als „Wellenausdruck für den Skalar φ“

$$W\varphi = \Box\varphi \quad \text{(86 k)}$$

f e s t s

$$\Gamma\varrho\alpha\delta\, W\varphi = W\Gamma\varrho\alpha\delta\varphi. \quad \text{(85 k')}$$

In (85d) bilden wir beiderseits die Rotation; es verschwindet nach (74d) das erste Glied rechts; es bleibt:

$$\mathfrak{Rot}\, \mathit{Div}\, \mathfrak{Rot}\, P = -\mathfrak{Rot}\, WP.$$

Sodann setzen wir in (85f) $\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\ \mathrm{P}$; dabei ergibt sich links nach (74g) Null; also

$$\mathfrak{Rot}\, \mathit{Div}\, \mathfrak{Rot}\, P = -W\, \mathfrak{Rot}\, P$$

und

$$\mathfrak{Rot}\, WP = W\, \mathfrak{Rot}\, P. \quad \text{(851)}$$

Setzen wir in (85 d) $\mathrm{P} = \mathit{Div}\mathfrak{M}$, so verschwindet nach (74f) das erste Glied rechts und es bleibt:

$$\mathit{Div}\, \mathfrak{Rot}\, \mathit{Div}\, \mathfrak{M} = -W\mathit{Div}\mathfrak{M}.$$

Bilden wir andererseits an den Sechservektoren auf beiden Seiten von (85f) die Divergenz, so findet man links nach (74f') Null und es gilt somit;

$$\mathit{Div}\, \mathfrak{Rot}\, \mathit{Div}\mathfrak{M} = -\mathit{Div}W\mathfrak{M}.$$

Daraus folgt:

$$\mathit{Div}W\mathfrak{M} = W\mathit{Div}\mathfrak{M} \quad .\ .\ .\ .\ .$$

Bilden wir in Gleichung (85 f) beiderseits die Rotation, so verschwindet nach (74g) der erste Summand rechts; es bleibt:

$$\varrho\sigma\tau\, \mathit{Div}\, \varrho\sigma\tau\, \mathfrak{M} = \varrho\sigma\tau\ W\mathfrak{M}.$$

Setzen wir andererseits in (85 h) den vollständig antisymmetrischen Tensor T gleich $\varrho\sigma\tau\ \mathfrak{M}$, so ergibt sich nach (74g') auf der linken Seite Null; also:

$$\varrho\sigma\tau\, \mathit{Div}\, \varrho\sigma\tau\, \mathfrak{M} = W\, \varrho\sigma\tau\, \mathfrak{M}$$

u n

$$\varrho\sigma\tau\ \mathfrak{V}\ \mathfrak{M} = W\, \varrho\sigma\tau\, \mathfrak{M}. \quad \text{(85n)}$$

Nach den Reziprozitätssätzen (85 k'), (851), (85m) und (85n) kann man bei einem Skalar die Operationen W und $\Gamma\varrho\alpha\delta$, bei einem Vektor W und $\mathfrak{Rot}$, bei einem Sechservektor W und Div und bei einem vollständig antisymmetrischen Tensor dritten Ranges W und $\varrho\sigma\tau$ in der Reihenfolge miteinander vertauschen.

Die Definition der Wellenausdrücke und diese Sätze stammen von W. Gordon.

IV. Die einfachsten nichtenklidischen Geometrien.

§12. Einiges über Flächentheorie.

Zur Erläuterung der in Abschnitt I I I abgeleiteten Ergebnisse, nicht aber, weil es zum Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie unumgänglich notwendig wäre, geben wir hier einen kurzen Überblick über einige einfache Arten nichteuklidischer Geometrien, vor allem in zwei Dimensionen. Mancher der Leser wird ihn überschlagen könpen. Wir denken dabei diese Mannigfaltigkeit zunächst als gekrümmte Fläche in einem dreidimensionalen Raum mit euklidischer Maßbestimmung.

a) Das invariante Krümmungsmaß. Auf einer beliebigen Fläche greifen wir irgend einen Punkt heraus, in welchem sie sich regulär verhält. Wir machen ihn zum Anfang eines rechtwinkeligen Koordinatensystems *x, y, z,* indem wir überdies ihre Tangentenebene zur *xy-Ebene* wählen. Indem wir sodann noch geeignete Richtungen in letzterer als Achsen festsetzen, können wir stets erreichen, daß die Funktion $z(x, y)$ bei der Entwicklung nach Potenzen von x und y die Form

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

annimmt. Die Bedeutung der Konstanten a und b erkennt man, wenn man die Fläche mit den Koordinatenebenen $\xi = 0$ und $\eta = 0$ eines Systems

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = -\beta x + \alpha y$$
$$(\alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

schneidet. Die Gleichungen der Schnittlinien

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b}\right)\xi^2 \text{ und } z = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{a} + \frac{\alpha^2}{b}\right)\eta^2$$

zeigen nämlich, daß

$$R_1 = \left(\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b}\right)^{-1} \text{ und } R_2 = \left(\frac{\beta^2}{a} + \frac{\alpha^2}{b}\right)^{-1}$$

ihre Krümmungshalbmesser im Nullpunkt sind. Für sie gilt der Eulersche Satz

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

und man erkennt, daß *a* und *"b* die Extremwerte unter allen Krümmungshalbmessern der Schnittkurven darstellen. Sind diese beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleichzeitig positiv oder negativ, so hat die Fläche, bezogen auf das geschilderte Koordinatensystem, im Nullpunkt ein Minimum oder Maximum, sonst einen Sattelwert.

Wir wollen nun für diese Fläche das Krümmungsmaß R im Nullpunkt bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst den Tensor R_{ik} nach (80) und dafür brauchen wir wieder die Christofelschen Drei-Zeiger-Symbole. Um diese zu finden, entnehmen wir nach § 7 aus der Darstellung des Linienelementes

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx^2\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots\right] \\ &+ dy^2\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \cdots\right] + 2\left(\frac{xy}{ab} + \cdots\right) dx\,dy \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

und dem Variationsprinzip:

$$\delta \int \left\{\dot{x}^2\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \dot{y}^2\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] + 2\dot{x}\dot{y}\,\frac{xy}{ab}\right\} dp = 0$$

die Differentialgleichungen der geodätischen Linien:

$$\frac{d}{dp}\left\{\dot{x}\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \dot{y}\,\frac{xy}{ab}\right\} - \frac{x}{a^2}\dot{x}^2 - \frac{y}{ab}\,\dot{x}\dot{y} = 0$$

oder:
$$\ddot{x}\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \ddot{y}\,\frac{xy}{ab} + \frac{x}{a^2}\dot{x}^2 + \frac{x}{ab}\dot{y}^2 = 0;$$

und. entsprechend :

$$\ddot{y}\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] + \ddot{x}\,\frac{xy}{ab} + \frac{y}{b^2}\dot{y}^2 + \frac{y}{ab}\dot{x}^2 = 0.$$

In der nach *x* und *y* aufgelösten Form lauten sie

$$\ddot{x} + \frac{\frac{x}{a^2}\dot{x}^2 + \frac{x}{ab}\dot{y}^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{\frac{y}{ab}\dot{x}^2 + \frac{y}{b^2}\dot{y}^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} = 0. \tag{86 a}$$

Beziehen wir den Zeiger 1 auf die Koordinate *x*, *2* auf *y*, so entnehmen wir aus ihnen im Vergleich mit (55):

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\frac{x}{a^2}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\frac{x}{ab}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\frac{y}{ab}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\frac{y}{b^2}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Für den Nullpunkt verschwinden alle diese g-Klammern; für ihn sind somit x und y geodätische, aber im allgemeinen nicht Riemannsche Koordinaten. Um für diesen Punkt den Krümmungstensor zu berechnen, brauchen wir in (80) somit nur die einfache Summe in Betracht zu ziehen. Außerdem brauchen wir R_{12} nicht zu berechnen; denn da im Nullpunkt nach (86)

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0$$

ist, sind dort

$$g = 1, \quad g^{11} = g^{22} = 1, \quad g^{12} = 0,$$

und es wird nach (81)

$$R = \sum_{kl} g^{kl} R_{kl} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22}.$$

Es ist also für $x = y = 0$

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{ab};$$

durch Vertauschung von a und b finden wir für R_{22} dasselbe und für die invariante Krümmung den Wert

$$R = -\frac{2}{ab} = -2K \quad \ldots \ldots \quad (87)$$

Das reziproke Produkt der Hauptkrümmungshalbmesser, das Gaußsche Krümmungsmaß K, stimmt also bis auf den Faktor —½ mit der invarianten Krümmung R überein.

Dieser Satz ist merkwürdig. Die invariante Krümmung ist rein aus der Maßbestimmung innerhalb der Fläche abzuleiten, während die Krümmungshalbmesser nur etwas über die Gestalt der Fläche im dreidimensionalen Raum aussagen. Da sich die Maßbestimmung bei einer Verbiegung der Fläche ohne Dehnung nicht ändert, so ist danach das Produkt der Hauptkrümmungshalbmesser ebenfalls dabei unveränderlich.

Für die Ebene wären beide Halbmesser unendlich groß, daher $K = 0$. Dasselbe muß für alle Flächen gelten, die sich wie die Zylinder und Kegel aus einer Ebene durch dehnungsloses Zusammenrollen herstellen lassen. Auch nicht zu große Teile einer Kugelfläche lassen sich dehnungsfrei verbiegen, so daß sie zwei verschiedene Hauptkrümmungshalbmesser erhalten. Aber deren Produkt behält den ursprünglichen, auf der Fläche konstanten Wert. Nebenbei sei bemerkt, daß eine solche Verbiegung bei der ganzen Kugelfläche nicht möglich ist.

Nach (86a) ist im Nullpunkt $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Eine durch ihn führende geodätische Linie geht also durch senkrechte Projektion auf die in ihm berührende Tangenterjebene in eine Kurve über, deren Krümmung im Berührungspunkt verschwindet Die Krümmungsebene der geodätischen Linie steht auf der Fläche senkrecht. Die Gesamtheit aller Tangentenebenen, welche die krumme Fläche in den Punkten einer Kurve k berühren, hat als Enveloppe eine Fläche, welche aus« den Schnitten von je zwei benachbarten Ebenen besteht. . Sie hat das Krümmungsmaß Null und ist auf die Ebene abwickelbar. Bei diesem Verfahren geht die Kurve k, sofern sie auf der krummen Fläche geodätische Linie ist, in eine Gerade über.

Bei anderer Wahl des Koordinatensystems lautet die Maßbestimmung auf der Fläche $z = z\,(x,y)$:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] dx^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dy^2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Setzt man die hieraus zu entnehmenden Werte der g_{ik} in (79) zur Berechnung von R_{1212} ein, so findet man nach (81a):

$$-\tfrac{1}{2}R = K = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] : \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2. \quad (88)$$

Wir werden diese Formel im folgenden nicht gebrauchen.

b) Die „Parallelverschiebung" auf krummen Flächen. In § 10 haben wir gezeigt, daß ein Vektor bei Parallelverschiebung um eine geschlossene Kurve im allgemeinen nicht wieder in seine alte Lage zurückkommt;" es ist für zwei Dimensionen leicht, den Winkel zu berechnen, um welchen er sich dreht. Wir denken wie dort von einem Punkt P_0 aus, in welchem sich die Fläche regulär verhalten muß, zwei Verschiebungen, dx^i und δx^i, ausgeführt. Beide bestimmen eine Art Parallelogramm, um dessen Umfang wir den Vektor herumführen. Seine ursprünglichen Komponenten A^1 und A^2 gehen dabei über in $A^1 + DA^1$, $A^2 + DA^2$ und der unendlich kleine Winkel zwischen beiden Richtungen ist nach (29a), wenn wir dort P^i durch A^i, Φ^i durch $A^i + DA^i$ ersetzen:

$$d\varphi = \pm\sqrt{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2}\;\frac{A^1\,DA^2 - A^2\,DA^1}{g_{11}A^{1^2} + 2\,g_{12}A^1A^2 + g_{22}A^{2^2}}.$$

Nach (76) wird daraus:

$$d\varphi = \mp\sqrt{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2}\;\times$$
$$\frac{\left[(A^1R^2{}_{112} - A^2R^1{}_{112})A^1 + (A^1R^2{}_{212} - A^2R^1{}_{212})A^2\right](dx^1\,\delta x^2 - dx^2\,\delta x^1)}{g_{11}A^{1^2} + 2\,g_{12}A^1A^2 + g_{22}A^{2^2}}.$$

Weiter ist nach der Regel

$$R^i_{klm} = \sum_t g^{ij} R_{jklm}$$

$$R^1_{112} = -g^{12} R_{1212} = g_{12} \frac{R_{1212}}{g}, \quad R^2_{112} = -g^{22} R_{1212} = -g_{11} \frac{R_{1212}}{g}$$

$$R^1_{212} = \quad g^{11} R_{1212} = g_{22} \frac{R_{1212}}{g}, \quad R^2_{212} = \quad g^{12} R_{1212} = -g_{12} \frac{R_{1212}}{g}$$

Dabei ist, wie früher, g für die Determinante $g_{11} g_{22} - g_{12}^2$ geschrieben. Wir finden so nach (81a) und (87):

$$d\varphi = +\frac{R_{1212}}{g} \cdot \sqrt{g}\,(dx^1 \delta x^2 - dx^2 \delta x^1) = +\tfrac{1}{2} R \,.\, d\sigma = \pm K d\sigma.$$

Dabei ist nach § 6, Gleichung (460 in der Anmerkung zu S. 54,

$$d\sigma = \pm \sqrt{g}\,(dx^1 \delta x^2 - dx^2 \delta x^1)$$

der Flächeninhalt des durch die Strecken dx^i und 6V bestimmten Parallelogramms.

Um den Sinn dieser Drehung klarzustellen, nehmen wir K einmal als positiv, also nach (87) R negativ und nach der vorstehenden Formel R^2_{112} = ½g_{11} R ebenfalls negativ an. Ferner legen wir die Richtung von x^1 in die Verschiebung dx^i, die Richtung x^2 in die Verschiebung δx^i. Dann $dx^1 \delta x^2 - dx^2 \delta x^1$ i ß positiv und nach (76) erhält ein Vektor» der ursprünglich die Richtung x^1 hat ($A^1 > 0$, $A^2 = 0$), einen positiven Zuwachs DA^2, Da wir dort in § 10 den Umlauf mit der Verschiebung dx* begonnen und mit der Verschiebung $-\delta x^i$ beendet hatten, bedeutet dies eine Drehung im Sinne des Umlaufs. Kennen wir eine solche Drehung positiv, so müssen wir also schreiben:

$$d\varphi = K d\sigma.$$

Nun setzen wir, wie schon in § 10, die Umkreisungen zweier derartiger Vierecke mit einer gemeinsamen Seite zu einer Umkreisung der aus beiden gebildeten Fläche zusammen. Dabei addieren sich die Drehwinkel $d\varphi$. Durch hinreichend häufige Wiederholung dieses Verfahrens kann man schließlich für die Umkreisung eines beliebigen» singularitätenfreien Flächenstückes den Satz ableiten

$$\varphi = \int K d\sigma.$$

Betrachten wir z. B. den Umlauf um den Breitenkreis einer Kugel vom Halbmesser r, dessen Punkte vom Nordpol den konstanten

Winkelabatand ϑ haben. Für ihn findet sich eine Umdrehung um $\varphi = \frac{1}{r^2} \times 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 4\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ im Sinne des Umlaufs (Fig. 10 veranschaulicht die allmähliche Drehung eines Kompaßkörpers aus zwei zueinander senkrechten Vektoren), sofern man als umlaufene Fläche die Kugelkalotte betrachtet, welche den Nordpol enthält. Mit

Fig. 10.

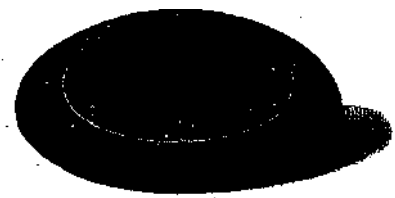
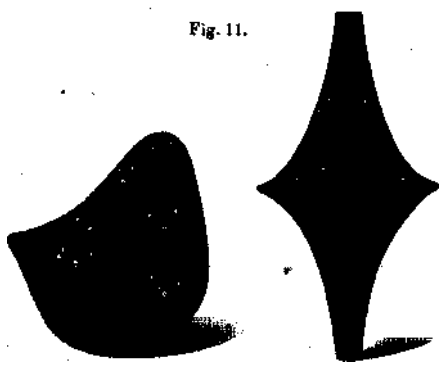


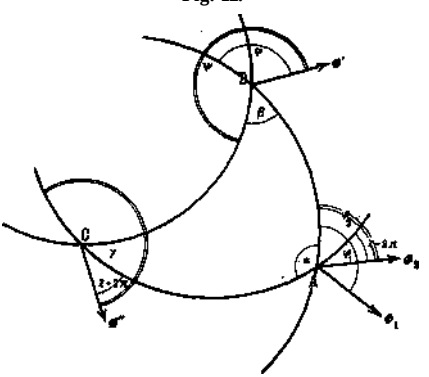
Fig. 11.



demselben Recht aber kann man den übrigen Teil der Kugelfläche dafür nehmen. Dann folgt $\varphi = 4\pi \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$. Beide Gleichungen stimmen dem Sinn nach überein. Denn im zweiten Fall hat der Umlauf und damit die Drehung den entgegengesetzten Sinn wie im ersten, und die beiden Werte von φ ergänzen sich zu 4π. Wird aus dem Breitenkreis der Äquator, so wird $\varphi = 2\pi$, der parallel verschobene Vektor kehrt also in die Anfangslage zurück. (Für zwei Flächen negativer Krümmung zeigt Fig. 11 die Drehung zweier Vektoren bei einem geschlossenen Umlauf in dem ihm entgegengesetzten Sinn.)

Die letzte Bemerkung stimmt mit der früheren überein, daß ein Vektor bei der Parallelverschiebung längs einer geodätischen Linie stets denselben Winkel mit ihr bildet; denn kehrt diese Linie in sich zurück, wie die größten Kreise der Kugel es tun, so muß er somit auch in die Anfangslage kommen. Dieselbe frühere Bemerkung aber gestattet uns nun sehr einfach, den Gaußsehen Satz über die Winkelsumme in einem geodätischen, d. h. durch geodätische Linien begrenzten Dreieck, abzuleiten. Fig. 12*). stellt im Dreieck *ABC* mit den Winkeln α, β, γ ein solches Dreieck dar — anfangs liege der Vektor bei *A* in der Richtung $\Phi_{(1)}$, welche mit dem Bogen *AB* den

Fig. 12.



Winkel φ_1 bildet. Wir verschieben ihn unter Aufrechtefhaltung dieses Winkels nach *B* in die Lage Φ'. Er bildet dann mit *B C* den Winkel $\psi = \pi - \beta + \varphi_1$. Während wir den Vektor längs *B C* nach *C* verschieben, halten wir ψ konstant. Seine Lage Φ'' bei *C* schließt dann mit *CA* den Winkel $\chi = \pi - \gamma + \psi$ ein. Die letzte Parallelverschiebung nach *A* längs *CA* führt ihn schließlich in die Richtung $\Phi_{(2)}$, welche mit *AB* den Winkel $\varphi_2 = \pi - \alpha + \chi$, mit $\Phi_{(1)}$ den Winkel $\varphi_1 - \varphi_2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ .bildet. (Bei der letzten

*) Die Figur ist als stereographische, also winkeltreue Projektion eines auf einer Kugel gelegenen sphärischen Dreiecks auf die Ebene gezeichnet. Der Vektor, welcher nach § 11 eine Strecke in der Tangentenebene darstellt, projiziert sich dabei als gerade Strecke, welche freilich, da die wahre Länge des Vektors erhalten bleibt, in der Projektion veränderliche Längen haben sollte. Für die Winkelberechnung ist das ohne Bedeutung.

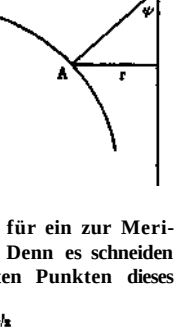
Angabe ist der Betrag 2π unterdrückt.) um diesen Winkel hat sich der Vektor somit bei der Umkreisung in derem Sinne gedreht. Infolgedessen gilt für den Überschuß der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks über π der Satz

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int K d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Für den Fall der Kugel ist er aus der sphärischen Trigonometrie wohl bekannt.

c) Flächen konstanten Krümmungsmaßes. $R = const$ ist nach (88) eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung zwei willkürliche Funktionen enthalten, somit noch sehr viele Möglichkeiten umfassen muß. Man erhält aber dadurch eine leichte Übersicht, daß man sich auf Drehflächen beschränkt; dann geht nämlich die partielle in eine gewöhnliche Differentialgleichung über.

Fig. 13.



Wir können diese leicht geometrisch ableiten, indem wir in einer Meridianebene die Schnittkurve der Fläche zeichnen (Fig. 13). Nennen wir die Koordinaten in ihr z (parallel zur Drehachse) und r (Abstand von ihr), so ist der eine der Hauptkrümmungshalbmesser der Krümmungshalbmesser der Meridiankurve, also gleich

$$\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{3/2} : \frac{d^2z}{dr^2}.$$

Um den anderen zu finden, ziehen wir im Punkt A das Lot auf die Kurve. Dessen Schnitt mit der Drehachse B ist dann der Krümmungsmittelpunkt für ein zur Meridiankurve senkrechtes Linienstück in der Fläche. Denn es schneiden sich in ihm die Flächenlote in zwei benachbarten Punkten dieses Linienstückes. Es ist aber

$$AB = \frac{r}{\sin\psi} = r \cdot \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{1/2}}{\frac{dz}{dr}}.$$

Da das Produkt dieser Krümmungshalbmesser gleich $1/K$ ist, lautet unsere Differentialgleichung

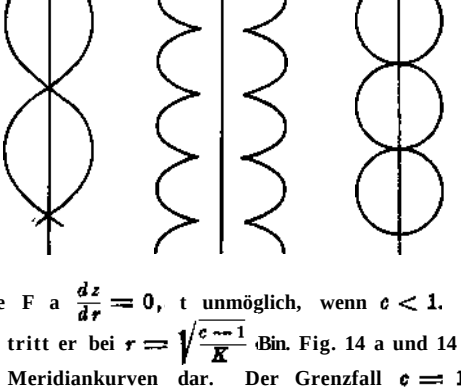
$$\frac{\frac{dz}{dr}\frac{d^2z}{dr^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^2} = Kr.$$

Sie läßt sich leicht das erstemal integrieren und liefert dabei

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{1}{c - Kr^2} - 1.$$

Von hier an müssen wir aber eine Reihe von Fällen unterscheiden. Zunächst sei die Konstante $K > 0$. Dann muß, soll $\frac{dz}{dr}$ nicht imaginär werden, auch $c > 0$ sein. Es gibt dann immer einen reellen Maximalwert $r = \sqrt{\frac{c}{K}}$, bei welchem $\frac{dr}{dz}$ verschwindet. Der

Fig. 14a. Fig. 14b. Fig. 14c.



umgekehrte Fall $\frac{dz}{dr} = 0$, tritt unmöglich, wenn $c < 1$. Ist aber $c > 1$, so tritt er bei $r = \sqrt{\frac{c-1}{K}}$ ein. Fig. 14 a und 14 b stellen dann die Meridiankurven dar. Der Grenzfall $c = 1$ liefert $z = const \pm \sqrt{K^{-1} - r^2}$, also eine Kugel vom Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{K}}$, oder besser, um den Zusammenhang mit den anderen Fällen herzustellen, eine Reihe aufeinander gesetzter Kugeln (Fig. 14 c). Ist dagegen $K = -k < 0$, so muß notwendig $c < 1$ sein, da sonst $\frac{dz}{dr}$ imaginär würde. So aber gibt es stets reelle Punkte im Abstand $r = \sqrt{\frac{1-c}{k}}$ von der Achse, in welche $\frac{dz}{dr} = \infty$ wird. An diesen Stellen haben die Flächen scharfe Kanten. Des weiteren sind noch die Fälle zu unterscheiden, in welchen $c > 0$ — dann ist $\frac{dr}{dz}$ nirgends Null und die Achse wird erreicht, da für $r = 0$ $\frac{dz}{dr}$ reell bleibt (Fig. 15 a stellt

den Teil der Fläche zwischen zwei Kanten dar) —, daß $c < 0$ — dann ist $r = \sqrt{-\frac{c}{k}}$ der kleinste vorkommende Wert, für ihn verschwindet $\frac{dr}{ds}$ (Fig. 15h gibt den Teil zwischen zwei Kanten und die angrenzenden Stücke der Fläche) —, und daß $c = 0$ ist; in letzterem Fall führt die zweite Integration zur Gleichung der „Traktrix"

$$s = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\left[\sqrt{1-kr^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-kr^2}}{1+\sqrt{1-kr^2}}\right].$$

Die aus ihr entstehende Drehfläche (Fig. 11, rechte Hälfte) verläuft von ihrer einzigen Kante nach beiden Seiten ohne Singularitäten ins

Fig. 15 a.

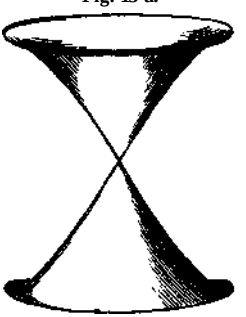
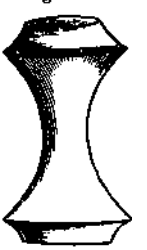


Fig. 15 b.



Unendliche. Flächen mit konstantem positiven Krümmungsmaß nennt man sphärisch, solche mit konstantem negativen Krümmungsmaß jpseudosphärisch. Als Pseudosphäre schlechthin bezeichnet man die in Fig. 11 (rechte Hälfte) dargestellte Fläche.

Schneidet **m a l** aus einer Kugelfläche durch zwei zum Äquator parallele Breitenkreise eine Zone heraus, so kann man diese, nachdem man sie noch längs eines Meridians aufgetrennt hat, auseinanderbiegen, doch so, daß sie wieder Teil einer Drehfläche wird. Dann nimmt die Krümmung des Äquators ab, die der Meridiane wegen des unveränderlichen Krümmungsmaßes zu, und wir erhalten einen Teil der in Fig. 14b dargestellten Fläche. Wickeln wir umgekehrt dasselbe Stück der Kugel zusammen, so daß es sich zum Teil selbst überdeckt, so nimmt die Krümmung des Äquators zu und die der Meridiane ab. Behält es dabei axiale Symmetrie, so entsteht ein Stück der in Fig. 14a dargestellten Fläche.

d) Polarkoordinaten, x^1 und x^2 sollen beliebige Koordinaten sein. Von einem Punkt P aus, in dessen Umgebung die Fläche sich regulär verhält, ziehen wir die Gesamtheit der hindurchgehenden geodätischen Linien. Ihre Gleichungen mögen die Form haben $v(x^1,x^2) = const.$ Ferner suchen wir die Schar der sie senkrecht schneidenden (natürlich nicht geodätischen) Kurven auf, deren Gleichung die Form $u\,(x^1, x^2) = const$ haben möge. Dann ist das Linienelement in den u und v als Koordinaten nach dem pythagoreischen Lehrsatz darstellbar durch

$$ds^2 = g_{11}(u,v)\,du^2 + g_{22}(u,v)\,dv^2 \quad (g_{11}, g_{22} > 0).$$

Wir behaupten, daß g_{11} nur von u abhängt, nicht aber von v.

Zum Beweise stellen wir die Differentialgleichung der geodätischen Linie auf, indem wir sie in der Form $v = v\,(u)$ suchen. Wir müssen dazu

$$\int \sqrt{g_{11}(u,v) + g_{22}(u,v)\,\dot{v}}\;du$$

zu einem Extremum machen. Die daraus entspringende Lagrangesche Gleichung lautet:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g_{22}\,\dot{v}}{\sqrt{g_{11} + g_{22}\,\dot{v}^2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{g_{11} + g_{22}\,\dot{v}^2}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v}\,\dot{v}^2\right) = 0.$$

Die Kurvenschar $v = const$ erfüllt dann, und nur dann, diese Differentialgleichung, wenn $\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = 0$ ist *).

Ist aber g_{11} nur Funktion von u, so können wir die „Polarkoordinaten"

$$\vartheta = \int \sqrt{g_{11}}\,du, \quad \varphi = v$$

einführen, in denen das Linienelement die Darstellung

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \gamma^2(\vartheta, \varphi)\,d\varphi^2 \qquad (90)$$

erhält. Diese einfache Form nimmt es ohne jede Einschränkung der Allgemeinheit an.

*) Dieser Beweis überträgt sich ohne weiteres auf n Dimensionen. Sollen bei der Maßbestimmung

$$ds^2 = g_{nn}\,dx^{n2} + \sum_{i,k=1}^{n-1} g_{ik}\,dx^i\,dx^k,$$

die sich nach § 9 f immer einführen läßt, die Kurven des n ten Parameters $x^1, x^2, \ldots, x^{(n-1)} = const$ geodätische Linien sein, so darf $g_{n\,n}$ nur von x^n abhängen.

Man sieht an dieser Darstellung von ds, daß die geodätische Linie zwischen zwei nicht zu weit entfernten Punkten A und B die kürzeste ist. Denn machen wir A zum Anfang der Polarkoordinaten, so ist der Abstand AB, gemessen längs der geodätischen Linie, gleich $\vartheta_B - \vartheta_A$; auf jedem anderen Wege hat er hingegen den größeren Wert

$$\int_A^B \sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \gamma^2 \dot{\varphi}^2}\, ds.$$

Dieser Beweis versagt aber, wenn wir die geodätische Linie AB so lang wählen, daß andere geodätische Linien durch A sie zwischen A und B schneiden. Denn dann kann man auf mehreren Wegen so von A nach B gelangen, daß man sich stets auf geodätischen Linien bewegt, und da diese verschiedenen Wege nicht gleich lang zu sein brauchen, ist einer davon im allgemeinen kürzer als die anderen. — In den vier Dimensionen der „Welt" gilt schon deswegen nichts Entsprechendes, weil in ihr das Linienelement ds^2 keine positiv definite quadratische Form ist. Aus der beschränkten Relativitätstheorie wissen wir z. B., daß der längs einer zeitartigen geraden Weltlinie gemessene Abstand zweier Punkte gegenüber anderen zeitartigen Wegen ein Maximum ist.

Um aus (90) das Krümmungsmaß zu berechnen, stellen wir zunächst fest, daß

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = \gamma^2, \qquad g_{12} = 0,$$

also

$$g^{11} = 1, \qquad g^{22} = 1/\gamma^2, \qquad g^{12} = 0$$

ist. Dann suchen wir die g-Klammern durch Lösung des Variationsproblems

$$\delta \int (\dot{\vartheta}^2 + \gamma^2 \dot{\varphi}^2)\, d\,p = 0$$

auf. Das führt auf die Differentialgleichungen

$$\ddot{\vartheta} - \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{2}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}\, \dot{\varphi} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 = 0.$$

Aus ihnen entnehmen wir nach (55) die folgenden Werte für die nicht verschwindenden g-Klammern:

$$\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta}.$$

Nach (80) wird somit

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2}$$

$$R_{22} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2}$$

und naoh (81) **und** (87)

$$K = -\frac{1}{2} R = -\frac{1}{2}(g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22}) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2} \quad \cdots \quad \text{OD}$$

Nach (90) ist die Geometrie auf krummen Flächen vollständig durch die Funktion $\gamma(\vartheta, \varphi)$ bestimmt; und nach (91) ebenso vollständig durch die Funktion $K(\vartheta, \varphi)$. Denn von den beiden Funktionen von φ, die bei der Integration von (91) in $\gamma(\vartheta, \varphi)$ zunächst willkürlich bleiben, ist die eine dadurch bestimmt, daß im Schnittpunkt P aller geodätischen Linien $\varphi = const$, dem man den Wert $\vartheta = 0$ zuordnen darf, γ identisch in φ verschwinden muß; die andere tritt als Faktor zu γ, da ein solcher Faktor sich in (91) heraushebt. Diese kann man stets gleich 1 setzen, weil eine andere Wahl nach (90) nur auf eine Umtaufung der Koordinate φ hinauskäme.

Weil γ für $\vartheta = 0$ verschwindet, verschwindet nach (91), sofern K endlich ist, auch $\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2}\right)_{\vartheta=0}$; und da man in γ, wie soeben erwähnt, einen Faktor willkürlich wählen kann, dürfen wir die Reihenentwicklung ansetzen:

$$\gamma = \vartheta + \alpha(\varphi)\vartheta^2 + \cdots$$

Wir können infolgedessen die Maßbestimmung (90) auch schreiben:

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \vartheta^2 \mu^2 d\varphi^2 \quad \cdots \cdots \quad (91a)$$

wobei die Funktion

$$\mu(\vartheta, \varphi) = 1 + \alpha(\varphi)\vartheta^2 + \cdots \quad \cdots \cdots \quad (91b)$$

ist. Geometrisch bedeutet den längs der geodätischen Linie gemessenen Abstand des Aufpunktes vom Punkt P, φ, wie die Maßbestimmung (91a) und die Gleichung (91b) beweist, den Winkel dieser Linie mit einer festen Richtung in P.

e) Sphärische Flächen und elliptische Geometrie der Ebene. Für sphärische Flächen ist das Gaußsche Krümmungsmaß gleich einer positiven Konstanten k. Dann folgt aus (91), nach den erwähnten Nebenbedingungen, $\gamma = \sin \sqrt{k}\vartheta$. Für alle sphärischen Flächen läßt sich somit das Linienelement auf die Form

$$ds^2 = \frac{d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2}{k} \quad (\Theta = \sqrt{k}\vartheta, \quad \Phi = \sqrt{k}\varphi)$$

bringen, die wir von der Kugel her kennen. Nun ist die Form des Linienelementes kennzeichnend für die betreffende Geometrie. Aus dieser Übereinstimmung dürfen wir daher schließen: Die Geo-

metrie auf Flächen konstanter positiver Krümmung ist Geometrie auf der Kugel. Die Tatsache, daß man auf der Kugel Figuren ohne Formänderung verschieben kann, überträgt sich auf alle sphärischen Flächen. Es gelten deshalb Kongruenzsätze, wie die, daß Dreiecke von drei gleichen Seiten, oder von zwei gleichen Seiten und gleichem eingeschlossenen Winkel, oder von einer gleichen Seite und zwei gleichen angrenzenden Winkeln kongruent sind, d. h. zur Deckung gebracht werden können usw. Parallelen gibt es nicht. Jedes Paar geodätischer Linien schneidet sich bei hinreichender Verlängerung.

Damit sich zwei Flächen aufeinander abwickeln, d. h. ohne Dehnung oder Faltung aufeinander legen lassen, ist notwendig und hinreichend, daß das Linienelement in beiden dieselbe Darstellung zuläßt. Alle sphärischen Flächen von gleiohem Krümmungsmaß sind danach aufeinander abwickelbar.

Im übrigen darf man diese Sätze nicht auf beliebig große Teile der Flächen anwenden; es gibt da Grenzen. Man kann z. B. keine Figur unverzerrt über die in den Fig. 14a und 14b auftretenden Kanten und Spitzen hinüberschieben, man kann nicht die Kugelfläche als Ganzes ungedehnt verbiegen. Daß Flächen, auf denen sich das Linienelement in der gleichen Art darstellen läßt, noch ganz verschiedene Zusammenhangsverhältnisse haben können, zeigt sehr lehrreich der Vergleich der Ebene mit dem durch Zusammenrollen aus ihr entstehenden Kreiszylinder. Auf letzterem gibt es geschlossene geodätische Linien, nämlich den Grundkreis und seine Parallelen; andere geodätische Linien, die Schraubenlinien, gehen bei hinreichender Verlängerung in eine ihrer Parallelen über, nämlich in die nächste Schraubenwindung usw. Trotzdem gilt auf nicht zu großen Stücken der Zylinderfläche die Geometrie der Ebene unverändert.

An die Kugel vom Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{k}}$ legen wir in einem ihrer Pole die Tangentenebene und bilden die angrenzende Halbkugel durch Projektion vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene ab. Die Abbildung ist eindeutig. Ist Θ der Polabstand auf der Kugel, so sind

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{tg}\Theta \cos\Phi, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{tg}\Theta \sin\Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

im euklidischen Sinn rechtwinkelige Koordinaten in der Ebene. Nun aber setzen wir in Abweichung von der euklidischen Maßbestimmung fest, daß jedes Linienstück der Ebene dem entsprechenden

Linienstück auf der Kugel gleich sein soll. Das heißt in Gleichungsform

$$ds^2 = \frac{1}{k}\,(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\Phi^2) = \frac{dx^2 + dy^2 + k(x\,dy - y\,dx)^2}{[1 + k(x^2 + y^2)]^2}. \qquad (93)$$

Dann muß auch jeder Winkel in der Ebene gleich dem entsprechenden Winkel auf der Kugel sein. Denn durch (28) oder (29) ist das Winkelmaß auf die Maßbestimmung für das Linienelement zurückgeführt. Das führt zur elliptischen Geometrie der Ebene. In ihr ist, wie bei Euklid, jede geodätische Linie gerade und jede Gerade eine geodätische Linie; denn die Geraden sind ja die Abbilder größter Kreise auf der Kugel. Aber jede Gerade hat die endliche Länge $\pi/\sqrt{k}$; geht man auf ihr weiter, so kommt man auf schon einmal berührte Punkte. In den Zusammenhangsverhältnissen unterscheidet sich nämlich die elliptische Geometrie der Ebene von der auf der Kugel. Die beiden Punkte, in welchen ein größter Kreis den Äquator der Kugel schneidet, entsprechen nur einem Punkt der Ebene. Die andere Hälfte des größten Kreises wird überhaupt nicht abgebildet. Deshalb schneiden sich je zwei Geraden immer in einem im Endlichen liegenden Punkte. Der zweite Schnittpunkt der entsprechenden größten Kreise liegt auf der nicht abgebildeten Kugelhälfte. Verschiebt man auf der Kugel ein kleines rotierendes Rad längs eines größten Kreises bis zu seiner ersten Wiederkehr im Ausgangspunkt, so zeigt es dabei noch denselben Umlaufssinn wie beim Abgang. In der elliptischen Ebene aber kehrt es bei der entsprechenden Verschiebung das erste Mal mit dem umgekehrten Drehsinn zum Ausgangspunkt zurück. Überträgt man diese Bewegung nämlich auf die Kugel, so muß man bei Erreichung des Äquators durch Inversion am Kugelmittelpunkt auf den gegenüberliegenden Punkt übergehen; und dabei dreht sich der Umlaufssinn um. Das meint man, wenn man die elliptische Ebene als einseitig von der Kugel als einer zweiseitigen Fläche unterscheidet. Die ganze Ebene hat, wie die Halbkugel, den Flächeninhalt $2\pi/k$. Figuren lassen sich unverzerrt wie auf der Kugel verschieben, und es gelten Kongruenzsätze. Aber im Gegensatz zur euklidischen Geometrie der Ebene können sich bei solcher Verschiebung nur die Punkte einer Geraden auf einer Geraden bewegen, weil auf der Kugel eine Verschiebung, bei welcher alle Teile größte Kreise durchlaufen, nicht ohne Dehnungen möglich ist. Auch gibt es keine Ähnlichkeit zwischen verschiedenen Figuren. Zwei Dreiecke z. B., welche in den drei Winkeln α, β, γ übereinstimmen, haben nach Gleichung (89):

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = k \cdot \Delta,$$

auch gleiche Flächeninhalte Δ, sind also kongruent.

Die elliptische Ebene hat das Gaußsche Krümmungsmaß k; dies bleibt ja als Invariante beim Übergang von Θ, Φ zu *x, y* unverändert. Man hat diesen Satz gelegentlich durch die Frage ad absurdum zu führen versucht: „Nach welcher Seite ist denn die Ebene gekrümmt?" Darin liegt eine Verkennung des Begriffs der Invarianten R. Ihren Namen hat sie von krummen Flächen im euklidischen Raum. Aber ihre Bedeutung beruht nicht auf dieser Einlagerung der zwei- in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, sondern allein auf der in der Fläche selbst geltenden Maßbestimmung. Nur der Name „Krümmung" konnte zu jener in der Tat unbeantwortbaren Frage verführen *). Überhaupt ist es aussichtslos, nach Widersprüchen in der elliptischen Geometrie zu suchen, um sie dadurch zu widerlegen. Wegen ihrer Abstammung aus der sphärischen Geometrie überträgt sich jeder Satz aus der einen auf die andere. Wer die eine anerkennt, kann die andere nicht verwerfen.

f) Die pseudosphärischen Flächen haben ein konstantes negatives Krümmungsmaß — *k*. Die dann aus (91) entstehende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2} = + k y$$

hat aber im Hinblick auf die in Abschnitt d) erwähnten Nebenbedingungen die Lösung $y = \mathfrak{Sin}(\sqrt{k}\,\vartheta)$. Für alle pseudosphärischen Flächen läßt sich *ds* somit durch

$$d s^2 = \frac{d\vartheta^2 + \mathfrak{Sin}^2\vartheta\, d\Phi^2}{k} \quad (\Theta = \sqrt{k}\,\vartheta, \quad \Phi = \sqrt{k}\,\varphi) \cdot \cdot \quad (94)$$

darstellen. Da der Anfang der hier auftretenden Koordinaten ganz beliebig gewählt ist, kann man das Netz der Linien Θ = *const* und Φ = *const* unverzerrt von einem Punkt zum anderen verschieben. Es besteht überhaupt zwischen den Punkten der Fläche kein Unterschied für die Geometrie auf ihr. Man kann jenes Netz ferner um den Punkt $\Theta = 0$ unverzerrt beliebig drehen, da unter allen Kurven Φ = *const* die Kurve $\Phi = 0$ in keiner Weise ausgezeichnet ist. Jede Figur gestattet daher noch dreifach unendlich viele Verschiebungen. Deshalb gibt es Kongruenzsätze**).

*) Auch dem Linienelement der Kugel oder einer anderen Fläche positiver Krümmung kann man nicht ansehen, nach welcher Seite sie gekrümmt ist.

**) Als Gegenbeispiel für den gewöhnlichen Fall, daß auf einer Fläche keine Kongruenzsätze bestehen, kann das Botationsparaboloid gebraucht werden. Auf zwei Meridiankurven, welche sich in dessen Scheitel rechtwinkelig schneiden, wählen wir je einen Punkt in gleichem Abstände vom Scheitel und verbinden diese durch eine dritte geodätische Linie. Machen

Setzt man entsprechend der Transformation (92)

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{Tg} \Theta \cos \Phi, \quad y = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{Tg} \Theta \sin \Phi \quad \cdots \quad (95)$$

so findet man (vgl. 93):

$$d s^2 = \frac{d x^2 + d y^2 - k (x\, d y - y\, d x)^2}{[1 - k (x^2 + y^2)]^2} \quad \cdots \quad (96)$$

Deutet man nun wieder x, y als im euklidischen Sinn rechtwinkelige Koordinaten in der Ebene, so hat man eine Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf diese, bei welcher jedem Linienelement und jedem Winkel in der einen Fläche ein gleich langes Linienelement und ein gleich großer Winkel in der anderen entspricht. Das ergibt eine neue nichteuklidische Geometrie der Ebene; man nennt sie die hyperbolische. Jeder Satz in der einen überträgt sich auf die andere.

Die Koordinate Φ entspricht dem v von Abschnitt d); deswegen sind die Kurven $\Phi = const$ geodätische Linien. Im System x, y lautet ihre Gleichung $\frac{x}{y} = const$, sie sind also Gerade durch den Nullpunkt. Dieser hat nun nichts vor anderen Punkten der Fläche voraus, also sind alle Geraden im System x, y geodätische Linien, und alle geodätischen Linien sind Gerade, genau wie bei der elliptischen Geometrie. Nach (89) gilt also für die Winkelsumme eines Dreiecks vom Inhalt Δ, da das Krümmungsmaß $-k$ ist,

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = k \Delta \quad \cdots \quad (97)$$

d. h. die Winkelsumme ist stets kleiner als π.

§ 13. Die Cayley sehe Maßbestimmung.

Um die elliptische und die hyperbolische Geometrie weiter zu untersuchen, müßte man die aufs unendlich Kleine bezogenen Maßbestimmungen (93) und (96) durch Integration auf endliche Strecken ausdehnen. Einfacher ist es, eine von Cayley eingeführte Art der Maßbestimmung zugrunde zu legen, die sich sogleich auf beliebige Strecken bezieht, und dann nachzuweisen, daß sie mit einem der

wir in diesem rechtwinkeligen Dreieck die Katheten hinreichend lang, so ist die Hypotenuse kürzer als jede von ihnen. In solchen Teilen der Fläche hingegen, welche vom Scheitel weit genug abstehen, gilt, da dort die Krümmung sehr gering ist, mit großer Annäherung die euklidische Geometrie der Ebene, derzufolge in solchem Dreieck die Hypotenuse jede Kathete an Länge übertreffen muß.

genannten Differentialgesetze übereinstimmt. Diesen Weg schlagen wir ein.

a) Die hyperbolische Geometrie der Ebene. Statt der rechtwinkeligen Koordinaten x, y verwendet man in der euklidischen Geometrie der Ebene manchmal mit Vorteil homogene Koordinaten $x^1: x^2:x^3$, aus denen sich die ursprünglichen nach den Formeln

$$x = x^1 : x^3, \quad y = x^2 : x^3$$

berechnen. Deren "Vorzüge fallen z. B. bei Gleichung eines Kegelschnitts in die Augen. Denn diese bekommt nun unter allen Umständen die homogene quadratische Form

$$\Omega(x^3) = 0, \quad \Omega(x^3) = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k.$$

Wir benennen sogleich noch die zugehörige Bilinearform mit

$$\Omega(x\,y) = \sum_{ik} g_{ik} x^i y^k.$$

Die gik sollen reell, und $\Omega(x^3)$ soll nicht definit sein, so daß die Gleichung $\Omega(x^3) = 0$ einen reellen Kegelschnitt bestimmt.

Unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, K, L einer Geraden versteht man

$$(AB,\ KL) = \frac{AK}{BK} : \frac{AL}{BL} = \frac{AK \cdot BL}{BK \cdot AL},$$

wobei AK, BK usw. die euklidisch gemessenen Abstände bedeutèn. In kartesischen Koordinaten ist, wenn wir unter x_a ,y_a die Koordinaten von A usw. verstehen,

$$(AB,\ KL) = \frac{(x_a - x_k)\,(x_b - x_l)}{(x_b - x_k)\,(x_a - x_l)}$$

(ebenso in y), und zwar bestehen zwischen diesen Koordinaten, da alle vier Punkte derselben Geraden angeboren, Beziehungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \varkappa_a x_a + \varkappa_b x_b & \varkappa_a + \varkappa_b &= 1 \\ x_l &= \lambda_a x_a + \lambda_b x_b & \lambda_a + \lambda_b &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (97\,a)$$

Daraus schließen wir:

$$(AB,\ KL) = \frac{\varkappa_b \lambda_a}{\varkappa_a \lambda_b}.$$

In homogenen Koordinaten lassen sich dieselben Beziehungen ausdrücken durch

$$x_k^i = \alpha_a x_a^i + \alpha_b x_b^i, \quad x_l^i = \beta_a x_a^i + \beta_b x_b^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei die α und ß durch keine Beziehungen untereinander verbunden sind, wenn nur

$$x_a = \frac{\alpha_a x_a^2}{\alpha_a x_a^2 + \alpha_b x_b^2}, \quad x_b = \frac{\alpha_b x_b^2}{\alpha_a x_a^2 + \alpha_b x_b^2} \quad \text{usw.}$$

ist. Demnach ist das Doppelverhältnis auch durch die Gleichung

$$(AB,\ KL) = \frac{\alpha_b\, \beta_a}{\alpha_a\, \beta_b}$$

auszudrücken.

Nun wählen wir die Punkte *K* und *L* auf dem Kegelschnitt $\Omega(x^2) = 0$. Dann ist

$$\Omega[(\alpha_a x_a + \alpha_b x_b)^2] = \alpha_a^2\, \Omega(x_a^2) + \alpha_b^2\, \Omega(x_b^2) + 2\,\alpha_a \alpha_b\, \Omega(x_a x_b) = 0,$$

$$\Omega[(\beta_a x_a + \beta_b x_b)^2] = \beta_a^2\, \Omega(x_a^2) + \beta_b^2\, \Omega(x_b^2) + 2\,\beta_a \beta_b\, \Omega(x_a x_b) = 0,$$

und daraus folgt:

$$\frac{\alpha_b}{\alpha_a} = \frac{-1}{\Omega(x_b^2)}\left(\Omega(x_a x_b) \pm \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}\right).$$

Ebenso lautet die Gleichung für $\frac{\beta_b}{\beta_a}$. Nehmen wir aber in der Gleichung für $\frac{\alpha_b}{\alpha_a}$ das Vorzeichen $+$, so müssen wir in der anderen das Zeichen — wählen, weil *K* und *L* verschiedene Punkte sein sollen. Dann finden wir

$$(AB,\ KL) = \frac{\Omega(x_a x_b) + \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}}{\Omega(x_a x_b) - \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}}.$$

Cayleys Gedanke bestand nun darin, dies Doppelverhältnis als Maß für den Abstand der Punkte *A* und *B* zu wählen, doch so, daß sich die Abstände von *A* und *B* einer-, *B* und *C* andererseits zum Abstand von *A* und *C* addieren, sofern diese drei Punkte auf einer Geraden liegen. Nun multiplizieren sich aber nach der Gleichung

$$(AC,\ KL) = \frac{AK \cdot CL}{CK \cdot AL} = \frac{AK \cdot BL}{BK \cdot AL} \times \frac{BK \cdot CL}{CK \cdot BL}$$
$$= (AB,\ KL) \times (BC,\ KL)$$

die entsprechenden Doppelverhältnisse. Somit muß man an ihnen den Logarithmus bilden und unter Einführung einer positiven Konstante *k* schreiben:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{2\sqrt{k}}\, log\,(AB,\ KL) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k}}\, log\, \frac{\Omega(x_a x_b) + \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}}{\Omega(x_a x_b) - \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}}. \end{aligned}\right\} \qquad (98)$$

Gleichbedeutend und manchmal bequemer sind die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,(\sqrt{k}\,r) &= \left|\frac{\Omega(x_a x_b)}{\sqrt{\Omega(x_a^{\prime\prime})\,\Omega(x_b^{\prime\prime})}}\right|, \\ \mathfrak{Sin}\,(\sqrt{k}\,r) &= \sqrt{\frac{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^{\prime})\,\Omega(x_b^{\prime})}{\Omega(x_a^{\prime})\,\Omega(x_b^{\prime})}}, \end{aligned}\right\} \quad (98\,a)$$

Hier ist die Maßbestimmung zurückgeführt auf die Lage der in Rede stehenden Punkte zu dem „absoluten Kegelschnitt".

Wählt man dafür den Kreis vom Halbmesser $k^{-1/2}$, d.h. setzt man

$$\Omega(x^2) = -k(x^{1\,2} + x^{2\,2}) + x^{3\,2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

so geht (98 a) über in

$$\mathfrak{Sin}^2(\sqrt{k}\,r) = \frac{k(x_a^2 x_b^3 - x_b^2 x_a^3)^2 + k(x_a^3 x_b^1 - x_b^3 x_a^1)^2 - k^2(x_a^1 x_b^2 - x_b^1 x_a^2)^2}{[x_a^{3\,2} - k(x_a^{1\,2} + x_a^{2\,2})]\,[x_b^{3\,2} - k(x_b^{1\,2} + x_b^{2\,2})]}.$$

Wendet man diese Gleichung auf zwei unendlich benachbarte Punkte an, indem man $x_b^i = x_a^i + dx_a^i$ setzt und den Index a als nunmehr überflüssig fortläßt, so folgt für das Linienelement d s zwischen ihnen

$$ds^2 = \frac{(x^2\,dx^3 - x^3\,dx^2)^2 + (x^3\,dx^1 - x^1\,dx^3)^2 - k(x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1)^2}{[x^{3\,2} - k(x^{1\,2} + x^{2\,2})]^2}.$$

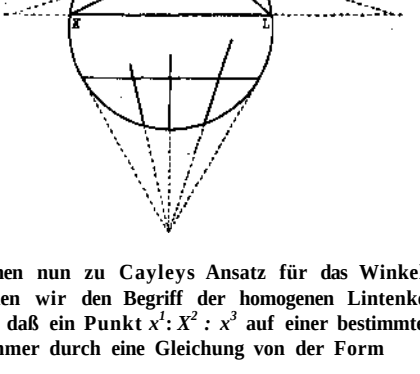
Nun braucht man sich nur noch zu erinnern, daß man für jeden im Endlichen gelegenen Punkt x^3 1, somit $dx^3 = 0$ setzen darf, und damit x^1, x^2 in x ,y überführt. Dann erhält man nämlich ohne weiteres die Gleichung (96). Cayleys Maßbestimmung führt zu der hyperbolischen Geometrie der Ebene, welche mit der Geometrie auf pseudosphärischen Flächen zusammenfällt, wenn man einen reellen Kreis als absoluten Kegelschnitt einführt.

Auf der Geraden KL wählen wir wieder den Punkt A und lassen den Punkt B von A nach K wandern. Solange B noch mit A zusammenfällt, ist $(AB, KL) = 1$ und nach (98) $r = 0$. Dann wächst (AB, KL) dauernd, und sogar über alle Grenzen, wenn sich B dem Punkt K mehr und mehr nähert. Wanderte B nach L, so nähme das Doppelverhältnis allmählich bis zu Null ab. Die Punkte des absoluten Kegelschnitts haben somit von jedem Punkt im Innern einen unendlich großen Abstand. Überschreitet B bei K oder bei L den Kegelschnitt, so wird (AB, KL) negativ und r bleibt nicht mehr reell. Das kommt aber für die hyperbolische Geometrie des Innern nicht in Betracht. Denn messen wir mit einem Maßstabe, welcher die Maßbestimmung (98) verwirklicht, die Gerade KL von A nach

beiden Seiten aus, so können wir ihn beliebig oft anlegen, ohne doch K und L zu erreichen. Die Geraden der hyperbolischen Geometrie sind unendlich lang, obwohl sie innerhalb eines — bei euklidischer Meßbestimmung — im Endlichen liegenden Kegelschnitts liegen. Für die hyperbolische Geometrie ist der absolute Kegelschnitt das unendlich Ferne. Jenseits davon gibt es nichts mehr.

Ziehen wir von einem außerhalb der Geraden KL liegenden Punkt P die Geraden PK und PL, so schneiden diese die Gerade KL im unendlich Fernen, sie sind somit beide zu ihr parallel. Es gibt also in jedem Punkt zu einer nicht durch ihn führenden Geraden zwei Parallele (siehe Fig. 16) und außerdem eine ganze Schar von Geraden, welche die erstere überhaupt nicht schneiden.

Fig. 16.



Wir gehen nun zu Cayleys Ansatz für das Winkelmaß über. Dazu brauchen wir den Begriff der homogenen Lintenkoordinaten. Die Tatsache, daß ein Punkt $x^1 : X^2 : x^3$ auf einer bestimmten Geraden liegt, wird immer durch eine Gleichung von der Form

$$u^1 x^1 + u^2 x^2 + u^3 x^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

dargestellt. Dies ist ja die Gleichung der Geraden in Punktkoordinaten. Die Verhältnisse $u^1 : u^2 : u^3$ sind dann für die Gerade kennzeichnend und heißen homogene Linienkoordinaten der Geraden. Enthält ein Strahlenbündel, d. h. die Gesamtheit der durch einen Punkt der Ebene gehenden Geraden, die Geraden $a\ (u_a^1 : u_a^2 : u_a^3)$ und $b\ (u_b^1 : u_b^2 : u_b^3)$, so bestehen für beide Gleichungen, wie (100), und zwar bedeuten darin die x^i die Koordinaten des Schnittpunkts. Gehören demselben Bündel die Geraden k und l an, so lassen

sich ihre Koordinaten aus den u_a^i und u_b^i durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} u_k^i &= \alpha_a u_a^i + \alpha_b u_b^i \\ u_l^i &= \beta_a u_a^i + \beta_b u_b^i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots \quad (100\,a)$$

bestimmen. Denn soll Gleichung (100) auch noch für die u_h^i gelten, so muß, da doch nicht alle x^i verschwinden können, die Determinante $\sum \pm u_a^1 u_b^2 u_k^3$ Null sein. Das führt aber unmittelbar zu der letzten Gleichung. — Schneiden wir das Bündel durch eine Gerade $U^1 : U^2 : U^3$, so hat ihr Schnittpunkt K mit k die Koordinaten

$$x^1 = \lambda \begin{vmatrix} U^2 u_k^2 \\ U^3 u_k^3 \end{vmatrix}, \quad x_k^2 = \lambda \begin{vmatrix} U^3 u_k^3 \\ U^1 u_k^1 \end{vmatrix}, \quad x_{k_l}^3 = \lambda \begin{vmatrix} U^1 u_k^1 \\ U^2 u_k^2 \end{vmatrix},$$

wo X ein bedeutungsloser Proportionalitätsfaktor ist. Wir schließen daraus, daß die vier Schnittpunkte *A, B, K, L* mit den gleichbenannten Geraden in den Beziehungen

$$x_k^i = \alpha_a x_a^i + \alpha_b x_b^i \qquad x_l^i = \beta_a x_a^i + \beta_b x_b^i$$

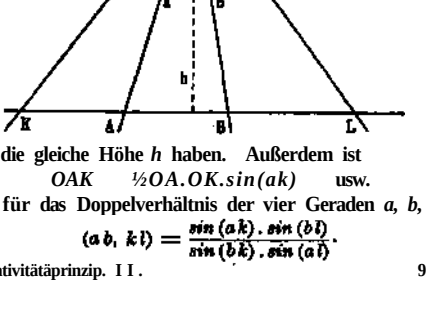
zueinander stehen. Als Doppelverhältnis *(a b, k l)* dieser vier Strahlen bezeichnen wir nun das Doppelverhältnis ihrer vier Schnittpunkte *(AB, KL)*, also

$$(a\,b,\ k\,l) = \frac{\alpha_b \cdot \beta_a}{\alpha_a \cdot \beta_b}.$$

Die Beziehung auf die Gerade $U^1 : U^2 : U^3$ ist dabei unwesentlich, da die α und ß am Strahlenbündel selbst definiert sind *).

*) In Fig. 17 verhalten sich bei euklidischer Maßbestimmung die Dreiecksflächen *OAK: OBK.OBL: OAL AK:BK:BL:AL*,

Fig. 17.



weil sie alle die gleiche Höhe *h* haben. Außerdem ist

$$OAK \quad \tfrac{1}{2} OA.OK.\sin(ak) \quad \text{usw.}$$

Daraus folgt für das Doppelverhältnis der vier Geraden *a, b, k, l:*

$$(a\,b,\ k\,l) = \frac{\sin(a\,k) \cdot \sin(b\,l)}{\sin(b\,k) \cdot \sin(a\,l)}.$$

Den absoluten Kegelschnitt können wir auch in Linienkoordinaten in der Form

$$O(u^2) = \sum_{ik} g^{ik} u^i u^k$$

geben, d. h. die Koordinaten jeder seiner Tangenten müssen dieser Gleichung genügen. Wir beweisen dies nur für den Sonderfall, daß er der Kreis (99) ist. Dessen Tangente im Punkt $x_0^1 : x_0^2 : x_0^3$ hat die Gleichung

$$-k(x^1 x_0^1 + x^2 x_0^2) + x^3 x_0^3 = 0;$$

daraus entnehmen wir ihre Linienkoordinaten

$$u^1 = -k x_0^1, \quad u^2 = -k x_0^2, \quad u^3 = x_0^3.$$

Da die x_0^i aber der Gleichung (99) gehorchen, gilt für die u^i

$$O(u^{i\,2}) = \frac{1}{k}(u^{1\,2} + u^{2\,2}) - u^{3\,2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Jetzt wählen wir k und l als Tangenten an den Kegelschnitt. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} O(u_k^2) &= O[(\alpha_a u_a + \alpha_b u_b)^2] \\ &= \alpha_a^2 O(u_a^2) + \alpha_b^2 O(u_b^2) + 2\alpha_a \alpha_b O(u_a u_b) = 0 \\ O(u_l^2) &= O[(\beta_a u_a + \beta_b u_b)^2] \\ &= \beta_a^2 O(u_a^2) + \beta_b^2 O(u_b^2) + 2\beta_a \beta_b O(u_a u_b) = 0 \end{aligned}$$

bestimmen sich dann die Verhältnisse $\frac{\alpha_a}{\alpha_\beta}, \frac{\beta_a}{\beta_b}$, und aus diesen das Doppelverhältnis

$$(a\,b,\ k\,l) = \frac{O(u_a u_b) + \sqrt{O^2(u_a u_b) - O(u_a^2)\,O(u_b^2)}}{O(u_a u_b) - \sqrt{O^2(u_a u_b) - O(u_a^2)\,O(u_b^2)}}. \quad (102)$$

Cayley nimmt den Logarithmus des Doppelverhältnisses als Maß für den Winkel φ zwischen a und b und erreicht damit offenbar, daß sich die Winkel zwischen Strahlen desselben Bündels addieren. Aber er setzt in den Proportionalitätsfaktor die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$; und zwar

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} log(a\,b,\ k\,l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\cos\varphi = \frac{O(u_a u_b)}{\sqrt{O(u_a^2)\,O(u_b^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103\,a)$$

Wir hingegen haben in § 6 eine Winkeldefinition kennen gelernt [Gleichung (29)], welche sich an das Linienmaß anschließt. Sie lautet, angewandt auf die Maßbestimmung (96) und auf zwei Linien-

elemente ds_a und d_{sb}, die vom Punkt x, y nach $x + dx_a$, $y + dy_a$ und $x + dx_b$, $y + dy_b$ führen:

$$\cos\varphi = \frac{dx_a\,dx_b + dy_a\,dy_b - k\,(x\,dy_a - y\,dx_a)\,(x\,dy_b - y\,dx_b)}{\sqrt{[dx_a^2 + dy_a^2 - k(x\,dy_a - y\,dx_a)^2]\,[dx_b^2 + dy_b^2 - k(x\,dy_b - y\,dx_b)^2]}} \quad (104)$$

Wir müssen zeigen, daß die Cayleysche Bestimmung damit übereinstimmt. Dazu aber genügen die folgenden Bemerkungen: Die Gerade a ist hier bestimmt durch? die Punkte x^i und $x^i + dx_a^i$, also durch die Gleichungen

$$\sum_i u_a^i x^i = 0, \quad \sum_i u_a^i (x^i + dx_a^i) = 0.$$

Daraus folgt unter Einführung eines unwesentlichen Proportionalitätsfaktors λ:

$$u_a^1 = \lambda \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ dx_a^2 & dx_a^3 \end{vmatrix} \text{ usw.}$$

und das Entsprechende für den Index b. Diese Beziehungen vereinfachen sich, sowie man $x^3 = 1$ und $dx_a^3 = dx_b^3 = 0$ setzt:

$$u_a^1 = -\lambda\,dy_a, \quad u_a^2 = \lambda\,dx_a, \quad u_a^3 = \lambda\,(x\,dy_a - y\,dx_a) \quad (104a)$$

(ebenso für den Index b). Setzt man also in (103 a) nach (101)

$$O(u_a u_b) = \frac{1}{k}\,(u_a^1 u_b^1 + u_a^2 u_b^2) - u_a^3 u_b^3,$$

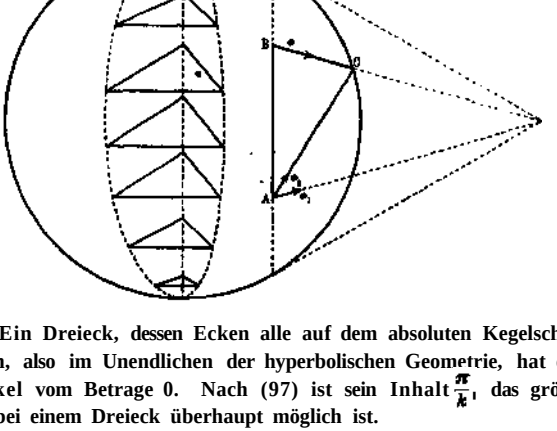
setzt man ferner hier und nach (101) in $O(u_a^2)$ u n $O(u_b^2)$ i e Werte (104 a) ein, so kommt man zur Formel (104); die Winkelbestimmung nach Cayley und nach der Maßbestimmung (96) liefern also dasselbe.

Uns geht hier nur das Innere des absoluten Kegelschnittes an. Die Tangenten k und l von einem dort gelegenen Punkt an ihn sind beide imaginär, deshalb ist auch das Doppelverhältnis (ab, kl) nicht reell. Durch die Wahl des F a k t $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ n (103) haben wir aber erreicht, daß in (103a) rechts nur reelle Größen auftreten; führen nämlich die Geraden a und b beide durchs Innere, so haben $O(u_a^2)$ und $O(u_b^2)$ dasselbe Vorzeichen. In (102) aber muß die Wurzel imaginär, also $O^2(u_a u_b) < O(u_a^2) \cdot O(u_b^2)$ sein. Deshalb sind nach (103 a) $\cos\varphi < 1$, φ also immer reell.

Nur in einem für uns brauchbaren Fall werden die Tangenten k und l reell, wenn nämlich der Schnitt von a und b auf den Kegelschnitt fällt. Dann sind k und l aber dieselbe Gerade. Also ist (ab, kl) 1, und nach (103) $\varphi = 0$. Parallele Gerade schneiden sich im Unendlichen unter dem Winkel 0. Die

Meridiankurven der pseudosphärischen Fläche von Fig. 11 sind eine Schar paralleler geodätischer Linien und veranschaulichen diesen Satz. Man kann sie aber nur nach einer Seite bis ins Unendliche verfolgen, nach der anderen werden sie durch die Kante der Fläche abgeschnitten. Überhaupt gibt keine der pseudosphärischen Flächen in den Fig. 11, 15 a und b die ganze hyperbolische Ebene wieder. Hubert hat bewiesen, daß das auch dann unmöglich ist, wenn man auf die axiale Symmetrie verzichtet; immer unterbrechen Singularitäten den regelmäßigen Zusammenhang.

Fig. 18.



Ein Dreieck, dessen Ecken alle auf dem absoluten Kegelschnitt liegen, also im Unendlichen der hyperbolischen Geometrie, hat drei Winkel vom Betrage 0. Nach (97) ist sein Inhalt $\frac{\pi}{k}$, das größte, was bei einem Dreieck überhaupt möglich ist.

Wann aber stehen zwei Gerade im Sinn der hyperbolischen Geometrie aufeinander senkrecht? Gleichung (103a) gibt dafür als Kennzeichen $0(u_a U_b) = 0$. Was das geometrisch bedeutet, erkenntb man besser an (103). Denn ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so muß $(ab, kl) = -1$ sein. Eine elementargeometrische Überlegung zeigt zunächst für den Fall, daß der Schnittpunkt von *a* und *b* außerhalb des Kegelschnitts liegt, die Tangenten k und *l* somit reell sind, daß dann *a* durch den Pol der Geraden *b* und umgekehrt führen muß. Und somit bedeutet die Forderung $0(u_a u_b) = 0$ stets, daß jede der Geraden *a* und t' durch den Pol der anderen geht, auch wenn sie sich im Innern des Kreises schneiden. Fig. 18 zeigt in ihrer unteren Hälfte solche auf-

einanderstehenden Geraden. Zwei Lote derselben Geraden schneiden sich danach im hyperbolischen Sinn überhaupt nicht, weil sie sich nicht im Innern schneiden. Die Hilfskoordinaten x, y stehen nicht überall aufeinander senkrecht.

Daß es kongruente Figuren gibt, haben wir schon am Ende von §12 bewiesen. Fig. 18 zeigt eine Reihe kongruenter Dreiecke, welche durch eine Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Der eine Eckpunkt bewegt sich dabei auf einer geraden Linie, die anderen auf den gestrichelt gezeichneten Ellipsenbogen.

Außerdem zeigt Fig. 18 an dem Beispiel des Dreiecks ABC, wie sich ein Vektor bei Parallelverschiebung (vgl. § 11b) längs der Seiten eines Dreiecks dem Umlaufssinn entgegen dreht. Denn hat er zunächst die Lage $\Phi_{(1)}$ bei A, in welcher er zu AB im hyperbolischen Sinn senkrecht ist, so kommt er bei der Verschiebung längs AB nach B in die ebenfalls zu AB senkrechte Richtung Φ', welche unter den Verhältnissen der Zeichnung mit BC zusammenfällt. Infolgedessen behält er diese Richtung bei der folgenden Verschiebung nach dem im hyperbolisch Unendlichen gelegenen Punkt C. In diesem schneiden sich aber BC und AC unter dem Winkel Null. Der Vektor hat somit auch die Richtung AC und behält diese bei der letzten Parallelverschiebung nach A bei. Er gelangt also schließlich in die Lage $\Phi_{(2)}$.

b) Die elliptische und die euklidische Geometrie der Ebene. Die Maßbestimmung der elliptischen Geometrie unterscheidet sich von der hyperbolischen nur im Vorzeichen von k. Deshalb kann man die Cayleysche Maßbestimmung ohne weiteres auf die elliptische Geometrie übertragen, wenn man nur den reellen Kreis, $-k(x^{1\,2}+x^{2\,2})+x^{0\,2}=0$, durch den imaginären $k(x^{1\,2}+x^{2\,2})+x^{0\,2}=0$ ersetzt. Zugleich muß man Gleichung (98a) umformen in

$$\mathfrak{Cof}\left(\sqrt{-k}\,r\right)=\cos\left(\sqrt{k}\,r\right)=\left|\frac{\Omega\,(x_a\,x_b)}{\sqrt{\Omega\,(x_a^{\,2})\;\Omega\,(x_b^{\,2})}}\right|,$$

und daraus folgt, da nur positive Werte des Cosinus zulässig sind, daß die Geraden die endliche Länge $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ haben. Das haben wir schon auf andere Art in § 12, e) bewiesen.

Zur euklidischen Maßbestimmung kommt man, wenn man in der hyperbolischen oder der elliptischen den Grenzübergang zu $k=0$ macht. Die euklidische Geometrie ist somit ein gemeinsamer Grenzfall der beiden anderen. Daraus erkennt man, daß jedem Satz der hyperbolischen oder der elliptischen Geometrie ein euklidischer Satz

entsprechen muß. Sofern in einer der ersteren Widersprüche steckten, wäre auch die euklidische Geometrie nicht durchführbar. Und darin liegt wohl der überzeugendste Beweis für die Möglichkeit der ersteren. Man darf aber nicht umgekehrt schließen, daß jedem Satze der euklidischen Geometrie einer in der elliptischen oder hyperbolischen entsprechen müßte. Die Ähnlichkeitssätze Euklids z. B. beruhen wesentlich auf dem Wert Null für das Krümmungsmaß k und sind deswegen unübertragbar.

Zum Schluß wollen wir noch erwähnen, daß die Beschränkung auf einen reellen oder imaginären Kreis als absolutes Gebilde kein wesentliches Kennzeichen der elliptischen und hyperbolischen Geometrie ist. Für Cayleys Maßbestimmung kann man irgend einen Kegelschnitt dafür benutzen und schafft damit eigentlich nichts Neues. Denn durch lineare Substitutionen $x'^i = \sum \alpha_k^i x^k$ kann man diesen Kreis stets in eine andere Kurve zweiten Grades überführen. Gerade gehen dabei in Gerade über und das Doppel Verhältnis von vier Punkten einer Geraden und vier Strahlen eines Bündels bleibt erhalten, weil die Koeffizienten α und β der Gleichungen (97 a) und (100 a) dabei ihren Wert behalten. Alle Strecken und Winkel behalten somit für die elliptische bzw. hyperbolische Messung ihren Wert bei. Die Transformation ändert gar nichts an diesen Geometrien, sondern nur die Deutung der Hilfskoordinaten $x^1 : x^3 : x^4$ oder x und y,

c) Elliptische und hyperbolische Geometrie im Raum. Die Cayleysche Maßstimmung läßt sich unmittelbar auf drei Dimensionen übertragen, wenn man unter $x = x^1 : x^4$, $y = x^2 : x^4$, $z = x^3 : x^4$ euklidische kartesische Koordinaten versteht und

$$\Omega(x^2) = \pm k(x^{1\,2} + x^{2\,2} + x^{3\,2}) + x^{4\,2}$$

setzt. Das Zeichen + gilt dabei für die elliptische, — für die hyperbolische Geometrie. Das absolute Gebilde ist in ersterer eine imaginäre, in letzterer eine reelle Kugel. Rechnet man ähnlich wie oben, d. h. nach Formel (98) oder (98a), diese Maßbestimmung auf unendlich kleine Strecken um, so findet man

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 \pm k[(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2]}{[1 \pm k(x^2 + y^2 + z^2)]^2}. \quad (105)$$

Ebenso gilt die Maßbestimmung (103) oder (103 a) für den Winkel, nur daß dieser hier zwischen zwei Ebenen liegt. Denn die homogenen Koordinaten u^i bestimmen hier Ebenen.

Die geodätischen Linien sind auch hier Gerade, denn in jeder Ebene des Raumes gilt eine der oben betrachteten Geometrien. Jedes

Flächenelement hat daher das Gaußsche Krümmungsmaß k, gleichgültig, an welcher Stelle des Baumes und in welcher Lage es sich befindet *). Die Geraden der elliptischen Geometrie haben alle die gleiche Länge $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, die der hyperbolischen sind unendlich lang. In ersterer gibt es keine, in letzterer in jedem Punkt zu jeder Geraden zwei Parallele, welche die ersten im Unendlichen unter dem Winkel Null schneiden. Ähnlichkeit zwischen Figuren verschiedenen Inhalts gibt es nicht, wohl aber bestehen Kongruenzsätze.

Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir die lineare Substitution

$$x'^i = \sum_k \alpha_k^i x^k.$$

Da es nur auf die Verhältnisse der vier homogenen Koordinaten x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 ankommt, ist ein gemeinsamer Faktor in ihren 16 Koeffizienten ohne Bedeutung, so daß es eine 15fache unendliche Schar derartiger Substitutionen gibt. Andererseits gibt es eine 9fache unendliche Schar von Flächen zweiter Ordnung. Denn in den 10 Koeffizienten, welche die homogene Form $\Omega(x^2)$ im allgemeinen enthält, ist wieder ein gemeinsamer Faktor ohne Bedeutung. Nun bestimmen wir die Koeffizienten jener Substitution so, daß das absolute Gebilde dabei in sich selbst überführt wird, d. h. daß $\Omega(x'^2) = \lambda\,\Omega(x^2)$ ist. Dann behalten wir noch sechs Freiheitsgrade. Und jede der so bestimmten Substitutionen stellt eine Transformation des Innern des absoluten Kegelschnitts in sich selbst, also eine Bewegung aller in ihm liegenden Figuren dar. Dabei geht aber jede Gerade wieder in eine Gerade über und Doppelverhältnisse zwischen vier Punkten bleiben erhalten, also auch die Längen aller Strecken. Somit geschieht diese Bewegung ohne Formänderung, jede Figur wird in eine ihr kongruente überführt; wie im euklidischen Raum hat jede Bewegung ohne Formänderung noch sechs Freiheitsgrade.

Ob wir als absolutes Gebilde eine Kugel oder eine andere Fläche zweiter Ordnung betrachten, ist im Grunde gleichgültig und betrifft nur die Deutung der Hilfskoordinaten *x, y, z*. Nur muß diese Fläche im elliptischen Fall immer imaginär, im hyperbolischen stets reell sein.

Setzt man

$$x = x^1,\ y = x^2,\ z = x^3 \quad \text{und} \quad x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} = r^2,$$

*) Vgl. Anhang IV.

so kann man die Maßbestimmung (105) in die oft vorkommende Form bringen:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \left(\frac{\delta_k^i}{1 \pm kr^2} \mp \frac{k x^i x^k}{(1 \pm kr^2)^2} \right) dx^i dx^k. \quad \ldots \quad (105')$$

Wir beschäftigen uns noch mit der Maßbestimmung (105) mit dem positiven Vorzeichen, die, wie gesagt, für die elliptische Geometrie in drei Dimensionen gilt. Die Substitution

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{k}} tg\,\Theta \cos\vartheta, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{k}} tg\,\Theta \sin\vartheta \cos\varphi, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{k}} tg\,\Theta \sin\vartheta \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (106'')$$

macht daraus vermöge derselben Rechnung, welche in § 12 die beiden Formen der Maßbestimmung (93) ineinander überführte:

$$ds^2 = \frac{1}{k} [d\Theta^2 + \sin^2\Theta (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)]. \quad \ldots \quad (105a)$$

Dieselbe Gleichung findet man aber, wenn man von der vierdimensionalen euklidischen Maßbestimmung

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dU^2$$

ausgehend

$$X = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\Theta \cos\vartheta, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\Theta \sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\Theta \sin\vartheta \sin\varphi, \quad U = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos\Theta$$

setzt. Da nach den letzten Formeln zwischen X, Y, Z und U die Beziehung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 = \frac{1}{k}$$

besteht, so gilt der Satz: Die elliptische-Geometrie des Baumes ist dieselbe wie die in einem dreidimensionalen Eugelraum vom Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{k}}$, der in einer vierdimensionalen euklidischen Mannigfaltigkeit eingebettet ist. Es liegt hierin eine Ausnahme von der Regel, daß man einen dreidimensionalen, nichteuklidischen Raum erst dann in eine euklidische Mannigfaltigkeit

einbetten kann, wenn man letzterer sechs Dimensionen gibt (§ 6, g). Nur in den Zusammenhangsverhältnissen unterscheidet sich der elliptische vom Kugelraum in der gleichen Art, wie die elliptische Ebene von der Kugelfläche.

Die Determinante des in (105 a) auftretenden Maßtensors ist gleich

$$\frac{1}{k^6}\ \sin^4\Theta\ \sin^2\vartheta.$$

Nach § 6, d) ist infolgedessen die Größe des Volumenelementes

$$\frac{1}{k^{3/2}}\ \sin^2\Theta\ \sin\vartheta\ d\Theta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Um den ganzen Raum auszuwerten, der sich von dem Punkt $\Theta = 0$ aus bis zur Fläche $\Theta = \Theta_a$ erstreckt, haben wir hier nach φ von 0 bis 2π, nach ϑ von 0 bis π und nach Θ von 0 bis Θ_a zu integrieren. Das liefert für das Volumen dieser „Kugelkalotte"

$$\frac{2\pi}{k^{3/2}}\left(\Theta_a - \frac{1}{2}\sin 2\Theta_a\right) \quad \ldots\ldots \quad (106\,b)$$

Das Volumen des ganzen Kugelraumes erhält man daraus, indem man $\Theta_a = \pi$ z t :

$$\frac{2\pi^2}{k^{3/2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105c)$$

Für einen Kaum mit der Maßbestimmung (105 a) brauchen wir später den Krümmungstensor. Aus dem Variationsprinzip

$$\delta\int[\dot\Theta^2 + \sin^2\Theta\,(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2)]\,dp = 0$$

und den Lagrangeschen Gleichungen, denen man die Form

$$\begin{aligned}
&\ddot\Theta - \sin\Theta\cos\Theta\,(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2) = 0,\\
&\ddot\vartheta + 2\,\mathrm{cotg}\,\Theta\,.\,\dot\Theta\,\dot\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta\,.\,\dot\varphi^2 = 0,\\
&\ddot\varphi + 2\,\mathrm{cotg}\,\Theta\,.\,\dot\Theta\,\dot\varphi + 2\,\mathrm{cotg}\,\vartheta\,.\,\dot\vartheta\,\dot\varphi = 0
\end{aligned}$$

geben kann*), entnimmt man die folgende Tabelle der Drei-Zeiger-symbole, in welcher aber die identisch verschwindenden nicht auf-

*) Eine Lösung dieser Gleichungen lautet: $\vartheta = conti$, $\varphi = const$, $\Theta = p/A$. Die Verhältnisse $x : y : 8$ sind dann nach (105") konstant, und dies beweist, daß die „Geraden" durch den Nullpunkt geodätische Linien sind. Da der Nullpunkt beliebig gewählt ist, gilt dies für jede „Gerade", wie wir oben im Text erwähnten. Vgl. auch die Anmerkung auf S. 118.

geführt sind; dabei entspricht die Ziffer 1 dem Θ, 2 dem ϑ und 3 dem φ:

$$\left.\begin{array}{ll} \left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\} = -\frac{1}{2}\sin 2\Theta & \left\{\begin{smallmatrix}3&3\\1\end{smallmatrix}\right\} = -\frac{1}{2}\sin 2\Theta\sin^2\vartheta \\ \left\{\begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}\right\} = \operatorname{cotg}\Theta & \left\{\begin{smallmatrix}3&3\\2\end{smallmatrix}\right\} = -\frac{1}{2}\sin 2\vartheta \\ \left\{\begin{smallmatrix}1&3\\3\end{smallmatrix}\right\} = \operatorname{cotg}\Theta & \left\{\begin{smallmatrix}2&3\\3\end{smallmatrix}\right\} = \operatorname{cotg}\vartheta \end{array}\right\} \quad (105\ \text{d})$$

Berechnen wir nun nach (80) die $R_{kl,}$ so finden wir die folgenden Ausdrücke für sie, wobei wir aber alle Summanden fortlassen, die sich entweder gegenseitig vernichten oder einzeln für sich verschwinden:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial}{\partial\Theta}\left\{\begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}\right\} + \frac{\partial}{\partial\Theta}\left\{\begin{smallmatrix}1&3\\3\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}1&3\\3\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}1&3\\3\end{smallmatrix}\right\} \\ &= -\frac{1}{\sin^2\Theta} - \frac{1}{\sin^2\Theta} + \operatorname{cotg}^2\Theta + \operatorname{cotg}^2\Theta = -2 \\ R_{22} &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\begin{smallmatrix}2&3\\3\end{smallmatrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial\Theta}\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}1&3\\3\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}2&1\\2\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}2&3\\3\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}2&3\\3\end{smallmatrix}\right\} \\ &= -\frac{1}{\sin^2\vartheta} + \cos 2\Theta + \cos^2\Theta - \cos^2\Theta + \operatorname{cotg}^2\vartheta \\ &= -2\sin^2\Theta \\ R_{33} &= -\frac{\partial}{\partial\Theta}\left\{\begin{smallmatrix}3&3\\1\end{smallmatrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\begin{smallmatrix}3&3\\2\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}3&3\\1\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}3&1\\3\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}3&3\\1\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}3&2\\3\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}3&3\\2\end{smallmatrix}\right\} \\ &= \cos 2\Theta\sin^2\vartheta + \cos 2\vartheta + \cos^2\Theta\sin^2\vartheta - \cos^2\Theta\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta \\ &= -2\sin^2\Theta\sin^2\vartheta \\ R_{23} &= R_{31} = R_{12} = 0. \end{aligned}$$

Da aber nach (105a)

$$g_{11} = \frac{1}{k},\quad g_{22} = \frac{\sin^2\Theta}{k},\quad g_{33} = \frac{\sin^2\Theta\sin^2\vartheta}{k},\quad g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$$

ist, besteht zwischen dem Maß- und dem Krümmungstensor der Zusammenhang:

$$R_{\alpha\beta} = -2k\,g_{\alpha\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105\,e)$$

woraus dann weiter nach (81) und (20a) wegen $n = 3$ folgt

$$R = -6k, \quad R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}R\cdot g_{\alpha\beta} = k\,g_{\alpha\beta}. \quad \ldots \quad (105\,f)$$

Dasselbe Ergebnis findet sich auf anderem Wege in Anhang IV abgeleitet. Es hätte sich auch, nur mit mehr Rechnung, aus der Maßbestimmung (105) ableiten lassen, in welcher der Vorzeichenwechsel am k den Übergang von der elliptischen zur hyperbolischen Geometrie bewirkt. Für die letztere *gilt* also:

$$R_{\alpha\beta} = +2k\,g_{\alpha\beta}.$$

V. Die Grundgesetze der Physik in der allgemeinen Relativitätstheorie.

§ 14. Allgemeine Bemerkungen.

Die mathematischen Hilfsmittel von Teil III verwenden wir jetzt, um die grundlegenden physikalischen Gesetze in Form von Differentialgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie anzupassen. Wir suchen sie dabei als Gleichungen für Welttensoren zu schreiben. Doch wollen wir sogleich bemerken, daß uns dies im Gegensatz zur besonderen Relativitätstheorie nicht durchgängig gelingt. Immerhin wird man auch bei diesen Abweichungen aus der Ableitung ersehen, daß wir keine beschränkende Annahme über das Bezugssystem einführen. Zunächst seien einige allgemeine Bemerkungen gemacht.

Wir setzen als Fundamentalform der Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad \ldots\ldots \quad (106)$$

an; mit negativem g_{44}. Unter $t = \frac{x^4}{c}$ verstehen wir stets die für das betreffende Koordinatensystem gültige Zeit, wobei wir aber keineswegs an die übliche, in Sekunden zu messende Größe zu denken brauchen, sondern diese noch mit irgendwelchen Faktoren von physikalischen Dimensionen multipliziert denken können, c soll immer der Normalwert der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, also 3.10^{10}cm/sec sein. Zum Grenzfall der besonderen Relativitätstheorie führt es, wenn wir $g_{44} = -1$, die anderen $g_{ii} = +1$, die *gut* mit verschiedenen Zeigern als Null annehmen.

Sodann wollen wir uns über die Dimensionen der vorkommenden Größen verständigen. Es entspricht der Allgemeinheit der Koordinatenwahl, wenn wir jeder Koordinate x^i eine eigene Dimension X_i geben, desgleichen dem ds eine eigene Dimension s. Dann gilt die folgende Tabelle:

$$\left.\begin{aligned} &[g_{ik}] = s^2 (X_i X_k)^{-1}, \left[\left\{ {i\ k \atop l} \right\}\right] = (X_i X_k)^{-1} X_l, [R_{ik}] = (X_i X_k)^{-1}, \\ &[g^{ik}] = s^{-2} X_i X_k, [R_{iklm}] = s^2 (X_i X_k X_l X_m)^{-1}, \quad [R] = s^{-2}. \end{aligned}\right\} \quad (106a)$$

[Vgl. hierin die Formeln (53) und (54), (79), (80) und (81).] Für die Komponenten jedes Welttensors besteht die Regel, daß für jeden oberen Zeiger i in ihren Dimensionen $s^{-1}X^i$, für jeden unteren Zeiger Je aber $s^1X_k^{-1}$ auftritt. Denn nach (32) bzw. (40 b) entspricht jedem oberen Zeiger bei der Herleitung aus gemischten Komponenten ein Faktor g^{ik}, jedem unteren ein Faktor g_{ik}. Von den Dimensionen der Masse, Länge, Zeit und Temperatur können sie noch in irgend einer Art abhängen; wie, findet man am einfachsten durch Betrachtung solcher gemischten Komponenten, welche dieselben Zeiger oben- und unten tragen (z. B. T_i^k); diese sind von den Dimensionen X_i nämlich unabhängig. Skalare, also auch alle universellen Konstanten, haben mit den Dimensionen X_i nichts zu tun, wohl aber können sie noch von der Dimension s abhängen; dies gilt z. B. von den Konstanten x in der Grundgleichung (144) des Schwerefeldes.

Wir wollen übrigens im folgenden die Allgemeinheit dadurch ein wenig beschränken, daß wir ds und x^4 als Länge betrachten ($s = l$). Dann werden g_{44} und g^{44} reine Zahlen.

Nach diesen formalen Bemerkungen wollen wir zunächst die Betrachtungen von Teil II vertiefen. Zunächst besteht ein inniger Zusammenhang zwischen der Gleichberechtigung aller den Einschränkungen (10) genügenden Koordinatensysteme und der nichteuklidischen Natur der Maßbestimmung(106). Wäre diese euklidisch, d.h. verschwände der Riemann-Christoffelsche Tensor innerhalb der ganzen „Welt", so könnten wir durch Transformation der Koordinaten die Form

$$ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} - dx^{4^2} \qquad (107)$$

überall gültig machen, die sich so durch Einfachheit hervortut, daß die Gruppe von Koordinatensystemen, für die sie gilt, vor allen anderen bevorzugt wäre. Man käme somit zur beschränkten Relativitätstheorie zurück. Die euklidische Maßbestimmung nimmt eine dem allgemeinen Relativitätsprinzip widersprechende Ausnahmestellung ein.

Wenn nun die Maßbestimmung (106) nicht-euklidisch ist, so gibt es nach § 8 keine in ähnlicher Weise ausgezeichneten Systeme für endliche Bereiche, denn auch die Riemannsehen Koordinaten haben ihre ausgezeichneten Eigenschaften nur in bezug auf einen Weltpunkt P. Wohl aber gibt es für P geodätische Koordinaten, für die in P die g_{ik} in erster Näherung konstant sind; wir dürfen sie überdies als in P rechtwinkelig betrachten. In ihnen gilt

die Maßbestimmung (107) wenigstens in erster Näherung für die Umgebung von P, und es spielt sich somit, bezogen auf ein solches System, alles so ab, wie wir es aus der beschränkten Relativitätstheorie kennen. Z. B. sind die Weltlinien eines Lichtstrahls und eines frei beweglichen Massenpunktes durch lineare Beziehungen zwischen den Koordinaten gegeben. Gleichung (66 d), welche den Übergang von den beliebigen Koordinaten x'^i zu den geodätischen x^i darstellt, zeigt durch das rechts auftretende Glied mit $x'^k x'^l$, daß sich beide Systeme gegeneinander in beschleunigter Bewegung befinden.

Das steht in vollem Einklang zu Einsteins Äquivalenzprinzip (§ 3). Der Kasten, in welchem man das Fallen aller Körper beobachten kann, ruht nämlich im System x'^i. Diese Beobachtung läßt sich erklären entweder aus der Beschleunigung des Systems x'^i gegen das System x^i, in welchem für den betrachteten Raum- und Zeitbereich die *gik* die aus der beschränkten Relativitätstheorie bekannten Werte in erster Näherung unveränderlich bewahren, oder aus der Veränderlichkeit der g'_{ik} im System x'^i; denn diese Veränderlichkeit kennzeichnet, wie wir jetzt immer mehr sehen werden, ein Schwerefeld. Beide Erklärungen sind so gleichwertig, wie die beiden Koordinatensysteme. Jeder Fahrstuhl, der sich von seiner Aufhängung gelöst hat und nun frei herunterstürzt, jeder Planetoid im Sonnensystem, sofern er nicht zu groß ist, stellt ein geodätisches Koordinatensystem dar. Bei einem Körper von der Ausdehnung der Erde zeigen freilich Ebbe und Flut, daß das vereinigte Schwerefeld von Sonne und Mond in ihm nicht mehr homogen ist, daß er also nicht mehr ganz in den Bereich eines geodätischen Systems hineinpaßt.

Zugleich zeigt diese Betrachtung den Wert, welche die beschränkte Relativitätstheorie auch jetzt bewahrt. Sie gilt für jeden Weltpunkt innerhalb eines hinreichend kleinen Raum-Zeit-Bereichs, bezogen auf eins der für ihn geodätischen und rechtwinkligen Systeme*). Diese hängen untereinander zusammen durch Transformationen, welche die Maßbestimmung (107) invariant lassen und nach (66) bis auf Glieder dritter Qrdnung linear sind, also im Punkt *P* Lorentztransformationen darstellen.

Wir nehmen nun zwei materielle Punkte *A* und *B* an, welche, wenigstens im betrachteten Augenblick, relativ zueinander ruhen und sich unendlich nahe sind. Dies bedeutet, daß in der Nähe eines Weltpunktes *P* die Richtung der Weltlinie von *B* aus der Richtung

*) Diesen Sachverhalt meint Mie, wenn er von der Relativität des Schwerepotentials spricht.

der Weltlinie von A durch eine Parallelverschiebung längs einer zu ihr senkrechten Strecke hervorgeht. Dann gibt es ein für P geodätisches und rechtwinkliges System x^i in welchem die Zeitachse zu den beiden Weltlinien parallel ist. Ein Maßstab, welcher relativ zu A und B ruht und daher ihren räumlichen Abstand mißt, ist durch eine Strecke des Raumes $x^4 = 0$ dargestellt; dieser Abstand ist also gleich der natürlich gemessenen Länge des senkrechten Abstandes ihrer Weltlinien. Die Zunahme der Eigenzeit auf einer der Weltlinien ist einfach dx^4. Daraus folgt, ganz wie in der beschränkten Relativitätstheorie, daß die Messung der Lichtgeschwindigkeit mittels eines Lichtsignals, das von einer Uhr zu einem gegen sie ruhenden Spiegel und zurück läuft, wenn man sie aus der (unendlich kleinen) räumlichen Entfernung und der Zunahme der Eigenzeit der Uhr zwischen Abgang und Ankunft bestimmt, einfach zum Wert c führt. Wie auch die Maßbestimmung (106) beschaffen sein mag, c ist für jeden Weltpunkt der natürlich gemessene Wert der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum.

Für die räumliche Messung folgt daraus: Es sei für ein beliebiges System x^i die Maßbestimmung (106) gegeben. Für einen Massenpunkt, der in diesem System ruht, gilt dann für das Element der $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$. Weist der Vektor dx^i von ihr zu einer ihr parallelen Weltlinie, welche also einem zum ersten ruhenden Körper zugehört, und zwar von einem beliebigen Punkt der einen zu einem beliebigen Punkt der anderen, so sind

$$\Delta x^i = \delta x^i \,(i = 1, 2, 3), \quad \Delta x^4 = -\frac{1}{g_{44}} \sum_{k=1}^{3} g_{k4}\, \delta x^k$$

die Komponenten eines Vektors, welcher auf den Weltlinien senkrecht steht; denn es verschwindet das skalare Produkt:

$$\sum_{ik} g_{ik}\, \Delta x^i dx^k = dx^4 \left(\sum_{i=1}^{3} g_{i4}\, \Delta x^i + g_{44}\, \Delta x^4 \right).$$

In natürlicher Messung gilt somit für den räumlichen Abstand der beiden Körper:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 = \sum_{ik} g_{ik} \Delta x^i \Delta x^k = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \delta x^i \delta x^k - \frac{1}{g_{44}} \left(\sum_{i=1}^{3} g_{i4} \delta x^i \right)^2 \\ = \frac{1}{g_{44}} \sum_{i,k=1}^{3} (g_{ik} g_{44} - g_{i4} g_{k4}) \delta x^i \delta x^k. \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

Gehen wir z. B. in einem schwerefreien Weltbereich mit der euklidischen Maßbestimmung (107) durch die Transformation *c*

$$x^1 = r\cos(\vartheta + \omega t),\ x^2 = r\sin(\vartheta + \omega t),\ x^3 = s,\ x^4 = ct, \quad (109)$$

also

$$dx^1 = dr\,.\cos(\vartheta + \omega t) - r\sin(\vartheta + \omega t)(d\vartheta + \omega\, dt),$$
$$dx^2 = dr\,.\sin(\vartheta + \omega t) + r\cos(\vartheta + \omega t)(d\vartheta + \omega\, dt)$$

zu dem gegen das erste rotierenden Koordinatensystem r, ϑ, s, t über, so finden wir:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + ds^2 + 2r^2\omega\, d\vartheta\, dt - (c^2 - \omega^2 r^2)dt^2. \quad (109a)$$

Der räumliche Abstand zweier in diesem System ruhenden Massenpunkte ist nach (108) bestimmt durch die Gleichung:

$$. \quad da^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\vartheta^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} + ds^2. \quad . \qquad (109b)$$

Er stimmt überein mit dem Abstand zweier im System x^i ruhenden Punkte, wenn er die Richtung der Drehachse z oder des Radiusvektors *r* hat. Ein Maßstab aber, der in der Ebene der Drehung zum Radiusvektor senkrecht liegt, zeigt statt der Länge $r\,d\vartheta$ eines in x^i ruhenden Maßstabes die größere Länge $r\,d\vartheta : \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$. Der Unterschied beruht auf der Lorentzkontraktion; denn bringen wir einen Maßstab aus dem Ruhezustand in dem System x^i in den Ruhezustand in dem System r, ϑ_1, z, *t*, so verkürzt er sich um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$, seine Angaben für gleiches *d* werden also entsprechend vergrößert. Das stimmt zu der Betrachtung von S. 25 und 26. Im allgemeinen aber beweist Gleichung (108): Um zur Geometrie im Streckenraum x^4 = *const* zu gelangen, darf man nicht einfach in (106) $dx^4 = 0$ setzen; das ist nur zulässig, wenn die Bedingungen (49)

$$gu = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3$$

erfüllt sind, d. h. wenn die Zeitachse auf dem Streckenraum senkrecht steht.

Wir beschäftigen uns im folgenden vorzugsweise, wenn auch nicht ausschließlich, mit Systemen, welche diese Bedingungen erfüllen. Für sie untersuchen wir die Lichtausbreitung. Wie wir in § 15, b) aus den Maxwellschen Gleichungen ableiten werden, ist diese durch geodätische Nullinien dargestellt. - Schon hier werden wir das erwarten, weil es für die nächste Umgebung jedes Weltpunktes nach

der beschränkten Relativitätstheorie für eins der in ihm geodätischen und rechtwinkligen Koordinatensysteme gilt, und weil diese Linien in ihrer Bedeutung vom System unabhängig sind. Wegen (49) können wir für (106) aber schreiben:

$$d\sigma^2 = da^2 + g_{44}\, dx^{4^2}.$$

Setzen wir dies gleich Null, so folgt:

$$V = \frac{da}{dt} = c\,\frac{da}{dx^4} = c\sqrt{-g_{44}}. \quad \ldots \quad (110)$$

Dies ist die Lichtgeschwindigkeit; zwar nicht in dem natürlichen, an Ort und Stelle mit Uhr und Maßstab zu bestimmenden Wert, aber doch unter Umständen in einer guten physikalischen Bedeutung. Im statischen Schwerefeld nämlich übertragen die Lichtwellen mit ihrer in bezug auf die Zeitvariable $x^4 = et$ konstanten Periode dies Zeitmaß t von einem Ort zum anderen [vgl. § 18 e)]. Man kann dann beobachten, wieweit sich in einer bestimmten Zeit t das Licht von einem beliebig weit entfernten Raumpunkt aus fortpflanzt; so mißt man F. Auch beeinflußt die Veränderlichkeit von g_{44} die räumliche Gestalt der Strahlen [Gleichung (157)].

Gelten die Gleichungen (49) nicht, so wird die Lichtgeschwindigkeit noch abhängig von der Strahlrichtung, was man sich auch aus dem Beispiel des rotierenden Systems r, ϑ, t von (109) leicht anschaulich macht.

Für das Element der Weltlinie eines Körpers ist $dr^2 = -ds^2$ positiv und t die Eigenzeit. Bilden wir ganz wie in Bd. I den Vektor der Vierergeschwindigkeit

$$Y^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad \ldots \quad (110a)$$

so gilt wegen

$$d\tau^2 = -\sum_{ik} g_{ik}\, dx^i dx^k \quad \ldots \quad (110a')$$

die Gleichung

$$\sum_{ik} g^{ik} Y^i Y^k = -1; \quad \ldots \quad (110b)$$

Y ist somit ein zeitartiger Einheitsvektor. Für Koordinatensysteme, welche der Bedingung (49) gehorchen, finden wir daraus den Raumvektor der Geschwindigkeit gemäß den Gleichungen:

$$q^i = \frac{dx^i}{dt} = c\,\frac{dx^i}{dx^4} = c\,\frac{Y^i}{Y^4} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \ldots \quad (110c)$$

Dann ist sein absoluter Betrag, dessen Quadrat durch

$$q^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} q^i q^k = -\frac{c^2}{Y^4}(g_{44} Y^2 + 1) \quad . \; . \; (110c')$$

gegeben ist, der Quotient aus dem natürlich gemessenen Streckenelement *da* und der Durchlaufszeit *dt*. Da *dt* nicht die Eigenzeit einer am gleichen Ort ruhenden Uhr darstellt, so ist auch *q* nicht die in natürlichem Maße gemessene Geschwindigkeit. Sie entspricht darin durchaus der Lichtgeschwindigkeit $V = c\sqrt{-g_{44}}$; wohl aber hat der Quotient q/V, aus welchem das Zeitmaß fortfällt, eine Bedeutung für die natürliche Messung, und daraus sehen wir nach (110), daß man $q/\sqrt{-g_{44}}$ als den Betrag $q^i/\sqrt{-g_{44}}$ l s die Komponenten der natürlich gemessenen Geschwindigkeit zu bezeichnen hat. Die Auflösung von (110c) nach den Y^i ergibt wegen (110c')-:

$$\left.\begin{aligned} Y^i &= \frac{q^i}{\sqrt{c^2(-g_{44}) - q^2}} = \frac{q^i/\sqrt{-g_{44}}}{\sqrt{c^2 - q^2/(-g_{44})}} \text{ für } i = 1, 2, 3, \\ Y^4 &= \frac{c}{\sqrt{c^2(-g_{44}) - q^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (110d)$$

Zwischen der Y^i und den Komponenten der natürlich gemessenen Geschwindigkeit besteht also derselbe Zusammenhang, wie in der beschränkten Relativitätstheorie.

Unter einem Ruhsystem eines materiellen Punktes *(K)* verstehen wir ein Koordinatensystem, in welchem einerseits

$$\mathring{g}_{i4} = 0 \text{ für } i = 1, 2, 3,$$

andererseits für den betreffenden Massenpunkt

$$\mathring{Y}^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist. In ihm verschwindet die Geschwindigkeit q^i des Massenpunktes, es ist nach (110 b) und (21)

$$\left.\begin{aligned} \mathring{Y}^4 &= \frac{1}{\sqrt{-\mathring{g}_{44}}} = \sqrt{-\mathring{g}^{44}}, \quad \mathring{Y}_4 = \frac{-1}{\sqrt{-\mathring{g}^{44}}} = -\sqrt{-\mathring{g}_{44}} \\ \mathring{Y}_i &= 0 \text{ für } i = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \quad (110e)$$

Es gibt aber für denselben Massenpunkt und denselben Augenblick noch unendlich viele Ruhsysteme. Darunter befindet sich auch ein geodätisches Ruhsystem, nämlich dasjenige rechtwinkelige geodätische System für den betreffenden Weltpunkt, in welchem die

Geschwindigkeit $q^i = 0$ ist. Da alle rechtwinkeligen geodätischen Systeme des gleichen Weltpunktes sich durch Lorentztransformationen ineinander überführen lassen, so gibt es stets ein geodätisches Ruhsystem. Auf dies beziehen sich die Begriffe Kuhmasse *(m)* und Rühdichte (μ), von denen in § 16 die Rede sein wird.

Ein freier, d. h. nach § 3, ein frei fallender Körper hat gegen keins der geodätischen Koordinatensysteme eine Beschleunigung, da in diesen die Schwerkraft verschwindet. Gegen sein geodätisches Ruh System hat er infolgedessen nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Beschleunigung Null.

§ 15. Das elektromagnetische Feld.

a) Die Maxwellschen Gleichungen. Unter allen Gebieten der Physik läßt sich die Elektrodynamik am einfachsten auf die allgemeine Relativitätstheorie übertragen. Man kann alle ihre Grundgleichungen ohne oder mit geringer Veränderung aus Bd. I übernehmen.

Die Grundgleichungen für die Elektrodynamik der Körper haben wir in Bd. I am Ende von § 22 in den Formeln (XVII) bis (XX) und in (XXIII) zusammengestellt. Die beiden ersten davon brauchen wir nur insofern abzuändern, als wir hier in § 9, Gleichung (74 b), die Operation $\varrho o v \mathfrak{M}$ statt $\Delta i v \mathfrak{M}^*$ eingeführt haben. Wir setzen also:

$$\left.\begin{aligned} \varrho o v \mathfrak{M} &= 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0; \\ \Delta i v \mathfrak{B} &= P \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, \mathfrak{B}^{ik})}{\partial x^k} = P^i. \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Nach (73d) ist P dann ein Viervektor; wir können ihn ähnlich wie früher als Vi er er ström bezeichnen und seine kontravarianten Komponenten entsprechend Gl. (235) in Bd. I mit dem Leitungsstrom der elektrischen Raumdichte *Q* und der Geschwindigkeit q in die Beziehungen setzen:

$$P^1 = \frac{1}{c}(\mathfrak{J}^1 + \varrho q^1)\sqrt{-g^{44}}, \quad \cdots, \quad P^4 = \varrho \sqrt{-g^{44}}. \quad . \quad . \quad (112)$$

Den Sechservektor $\mathfrak{M}$ des Feldes und den der Verschiebung, $\mathfrak{B}$, werden wir dann aus der elektrischen Feldstärke und Verschiebung,

den Raumvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, sowie aus den entsprechenden magnetischen Vdktoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, in der folgenden Art abzuleiten haben:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_{14} = \mathfrak{E}_1, \qquad \mathfrak{M}_{24} = \mathfrak{E}_2, \qquad \mathfrak{M}_{34} = \mathfrak{E}_3,\\
&\mathfrak{M}_{23} = \mathfrak{B}_{23}, \qquad \mathfrak{M}_{31} = \mathfrak{B}_{31}, \qquad \mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{B}_{12},\\
&\mathfrak{P}^{14} = -\sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{D}^1, \quad \mathfrak{P}^{24} = -\sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{D}^2, \quad \mathfrak{P}^{34} = -\sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{D}^3,\\
&\mathfrak{P}^{23} = \sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{H}^{23}, \quad \mathfrak{P}^{31} = \sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{H}^{31}, \quad \mathfrak{P}^{12} = \sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{H}^{12}.
\end{aligned}\right\} \quad (113)$$

Dabei kommt dann der schon längst bekannte, aber bei der ausschließlichen Verwendung orthogonaler Koordinaten in euklidischen Räumen verwischte Unterschied zwischen der physikalischen Natur der elektrischen und magnetischen Vektoren zum Ausdruck. Erstere sind nach § 6, h) richtige (Strecken- oder polare) Vektoren, letztere hingegen antisymmetrische Tensoren zweiten Banges oder Flächenvektoren. In der Tat nehmen bei dieser Deutung von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$ und P die Grundgleichungen (111) die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial x^3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}_{23}}{\partial t}\\
&\qquad \text{usw.;}\\
&\frac{\partial \mathfrak{B}_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathfrak{B}_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathfrak{B}_{12}}{\partial x^3} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g g^{44}}\,\mathfrak{H}^{12}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g g^{44}}\,\mathfrak{H}^{13}\right)\\
&\qquad = \frac{1}{c}\left\{\sqrt{g g^{44}}\,(\mathfrak{J}^1 + \varrho\, q^1) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g g^{44}}\,\mathfrak{D}^1\right)\right\}\\
&\qquad \text{usw.,}\\
&\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g g^{44}}\,\mathfrak{D}^1\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g g^{44}}\,\mathfrak{D}^2\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g g^{44}}\,\mathfrak{D}^3\right)\\
&\qquad = \sqrt{g g^{44}}\,\varrho.
\end{aligned}\right\} \quad (114)$$

gg^{44} ist die Determinante aus denjenigen g_{ik}, welche den Zeiger 4 nicht tragen; diese Größe spielt für den dreidimensionalen Streckenraum, dieselbe Rolle wie $-g$ für die vierdimerisionale Welt. In sinngemäßer Übertragung der Begriffe, die wir in § 9 für letztere

eingeführt haben, auf den Streckenraum können wir die letzten Gleichungen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} rot\,\mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \qquad \varrho o r\,\mathfrak{B} = 0 \\ div\,\mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\left[\mathfrak{J} + \varrho q + \frac{1}{\sqrt{g g^{44}}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g g^{44}}\,\mathfrak{D}\right)\right] \\ & \qquad div\,\mathfrak{D} = \varrho\,. \end{aligned}\right\} \qquad (114a)$$

Dabei ist $\varrho o r\,\mathfrak{B}$ der in (74 b) definierte vollständig antisymmetrische Tensor dritter Ordnung mit der einzigen kovarianten Komponente $\mathfrak{B}$.

Ist die „Welt" pseudoeuklidisch, so können wir (114a) durch Einführung rechtwinkeliger Koordinaten ohne weiteres in die Maxwell sehen Gleichungen überführen. Denn der Streckenvektor bin $\mathfrak{H}$, definiert durch die (übertragene) Formel (73d), ist dasselbe, was man gewöhnlich, wenn man $\mathfrak{H}$ nicht als Flächenvektor kennzeichnet, als *rot* $\mathfrak{H}$ schreibt, und $\varrho o r\,\mathfrak{B}$ geht dabei in den Pseudoskalar *div* $\mathfrak{B}$ über.

Wir führen nun das Ruhsystem *K*- des betrachteten Körperelements ein. (Vgl § 14, Schluß.) Nach (112) stellt $\frac{1}{c}\sqrt{-\mathring{g}^{44}}\,\mathring{\mathfrak{J}}$ in ihm die räumlichen Komponenten des Viererstroms *P* dar, so daß nach (49b)

$$\mathring{P}_i + (\mathring{Y}\mathring{P})\,\mathring{Y}_i = \frac{1}{c}\sqrt{-\mathring{g}^{44}}\,\mathring{\mathfrak{J}}$$

ist. Nach (49 V) und (113) aber ist

$$\sum_k \mathring{Y}^k \mathring{\mathfrak{M}}_{ik} = \begin{cases} \mathring{\mathfrak{E}}_i \cdot \mathring{Y}^4 & \text{für } i = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{„ } i = 4. \end{cases}$$

Die Vektorgleichung

$$P_i + (YP)\,Y_i = \frac{\sigma}{c}\sum Y^k \mathfrak{M}_{ik} \qquad (118)$$

ist somit in *K* für $i = 4$ identisch erfüllt, indem beiderseits Null herauskommt; sonst liefert sie, wenn man nach (110e) Y^4 durch $\sqrt{-\mathring{g}^{44}}$ ersetzt:

$$\mathring{\mathfrak{J}}_i = \sigma\,\mathring{\mathfrak{E}}_i.$$

Dies aber ist die bekannte Beziehung der Maxwell sehen Theorie für ruhende Körper; σ bedeutet die Leitfähigkeit Somit ist die Richtigkeit von (115) erwiesen.

Aus (113) schließen wir weiter:

$$\mathfrak{B}_{ik} = \sum_{kl} \mathring{g}_{ik}\mathring{g}_{kl}\mathfrak{B}^{kl} = \mathring{g}_{44}\sum_{k}\mathring{g}_{ik}\mathfrak{B}^{k4} = -\mathring{g}_{44}\sqrt{-\mathring{g}^{44}}\sum_{k}\mathring{g}_{ik}\mathfrak{D}^{k}.$$

Es gilt also wegen $\mathring{g}_{44} = \frac{1}{\mathring{g}^{44}}$

$$\mathfrak{B}_{ik} = \sqrt{-\mathring{g}_{44}}\,\mathfrak{D}_{i}.$$

Nach (49 b') schließen wir, wie oben:

$$\sum_{k}\mathring{Y}^{k}\mathfrak{B}_{ik} = \begin{matrix}\sqrt{-\mathring{g}_{44}}\,\mathfrak{D}_{i}\,.\,\mathring{Y}^{4} = \mathfrak{D}_{i} \text{ für } i = 1, 2, 3\\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad ,, \; i = 4.\end{matrix}$$

Die Vektorgleichung

$$\sum_{k} Y^{k}\mathfrak{B}_{ik} = \varepsilon\sum_{k} Y^{k}\mathfrak{M}_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

ist also richtig, sofern dies für die Gleichung

$$\mathfrak{D}_{i} = \varepsilon\sqrt{-\mathring{g}^{44}}\,\mathfrak{E}_{i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116\,a)$$

zutrifft. Diese aber ist uns für Koordinatensysteme, in denen $g^{44} = -1$, und für ruhende Körper wohl bekannt. Nach (49 d) und (49 e), sowie nach (113) ist schließlich:

$$\mathfrak{M}_{ik} + \sum_{j}(\mathfrak{M}_{jk}\mathring{Y}_{i} - \mathfrak{M}_{ji}\mathring{Y}_{k})\mathring{Y}^{j} = \begin{matrix}\mathfrak{H}_{ik}, \text{ wenn } i, k = 1, 2, 3.\\ 0, \text{ wenn } i = 4 \text{ oder } k = 4.\end{matrix}$$

$$\mathfrak{H}_{ik} + \sum_{j}(\mathfrak{H}_{jk}\mathring{Y}_{i} - \mathfrak{H}_{ji}\mathring{Y}_{k})\mathring{Y}^{j} = \begin{matrix}\mathfrak{B}_{ik} = \sqrt{-\mathring{g}^{44}}\,\mathfrak{H}_{ik}, \text{ für } i, k = 1, 2, 3.\\ 0 \text{ für } i = Y.\end{matrix}$$

Die bei ruhenden Körpern bekannte Beziehung zwischen den magnetischen Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$, welche wir wegen des allgemeineren Koordinatensystems hier

$$\mathfrak{H}_{ik} = \mu\sqrt{-\mathring{g}^{44}}\,\mathring{\mathfrak{H}}_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116\,b)$$

schreiben müssen, geht somit über in

$$\mathfrak{M}_{ik} + \sum_{j}(\mathfrak{M}_{jk}Y_{i} - \mathfrak{M}_{ji}Y_{k})Y^{j} = \mu\,[\mathfrak{B}_{ik} + \sum_{j}(\mathfrak{B}_{jk}Y_{i} - \mathfrak{B}_{ji}Y_{k})Y^{j}].$$

Kürzer fassen wir diesen Zusammenhang, wenn wir hier mit Y_l multiplizieren, wo aber l weder i noch k sein darf, die drei Zeiger zyklisch vertauschen und die drei so gefundenen Gleichungen addieren. Dann heben sich nämlich die Summen heraus und es bleibt:

$$Y_{i}\mathfrak{M}_{kl} + Y_{k}\mathfrak{M}_{li} + Y_{l}\mathfrak{M}_{ik} = \mu\,(Y_{i}\mathfrak{B}_{kl} + Y_{k}\mathfrak{B}_{li} + Y_{l}\mathfrak{B}_{ik}). \quad (117)$$

In der beschränkten Relativitätstheorie gehen die Formeln (116), (116), (117) in die Gleichungen XIX, XX und XXIII von Bd. I über.

Für den leeren Raum, d.h. ε *(i* = 1, folgt aus (116) und (117) notwendig $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, wie auch in Bd.I, §22,a). Für Koordinatensysteme, weiche den Bedingungen (49) genügen, können wir die Gleichungen (116a) und (116b) auf den leeren Raum anwenden und finden:

$$\mathfrak{D} = \sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{B} = \sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{H}. \quad . \; . \; (117a)$$

b) **Folgerungen.** Nach Rechnungsregel (74f) schließen wir aus der zweiten der Gleichungen (111) genau wie früher auf

$$Div\ P = z\ 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (117b)$$

Darin liegt das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizitätsmenge. Wenden wir nämlich den Gauß sehen Satz (75) auf das Stück der Weltröhre eines irgendwie begrenzten, an seiner Oberfläche nichtleitenden Körpers an, welches in einem beliebigen Koordinatensystem zwischen den Querschnitten $x^4 = t_1 : c$ und $x^4 = t_2 : c$ liegt, so finden wir:

$$-\int P^n\, d\,S = 0;$$

und zwar ist die Integration hier nur über die beiden Querschnitte auszuführen. Denn für einen nichtleitenden Körper ist nach (112) und (110e)

$$P = \varrho\, Y, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (118)$$

wobei Q die Ruhdichte der Elektrizität bedeutet; die Vierergeschwindigkeit liegt aber in dem dreidimensionalen Mantel der Weltröhre, so daß für ihn $Y^n = 0$ ist. Um $P^n\, d\,S$ aber für einen Querschnitt auszuwerten, und zwar zunächst für den, bei welchem die Richtung des wachsenden x^4 ins Innere des Integrationsbereichs weist, fassen wir den Raum dS als Tensor dritten Ranges, für den hier nur die Komponente $d\ S^{123}$ von Null verschieden ist. Dann ist nach (46 e) die Invariante

$$-P^n\, d\,S = -\sqrt{-g}\,P^4\, d\,S^{123} = -\sqrt{-g}\,P^4\, dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

also nach (112)

$$-\int P^n\, d\,S = -\int \sqrt{g\,g^{44}}\,\varrho\; dx^1\, dx^2\, dx^3;$$

für den anderen Querschnitt ändert- sich nur das Vorzeichen. $\sqrt{g\,g^{44}}\,dx^1\, dx^2\, dx^3$ ist aber das Volumen des Raumelements im Raum $x^4 = const.$ Somit ist die Gesamtladung des Körpers zu den Zeiten t_1 und $t_2$dieselbe.

Die Ladung *e* eines nichtleitenden Körpers ist aber auch eine Invariante . der Koordinatentransformation. Denn führen wir zwei beliebige Bezugssysteme *K* und *K'* ein, so

können wir immer ein drittes, K'', so bestimmen, daß innerhalb der Weltröhre des Körpers der Streckenraum $x^4 = a$ von K zusammenfällt mit dem Baum $x''^4 = a''$ von K'', und der Kaum $x'^4 = b'$ mit $x''^4 = b''$. Dann können wir nach der obigen Betrachtung einmal auf $e = e''$, das andere Mal auf $e' = e''$ schließen, und zwar ohne Beschränkung auf bestimmte Zeitpunkte, da ja in jedem System e zeitlich unveränderlich ist Also folgt auch $e = e'$.

Durch Anwendung des Gaußsehen Satzes auf einen geschlossenen Bereich im Streckenraum schließen wir aus $div\, \mathfrak{D} = \varrho$ (vgl. 114 a) auf

$$\int \mathfrak{D}^n d\sigma = e, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118a)$$

wo e die im Bereich liegende elektrische Ladung bedeutet.

Wir fragen weiter nach der Wellengleichung für den leeren Raum. Wegen der Rechnungsregel (74i) können wir zunächst ohne jede Veränderung gegen früher (vgl. Bd. I, § 19)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\, \Phi, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{M}_{ji} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^i} \cdot \quad (119)$$

setzen; dann ist die Gleichung $\varrho o t\, \mathfrak{M} = 0$ identisch erfüllt. Da bei $\varepsilon = \mu = 1$ aber $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ ist, geht dann Gleichung $\mathcal{A}iv\, \mathfrak{B} = P$ über

$$\mathcal{A}iv\, (\mathfrak{Rot}\, \Phi) = P. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

Verlangen wir vom Viererpotential Φ genau wie in der beschränkten Relativitätstheorie noch, daß

$$Div\, \Phi = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

so erhalten wir nach der Rechnungsregel (85 d) und der Definition (85e):

$$W_i \Phi = \Box\, \Phi_i + \sum_m \Phi^m R_{im} = -P_i. \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

Dies ist die Wellengleichung in der von W. Gordon[1]) angegebenen Gestalt. Wir erhalten ihre alte Form

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^{3^2}} - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^{4^2}} = -P_i$$

zurück, sowie wir zur pseudoeuklidischen Maßbestimmung der beschränkten Relativitätstheorie zurückkehren.

Nach dem Reziprozitätssatz (851) folgt aus (119) und (122) die Wellengleichung für den Feldvektor

$$W \mathfrak{M} = -\mathfrak{Rot}\, P. \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Die Benutzung des Viererpotentials wird dadurch erschwert, daß dies zwei Differentialgleichungen, nämlich den Gleichungen (121)

und (122), genügen muß; nur aus diesen beiden lassen sich die Maxwellschen Gleichungen zurückgewinnen. Man vermeidet diesen Übelstand nach Gordon durch Einführung des Hertzschen Sechservektors $\mathfrak{P}$, welcher durchaus dem Hertzschen Vektor der klassischen Elektrodynamik entspricht. Setzt man nämlich

$$\Phi = div\,\mathfrak{P} \,. \tag{124}$$

und verlangt, daß zwischen B und einer beliebigen, an keine Nebenbedingungen gebundene Lösung C der Differentialgleichung

$$div\,\mathfrak{S} = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{125}$$

die Wellengleichung

$$W\mathfrak{P} = -\mathfrak{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{126}$$

besteht, so ergeben sich nach (74f) und (85m) die beiden Gleichungen (121) und (122), also auch die Maxwell schen Gleichungen für den Feldvektor $\mathfrak{M}$.

Alle Wellenausdrücke enthalten die Komponenten des Tensors, auf den man sie anwendet, und deren Ableitungen linear. Man kann infolgedessen wie in der klassischen Elektrodynamik eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$W\mathfrak{P} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{127}$$

(aus der dann auch statt (122) und (123)

$$W\Phi = 0, \quad W\mathfrak{M} = 0$$

folgt), addieren zu einer Lösung der inhomogenen, und findet dann eine neue Lösung der letzterer. Jene stellt eine Welle dar, welche sich unabhängig von den Ladungen im betrachteten Raum-Zeit-Bereich fortpflanzen; sie hat ihre Erregungsstellen außerhalb. Mit solchen Wellen beschäftigen wir uns nun ausschließlich.

Den Übergang von der Wellengleichung zur geometrischen Optik vollziehen wir nach einem von Debye[2]) angegebenen Verfahren. Wir machen den Ansatz:

$$\mathfrak{P}_{ik} = \mathfrak{A}_{ik} e^{\varkappa E}, \quad . \quad . \quad . \tag{128}$$

in welchem $E(x^1, x^2, x^3, x^4)$ irgend eine reguläre und gegen jede Koordinaten transformation invariante Funktion bedeutet, während x eine rein imaginäre Konstante, $\mathfrak{A}_{ik}$ ein gegen die Exponentialfunktion langsam veränderlicher Sechservektor ist. Nach dem in § 9, a) abgeleiteten Satz über die ko- oder kontravariante Differentiation eines Tensorproduktes wird

$$D^l \mathfrak{P}_{ik} = (D^l \mathfrak{A}_{ik} + \varkappa \mathfrak{A}_{ik} D^l E) e^{\varkappa E}.$$

Ferner wird nach (74h)

$$\Box \mathfrak{P}^{ik} = \sum_l D_l D^l \mathfrak{P}_{ik}$$

$$= \left\{ \Box \mathfrak{A}_{ik} + \varkappa \left(2 \sum_l D_l \mathfrak{A}_{ik} . D^l E + \mathfrak{A}_{ik} \Box E \right) + \varkappa^2 \mathfrak{A}_{ik} \sum_l D^l E . D^l E \right\} e^{\varkappa E},$$

also nach (85g) und (85k) im Hinblick auf (72)

$$W_{ik} \mathfrak{P} = \left\{ W_{ik} \mathfrak{A} + \varkappa \left(2 \sum_l D_l \mathfrak{A}_{ik} . D^l E + \mathfrak{A}_{ik} W E \right) + \varkappa^2 \mathfrak{A}_{ik} (\Gamma \varrho \alpha \delta E)^2 \right\} e^{\varkappa E}. \quad (128a)$$

Indem wir dies in (127) einsetzen, machen wir zugleich den Grenzübergang zu x = . Unser Ansatz stellt nämlich eine Sinusschwingung dar, und deren Wellenlänge verschwindet bei x = . Die geometrische Optik aber beschäftigt sich gerade mit diesem Grenzfall. Zunächst behalten wir nur die Glieder bei, welche die höchste auftretende Potenz von x, nämlich x^2, als Faktor enthalten *), und finden:

$$\sum_l D^l E . D_l E = |\Gamma \varrho \alpha \delta E|^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (128b)$$

Düferentiieren wir hier kovariant nach x^m, so erhalten wir

$$\sum_l D_m D^l E . D_l E + \sum_l D^l E . D_m D_l E = 0.$$

Beide Summen sind aber einander gleich; denn man kann in' der zweiten, da $D^l E . D_m D_l E$ eine Tensorkomponente ist, den oben stehenden Zeiger l nach unten und den unten stehenden nach oben setzen, ohne daß die Summe ihren Wert ändert. Außerdem kann man nach (74c') für $D_m D_l E$ schreiben $D_l D_m E$. Also:

$$\sum_l D_l D_m E . D^l E = 0.$$

Jetzt verfolgen wir eine der „Kraftlinien" des vierdimensionalen Vektorfeldes des $Tq\alpha dE$ auf die Strecke dz, deren kontravariante Komponenten die dx^l sein mögen. Dann besteht Proportionalität zwischen den dx^l und den kontravarianten Komponenten

$$\Gamma \varrho \alpha \delta^l E = D^l E.$$

Wir dürfen deswegen in der vorletzten Gleichung diese Komponenten tdurch die dx^l ersetzen:

$$\sum D_l D_m E . dx^l = \sum D_l \Gamma \varrho \alpha \delta_m E . dx^l = 0.$$

*) I)abei ist vorausgesetzt, daß nicht die zweiten Differentialquotienten von E sehr groß sind; wo dies der Fall ist, wie z. B. in der Nähe eines Brennpiihktes, gilt der Schluß nicht.

Nach der Definition des kovarianten Differentialquotienten in § 9, a) bedeutet dies, daß bei der Verrückung längs der „Kraftlinie" der Gradient von *JE* seine Richtung beibehält. Da er zugleich in die Richtung dieser Linie fällt, ändert diese im Fortschreiten ihre Richtung nicht, ist also nach § 8, b) geodätisch und nach (128b) geodätische Nullinie.

Diese „Kraftlinien" stellen aber das Fortschreiten einer Welle dar. Soll sich nämlich bei einer Verrückung des Aufpunkts um dx^l die Phase *JE* der Welle nicht ändern, so muß mit einem vom Zeiger *l* unabhängigen Faktor μ

$$dx^l = \mu D^l E$$

sein; dann ist in der Tat die Veränderung von *JE* nach (128b)

$$dE = \sum_l D_l E dx^l = \mu \sum_l D_l E . D^l E = 0.$$

Die Weltlinien, welche das Fortschreiten der Phasen der Welle darstellen, sind also geodätische Nullinien. Daß dieselben Linien auch den Strahl darstellen, erkennt man, indem man in Fortsetzung der eingeschlagenen Näherung nun auch den Koeffizienten von x in (128a) Null setzt; denn in der Gleichung

$$\sum_l D_l \mathfrak{A}_{ik} . D^l E = -\frac{1}{2} \mathfrak{A}_{ik} . WE$$

gibt die Summe die Änderung der Amplitude $\mathfrak{A}_{ik}$ bei der Verrückung längs einer Kraftlinie von *E* an. Sie ist proportional zu $\mathfrak{A}_{ik}$ selbst. Haben wir also in einem dreidimensionalen Raum einen Bereich, innerhalb dessen die $\mathfrak{A}_{ik}$ von Null verschieden sind, während sie außerhalb verschwinden, so sind sie von Null verschieden in der Welträhre, die man von jenem Bereich aus durch Konstruktion der durch den Gradienten von *E* gegebenen geodätischen Nullinien erhält; außerhalb aber sind sie Null. Also wird auch die Strahlrichtung und -gesqjiwindigkeit durch geodätische Nullinien dargestellt*) (Gordon).

*) Die gewöhnliche geometrische Optik kann alle ihre Probleme auf die Bestimmung einer Ortsfunktion, des Eikonals *E*, zurückführen, deren Gradient die Strahlrichtung angibt, und die in gewöhnlichen rechtwinkeligen Koordinaten der Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial E}{\partial x^i} \right)^2 = n^2$$

In Bd. I, § 19, b). konnten wir die Wellengleichung des Viererpotentials durch gewisse über den Vorkegel des Aurpunktes zu erstreckende Integrale lösen. Auch in der allgemeinen Relativitätstheorie läßt sich das Viererpotential durch solche Integrale darstellen, nur daß der Integrand nicht die einfache Gestalt hat, wie früher[2]). Mit der Optik im Inneren der Körper nach der allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigt sich die angeführte Arbeit von Gordon.

Wir haben hier immer angenommen, daß der Maßtensor der *gik* vorgegeben wäre und durch das elektromagnetische Feld keine Veränderung erführe. § 17 wird zeigen, daß diese Annahme nicht streng zutrifft, daß vielmehr im allgemeinen der Trägheitstensor des elektromagnetischen Feldes genau wie der eines Körpers das Schwerefeld beeinflußt. Doch ist dieser Einfluß bei allen wirklich vorkommenden elektromagnetischen Wellen so gering, daß er vollständig vernachlässigt werden kann. Wie ein elektrostatisches Feld den Maßtensor beeinflußt, das werden Wir in § 26 an einem Beispiel in aller Strenge zeigen.

c) Die Spannungen. Bei der Besprechung des Energie-Impulstensors beschränken wir uns wie in Bd. I auf den leeren Raum ($\varepsilon = \mu = 1, \sigma = 0$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$). Den Ansatz (145) daselbst ($F = [P\mathfrak{M}]$) für die Viererkraft F übertragen wir in der Form

$$\left.\begin{aligned} F_\alpha &= \sum_\beta P^\beta \mathfrak{M}_{\alpha\beta} \\ \left(F_1 = \varrho\left(\mathfrak{E}_1 + \tfrac{1}{c}(q^2\mathfrak{H}_{12} - q^3\mathfrak{H}_{31})\right)\sqrt{-g^{44}},\ \text{usw.}\right. \\ \left. F_4 = -\frac{\varrho}{c}\sum_{i=1}^{3} q^i \mathfrak{E}_i \sqrt{-g^{44}}\right), \end{aligned}\right\} \quad (129)$$

$\frac{F_1}{\sqrt{-g^{44}}}$ usw. geben also die Kraftdichte, $-c\frac{F_4}{\sqrt{-g^{44}}}$ deren Leistung. Den Energie-Impulssatz aber sprach Gleichung (XVI) von Bd. I,

$$F = -Div\, T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

genügt, in der n den Brechungsindex bedeutet, Führt man eine nichteuklidische Maßbestimmung ein, in welcher die Lieht Wellenlänge als natürliche Längeneinheit benutzt wird, so tritt an deren Stelle

$$|\Gamma_{\varrho\alpha}\delta E|^2 = 1.$$

Die Eechnung im Text beweist dann bei ihrer Übertragung, daß die Lichtstrahlen geodätische Linien dieser Maßbeatimmung sind, daß sie also dem F er matschen Satz vom ausgezeichneten Lichtweg gehorchen.

aus, welche wir unverändert übernehmen dürfen, sofern wir einen passenden Welttensor T aus dem Feldvektor $\mathfrak{W}$ ableiten können.

Um ihn zu finden, ersetzen wir in (129) P^β nach (111) und (72 b):

$$F_\alpha = \sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}_{\alpha\beta} D^\gamma \mathfrak{W}^{\beta\gamma}.$$

Hier vertauschen wir die Summationszeiger:

$$F_\alpha = -\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}_{\alpha\gamma} D_\beta \mathfrak{W}^{\beta\gamma} = -\sum_{\beta\gamma} D_\beta (\mathfrak{W}_{\alpha\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma}) + \sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma} D_\beta \mathfrak{W}_{\alpha\gamma}$$

Die zweite Summe rechts laßt sich ersetzen durch

$$\tfrac{1}{2}\Big(\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma} D_\beta \mathfrak{W}_{\alpha\gamma} + \sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma} D_\gamma \mathfrak{W}_{\beta\alpha}\Big);$$

denn die zweite dieser Summen geht aus der ersten durch Vertauschung der Summationszeiger hervor. Nach der ersten der Gleichungen (111) ist dies aber gleich

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma} D_\alpha \mathfrak{W}_{\gamma\beta} = \tfrac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma} D_\alpha \mathfrak{W}_{\beta\gamma}.$$

Da man nach § 3a die Zeiger β und γ hinter dem Differentiationszeichen D_α genau heben oder senken kann, wie vor diesem, so läßt sich dafür schreiben:

$$\tfrac{1}{4}\Big(\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma} D_\alpha \mathfrak{W}_{\beta\gamma} + \sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}_{\beta\gamma} D_\alpha \mathfrak{W}^{\beta\gamma}\Big)$$

$$= \tfrac{1}{4} D_\alpha \Big(\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma} \mathfrak{W}_{\beta\gamma}\Big) = \tfrac{1}{2} D_\alpha |\mathfrak{W}|^2$$

[vgl. (46)]. Also:

$$F_\alpha = -\sum_{\beta\gamma} D_\beta (\mathfrak{W}_{\alpha\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma}) + \tfrac{1}{2} D_\alpha |\mathfrak{W}|^2. \quad . \qquad (181)$$

Nun definieren wir einen Tensor zweiten Ranges durch seine gemischten Komponenten

$$T_\alpha^\beta = \sum_\gamma \mathfrak{W}_{\alpha\gamma} \mathfrak{W}^{\beta\gamma} - \tfrac{1}{2}\delta_\alpha^\beta |\mathfrak{W}|^2. \quad . \quad . \quad . \quad \ldots \quad (132)^*)$$

*) Diese Gleichung entspricht] durchaus der Formel (132) in Bd. I, wenn man dort in der ersten bis dritten Auflage die beiden verschiedenen Sechservektoren einander gleich setzt. In der vierten Auflage des ersten Bandes wird dies auch formal gezeigt.

Er ist symmetrisch, und deshalb brauchen wir nach § 6, c) hier nicht zwischen $T_{\alpha\beta}$ und T^{β}_{α} zu unterscheiden; denn es folgt aus (132)

$$\left.\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \sum_{\delta} g_{\beta\delta} T^{\delta}_{\alpha} = \sum_{\gamma\delta} g_{\beta\delta} \mathfrak{M}_{\alpha\gamma} \mathfrak{M}^{\delta\gamma} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} |\mathfrak{M}|^2 \\ &= \sum_{\gamma} \mathfrak{M}_{\alpha\gamma} \mathfrak{M}_{\beta}{}^{\gamma} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} |\mathfrak{M}|^2 \\ &= \sum_{\gamma\delta} g_{\gamma\delta} \mathfrak{M}_{\alpha}{}^{\delta} \mathfrak{M}_{\beta}{}^{\gamma} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} |\mathfrak{M}|^2, \end{aligned}\right\} \quad (132\,a)$$

und in der letzten Summe ist die Vertauschung von α und ß gleichwertig der bedeutungslosen Vertauschung der Summationszeiger. Ferner ist die Diagonalsumme der T^{β}_{α} nach (46)

$$\sum_{\alpha} T^{\alpha}_{\alpha} = \sum_{\alpha\gamma} \mathfrak{M}_{\alpha\gamma} \mathfrak{M}^{\alpha\gamma} - 2|\mathfrak{M}|^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

Nach (132) ist

$$Div_{\alpha} T = \sum_{\beta} D_{\beta} T^{\beta}_{\alpha} = \sum_{\beta\gamma} D_{\beta} (\mathfrak{M}_{\alpha\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma}) - \tfrac{1}{2} D_{\alpha} |\mathfrak{M}^2|.$$

Der Vergleich mit (131) beweist die Gültigkeit von (130).

Wir werden hier natürlich die Komponenten T^{β}_{α} ähnlich wie in der beschränkten Relativitätstheorie in Beziehung zu den Spannungen, dem Impuls, der Energieströmung und -dichte des elektromagnetischen Feldes setzen. Trotzdem dann (133) die einfachste Übertragung der früher geltenden Beziehung ist, hat sie doch einen wesentlich anderen Inhalt. Verschwindet z. B., wie es nach (129) sein muß, *F* infolge Fehlens von Ladungen, so können wir dennoch aus

$$Div_{t} T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\beta} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, T^{\beta}_{\alpha})}{\partial x^{\beta}} + \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma} T_{\beta\gamma} \frac{\partial g^{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

[vg'l. *(TS* c)], nicht mehr wie früher die Erhaltung des elektromagnetischen Impulses und der Energie ableiten (Bd. I, § 15 und 24). Die oppelsumme hindert daran. In den nächsten Paragraphen werden wir sehen, was dies zu bedeuten hat.

Ai s (132) und (113), wo wir $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{M}$ zu ersetzen haben, finden wir für die Komponente des Tensors *T:*

$$T^{1}_{1} = \tfrac{1}{2}[(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}^1 + \mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}_3 \mathfrak{D}^3 - \mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}^1 + \mathfrak{H}^{21} \mathfrak{B}_{21} + \mathfrak{H}^{13} \mathfrak{B}_{13} - \mathfrak{H}^{23} \mathfrak{B}_{23}] \sqrt{-g^{44}},$$

$$T^{2}_{1} = -(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{H}^{21} \mathfrak{B}_{21}) \sqrt{-g^{44}}, \quad T^{3}_{1} = -(\mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}^1 + \mathfrak{H}^{21} \mathfrak{B}_{22}) \sqrt{-g^{44}},$$

$$T^{4}_{1} = (\mathfrak{D}^2 \mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{D}^3 \mathfrak{B}_{31}) \sqrt{-g^{44}}, \qquad T^{1}_{4} = (\mathfrak{E}_1 \mathfrak{H}^{21} - \mathfrak{E}_2 \mathfrak{H}^{13}) \sqrt{-g^{44}},$$

usw.

$$T^{4}_{4} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}^1 + \mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}_3 \mathfrak{D}^3 + \mathfrak{H}^{23} \mathfrak{B}_{23} + \mathfrak{H}^{31} \mathfrak{B}_{31} + \mathfrak{H}^{12} \mathfrak{B}_{12}) \sqrt{-g^{44}}.$$

Geht man zur Maßbestimmung der beschränkten Relativitätstheorie zurück, so findet man die in Bd. I, Formel (X), (Villa) und (19) gegebenen Werte für die Spannungen, den Energiestrom und die Energiedichte wieder. Das genauere über den Zusammenhang des Energiespannungstensors mit diesen physikalischen Größen erörtern wir erst in § 17, b).

§ 16. Die Grundgleichung der Dynamik und der freie Fall.

a) Die Weltlinie des freien Körpers. Die Grundgleichung jeder Mechanik bildet der Impulssatz; aus ihm folgt durch mathematische Ableitung der Energiesatz. Die beschränkte Relativitätstheorie änderte daran nichts, als daß sie die Beziehung zwischen beiden Sätzen besonders innig gestaltete und beide in dieselbe invariante Gleichung

$$\mathfrak{div}\, T = 0 \quad \ldots\ldots \quad (134)$$

verschmolz. Dabei war T der symmetrische Tensor zweiten Ranges, welcher, bezogen auf das Ruhsystem des Körpers, dessen elastische Ruhspannungen und die Ruhenergiedichte bestimmte. Wie wir es in § 15 für elektromagnetische Felder getan haben, übernehmen wir auch für die Dynamik die Gleichung (134) und die Symmetrie des Tensors T. Wir verschieben die schon erwähnte Frage, inwiefern diese Gleichung Erhaltungssätze ausspricht, und untersuchen zuerst nach ihr die Bewegung eines freien Massenpunktes.

Im Gegensatz zu der Ausdrucksweise der älteren Physik müssen wir einen Körper hier auch dann als frei beweglich bezeichnen, wenn er Schwerewirkungen unterliegt. Nach dem Grundgedanken der Einsteinschen Lehre von der Schwerkraft können wir diese am Ort des Körpers ja hin weg transformieren (§ 3). Es gibt hier keinem Unterschied zwischen der völlig freien Bewegung und dem freien Fall. Wohl aber müssen alle elektromagnetischen und ebenso alle durch elastische Spannungen vermittelten mechanischen Einflüsse fortfallen. Deswegen wird die Ruhmasse m eines freien Körpers längs seiner ganzen Weltlinie unveränderlich sein. Aus dieser Analogie zur elektrischen Ladung eines nichtleitenden Ladungsträgers werden wir sogleich den Schluß ziehen, daß wie in § 15 die Divergenz des Viererstromes P = q Y Null war, so hier

$$\mathfrak{Div}(\mu Y) = \sum_k \mathfrak{D}_k(\mu Y^k) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (135)$$

ist, wenn wir unter μ die natürlich gemessene Ruhdichte verstehen. (Das heißt, die Masse des Körperelements $\delta \tilde{V}$ soll sein $\mu \delta \tilde{V}$, wobei

δV ebenfalls in natürlichem Maße anzugeben, also im geodätischen Kuhsystem in der gewöhnlichen Art zu messen ist.) Diesen Begriff der skalaren Ruhdichte kann man freilich nach Bd. I, § 28, c), nicht immer einführen, wohl aber dann, wenn die elastischen Spannungen verschwinden. Dies dürfen wir aber zunächst voraussetzen, da ja, wie hinlänglich bekannt, infolge des Äquivalenzsatzes in einem frei fallenden Körper die Schwerkraft keine elastischen Spannungen hervorruft.

Als Massenpunkt betrachten wir einen Körper, wenn er so klein ist, daß in ihm die Komponenten der Vierergeschwindigkeit, desgleichen der Maßtensor und die aus seinen Ableitungen gebildeten gr-Klammern überall die gleichen Werte haben.

Ähnlich wie in Bd. I, § 27 (Gleichung 272) setzen wir den Welttensor eines spannungsfreien Körpers

$$T_k^i = c^2 \mu Y^i Y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

Denn danach ist im Buhsystem wegen (110e) nur die gemischte Komponente

$$\overset{\circ}{T}{}_4^4 = -c^2 \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136a)$$

von Null verschieden. Aus den Gleichungen $T_{ik} = c^2 \mu Y_i Y_k$ erkennt man die Symmetrie dieses Tensors. Wir haben von ihr schon insofern Gebrauch gemacht, als wir in (136) T_k^i schrieben, ohne auf die Reihenfolge der Zeiger hinter dem Zeiger T zu achten *).

Den Ansatz (136) setzen wir nun in (134) ein. Nach (72b) folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\, T &= \sum_k D_k T^{ik} = c^2 \sum_k D_k (\mu Y^i Y^k) \\ &= c^2 \Big[Y^i \sum_k D_k (\mu Y^k) + \mu \sum_k Y^k D_k Y^i \Big]. \end{aligned}$$

Das erste Glied verschwindet nach (135). Nach der Definitionsgleichung (110a) für die Vierergeschwindigkeit ist also

$$\mathrm{div}\, T = c^2 \mu \sum_k Y^k D_k Y^i = c^2 \mu \sum_k D_k Y^i \frac{dx^k}{d\tau} = 0, \quad . \quad . \quad (137)$$

*) Aus der Gleichung $\sum_i Y^i Y_i = -1$ folgt die Dimensionslosigkeit

Produkte $Y^i Y_i$. Deswegen haben alle gemischten Komponenten mit uns gleichen Zeigern bei dem Tensor T die Dimension von $c^2\mu$, und "dk Die Komponenten T_k^i mit verschiedenen Zeigern hingegen es ein $m\, t^{-1}\, t^{-1}\, X_i\, X_k^{-1}$. Für die kovarianten Komponenten T_{ik} schwy Dimension $m\, t^{+1}\, t^{-1}\, (X_i\, X_k)^{-1}$, für die kontravarianten, T^{ik}, und an $m\, t^{-2}\, t^{-2} X_i\, X_k$ (vgl. § 14).

und dies bedeutet nach der Definition der kovarianten Differentialquotienten in § 9, a), daß der Vektor T seine Richtung bei einer Verschiebung um das Weltlinienelement $d\tau$ nicht ändert. Nun hat er aber dieselbe Richtung wie diese Weltlinie; also ändert diese ihre Richtung im Fortschreiten nicht. Somit gilt der Satz: Die Weltlinie eines frei fallenden Körpers ist eine geodätische Linie. Dasselbe beweist die auf (69) beruhende Umformung

$$\left.\begin{aligned}\sum_k D_k Y^i \frac{dx^k}{d\tau} &= \sum_k \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \sum_l \left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\} Y^l\right)\frac{dx^k}{d\tau} \\ &= \frac{dY^i}{d\tau} + \sum_{kl}\left\{\begin{matrix} k \\ i \end{matrix}\right\} Y^k Y^l = \ddot{x}^i + \sum_{kl}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\} \dot{x}^k \dot{x}^l.\end{aligned}\right\} \quad (137\text{ä})$$

Setzt man dies gleich Null, so hat man in der Tat die Differentialgleichungen (55) der geodätischen Linie.

b) Abstreifung der Voraussetzung der Spannungsfreiheit. Dieser Satz gilt unabhängig von der oben eingeführten Annahme der Spannungsfreiheit. Wäre dem anders, fiele also ein elastisch gespannter Körper anders als ein ungespannter, so entzöge dies ja dem Äquivalenzprinzip und damit den grundlegenden Betrachtungen von § 3 den Boden. Wir prüfen somit die Vertrag lichkeit des Ansatzes (134) mit den Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, wenn wir untersuchen, ob jene Voraussetzung unwesentlich ist.

In Bd. I, § 32, a) haben wir für vollständige statische Systeme — und ein solches ist der frei fallende Körper, wie man bei Einführung seines geodätischen Ruhsystems sofort sieht — den Satz abgeleitet, daß bei der Integration der Ruhspannungen über sein Ruhvolumen stets Null herauskommt, daß sich daher das System dynamisch als Massenpunkt verhält. Wir drückten dies damals irder Formel (321a) a fofmalen Änderung, daß wir statt der Ruhenergie $c^2 m$ setzen:

$$\int T_k^i \delta \bar{V} = c^2 m\, Y^i Y_k, \quad . \quad . \qquad (138)$$

Jetzt nehmen wir an dem Tensor T^i_k die Zerlegung vor:

$$T_k^i = c^2 \mu\, Y^i Y_k + \Theta_k^i, \quad . \qquad (135)$$

wobei der Tensor Θ_k^i von den elastischen Spannungen her tehen. soll; Θ_i^i verschwindet deswegen für jeden Wert von i, und Gleivobei

(136a) gilt für jeden Körper. Da auch für das vollständige statische System $\int \mu \delta \mathring{r} = m$ ist, folgt aus (138)

$$\int \Theta_k^i \delta \mathring{r} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139a)$$

Es kommt uns auf den Vektor $\int \mathfrak{Div}^i T \delta \mathring{r}$ an. Zu seiner Berechnung legen wir das geodätische Ruhsystem zugrunde. Wegen der vorausgesetzten Kleinheit des Körpers gilt dann in seinem Innern die euklidische Geometrie des Baumes und wir finden:

$$\int \mathfrak{Div}^i \Theta \delta \mathring{r} = \int \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \Theta_k^i}{\partial x^k} dx^1 dx^2 dx^3 = \int \frac{\partial \Theta_4^i}{\partial x^4} \delta \mathring{r}; \quad (139b)$$

denn an den Differentialqüotienten nach x^1, x^2, x^3 läßt sich die Integration ausführen und liefert ein Oberflächenintegral, das wegen des Verschwindens der Θ_k^i auf der Begrenzung selbst Null ist. Da unser frei fallender Körper gegen sein geodätisches Ruhsystem keine Beschleunigung-besitzt, ist Θ_4^i nicht nur selbst» Null, sondern auch der Differentialquotient $\frac{\partial \Theta_4^i}{\partial x^4}$ verschwindet. Also ist

$$\int \mathfrak{Div}^i \Theta \delta \mathring{r} = 0.$$

In dem Integral $\int \mathfrak{Div}^i T \delta \mathring{r}^0$ braucht man somit für T_k^i nur das erste Glied von Gleichung (139) zu benutzen. Statt (137) folgt unter diesen Umständen:

$$\int \mathfrak{Div}^i T \delta \mathring{r} = c^2 \int \left(\mu \sum_k Y^k D_k Y^i \right) \delta \mathring{r}, \quad . \quad (139c)$$

oder unter der Annahme, daß die Y^k und deren kovariante Differentialquotienten im ganzen Körper konstant sind:

$$\int \mathfrak{Div}^i T \delta \mathring{r} = c^2 m \sum_k Y^k D_k Y^i = 0, \quad (HO)$$

so daß man wieder auf die geodätische Linie schließen kann. Diese Voraussetzung wird nach (69) im allgemeinen nur* dann zutreffen, wenn die *g*- Klammern konstant sind.

c) Maßbestimmung und Schwerefeld. Dieser Satz zeigt uns den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Relativitätstheorie und der Lehre von der Schwerkraft mit größter Deutlichkeit. Gäbe es ein Koordinatensystem, in welchem die g-Klammern überall verschwinden, so wären die Gleichungen der geodätischen Linie linear, und man könnte jede geodätische Linie, zu denen dann auch die

Koordinatenachsen gehörten, als Gerade ansprechen. In der dreidimensionalen Sprechweise hieße dies, daß der freie Massenpunkt eine Gerade mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Diese Aussage ist gemäß den Differentialgleichungen der geodätischen Linie, $\ddot{x}^i + \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0$, unmöglich, wenn die g-Klammern in keinem Koordinatensystem überall verschwinden. Dann sind also alle geodätischen Linien gekrümmt. Und es sind die Dreizeigersymbole, welche die Abweichung von der Geraden bedingen. Wir werden deshalb die Dreizeigersymbole als die Komponenten des Schwerefeldes bezeichnen. Da sie sich nach (54) aus den ersten Differentialquotienten der *gik* berechnen, können wir den Tensor der Maßbestimmung als das tensorielle Schwerepotential deuten. Umgekehrt sehen wir dann sogleich, inwiefern die Schwerkraft die Maßbestimmung der vierdimensionalen Welt, und damit alle Maßbestimmungen im dreidimensionalen Raum und in der Zeit bedingt, also die „bindenden Kräfte" Riemanns abgibt.

Der obige Satz legt nicht nur die Bahn des Körpers in jedem Streckenraum, sondern auch die Geschwindigkeit fest, mit der er sie durchläuft. Doch ist, wie wir jetzt erkennen, seine Gültigkeit im allgemeinen dadurch beschränkt, daß der Körper selbst zum Schwerefeld beiträgt, daß man also die Dreizeigersymbole in (139 c) in Strenge nicht als im Körper konstant, ja überhaupt nicht als vorgegebene Funktionen der Koordinaten ansehen kann. In den später zu behandelnden Beispielen kommen wir darüber hinweg, indem wir dem fallenden Körper gegen die das Schwerefeld hauptsächlich erzeugenden Körper eine so geringe Masse geben, daß wir von seinem Beitrag in Annäherung absehen können. Innerhalb dieser Näherung, aber auch nur in ihr, gilt der Satz: Da in Gleichung (137) keine den fallenden Körper kennzeichnende Größe auftritt, fallen alle Körper in der gleichen Weise.

Die Notwendigkeit dieser meist nicht beachteten Einschränkung zeigt auch die grundlegende Betrachtung, durch die Einstein zum Äquivalenzprinzip kam (§ 3). Dabei wird nämlich angenommen, der Beobachter bemerke in seinem abgeschlossenen Kasten ein gleichrasches Fallen aller Körper in einer und derselben Richtung. Ist aber in dem Kasten ein so mächtiger Körper, daß er selbst erhebliche Schwerewirkungen ausübt, so trifft diese Voraussetzung nicht mehr zu. Die ganze Betrachtung über die Forttransformierbarkeit der Schwerkraft versagt dann; der Kasten ist nicht mehr unendlich

klein, d.h. klein gegen Bereiche, in denen sich die gik erheblich verändern. Ein derartig großer Körper wird also im allgemeinen anders fallen, als kleinere.

Es mag zum Schluß noch betont werden, daß selbstverständlich nicht jede geodätische Linie Weltlinie eines Körpers sein kann, sondern nur eine zeitartige, d. h. eine solche, die ganz innerhalb des Vor- und Nachkegels liegt, den die von einem ihrer Punkte ausgehenden geodätischen Nullinien bilden *). [Vgl. § 7, c).]

d) Die Transformation der Feldkomponenten. Aus Ohristoffels Transformationsformeln (60) für die Dreizeigersymbole sowie aus dem Dasein geodätischer Koordinatensysteme für jeden Raumzeitpunkt haben wir schon in den §§ 7 und 8 geschlossen, daß diese Größen sich nicht als Komponenten eines Tensors, gleichviel welchen Banges, auffassen lassen; denn sonst ließen sie sich ja nicht alle durch Transformation beseitigen. Man könnte vielleicht im ersten Augenblick diesen Zug als einen Mangel der hier vorgetragenen Theorie der Schwere empfinden, zumal da in der Elektrodynamik sich alle Größen als echte Tensopen darstellen. Aber dieser Zug entspricht durchaus der physikalischen Überlegung von § 3, daß

*) Das Variationsprinzip der geodätischen Linien läßt sich in der Form schreiben:

$$\int L\,d\tau \overset{*}{=} 0, \qquad L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\sum_{kl} g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l,$$

Es entspricht dann ganz dem Hamiltonsehen Prinzip mit dem kinetischen Potential L. "Will man zu den kanonischen Differentialgleichungen gelangen, so hat man die Funktion

$$H(x,\dot{x}) = \sum_k \dot{x}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{1}{2}\sum_{kl} g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l$$

zu bilden, und in ihr d

$$\xi_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} = \sum_k g_{lk}\dot{x}^k$$

auszudrücken. Das f

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{kl} g^{kl}\xi_k\xi_l.$$

Die

$$\dot{\xi}_l = -\frac{\partial H}{\partial x^l} = \frac{1}{2}\sum_{kl}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^l}\xi_k\xi_l, \qquad \dot{x}^l = \frac{\partial H}{\partial \xi_l} = \sum_k g^{lk}\xi_k.$$

Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung erhält die Gestalt:

$$H\left(x, \frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\sum g^{kl}\frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial F}{\partial x^l} = \frac{1}{2}|\Gamma Q a\,\delta F|^2 = const.$$

man durch Einführung passender Koordinaten in einem hinreichend kleinen Bereich, nämlich dem dort erwähnten Kasten, das Schwerefeld hinwegtransformieren kann. Er ist somit mit den Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie unlösbar verknüpft.

e) Die „Zentrifugalkraft". Nach der beschränkten Relativitätstheorie und ebenso der klassischen Mechanik hat ein freier Massenpunkt eine nach Richtung und Betrag unveränderliche Geschwindigkeit lediglich in einem berechtigten Bezugssystem. In einem anderen, das sich etwa gegen ein berechtigtes drehen mag, bestehen keine linearen Beziehungen zwischen seinen Koordinaten und der Zeit, und man kann diese Abweichungen auf die Coriolissche und die Zentrifugalkraft zurückführen. Nach der älteren Auffassung sind diese „Scheinkräfte" aber etwas physikalisch nicht Wirkliches, lediglich Rechnungsgrößen, bestimmt, den durch Benutzung eines unberechtigten Bezugssystems begangenen Fehler wieder aufzuheben. Hier können wir ein solches Koordinatensystem, wenigstens in der Umgebung der Drehachse, nicht als unberechtigt betrachten (vgl. § 3). Jene Kräfte müssen wir somit als wirklich ansehen, und zwar, wie schon früher erwähnt, als Folgen des in diesen Systemen auftretenden Schwerefeldes.

Fassen wir diese Betrachtung mathematisch. Wir haben durch die Transformation (109) in einen euklidischen Weltbereich, in welchem also die beschränkte Relativitätstheorie gilt, das rotierende Koordinatensystem r, ϑ, z, t eingeführt und in ihm die Maßbestimmung (109 a)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2 + 2r^2 \omega d\vartheta\, dt - (c^2 - \omega^2 r^2) dt^2$$

erhalten. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linie in diesen Koordinaten gewinnen wir, wie üblich, aus dem Variationsproblem, das hier

$$\delta \int \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2 + 2 r^2 \omega \dot{\vartheta} \dot{t} - (c^2 - \omega^2 r^2) \dot{t}^2 \right) ds = 0$$

lautet. Doch schreiben wir nur die Differentialgleichung für r hin, und auch diese nur unter der Annahme

$$r = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad \text{also} \quad \dot{t}^2 = - \frac{1}{c^2 - \omega^2 r^2},$$

d. h. für einen im betrachteten Augenblick in diesem System ruhenden Massenpunkt. Wir finden:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = r \omega^2 \dot{t}^2 = - \frac{\omega^2 r}{c^2 - \omega^2 r^2},$$

Für die in Betracht zu ziehenden Fälle ist hier $\omega^2 r^2$ gegen c^2 zu vernachlässigen; mit derselben Näherung läßt sich $d^2r:ds^2$ ersetzen durch $-\frac{1}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}$, so daß

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$$

wird. Man erkennt in der rechten Seite den wohlbekannten Ausdruck für die Zentrifugalkraft wieder, aber hier als Folge des im rotierenden System auftretenden Schwerefeldes.

Es könnte nun scheinen, als wäre bei folgerichtiger Durchführung dieser Anschauung dem Koordinatensystem r, ϑ, z, t auch dann ein Schwerefeld zuzuschreiben, wenn es sich gar nicht dreht. Denn auch für $w = 0$ ist $g\Theta\Theta$ nach (109 a) mit den Koordinaten veränderlich, so daß die g-Klammern nicht verschwinden. Man hat darin gelegentlich sogar ein schweres Bedenken gegen die Relativitätstheorie gesehen. Uns scheint das aber eine formalistische Übertreibung des Relativitätsprinzips zu sein. Wenn die grundlegende Überlegung über den gleich raschen Fall aller Körper im abgeschlossenen Kasten (§ 3) zu dem Ergebnis führt, daß man ein vorhandenes Schwerefeld durch Übergang zu einem anderen Koordinatensystem forttransformieren, oder umgekehrt, falls zunächst keins gegeben ist, es durch Koordinatentransformation hervorrufen könne, so ist dabei doch stets an Koordinatensysteme gedacht; welche sich gegeneinander bewegen. Transformationen der drei räumlichen Koordinaten allein müssen wir deshalb von dieser physikalischen Betrachtung ausschließen, trotzdem natürlich die Kovarianz der physikalischen Gleichungen auch ihnen gegenüber besteht. Dasselbe gilt auch von Transformationen der Zeitveränderlichen allein. Diese führt in einem euklidischen Weltbereich zu einem veränderlichen g_{44}, so daß die gr-Klammer

$$\left\{\begin{matrix} 44 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}$$

von Null verschieden ausfällt; dennoch darf man hier unseres Erachten s nicht von einem Schwerefeld sprechen.

f) Die Mitwirkung anderer Kräfte. Bewegt sich ein Körper nicht frei, sondern unter der Einwirkung anderer, etwa elektromagnetischer Kräfte im Schwerefeld, doch so, daß sein innerer Zustand durch diese nicht merklich verändert wird (quasistationäre Bewegung), so haben wir in der Grundgleichung (134) den Tensor T in den Anteil des Körpers selbst und den Anteil zu zerlegen, welcher jenen fremden Einwirkungen entspricht. Die negative Divergenz

des zweiten Anteils gibt die Viererkraft F jener Einwirkungen, und Gleichung (140) und (137a) lehrt:

$$c^2 m\left[\dot{V}^i + \sum_{kl}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\} V^k V^l\right] = \int F^i \delta V. \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Nach Gleichung (278) von Bd. I, in welcher wir aber wegen anderer Definition von $d\tau$ den Faktor $1/c$ fortlassen müssen, gibt

$$\int F^i \delta \dot{V} = K^i \quad . \quad . \quad . \quad (141a)$$

den Minkowskisehen Kraftvektor an. Da im Ruhsystem seine zeitartige Komponente die Zunahme der Ruhenergie, also der Ruh-, masse ergibt, muß diese Komponente Null sein, sofern m unveränderlich ist. Indem wir dies hier annehmen, setzen wir

$$\sum_i K_i V^i = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (141a')$$

wie man nach § 7, a) die Bewegungsgleichungen (137) aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int f d\tau = 0 \qquad f = \sum_{ik} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$$

herleiten kann, so diese aus der Forderung, daß

$$\int\left(\frac{c^2}{2} m \delta f - \delta A\right) d\lambda = 0$$

wird, sofern man

$$\delta A = \sum_i K_i \delta x^i$$

festsetzt. Man kann sie als das Hamiltonsche Prinzip Iur die Bewegung des Massenpunktes bezeichnen. Die zugehörigen Lagrangesehen Gleichungen lauten nämlich:

$$c^2 m\left(\frac{d}{d\tau}\sum_k g_{ik}\dot{x}^k - \frac{1}{2}\sum_{jk} g_{jki}\dot{x}^j\dot{x}^k\right) = K_i \quad . \quad . \quad (141b)$$

oder, wenn man genau wie in § 7, a) die Differentiation nach τ ausführt und die entstehende Summe

$$\sum_{jk} g_{ikj}\dot{x}^j\dot{x}^k \text{ in } \frac{1}{2}\sum_{jk}(g_{ikj} + g_{ijk})\dot{x}^j\dot{x}^k$$

umformt,

$$c^2 m\left(\sum_k g_{ik}\ddot{x} + \sum_{jk}\left[\begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix}\right]\dot{x}^j\dot{x}^k\right) = K_i.$$

Die Zusammenfassung mit g^{ik} ergibt sodann unmittelbar die Gleichungen (141). , Faßt man dagegen die Gleichungen (141b) mit $\dot{x}^i$ zusammen, so findet man rechts nach (141a') $\sum K_i \dot{x}^i = 0$. In-

folgedessen führt die Rechnung, genau wie in § 7, a), im Anschluß an Gleichung (52) zur Gleichung

$$\mathbf{f} = const$$

als einem ersten Integral der Bewegungsgleichungen.

Wir verwenden nun ein Koordinatensystem, welches den Bedingungen (49) $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$ genügt, so daß wir unter Vernachlässigung von q^2 gegen c^2 nach (110 a') setzen können.

$$d\tau = c\sqrt{-g_{44}}\,dt$$

Mit derselben Annäherung können wir in (141) für $c^2 m Y^i = c^2 m \frac{d^2 x^i}{d\tau^2}$ schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{dx^i}{dt}\right).$$

Schließlich haben wir schon an Gleichung (129) gesehen, daß $F^i/\sqrt{-g^{44}}$ $(i = 1, 2, 3)$ die Kraftdichte darstellt. Die Integration in (141a) können wir statt nach dem Ruhvolumen $\delta\mathring{V}$ nach dem Volumen δV ausführen, wenn es uns, wie hier, nur auf Glieder erster Ordnung in q ankommt; denn die Lorentzkontraktion, welche den Unterschied zwischen δV und $\delta\mathring{V}$ bedingt, tritt erst in der zweiten Ordnung zutage. Also setzen wir in (141)

$$\int F^i \delta\mathring{V} = K^i = \sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{K}^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

und bezeichnen $\mathfrak{K}$ als den räumlichen Kraftvektor. Führen wir dann auch beim Ersatz der Y^i durch die Komponenten $\mathfrak{q}^i$ der räumlichen Geschwindigkeit nach (110d) diese Näherung durch, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{q}^i}{\sqrt{-g_{44}}}\right) = \mathfrak{K}^i - \frac{m}{\sqrt{-g_{44}}}\left[\sum_{k,l=1}^{3}\left\{\begin{matrix}k\,l\\ i\end{matrix}\right\}\mathfrak{q}^k\mathfrak{q}^l + 2c\sum_{k=1}^{3}\left\{\begin{matrix}k\,4\\ i\end{matrix}\right\}\mathfrak{q}^k + c^2\left\{\begin{matrix}4\,4\\ i\end{matrix}\right\}\right] \quad (142)$$

In dieser Formel spielt der Vektor $m\mathfrak{q}^i/\sqrt{-g_{44}}$ die Bolle des Impulses, der Skalar $m/\sqrt{-g_{44}}$ also die Bolle der trägen, und Wie die rechte Seite zeigt, auch die der schweren Masse. In diesem Sinne ist die Masse im Schwerefeld veränderlich. Man muß aber bedenken, daß die Gleichung (142) nicht von dem natürlichen Zeitmaß und von cten darauf bezogenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen spricht. In einem geodätischen System und bei natürlicher Messung gilt stets, wie wir in § 14 sahen, die Dynamik der beschränkten Relativitätstheorie mit der unveränderlichen Ruhmasse m.

§ 17. Die Erregung des Schwerefeldes durch die Materie, und seine Spannungen.

a) Die Differentialgleichungen des Schwerefeldes. Die nächste Aufgabe besteht in der Herstellung des Zusammenhanges zwischen Feld und Materie, welchen die alte Theorie durch die Laplace-Poisson sche Differentialgleichung ausdrückt. Hier müssen wir ihn natürlich in einer allgemein kovarianten Form aufsuchen. Wir beginnen mit der Differentialgleichung des materiefreien Schwerefeldes.

Die beschränkte, von der Schwere absehende Relativitätstheorie hatte in der Welt eine pseudoeuklidische Maßbestimmung. Man könnte versucht sein, deren Kennzeichen, nämlich nach § 10, c) das Verschwinden des Riemann-Christoffelschen Tensors R_{ikim}, auf das materiefreie Feld zu übertragen. Aber diese Forderung ginge zu weit. Dann könnte man ja das Feld außerhalb der Sonne z. B. stets auf konstante Schwerepotentiale g_{ik} transformieren und die Feldkomponenten $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}$ zu Null machen. Jeder Planet müßte sich dann geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Weniger weit geht die Forderung, daß der Krümmungstensor

$$R_{ikl} = 0 \qquad (143)$$

sein soll. Denn nach § 10, d) läßt sich daraus in vier Dimensionen nicht das Verschwinden des ersteren Tensors folgern.

Betrachten wir diese Gleichung als gültig, so haben wir in ihr partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Schwerepotentiale g_{ik}, in denen deren zweite Ableitungen nach (80) und (79) linear auftreten. Sie hat darin Ähnlichkeit mit der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ der Newton sehen Schwerethеorie, und dies kann ihr zur Empfehlung dienen, da die Newton sehe Theorie doch in der relativistischen als Näherung enthalten sein muß.

Ein vollständigeres Urteil darüber läßt sich erst gewinnen, indem wir nach der Differentialgleichung für das Innere der Materie fragen. Nach aller Erfahrung besteht die Tatsache eines proportionalen Zusammenhanges zwischen der trägen Masse eines Körpers und seiner Schwerewirkung (§ 1). Schon in der beschränkten Relativitätstheorie, ebenso hier in § 16, haben wir die Trägheit durch den Welttensor T_{ik} des Körpers zum Ausdrudk gebracht. Diesem aber steht der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes völlig gleichberechtigt zur Seite; nur für ihre Summe gilt die Grundgleichung der Mechanik in der einfachen Form, daß die Divergenz verschwindet. Also werden wir auch für den Schwereeinfluß beide

Tensoren als gleichwertig »zu betrachten haben und Wollen infolgedessen unter dem Tensor T_{ik} der Feldgleichungen die Summe aus beiden verstehen. Diesem Tensor wird wohl dann ein Tensor gleich gesetzt werden müssen, der wie der Tensor R_{ik} die Schwerepotentiale g_{ik} samt ihren ersten und zweiten Ableitungen, die letzteren aber nur linear, enthält, und der wie T_{ik} divergenzfrei ist. Gibt man diese Vermutung zu, so ist der nächste Schritt durch das Ergebnis von § 10, f) eindeutig festgelegt; denn jeder Tensor, der die genannten Eigenschaften vereinigt, hat danach die Gestalt

$$A\,(R_{ik} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{ik}) + C \cdot g_{ik},$$

wo A und C Konstanten bedeuten. Indem wir diese anders benennen, kommen wir auf die Einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{ik} - \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \quad \ldots \quad (144)$$

Durch Verjüngung,also durch Multiplikation mit g^{ik} und Summation nach beiden Zeigern, gewinnt man daraus unter Berücksichtigung

$$R + 4\lambda = \varkappa T, \qquad \left(T = \sum_i T_i^i\right) \quad \ldots \quad (144a)$$

und, indem man R aus (144) und (144a) eliminiert:

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = -\varkappa (T_{ik} - \tfrac{1}{2} T \cdot g_{ik}) \quad \ldots \quad (144\ b)$$

Nimmt man diese Gleichungen an, so kann man aus ihnen wegen der Divergenzfreiheit der Tensoren Rik — ½R.gik *gik* und gik die Grundgleichung $\mathit{div}\ T = 0$ der Dynamik wieder gewinnen. Die Feldgleichungen der Schwere enthalten somit zugleich die gesamte Dynamik. Man hat es schon stets als einen Mangel der Mechanik gegenüber der Elektrodynamik empfunden, daß sich in dieser der Energie-Impulssatz auf die Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes zurückführen läßt, während er in jener keine tiefere Begründung erhalten konnte. Einsteins Theorie der Schwere hilft diesem Mangel ab.

Diese Gleichungen führen zwei universelle Kpnstanten ein, x und λ. Die experimentelle, Forschung hat uns bei der Schwere nur 'eine Eonstante kennen gelehrt, nämlich die Eonstante C von Gleichung (1). Deswegen wohl hat Einstein 1915. zunächst die zweite Konstante $\lambda = 0$ gesetzt. Wie wir dann x auf die Gravitationskonstante zurückführen können, wird §18 zeigen. Die so verkürzten Feldgleichungen

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \quad \ldots \quad (144)$$

$$R = \varkappa T \quad \ldots \quad (144\ a')$$

$$R_{ik} = -\varkappa (T_{ik} - \tfrac{1}{2} T \cdot g_{ik}) \quad \ldots \quad (144b')$$

liegen den meisten Untersuchungen über die Einstein sehe Schwere-theorie zugrunde. Erst 1917 hat Einstein darauf hingewiesen, daß sie den Ideen der allgemeinen Eelativitätstheorie nicht voll gerecht werden, und hat daraufhin das λ-Glied in (144) hinzugefügt. Die Eonstante X läßt sich zurzeit nicht bestimmen, ist aber nach § 27 als positiv zu betrachten und kann als so klein angenommen werden, daß sie für die meisten der Folgerungen, die man (144') zieht, nichts ausmacht, so daß also diese ihren Wert behalten. Wir legen deshalb vorläufig den Anwendungen meist die Formeln (144') zugrunde; doch gehen wir in der allgemeinen Theorie und dann bei den Beispielen in § 27 von den vollständigeren Gleichungen (144) ms. Für den materiefreien Raum (T_{ik} = 0) werden wir von (144b') zu (143) zurückgeführt*), während sich durch Elimination von λ aus den vollständigeren Gleichungen (144a) und (144b) ergibt:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{4} R \cdot g_{ik} = 0. \qquad (144\,c)$$

Die Feldgleichungen, gleichviel in welcher der beiden Formen, stellen 10 partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die 10 Funktionen der gik der x^i dar; wären sie voneinander unabhängig, so lösten sie im Prinzip das Problem, aus den 10 Komponenten T_{IK} die g_{ik} zu berechnen. Nun bestehen aber zwischen den rechten, wie zwischen den linken Seiten von (144) die vier Beziehungen, welche die Divergenzfreiheit des betreffenden Tensors ausdrücken. Also sind nur sechs von diesen Gleichungen unabhängige Aussagen und man kann vier von den 10 g_{ik} als Funktionen der x^i willkürlich vorgeben. Das hat seinen guten Grund in der Willkür der Koordinaten wahl; denn sind die g_{ik} irgendwie als Funktionen der x^i gegeben, so kann man in ihren Zusammenhang mit anderen x'^i durch die allgemeine Koordinatentransformation vier willkürliche Funktionen hineinbringen. Ohne solche Willkür kann sich der Tensor der gik also nicht physikalisch bestimmen lassen (Hubert).

b) Die Erhaltungssätze. Zunächst wollen wir zeigen, daß die Gleichung $\mathfrak{Div}\, T = 0$, wie behauptet, die Erhaltung von Energie und Impuls ausspricht, wenn man die Energie und den Impuls des Schwerefeldes mit berücksichtigt. Es ist für das Schwerefeld kennzeichnend, daß wir bei den erforderlichen mathematischen Umformungen nie mit echten Tensoren zu tun haben.

*) Nach § 14 und nach der ersten Anmerkung zu § 16 hat n die Dimension $m^{-1} l^{-1} t^3$, λ hat hingegen dieselbe Dimension wie R, also nach (106 a) und der späteren Verabredung s =1 die Dimension l^{-2}.

Wir gehen aus von der Funktion

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\,H, \quad H = \sum_{klmn} g^{kl}\left[\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} n\,m \\ m \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} k\,n \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} l\,m \\ n \end{matrix}\right\}\right] + 2\lambda. \quad (146)$$

Nach (54) hängt sie ab von den g^{kl} und den ersten Ableitungen $\partial g_{ik}/\partial x^m$. Die letzteren lassen sich aber aus den ersten Differentialquotienten $\partial g^{kl}/\partial x^m$ und den g^{kl} selbst berechnen. Wir dürfen somit auch die Größen

$$\gamma^{kl} = \sqrt{-g}\,g^{kl} \quad \text{und} \quad \gamma^{kl}_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right) \quad . \quad (146)$$

zur Bestimmung von b benutzen. Wir variieren diese:

$$\delta\mathfrak{H} = (\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}) - (\mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI}) + \mathrm{VII}$$

$$\mathrm{I} = \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} n\,m \\ m \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\right), \quad \mathrm{II} = \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{\begin{matrix} n\,m \\ m \end{matrix}\right\}\right),$$

$$\mathrm{III} = \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} n\,m \\ m \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right), \quad \mathrm{IV} = \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,n \\ m \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{\begin{matrix} l\,m \\ n \end{matrix}\right\}\right),$$

$$\mathrm{V} = \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} l\,m \\ n \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{\begin{matrix} k\,n \\ m \end{matrix}\right\}\right), \quad \mathrm{VI} = \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} l\,m \\ n \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} k\,n \\ m \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right),$$

$$\mathrm{VII} = 2\lambda\delta\sqrt{-g}.$$

Vgeht in IV über, sowie man k mit *l* und *m* mit *n* vertauscht. Durch Zusammenfassung beider entsteht:

$$-(\mathrm{IV} + \mathrm{V}) = -2\sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,n \\ m \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{\begin{matrix} l\,m \\ n \end{matrix}\right\}\right)$$

$$= -2\sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{km}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ l \end{matrix}\right\}\right).$$

Bei der letzten Umformung sind die Zeiger *l, m, n* ersetzt durch *m, n, l.* Vertauscht man weiter *h* und l, so kann man nach (61c) denselben Ausdruck auch schreiben:

$$-(\mathrm{IV} + \mathrm{V}) = -\sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\left[\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{km}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ l \end{matrix}\right\}\right) + \delta\left(\sqrt{-g}\,g^{lm}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ k \end{matrix}\right\}\right)\right]$$

$$= \sum_{kln}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\delta\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^n}\right).$$

Nach (62a) ist aber

$$\mathrm{II} = \sum_{kln}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\delta\left(g^{kl}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^n}\right);$$

also

$$\mathrm{II} - (\mathrm{IV} + \mathrm{V}) = \sum_{kln}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\delta\gamma^{kl}_n.$$

Nach (74') ist

$$\sqrt{-g}\sum_{kl} g^{kl}\left\{\begin{matrix} kl \\ n \end{matrix}\right\} = -\sum_{k}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,g^{kn}\right)}{\partial x^k} = -\sum_{k}\gamma_k^{kn},$$

daher:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -\sum_{kmn}\left\{\begin{matrix} nm \\ m \end{matrix}\right\}\delta\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,g^{kn}\right)}{\partial x^k}\right) = -\sum_{kmn}\left\{\begin{matrix} nm \\ m \end{matrix}\right\}\delta\gamma_k^{kn} \\ &= -\sum_{klm}\left\{\begin{matrix} km \\ m \end{matrix}\right\}\delta\gamma_l^{kl}. \end{aligned}$$

In III und VI brauchen wir hingegen nur $\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right)$ durch $\delta\gamma^{kl}$ zu ersetzen. Nach (62b) ist

$$\mathrm{VII} = \lambda\sum_{kl} g_{kl}\,\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right).$$

Setzen wir die berechneten Ausdrücke in die Gleichung für $\delta\mathfrak{H}$ ein, so erhalten wir rechts lediglich Glieder, welche ein $\delta\gamma^{kl}$ oder ein $\delta\gamma_n^{kl}$ enthalten:

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{H} = &\sum_{klmn}\left[\left(\left\{\begin{matrix} kn \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lm \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} kl \\ n \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} nm \\ m \end{matrix}\right\}\right) + \lambda\sum_{kl} g_{kl}\right]\delta\gamma^{kl} \\ &-\sum_{klm}\left\{\begin{matrix} km \\ m \end{matrix}\right\}\delta\gamma_l^{kl} + \sum_{kln}\left\{\begin{matrix} kl \\ n \end{matrix}\right\}\delta\gamma_n^{kl}. \end{aligned}$$

Um daraus die Differentialquotienten von $\mathfrak{H}$ nach den γ^{kl} und γ^{lk} au entnehmen, müßten wir eigentlich deren Symmetrie in k und l berücksichtigen. Da wir in den Anwendungen der betreffenden Formeln aber stets die Summation nach k und l ausführen wollen, dürfen wir hier so tun, als bestände diese Symmetrie nicht, als wären vielmehr γ^{kl} und γ^{lk} zwei voneinander unabhängige Veränderliche, denn bei der erwähnten Summation hebt sich der damit begangene Fehler von selbst heraus. In diesem Sinne dürfen wir dann schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma^{kl}} &= \sum_{mn}\left[\left\{\begin{matrix} kn \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lm \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} kl \\ n \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} nm \\ m \end{matrix}\right\}\right] + \lambda g_{kl}, \\ \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma_m^{kl}} &= \left\{\begin{matrix} kl \\ m \end{matrix}\right\} - \delta_l^m\sum_n\left\{\begin{matrix} kn \\ n \end{matrix}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

Nach (80) gilt somit die Identität:

$$R_{kl} + \lambda g_{kl} = \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma^{kl}} - \sum_m\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma_m^{kl}}\right) \cdots \quad (148)$$

und die Feldgleichung (144 b) nimmt die Form an?

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma^{kl}} - \sum_m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma^{kl}_m}\right) = -\varkappa\,(T_{kl} - \tfrac{1}{2}\,T\,g_{kl}) \qquad (149)$$

Hier nun multiplizieren wir mit γ^{kl}_n und summieren nach *k* und *l*. Da nach (146)

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\,(\gamma^{kl}_n) = \frac{\partial}{\partial x^n}\,(\gamma^{kl}_m)$$

ist, können wir links

$$-\gamma^{kl}_n \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma^{kl}_m}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\gamma^{kl}_n \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma^{kl}_m}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma^{kl}_m}\frac{\partial \gamma^{kl}_m}{\partial x^n}$$

setzen und finden dann für die linke Seite von (149):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^n} - \sum_{klm} \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\gamma^{kl}_n \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma^{kl}_m}\right) = -2\varkappa \sum_m \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,t^m_n\right)}{\partial x^m},$$

wenn wir definieren:

$$t^m_n = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}}\left[\delta^m_n \Phi - \sum_{kl} \gamma^{kl}_n \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma^{kl}_m}\right]. \qquad (150)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht nach Ausführung der Differentiation:

$$-\varkappa\left[\sum_{kl} T_{kl}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right)}{\partial x^m} - \frac{1}{2}\,T\sum_{kl} g_{kl}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right)}{\partial x^m}\right].$$

Das zweite Glied dieser Summe ist

$$\frac{\varkappa}{2}\,T\sum_{kl} g_{kl}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right)}{\partial x^n} = \varkappa\,T\,\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^n}.$$

Ersetzen wir dann *T* durch $\sum_{kl} g^{kl}\,T_{kl}$, so wird die rechte Seite gleich

$$-\varkappa\sum_{kl} T_{kl}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right)}{\partial x^n} - g^{kl}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^n}\right) = -\varkappa\sqrt{-g}\sum_{kl}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^n}\,T_{kl}.$$

Nun machen wir von der Gleichung (134) $div\,T = 0$ Gebrauch. Dann wird nach (73 c)

$$-\varkappa\sqrt{-g}\sum_{kl}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^n}\,T_{kl} = 2\varkappa\sum_m \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,T^m_n\right)}{\partial x^m}.$$

Infolgedessen können wir für (149) schreiben:

$$\sum_m \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,(T^m_n + t^m_n)\right)}{\partial x^m} = 0. \qquad (151)$$

Ausführlicher geschrieben lautet die Gleichung (150) nach (145) und (147):

$$t^m_n = \frac{1}{2\varkappa}\Big[\delta^m_n\Big(\sum_{ijkl} g^{kl}\Big[\begin{Bmatrix} kl \\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ji \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kj \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} li \\ j \end{Bmatrix}\Big] + 2\lambda\Big) - \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{kl}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\right)}{\partial x^n}\left(\begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} - \delta^m_l\sum_i\begin{Bmatrix} ki \\ i \end{Bmatrix}\right)\Big]. \quad (151a)$$

Die hier neu eingeführten Größen $\mathfrak{H}$, γ^{kl}, γ^{kl}_m, t^m_n haben alle keinen Tensorcharakter gegenüber der allgemeinen Koordinatentransformation. Man sieht den Gleichungen, in welchen sie auftreten, daher nicht ohne weiteres ihre Gültigkeit in jedem Koordinatensystem an, sondern kann diese nur aus ihrer kein System bevorzugenden Ableitung entnehmen. Nur bei linearen („affinen") Transformationen von der Determinante + 1 erhalten diese Größen einfache Umrechnungsformeln. Denn bei linearen Substitutionen verhalten sich nach § 7, d) die (g-Klammern $\begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}$ wie in *k* und *l* ko-, in *m* kontravariante Tensorkomponenten; und dasselbe gilt nach (147) dann auch für die Differentialquotienten $\partial\mathfrak{H}/\partial\gamma^{kl}_m$, während *H* nach (145) skalaren Charakter annimmt. Kommt noch die Bedingung hinzu, daß die Determinante + 1 ist, woraus nach (37) die Invarianz von *g* folgt, so werden b skalar, die γ^{kl} nach (146) kontra-, und die γ^{kl}_m in *k* und *l* kontra-, in m kovariante Tensorkomponenten. Infolgedessen wird nach (151) t^m_n eine gemischte Komponente eines unsymmetrischen Tensors.

c) **Die Erhaltung der Energie und des Impulses.** Fehlt die Schwere, sind also die *gik* und ihre Determinante *g* konstant, die g-Klammern aber und damit $\mathfrak{H}$ Null, so geht die Formel (151) über in

$$\sum_m \frac{\partial T^m_n}{\partial x^m} = 0;$$

und deren Übereinstimmung mit Gleichung (XVI) von Bd. I veranlaßt uns zu dem schon im Eingang zu, § 16 angedeuteten Ansatz,

$$T^m_n = \sqrt{-g^{44}}\,p^m_n, \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad T^4_n = c\sqrt{-g^{44}}\,g_n,$$
$$T^m_4 = -\frac{1}{c}\sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{S}^m, \quad T^4_4 = -\sqrt{-g^{44}}\,W, \quad (152)$$

der den Tensor T^m_n mit der Energiedichte *W*, dem Energiestrom $\mathfrak{S}_i$ der Impulsdichte g und den Spannungen p^m_n in Verbindung bringt, soweit diese von der „Materie", d. h. den Körpern und dem elektro-

magnetischen Felde herrühren. Es liegt ferner nahe, den $t^m{}_n$ dieselben Bedeutungen für das Schwerefeld zu geben. Sehen wir zu, in welchem Sinne wir dann aus (151) die Erhaltungssätze der Energie und, des Impulses ablesen können.

Wir betrachten zuerst ein für sich allein bestehendes, räumlich begrenztes System von Körpern und elektromagnetischen Feldern. Reichen letztere ins Unendliche, so können wir die Betrachtung in manchen Fällen trotzdem aufrecht erhalten, wenn nämlich der elektromagnetische Trägheitstensor in hinreichend schnellem Maße mit wachsender Entfernung von den Körpern des Systems abnimmt. Bei der Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen ist das freilich nicht mehr der Fall. Denn unter den genannten Voraussetzungen kann man das System räumlich umschließen mit einer Fläche 0, auf der nicht nur der Tensor T_{ik} genau oder in hinreichendem Maße verschwindet, sondern auch das Schwerefeld sich nicht mehr bemerkbar macht. Dann gilt in dem Teil der „Welt", der außerhalb der dieser Fläche entsprechenden Weltröhre liegt, die Maßbestimmung der beschränkten Relativitätstheorie; d. h. es gibt dort Koordinatensysteme mit der Maßbestimmung*)

$$ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} - dx^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152a)$$

Ein solches benutzen wir dort, und setzen es in die Nähe und ins Innere der Weltröhre auf irgend eine stetige Art fort. Das Ganze nennen wir das Koordinatensystem K. In ihm integrieren wir die Gleichung (151) über den Teil eines Raumes $x^4 = const$, der innerhalb der Weltröhre liegt. An den Differentialquotienten nach x^1 x^2, x^3 läßt sich diese Operation ausführen und liefert den Wert Null, weil auf dem Mantel der Weltröhre die T^m_n und t^m_n verschwinden. Es bleibt:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \int \sqrt{-g}\,(T^4_n + t^4_n)\, dx^1 dx^2 dx^3 = 0.$$

Für zwei verschiedene Räume $x^4 = const$ hat somit jedes der vier Integrale

$$I_n = \int \sqrt{-g}\,(T^4_n + t^4_n)\, dx^1 dx^2 dx^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

denselben Wert, sie sind zeitlich konstant. Darüber hinaus sind sie unabhängig von der Art, wie wir das Koordinatensystem innerhalb des Zylinders gewählt haben. In irgend einem anderen System K' wenn es nur außerhalb mit K zusammenfällt, haben sie dieselben

*) Über die Bedenken gegen diese Grenzbedindung vergleiche § 18,a) und § 27.

Werte wie in *K*. Beweis: Man führe ein drittes System *K''* so ein, daß der Raum $x''^4 = a''$ derselbe ist wie $x^4 = a$, und der Raum $x''^4 = b''$ dasselbe wie $x'^4 = b'$. Dann hat jedes Integral den gleichen Wert für $x''^4 = a''$ und für $x''^4 = b''$, somit auch für $x^4 = a$ und $x'^4 = b'$, also auch für beliebige Räume $x^4 = const$ in *K* und $x'^4 = const$ in K'; was zu beweisen war.

Nach § 6 ist $gg^{44}\ dx^1\ dx^2\ dx^3$ das Volumenelement des Raumes der x^1, x^2, x^3 in natürlicher Messung. Nach der Deutung (152) für die T^i_k und ihrer Übertragung auf die t^i_k bilden $I^1 = I_1$ usw. die Komponenten des (mit *c* multiplizierten) Impulses, $I_1 = — I_4$ hingegen die Energie des betrachteten Systems*). Die Aussage, daß die I_n sich zeitlich nicht ändern, enthält somit die Erhaltungssätze in der uns geläufigen Integralform.

Der Integrand in (153) verhält sich bei linearen Transformationen von der Determinante + 1 wie die kovariante Komponente eines Vektors. Beweis: Nicht nur die T^i_n sondern nach Abschnitt b) dieses Paragraphen auch die t^i_n bilden dann einen Tensor. Ist P ein beliebiger Vektor, so bilden somit die Summen

$$\sum_n (T^i_n + t^i_n)\ P^n = \Phi^i$$

einen Vektor. Infolgedessen ist

$$\sqrt{-g} \sum_n (T^4_n + t^4_n)\ P^n\ dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g}\ dx^1 dx^2 dx^3 \Phi^4$$

ein Skalar; nämlich der Inhalt des von den Vektoren dx^1, dx^2, dx^3 und Φ gebildeten vierdimensionalen Bereichs (§ 6). Nach der Vektordefinition folgt daraus die Vektoreigenschaft von

$$\sqrt{-g}\ (T^4_n + t^4_n)\ dx^1\ dx^2\ dx^3.$$

Für ein vollkommenes statisches System sind die T^m_n und t^m_n längs jeder Weltlinie unveränderlich. Man kann dann schließen, daß die vier Größen I_n ,welche Energie und Impuls des Körpers geben, sich wie ein Vierervektor umrechnen. Dieser hat natürlich die Richtung der Weltlinie, also der Vierergeschwindigkeit, weil im Ruhsystem 3 die T^4_N und t^4_n für $n = 1,2,3$, somit auch die entsprechenden I_n Null sind. Man kann ihn also gleich *mY* setzen, wo *m* die Ruhmasse bedeutet. Eine Lorentz-Transformation erfüllt- alle Be-

*) Es handelt sich hier um die Maßbestimmung (152 a); also ist $I^1 = g^{11}\ I_1 = I_1$ aber $I^4 = g^{44}\ I_4 = I_4$.

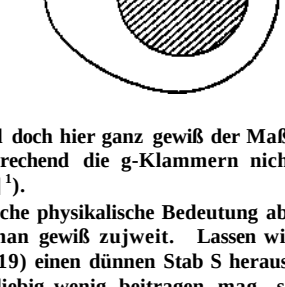
dingungen, die wir hier für die Transformation aufgestellt haben. Unterwerfen wir also das Koordinatensystem, das nach Voraussetzung weit außerhalb des Körpers die pseudoeuklidische Haßbestimmung trägt, einer Lorentz-Transformation, so rechnen sich dabei die I_n genau so um, wie in der beschränkten Relativitätstheorie. Ein vollkommenes statisches System befolgt also, auch wenn wir sein Schwerefeld berücksichtigen, die Dynamik desMassenpunktes im Sinne der beschränkten Relativitätstheorie, die in Gleichung (XXVII) von Bd. I

$$K = \frac{d(m\,V)}{dt}$$

zusammengefaßt ist. Wir wollen aber nicht verhehlen, daß nach unserer Ansicht die Voraussetzung des vollständigen statischen Systems bei diesem Schluß durchaus notwendig ist. Bildet man die I_n für verschiedene, durch Lorentz-Transformation verbundene Systeme, so führt man die Integration in (153) über verschiedene dreidimensionale Räume in der „Welt" aus; ähnlich, wie es Fig. 9 in Bd. I darstellt. Zwischen zwei derartigen Integralen besteht im allgemeinen gar kein Zusammenhang. Nur wenn der Integrand längs jeder Weltlinie seinen Wert behält, können wir den obigen Satz beweisen.

Nun läge es außerordentlich nahe, die Gleichungen (151) als die Differentialform der Erhaltungssätze zu betrachten. Aber diese Deutung führt auf eine Schwierigkeit, die mit dem Fehlen der Tensoreigenschaft bei den t^m_n zusammenhängt: Man kann gelegentlich durch eine Koordinatentransformation alle t^m_n für ausgedehnte Bereiche (nicht nur in einem Weltpunkt) zu Null machen, und zwar in Fällen, in denen gewiß ein Schwerefeld vorhanden ist. In der Umgebung einer schweren Kugel z. B. können wir solche Koordinaten einführen, obwohl doch hier ganz gewiß der Maßtensor nicht konstant, und dementsprechend die g-Klammern nicht Null sind (vgl. § 22) [Schrödinger][1]).

Fig. 19.



Man hat den t^m_n daraufhin jegliche physikalische Bedeutung absprechen wollen. Damit aber geht man gewiß zujweit. Lassen wir z. B. aus der schweren Kugel *K* (Fig. 19) einen dünnen Stab S herausragen, der zu dem Schwerefelde beliebig wenig beitragen mag, so

genügt doch diese beliebig geringe Veränderung, um Spannungen hervorzubringen, die sieh nieht forttransformieren lassen. Denn dieser Stab enthält sicher elastische Spannungen, die der Anziehung durch die Kugel das Gleichgewicht halten. Umgeben wir nun die Kugel mit einer Fläche F, welche den Stab einmal senkrecht schneidet, so können wir aus (151), indem wir $n = 1$ setzen, den Differentialquotienten nach x^4 wegen der zeitlichen Unveränderlichkeit des Feldes unterdrücken und über den von F eingeschlossenen dreidimensionalen Raum integrieren, auf die Gleichung

$$0 = \int \sum_{m=1}^{4} \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,(T_1^m + t^m{}_1)\right)}{\partial x^m}\, dx^1 dx^2 dx^3$$
$$= \int \sqrt{g}\, g^{44} [\pm (p_1^1 + s_1^1)\, dx^2 dx^3 \pm (p_1^2 + s_1^2)\, dx^3 dx^1 + (p_1^3 + s_1^3)\, dx^1 dx^2]$$

schließen. (Die s_k^i bedeuten die Spannungen des Schwerefeldes.) Die Integration ist im zweiten Integral über die Fläche F auszuführen. Nun verlegen wir die positive x^1-Achse in den Stab. Der Anteil der p_k^i an dem Flächenintegral beschränkt sich dann auf p_1^1, multipliziert mit dem Querschnitt des Stabes; er ist sicher positiv, da im Stabe ein Druck in der Längsrichtung herrscht. Infolgedessen können in diesem verschwindenden Integral nicht überall alle s_k^i Null sein. Das gilt in jedem Koordinatensystem [Einstein][2]).

Den weiteren Einwand, daß man umgekehrt in eine „Welt" mit pseudoeuklidischer Geometrie Schwerefelder hinein transformieren könne, für welche nicht alle t_k^i verschwinden, erhebt Hans Bauer[3]). Er führt im Streckenraum die Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein und geht von diesen zu

$$\xi^1 = \frac{1}{3} r^3, \quad \xi^2 = -\cos\vartheta, \quad \xi^3 = \varphi$$

über, während x^4 beibehalten wird. Dann ergeben sich in der Tat die t_k^i als zum Teil von Null verschieden.

Man kann sich des Eindrucks nicht erwehren, daß wir hier vor einem Rätsel stehen, das erst die Zukunft-ganz lösen kann.

d) Die Trägheit der Energie. Die auf n = 4 bezügliche Gleichung (161) integrieren wir über einen geschlossenen Bereich im Streckenraum eines beliebigen Koordinatensystems, nachdem wir in sie gemäß (152) und den entsprechenden Festsetzungen

$$t^m{}_4 = -\frac{1}{c}\sqrt{-g^{44}}\, g^m, \quad t^4{}_4 = -\sqrt{-g^{44}}\, w$$

die Energieströmung $ und die Energiedickte w des Schwerefeldes eingeführt haben. Wir finden:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \sqrt{g g^{44}}\,(W + w)\,dx^1\,dx^2\,dx^3$$
$$+ \int \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g g^{44}}\,(\mathfrak{S}^1 + \mathfrak{s}^1)\right) + \cdots + \cdots\right] dx^1\,dx^2\,dx^3 = 0.$$

Die Umformung des zweiten Integrals nach dem Gaußsehen Integralsatz [Gleichung (76), nur ist die Wurzel $\sqrt{-g}$, welche nach (73) in dem Ausdruck für die Divergenz auftritt, ersetzt durch $\sqrt{g g^{44}}$], ergibt hier für die Gesamtenergie E des betreffenden Bereichs

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int (\mathfrak{S}^n + \mathfrak{s}^n)\,d\sigma;$$

und man erkennt daran, daß $\mathfrak{S}$ und & die Energie angeben, welche durch die zu n senkrechte Flächeneinheit in der Einheit der Zeit t strömt. Wie in dem Begriff der in § 14 definierten Geschwindigkeit q also auch in diesen die Willkür der Definition von *t*.

In Band I schlossen wir aus der Symmetrie des Energieimpulstensors auf das Gesetz von der Trägheit der Energie in seiner allgemeinsten Fassung, die ihm Planck gegeben hat:

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}.$$

Hier läßt sich dieser Schluß für beliebige Koordinatensysteme nicht ziehen. Nur in den bevorzugten, für welche die Gleichungen (49) gelten, lassen sich nach § 6, h) die gemischten Komponenten T^i_4 und T^4_i auf denselben Raumvektor zurückführen. Die dortigen Regeln geben dann nach geringer Zwischenrechnung das Ergebnis

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2(-g_{44})}. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (153\,a)$$

Steht die Zeitachse überall auf den Streckenräumen senkrecht, so ist die EnergiestrÖmung, dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit $V = c\sqrt{-g_{44}}$, gleich der Impulsdichte.

Für einen spannungsfreien Körper und für sein Ruhsystem ist nach (136 a)

$$\mathring{T}^4_4 = -c^2\mu.$$

Der Vergleich mit (162) lehrt:

$$\mu = \frac{\mathring{W}}{c^2\sqrt{-\mathring{g}_{44}}}$$

oder, durch Integration über das Ruhvolumen,

$$m = \frac{\overset{\circ}{E}}{c^2 \sqrt{-\overset{\circ}{g}_{44}}} \quad \text{(153b)}$$

In der Bewegungsgleichung (142) spielt nun $\frac{m}{\sqrt{-\overset{\circ}{g}_{44}}}$ die Rolle der Masse. Sie ist gleich $\frac{\overset{\circ}{E}}{c^2(-\overset{\circ}{g}_{44})} = \frac{\overset{\circ}{E}}{V^2}$. Auch in dieser Formulierung des Satzes von der Trägheit der Energie tritt in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht c, sondern V als Lichtgeschwindigkeit auf. Das hängt aber immer damit zusammen, daß sich die hier auftretenden Größen auf die nicht natürliche Zeitveränderliche t beziehen. In einem rechtwinkeligen geodätischen System, mit der Maßbestimmung $ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} - c^2 dt^2$ für den hervorgehobenen Weltpunkt wäre freilich t die im natürlichen Maß, d. h. mit einer in diesem System ruhenden Uhr, gemessene Zeit; dann aber geht aus (153 a) und (153 b) wegen $\overset{\circ}{g}_{44} = -1$ der aus der beschränkten Relativitätstheorie bekannte Zusammenhang zwischen Impuls und Energiestrom, zwischen Ruhmasse und Ruhenergie hervor.

Für den Energiestrom und den Impuls des Schwerefeldes gilt dieser Zusammenhang wegen der Unsymmetrie des Affintensors $t^m{}_n$ nicht.

VI. Anwendungen der Grundgesetze auf besondere Fälle.

§ 18. Statische Felder.

a) Die Koordinatenwahl. Die erste Frage bei jeder nach der allgemeinen Relativitätstheorie zu lösenden Aufgabe ist, wie man das Koordinatensystem x^1, x^2, X^3, x^4 wählen soll. Ihre Beantwortung ist entscheidend für die mathematischen Schwierigkeiten, auf welche man hinterher stößt, und es zeigt sich in ihr um so mehr die mathematische Geschicklichkeit, als die allgemeine Theorie nicht immer einen Fingerzeig dafür gibt, sondern im Gegenteil grundsätzlich jede Wahl für zulässig bezeichnet. Bei Untersuchung statischer Felder werden wir allerdings von selbst dazu geführt, ein System zu bevorzugen, welches für alle am Felde beteiligten Körper Ruhsystem ist; d. h. nach § 14, wir werden dem

Maßtensor die Bedingungen (49) auferlegen. Darüber hinaus werden wir noch fordern, daß in dem zu benutzenden System alle Komponenten dieses Tensors von der Zeitveränderlichen $X^4 = ct$ unabhängig sind. Wir setzen also:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= da^2 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 dx^{4^2} \\ da^2 &= \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx^i dx^k;\ g_{i4} = 0 \text{ für } i = 1, 2, 3;\ g_{44} = -\left(\frac{V}{c}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (154)$$

Wie in § 14 ist *da* das Linienelement des Streckenraumes, 7 die Lichtgeschwindigkeit.

Dies sind die Grundlagen für die Rechnungen der Abschnitte b, *c* und *d*. Über die Beispiele für statische Schwerefelder, welche wir bringen wollen, ist noch zu bemerken: Wir verwenden die Feldgleichungen zunächst in der verkürzten Gestalt (144'); erst in § 27 gehen wir auf die Bedeutung des /l-Gliedes ein. Weiter nehmen wir an, daß in großem Abstande von den Massen des betrachteten Feldes jede Schwerewirkung verschwindet, d. h. daß sich dann unter den Koordinatensystemen, für welche eine Maßbestimmung von der Form (154) gilt, auch solche befinden, für welche im räumlich Unendlichen $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -1$, alle anderen $g_{ik} = 0$ sind.

Die physikalische Bedeutung dieser Grenzbedingung mag die folgende Überlegung beleuchten: Sämtliche Massen des statischen Feldes ruhen, nicht nur gegeneinander, sondern auch gegen das gewählte Koordinatensystem. Dies System ist nach der allgemeinen Relativitätstheorie nichts physikalisch Wirkliches. Eine physikalische Aussage läge also nur in der Angabe, daß diese Massen gegen das Fixsternsystem oder gegen andere, weit entfernte, große Massen ruhen. Deren Einfluß aber vermögen wir hier nur durch die genannte Grenzbedingung in Rechnung zu ziehen. Daß diese gegen eine Lorentz-Transformation invariant sind, enthält den Satz, daß eine gleichförmige Geschwindigkeit der fernen Massen gegen die unseres Feldes, oder, was dasselbe ist, eine solche Geschwindigkeit der Feldkörper gegen jene, nichts an dem Schwerefeld ändert. Die Grenzbedingung macht das hier eingeführte Koordinatensystem zu einem Inertialsystem in ganz ähnlichem Sinn, wie es das Inertialsystem der beschränkten Relativitätstheorie war.

Aber das Dasein eines solchen Systems widerstreitet im Grunde der allgemeinen Relativitätstheorie. Und deswegen ergibt sich auch sogleich eine Schwierigkeit, wenn man nach dem Schwerefeld des ganzen Fixsternsystems fragt, dessen Massen freilich nicht streng

genommen gegeneinander ruhen, aber doch nur gegen die Lichtgeschwindigkeit geringe und für diese Überlegung unwesentliche Geschwindigkeiten haben. Es entspräche den grundlegenden Gedanken der allgemeinen Relativitätstheorie, wenn in hinreichendem Abstand von allen anderen Massen die Trägheit eines einzelnen Körpers verschwände. Denn die Trägheit kann nach ihr nur ein Relationsbegriff sein, der nur auf zwei oder mehr Körper angewandt werden kann. (In der alten Physik, einschließlich der beschränkten Relativitätstheorie, konnte das Bezugssystem als etwas physikalisch Wirkliches den einen Körper ersetzen.) Nach den erwähnten Grenzbedingungen bleibt die Trägheit aber im unendlich Fernen bestehen.

Man könnte dieses Bedenkens wegen die Frage auf werfen, ob die genannte Grenzbedingung nicht durch eine undere zu ersetzen ist. Es gibt einen Grund, der gegen die Möglichkeit dieses Ausweges spricht. In dem zentrisch-symmetrischen Fall des statischen Schwerefeldes, den wir in § 22 u. f. in aller Strenge untersuchen werden, ergibt sich gerade diese Grenzbedingung als notwendige Folge aus den Feldgleichungen ohne das λ-Glied. Sie ist also offenbar doch ziemlich eng mit ihnen verknüpft; und so spricht jenes Bedenken gegen die Feldgleichungen in der Form von (144'). Dieser Sachverhalt hat Einstein gerade zur Einführung des λ-Gliedes gebracht. Das ermöglicht nämlich, den Streckenraum als nach Art einer Kugel geschlossen hinzustellen, wie wir in § 27 ausführlich darlegen. Dann ist das räumlich Unendliche überhaupt beseitigt, und es bedarf keiner Grenzbedingung mehr.

Wir wollen dieser Frage vorläufig aus dem Wege gehen, indem wir unsere Betrachtung auf einen kloinen Teil der gesamten Körperwelt beschränken. Bei den großen Abständen zwischen den Himmelskörpern gibt es um jeden von ihnen und um jedes System von mehreren herum immer einen Bereich, in welchem sowohl ihr Einfluß als der der anderen Körper keine merklichen Abweichungen von den pseudoeuklidischen Werten der *gik* hervorruft. Dieser Bereich ist das „Unendliche" unserer folgenden Darlegungen.

b) Die g-Klammern und der Krümmungstensor des statischen Schwerefeldes lassen sich auf die entsprechenden Größen für den Streckenraum und die Lichtgeschwindigkeit V zurückführen. Aus der Maßbestimmung (154) leiten wir zunächst auf dem üblichen Wege, d. h. mittels des Variationsprinzips

$$\delta \int \left(\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^k - \frac{V^2}{c^2}\, \dot{x}^4{}^2 \right) ds = 0 \quad . \; . \; . \quad (155)$$

die *g*- Klammern her. Dabei bezeichnen wir die g-Klammern, welche sich auf die Maßbestimmung im Streckenraum beziehen, zum Unterschied mit einem Stern; also nach. Gleichung (54) und (53)

$$\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}^* = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{3} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right).$$

Außerdem bedenken wir, daß nach § 9,a) die $\frac{\partial V}{\partial x^i}$ (i = 1, 2, 3) die kovarianten Komponenten des dreidimensional verstandenen Gradienten von V, die Summen

$$\sum_{i=1}^{3} g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^i} = grad^k V$$

dessen kontravariante Komponenten darstellen.

Für x^4 finden wir so die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{ds} (V^2 \dot{x}^4) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}^4 + \frac{2}{V} \dot{x}^4 \sum_{m=1}^{3} grad_m V . \dot{x}^m = 0. \quad (166)$$

Für die anderen drei x^i müssen wir, soweit dabei die Doppelsumme von (155) in Betracht kommt, dieselbe Rechnung wie in § 7, a) bei der Herleitung der geodätischen Linie ausführen; nur treten noch gewisse Glieder dazu, welche aus der $\frac{V^2}{c^2} \dot{x}^{4^2}$ springen. Statt (52) erhalten wir:

$$2 \frac{d}{ds} \left(\sum_{k=1}^{3} g_{ik} \dot{x}^k \right) - \sum_{j,k=1}^{3} g_{jk,i} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{2V}{c^2} \cdot grad_i V \dot{x}^{4^2} = 0.$$

Die Ausführung der Differentiation nach s macht daraus:

$$\sum_{k=1}^{3} g_{ik} \ddot{x}^k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3} \dot{x}^j \dot{x}^k \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) + \frac{V}{c^2} grad_i V . \dot{x}^{4^2} = 0.$$

Schließlich multiplizieren wir mit g^{il} und summieren nach i; nach (20) folgt dann

$$\ddot{x}^l + \sum_{j,k=1}^{3} \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix} \right\}^* \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{V}{c^2} grad^l V . \dot{x}^{4^2} = 0. \quad . \quad . \quad (167)$$

Gleichung (157) beweist u. a., daß die Projektionen der geodätischen Weltlinien auf den Streckenraum dessen geodätische Linien

nur dann ergeben, wenn die Lichtgeschwindigkeit konstant ist. Nur unter dieser Bedingung bilden die Lichtstrahlen oder die Bahnen freier Massenpunkte geodätische Linien des Streckenraumes.

Aus (157) und (156) entnehmen wir für i, k, *l* = 1, 2, 3

$$\left.\begin{array}{llll} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}^*, & \left\{ \begin{matrix} 4\,4 \\ l \end{matrix} \right\} = \dfrac{V}{c^2}\, grad^l V, & \left\{ \begin{matrix} 4\,i \\ l \end{matrix} \right\} = 0, \\ \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ 4 \end{matrix} \right\} = 0, & \left\{ \begin{matrix} i\,4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{V}\, grad_i V, & \left\{ \begin{matrix} 4\,4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 0. \end{array}\right\} \quad (158)$$

Nach § 7, a) haben die zum Variationsproblem (165) gehörenden Lag ran gesehen Gleichungen das Integral:

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, \dot{x}^i x^k - \frac{V^2}{c^2}\, \dot{x}^4 = const.$$

Bei der Division mit $\dot{x}^4$ ergibt die Doppelsumme nach § 14 $q^2 : c^2$. Nach (166) ist aber

$$\dot{x}^4 = \frac{const}{V^4}.$$

Also folgt:. . $q^2 = V^2 - B V^4$. (158a)

Die Integrationskonstante *B* ist notwendig positiv.

Handelt es sich um die Bewegung eines Massenpunktes, so führt man in die Differentialgleichungen (156) und (157) statt *S* besser die Eigenzeit $\tau = s\sqrt{-1}$ ein; deren Form bleibt dabei erhalten. Von einer Lösung $x^i = f^i(\tau)$ $(i = 1, \ldots 4)$ gelangen wir zu einer neuen, wenn wir die Vorzeichen von f^4 und τ umkehren, denn dann wechseln x^1, x^2, x^3 und x^4, nicht aber x^1 ,x^2 ,x^3 und x^4 das Vorzeichen. Eliminieren wir aus den, beiden so gewonnenen Systemen von je vier Gleichungen den Parameter τ, so finden wir

$$x^i = F^i(x^4) \quad \text{und} \quad x^i = F^i(-x^4) \; (i = 1, 2, 3);$$

und das beweist, daß in Schwerefeldern, wie wir sie hier betrachten, die Fallbewegung unmittelbar umkehrbar ist, wie auch in der alten Mechanik. Jede dabei mögliche Bahn kann hin und zurück mit Geschwindigkeiten zurückgelegt werden, deren Betrag im gleichen Kurvenpunkt beidemal der gleiche ist.

Vom Krümmungstensor R_{kl} brauchen wir zunächst nur die Komponente

$$R_{44} = \sum_{m=1}^{4} \left[\frac{\partial}{\partial x^4} \left\{ \begin{matrix} 4\,m \\ m \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} 4\,4 \\ m \end{matrix} \right\} \right] + \sum_{m,n=1}^{4} \left[\left\{ \begin{matrix} 4\,n \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 4\,m \\ n \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 4\,4 \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m\,n \\ n \end{matrix} \right\} \right].$$

[Vgl. (80)]. Hierin fallen zunächst alle Differentialquotienten nach x^4 fort. Die drei übrigbleibenden Glieder der ersten Summe ergeben [vgl. (158)]

$$-\frac{1}{c^2}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^m}(V\,grad^m V) = \frac{1}{c^2}\sum_{m=1}^{3}\left(grad_m V\,grad^m V + V\frac{\partial\, grad^m V}{\partial x^m}\right)$$

$$= -\frac{1}{c^2}|grad\,V|^2 - \frac{V}{c^2}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\, grad^m V}{\partial x^m}.$$

In der Doppelsumme ist $\left\{\begin{matrix}4\,n\\ m\end{matrix}\right\} = 0$, wenn beide Summationszeiger gleich vier oder beide von vier verschieden sind. Ist nur $m = 4$, so wird

$$\left\{\begin{matrix}4\,n\\ m\end{matrix}\right\} = V^{-1}\,grad_n V, \qquad \left\{\begin{matrix}4\,m\\ n\end{matrix}\right\} = \frac{V}{c^2}\,grad^n V,$$

und ist nur $n = 4$, so gilt umgekehrt

$$\left\{\begin{matrix}4\,n\\ m\end{matrix}\right\} = \frac{V}{c^2}\,grad^m V, \qquad \left\{\begin{matrix}4\,m\\ n\end{matrix}\right\} = V^{-1}\,grad_m V.$$

Also ergibt die erste [illegible] $\left\{\begin{matrix}4\,4\\ m\end{matrix}\right\} = \frac{V}{c^2}\,grad^m V$ $\frac{2}{c^2}|grad\,V|^2$. In der zweiten Hälfte verschwindet $\left\{\begin{matrix}\cdot\,\cdot\\ m\end{matrix}\right\}$ für m und wenn auch n von 4 verschieden ist, $\left\{\begin{matrix}m\,n\\ \cdot\end{matrix}\right\}$ soi $= \left\{\begin{matrix}m\,n\\ n\end{matrix}\right\}^*$; ist hingegen n = 4, so w i $\left\{\begin{matrix}m\,n\\ n\end{matrix}\right\} = V^{-1}\,grad_m V$. Daraus ergibt sich also der Summand

$$-\frac{1}{c^2}|grad\,V|^2 - \frac{V}{c^2}\sum_{m,n=1}^{3}\left\{\begin{matrix}m\,n\\ n\end{matrix}\right\}^* grad^m V$$

oder nach Rechnungsregel (62a) in § 7

$$-\frac{1}{c^2}|grad\,V|^2 - \frac{V}{c^2\sqrt{g g^{44}}}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\sqrt{g g^{44}}}{\partial x^m}\,grad^m V;$$

und man findet im Hinblick auf Rechnungsregel (73) aus § 9:

$$\left.\begin{aligned} R_{44} &= -\frac{V}{c^2}\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}(grad^m V) + \frac{1}{\sqrt{g g^{44}}}\,grad^m V\frac{\partial\sqrt{g\,g^{44}}}{\partial x^m}\right)\\ &= -\frac{V}{c^2\sqrt{g g^{44}}}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\left(\sqrt{g g^{44}}\,grad^m V\right)}{\partial x^m} = -\frac{V}{c^2}\cdot div\,grad\,V\\ &= -\frac{V}{c^2}\Delta V. \end{aligned}\right\} \qquad (159)$$

Denn wir können für drei Dimensionen den Laplaceschen Operator Δ genau so einführen wie den Operator $\square$ für vier oder mehr Dimenisonen [siehe Gleichung (74 h)].

Für spätere Zwecke aber berechnen wir hier sogleich auch die anderen Komponenten des Krümmungstensors. In der Darstellung (80) für $R_{l\,4}$ heben sich zunächst die beiden Glieder der einfachen Summe mit $m = 4$ gegenseitig fort. Es bleibt so, wenn wir die Summation nach m und n zunächst nur von 1 bis 3 ausführen:

$$
\begin{aligned}
R_{i4} = &\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}\left\{\begin{matrix} i\,m \\ m \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^m}\left\{\begin{matrix} i\,4 \\ m \end{matrix}\right\}\right)\\
&+\sum_{m,\,n=1}^{3}\left(\left\{\begin{matrix} i\,n \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4\,m \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} i\,4 \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ n \end{matrix}\right\}\right)\\
&+\sum_{m=1}^{3}\left(\left\{\begin{matrix} i\,4 \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4\,m \\ 4 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} i\,4 \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\}\right)\\
&+\sum_{n=1}^{3}\left(\left\{\begin{matrix} i\,n \\ 4 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} i\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4\,n \\ n \end{matrix}\right\}\right).
\end{aligned}
$$

Die dritte dieser Summen verschwindet identisch, in den anderen aber fällt hier wegen $\frac{\partial}{\partial x^4} = 0$ und wegen (158) jedes einzelne Glied fort.

Somit ist $R_{i4} = 0$ für i = 1,2, 3. . . . . .(159 a)

Führen wir ebenso in der Darstellung von $R_{kl}(k, l = 1, 2, 3)$ die Summationen zunächst nur von 1 bis 3 durch, so können wir nach der ersten der Gleichungen (158) die auftretenden g-Klammern durch die mit einem Strich versehenen ersetzen. Da sich diese auf die Maßbestimmung $da^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ beziehen, so ergibt sich auf diese Weise der ihr zugehörige Krümmungstensor P_{kl}. Die anderen Summanden aber lauten: In der einfachen Summe, wenn wir den Differentialquotienten nach x^4 sogleich fortlassen:

$$
\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\begin{matrix} k\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial x^k\,\partial x^i} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial x^k}\frac{\partial V}{\partial x^i};
$$

in der Doppelsumme:

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{3}\left(\left\{\begin{matrix} k\,4 \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,m \\ 4 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} k\,i \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\}\right) + \sum_{n=1}^{3}\left(\left\{\begin{matrix} k\,n \\ 4 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,4 \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} k\,i \\ 4 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4\,n \\ n \end{matrix}\right\}\right)\\
+\left\{\begin{matrix} k\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} k\,i \\ 4 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Nach (158) bleibt hiervon nur übrig:

$$+\left\{\begin{matrix}k\,4\\4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}l\,4\\4\end{matrix}\right\}-\sum_{m=1}^{3}\left\{\begin{matrix}k\,l\\m\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}m\,4\\4\end{matrix}\right\}=+\frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial x^k}\frac{\partial V}{\partial x^l}-\frac{1}{V}\sum_{m=1}^{3}\left\{\begin{matrix}k\,l\\m\end{matrix}\right\}^{*}\frac{\partial V}{\partial x^m}.$$

Also schließen wir

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} &= P_{kl}+\frac{1}{V}V_{kl}\quad (k,l=1,2,3),\\ V_{kl} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^k\,\partial x^l}-\sum_{m=1}^{3}\left\{\begin{matrix}k\,l\\m\end{matrix}\right\}^{*}\frac{\partial V}{\partial x^m}\end{aligned}\right\}. \qquad (159\text{ b})$$

nach § 9, d [vgl. besonders (§ 74 i)] durch zweimalige, in bezug auf die Maßbestimmung $d\sigma^2$ kovariante Differentiation aus V hervorgeht. Weiter folgt, wenn wir $\sum_{k,l=1}^{3} g^{kl}P_{kl}=P$, $\sum_{k,l=1}^{3} g^{kl}V_{kl}=\Delta V$ setzen:

$$\left.\begin{aligned} R &= P+\frac{2}{V}\Delta V,\quad R_{44}-\frac{1}{2}R\cdot g_{44}=\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}P\\ R_{kl}-\frac{1}{2}R\cdot g_{kl} &= P_{kl}-\frac{1}{2}P\cdot g_{kl}+\frac{1}{V}(V_{kl}-g_{kl}\Delta V).\end{aligned}\right\} \qquad (159\text{ c})$$

c) **Elektrostatik.** Den Maxwellschen Gleichungen(114a) genügt man in dem Koordinatensystem, welches derMaßbestimmung(154) zugrunde liegt, durch den Ansatz

$$\mathfrak{E}=-grad\,\varphi,\quad \mathfrak{B}=\mathfrak{H}=0. \qquad (160)$$

Das elektrostatische Potential φ muß dabei der verallgemeinerten Laplace-Poissonsehen Differentialgleichung genügen, welche für $\varepsilon=1$ wegen $\sqrt{-g^{44}}=\frac{c}{V}$

$$div\,\mathfrak{D}=-div\left(\frac{c}{V}grad\,\varphi\right)=\varrho. \qquad (161)$$

lautet [vgl. (117)].

d) **Die Erhaltung der Schwingungszahl des Lichts.** Im leeren, auch von elektrischen Ladungen freien Raum gilt nach (126) die Wellengleichung $W_{ij}\mathfrak{P}=0$ für den Hertzsehen Sechservektor $\mathfrak{P}$. Nach der Definition (85 g) ist dieser Wellenausdruck homogen und linear in den Komponenten von $\mathfrak{P}$ und ihren Ableitungen. Da unter Voraussetzung der Maßbestimmung (154) die Koeffizienten von x^4 unabhängig sind, kann man mit dem Ansatz

$$\mathfrak{P}_{ij}=\mathfrak{A}_{ij}e^{\nu x^4} \qquad (162)$$

die Wellengleichung befriedigen, wenn V eine (rein imaginäre) Konstante bedeutet; man muß nur den Sechservektor $\mathfrak{A}_{ij}$ als Funktion von x^1, x^2, x^3 passend bestimmen. Damit ist also die Möglichkeit elektrischer Wellen bewiesen, die sich mit einer in bezug auf t unveränderlichen Schwingungszahl ausbreiten. Wir können aber sogar noch beweisen, daß andere Sinuswellen unmöglich sind. Denn fassen wir in dem Ansatz (162) v als eine noch zu bestimmende Funktion von x^1, x^2 ,x^3 auf, so liefert jede Differentiation der e-Funktion nach x^1, x^2 oder x^3 den Faktor x^4, multipliziert mit dem entsprechenden Differentialquotienten von V. Wir richten unser Augenmerk auf die Glieder mit dem Faktor x^{42}; diese entstehen durch zweimalige Differentiation nach den drei anderen Koordinaten und stammen nach (85 g) und (74 h) aus dem Summanden

$$\sum_{k,\,l=1}^{3} g^{kl}\,\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l},$$

der im $\square\,\mathfrak{P}_{ij} = \sum_{kl} g^{kl} D_l D_k \mathfrak{P}_{ij}$ steckt. Sie lauten (ohne die e-Funktion)

$$\mathfrak{A}_{ij} x^{42} \sum_{k,\,l=1}^{3} g^{kl}\,\frac{\partial v}{\partial x^k}\,\frac{\partial v}{\partial x^l} = \mathfrak{A}_{ij} x^{42}\,|\,grad\,v\,|^2.$$

Sonst enthält die Wellengleichung, befreit von dem überall auftretenden Faktor e^{vx4}, nur noch von x^4 unabhängige und zu x^4 proportionale Summanden. Um sie identisch in x^4 zu erfüllen, müssen wir aber den Faktor von $x4^2$ zu Null machen. Da im Streckenraum eine definite Maßbestimmung gilt, schließt man aus dem Verschwinden von $|\,grad\,v\,|^2$ auf das Verschwinden jeder Komponente des Gradienten, also auf ein konstantes v.

Wie in § 14 angekündigt, überträgt also jede elektrische Welle für ein Koordinatensystem mit der Maßbestimmung (154) in ihrer Periode das Zeitmaß t von einem Ort zum anderen. Dies Zeitmaß erhält dadurch zweifellos eine physikalische Bedeutung, durch die es sich vor anderen Zeitmaßen, die man durch Koordinatentransformation gewinnen .könnte, auszeichnet. Diese Bedeutung überträgt sich auf die Geschwindigkeit q und die Lichtgeschwindigkeit V von § 14.

§ 19. Die Planetenbewegung und die Rotverschiebung der Spektrallinien.

a) Die Newtonsche Theorie der Planetenbewegung als Näherung. Bis hierher haben wir das statische Feld mit der Maßbestimmung (154) in aller Strenge behandelt. Jetzt führen wir drei Näherungen ein. Erstens nämlich lassen wir das λ-Glied in den Feldgleichungen fort, zweitens setzen wir im Hinblick auf die weitgehende empirische Bewährung der euklidischen Geometrie als Maßbestimmung im Streckenraum $g_{ii} = 1 + \gamma_{ii}$, $g_{ik} = \gamma_{ik}$, wenn $i \gtrless k$, und drittens im Hinblick auf die bisher überhaupt unmerklich gebliebenen Abweichungen der Lichtgeschwindigkeit V vom Wert c:

$$V = c + \frac{\Psi}{c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

wobei

$$\gamma_{ik} \ll 1, \quad \frac{\Psi}{c^2} \ll 1 \quad \ldots \quad (163a)$$

sein soll. Nach diesen Annahmen wird aus (159) bis auf Größen höherer Ordnung

$$R_{44} = -\frac{1}{c^2}\Delta\Psi = -\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^{i2}}.$$

Weiter gilt nach (136a) für unser Koordinatensystem, in welchem alle Körper ruhen,

$$T^4_4 = -c^2\mu$$

und nach (154)

$$\left.\begin{aligned} T_{44} &= g_{44}\,T^4_4 = V^2\mu, \quad T = T^4_4 = -c^2\mu \\ T_{44} - \frac{1}{2}g_{44}\,T &= \frac{1}{2}V^2\mu = \frac{1}{2}c^2\left(1+\frac{\Psi}{c^2}\right)^2\mu. \end{aligned}\right\} \quad (163b)$$

Daher folgt aus der auf B_{44} bezüglichen Feldgleichung (144 b') unter Vernachlässigung von Ψ/c^2 gegen 1

$$\Delta\Psi = \frac{\varkappa}{2}c^4\mu. \quad \ldots \quad (164)$$

Diese Gleichung aber geht in die Differentialgleichung für das Newtonsche Potential ($\Delta\Psi = 4\pi G\mu$) über, sofern man der Konstanten in den Einsteinsehen Feldgleichungen den Wert

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad \ldots \quad (164a)$$

gibt. Unsere Grenzbedingung fürs Unendliche zwingt uns nun, dort V =. c, also $\Psi = 0$ zu setzen. Ψ bestimmt sich also genau wie in der alten Theorie der Schwere aus den Massen. Zahlenmäßig ergibt sich aus (164 a) nach (2)

$$\varkappa = 2{,}071 \cdot 10^{-48}\ \mathrm{g^{-1}\,cm^{-1}\,sec^2}. \qquad (164\mathrm{b})$$

Die Größe Ψ/c^2 bleibt nach den Berechnungen im folgenden Paragraphen stets in der Größenordnung 10^{-6}, so daß die Bedingung (163 a) gut erfüllt ist*).

Nach (136 a) und (152) besteht in der hier durchgeführten Näherung zwischen μ und der Energiedichte *W* der Zusammenhang

$$\mu = \frac{W}{c^2},$$

er beweist im Verein mit (164), daß die Energie nicht nur die träge, sondern auch die schwere Masse bestimmt.

Nachdem wir so Ψ und damit *V* bestimmt haben, können wir die noch nicht benutzten Feldgleichungen (144 b') durch passende Wahl der γ_{ik} befriedigen. In § 20 behandeln wir dies Problem vollständig.

Nun gehen wir unter Beibehaltung der angegebenen Näherungen zu der Frage über: Wie bewegt sich ein Massenpunkt, der wegen seiner geringen Masse das Schwerefeld nicht abändert und die Körper, denen es seine Entstehung verdankt, deswegen auch nicht in Bewegung setzt, in dem statischen Felde? Der Satz von § 16, daß seine Weltlinie eine geodätische ist, veranlaßt uns, auf das Variationsproblem

$$\delta \int \sqrt{V^2 t^2 - \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}\, dp = 0$$

einzugehen. Dabei bedeutet *p* einen ganz beliebigen Parameter, als dessen Funktionen die vier Koordinaten gesucht werden. Die Variationen müssen an den Integrationsgrenzen verschwinden. Nichts hindert nun, $p = t$ zu wählen; dann wird $t = 1$ und die Summe gleich dem Geschwindigkeitsquadrat q^2. Es ist bei allen astronomischen Geschwindigkeiten klein gegen c^2. Für $\sqrt{V^2 - q^2}$ kann man daher nach (163) näherungsweise

$$c\sqrt{1 + \frac{2\Psi}{c^2} - \frac{q^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\left[c^2 + \Psi - \tfrac{1}{2}q^2\right]$$

*) In Einsteins Schriften tritt statt x eine andere Konstante vom Wert $8\pi C : c^2 = 1{,}87 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{g^{-1}cm}$ auf, weil *ds* bei ihm die Dimension *t* hat, bei uns aber nach § 14 die Dimension *l*.

setzen, so daß das Variationsprinzip jetzt

$$\delta \int (\Psi - \tfrac{1}{2} q^2)\, dt = 0$$

lautet. Hier können wir nun wegen der Kleinheit der γ_{ik} [vgl. (161)]

$$q^2 = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^{i2}$$

setzen. Das Variationsprinzip fällt dann mit dem Hamiltonschen Prinzip der klassischen Mechanik für die Bewegung im Schwerefeld zusammen, und beweist in Gemeinschaft mit (164), daß innerhalb unserer Näherung alle deren Sätze Folgerungen aus Einsteins Feldgleichungen und der in ihnen enthaltenen Dynamik der allgemeinen Relativitätstheorie darstellen.

Da sich somit die euklidische Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx^{i2},$$

welche keinen Einfluß der Schwere erkennen läßt, bei der Planetenbewegung als gute Näherung erweist, so verstehen wir nun auch aus Einsteins Theorie die in § 1 hervorgehobene Tatsache, daß es bisher dem Versuch nie gelang, Abweichungen davon festzustellen, daß somit die empirische Forschung über die Schwere nicht über Newtons Theorie hinausführen konnte.

b) Die Veränderlichkeit der Masse im Schwerefeld. Für langsame, quasistationäre Bewegung eines Massenpunktes gegen ein Koordinatensystem, das den Bedingungen (49) genügt, gilt die Differentialgleichung (142); in ihr spielt, wie erwähnt, die im Schwerefeld veränderliche Größe $\frac{m}{\sqrt{-g_{44}}}$ die Rolle der Masse. Nach (154) und (163) erhält diese den Wert

$$\frac{m}{\sqrt{-g_{44}}} = \frac{mc}{V} = m\left(1 - \frac{\Psi}{c^2}\right). \quad \cdots \quad (164\,c)$$

Das Potential Ψ der Newtonschen Theorie nimmt aber bei der Annäherung an einen Körper ab. Die so definierte Masse wächst somit bei der Annäherung an einen anderen Körper, während die Ruhmasse m unverändert bleibt. Dem entspricht der schon von Mach geäußerte Gedanke, daß die Trägheit keine Eigenschaft des einzelnen Körpers, sondern eine Wechselwirkung mit den anderen Körpern

darstellt. Daß wir das Verschwinden der Trägheit bei wachsendem Abstand von allen anderen Körpern in unserer Grenzbedingung nicht zum Ausdruck bringen können, haben wir schon zu Beginn von § 18 hervorgehoben.

Es sei aber nochmals betont, daß sich dieser Satz nur für statische Felder und die Koordinatenwahl (154) beweisen läßt. Er ist von Bedeutung, weil man im ganzen Fixsternsystem nahezu den statischen Fall verwirklicht findet und deshalb diese Koordinaten sehr häufig benutzen wird. Eine gegenüber allen Koordinatentransformationen invariante Bedeutung kann ihm aber nicht zukommen, schon weil in Gleichung (142) durchweg die Zeitveränderliche t benutzt ist.

c) Die Rotverschiebung der Spektrallinien. In § 14 haben wir darauf hingewiesen, daß zwei im gleichen Koordinatensystem, aber an verschiedenen Stellen ruhende Uhren im allgemeinen auf die Veränderliche t bezogen, einen verschiedenen Gang zeigen müssen. Denn ihre Zeiger rücken nach der Deutung von $d\tau$ als Länge des Weltlinienelements in gleichen Zeiten dt entsprechend dem Zuwachs

$$d\tau = \sqrt{-g_{44}}\, dt$$

der Eigenzeit τ vor. Bei dem statischen Schwerefeld ist nun in der in Abschnitt a) angewandten Näherung [vgl. (163)]

$$\sqrt{-g_{44}} = \frac{V}{c} = 1 + \frac{\Psi}{c^2}.$$

Ruht also die eine Uhr am Orte s nahe einem der großen Himmelskörper, wie etwa der Sonne, die anderen am Orte e weit von solchen entfernt, also beispielsweise auf der Erde, so berechnet sich Ψ_s aus der Masse m dieses Körpers und dem Abstande a von seinem Mittelpunkt nach der Formel:

$$\Psi = -\frac{Cm}{a},$$

während Ψ_e dagegen vollständig vernachlässigt werden kann. Dann findet man

$$\frac{d\tau_s}{d\tau_e} = 1 + \frac{\Psi_s}{c^2} = 1 - \frac{Cm}{ac^2}.$$

Derartige „Uhren" bilden nun u. a. solche Atome, in denen Sinusschwingungen stattfinden. Da die Zahl der Schwingungen unmittelbar als Maß der Eigenzeit gelten kann, muß für die Schwingungszahlen, sofern wir sie auf die Zeit t beziehen, gelten:

$$\frac{\nu_s}{\nu_e} = \frac{d\tau_s}{d\tau_e} = 1 - \frac{Cm}{ac^2}, \quad \frac{\nu_s - \nu_e}{\nu} = -\frac{Cm}{ac^2}. \quad \cdots \quad (165)$$

Daraus schloß Einstein: Eine Spektrallinie, welche auf der Sonne oder einem ähnlich großen Körper emittiert wird (oder auch als Absorptionslinie im kontinuierlichen Spektrum erscheint), m u ß eine geringere Schwingungszahl zeigen, als wenn sie auf der Erde entsteht. Dies ist die sogenannte Rotverschiebung der Spektrallinien (vgl. § 1).

d) Zahlenangaben. Setzen wir in (165) für m die Sonnenmasse $1{,}983.10^{33}$g, für a den Sonnenhalbmesser $6{,}955.10^{10}$cm, so finden wir in Rücksicht auf (2)

$$\frac{Cm}{c^2 . a} = 2{,}11 . 10^{-6}, \qquad . \qquad . \qquad (166)$$

Dies ist eine reine Zahl; da sich aus C, m, a und C aus dimensionellen Gründen keine reine Zahl bilden läßt, die nicht Funktion der Vereinigung $Cm:c^2a$ wäre, so wird sie uns noch häufiger in den Anwendungen der Ein stein sehen Schweretheorie auf unser Sonnensystem begegnen. Hier bedeutet sie die relative Verminderung der Schwingungszahl, oder die relative Vergrößerung der Wellenlänge.

§ 20. Weitere genäherte Lösungen der Feldgleichungen.

a) Über eine Variation der *gik*. Zur Vorbereitung betrachten wir die unendlich kleine Transformation

$$x'^i = x^i + \varepsilon \xi^i(x^1, x^2, x^3, x^4); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

in ihr sollen die ξ^i beliebige reguläre Funktionen, ε aber eine unendlich kleine Konstante bedeuten, deren höhere Potenzen wir stets unterdrücken. Wir fragen nach der Variation der g_{ik}, aber nicht nach den Größen

$$\delta g_{ik} = g'_{ik}(x') - g_{ik}(x),$$

welche die Veränderung im gleichen Weltpunkt angeben, sondern nach den Variationen

$$\delta^* g_{ik} = g'_{ik}(x) - g_{ik}(x),$$

bei denen mit einem Punkt im ungestrichenen System der Punkt verglichen wird, welcher im gestrichenen die gleichen Koordinatenwerte hat. Die Beziehung zwischen beiden enthält die Gleichung

$$\delta^* g_{ik} = \delta g_{ik} - [g'_{ik}(x') - g'_{ik}(x)] = \delta g_{ik} - \varepsilon \sum_i \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} \xi^i.$$

δg_{ik} berechnen wir nun aus der allgemeinen Traneformationsgleichung (47 a)

$$g_{ik}(x) = \sum_{m\,n} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} g'_{m\,n}(x'),$$

indem wir nach (167)

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} = \delta_i^m + \varepsilon \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} = \delta_k^n + \varepsilon \frac{\partial \xi^n}{\partial x^k}$$

setzen:

$$g_{ik}(x) = g'_{ik}(x') + \varepsilon \sum_{m\,n} \left(\delta_i^m \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} + \delta_k^n \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i} \right) g_{m\,n}$$

$$\delta g_{ik} = -\varepsilon \sum_l \left(g_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \right).$$

Daraus folgt:

$$\delta^* g_{ik} = -\varepsilon \sum_l \left(g_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \xi^l \right). \quad (168)$$

Dies benutzen wir nun zum Beweise des Satzes: Weichen die

$$g_{ik} = G_{ik} + \gamma_{ik} \quad (169)$$

nur durch die unendlich kleinen Größen *yik* von den „normalen" Werten

$$G_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ wenn i und } k \text{ verschieden sind,} \\ -1, \text{ wenn } i = k = 4, \\ +1, \text{ wenn i} = k \text{ den Wert 1, 2, 3 hat,} \end{cases}$$

ab, so kann man stets durch eine Transformation wie (167) erreichen, daß die

$$\psi_i^k = \gamma_i^k - \tfrac{1}{8} \gamma \delta_i^k \quad (\gamma = \sum_i \gamma_i^i) \quad (170)$$

der Gleichung

$$\sum_k \frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad (171)$$

genügen. Dabei fallen die γ_k^i bis auf Größen höherer als der ersten Ordnung und abgesehen vom Vorzeichen mit den yik zusammen; es ist nämlich

$$\gamma_k^i = \sum_l G^{il} \gamma_{kl} = \pm \gamma_{ik}. \quad (171a)$$

Das Zeichen — gilt für i = 4, sonst gilt +. Daraus folgt weiter die Symmetrieeigenschaft

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2^1 &= \gamma_1^2 \text{ usw.}; & \gamma_4^1 &= -\gamma_1^4 \text{ usw.}; \\ \psi_2^1 &= \psi_1^2 \text{ usw.}; & \psi_4^1 &= -\psi_1^4. \end{aligned}\right\} \quad (171b)$$

Führen wir zum Beweise in (168) diese Annahmen über die gik ein, so wird der letzte, den Unterschied zwischen $\delta^* g_{ik}$ und δg_{ik} bedingende Summand klein von der zweiten Ordnung; die anderen gik muß man mit G_{ik} vertauschen und man erhält:

$$\gamma'_{ik}(x) - \gamma_{ik}(x) = -\varepsilon\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}\right).$$

Hier multiplizieren wir mit G^{ik} und summieren nach beiden Zeigern:

$$\gamma'(x) - \gamma(x) = -2\varepsilon \sum_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k}. \quad \ldots \quad (172)$$

Sodann multiplizieren wir dieselbe Gleichung mit G^{kl}, differenzieren nach x^l und summieren wieder nach beiden Zeigern:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma'^i_i - \gamma^i_i) = -\varepsilon \sum_{kl} G^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}\right)$$
$$= -\varepsilon\left(\Box \xi^i + \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^l}\right);$$

dabei haben wir den „Laplaceschen Operator"

$$\Box = \sum_{kl} G^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{4^2}}$$

in voller Übereinstimmung mit § 9, d) (nur daß alle Glieder mit g-Klammern als klein von höherer Ordnung fortfallen) eingeführt. Wir schließen weiter nach (170) und (172):

$$\sum_i \left(\frac{\partial \psi'^i_i}{\partial x'^i} - \frac{\partial \psi^i_i}{\partial x^i}\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\psi'^i_i - \psi^i_i)$$
$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\gamma'^i_i - \gamma^i_i - \tfrac{1}{2}\delta^i_i(\gamma' - \gamma)\right] = -\varepsilon \Box \xi_i.$$

Um also im gestrichenen System die Forderung (171) zu erfüllen, müssen wir die Funktionen so wählen, daß die $\xi_i = \sum_k G_{ik}\xi^k$ den Differentialgleichungen

$$\Box \xi_i = \frac{1}{\varepsilon} \sum_i \frac{\partial \psi^i_i}{\partial x^i}$$

genügen. Wie man diese Gleichungen löst, haben wir in Bd. I, § 19, bei den verzögerten Potentialen gesehen. Somit läßt sich diese Forderung immer erfüllen; des weiteren setzen wir sie voraus.

b) Die Wellengleichung als Folge der Feldgleichungea. Nach (169) sind alle g-Klammern unendlich klein; unter Beschränkung

auf kleine Größen erster Ordnung wird aber aus Gleichung (53), (54) und (80)

$$\left[\begin{matrix} ik \\ j \end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^l} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j}\right),$$

$$\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\} = \sum_j G^{jl}\left[\begin{matrix} ik \\ j \end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_i^l}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_k^l}{\partial x^i} - \sum_j G^{jl}\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j}\right),$$

$$R_{ik} = \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\begin{matrix} il \\ l \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}\right).$$

Aus (170) und (171) folgt aber:

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\begin{matrix} il \\ l \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^i \partial x^k}, \quad \sum_l \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^i \partial x^k} - \Box \gamma_{ik}\right),$$

$$R_{ik} = \tfrac{1}{2}\Box \gamma_{ik}, \qquad R_i^k = \sum_l G^{kl} R_{il} = \tfrac{1}{2}\Box \gamma_i^k,$$

$$R = \sum_{ik} G^{ik} R_{ik} = \tfrac{1}{2}\Box \gamma.$$

Also

$$R_i^k - \tfrac{1}{2}\delta_i^k R = \tfrac{1}{2}\Box \psi_i^k.$$

Nach* den Feldgleichungen (144), d. h. unter Vernachlässigung des λ-Gliedes, ist die linke Seite gleich $-\varkappa T_q^k$. l s näherungsweisen Ersatz der Feldgleichungen finden wir somit:

$$\tfrac{1}{2}\Box \psi_i^k = -\varkappa T_i^k. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Da nach (170) $\gamma_i^k = \psi_i^k - \tfrac{1}{4}\delta_i^k \sum \psi_i^i$ ist, können wir auch schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\Box \gamma_i^k = -\varkappa\left(T_i^k - \tfrac{1}{2}\delta_i^k T\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173a)$$

Wir erkennen jetzt, weshalb wir die Forderung (171) stellen mußten. Nach (151 a) sind nämlich die t_i^k hier klein von der zweiten Ordnung, somit im Erhaltungssatz (151) gegen die T_i^k, welche wie die γ_i^k von der ersten Ordnung sind, zu vernachlässigen. Weiter ist in Gliedern erster Ordnung

$$\sqrt{-g}\, T_i^k = T_i^k,$$

also lautet der Erhaltungssatz hier:

$$\sum_k \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (173b)$$

Wie wir in Bd. I, § 19, dem elektrischen Viererpotential Φ wegen $DivP = 0$ die Bedingung $Biv\,\Phi = 0$ auferlegen mußten, um zu der einfachen Beziehung $\Box\Phi = -P$ zu gelangen, so ermöglicht hier wegen (173b) erst die Forderung (171) den in (173) niedergelegten Zusammenhang.

Gleichung (213) aus Bd. I liefert uns ohne weiteres die Lösung von (173) oder (173a), wenn wir noch $x^4 = ct$ setzen und unter t den Abstand von Aufpunkt und Integrationspunkt im Raume der x^1, x^2, x^3 verstehen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \psi_i^k &= \frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{(T_i^k)_{t-r/c}}{r}\,dS, \\ \gamma_i^k &= \frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{1}{r}(T_i^k - \tfrac{1}{2}\delta_i^k T)_{t-r/c}\,dS. \end{aligned}\right\} \qquad (174)$$

Man sieht daraus, daß sich (innerhalb der hier durchgeführten Näherung) die Schwerewirkungen mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten; die Erregungsstellen liegen überall, wo der elektromagnetische oder mechanische Energieimpulstensor von Null verschieden ist. Außerdem aber gibt es natürlich, wie in der Elektrizitätslehre, noch Wellen, welche (mathematisch gesprochen) ohne Erregungsstellen vom Unendlichen ins Unendliche laufen.

Für statische Felder und nach (163b) liefert Gleichung (173a) ohne weiteres die Gleichung (164) für das Schwerepotential Ψ.

c) Ebene Schwerewelle'n. Den einfachsten Fall, den der ebenen Welle (im leeren Raume $T^k{}_i = 0$, erhalten wir mittels der willkürlichen Funktion F und des Ansatzes

$$\psi_i^k = a_i^k F\Big(\sum_l \alpha_l x^l\Big), \qquad (175)$$

Die Konstanten a_i^k und α_l müssen nach (170) und (173) den Bedingungen genügen:

$$\sum_k a_i^k \alpha_k = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \alpha_4^2. \qquad (176a)$$

Ist die positive x^1-Achse die Fortschreitungsrichtung, so verschwinden α_2 und α_3; es wird

$$\alpha_4 = -\alpha_1, \quad a_i^1 = a_i^4 \ (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (175\,b)$$

Doch sind in diesem Schema noch Wellen enthalten, welche keine eigentlich physikalische Bedeutung haben. Führt man näm-

lich in einem in Strenge schwerefreien Feld, in welchem die Maßbestimmung

$$ds^2 = dx^{*1^2} + dx^{*2^2} + dx^{*3^2} - dx^{*4^2} \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

möglich ist, die Koordinaten

$$x^i = x^{*i} + \lambda^i f(x^4 - x^1) \quad . \quad (177)$$

ein, wobei die λ^i unendlich kleine Konstanten bedeuten, so wird

$$ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} - dx^{4^2} - 2f'(dx^4 - dx^1)[\lambda^1 dx^1 + \lambda^2 dx^2 + \lambda^3 dx^3 - \lambda^4 dx^4].$$

Hieraus entnehmen wir nach (169) die γ_{ik} und nach (171a) die γ_k^i; die Werte der letzteren gibt das Schema:

$2\lambda^1 f'$	$\lambda^2 f'$	$\lambda^3 f'$	$-(\lambda^1 + \lambda^4) f'$
$\lambda^2 f'$	0	0	$-\lambda^2 f'$
$\lambda^3 f'$	0	0	$-\lambda^3 f'$
$(\lambda^1 + \lambda^4) f'$	$\lambda^2 f'$	$\lambda^3 f'$	$-2\lambda^4 f'$

(Die erste Kolonne enthält die γ_1^i, die letzte die γ_4^i.) Also ist

$$\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\sum_i \gamma_i^i = (\lambda^1 - \lambda^4) f'.$$

Das Schema für die ψ_k^i sieht dann nach (170) aus, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{cccc} (\lambda^1 + \lambda^4) f' & \lambda^2 f' & \lambda^3 f' & -(\lambda^1 + \lambda^4) f' \\ \lambda^2 f' & (\lambda^4 - \lambda^1) f' & 0 & -\lambda^2 f' \\ \lambda^3 f' & 0 & (\lambda^4 - \lambda^1) f' & -\lambda^3 f' \\ (\lambda^1 + \lambda^4) f' & \lambda^2 f' & \lambda^3 f' & -(\lambda^1 + \lambda^4) f' \end{array}\right\} \quad (178)$$

[vgl. hierzu (171b)]. Setzen wir schließlich $f' = E$, so haben wir hier einen Ansatz vor uns, der durchaus den Gleichungen (175) und (175 b) genügt und insofern ebene Schwerewellen darstellt. Und doch haben wir diese nur durch Transformation des Koordinatensystems in einem (pseudo-) euklidischen Weltbereich hervorgebracht. Immerhin haben diese Wellen ganz besondere Werte der Koeffizienten a_k^i, insofern

$$a_1^1 = a_4^4 = 0 \quad \text{und} \quad a_2^1 = a_3^4 \quad . \quad (178a)$$

ist. Man wird vermuten, daß sich diese Wellen irgendwie von Wellen, bei denen die Beziehungen (176 a) nicht gelten, unterscheiden, und wir können diese Vermutung bald bestätigen. Doch verstieße es meines Erachtens gegen den Geist der allgemeinen Relativitätstheorie, sie als nicht physikalisch wirklich zu bezeichnen. Denn nach derem ersten

Grundsatz herrscht in einem gegen das System x^{*i} beschleunigten System, wie wir es in (177) eingeführt haben, ein durchaus wirkliches Schwerefeld.

Bei den „eigentlichen" Schwerewellen, die sich nicht durch eine Transformation wie (177) beseitigen lassen, kommt es nach dem Obigen nur auf die Werte von a_3^3 und $(a_3^3 - a_3^4)$ an. Innerhalb der hier befolgten Näherung transformieren sich die a_k^i bei einer Drehung des rechtwinkligen räumlichen Achsenkreuzes um die x^1-Achse wie Tensorkomponenten, so daß man dadurch a_3^3 beseitigen kann. So bleibt

$$\psi_3^3 = a F(x^4 - x^1), \quad \text{alle anderen } \psi_k^i = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (179)$$

die allgemeinste Darstellung einer „eigentlichen" ebenen Welle. Man kann sie in gewissem Sinn als transversal bezeichnen, obwohl man hier nicht wie in der Elektrodynamik mit einem schwingenden Vektorfeld zu tun hat.

Leider besteht, wie Einstein zeigt, keine Hoffnung, jemals eigentliche Schwerewellen beobachten zu können. Was man davon erregen könnte, führt viel zu geringe Energie mit sich.

Einstein hat durch Berechnung der ϑ_k^i allgemein zeigen können, daß uneigentliche ebene Wellen innerhalb der hier durchgeführten Näherung keine Energie mit sich führen.

d) Ein Beispiel für uneigentliche Wellen. In (177) setzen wir

$$\lambda^2 = \lambda^3 = 0, \qquad \lambda^4 = -\lambda^1 = -\lambda,$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} x^1 = x^{*1} + \lambda f(x^4 - x^1), \quad x^4 = x^{*4} - \lambda f(x^4 - x^1), \\ x^2 = x^{*2}, \quad x^3 = x^{*3} \end{aligned}\right\} \quad (180)$$

wird, und bestimmen die Funktion f so, daß sie 0 ist für Werte ihres Arguments, die unter a liegen, und den konstanten Wert B annimmt, wenn das Argument über b liegt. Dazwischen soll sie nach einem einfachen Gesetz stetig von 0 nach B wachsen. Für negativ unendliche Zeiten fallen dann beide Systeme zusammen, für positiv unendliche unterscheiden sie sich nur um eine, physikalisch bedeutungslose Parallelverschiebung in der x^1-Richtung. Während sich diese Verschiebung allmählich herstellte, ging aber im System x^i eine Schwerewelle vorüber.

Eine solche ist nun schon in § 3 beim Beispiel des Eisenbahnzuges aufgetreten, wenigstens, wenn wir dies noch dahin vervoll-

ständigen, daß der Zug bei der Bremsung eine Minimalgeschwindigkeit annimmt, die auch Null betragen kann, dann aber wieder bis zur alten Geschwindigkeit — immer in derselben Richtung — anfährt. Wir führen zunächst ein erdfestes Koordinatensystem X^* ein, dem wir mit hinreichender Genauigkeit die pseudoeuklidische Maßbestimmung zuschreiben können, die das Fehlen von Schwerewirkungen bedeutet. Weiter koppeln wir mit ihm das System x^* der Gleichungen (180) durch die Lorentz-Transformation

$$x^{*1} = \frac{X^1 - \frac{q}{c} X^4}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad x^{*2} = X^2, \quad x^{*3} = X^3, \quad x^{*4} = \frac{X^4 - \frac{q}{c} X^1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}},$$

dann ist auch die Maßbestimmung

$$ds^2 = dx^{*1^2} + dx^{*2^2} + dx^{*3^2} - dx^{*4^2}$$

richtig. Das gegen die Erde gleichförmig bewegte System x^{*i} ist ebenfalls dauernd ohne Schwerefeld. Wir können dann die Funktion f immer noch so bestimmen, daß der Zug dauernd im System x^i ruht. Dann haben wir in voller Übereinstimmung mit § 3 auch nach unseren Formeln ein Schwerefeld in der Richtungx^1 während der Bremsung, ein entgegengesetztes während des Anfahrens.

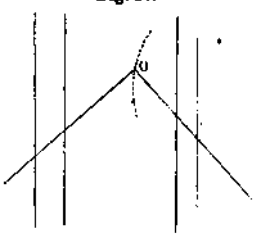
Nun fragen wir nach der Ursache, die wir vom System x^i aus dieser Welle zuschreiben müssen. Diese liegt nicht, wie man vielleicht glauben könnte, in den Vorgängen an den Rädern des Zuges, welche zuerst die Bremsung, hinterher die Wiederbeschleunigung hervorrufen. Die Welle in dem durch unsere Gleichungen eingeführten System x^i besteht vollständig ohne Rücksicht auf den Zug. Es war unsere Willkür, daß wir die Funktion f gerade dessen Bewegung anpaßten. Wodurch ist sie aber sonst erregt?

Wir beachten, daß diese Welle so entsteht, daß der Maßtensor der g_{ik} der in den x^{*i} als unabhängigen Veränderlichen konstant ist, bei der Transformation auf die x^i diese Eigenschaft verliert. Man betrachtet ihn im letzteren System „von einer anderen Seite". Die Schwerewelle hat also alle die Erscheinungen zur Ursache, welche diesen Tensor bestimmen, und das sind nach den Feldgleichungen alle Körper schlechthin, wobei es noch auf ihren Bewegungszustand ankommt. Aber der Zustand im Weltpunkt *0* hängt nicht ab von dem gleichzeitigen Bewegungszustand, sondern, da sich die Schwerewirkungen innerhalb der hier durchgeführten Näherung mit der Geschwindigkeit c ausbreiten, von dem Bewegungszustand auf dem Vorkegel von 0. Wir zeichnen diese in Fig. 20, desgleichen eine

Reihe von Weltlinien der (in der Hauptsache) im System X^* dauernd ruhenden Gestirne und auch (gestrichelt) die durch 0 gehende Weltlinie eines in den x^i ruhenden Punktes. Erstere sind, wenn wir die X^i als geradlinige Weltkoordinaten benutzen, gerade, die letztere ist hingegen gekrümmt. Dieser Unterschied im Bewegungszustand verursacht die Schwerewelle.

Ein Beispiel aus der Elektrodynamik mag das weiter beleuchten. Wenn wir uns einen Raum nahe der Erdoberfläche durch eine metallische Hülle gegen elektrische Felder abschirmen, haben wir in ihm nur das statische Magnetfeld der Erde. In dem erdfesten System x^{*i} haben wir also auf ruhende elektrische Ladungen keine Kraft. Das ist aber anders in dem durch die Transformation (180) eingeführten System $\mathfrak{x}^*$. In der Zeit, da dies die erwähnte Verschiebung erfährt, geht über dies System eine „elektrische Welle" hinweg. Und was ist deren Ursache ? Hier ruhen die Ladungen, welche allein in Betracht kommen, dauernd in den x^{*i}. Zeichnen wir auf dem Vorkegel des Weltpunktes 0 ihre Weltlinien, so haben diese alle eine andere Richtung als die durch 0 führende Weltlinie eines in x^i ruhenden Punktes. Dieser Unterschied verursacht die elektrische Welle. Daß es bei ihr auf den Richtungsunterschied, bei der Schwerewelle auf den Krümmungsunterschied ankommt, ist für den Vergleich weniger wesentlich.

Fig. 20.



Das Verfahren, genäherte Lösungen der Feldgleichungen zu finden, welches wir in diesem Paragraphen auseinandergesetzt haben, benutzt H. Thirring[1]), um das Feld in einer rotierenden Hohlkugel zu ermitteln. Es ergeben sich dabei Kräfte auf einen dort befindlichen Körper, welche den Zentrifugalkräften und den Coriolissehen entsprechen. Und das liegt ja auch ganz im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie. Denn da bekanntlich solche Kräfte an einem Koordinatensystem beobachtet werden, welches sich gegen alle anderen Körper (die gegeneinander ruhen mögen) dreht, so müssen ähnliche Erscheinungen sich auch dann zeigen, wenn nur ein Teil der anderen Körper gegen das benutzte Koordinatensystem rotiert.

Nach demselben Verfahren berechnen H. Thirring und J. Lense[2]) einen Einfluß der Drehung des Jupiter auf die Bewegung eines seiner Monde, welcher im Bereiche der möglichen Beobachtungen zu liegen scheint.

VII. Strenge Lösungen der Feldgleichungen in Einsteins Theorie der Schwere.

§ 21. Bas Prinzip der kleinsten Wirkung.

a) Für den materiefreien Baum. In § 17 haben wir die Feldgleichungen in den Formeln (144) oder (144 b) kennen gelernt, und in § 19 und 20 haben wir diese Differentialgleichungen zu angenäherten Ermittlungen besonderer Felder schon benutzt. Für andere, namentlich für strenge Lösungen ist aber wohl vielfaoh ein anderer Ausgangspunkt vorzuziehen; er liegt in gewissen Variationsprinzipe. Auch läßt sich Mies Theorie der Materie, welche wir in Teil VIII bringen, am besten im Anschluß an diese Prinzipe behandeln. Wir behalten hier das λ-Glied bei.

Ein erstes Prinzip dieser Art knüpft an die Funktion $\mathfrak{H} = \sqrt{-g}H$ an, die wir in Gleichung (145) definiert haben. Wir betrachteten sie damals als bestimmt durch die mit dem Maßtensor nahe zusammenhängenden Größen $\gamma^{kl} = \sqrt{-g}\,g^{kl}$ und $\gamma^{kl}_m = \frac{\partial \gamma^{kl}}{\partial x^m}$ [vgl. (146)]. Jetzt bilden wir das Integral

$$\int H d\Sigma = \int \mathfrak{H} d\mathfrak{X}$$

für irgend einen geschlossenen vierdimensionalen Bereioh [$d\mathfrak{X}$ ist wie in § 6, Gleichung (38), für $dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ geschrieben]. Wir variieren den Maßtensor, also auch die γ^{kl} im Innern des Bereichs beliebig; doch bleiben sie auf der Begrenzung unverändert. Natürlich nehmen die γ^{kl}_m zwangläufig an der Variation teil; denn da die x^i nicht mitvariiert werden, gilt identisch:

$$\delta \gamma^{kl}_m = \frac{\partial \delta \gamma^{kl}}{\partial x^m};$$

Wir behaupten: Diejenigen Funktionen g_{kl} genügen den Feldgleichungen (144b) für das von Materie freie Schwerefeld, für welche

$$\delta \int H d\Sigma = \delta \int \mathfrak{H} d\mathfrak{X} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

ist.

Zum Beweise formen wir mit Hilfe der vorletzten Gleichung in dem Integral

$$\int \delta \mathfrak{H}\, dX = \int \left(\sum_{kl} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}} \delta \gamma^{kl} + \sum_{klm} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_m} \delta \gamma^{kl}_m \right) dX$$

die zweite Hälfte durch partielle Integration um. Dabei entsteht zunächst ein auf die Begrenzung bezügliches Integral, in welchem aber der Integrand, in dem jeder Summand ein $\delta \gamma^{kl}$ als Faktor erhält, verschwindet. Es bleibt nur das neuentstehende vierdimensionale Integral; also:

$$\delta \int \mathfrak{H}\, dX = \int \delta \mathfrak{H}\, dX = \int \sum_{kl} \delta \gamma^{kl} \left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}} - \sum_m \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_m} \right) \right] dX. \quad (181a)$$

Soll dies für alle möglichen Funktionen $\delta \gamma^{kl}$ identisch verschwinden, so muß der Faktor jeder Variation $\delta \gamma^{kl}$ für sich verschwinden, und zwar im ganzen Integrationsbereich. Denn wäre ein solcher Faktor in einem Teil davon von Null verschieden, etwa positiv, so könnte man das zugehörige $\delta \gamma^{kl}$ in diesem Teil ebenfalls positiv, sonst gleich Null, die anderen $\delta \gamma^{kl}$ aber überhaupt gleich Null wählen, so daß $\delta \int \mathfrak{H}\, dX > 0$ würde. Das Nullsetzen der genannten Faktoren führt aber nach (148) auf die Feldgleichungen (144b) für $T_{kl} = 0$, nämlich $R_{kl} + \lambda g_{kl} = 0$. Das Variationsprinzip vermag daher die Feldgleichungen zu ersetzen.

b) Einführung der Invarianten *B*. Wir vergleichen die Formel (145), welche *H* definiert, mit den Gleichungen (81) und (80) für die invariante Krümmung R und den Krümmungstensor R_{kl}. Vertauschen wir in (145) die Summationszeiger *m* und *n* miteinander, so erkennen wir:

$$R + 2\lambda = \sum_{klm} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} \right) - H. \quad . \quad . \quad . (182)$$

Da nun der erste Summand rechts keine Invariante ist, ist, wie schon in § 17 erwähnt, auch *H* keine, wohl aber ist es $d\Sigma$; und man kann dem obigen Variationsprinzip den Einwand mangelnder Eleganz machen, insofern es kein invariantes Integral benutzt. Diesem Bedenken entgeht ein anderes Variationsprinzip, bei welchem wir aber den zugelassenen Variationen $\delta \gamma^{kl}$ außer der schon ausgesprochenen Bedingung, daß sie selbst am Rande verschwinden, noch die weitere auferlegen müssen, daß auch ihre Ableitungen, also die $\delta \gamma^{kl}_m$, dort Null sind. Eine Folge dieser Bedingungen ist, daß auch die Variationen der g_{ik} und ihrer ersten Ableitungen, also

ebenso die Variationen der g-Klammern verschwinden. Können wir daher zeigen, daß

$$\int (R + 2\lambda)\, d\Sigma - \int H\, d\Sigma = J$$

ein Randintegral ist, in welchem der Integrand nur von den g^{kl} und g-Klammern abhängt, so folgt wegen $\delta J = 0$ aus (181) das weitere Prinzip:

$$\delta \int (R + 2\lambda)\, d\Sigma = 0. \qquad (183)$$

Wir beginnen den gewünschten Beweis mit der Aufstellung der Identitäten:

$$\sum_{klm} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix} \right\} \right) = \sum_{klm} \left[g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{kl})}{\partial x^l} \right],$$

$$\sum_{klm} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} \right) = \sum_{klm} \left[g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{kl})}{\partial x^m} \right].$$

Durch Subtraktion, Multiplikation mit $\sqrt{-g}\, dX = d\Sigma$ und nachfolgende Integration über den vierdimensionalen Bereich erhalten wir nach (182) aus ihnen:

$$J = \int d\Sigma \left[R + H + \sum_{klm} \left(\left\{ \begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{kl})}{\partial x^l} - \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{kl})}{\partial x^m} \right) \right],$$

wobei J ein Randintegral der beschriebenen Art ist. In dem ersten Term unter dem Summenzeichen ist wegen der Divergenzfreiheit des Maßtensors nach (74'):

$$\sum_{l} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{kl})}{\partial x^l} = - \sum_{lm} \left\{ \begin{matrix} l\,m \\ k \end{matrix} \right\} g^{lm},$$

und durch passende Vertauschung der Summationszeiger nimmt dieser Term die Form an:

$$- \sum_{klmn} \left\{ \begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l\,n \\ k \end{matrix} \right\} g^{lm} = - \sum_{klmn} \left\{ \begin{matrix} n\,m \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix} \right\} g^{kl}.$$

Den Faktor von $-\left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\}$ aber zerlegen wir in

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^m} = -\sum_n \left[\left\{\begin{matrix} m\,n \\ k \end{matrix}\right\} g^{ln} + \left\{\begin{matrix} m\,n \\ l \end{matrix}\right\} g^{kn}\right]$$

(vgl. 61c) und (vgl. 62a) in

$$g^{kl}\frac{\partial\left(lg\sqrt{-g}\right)}{\partial x^m} = g^{kl}\sum_n \left\{\begin{matrix} m\,n \\ n \end{matrix}\right\},$$

so daß der zweite Term unter der Summe wird:

$$\sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ k \end{matrix}\right\} g^{ln} + \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ l \end{matrix}\right\} g^{kn} - \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ n \end{matrix}\right\} g^{kl}.$$

In diesen drei Ausdrücken geht der erste in den zweiten über, wenn man *k* und l miteinander vertauscht:

$$2\sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ l \end{matrix}\right\} g^{kn} - \sum_{klmn}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ n \end{matrix}\right\} g^{kl}.$$

Vertauschen wir nun noch in der ersten dieser Summen *n* und *l*, in der zweiten n und m, so finden wir wegen (145) einfach:

$$J = \int d\,\Sigma\left[R + H - 2\sum_{klmn} g^{kl}\left(\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} n\,m \\ m \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} k\,n \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,l \\ n \end{matrix}\right\}\right)\right]$$
$$= \int d\,\Sigma\,(R + 2\lambda - H).$$

Damit ist der Beweis erbracht: **Für das materiefreie Schwerefeld gilt das Variationpprinzip**

$$\delta\int (R + 2\lambda)\,d\,\Sigma = 0, \qquad (184)$$

wenn am Rande des Integrationsbereichs die Variationen sowohl der *gkl* wie die ihrer ersten Ableitungen nach den Koordinaten verschwinden.

c) Die Variationsprinzipe bei Anwesenheit von Materie. Will man zu den Feldgleichungen (144b) für das Innere der Materie gelangen, hat man die beiden besprochenen Variationsprinzipe einfach zu ergänzen zu:

$$\delta\int(\Phi + \varkappa\mathfrak{M})\,d\,X = 0 \quad \text{und} \quad \delta\int(R + 2\lambda + \varkappa M)\,d\,\Sigma = 0, \qquad (185)$$

und unter $\mathfrak{M} = \sqrt{-g}\,M$ eine die Materie kennzeichnende und außerdem die *gkl* nicht aber deren Ableitungen nach den Koordinaten enthaltende Funktion zu verstehen. Durch welche Größen man die Materie in die Funktion $\mathfrak{M}$ einführt, ist im Grundsatz gleichgültig;

man wird sie von Fall zu Fall verschieden, rein nach rechnerischer Zweckmäßigkeit wählen. Es kommt allein darauf an, daß man durch Differentiation nach der g^{kl} oder — was auf dasselbe hinauskommt — nach den γ^{kl} bei Konstanthaltung jener Größen findet*):

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \gamma^{kl}} = (T_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} T). \qquad (186)$$

Denn dann folgt in der Tat statt Gleichung (181a):

$$\delta \int (\mathfrak{H} + \varkappa \mathfrak{W}) d X = \int \sum_{kl} [R_{kl} + \lambda g_{kl} + \varkappa (T_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} T)] \delta \gamma^{kl} d X = 0,$$

und daraus schließt man wie oben auf das identische Verschwinden des Faktors jeder Variation, also auf die Formeln (144 b).

Wir wollen die Gleichung (186) noch umgestalten, indem wir nach g^{kl} statt nach $\gamma^{kl} = \sqrt{-g}\, g^{kl}$ differentiieren. Wir haben dazu zu setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g^{kl}} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \gamma^{\alpha\beta}} \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial g^{kl}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial g^{kl}} = \sqrt{-g}\, \delta^{\alpha}_{k} \delta^{\beta}_{l} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{kl}},$$

und nach [62]**)

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{kl}} = -\tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{kl}, \qquad (187)$$

also

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g^{kl}} = -\sqrt{-g}\,(T_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} T) + \tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{kl} \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} (T_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} T).$$

Da aber (vgl. 20a)

$$\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} T^{\alpha}_{\alpha} = T, \qquad \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 4$$

ist, folgt einfach

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g^{kl}} = \sqrt{-g}\, T_{kl}. \qquad (188).$$

d) Die Funktion $\mathfrak{W}$ für das elektromagnetische Feld. Das elektromagnetische Feld rechneten wir schon in § 17 hinsichtlich seiner Schwerewirkung zur Materie. Danach müssen wir imstande sein, das Variationsprinzip (185) auch für solche Felder anzuwenden,

*) Auch diese Gleichung ist wie (147) so geschrieben, als wären y^{kl} und γ^{ik} voneinander unabhängig.

**) Siehe die vorhergehende Anmerkung.

wenn wir eine den Bedingungen (188) genügende Funktion $\mathfrak{W}$ angeben können. Diese liefert uns der Ansatz:

$$\mathfrak{W} = \sqrt{-g}\, M, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (189)$$

sofern die elektrischen Felder in einem im gewöhnlichen Sinne leeren, d. h. von allen Körpern freien Raum liegen. Unter M aber verstehen wir das Quadrat des absoluten Werts des Feldvektors $\mathfrak{W}$, für das wir in Analogie zu Gleichung (46) aus § 6 schreiben:

$$M = |\mathfrak{W}|^2 = -\frac{1}{2}\sum_{hikl} g^{hk}\, g^{il}\, \mathfrak{W}_{hl}\, \mathfrak{W}_{ik}. \quad . \quad . \quad (189a)$$

Denn nach (187) folgt daraus durch Differentiation nach $g^{\alpha\beta}$ bei konstanten $\mathfrak{W}_{ik}$:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{-g}\, g_{\alpha\beta}\, |\mathfrak{W}|^2 + \sqrt{-g}\left[\sum_{il} g^{il}\, \mathfrak{W}_{\alpha l}\, \mathfrak{W}_{l\beta} + \sum_{hk} g^{hk}\, \mathfrak{W}_{h\beta}\, \mathfrak{W}_{\alpha k}\right]\right\}$$

Nun sind aber die beiden letzten Summen einander gleich und lassen sich schreiben

$$\sum_{k} \mathfrak{W}^{k}{}_{\beta}\, \mathfrak{W}_{\alpha k} = -\sum_{k} \mathfrak{W}_{\alpha k}\, \mathfrak{W}_{\beta}{}^{k},$$

also nach (132 a):

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\alpha\beta}} = -\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, |\mathfrak{W}|^2 - \sum_{k} \mathfrak{W}_{\alpha k}\, \mathfrak{W}_{\beta}{}^{k}\right\} = \sqrt{-g}\, T_{\alpha\beta},$$

was zu beweisen war.

Wir wollen aber das Variationsprinzip für den Fall, daß elektromagnetische Felder auftreten, noch so erweitern, daß wir auch die Maxwellschen Gleichungen aus ihm gewinnen können. Dazu schreiben wir

$$\delta \int \sqrt{-g}\left[H + \varkappa\left(M - 2\sum_{i} P^{i} \Phi_{i}\right)\right] d\,X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (190)$$

oder

$$\delta \int \left[R + 2\lambda + \varkappa\left(M - 2\sum_{i} P^{i} \Phi^{i}\right)\right] d\,\Sigma = 0, \quad . \quad . \quad (190a)$$

und verstehen dabei unter P den elektrischen Viererstrom, unter Φ das Vierpotential (§ 15). Bei der Variation der *gik* fällt der Zusatz $2\sum_{i} P^{i} \Phi_{i}$ fort *). Gemäß Gleichung (119) denken wir uns hierin

$$\mathfrak{W}_{kl} = \frac{\partial \Phi_{l}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Phi_{k}}{\partial x^{l}} \quad (\mathfrak{W} = \mathfrak{Rot}\ \Phi)$$

*) Nach (112) ist P durch J, ϱ, $\mathfrak{q}$ und $\sqrt{-g^{44}}$ bestimmt. Trotzdem soll es hier bei der Variation von g^{44} unverändert bleiben, was sich durch gleichzeitige Variation von J, ϱ, $\mathfrak{q}$ erzielen läßt.

gesetzt. Eine unmittelbare Folge dieser Beziehung ist die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{M} = 0$$

(siehe 74g). Durch Variation des Viererpotentials, die an den Integrationsgrenzen verschwindet, finden wir dann aus (190) oder (190a) die noch fehlende Gleichung des elektromagnetischen Feldes:

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = P.$$

In der Tat wird dabei nach (189a) durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
&\delta \int \sqrt{-g}\, M\, d\,X \\
&= -\frac{1}{2}\delta \int \sqrt{-g} \sum_{hikl} g^{hk} g^{il} \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}\right) d\,X \\
&= \frac{1}{2}\int d\,X \sum_{hikl} \Big\{ \delta \Phi_l \frac{\partial}{\partial x^h}\left[g^{hk} g^{il} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}\right)\right] \\
&\qquad - \delta \Phi_k \frac{\partial}{\partial x^i}\left[g^{hk} g^{il} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}\right)\right] \\
&\quad - \delta \Phi_k \frac{\partial}{\partial x^i}\left[g^{hk} g^{il} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^h} - \frac{\partial \Phi_h}{\partial x^l}\right)\right] \\
&\qquad - \delta \Phi_i \frac{\partial}{\partial x^k}\left[g^{hk} g^{il} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^h} - \frac{\partial \Phi_h}{\partial x^l}\right)\right] \Big\} \\
&= -\frac{1}{2}\int d\,X \Big\{ \sum_{hl}\left[\delta \Phi_l \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{hl}\right) - \delta \Phi_h \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{hl}\right)\right] \\
&\qquad + \sum_{ik}\left[\delta \Phi_k \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{ik}\right) - \delta \Phi_i \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{ik}\right)\right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Die beiden Summen unterscheiden sich nur in der Benennung der Summationszeiger, und die beiden Summanden in jeder gehen ineinander über, wenn man in dem einen die beiden Zeiger miteinander vertauscht. Also ist bei einer Variation der Φ_i

$$\begin{aligned}
&\delta \int \sqrt{-g}\left(M - 2 \cdot \sum_i P^i \Phi_i\right) d\,X \\
&= 2 \int \sqrt{-g}\, d\,X \sum_i \delta \Phi_i \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{ik}\right) - P^i\right].
\end{aligned}$$

Damit ist nach (73d) der Beweis erbracht.

§ 22. Das Schwerefeld des ruhenden Massenpunktes.

a) Der Maßtensor. In § 19, a) haben wir die statischen Schwerefelder beliebig verteilter Körper unter Vernachlässigung der Größe A genähert behandelt. Über die Bedingungen, welche wir den zu benutzenden Koordinatensystemen auferlegen wollen, haben wir dabei schon in. § 18, a) gesprochen. Wir erinnern an die Gleichungen (154). Wir erweitern hier das Problem, indem wir nach strengen Lösungen der Feldgleichungen (144) mit dem A-Gliede fragen, schränken es andererseits aber ein, insofern wir dem Schwerefeld ein Symmetriezentrum zuschreiben. Diese Forderung erfüllen wir, indem wir entweder einen einzelnen Massenpunkt ohne (siehe diesen Paragraphen) oder mit elektrischer Ladung (vgl. § 26) als einzigen felderregenden Körper in Betracht ziehen, oder eine Kugel mit zentrischer Massenverteilung (§ 25). Wir wollen diese Eigenschaft nun durch die Wahl der Koordinaten einfach zum Ausdruck bringen. Wir geben darum dem Symmetriezentrum die Koordinaten $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ und setzen fest, daß alle Funktionen g_{ik} die Koordinaten nur in der Verbindung

$$R^2 = \sum_{i=1}^{3} x^{i2}$$

enthalten'sollen. Dann folgt, daß alle linearen Transformationen von x^1, x^2, x^3, welche R invariant lassen, zu gleich gut brauchbaren Koordinaten führen. Weitere Invarianten dieser aus der euklidischen Geometrie wohl bekannten orthogonalen Transformationen sind aber

$$\sum_{i=1}^{3} dx^{i2}, \quad \sum_{i=1}^{3} x^i dx^i, \quad x^4, \quad dx^4, \quad \ldots . \qquad (191)$$

und zwar gibt es keine anderen, welche die dx^i nur linear oder quadratisch enthalten. Also werden wir hier die Maßbestimmung ds^2 aus ihnen aufbauen, wobei aber wegen der Eigenschaften des statischen Feldes x^4 selbst auszuschließen ist.

Bevor wir die entsprechende Formel angeben, wollen wir aber zu „Polarkoordinaten" R, ϑ, φ nach den Transformationen

$$x^1 = R\cos\vartheta, \quad x^2 = R\sin\vartheta\cos\varphi, \quad x^3 = R\sin\vartheta\sin\varphi$$

übergehen. Obwohl wir dabei von gebräuchlichen Formeln der euklidischen Geometrie Gebrauch machen, übernehmen wir damit keineswegs deren Maßbestimmung, also auch nicht diese Geometrie selbst. Vielmehr machen wir nur von unserem Recht, beliebige Trans-

formationen zu benutzen, den uns zweckmäßig scheinenden Gebrauch. Die in (191) genannten Invarianten werden dann gleich

$$dR^2 + R^2 d\vartheta^2 + R^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2, \quad R\,dR, \quad x^4, \quad dx^4;$$

und jetzt setzen wir unter Einführung von drei positiven, im übrigen noch unbestimmten Funktionen $W(R)\,\Psi(R)$, $X(R)$:

$$ds^2 = \Psi(R)(dR^2 + R^2 d\vartheta^2 + R^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + X(R)\,R^2\,dR^2 - W(R)\,dx^{4^2}.$$

Doch können wir dabei noch eine Vereinfachung vornehmen, indem wir

$$r = R\sqrt{\Psi(R)}$$

statt R als Koordinate einführen; setzen wir dann unter Einführung der neuen Funktionen $M(r)$ und $V(r)$

$$[\Psi(R) + X(R)\,.\,R^2]\,dR^2 = [1 + M(r)\,.\,r^2]\,dr^2,$$

$$W(R) = \frac{1}{c^2}\,V^2(r),$$

so lautet das Ergebnis

$$ds^2 = [1 + M(r)\,.\,r^2]\,dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - \frac{1}{c^2}\,V^2(r)\,dx^{4^2}. \quad (192)$$

Jetzt gehen wir mittels der Transformation

$$x^1 = r\cos\vartheta, \quad x^2 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad x^3 = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad (193)$$

zu den Koordinaten x^i über, welche mit den zuvor benutzten zwar nicht zusammenfallen, aber doch, da wir jene nicht mehr anwenden, nicht in der Bezeichnung von ihnen unterschieden zu werden brauchen. Wir finden dann

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx^{i^2} + M(r)\Big(\sum_{i=1}^{3} x^i\,dx^i\Big)^2 - V^2(r)\,dt^2. \qquad (194)$$

Danach wird das Schwerefeld mit einem Symmetriezentrum durch zwei Funktionen $V(r)$ und $M(r)$ beherrscht, die wir nunmehr aus dem Variationsprinzip (185) bestimmen wollen.

Nach (194) hat die Maßbestimmung im Streckenraum

$$da^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,dx^i\,dx^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (194a)$$

die Koeffizienten

$$g_{ik} = \delta_k^i + M(r)\,x^i x^k \;(i, k = 1, 2, 3) \qquad (194b)$$

In den Gleichungen (168) haben wir schon die zu (194) gehörenden g-Klammern zurückgeführt auf die Funktion Fund die zu (194a) gehörenden, die dort durch einen Stern von jenen unterschieden waren. Um diese zu berechnen, bilden wir zunächst die Determinante γ der gik mit $i,k = 1, 2, 3$, ihre Unterdeterminanten und, indem wir letztere durch γ dividieren, die γ^{ik}, welche zum Raum tensor der gik als kontravariante Komponenten gehören. Obwohl sie von den dem Welttensor gik an gehörigen g^{ik} begrifflich zu unterscheiden sind, fallen sie, da die $g_{i4} = 0$ (i = 1, 2, 3) sind, im Wert mit diesen zusammen. So finden wir

$$\gamma = 1 + M(r) \cdot r^2, \quad \gamma^{ik} = \delta^i_k - \frac{M(r)\, x^i x^k}{1 + M(r) \cdot r^2} = g^{ik} (i, k = 1, 2, 3). \quad (194c)$$

Weiter folgt aus (194 b), wenn wir die Ableitung der Funktion M (r) mit M' bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} &= \frac{M'}{r} x^i x^k x^l + M\left(\delta^i_l x^k + \delta^i_k x^l\right), \\ \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right]^* &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\frac{M'}{r} x^i x^k x^l + \delta^i_k M x^l, \\ \left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}^* &= \sum_{m=1}^{3} \gamma^{lm} \left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix}\right]^* = \frac{x^l}{1 + Mr^2}\left(\frac{1}{2}\frac{M'}{r} x^i x^k + \delta^i_k M\right). \end{aligned}\right\} \quad (194d)$$

Die Größe H, welche wir berechnen wollen, ist, wie schon in § 17 erwähnt, gegenüber linearen Transformationen von der Determinante + 1 ein Skalar. Wir können also hier zur Vereinfachung der Rechnung den Aufpunkt durch eine lineare orthogonale Transformation der x^1, x^2, x^3 auf die x^1-Achse legen. Dann wird $x^1 = r$, $x^2 = x^3 = 0$ und man findet aus (158) mit der Abkürzung γ' für $d\gamma/dr$ die zu (194) gehörenden Dreizeigersymbole:

$$\left\{\begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\}^* = \frac{r}{1 + Mr^2}\left(\frac{1}{2} M'r + M\right) = \frac{\gamma'}{2\gamma},$$

$$\left\{\begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3\,3 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{Mr}{1 + Mr^2} = \frac{Mr}{\gamma}.$$

Ferner ist dann mit der Abkürzung V für dV/dr:

$$\gamma^{11} = \frac{1}{1 + Mr^2} = \frac{1}{\gamma}, \qquad \gamma^{12} = \gamma^{13} = \gamma^{23} = 0,$$

$$\gamma^{22} = \gamma^{33} = 1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^1} = \frac{dV}{dr} = V', \qquad \frac{\partial V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial x^3} = 0;$$

also nach (158): $\left\{\begin{matrix}4\,4\\1\end{matrix}\right\} = \frac{V V'}{c^2 \gamma}, \quad \left\{\begin{matrix}1\,4\\4\end{matrix}\right\} = \frac{V'}{V}.$

Alle anderen g- Klammern verschwinden. Weiter ist

$$g^{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g^{44} = \frac{1}{g_{44}} = -\frac{c^2}{V^2} \qquad (195)$$

und nach (194 c) bei der besonderen Wahl des Aufpunktes, die wir getroffen haben:

$$g^{11} = \gamma^{11} = \frac{1}{1 + M r^2} = \frac{1}{\gamma}, \quad g^{22} = \gamma^{22} = g^{33} = \gamma^{33} = 1, \quad (196)$$

während die anderen g^{ik} verschwinden. Schließlich führen wir hier noch an:

$$\sqrt{-g} = \frac{V}{c}\sqrt{\gamma}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (196\,a)$$

Da $$H = \sum_{l\,m\,n} g^{ll} \left[\left\{\begin{matrix}l\,l\\n\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}n\,m\\m\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}l\,n\\m\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}l\,m\\n\end{matrix}\right\}\right] + 2\lambda,$$

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1\,4\\4\end{matrix}\right\}\right) - \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}1\,4\\4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1\,4\\4\end{matrix}\right\} = \left(\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{V'}{V}\right)\frac{V'}{V};$$

also der ganze Summand mit l=*1* nach (196)

$$\left(\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{V'}{V}\right)\frac{V'}{V\gamma}.$$

Der Faktor von $\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1\,4\\4\end{matrix}\right\}\right) = \left(\frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{V'}{V}\right)\frac{Mr}{\gamma};$

also der Summand mit $\left(\frac{\gamma'}{\gamma} + 2\frac{V'}{V}\right)\frac{Mr}{\gamma}$ ich großen mit $l = 3$

Als Faktor von g^{44} finden wir aber

$$\left\{\begin{matrix}4\,4\\1\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1\,4\\4\end{matrix}\right\}\right) - \left\{\begin{matrix}4\,4\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4\,1\\4\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}4\,1\\4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4\,4\\1\end{matrix}\right\} = \left(\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{V'}{V}\right)\frac{V V'}{c^2\gamma};$$

daher wird der Summand mit $l = 4$ nach (195)

$$-\left\{\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{V'}{V}\right\}\frac{V'}{V\gamma}.$$

Also wird schließlich

$$H = \left(\frac{\gamma'}{\gamma} + 2\frac{V'}{V}\right)\frac{Mr}{\gamma} + 2\lambda = \frac{2}{V\sqrt{\gamma}}\frac{d(V\sqrt{\gamma})}{dr}\cdot\frac{Mr}{\gamma} + 2\lambda. \qquad (197)$$

Variieren wollen wir das Integral

$$\int \mathfrak{H} d\mathfrak{X} = \int \sqrt{-g}\, H d\mathfrak{X} = \frac{1}{c} \int\int\int\int V \sqrt{\gamma}\, H dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

[vgl. (196a)]. Nach (193) können wir dabei statt $dx^1\ dx^2\ dx^3$ nach der Regel für die Einführung neuer Integrationsveränderlicher mit Hilfe der Funktionaldeterminanten $r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ schreiben; also

$$d\mathfrak{X} = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\, dx^4 . \qquad (197\,a)$$

Denken wir den Integrationsbereich begrenzt von je einem Paar von Räumen $x^4 = const$, $\vartheta = const$, $\varphi = const$, so ergeben die Integrationen nach diesen Veränderlichen nur konstante Faktoren; denn der Integrand hängt von ihnen nicht ab. Führen wir ferner durch die Ansätze

$$\frac{Mr^3}{\gamma} = \frac{Mr^3}{1 + Mr^3} = w, \qquad V\sqrt{\gamma} = V\sqrt{1 + Mr^3} = v, \qquad (198)$$

deren Umkehrungen

$$V^2 = v^2 \frac{r - w}{r}, \qquad \gamma = 1 + Mr^3 = \frac{r}{r - w} \cdot \qquad (198a)$$

lauten, zwei neue Funktionen v und w von r ein, so wird:

$$\left.\begin{aligned} \int \mathfrak{H} d\mathfrak{X} = \int \sqrt{-g}\, H d\mathfrak{X} &= \frac{2}{c} \int\int\int dx^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \cdot \int f dr, \\ f &= w v' + \lambda v r^2; \end{aligned}\right\} \qquad (199)$$

und die Maßbestimmung (192) erhält die Form:

$$ds^2 = \frac{r}{r - w} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - v^2 \frac{r - w}{r} dt^2. \qquad (199a)$$

Bis hierher benutzte unsere Rechnung nur die Symmetrieeigenschaft des gesuchten Feldes, aber noch nicht dessen vollständige Freiheit von aller Materie. Infolgedessen können wir die bisher gewonnenen Gleichungen bei allen Problemen mit einem Symmetriezentrum benutzen. Soll nun nirgends, außer im Nullpunkt, Materie liegen, so vereinfacht sich das Variationsproblem zu Gleichung (181):

$$\delta \int \sqrt{-g}\, H d\mathfrak{X} = 0,$$

was nach (199) auf

$$\delta \int f dr = 0$$

führt. Die Funktionen *v* und *w* sind aus ihm zu bestimmen, und zwar lauten die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial w'}\right) - \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \text{ oder } w' = 0, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial v'}\right) - \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$
$$\text{oder } w' = \lambda v r^2 = 0.$$

v ist also eine Konstante, und zwar können wir sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich *c* setzen. Denn da *v* nach (199 a) nur als Faktor von *t* vorkommt, gelangt man bei anderer Wahl nur zu einer anderen Zeitveränderlichen. Für *w* aber ergibt sich unter Einführung der Konstanten α:

$$w = \alpha + \frac{1}{3}\lambda r^3. \qquad (199a')$$

Dann folgt aus (198 a)

$$V^2 = c^2\left(1 - \frac{\lambda r^2}{3} - \frac{\alpha}{r}\right), \quad 1 + Mr^2 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda r^2}{3} - \frac{\alpha}{r}} \qquad (199\,b)$$

und aus (199 a) unter Vernachlässigung des Gliedes mit λ

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}\,dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - c^2\frac{r-\alpha}{r}\,dt^2. \qquad (200)$$

Dies ist Schwarzschilds Maßbestimmung in der Umgebung eines Massenpunktes.

b) Erörterung der Formel (200). Wir erinnern uns, daß die Koordinaten r, ϑ, φ hier, wie überhaupt, zunächst nur ganz willkürliche Bezeichnungen von Punkten sind. Physikalische Bedeutung haben nur die aus (200) abzuleitenden Maßangaben. Immerhin ist die Sprechweise zulässig, *r* als den Radiusvektor vom Massenpunkt her und ϑ und φ als Polabstand und Azimut zu bezeichnen, wie wir es in der euklidischen Geometrie tun. Nur ist r nicht das natürliche Maß für den Abstand vom Massenpunkt.

Zwei Uhren in den Abständen vom Massenpunkt, welche den Werten r_1 und r_2 entsprechen, geben in gleichen Zeiten *dt* Eigenzeiten an, die im Verhältnis

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \sqrt{\frac{1-\alpha/r_1}{1-\alpha/r_2}} = 1 - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \cdots$$

zueinander stehen. Wir bestätigen hier, daß die dem Anziehungszentrum nähere nachgeht, wie wir schon in § 19 sähen, sofern $\alpha > 0$. Wir können sogar durch den Vergleich mit (165) ermitteln, daß zwischen α und der Masse *m* des Anziehungszentrums näherungsweise die Beziehung

$$\alpha = 2\frac{Cm}{c^2} \qquad \cdots\cdots \textbf{(901)}$$

bestehen muß. Doch werden wir diese im nächsten Paragraphen noch auf eine andere Art gewinnen können.

Eine Strecke auf der Kugel $r = const$ hat die natürliche Länge

$$da = r\sqrt{d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2}.$$

Infolgedessen gilt auf jeder Kugel um den Massenpunkt die sphärische Geometrie, die sich aus der euklidisohen Geometrie des dreidimensionalen Raumes ableitet. Im Streckenraum selbst gilt aber eine nichteuklidische Geometrie, denn für eine radiale Strecke ist das Maß, das man bei Anlegung eines Maßstabes abliest, nicht dr, sondern

$$da = dr\sqrt{\frac{r}{r-\alpha}} \quad (r > \alpha).$$

Da sich alle „Ebenen" $\varphi = const$ wegen der Symmetrie völlig gleichen, können wir die Erörterung auf eine von ihnen beschränken. In ihr herrscht die Maßbestimmung

$$da^2 = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\vartheta^2. \qquad (202)$$

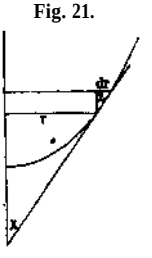
Dieselbe (nur daß $d\vartheta$ durch $d\varphi$ zu ersetzen ist) gilt auch in der „Ebene" $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Nun gilt auf jeder Drehfläche im dreidimensionalen euklidischen Raume eine Maßbestimmung

$$da^2 = \frac{dr^2}{\sin^2\chi} + r^2 d\vartheta^2,$$

sofern wir unter r den senkrechten Abstand eines ihrer Punkte von der als Drehachse gewählten z-Achse verstehen, unter x die Neigung des durch ihn gehenden Elementes der Meridiankurve gegen diese Achse und unter ϑ den Winkel zwischen der Ebene dieser Kurve und einer festen Ebene durch die Drehachse (Fig. 21). Denn dann ist $\frac{dr}{\sin\chi}$ das Linienelement der Meridiankurve, $r\,d\vartheta$ das des dazu senkrechten Breitenkreises. Diese Maßbestimmung kommt auf (202) hinaus, sofern wir

Fig. 21.



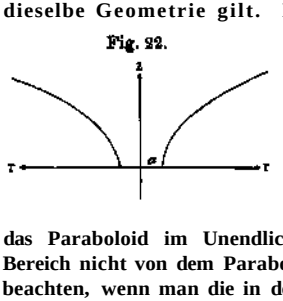
$$\sin^2\chi = \frac{r-\alpha}{r}, \text{ d. h. } \operatorname{cotg}\chi = \frac{ds}{dr} = \sqrt{\frac{\alpha}{r-\alpha}}$$

setzen. Unterdrücken wir bei der Integration dieser Differentialgleichung die additiv zu z hinzutretende Konstante, so finden wir die Qleichung eines Rotation sparaboloids

$$s^2 = 4\alpha(r-\alpha),$$

von dem Fig. 22 den Meridianschnitt zeigt. Da, wie gesagt, dieser Schnitt um die z- Achse zu drehen ist, entsteht dabei eine einzige, zusammenhängende Fläche. Von der Drehachse wird sie nicht geschnitten, sondern der engste Kreis auf ihr, den der Scheitel der Parabel bei der Drehung erzeugt, hat immer noch den Abstand α von dieser. Das Gaußsche Krümmungsmaß ist negativ, das zeigt die Fig. 22; aber es nimmt mit wachsendem r mehr und mehr den euklidischen Wert 0 an. Auf die eine Hälfte dieses Paraboloids, etwa auf die positiven z-Werten entsprechende, wird unsere „Ebene" in dem Sinne abgebildet, daß in beiden dieselbe Geometrie gilt. Ein Beobachter, dem nur Gebiete auf ihr zugänglich sind, in denen $r \gg \alpha$ ist, wird sie für eine Ebene im euklidischen Sinne halten und dementsprechend in ihr ebene Polarkoordinaten einführen mit der Maßbestimmung, welche dafür die euklidische Geometrie gibt. Er vertauscht sie dabei mit derjenigen Tangentenebene, welche das Paraboloid im Unendlichen berührt, weil er sie in seinem Bereich nicht von dem Paraboloid unterscheiden kann. Das ist zu beachten, wenn man die in den nächsten Paragraphen abzuleitende Perihelbewegung der Planeten und die Lichtablenkung richtig verstehen will; denn in dieser Lage ist ein Beobachter auf der Erde der Sonne gegenüber.

Fig. 22.



Die Abbildung aber gelingt nur für den Teil der „Ebene", für den r > α ist; für den anderen Teil gibt es keine reelle Drehfläche, welche dieselben Dienste tut, wie man an der obigen Rechnung erkennt. Dieser gegen die Koordinatentransformationen invariante Unterschied beweist, daß sich die Singularität der Maßbestimmung (200) bei r = α nicht durch Einführung anderer Koordinaten beseitigen läßt, sondern durchaus in der Natur der Sache liegt. Man wird daraus wohl schließen müssen, daß jede Masse m, wenn sie eine Kugel erfüllt, notwendig einen größeren Halbmesser hat; als er dem Wert $r = 2\ Cm/c^2$ entspricht. Und in der Tat kennen wir bisher keinen dem widersprechenden Fall, auch nicht bei den Atomkernen.

Jede Singularität, die bei $r = \alpha$ sowie die bei $r = 0$, fällt fort, sowie man $\alpha = 0$ setzt. Dann aber wird aus (200) die pseudoeuklidische Maßbestimmung. Daraus schließt Hilbert: Die pseudoeuklidische Maßbestimmung ist die einzige für den leeren Raum mit den Feldgleichungen (144) verträgliche, wenn der Maßtensor überall

regulär und von t unabhängig sein soll, wenn ein Symmetriezentrum da sein soll, und wenn schließlich, was aber durch Transformation nach § 9 d stets zu erreichen ist, die Zeitachse überall auf den Streckenräumen senkrecht stehen soll. Im Innern einer Hohlkugel herrscht somit, sofern nicht äußere Einflüsse die zentrische Symmetrie stören, die pseudoeuklidische Weltgeometrie der beschränkten Relativitätstheorie. Für beide Sätze ist aber wesentliche Voraussetzung, daß das λ-Glied fortfällt.

Unter den Voraussetzungen, aus denen wir die Maßbestimmung (200) abgeleitet haben, fehlt die in § 18, a) genannte Grenzbedingung für $r = \infty$, daß nämlich die *gik* die pseudoeuklidischen Werte annehmen. Diese Aussage ergibt sich aber als eine Folgerung aus (200), d. h. sie läßt sich für den vorliegenden Fall der zentrischen Symmetrie aus den Feldgleichungen ohne das λ Glied ableiten.

c) Die geodätischen Linien. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien erhalten wir in den Polarkoordinaten r, ϑ, φ gemäß der Maßbestimmung (192), wenn wir das Variationsproblem

$$\delta \int \left[(1 + Mr^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{V^2}{c^2}\dot{x}^2 \right] dp = 0$$

behandeln. Wir finden dabei:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} + \frac{1}{2}\frac{\dot{r}^2}{1+r^2M}\frac{d}{dr}(1+r^2M) - \frac{r\dot{\vartheta}^2}{1+r^2M} \\ - \frac{r\sin^2\vartheta}{1+r^2M}\dot{\varphi}^2 + \frac{\frac{V}{c^2}\frac{dV}{dr}}{1+r^2M}\dot{x}^4 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (203)$$

Ferner:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = 0 \qquad (204)$$

und

$$\frac{d}{dp}(r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}) = 0, \text{ d. h. } \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\,\dot{\varphi} + 2\cot g\,\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi} = 0. \qquad (205)$$

Schließlich:

$$\frac{d}{dp}(V^2\dot{x}^4) = 0, \text{ d. h. } \ddot{x}^4 + \frac{2}{V}\frac{dV}{dr}\dot{r}\,\dot{x}^4 = 0 \quad . \quad . \quad (206)$$

Der Gleichung (204) genügt der Ansatz

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

Wenn wir ihn im folgenden machen, so liegt darin keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern nur eine passende Wahl des räumlichen

Koordinatensystems. Man kann eben hier wie in der euklidischen Geometrie jede „Ebene" zur Fläche $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ machen. (206) und (206) lassen wenigstens je eine erste Integration ohne weiteres zu, nämlich, wenn wir sogleich von (207) und (198a) mit $w = \alpha$ und $v = c$ (also unter Vernachlässigung von λ-Gliedern) Gebrauch machen:

$$r^2 \dot{\varphi} = b \,. \qquad (208)$$

$$\frac{r-\alpha}{r} \dot{t} = 1 \qquad (209)$$

b ist dabei eine Integrationskonstante; wenn wir die andere gleich 1 setzen, so liegt darin nur eine Verfügung über den bisher jeder physikalischen Bedeutung baren Parameter *p*, als dessen Funktionen die Koordinaten t, r, ϑ, φ hier erscheinen. (203) aber können wir nach § 7, a) im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Kreisbewegungen $r = const$, ersetzen durch die schon einmal integrierte Gleichung

$$(1 + M r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \, \dot{\theta}^2 - \frac{V^2}{c^2} \dot{x}^{4^2} = -A, \qquad (210)$$

oder nach (207) und (198 a) durch

$$\frac{r}{r-\alpha} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - c^2 \frac{r-\alpha}{r} \dot{t}^2 = -A. \qquad (211)$$

Die Konstante *A* ist positiv für alle zeitartigen geodätischen Linien, Null für geodätische Nullinien [vgl. § 7, c)].

§ 23. Die Perihelbewegung des Merkur.

Ein gegen das Anziehungszentrum leichter Massenpunkt hat nach § 16 als Weltlinie eine zeitartige geodätische Linie. Wir suchen die zugehörige Bahnkurve im Streckenraum in der Form $r = r(\varphi)$. Eliminieren wir aus (208), (209) und (211) $\dot{\varphi}$ und t, so finden wir:

$$\dot{r}^2 = c^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(A + \frac{b^2}{r^2} \right);$$

und dividieren wir diese Beziehung durch

$$r^4 \dot{\varphi}^2 = b^2,$$

so gelangen wir zu der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{c^2 - A}{b^2} + \frac{\alpha A}{b^2} \varrho - \varrho^2 + \alpha \varrho^3, \qquad (212)$$

aus der $\varrho = r^{-1}$ als Funktion von φ zu entnehmen ist.

Die entsprechende Differentialgleichung des Newtonsehen Zweikörper-Problems lautet:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E}{b^2} + \frac{2Cm}{b^2}\varrho - \varrho^2; \qquad (213)$$

sie ergibt sich leicht aus dem Flächensatz

$$r^2\dot{\varphi} = b$$

und dem Energiesatz

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2Cm}{r} = E,$$

in welchem die Konstante E für eine elliptische Bahn negativ, eine hyperbolische positiv ist. (Stets ist bei den im Planetensystem beobachteten Fällen $|E| \ll c^2$; denn ist $E > 0$, so ist $E < q^2$; und ist $E < 0$, so ist $|E| < 2Cm/r$, d. h. kleiner als das Geschwindigkeitsquadrat eines Körpers, der seine Geschwindigkeit nur durch Annäherung aus dem Unendlichen gewonnen hat.) m bedeutet die Masse des Zentralkörpers. Beide Gleichungen stimmen annähernd überein, wenn

$$\alpha\varrho \ll 1 \qquad (214)$$

ist, und diese Bedingung ist um so besser erfüllt, je größer der Abstand des Planeten vom Zentralkörper. Dazu gehört aber außerdem die Übereinstimmung des Faktors von ϱ und des absoluten Gliedes; also

$$c^2 + A = E, \qquad \alpha A = 2Cm$$

und daraus folgt nun wieder, wenn man E gegen c^2 vernachlässigt, die Gleichung (201)

$$\alpha = \frac{2Cm}{c^2}.$$

Setzen wir für m die Sonnenmasse, so ist nach (166) das Verhältnis der Strecke α zum Sonnenhalbmesser α

$$\alpha/a = 4{,}14 \cdot 10^{-6},$$

also, da $\alpha = 6{,}95 \cdot 10^{10}$ cm beträgt,

$$\alpha = 2{,}88 \cdot 10^{5}\,\text{cm} \qquad (214a)$$

Für den der Sonne nächsten Planeten, den Merkur, beträgt der mittlere Abstand $5{,}8 \times 10^{12}$ cm, also ist ungefähr (r ist kein genaues Maß des Abstandes)

$$\alpha\varrho = 5 \cdot 10^{-8}.$$

Die Bedingung (214) wäre also sehr gut erfüllt. Trotzdem bewirkt das letzte Glied der Gleichung (212) eine Abweichung von den Kepplersehen Gesetzen, die sich beim Merkur bemerkbar macht

Um diese Abweichung für eine annähernd elliptische Bahn zu untersuchen, fragen wir nach der Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ der beiden Winkel, für welche der Planet den kleinsten Wert ϱ_1 von ϱ (Aphel) und den größten Wert ϱ_2 (Perihel) annimmt. Nach der Newtonschen Gleichung (213) sind ϱ_1 und ϱ_2 die Wurzeln der rechten Seite; denn wenn diese Null ist, verschwindet auch $d\varrho/d\varphi$. Man kann somit die rechte Seite gleich

$$(\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho)$$

setzen und findet dann

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho)}} = \left| \arcsin \frac{\varrho - \frac{1}{2}(\varrho_2+\varrho_1)}{\frac{1}{2}(\varrho_2-\varrho_1)} \right|_{\varrho_1}^{\varrho_2} = (2n+1)\pi.$$

n ist dabei irgend eine ganze Zahl. Die Mehrdeutigkeit, welche die *arc* sin-Funktion hineinbringt, entspricht der Tatsache, daß die beiden Werte ϱ_1, ϱ_2 immer wieder angenommen werden. Für zwei aufeinanderfolgende Perihel- und Aphelstellungen ist natürlich n — 0 zu setzen. Dann wird $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, was dem entspricht, daß das Anziehungszentrum auf der großen Achse der Ellipse liegt.

In Einsteins Gleichung hat die rechte Seite wegen des Zusatzes $\alpha\varrho^3$ noch eine dritte Wurzel ϱ_3. Sie rückt wegen der Identität

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \frac{1}{\alpha},$$

die aus der Theorie der algebraischen Gleichungen folgt, mit verschwindendem α ins Unendliche, während Q_1 und Q_2 annähernd dieselben Werte haben, wie soeben und vor allem immer noch die Grenzwerte darstellen, zwischen denen Q hin und her schwankt. Für die rechte Seite von (212) können wir nun schreiben:

$$\alpha(\varrho-\varrho_1)(\varrho-\varrho_2)(\varrho-\varrho_3) = -(\varrho-\varrho_1)(\varrho-\varrho_2)\alpha\varrho_3\left(1-\frac{\alpha\varrho}{\alpha\varrho_3}\right)$$

$$= (\varrho-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho)\left[1-\alpha(\varrho_1+\varrho_2)\right]\left(1-\frac{\alpha\varrho}{1-\alpha(\varrho_1+\varrho_2)}\right).$$

In dem Integral, als das wir $\varphi_2 - \varphi_1$ berechnen, tritt aber die reziproke Quadratwurzel der rechten Seite als Integrand auf; für sie gilt bis auf Glieder höherer als erster Ordnung in α der Wert:

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha}{2}(\varrho_1+\varrho_2)\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\varrho\right)}{\sqrt{(\varrho-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho)}}.$$

Infolgedessen wird jetzt

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(1 + \frac{\alpha}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)\right) \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\varrho\right) d\varrho}{\sqrt{(\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho)}}.$$

Die Ausführung des unbestimmten Integrals liefert

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)\right) \left\{ -\frac{\alpha}{2}\sqrt{(\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho)} + \left(1 + \frac{\alpha}{4}(\varrho_2 + \varrho_1)\right) \arcsin \frac{\varrho - \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_1)}{\frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_1)} \right|$$

und die Einsetzung der Grenzen ergibt, wieder unter Fortlassung von Gliedern mit α^2,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left[1 + \tfrac{3}{4}\alpha(\varrho_1 + \varrho_2)\right](2n + 1)\pi.$$

Wiederum ist n eine beliebige ganze Zahl. Setzt man sie Null, so findet man den Winkelabstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perihel- und Aphelstellungen. Setzt man sie gleich 1, so findet man hingegen den Winkelabstand zwischen einem Aphel und dem übernächsten Perihel. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perihelen durchläuft der Planet daher den Winkel

$$2\pi\left[1 + \tfrac{3}{4}\alpha(\varrho_1 + \varrho_2)\right].$$

Sein Überschuß über 2π, also

$$\varepsilon = \tfrac{3}{2}\pi\alpha(\varrho_1 + \varrho_2),$$

gibt uns die Bewegung des Perihels während eines Umlaufs des Planeten. Innerhalb unserer Näherung dürfen wir aber Q_1 und Q_2 so aus der großen Achse a^* und der numerischen Exzentrizität e berechnen, als ob die Bahn genau elliptisch wäre; nämlich:

$$\varrho_1 = \frac{1}{a^*(1+\varepsilon)}, \qquad \varrho_2 = \frac{1}{a^*(1-\varepsilon)}.$$

Also folgt in Rücksicht auf (201) Einsteins Formel:

$$\varepsilon = \frac{3\pi\alpha}{a^*(1-e^2)} = \frac{6\pi Cm}{a^*(1-e^2)c^2}. \quad \cdots \quad (215)$$

Für eine genaue Zahlenrechnung drückt man Cm durch die große Achse a der Bahn und die Umlaufszeit T nach dem dritten Kepplersehen Gesetz aus:

$$\varepsilon = \frac{24\pi^3 a^{*2}}{(1-e^2)c^2 T^2}.$$

Für den Merkur ist a^* = 5,786 . 10^{12}cm, e = 0,2056 und T = 87,97 mittlere Tage = 3600 . 24 .87,97 Sekunden, während

$c = 3.10^{10}$cmsec ^{1} ist. Fürs Jahrhundert ergibt sich die Perihelverschiebung daraus durch Multiplikation mit der Zahl der Merkurumläufe im Jahrhundert, welche

$$\frac{100 \cdot 365{,}25}{87{,}97} = 415{,}20$$

beträgt. Rechnet man dann noch durch Multiplikation mit $\frac{180 \cdot 3600}{\pi}$ in Bogensekunden um, so findet man 42" 89. Dies ist die Deutung der so lange bekannten und bisher nie recht erklärten Perihelverschiebung (§1).

Wir möchten daran erinnern, daß diese Perihelbewegung nicht die wirkliche ist, sondern der Rest, der zurückbleibt, wenn man die aus den Störungen durch die anderen Planeten berechneten Anteile von der beobachteten Bewegung abzieht. Die Berechtigung," die Störungen nach der Newtonschen Theorie zu ermitteln, entnehmen wir aus den Betrachtungen von § 19; sie ist um so größer, als die Störungen selbst kleine Korrektionen darstellen, also nicht mit der für Formel (215) erforderlichen Genauigkeit berechnet zu werden brauchen.

Bei den anderen Planeten ist einmal a^* erheblich größer, zudem die Zahl der Umläufe im Jahrhundert nach dem dritten Keppler sehen Gesetz proportional zu $a^{*3/2}$, also geringer. Der Faktor $1 - e^2$ macht bei keinem der großen Planeten viel aus. Infolgedessen ist die Perihelverschiebung im Jahrhundert proportional zu $a^{*5/2}$ So findet man aus Einsteins Formel für die Venus eine Verschiebung von S" 6, für die Erde 3" 8, für den Mars l"35. Die Beobachtung hat darüber wohl noch kein sicheres Ergebnis geliefert.

Auf den Zweifel, ob auch die Bewegung so großer Körper, wie der Planeten, durch geodätische Weltlinien dargestellt wird, wiesen wir schon in § 16 hin. Mie[1]) weist in einer erst nach Vollendung dieser Auflage erschienenen Arbeit nach, daß die Abweichungen unbedeutend sind, daß also der Anwendung der Einstein schen Formel (215) nichts im Wege steht.

Wir wollen nun noch zwei Bewegungsvorgänge untersuchen, welche lediglich ein theoretisches Interesse besitzen. Die bisher von der Betrachtung ausgeschlossenen Kreisbewegungen behandelt man am einfachsten nach der Differentialgleichung (203), wobei wir natürlich M und V^2 gemäß (198 a) durch $v = c^8$ und $w = \alpha$ ausdrücken. Setzen wir hier immer $\sin \vartheta = 1$, ferner r und r gleich Null, so finden wir bei Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $(r - \alpha)$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha c^2}{2 r^3} \dot{t}^2.$$

Hier dividieren wir durch t^2:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha c^2}{2r^3} = \frac{Gm}{r^3}. \qquad (216)$$

Dies ist das dritte Eepplersehe Gesetz, allein mit der Veränderung, daß r nicht genau der natürlich gemessene Abstand vom Anziehungszentrum ist. Anderseits finden wir nach (209):

$$\dot{\varphi}^2 = \alpha c^2 : 2r(r-\alpha)^2. \qquad (217)$$

Danach sind also Kreisbahnen möglich; aber nicht alle; denn die Weltlinie des Körpers muß zeitartig bleiben, d. h. die Konstante A in (211) muß positiv sein. Eliminiert man auch in (211) mittels (209) i, so folgt wegen $r = 0$

$$\frac{c^2 r}{r-\alpha} - r^2\dot{\varphi}^2 > 0 \qquad (218)$$

und nach (217)

$$r > \tfrac{3}{2}\alpha.$$

Die erwähnte Singularität der Maßbestimmung liegt bei $r = \alpha$; aber die untere Grenze für den Halbmesser einer Kreisbahn liegt schon bei $r = {}^3/_2\,a$, weil sich ein Körper auf dieser Bahn mit der am gleichen Ort herrschenden Lichtgeschwindigkeit bewegen müßte, und bei einer noch kleineren Kreisbahn mit Überlichtgeschwindigkeit.

Den entgegengesetzten Grenzfall der Bewegung auf einer Geraden durch das Symmetriezentrum behandelt man am besten nach Gleiohung(158a) q v BV⁴. . . . . .(219)

Danach ist $q = 0$, wo $V = 0$, d. h. an der singulären Stelle $r = \alpha$, und wo $V^2 = \frac{1}{B}$. Dazwischen, bei $V^2 = \frac{1}{2B}$, hat q seinen Maximalwert $\left(= V\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Da aber V von dem Wert c, den es im Unendlichen annimmt, bei der Annäherung an das Zentrum stets abnimmt, ergeben sich folgende Möglichkeiten:

1. $\frac{1}{B} < c^2$. Entfernt sich ein Körper vom Attraktionszentrum, so kehrt er" im endlichen Abstande $r = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{Bc^2}}$ $\left(\text{wo } V^2 = \frac{1}{B}\right)$ um und fällt dann auf das Zentrum zurück; anfangs mit wachsender, später, nachdem er sich ihm bis auf $r = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{2Bc^2}}$ $\left(\text{wo } V^2 = \frac{1}{2B}\right)$ genähert hat, mit abnehmender Geschwindigkeit.

2. $\frac{1}{B} > c^2$. Da nach § 18, b) jede Fallbewegung im stationären Felde auch in umgekehrter Richtung vor sich gehen kann, nehmen wir an, der Körper nähert sich von vornherein dem Attraktionszentrum. Er hat dann schon im Unendlichen die endliche Geschwindigkeit $q = c\sqrt{1 - Bc^2}$. Ist

a) $\frac{1}{B} < 2c^2$, so wird er anfangs beschleunigt, vom Abstände $r =: \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{2Bc^2}}$ an jedoch verzögert

b) $\frac{1}{B} > 2c^2$, so wird er von Anfang an verzögert.

Im Gegensatz dazu nimmt die am gleichen Ort mit Maßstab und Uhr natürlich gemessene Geschwindigkeit

$$\frac{c}{V} q = c\sqrt{1 - BV^2} \quad . \quad . \quad . \quad (220)$$

(vgl. § 14) bei der Annäherung an das Attraktionszentrum dauernd, und zwar bis zum Wert c, zu. "Weil sich q von V bei kleinem V nur um Glieder höherer Ordnung unterscheidet, erreicht ein Körper, wie das Licht, die singulare Stelle $r = \alpha$ in endlicher Zeit. Ein Strahl braucht nämlich, um vom Ort r_0 dorthin zu kommen, die Zeit

$$t = -\int_{r_0}^{\alpha} \frac{dr}{V} = -\frac{1}{c}\int_{r_0}^{\alpha} \sqrt{\frac{r}{r-\alpha}}\, dr$$
$$= \frac{1}{c}\left[\sqrt{r_0(r_0-\alpha)} - \frac{1}{2}\alpha \log \frac{\sqrt{r_0} - \sqrt{r_0-\alpha}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_0-\alpha}}\right].$$

§ 24. Lichtstrahlen im Schwerefeld des Massenpunktes.

Nach § 15, d) sind die Lichtstrahlen durch die geodätischen Nullinien der „Welt" bestimmt; also gilt für ihren Verlauf im Streckenraum die Gleichung (212) mit $A = 0$:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{b^2} - \varrho^2 + \alpha\varrho^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

Nur eine uns schon bekannte Kurve können wir aus dieser Gleichung nicht ohne weiteres finden, nämlich den Kreis mit dem Wert

$$r = \tfrac{3}{2}\alpha,$$

der nach § 23 unter den dort erörterten Kreisbahnen dem Wert Null von A entspricht. In ihm kann ein in sich zurückkehrender Strahl

verlaufen. Ersetzt man, was dem Wert $A = 0$ entspricht, in (218) das >-Zeichen durch das Gleichheitszeichen, so findet man für die nach (208) konstante Größe $\Delta = \frac{b}{c} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{c}$ wegen (217) den Wert

$$\Delta = \frac{b}{c} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

Von den durch (221) bestimmten Strahlen untersuchen wir nur diejenigen, welche im Unendlichen bei $\varphi = 0$ beginnen; darin liegt keine tatsächliche Beschränkung. Im Unendlichen, d. h. bei kleinem ϱ, verlaufen diese alle auf parallelen Geraden; denn vernachlässigt man $\alpha\varrho^3$ gegen ϱ^3, so findet man durch Integration aus (221)

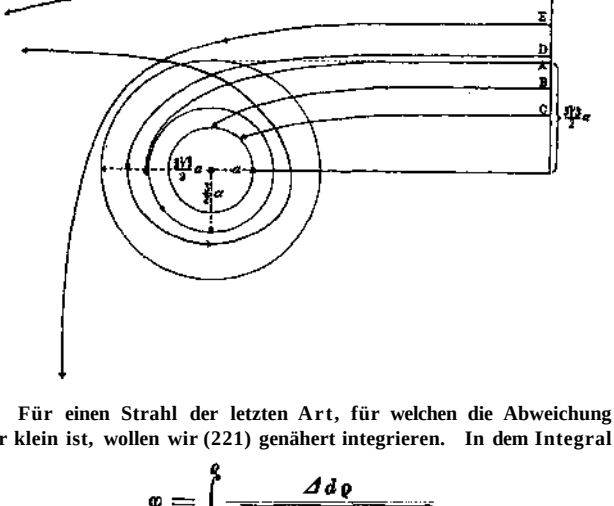
$$\varphi = \int_0^\varrho \frac{\Delta\, d\varrho}{\sqrt{1 - \Delta^2\varrho^2}} = \arcsin(\Delta\varrho), \quad r\sin\varphi = \Delta,$$

und im Unendlichen ist der Baum euklidisch. Δ wäre also der kleinste Wert von r auf einer solchen Geraden, also in gewissem Sinne der Abstand vom Anziehungszentrum, auf den der Strahl hinzielt, könnte man auf der ganzen Länge des Strahles die euklidische Geometrie anwenden. Obwohl dies nicht der Fall ist, können wir diese Sprechweise als gute Annäherung an die Wirklichkeit beibehalten, weil ja die Abweichungen in allen in Betracht kommenden Fällen sehr klein sind. Δ kann sich zwischen Null, was für einen gerade auf das Zentrum zueilenden Strahl gilt, und beliebig großen Werten stetig ändern. Es nimmt einmal dabei auch den Wert (222) an, welcher dem Kreise $r = {}^3/_2\,a$ entspricht.

Daraus ziehen wir in Anlehnung an Poincarés Zykeltheorie den überdies recht anschaulichen Schluß: Der Lichtstrahl, der im Unendlichen auf den Abstand $\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ hinzielt, biegt sich nach innen und nähert sich auf einer Spirale asymptotisch dem Kreise $r = {}^3/_2\,\alpha$. Dann ergibt sich für die Gesamtheit der betrachteten Strahlen die Fig. 23. Sie zeigt uns die Kreise $r = \alpha$, an welchem jeder herankommende Lichtstrahl endigt (ist dort die Lichtgeschwindigkeit 0), ferner $r = {}^3/_2\,a$ und $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$. An letzterem ist eine Tangente gezeichnet. Der Strahl *A*, welcher diese im Unendlichen "berührt, wickelt sich unendlich oft um den zweiten der genannten Kreise. Alle Strahlen mit kleinerem Δ (wie *B* und *C)* durchsetzen

ihn und endigen bei r = α; die mit etwas größerem Δ (wie z. B. *D)* umkreisen den mittleren Kreis, um so häufiger, je näher sie ihm kommen; und die viel weiter entfernten (wie *E* und *F)* erfahren nur eine mehr oder minder bedeutende Abweichung von der Geraden *).

Fig. 28.



Für einen Strahl der letzten Art, für welchen die Abweichung sehr klein ist, wollen wir (221) genähert integrieren. In dem Integral

$$\varphi = \int_0^{\varrho} \frac{\Delta\, d\varrho}{\sqrt{1 - \Delta^2 \cdot \varrho^2 (1 - \alpha\varrho)}}$$

führen wir als neue Veränderliche ein:

$$\sigma = \Delta \cdot \varrho \sqrt{1 - \alpha\varrho}.$$

*) Die Maßbestimmung (200) gilt stets außerhalb einer Kugel von der Masse *m.* Wie Fig. 23 beweist, sieht ein weit entfernter Beobachter eine solche Kugel, wenn ihr Halbmesser, gemessen in dem Maßstabe der *r,* zwischen α und $^3/_2$ α. liegt, so vergrößert, daß sie ihm den Halbmesser $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ « zu haben scheint. Überhaupt alle Kugeln werden optisch vergrößert. Die im Text folgende Bechnung gibt für die relative Vergrößerung des Halbmessers *a* den Näherungswert $\frac{\alpha}{2a} = \frac{C\,m}{a\,c^2}$, der bei der Sonne freilich nach (166) nur 2 .10^{-6} beträgt.

Vernachlässigen wir aber quadratische und höhere Glieder in α, so können wir auch schreiben:

$$\Delta \cdot \varrho = \sigma\left(1 + \frac{\alpha}{2\Delta}\sigma\right)$$

Dann wird

$$\varphi = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma\left(1 + \frac{\alpha}{\Delta}\sigma\right)}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \arcsin\sigma - \frac{\alpha}{\Delta}\sqrt{1-\sigma^2} + \frac{\alpha}{\Delta}.$$

Nun nehme σ von Null zu bis zum Wert 1; bei diesem ist $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$, also auch $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$; ϱ hat also seinen größten, *r* seinen kleinsten Wert. Das zugehörige φ ist

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\Delta}.$$

Denselben Weg könnte der Strahl auch in 'umgekehrter Richtung durchlaufen. Einen dazu kongruenten Weg geht er, wenn er statt dessen seine Bahn weiter verfolgt; kommt er dabei wieder ins Unendliche, so ist der zugehörige Wert von φ

$$\varphi_\infty = \pi + \frac{2\alpha}{\Delta};$$

d. h.

$$\psi = 2\frac{\alpha}{\Delta} = \frac{4Gm}{c^2\Delta}$$

ist die Ablenkung des Lichtstrahls von seiner Anfangsrichtung. Dies ist Einsteins Formel für die Lichtablenkung. Setzt man für *m* die Masse, für Δ den Halbmesser *a* der Sonne ein, so findet man nach (166)

$$\psi = 8{,}28 \cdot 10^{-6} = 1{,}7''.$$

Bezeichnet man dies als die Ablenkung für einen unmittelbar am Sonnenrande vorübergehenden Lichtstrahl, so liegen darin zwei Ungenauigkeiten. Erstens ist der Minimalwert von *r* für jeden Strahl kleiner als Δ, und zweitens kann man *r* nicht dem Abstand vom Sonnenmittelpunkt (in natürlicher Messung) gleichsetzen. Beide Fehler sind aber zu α proportional, beeinflussen den Wert von ψ daher nur proportional zu α^2.

Historisch verdient bemerkt zu werden, daß es nicht zur Berechnung der Ablenkung ausreicht, wenn wir den Streckenraum als euklidisch und nur die Lichtgeschwindigkeit mit dem Ort als veränderlich ansehen, etwa nach den Näherungsgleichungen des § 19.

Es bleibe dem Leser überlassen, die geodätischen Nullinien für die Maßbestimmung

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - c^2\left(1 - \frac{2Cm}{c^2 r}\right)^2 dt^2$$

ebenso zu ermitteln, wie das hier für die Maßbestimmung (200) geschehen ist. Er findet dann, wie auch Einstein in seinen ersten Arbeiten über diesen Gegenstand, gerade die Hälfte der oben angegebenen Ablenkung[1]). Insofern beweist diese Ablenkung, wenn die Beobachtung sie bestätigt, daß in der Nähe der Sonne der Streckenraum nichteuklidisch ist.

§ 25. Das Schwerefeld einer Flüssigkeitskugel.

Das Schwerefeld einer Flüssigkeitskugel, welche gegen das Fixsternsystem ruht, bestimmen wir aus dem Variationsprinzip (185)

$$\delta \int (\mathfrak{H} + \varkappa \mathfrak{M})\, d\,X = 0. \qquad (223)$$

Da es Kugelsymmetrie aufweist, können wir die Rechnungen von § 22 weitgehend benutzen; nach (199 a) z. B. dürfen wir

$$ds^2 = \frac{r}{r-w}\, dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - V^2 dt^2, \quad V^2 = v^2\frac{r-w}{r}, \quad (223\text{ a})$$

setzen, wo v und w die beiden aus dem Variationsprinzip zu bestimmenden Funktionen des Radiusvektors r sind, und nach (199) den Anteil in dem dort auftretenden Integral, welcher allein vom Schwerefeld herrührt, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \int \mathfrak{H}\, d\,X &= \int \sqrt{-g}\, H\, d\,X \\ &= \frac{2}{c}\int\int\int d\,x^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, x \int (w\,v' + \lambda\, v\, r^2)\, d\,r \end{aligned}\right\} \qquad (223\text{ b})$$

Neu zu berechnen ist $\mathfrak{M}\ dX$.

Die Funktion $\mathfrak{M}$ haben wir durch die Differentialgleichungen (188) [die mit (186) gleichwertig sind],

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{kl}} = \sqrt{-g}\, T_{kl}, \qquad (224)$$

und durch die Forderung gekennzeichnet, daß sie die Ableitungen der *gik* nach den Koordinaten nicht enthält. Wohl aber muß sie von den Bestimmungsstücken der Materie abhängen, diese sind bei der Differentiation nach g^{kl} und der Variation in (223) konstant zu halten. Was wir dabei als Bestimmungsstück betrachten wollen, unterliegt unserer freien Wahl.

In Bd. I, § 35, b) haben wir die Rahdichte einer Flüssigkeit aus der Rahenergiedichte W and dem Druck p^0 durch die Beziehung

$$\overset{*}{k} = \frac{1}{c^2}(\overset{*}{W} + \overset{*}{p})$$

definiert, die sich dort unmittelbar aus den Formeln (350) und (352) ergibt. Die Beziehung auf einen Normalzustand des einzelnen Flüssigkeitsteilchens, wie sie dort durch den Zeiger n angedeutet war, spielt hier, im statischen Fall, da jedes Teilchen seinen Zustand beibehält, keine Rolle. Für verschwindenden Druck geht k über die Größe, welche wir in Bd. I I, § 16 als Dichte eingeführt haben, nämlich

$$\mu = \frac{\overset{0}{W}}{c^2},$$

so daß im allgemeinen

$$c^2 \overset{*}{k} = c^2 \mu + \overset{0}{p}$$

ist. Alle hier erwähnten Größen sind in einem geodätischen Ruhsystem, d. h. nach § 14, natürlich gemessen. Sie sind infolgedessen gegen jede Koordinatentransformation invariant.

Deswegen kann man aus k den Vierervektor der Flüssigkeit P durch Multiplikation mit der Vierergeschwindigkeit bilden:

$$(c^2 \mu + \overset{0}{p}) Y_i = P_i. \qquad (225)$$

Das negative Quadrat seines absoluten Wertes ist

$$-\sum_{ik} g^{ik} P_i P_k = (c^2 \mu + \overset{0}{p})^2. \qquad (225a)$$

Der Energieimpulstensor hängt mit ihm durch die Gleichungen

$$T_k^i = \frac{P^i P_k}{c^2 \mu + \overset{0}{p}} + \overset{*}{p} \delta_k^i. \qquad (226)$$

oder auch durch die gleichwertigen Beziehungen

$$T_{ik} = \frac{P_i P_k}{c^2 \mu + \overset{0}{p}} + \overset{0}{p} g_{ik} \qquad (226a)$$

zusammen. Denn im geodätischen Ruhsystem folgt daraus wegen $Y^i = 0\,(i = 1, 2, 3)$ und $Y^4 Y_4 = -1$:

$$T_i^i = \overset{0}{p}\,(i = 1, 2, 3), \quad T_k^i = 0\ (i = k) \quad \text{und} \quad T_4^4 = -\overset{*}{W},$$

wie wir es verlangen müssen.

In das Variationsprinzip (223) dürfen wir nun die Schwerewirkung der Flüssigkeit durch die Funktion

$$\mathfrak{M} = 2\sqrt{-g}\left[c^2 \mu - \left(\sum_{ik} - g^{ik} P_i P_k\right)^{1/2}\right]$$

einführen. Denn differentiieren wir bei konstantem μ und konstantem P_1 nach $g^{\alpha\beta}$, so finden wir nach *(62)*, (226a) und (226a)

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\alpha\beta}} = \frac{P_\alpha P_\beta \sqrt{-g}}{\left(-\sum_{ik} g^{ik} P_i P_k\right)} - g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\left[c^2\mu - \left(\sum_{ik} - g^{ik} P_i P_k\right)^{1/2}\right]$$

$$= \sqrt{-g}\left[\frac{P_\alpha P_\beta}{c^2\mu + \mathfrak{p}} + \mathfrak{p} \cdot g_{\alpha\beta}\right] = T_{\alpha\beta},$$

wie es Gleichung (224) verlangt. Ferner haben wir wie in § 22, a), Gleichung (197 a) beim Übergang von den Koordinaten x^1, x^2, x^3 zu r, ϑ, φ

$$d\,X = dx^1 . dx^2 . dx^3 . dx^4 = r^2 \sin\vartheta\, dr . d\vartheta . d\varphi . dx^4$$

zu setzen, und es wird in demselben Koordinatensystem nach (223 a) und weil $P_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$

$$-\sum_{ik} g^{ik} P_i P_k = -g^{44} P_4^2 = \frac{c^2}{V^2} P_4^2 = \frac{c^3 \tau}{v^2 (r - w)} P_4^2.$$

Da schließlich nach (196 a) und ($1\sqrt{-g} = \frac{V}{c}\sqrt{\gamma} = \frac{v}{c}$, finden wir im Hinblick auf (223 b):

$$\int (\mathfrak{H} + \varkappa \mathfrak{M})\, d\,X = \frac{2}{c}\int\int\int dx^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \int F\, dr,$$

$$F = w v' + \lambda v r^2 + \varkappa c\left(c\mu v r^2 - \sqrt{\frac{r^5}{r - w}}\, P_4\right).$$

Zu variieren sind die g_{ik}, d. h. die Funktionen v und w von r, welche sie zu berechnen gestatten; konstant zu halten sind, wie oben bei der Differentiation der Funktion $\mathfrak{M}\mu$ und P_4. Also lauten die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right) - \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \quad \text{oder} \quad w' - (\lambda + c^2 \varkappa \mu) r^2 = 0, \quad (227)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) - \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \quad \text{oder} \quad -v' + \frac{c \varkappa P_4 r^{5/2}}{2 (r - w)^{3/2}} = 0. \quad (228)$$

Wir benutzen sie zuerst zur Ableitung von Grenzbedingungen für die Fläche, in welcher unsere Flüssigketyskugel an den leeren Raum stößt. Sie liege bei $r = r_m$. Wir multiplizieren nämlich (227) und (228) mit dr und integrieren von $r_m - \varepsilon$ bis $r_m + \varepsilon$. Da neben den Differentialquotienten v' und w' nur Glieder auftreten, welche auch in der Grenzfläche endlich sind, so folgt

$$\lim_{\varepsilon=0} [w(r_m + \varepsilon) - w(r_m - \varepsilon)] = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} [v(r_m + \varepsilon) - v(r_m - \varepsilon)] = 0,$$

d. h. v und w sind an der Begrenzung stetig. Dies überträgt sich auf alle Komponenten des Maßtensors g_{ik}.

Die Feldgleichungen (144) enthalten, wie erwähnt, den Energieimpulssatz $\mathrm{div}\, T = 0$. Die Lagrangeschen Gleichungen, welche aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgen, sind nach § 21 mit ihnen identisch, müssen also ebenfalls jenen Satz abzuleiten gestatten. Die Gleichungen (227) und (228) genügen aber nicht dazu. Wir haben uns nämlich, indem wir die 10 Komponenten des Maßtensors auf die zwei Funktionen v und w zurückführten, der Möglichkeit beraubt, alle Variationen an jenen vorzunehmen, und haben deswegen auch zu wenig Differentialgleichungen gefunden. Wir bedürfen aber des Impulssatzes, um zu entscheiden, wie bei vorgegebener Zustandsgleichung μ und P_4 von r abhängen; ohne das können wir (227) und (228) nicht integrieren. Also müssen wir, ausgehend von der Beziehung

$$\mathrm{div}\, T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, T_i^k\right)}{\partial x^k} - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} l & k \\ i & \end{matrix} \right\} T_l^k = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

[vgl. (73 a)], hier für die T_k^i die Werte (226) einsetzen. Das ergibt, wenn wir $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$ setzen, für $i = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d\left(\sqrt{-g}\, \dot{p}\right)}{dr} - \dot{p} \sum_k \left\{ \begin{matrix} 1 & k \\ k & \end{matrix} \right\} + (c^2 \mu + \dot{p}) \left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ 4 & \end{matrix} \right\} = 0.$$

In Rücksicht auf (62 a) und den in (158) angegebenen Wert von $\left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ 4 & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dr}$ kommen wir zu der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{d\left(\sqrt{-g}\, \dot{p}\right)}{dr} - \dot{p} \frac{d\sqrt{-g}}{dr} \right) + \frac{(c^2 \mu + \dot{p})}{V} \frac{dV}{dr} = 0,$$

oder

$$\frac{d\dot{p}}{dr} + \frac{c^2 \mu + \dot{p}}{V} \frac{dV}{dr} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229)$$

$$\frac{d\dot{p}}{dV} = - \frac{c^2 \mu + \dot{p}}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

Die Zustandsgleichung besteht für uns in einer Beziehung $\mu = \mu(\dot{p})$. Setzen wir dies in (230) ein, so liefert diese Differentialgleichung p^0 als Funktion von V. Da im vorliegenden Koordinatensystem nach (110e) $Y_4 = \sqrt{-g_{44}} = \frac{V}{c}$ ist, haben wir damit nach (225) auch P_4 als Funktion von v, oder nach (223 a) als Funktion von $\left(v^2 \frac{r - w}{r}\right)$. Setzen wir dies in (227) und (228) ein, so haben

wir nunmehr zwei Differentialgleichungen, aus denen sich v und w als Funktionen von r bestimmen lassen.

Um diese Aufgabe zu lösen, bedürfen wir aber noch des Wertes von $\mathring{p}$ an der Grenzfläche der Flüssigkeitskugel. Da sich $\mathring{p}$ auf das geodätische Ruhsystem eines Flüssigkeitsteilchens bezieht, und in diesem die beschränkte Relativitätstheorie gilt, welche ihrerseits in dieser Frage mit der klassischen Hydrodynamik übereinstimmt, so ist dieser Grenzwert von $\mathring{p}$ Null.

Nun beschränken wir uns auf unzusammendrückbare Flüssigkeiten. Zwar gibt es in der Relativitätstheorie, wie in Bd. I gezeigt, ebensowenig wie einen starren Körper eine Flüssigkeit, deren Dichte sich schlechthin nicht verändern läßt. Aber wir können Fälle angeben, in denen der Druck überall so gering bleibt, daß sich μ unmerklich wenig ändert. Ist aber μ eine Konstante, so folgt aus (230)

$$(c^2\mu + \mathring{p})\,V = const;$$

und nach (225) erhält P_4 den konstanten Wert

$$P_4 = (c^2\mu + \mathring{p})\frac{V}{c} = c\mu\, V(r_m) \quad . \qquad (231)$$

Die Integration von (227) liefert dann

$$w = \frac{r^3}{A^2} + const, \quad \left(A^2 = \frac{8}{\lambda + c^2 \varkappa \mu}\right), \quad \cdots \quad (232)$$

so daß

$$\frac{r}{r - w} = \left[1 - \left(\frac{r}{A}\right)^2 + \frac{const}{r}\right]^{-1}$$

wird. Dieser Bruch muß aber nach der Maßbestimmung (223 a) überall im Innern größer als Null sein, auch bei $r = 0$. Also muß man die Konstante fortlassen. Nach jener Maßbestimmung gilt dann im Streckenraum

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{A}\right)^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$

öder, wenn man unter Beschränkung auf Werte von r, die kleiner sind als A,

$$r = A \sin\Theta \quad \left(\Theta \leqq \frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (233)$$

setzt:

$$d\sigma^2 = A^2[d\Theta^2 + \sin^2\Theta\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)]. \quad . \quad . \quad (234)$$

Über $\frac{\pi}{2}$ hinaus darf Θ nicht wachsen, weil sonst die Transformation (233) nicht mehr umkehrbar eindeutig ist. Die Übereinstimmung mit (105a) beweist: Die natürliche Geometrie für das Innere

der Flüssigkeitskugel ist die sphärische. Der Krümmungshalbmesser A ist durch (232) gegeben. Setzt man $\lambda = 0$ und für μ die mittlere Dichte der Sonne (1,4 g . cm ^{3}), so ist nach (162 a) $A = 3{,}5.10^{13}$cm, während der Sonnenhalbmesser $6{,}95.10^{10}$cm beträgt. Es bedeckt also wohl jeder Stern von dem sphärischen Raum nur eine kleine Kalotte, die von $\Theta = 0$ bis zu

$$\Theta_m = \arcsin \frac{r_m}{A}.$$

Die natürliche Länge ihres Halbmessers beträgt

$$A\,\Theta_m = r_m\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{r_m}{A}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{r_m}{A}\right)^4 + \cdots\right]$$

und ist nach der obigen Größenabschätzung nur unwesentlich größer als r_m. Der Umfang ihres Äquators aber beträgt genau $2\,\pi r_m$; denn auf jeder Fläche $r = const$ gilt die Maßbestimmung $d\sigma^2 = r^2 d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$. Nach Gleichung (105b) beträgt das Volumen der Flüssigkeitskugel

$$2\pi A^3\left(\Theta_m - \frac{1}{2}\sin 2\,\Theta_m\right) = \frac{4\pi}{3} r_m^3\left[1 + \frac{3}{10}\left(\frac{r_m}{A}\right)^2 + \cdots\right].$$

Es ist ebenfalls nur unwesentlich größer als bei euklidischer Berechnung.

An der Grenzfläche $r = r_m$ muß w, wie es sich aus (232) berechnet, stetig in den Wert (199 a') in § 22 übergehen. Dabei hatten wir die Konstante α mit der schweren Masse m der Kugel in den Zusammenhang (201) gesetzt. Freilich hatten wir bei dieser Deutung das λ-Glied vernachlässigt. Da es aber ohnehin wenig ausmacht, können wir jene Deutung beibehalten. Dann ergibt unsere Grenzbedingung

$$\frac{r_m^3}{A^2} = \alpha, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{3}\,c^2 \varkappa \mu\, r_m^3 = \frac{2\,\mathfrak{C} m}{c^2},$$

oder nach (164 a)

$$\frac{4\pi}{3}\,\mu\, r_m^3 = m.$$

μ war die Dichte der trägen Masse. Innerhalb der Näherung, bei welcher man das Flüssigkeitsvolumen euklidisch berechnet, ist sie danach zugleich die Dichte der schweren Masse. Diese Übereinstimmung.kann uns freilich nach den Ergebnissen von § 19, a) nicht überraschen. Denn in der annähernd gültigen Gleichung (164) trat auch schon μ als schwere Massendichte auf. Daß $r_m < \alpha$ sein muß, damit die Maßbestimmung außerhalb der Kugel keine Singularität aufweist, erwähnten wir schon in § 22.

Wir gehen nun an die Integration von (228). Da v an der Grenzfläche wegen der bewiesenen Stetigkeit denselben Wert c haben muß, den es nach § 22 überall im Außenraum besitzt, so folgt aus (231), (223 a), (232) und (233)

$$\left.\begin{aligned} P_4 &= c\mu\, V(r_m) = c^2\mu \sqrt{\frac{r_m - w(r_m)}{r_m}} \\ &= c^2\mu \sqrt{1 - \left(\frac{r_m}{A}\right)^2} = c^2\mu \cos\Theta_m \end{aligned}\right\} \tag{235}$$

Führen wir weiter in (228) nach (233) statt r die Koordinate Θ ein, so finden wir:

$$\frac{dv}{d\Theta} = \frac{c}{2}(3 - \lambda A^2)\cos\Theta_m \frac{\sin^2\Theta}{\cos\Theta},$$

also unter nochmaliger Berücksichtigung der Grenzbedingung $v = c$:

$$v = \frac{c}{2}\frac{(3 - \lambda A^2)\cos\Theta_m - (1 - \lambda A^2)\cos\Theta}{\cos\Theta}, \tag{236}$$

$$V = \frac{c}{2}[(3 - \lambda A^2)\cos\Theta_m - (1 - \lambda A^2)\cos\Theta]. \tag{237}$$

Die Lichtgeschwindigkeit beträgt danach an der Grenzfläche innen und außen $c \cdot \cos\Theta_m$; beim Fortschreiten ins Innere nimmt sie ab, und zwar bis zu

$$\frac{c}{2}[(3 - \lambda A^2)\cos\Theta_m - (1 - \lambda A^2)]$$

bei $r = 0$. Damit dieser Wert positiv ist, muß

$$\cos\Theta_m > \frac{1 - \lambda A^2}{3 - \lambda A^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{\lambda}{c^2\varkappa\mu}$$

[vgl. (232)] sein. Da in allen vorkommenden Fällen $c^2\varkappa\mu \geqq \lambda$ ist (vgl. § 27), so kann danach die Flüssigkeitskugel die Hälfte der Kugelsumme nicht ganz erfüllen. Der natürlich gemessene Druck schließlich berechnet sich aus (231) und (237) zu:

$$\mathfrak{p} = c^2\mu \frac{(1 - \lambda A^2)(\cos\Theta - \cos\Theta_m)}{(3 - \lambda A^2)\cos\Theta_m - (1 - \lambda A^2)\cos\Theta}. \tag{238}$$

Dies ist aber nicht der Druck, bezogen auf das hier benutzte Koordinatensystem. Dies hat freilich mit dem geodätischen Ruhsystem, auf das sich $\mathfrak{p}$ bezieht, die Koordinatenrichtungen, also auch die Komponenten T^i_i des Materietensors gemein. Da aber nach (162)

$$T^i_i = \sqrt{-g^{44}}\, p,$$

besteht hier, wo $-g^{44} = \frac{c}{v}$ ist, der Zusammenhang

$$p = \hat{p}\,\frac{v}{c},$$

und nach (237) und (238) die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} p &= c^2\mu\,(1-\lambda A^2)\,(\cos\Theta - \cos\Theta_m) \\ &= \frac{1}{4}\,c^2\mu\,(1-\lambda A^2)\left(\frac{r_m^2 - r^2}{A^2} + \frac{1}{2}\,\frac{r_m^4 - r^4}{A^4} + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \quad (239)$$

Das erste Glied dieser Entwicklung läßt sich nach (232) unter Fortlassung des λ-Gliedes und nach (164 a) auch schreiben:

$$\frac{2\pi}{3}\,C\mu^2\,(r_m^2 - r^2).$$

In ihm stimmt p mit $\hat{p}$ sowie mit dem Wert überein, welchen die Newtonsehe Theorie dem Druck in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeitskugel gibt *).

Trotz der weitgehenden Willkür in unserer Annahme über die Zustandsgieichung können wir wohl den Schluß aus diesem Beispiel ziehen, daß Einsteins Schweretheorie an den Auffassungen über das Innere der Fixsterne gegenüber der älteren Theorie nichts Wesentliches ändert.

Die hier durchgeführte Anpassung an das äußere, materiefreie Schwerefeld von § 22 hat natürlich nur einen Sinn, wenn wir, wie damals, das λ-Glied unterdrücken. In § 27 aber werden wir für die Beibehaltung dieses Gliedes Gründe finden. In Rücksicht darauf haben wir es auch hier stehen lassen, um so mehr, als die Gleichungen dadurch nur wenig verändert werden.

§ 26. Das Schwerefeld der elektrischen Punktladung.

a) Die Maßbestimmung. Für die elektrische Punktladung, sofern sie weit von anderen Körpern und fremden elektromagnetischen Feldern gegen den Fixsternhimmel ruht, können wir wieder die in § 22 zurechtgelegten Hilfsmittel benutzen. Denn auch sie bildet ein Symmetriezentrum. Wir benutzen also wieder die Maß-

*) Nach der Newton sehen Theorie ist einerseits, wenn $\Psi(r)$ das Potential der Schwere bedeutet,

$$\Psi(r) - \Psi(r_m) = -\frac{2\pi}{3}\,C\mu\,(r_m^2 - r^2).$$

Andererseits ist $p + \mu\,\Psi(r) = const = \mu\,\Psi(r_m)$, was übrigens ganz der Gleichung (231) entspricht.

bestimmung (194) mit den beiden aus dem Variationsprinzip zu ermittelnden Funktionen V und M von $r = \sqrt{x^1{}^2 + x^2{}^2 + x^3{}^2}$ und ebenso die Gleichung (199) für das Integral $\int \sqrt{-g}\, H d\, X$ mit dem Wert $f = wv' + \lambda v r^2$. Wir benutzen das Variationsprinzip (190), in welchem jedoch $\sum_i p^i \Phi_i$ fortfällt, da wir uns auf ungeladeneftaumteile beschränken. Neu zu berechnen haben wir daher nur nach (189 a) den Wert von M. Zu variieren sind die g_{ik} und die Φ_i.

Nach § 18, c) verschwindet im elektrostatischen Felde die magnetische Verschiebung $\mathfrak{B}$. Für das elektrostatische Potential φ und die elektrische Feldstärke E? aber gilt nach (160) und (113) die Beziehung:

$$\mathfrak{E}_i = \mathfrak{M}_{i4} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \qquad (239a)$$

Im vorliegenden Falle hängt Θ nur von r ab, daher ist, $d\varphi/dr = \varphi'$ gesetzt,

$$\mathfrak{M}_{i4} = -\varphi' \frac{x^i}{r}.$$

Setzt man dies in (189a) ein, so findet man wegen $g^{i4} = 0$, wenn i = 1,2,3:

$$M = g^{44} \frac{\varphi'^2}{r^2} \sum_{h,k=1}^{3} g^{hk} x^h x^k.$$

Machen wir hier Gebrauch von den Gleichungen (195), (196) und (194c), so finden wir weiter:

$$M = -\frac{c^2}{V^2} \frac{\varphi'^2}{r^2} \sum_{h,k=1}^{3} \left(\delta_k^h - \frac{M x^h x^k}{1 + M r^2} \right) x^h x^k.$$

Nun ist aber

$$\sum_{h,k=1}^{3} \delta_k^h x^h x^k = \sum_{k=1}^{3} x^{k2} = r^2, \sum_{h,k=1}^{3} (x^h x^k)^2 = \sum_{h=1}^{3} x^{h2} \times \sum_{k=1}^{3} x^{k2} = r^4.$$

Somit wird nach (196 a), (198) und (198 a)

$$\sqrt{-g}\, M = -\frac{c}{V\sqrt{\gamma}} \varphi'^2 = -\frac{c}{v} \varphi'^2.$$

Es wird daher

$$\int \sqrt{-g}\, (H + \varkappa M)\, d\, X$$

$$= \frac{2}{c} \int\int\int dx^4 \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi \times \int \left(wv' + \lambda v r^2 - \frac{\varkappa c^2}{2v} r^2 \varphi'^2 \right) dr,$$

und das Variationsprinzip (190) lautet:

$$\delta \int \left(wv' + \lambda v r^2 - \frac{\varkappa c^2}{2v} r^2 \varphi'^2 \right) dr = 0.$$

Zu variiereil sind die Funktionen *v, w* und φ von *r,* denn darin drücken sich die hier noch möglichen Variationen der *gik* und der Φ_i vollständig aus. Die Lagrangeschen Gleichungen erhalten die Form:

$$w' - \lambda r^2 - \frac{\varkappa c^2}{2v^2} r^2 \varphi'^2 = 0, \quad v' = 0, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\varphi'}{v}\right) = 0.$$

v ist also eine Konstante, die wir, wie in § 22, ohne weiteres gleich *c* setzen. Bezeichnen wir eine weitere Integrationskonstante mit *e,* so ist

$$r^2\varphi' = -\frac{e}{4\pi}, \quad \varphi = \frac{e}{4\pi r}; \qquad (240)$$

denn die zweite Integrationskonstante muß man wegen der üblichen Grenzbedingung, daß im Unendlichen das Potential φ Null sein soll, fortlassen. Aus der ersten dieser Differentialgleichungen aber ergibt sich dann:

$$w = \alpha - \frac{1}{3}\lambda r^3 - \frac{\varkappa}{32\pi^2}\frac{e^2}{r}. \qquad (241)$$

α ist Integrationskonstante. Nach (198 a) und (164 a) wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{V^2}{c^2} = (1 + Mr^3)^{-1} &= 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{3}\lambda r^2 + \frac{\varkappa}{32\pi^2}\frac{e^2}{r^2} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{3}\lambda r^2 + \frac{C}{4\pi c^4}\frac{e^2}{r^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (242)$$

und die Maßbestimmung lautet:

$$ds^2 = \frac{c^2}{V^2}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - V^2 dt^2. \qquad (242\text{ a})$$

b) Erörterung der Maßbestimmung. Wie schon die Bezeichnung andeuten soll, gibt die Integrationskonstante *e* die elektrische Ladung an. Zum Beweise berechnen wir das über eine Kugel $r = const$ zu erstreckende Integral

$$-\int \mathfrak{D}^n d\sigma,$$

welches nach (118 a) die eingeschlossene Ladung mißt. Dabei ist $|\mathfrak{D}^n d\sigma|$ der Raum des durch das Flächenstück $d\sigma$ und den als Strecke dargestellten Vektor $\mathfrak{D}$ bestimmten Parallelepipeds, und zwar ist $\mathfrak{D}^n d\sigma$ positiv, wenn die innere Normale *n* und der Vektor $\mathfrak{D}$ nach derselben Seite von $d\sigma$ weisen. Im vorliegenden Fall steht der Vektor $\mathfrak{D}$ senkrecht auf $d\sigma$ und weist bei einer positiven Ladung nach außen. Infolgedessen ist $-\mathfrak{D}^n d\sigma$ gleich dem Produkt aus dem absoluten Betrage

$$|\mathfrak{D}| = \sqrt{g^{rr}}\,\mathfrak{D}_r = \frac{V}{c}\mathfrak{D}_r$$

und dem Flächeninhalt

$$d\sigma = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

denn nach (242 a) ist einerseits $g_{rr} = \frac{V^2}{c^2}$ und $g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}}$, andererseits muß $d\sigma$ wie in der gewöhnlichen sphärischen Geometrie berechnet werden. Im Hinblick auf (117 a), wo nach (242 a)

$$g^{44} = \frac{1}{g_{44}} = -\frac{c}{V}$$

zu setzen ist, und auf (239 a) finden wir somit:

$$-\mathfrak{D}^n d\sigma = \frac{V}{c} r^2 \mathfrak{D}_r \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = r^2 \mathfrak{E}_r \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$
$$= -r^2 \varphi' \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

also nach (240)

$$-\int \mathfrak{D}^n d\sigma = \frac{e}{4\pi} \int \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = e,$$

was zu beweisen war.

Die Bedeutung der Integrationskonstanten α finden wir, indem wir $e = 0$ setzen, nämlich nach (201)

$$\alpha = \frac{2Cm}{c^2}.$$

Beim Uran, dessen Atom unter allen bekannten die größte Masse und die größte Kernladung besitzt, ist $m = 238.164.10^{-24} = 3{,}9 .10^{-22}$g, $e = 92.4{,}8.10^{-10}\sqrt{4\pi} = 4{,}4.10^{-9}\sqrt{4\pi}\,\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{sec}^{-1}$ *). Daraus folgt:

$$\alpha = \frac{2.6{,}7.10^{-8}.3{,}9.10^{-22}}{9.10^{20}} = 5{,}8.10^{-50}\,\mathrm{cm},$$

$$\frac{Ce^2}{4\pi c^4} = \frac{6{,}7.10^{-8}.(4{,}4)^2 10^{-18}}{8{,}1.10^{41}} = 1{,}7.10^{-64}\,\mathrm{cm}^2.$$

Die Elektronen der innersten Schale, des sogenannten K-Ringes, haben vom Atomkern Abstände von der Größenordnung 10^{-10}cm. In diesem Abstande ist also die Maßbestimmung durch den Kern nicht mehr merklich verändert. Die allgemeine Relativitätstheorie vermag, da das λ-Glied nach den Ausführungen von § 27 viel zu klein ist, um im Atombereich irgendwie in Betracht zu kommen, für die Theorie der Spektrallinien im Röntgengebiet nichts Neues gegenüber der beschränkten Relativitätstheorie zu liefern. Für das sichtbare Spektrum und die anschließenden Spektralbereiche gilt das in verstärktem Maße.

*) Wir benutzen überall das Lorentzsehe Maßsystem, daher den Faktor $\sqrt{4\pi}$.

Strenge Lösungen 4er Feldgleichungen für statische Felder mit Rotationssymmetrie verdanken wir Weyl und Bach[1]). Andere Untersuchungen über statische Felder finden sich bei Levi-Civita[2]), Elena Furlanetto[3]) und Carlotta Lango[4]), über nichtstatische Felder bei De Zuani[5]) und Palatini[6]).

VIII. Weiterbildung der Relativitätstheorie.

§ 27. Die Einführung des λ-Gliedes in die Einstefnschen Feldgleichungen.

a) Einsteins sphärischer Kosmos. Wir haben seither die Feldgleichungen meist nur in der verkürzten Gestalt (144') auf besondere Fälle angewandt. Am wichtigsten waren die Anwendungen auf statische Schwerefelder, weil ja die in der Natur vorkommenden Felder fast alle so gut wie statisch sind. Dabei haben wir [vgl. § 18, a)] als Grenzbedingung für das räumlich Unendliche die Werte der *gik* gefordert, welche der pseudoeuklidischen Maßbestimmung der beschränkten Relativitätstheorie entsprechen. Doch wiesen wir sogleich auf ein Bedenken hin. Danach bekommt jeder Körper in unendlicher Entfernung von anderen eine bestimmte träge und schwere Masse, und wenngleich die Masse nach (164c) auch bei der Annäherung an einen anderen Körper zunimmt, so ist doch wegen der prozentisch stets ganz geringfügigen Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit *V* auch diese Zunahme im Verhältnis zur Masse selbst äußerst klein. In der Hauptsache wäre danach die Trägheit doch wieder eine Eigenschaft des einzelnen Körpers.

Vielleicht noch tiefer erfaßt diesen Übelstand die folgende Betrachtung. Denken wir uns aus dem statischen Felde von § 18 die Körper mehr und mehr entfernt, so haben wir schließlich die Differentialgleichungen $R_{ik} = 0$ (143) für die g_{ik} mit der genannten Grenzbedingung zu integrieren. Eine Lösung lautet jedenfalls: Die *gut* haben überall die in der Grenzbedingung genannten Werte. Serini[1]) hat sogar zeigen können, daß es keine andere Lösung gibt. Es bestände danach ein pseudoeuklidisches Raum-Zeit-Kon tinuum, also auch ein dreidimensionaler euklidischer Raum, ohne daß es überhaupt einen Körper gäbe. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie

aber sollen sich alle Eigenschaften des Raums aus dem Vorhandensein von Körpern erklären. Es besteht also auch hier zwischen den grundlegenden Ideen der Theorie und ihrer Ausführung in den früheren Teilen dieses Buches ein Widerspruch, sofern man diese Ausführungen auf die Gesamtheit der Körper anwenden will. Wir hatten deshalb schon in § 18 ausdrücklich gesagt, daß wir das dort betrachtete statische Feld als einen kleinen Ausschnitt aus dem vom Fixsternsystem eingenommenen Raum betrachten und unter dem „Unendlichen" ein Gebiet verstehen, das, wenngleich von allen Körpern sehr weit entfernt, doch noch durchaus innerhalb dieses Systems liegt.

Dieselbe Schwierigkeit tritt in veränderter Gestalt beim zentralsymmetrischen Schwerefeld auf. Die Kugel, die es hervorruft, soll in dem dabei eingeführten Koordinatensystem ruhen und wie dieses selbst keine Drehung zeigen; das haben wir in den § 22 u. f. durch den Ansatz (192) für ds^2 zum Ausdruck gebracht; die erwähnte Grenz bedingung ergab sich aus ihm mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung. Wenn aber wirklich nichts vorhanden wäre, als diese Kugel, so verlöre der Begriff der Drehung seinen Sinn. Das Problem dieses Schwerefeldes im unendlichen Raum ließe sich noch nicht einmal stellen.

Allen diesen Schwierigkeiten entgeht Einstein durch die 1917 eingeführte Annahme, daß der dreidimensionale Raum geschlossen ist, die vierdimensionale Welt also ähnliche Zusammenhangsverhältnisse aufweist wie eine Zylinderfläche. Auch diese läuft ja in einer Richtung beiderseits ins Unendliche, während sie in der dazu senkrechten Richtung in sich zurückläuft. Dann gibt es kein räumlich Unendliches, und man bedarf keiner Grenzbedingungen dafür. Einen solchen Zusammenhang zeigte z. B. eine Welt, die, im großen betrachtet, die Maßbestimmung

$$ds^2 = da^2 - c^2 dt^2,$$
$$da^2 = A^2 [d\Theta^2 + \sin^2\Theta\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)] \quad . \quad .(243)$$

besäße.

Mit dieser Maßbestimmung für da^2, die mit (105a) übereinstimmt, sind allerdings noch zwei verschiedene Auffassungen über den Zusammenhang des Streckenraumes vereinbar. Entweder denkt man ihn als die Kugel

$$X^1{}^2 + X^2{}^2 + X^3{}^2 + X^4{}^2 = A^2$$

im vierdimensionalen euklidischen Raum, oder man projiziert diese von ihrem Mittelpunkt auf einen ebenen Raum von drei Dimensionen, ähnlich, wie wir es in § 12, e) bei einer Kugel von zwei Dimensionen

taten, um zur elliptischen Geometrie der Ebene zu gelangen. Dabei wird nur die Hälfte der Kugel abgebildet, welche zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ Liegt. Trotzdem ist auch dieser elliptische Baum in sich geschlossen. Denn die beiden Punkte, welche in der Flache $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ derselben geodätischen Linie [d. h. in der Sprechweise von § 12, e) derselben Geraden] durch den Nullpunkt angehören, sind bei ihm identisch. Wir denken im folgenden immer an den eigentlichen Kugelraum, der von $\vartheta = 0$ bis zu $\vartheta = \pi$ reicht.

Die Abweichung von der euklidischen Geometrie müßte sich natürlich aus der Anwesenheit der Materie erklären, und man darf dabei so sprechen, als erfüllte diese den Raum mit einer stetigen, allerdings außerordentlich geringen Dichte. Denn wenngleich die Materie sich tatsächlich an verhältnismäßig wenigen Stellen, dort aber in starker Anhäufung vorfindet, während dazwischen weite Raumbereiche so gut wie leer sind, so kann man doch für diese Betrachtungen einen so großen Maßstab anwenden, daß die Unstetigkeit der Verteilung nicht mehr zum Ausdruck kommt; wie man ja auch einem Gase für viele Zwecke eine stetige Dichte zuschreibt, obwohl die Molekeln auch durch weite leere Räume getrennt sind. Außerdem aber wird man so rechnen, als ruhte alle Materie gegeneinander und gegen das hier benutzte Koordinatensystem. Denn die Bewegungen der Sterne sind zu geringfügig, um das Schwerefeld merklich zu beeinflussen, und die empirisch bekannten Potentialdifferenzen sind zu klein, um größere Geschwindigkeiten hervorzurufen. Ebenso sind die in ihnen auftretenden Spannungen ohne merkbaren Einfluß. Von dem Einfluß elektromagnetischer Felder kann man aber erst recht absehen. Prüfen wir, ob die Feldgleichungen (144') sich mit dieser Vorstellung vertragen.

b) Ableitung der Maßbestimmung (243) aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Der Leser, welcher den Ausführungen von § 25 über das Schwerefeld einer Flüssigkeitskugel gefolgt ist, überzeugt sich von der Richtigkeit der Gleichung (243) am einfachsten im Anschluß daran. Für andere Leser geben wir in Abschnitt c) einen Beweis unmittelbar aus den Feldgleichungen.

Ist nämlich

$$\lambda A^2 = 1, \qquad (243a)$$

so daß aus dem in (232) abgegebenen Wert von A^2

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \varkappa \mu \qquad (243b)$$

folgt, so ist nach (239) $p = 0$ — deswegen kommt es hier auf die Zustandsgieichung der Materie nicht mehr an, vielmehr ist μ jedenfalls konstant — und die Lichtgeschwindigkeit V erhält nach (237) den unveränderlichen Wert $c \cdot \cos \Theta_m$. Wir machen V* = c, indem wir statt der bisherigen Zeitkoordinate t die neue Veränderliche $t^* = t \cdot \cos \Theta_m$ einführen. Lassen wir dann den Stern wieder fort, so geht (223 a) nach (234) über in (243); doch dürfen wir zunächst Θ nach § 25 [siehe (233)] nur bis zum Wert $\frac{\pi}{2}$ wachsen lassen. Dann haben wir die eine Hälfte des Kugelraumes vom Halbmesser A mit Materie ausgefüllt. Die andere Hälfte können wir aber genau so gut mit der gleichen, durch (243 b) gegebenen Dichte μ erfüllt denken und daran setzen. Die Ansatzstelle $\Theta = \frac{\pi}{2}$ hat vor anderen Punkten des Raumes nichts Besonderes voraus, so daß hier keine störende Unstetigkeit auftreten kann. Dann ist die Gültigkeit von (243) für die Werte von Θ von 0 bis π bewiesen.

c) Rechtfertigung der Maßbestimmung (243) aus den Differentialgleichungen des Schwerefeldes. Nach § 18, a) läßt sich für den statischen Fall der Krümmungstensor R_{kl} der vierdimensionalen Welt auf den Krümmungstensor P_{kl} des Streckenraumes zurückführen, und zwar ist nach (159c) im vorliegenden Fall, da nach (243) $V^2 = c^2$ ist:

$$R_{44} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{44} = \tfrac{1}{2} P$$

und, sofern wir für P die Formel (105f) mit der Substitution von $1/A^2$ für k benutzen:

$$R_{44} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{44} = -\frac{8}{A^2} \cdot \qquad (244)$$

Ferner ist nach (159 a)

$$R_{i4} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \ldots \qquad (245)$$

und nach (159 c) und (105 f) wegen $V_{kl} = 0$, $\Delta V = 0$:

$$R_{kl} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{kl} = P_{kl} - \tfrac{1}{2} P g_{kl} = \frac{g_{kl}}{A^2} \quad (k, l = 1, 2, 3). \qquad (245)$$

Für spannungsfreie Materie hat aber der Trägheitstensor in deren Ruhsystem nach (136) nur eine von Null verschiedene kovariante Komponente, nämlich [vgl. (161a)]

$$T_{44} = V^2 \mu = c^2 \mu \qquad (247)$$

[vgl. (110e)]; es müßte nach (144') für K, Z = 1, 2, 3 also $R_{kl} - \frac{1}{2} R \cdot g_{kl} = 0$ sein. Diese Form der Feldgleichungen genügt somit nicht.

Wohl aber lassen sich hier die Gleichungen (144) mit dem λ-Gliede erfüllen. Denn es ist nach (246)

$$R_{kl} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{kl} - \lambda g_{kl} = 0,$$

sofern 'man

$$\lambda = \frac{1}{A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (248)$$

setzt; nach (245) sind die Gleichungen

$$R_{i4} - \tfrac{1}{2} R g_{i4} - \lambda g_{i4} = 0$$

von selbst erfüllt, und nach (244) und (247) ist

$$R_{44} - \tfrac{1}{2} R g_{44} - \lambda g_{44} = - \varkappa T_{44},$$

wenn sich der Halbmesser A des Kugelraumes gemäß der [mit (243 a) und (243 b) übereinstimmenden] Gleichung

$$A^2 = \frac{2}{c^2 \varkappa \mu} = \frac{c^2}{4 \pi C \mu} \quad . \quad . \quad (249)$$

[vgl. (164 a)] aus der Lichtgeschwindigkeit c, der Gravitationskonstanten C und der mittleren Dichte μ der Materie im Raum berechnet. Nach (164 b) oder (2) ist der Faktor von $1/\mu$

$$\frac{2}{c^2 \varkappa} = \frac{c^2}{4 \pi C} = 1{,}04 \cdot 10^{27}\, g\, cm^{-2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (249a)$$

Da μ, in Gramm und Zentimetern ausgedrückt, doch gewiß einen außerordentlich geringen Wert hat, erscheint es durchaus glaubhaft, daß der Halbmesser A des Kugelraumes selbst gegen die uns bekannten Entfernungen im Fixsternsystem*) noch sehr groß ist, und daß dementsprechend λ so klein ist, daß wir es bei den bisherigen Anwendungen der Theorie in den Feldgleichungen (144) immer vernachlässigen durften. Damit sind diese Anwendungen der Gleichungen (144') gerechtfertigt.

Nach den Formeln (248) und (249) ist die mittlere Dichte

$$\mu = \frac{2 \lambda}{c^2 \varkappa}$$

und die Gesamtmasse aller Körper [vgl. (105 c)]

$$2 \pi^2 A^3 \mu = \frac{4 \pi^2}{c^2 \varkappa \lambda^{1/2}}$$

durch die beiden Konstanten der Feldgleichungen bestimmt. Nun geht unsere Meinung allerdings nicht dahin, daß das wirkliche Weltall genau diese Masse besitzt, wie denn überhaupt diese „Zylinderweit" nur ein Beispiel sein soll, das veranschaulicht, wie sich nach

*) Die größten, an Nebeln geschätzten Entfernungen sind von der Größeoordnang 10^{23} cm.

der allgemeinen Relativitätstheorie ein geschlossener dreidimensionaler Raum als Folge einer annähernd gleichförmigen Massenverteilung verstehen läßt. Bei genauerer Betrachtung wird ja ohnehin in der Nähe jedes Fixsternes eine ganz andere Maßbestimmung gelten, wie wir in den § 22 u. f. sahen. Auch über die Größe der universellen Konstanten λ läßt sich aus diesen Gleichungen nichts entnehmen. Nur muß sie nach (248) positiv sein.

Was aber geschähe, wenn wir das Weltall durch fortschreitende Vernichtung von Materie schließlich ganz entleeren könnten?

Wir beantworten diese Frage, freilich nur unvollständig, durch den Hinweis, daß die Feldgleichungen (144) für $T_{kl} = 0$ jedenfalls die Lösung $g_{kl} = 0$ zulassen. Es verschwänden also mit den Körpern Raum und Zeit überhaupt, da dann das natürlich gemessene Weltlinienstück $ds = 0$ würde. Darin findet dann der Gedanke, daß alle raumzeitlichen Zusammenhänge, also alles physikalische Geschehen, durch das Dasein von Körpern bedingt ist, seine schärfste Formulierung. Allerdings ist zurzeit noch nicht bewiesen, daß nicht noch andere Lösungen möglich sind.

d) Die Lösungen der Feldgleichungen von de Sitter und Weyl. De Sitter[2]) weist z.B. darauf hin, daß auch die Maßbestimmung

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= da^2 - c^2 \cos^2\Theta\, dt^2, \\ da^2 &= A^2\,[d\Theta^2 + \sin^2\Theta\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)], \end{aligned}\right\} \qquad (250)$$

welche sich von der Einsteinschen Lösung (243) durch die veränderliche Lichtgeschwindigkeit

$$V = c \cdot \cos\Theta \qquad (261)$$

und durch den veränderten Wert des Halbmessers

$$A = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \qquad (251a)$$

unterscheidet, für $T_{kl} = 0$ den Feldgleichungen (144) genügt. Man leitet dies am einfachsten aus dem Wirkungsprinzip ab, indem man sich auf die Gleichungen (199 b) stützt (§ 22). Setzt man nämlich die dort angegebenen Werte von V und $1 + Mr^2$ in (199 a) ein, so findet man als Verallgemeinerung der Schwarzschildschen Lösung

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{\alpha}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - c^2\left(1 - \frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2. \qquad (251')$$

Im Gegensatz zu jener Lösung setzen wir nun $\alpha = 0$. Die Substitution $r = A.sin\,\Theta$ mit dem Wert (251a) von A führt dann unmittelbar auf (251).

In engerem Anschluß an die Feldgleichungen aber läßt sich der folgende Beweis geben: Ordnen wir, wie oben, den Koordinaten $\Theta, \vartheta, \varphi$ die Ziffern 1, 2, 3 zu, so ist nach (159 b) und den für die $\left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\}^*$ gültigen Formeln (105 b'):

$$V_{11} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial \Theta^2} = -\,c\cos\Theta, \quad V_{22} = -\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}^* \frac{\partial V}{\partial \Theta} = -\,c\sin^2\Theta\cos\Theta,$$

$$V_{33} = -\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\}^* \frac{\partial V}{\partial \Theta} = -\,c\sin^2\Theta\cos\Theta\sin^2\vartheta, \; V_{23} = V_{31} = V_{12} = 0,$$

also mit den aus (2 50) hervorgehenden Werten der g_{kl} für k, l = 1, 2, 3

$$\frac{V_{kl}}{V} = -\frac{g_{kl}}{A^2}, \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V}\sum_{k,\,l=1}^{3} g^{kl}\, V_{kl} = -\frac{3}{A^2}.$$

Nach der ersten der Gleichungen (159 b) und der auf den Tensor P_{kl} mit $1/A^2$ statt k anzuwendenden Formel (105 c)

$$P_{kl} = -\frac{2\,g_{kl}}{A^2}$$

folgt demnach:

$$R_{kl} = -\frac{3\,g_{kl}}{A^2} \quad (k,\, l = 1,\, 2,\, 3),$$

während nach (159) und (159 a)

$$R_{44} = -\frac{V}{c^2}\Delta V = \frac{3\,V^2}{A^2 c^2} = -\frac{3\,g_{44}}{A^2}, \quad R_{14} = 0$$

ist. Diese Gleichungen lassen sich in die Beziehung

$$R_{kl} + \frac{3}{A^2}\,g_{kl} = 0 \quad (k, l = 1,\, 2,\, 3,\, 4) \; . \; . \; . \; . \; (252)$$

zusammenfassen; und das stimmt für $T_{kl} = 0$ nach (251a) mit (144b) überein*).

*) Mittels der Substitution

$$\sin\Theta = \mathfrak{Sin}\,T\,\mathfrak{Sin}\,\psi, \qquad \mathfrak{Sin}\frac{ct}{A} = \frac{\mathfrak{Sin}\,T\,\mathfrak{Cos}\,\psi}{\sqrt{1 - \mathfrak{Sin}^2\,T\,\mathfrak{Sin}^2\,\psi}}$$

geht die Maßbestimmung (250) über in

$$ds^2 = A^2\left[-\,dT^2 + \mathfrak{Sin}^2\,T\left\{d\psi^2 + \mathfrak{Sin}^2\,\psi\;(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)\right\}\right].$$

Durch die weitere Substitution $T' = i\,T$, $w' = iw$ wird daraus

$$ds^2 = A^2\left[d\,T'^2 + \sin^2 T'\left\{d\psi' + \sin^2\psi\;(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)\right\}\right].$$

Die de Sittersche „Welt" läßt sich somit als der imaginäre Teil einer vierdimensionalen Kugel betrachten. Gleichung *(h)* in Anhang IV zeigt dann unmittelbar die Gültigkeit der Formeln (252).

Allerdings hat Einstein [3]) gegen diese Lösung eingewandt, daß bei ihr nach Gleichung (157) jeder zunächst ruhende Körper sich nach größeren Θ hin zu „bewegen beginnen muß; denn nach (261) ist Grad V ein radial vom Punkt $\Theta = 0$ fortweisender Vektor. Die Schwerkraft zieht ihn zu der Fläche $\Theta = \frac{\pi}{2}$ hin, an welcher die Maßbestimmung (250) wegen $V = 0$ eine Singularität besitzt; diese wird man wohl physikalisch durch eine Massenbelegung mit endlicher Flächendichte zu deuten haben, so daß de Sitters Lösung nicht für ein Schwerefeld ohne Körper, sondern für eine flächenhafte Anordnung aller Materie gilt. Fanden wir doch auch in § 22, wo wir die Massen in eine kleine Kugel zusammengeballt annahmen, eine unbegrenzte Abnahme der Lichtgeschwindigkeit V in deren Nähe.

Wir könnten nun an der Hand der Gleichung (219) eine ähnliche Diskussion, wie in § 23, über die Fallbewegung längs einer radial auf diese Fläche zulaufenden Linie $\vartheta = const$, $\varphi = const$ anstellen. Wir wollen aber nur den Unterschied zwischen damals und jetzt aufdecken, daß nämlich hier kein Körper die singuläre Stelle erreichen kann. Nicht einmal das Licht gelangt in endlicher Zeit dorthin; die Durchlaufungszeit der Strecke zwischen Θ_1 und Θ_2, nämlich

$$\frac{A}{c}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\frac{d\Theta}{\cos\Theta} = \frac{A}{c}\log\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Theta_2}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Theta_1}{2}\right)},$$

wird unendlich, wenn man $\Theta_2 = \frac{\pi}{2}$ setzt. Der Raum hat bei de Sitter zwar eine Grenzfläche in endlicher Entfernung, trotzdem ist diese unzugänglich.

Die vollständige Lösung (251') haben Weyl und Trefftz [4]) aufgestellt. Sie vereinigt die Maßbestimmungen von Schwarzschild und de Sitter und fügt dementsprechend zu den nach de Sitter anzunehmenden Massen bei $\Theta = \frac{\pi}{2}$ noch einen kugelförmigen Körper mit dem Mittelpunkt $\Theta = 0$ hinzu. In dessen Umgebung gilt mit größter Annäherung die Schwarzschildsche Maßbestimmung (200). Über das Innere dieser Kugel gibt § 25 Auskunft, in welchem wir gerade zu diesem Zweck das λ-Glied beibehalten haben.

e) Vereinigung der Lösungen von Einstein und Weyl. Führt man in (243) statt Θ die schon früher benutzte Koordinate $r = A\sin\Theta$ ein, so findet man mit Rücksicht auf (248):

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\lambda r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - c^2 dt^2 \qquad (262\,a)$$

Andererseits kann man unter Benutzung einer Zeitveränderlichen, die sieb von dem früher benutzten t nur durch den konstanten Faktor $1 - \lambda r_i^2$ unterscheidet, wo r_i kleiner a $\frac{1}{\lambda}$; = A sein muß, und indem man

$$\alpha = \frac{2}{3} \lambda r_i^2 \tag{252 b}$$

setzt, aus (251')

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = & \frac{dr}{1 - \frac{1}{3}\frac{\lambda}{r}(r^2 + 2r_i^2)} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \\ & - c^2 \frac{1 - \frac{1}{3}\frac{\lambda}{r}(r^2 + 2r_i^2)}{1 - \lambda r_i^2} dt^2 \end{aligned}\right\} \tag{252 c}$$

machen. Diese beiden Maßbestimmungen kann man dann so vereinigen, daß die erstere zwischen r_i und A, letztere aber für Werte von r unterhalb r_i gilt. Daß die Feldgleichungen dann erfüllt sind, geht aus der Ableitung hervor. Als die eine Grenzbedingung für ein statisches Feld mit Kugelsymmetrie, das unter das Schema (199 a) fällt, fanden wir aber in § 25 die Stetigkeit des Maßtensors in allen seinen Komponenten. Für $r = r_i$ werden nun in der Tat entsprechende g_{ik} der Formeln (252 a) und (252 c) einander gleich. Die andere Grenzbedingung lautet, wie ebenfalls aus § 25 hervorgeht: $p = 0$. Sie ist hier erfüllt, da im Einsteinsehen Kugelraum der Druck überall verschwindet.

(252 a) gilt freilich nur bis zum „Äquator" $r = A$ oder $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ des Einsteinsehen Kugelraumes; doch können wir dort, genau wie früher, dessen andere Hälfte stetig anfügen. (2 52 c) kann nur oberhalb eines Wertes von r gelten, der sehr angenähert durch a bestimmt ist. Wir sahen ja schon in § 22, daß man schon bei einem größeren Werte die zur Kugel geballte Materie beginnen lassen muß, will man keine Singularität in der Maßbestimmung zulassen. In § 25 haben wir dann auch ausgeführt, wie die Maßbestimmung ins Innere einer unzusammendrückbaren Flüssigkeitskugel hinein fortzusetzen ist. Wir haben also durch die Vereinigung von (252 a) und (252 c), sowie durch diese Fortsetzung aus der dünnen Nebelmasse, welche den Einsteinsehen Kügelraum [nach (243 b)] mit der Dichte $\mu = \frac{2\lambda}{\kappa}$ erfüllt, eine Kugel vom (natürlichen) Halbmesser *Aare sin* $\frac{r_i}{A}$ herausgeschnitten und in ihren Mittelpunkt einen Stern gesetzt. Dessen Masse m ist allerdings nicht mehr nach Willkür zu wählen,

vielmehr verlangt Gleichung (252 b) im Hinblick auf (201) und (164 a), daß

$$m = \frac{4}{8}\pi\mu r_i^3$$

ist. Ist r_i so klein gegen den Halbmesser A des Einsteinschen Raumes, daß $\frac{4}{3}\pi r_i^3$ das Volumen der Höhlung darstellt, so sagt dies aus, daß die Gesamtmasse der aus der Kugel r_i entfernten Nebelmaterie in dem Stern vereinigt ist.

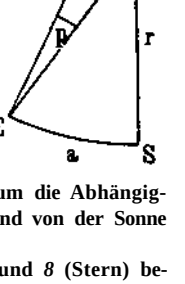
Fehlte der Stern in der Höhlung, so hätte grad V überall in ihr die Richtung zum Mittelpunkt; ein ruhender Massenpunkt würde nach (157) somit durch die Anziehung der umgebenden Nebelmasse nach außen geführt. Der Stern bewirkt eine Anziehung nach innen, und seine Masse ist durch (252 b) gerade so bestimmt, daß am Rande der Höhlung sich beide Anziehungen aufheben; denn nach (252c) ist dort $\frac{d\,V}{d\,r} = 0$.

Bis hierher haben wir stets von zentrisch symmetrischen Lösungen gesprochen. Jetzt können wir uns auch noch von dieser Beschränkung weitgehend befreien. Wir können nämlich aus dem Einsteinsehen Kugelraum an einer beliebigen anderen Stelle noch eine andere Kugel von anderem Halbmesser herausschneiden und die in ihr enthaltene Materie zu einem Stern zusammenballen, den wir in den Mittelpunkt setzen. Denn es sind sich in jenem Raum alle Punkte gleichberechtigt; so lange sich diese Ausschnitte nicht überdecken, sondern höchstens berühren, bleibt die strenge Gültigkeit des gewonnenen Lösungssystems vollständig gewahrt, und wir können, so fortfahrend, den sphärisch geschlossenen Raum mit beliebig vielen Sternen besetzen. Obwohl die kugeligen Höhlungen, welche jeden Stern umgeben, dann noch durch eine Nebelmaterie genau vorgeschriebener Dichte getrennt sind, so haben wir doch auf diese Art strenge Lösungssysteme der Feldgleichungen gewonnen; welche sich der Wirklichkeit jedenfalls erheblich besser annähern als die Einsteinsche Formel (243) selbst, und die mit ihr in den Zusammenhangsverhältnissen des dreidimensionalen Raumes übereinstimmen.

f) Die astronomischen Folgerungen, die sich aus den Maßbestimmungen (243) und (250) ziehen lassen. Bei der Einsteinschen Lösung (243) bleibt ein ruhender Körper nach (157) wegen der unveränderlichen Lichtgeschwindigkeit V dauernd in Ruhe. [Da die Bewegungsgleichungen nach § 17 aus den Feldgleichungen

hervorgehen, ist dieser Nachweis eigentlich schon damit erbracht, daß die Maßbestimmung (243) den Feldgleichungen für ruhende Materie von endlicher Dichte genügt.] Bewegt er sich, so beschreibt er im Streckenraum nach derselben Gleichung eine geodätische Linie. Seine Geschwindigkeit ist nach (158 a) konstant. Das Gleichgewicht der Materie, das sich hierin ausspricht, ist natürlich, wie die ganze Maßbestimmung, nur als ein statistischer Mittelwert aufzufassen. Aber es zeigt doch, weshalb die gegenseitigen Geschwindigkeiten auch der Fixsterne sich auf gegen die Lichtgeschwindigkeit kleinen Werten dauernd halten können. Man kann vielleicht zweifeln, ob dies in Wirklichkeit so ist; für die Räume und Zeiten, welche der menschlichen Erfahrung zugänglich sind, trifft es jedenfalls zu; und es hat etwas Befriedigendes an sich, wenn man das nicht sozusagen als Zufall auffassen muß.

Fig. 24.



Auch jeder Lichtstrahl gibt eine geodätische Linie des Streckenraumes; muß also nach §13 nach Durchlaufung einer endlichen Strecke zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren — falls er nicht vorher von Materie absorbiert ist. Jede aus geodätischen Linien gebildete Fläche ist eine Kugel vom Halbmesser A (vgl. § 13, c), und diesen Satz wollen wir nach de Sitter benutzen, um die Abhängigkeit der Parallaxe eines Sternes von seinem Abstand von der Sonne zu ermitteln.

Die drei Raumpunkte E (Erde), S (Sonne) und 8 (Stern) bestimmen (Fig. 24) eine solche Kugelfläche und auf ihr ein sphärisches Dreieck, welches bei 8 einen rechten Winkel haben soll. Dessen Seiten Ss und SE haben die Längen r und a. Nach der sphärischen Trigonometrie ist

$$\sin \frac{a}{A} \operatorname{tg} (\measuredangle sES) = \operatorname{tg} \frac{r}{A}.$$

Die Parallaxe p des Sterns ist aber der Winkel zwischen Es und dem größten Kreis, welcher in E aus ES senkrecht steht; denn diesen wird der Astronom auf der Erde als parallel zum Kreise Ss betrachten. Für sie gilt

$$\operatorname{tg} p = \operatorname{cotg} (\measuredangle sES) = \sin \frac{a}{A} \operatorname{cotg} \frac{r}{A}.$$

$\sin \frac{a}{A}$ kann man wegen der Kleinheit des Erdbahnhalbmessers a gegen A mit seinem Argument vertauschen; dasselbe gilt von $\operatorname{tg} p$.

So kommt die Proportionalität zwischen p und a heraus. Auch kann man, solange r gegen A klein ist, $cotg \frac{r}{A} = \frac{A}{r}$ setzen, so daß sich die bekannte Formel $p = \frac{a}{r}$ ergibt. Lassen wir r aber wachsen, bis es mit A vergleichbar wird, so ist die letzte Vernachlässigung nicht mehr zulässig. Diese Abweichung von der gebräuchlichen Formel ist recht auffällig, da bei dem endlichen Wert $\frac{1}{2}\pi A$ für den Sternabstand r die Parallaxe verschwindet. Ist r noch größer, so wird sie sogar negativ. Es bedarf kaum einer Erwähnung, daß in der bisherigen Erfahrung nichts Dementsprechendes vorliegt.

Nach deSitters Lösung (250) hängt die Eigenzeit einer ruhenden Uhr mit der Zeit t zusammen durch die Beziehung $d\tau = \cos\Theta dt$. Je näher Θ an seinem größten zulässigen Wert $\frac{\pi}{2}$ liegt, um so langsamer geht sie also, und da in einem statischen Felde die Lichtwellen das Zeitmaß t [nach § 18, d)] über beliebige Strecken unverfälscht übertragen, müßte man, falls diese Maßbestimmung zuträfe, an hinreichend fernen Nebelflecken eine Rotverschiebung der Spektrallinien sehen. Auch hier versagt wohl vorläufig noch die Erfahrung[4a]).

g) Die Erhaltungssätze[5]), wie wir sie in § 17, c) ausgesprochen haben, verlieren kaum an Bedeutung, wenn wir jetzt den Raum als geschlossen nach Art des Kugelraumes auffassen. Denn die dort benutzte Grenzbedingung, daß in großem Abstande von dem betrachteten abgeschlossenen System die euklidische Maßbestimmung für vier Dimensionen gilt, bleibt als eine vorzügliche Annäherung bestehen, wenn wir jenes System als kleinen Teil der überhaupt vorhandenen Körper betrachten. Nur enthält jetzt die Gesamtheit aller Körper wie eine endliche Masse, so auch einen endlichen Impuls und eine endliche Energie. Um diese Größen zu berechnen, haben wir wie damals an (151) die Integration, aber diesmal über den ganzen dreidimensionalen Raum auszuführen. Welche Koordinaten wir wählen, ist dabei gleichgültig, immer läßt sich die Integration an den Differentialquotienten nach x^1, x^2 und x^3 ausführen. Die einzige Schwierigkeit, auf welche man stößt, liegt darin, daß es kein Koordinatensystem gibt, das in dem ganzen kugelähnlichen Raum regulär wäre. Das in (243) für die Kugel selbst benutzte System hat z. B. in den Polen $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$ singulare Stellen, in denen sich mehr als vier Parameterkurven schneiden und in denen infolgedessen die Determinante der

räumlichen g_{ik}, nämlich $A^6 \sin^4\Theta \sin^2\vartheta$, verschwindet. Man muß jeden derartigen Punkt von der Integration zunächst durch eine ihn umhüllende Fläche ausschließen und erhält dann ein Flächenintegral über diese Fläche.

Grommer[6]) denkt sich zu diesem Zweck den einem euklidischen Raunt von höherer Dimensionszahl eingelagerten kugelähnlichen Baum auf eine wirkliche dreidimensionale Kugel projiziert, und projiziert diese wieder von dem Nordpol aus aurgden den ebenen Tangentenraum, welcher sie im Südpol berührt. Die im euklidischen Sinne rechtwinkeligen, geradlinigen Koordinaten x^1, x^2, x^3 (in § 13 haben wir ähnlich für die Ebene mit elliptischer Geometrie die Koordinaten x, y eingeführt) benutzt er dann als Koordinaten für den kugelähnlichen Raum. Diese Koordinaten haben auf den genannten Raum nur eine singulare Stelle, den Nordpol, der dem räumlich unendlichen in jenem ebenen Raum entspricht. Bei der besprochenen Integration findet man somit unter Benutzung der Abkürzung $r = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}}$ ein Flächenintegral

$$\lim_{r=\infty} \int \sqrt{-g} \left[(T_1^n + t^n{}_1) \frac{x^1}{r} + (T_2^n + t^n{}_2) \frac{x^2}{r} + (T_3^n + t^n{}_3) \frac{x^3}{r} \right] d\sigma, \tag{253}$$

welches über eine Kugel $r = const$ um den Punkt $x^1, x^2, x^3 = 0$ auszuführen ist. Ist zu beweisen, daß für $i = 1, 2, 3$

$$\lim_{r=\infty} \left(\sqrt{-g}\, T_i^n, r^2\right) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r=\infty} \left(\sqrt{-g}\, t^n{}_i, r^2\right) = 0, \tag{253 a}$$

so verschwindet dies Integral.

Um diesen Beweis zu führen, projizieren wir nun die Umgebung des Nordpols normal auf denselben ebenen Raum. Die Koordinaten x'^i zu denen wir so gelangen, hängen mit den x^i durch die Gleichungen zusammen:

$$\frac{x'^i}{x^i} = \frac{r'}{r} \quad (r'^2 = x'^{1^2} + x'^{2^2} + x'^{3^2}), \tag{254}$$

und es ist nach Fig. 25

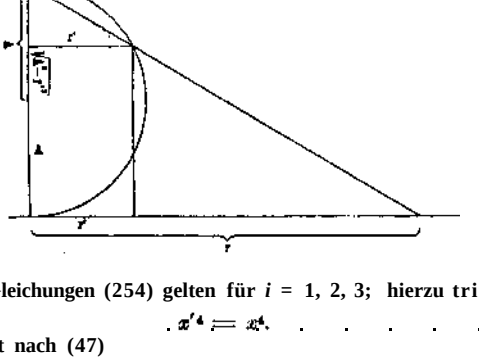
$$\frac{r'}{r} = \frac{A - \sqrt{A^2 - r'^2}}{2A}, \tag{255}$$

also für den Grenzfall $r' \ll A$

$$r r' = 4A^2. \tag{255'}$$

Für das System x^{ri} ist der Nordpol regulär, alle Komponenten des Maßtensors, gleichgültig ob kontra- oder kovariant, alle gr-Klammern, alle Komponenten des Tensors T^{n}_{m} und des Affintensors t^{n}_{m} sind bezogen auf dies System in diesem Pol endlich. Das benutzen wir, um die Beziehungen (253 a) zu beweisen.

Fig. 25.



Die Gleichungen (254) gelten für $i = 1, 2, 3$; hierzu tritt auch

$$x'^4 = x^4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255a)$$

Folglich ist nach (47)

$$T^{n}_{i} = \sum_{k,\,l=1}^{3} \frac{\partial x^{n}}{\partial x'^{k}} \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{i}} T'^{k}_{l} \quad \text{wenn} \quad n, i = 1, 2, 3,$$

$$T^{4}_{i} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{i}} T'^{4}_{l} \quad \text{wenn} \quad i = 1, 2, 3. \quad T^{4}_{4} = T'^{4}_{4}.$$

Nach (254) und (255') ist aber, falls $i, k = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{k}} = \frac{r^{3}}{2A^{3}}\left(\frac{1}{2}\delta^{l}_{k} - \frac{x^{l}x^{k}}{r^{2}}\right), \quad \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} = \frac{3A^{3}}{r^{3}}\left(\frac{1}{2}\delta^{i}_{k} - \frac{x^{i}x^{k}}{r^{2}}\right), \quad (256)$$

und nach der auf den Maßtensor g_{ik} angewandten Formel (37) wegen (255 a)

$$\sqrt{-g} = \frac{\partial(x'^{1}, x'^{2}, x'^{3})}{\partial(x^{1}, x^{2}, x^{3})}\sqrt{-g'}.$$

Der erste Differentialquotient in (256) ist groß wie r^2, der zweite klein wie $r^{-3}\sqrt{-g}$, also klein wie r^{-6} und $\sqrt{-g}\,T^{n}_{i}$ klein wie r^{-6}, oder im Fall n = 4 sogar wie r^{-8}. Weiter folgt aus (256) für i, h, j = 1, 2, 3

$$\frac{\partial^{2} x'^{i}}{\partial x^{h}\,\partial x^{j}} = -\frac{3A^{3}}{r^{3}}\left[\delta^{h}_{i}\frac{x^{j}}{r} + \delta^{j}_{h}\frac{x^{i}}{r} + \delta^{i}_{j}\frac{x^{h}}{r} - 4\frac{x^{h}x^{i}x^{j}}{r^{3}}\right],$$

während in aller S t r $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0$ t , falls auch nur ein Zeiger den Wert 4 erhält.

Nun ist nach den Christoffeischen Formeln (60):

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = \sum_{\varepsilon\vartheta\xi} \frac{\partial x'^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\vartheta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\xi}} \left\{\begin{matrix}\varepsilon\vartheta\\ \xi\end{matrix}\right\}' + \sum_{\xi} \frac{\partial^2 x'^{\xi}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\xi}}.$$

Diese Summen hezeichnen wir die dreifache mit I, die einfache mit I I . Ihr Verhalten für große Werte von *r* gibt dann die Tabelle:

	I verhält sich wie	II verhält sich wie
α, ß und *y* von 4 verschieden	bleibt endlich	r^{-1} verschwindet
Nur « oder nur ß von 4 verschieden . .	r^{-2}	
Nur « = 4 oder nur ß = 4	bleibt endlich	

Weiter ist, wenn *n* von 4 verschieden ist:

$$\sqrt{-g}\, g^{kl} = \sqrt{-g} \sum_{m,p=1}^{3} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^p} g'^{mp} \text{ klein wie } r^{-3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{kl}\right) \text{ klein wie } r^{-3};$$

wenn *k* und l von 4 verschieden,

$$\sqrt{-g}\, g^{4l} = \sqrt{-g} \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial x^l}{\partial x'^p} g'^{4p} \text{ klein wie } r^{-4},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{4l}\right) \text{ klein wie } r^{-5};$$

wenn *l* von 4 verschieden,

$\sqrt{-g}\, g^{44} = \sqrt{-g}\, g'^{44}$ klein wie r^{-6}, $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{44}\right)$ klein wie r^{-7}.

Ist aber $n = 4$, so ist $\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{-g}\, g^{kl}\right)$ von derselben Ordnung klein, wie $\sqrt{-g}\, g^{kl}$ selbst.

Unter Berücksichtigung dieser Größen Ordnungsangaben sieht man an Gleichung (151a), daß $\sqrt{-g}\, t^{n}_{i}$ stärker als r^{-2} verschwindet. Damit aber sind die Beziehungen (253 a) bewiesen.

Da somit die Integrationen der Differentialquotienten nach x^1, x^2, x^3 in den Integralen

$$\int \sum_m \frac{\partial \left[\sqrt{-g}\left(T^m_n + t^m_n\right)\right]}{\partial x^m} dx^1 dx^2 dx^3$$

Null ergeben, schließen wir wie in § 17 auf die zeitliche Unveränderlichkeit der Integrale

$$J_n = \int \sqrt{-g}\left(T^4_n + t^4_n\right) dx^1 dx^2 dx^3,$$

von denen drei die Komponenten des Impulses, das vierte die Energie der kugelähnlich geschlossenen Welt darstellen. Weiter können wir genau wie dort auch ableiten, daß diese vier Integrale von dem gewählten Koordinatensystem unabhängig sind. Darüber hinaus läßt sich zeigen, daß der Impuls Null ist.

Geht man nämlich von den oben benutzten Koordinaten x^1, x^2, x^3 durch die Substitution $x'^1 = -x^1$, $x'^2 = -x^2$, $x'^3 = x^3$, welche eine Drehung des Koordinatensystems in dem oberen Tangentenraum bedeutet, zu den x'^i über, so folgt, da der Affintensor $t^m{}_n$ sich gegen lineare Tränsformationen genau wie der wirkliche Tensor $T^m{}_n$ verhält, $J_1 = -J_1$, $J'_2 = -J_2$. Da andererseits $J'_1 = J_1$, $J'_2 = J_2$ sein muß, verschwinden beide Impulskomponenten. Daß auch die dritte Null ist, zeigt man ebenso mittels der Drehung des Koordinatensystems, die in den Transformationen $x'^1 = x^1$, $x'^2 = -x^2$, $x'^3 = -x^3$ ausgedrückt ist.

§ 28. Mies Theorie der Materie in der beschränkten Relativitätstheorie.

Ganz anderen Zwecken dient Mies Erweiterung der Relativitätstheorie. In beiden Bänden dieses Buches haben wir bisher die Welttensoren der Körper und des elektromagnetischen Feldes voneinander unterschieden. Wir haben sie addiert, wenn Körper und Felder sich durchdrangen; d. h. wir haben mechanische und elektromagnetische Energie, mechanische und elektromagnetische Spannungen, mechanischen und elektromagnetischen Energiestrom additiv zusammengefügt. Von einem inneren Zusammenhang beider Welttensoren war nie die Rede.

Die Relativitätstheorie, besonders die allgemeine, stellt eine großartige Neubildung der Dynamik dar, welche in den Einsteinschen Feldgleichungen (144) jetzt ein Gegenstück zu den Maxwellschen Gleichungen erhält. Aber die Elektrodynamik wird von dieser

Änderung nur oberflächlich berührt, wie § 15 besonders deutlich zeigt. Dynamik und Elektrizitätslehre stehen sich immer noch ohne tiefere Verbindung gegenüber.

Mies Theorie der Materie leugnet nun diesen Dualismus. Sie behält nur einen Welttensor bei, und zwar den elektromagnetischen, indem sie die Körper als rein aus Elektrizität aufgebaut annimmt. Die Bohr-Sommerfeldsche Theorie der Spektrallinien, welche allein mit elektromagnetischen Kräften im Molekül rechnet, und die schon recht erfolgreichen Versuche von Kossei, Born und Debye, die chemischen Valenzen sowie die elastischen Kräfte der festen und flüssigen Körper rein elektrisch zu verstehen, geben diesem (schon vorher von Mie ausgesprochenen) Gedanken große Bedeutung. Aber man muß sich von vornherein klar machen, daß die Elektrodynamik, wie wir sie bisher vorgetragen haben, zu seiner Durchführung nicht vollständig ausreicht. Denn die Maxwellsehe Theorie — das gilt auch von ihrer Umgestaltung zur Elektronentheorie durch H. A. Lorentz — vermag das Dasein elektrischer Ladungen nicht zu erklären. Jeder Ladungsträger müßte danach ja unter dem Einfluß der elektromagnetischen Kräfte, welche die Maxwell-Lorentzsche Theorie in ihm annimmt, wenn sie allein vorhanden wären, zerplatzen; er bedarf andersartiger Kräfte, um zu bestehen. Wir müssen also die Elektrodynamik so abändern, daß sie zwar weit außerhalb aller Ladungen die durch die Erfahrung wohlbestätigte Maxwellsche Theorie einschließlich ihres Kraftgesetzes ergibt, daß sie aber innerhalb der Elektronen und der Atomkerne, die wir jetzt als alleinige Träger positiver Ladungen kennen, wert davon abweicht.

Wir setzen in diesem Paragraphen die Gedanken Mies auseinander, wie sie sich zunächst im Anschluß an die beschränkte Relativitätstheorie entwickelt haben.

Nach Mies Annahme ist der physikalische Zustand in einem Raumpunkt vollständig bestimmt durch zehn Zustandsgrößen; man kann dafür z. B. wählen die elektrische Dichte ρ, die drei Komponenten des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ sowie die je drei Komponenten der elektrischen und der magnetischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$. Daneben haben noch physikalische Bedeutung das skalare Potential Φ, die elektrische Stromdichte cR und die beiden Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, also zehn weitere Größen; aber sie sind Funktionen von ρ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ und B und nicht selbständige Bestimmungsstücken. Die Form dieser funktionalen Zusammenhänge ist noch weitgehend unbekannt. Wir können nur das eine sagen, daß sie nicht linear sein können; denn wären sie linear, so ließen sich alle Lösungssysteme der sogleich auf zu-

stellenden Differentialgleichungen mit einem konstanten Faktor multiplizieren, weil diese dann ebenfalls linear wären. Und damit wäre die Erklärung für das Bestehen des elektrischen Elementarquantums unmöglich; es muß eine solche Deutung doch sagen, warum es nicht doppelt oder dreifach so groß sein kann, als es ist. — Man kann natürlich auch unter den angegebenen 20 Zustandsgrößen mit ihren 10 funktionalen Beziehungen 10 andere Größen als unabhängige wählen; z. B. φ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$.

Für diese erstgenannten 10 Zustandsgrößen setzt Mie nun 10 Differentialgleichungen an; jede Vektorgleichung zählt natürlich dreifach. Jede Differentialgleichung bestimmt aus dem gegenwärtigen Zustand die zeitliche Veränderung einer Zustandsgröße, so daß aus dem Anfangszustand, sofern dieser überall bekannt ist, der ganze weitere Verlauf des physikalischen Geschehens folgt. Nämlich:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div\,\mathfrak{R} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (257)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + grad\,\varphi = -\mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (258)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - rot\,\mathfrak{H} = -\mathfrak{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (269)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + rot\,\mathfrak{E} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (260)$$

Diese Gleichungen haben wohlbekannte Formen, aber zum Teil eine durchaus andere Bedeutung als früher. Während nämlich in der Elektronentheorie von Lorentz (257) und (258) Folgerungen aus den Grundgleichungen darstellen, die wie die Potentiale selbst rein rechnerischen Wert haben, treten sie hier als physikalische Grundgleichungen auf. Man wird (258) z. B. so deuten können, daß das Feld, abgesehen von den später zu bestimmenden Spannungen, aus denen sich der Energieimpulstensor berechnet, noch einen elektrischen Druck — φ enthält, der im statischen Falle die elektrische Feldstärke gerade aufhebt.

Folgerungen aus diesen Gleichungen sind, da man zeitlich unabhängige Skalare und Vektoren hier nicht zu deuten wüßte:

$$\mathfrak{B} = rot\,\mathfrak{A}, \quad div\,\mathfrak{D} = \varrho, \quad div\,\mathfrak{B} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (261)$$

Um den Energiesatz abzuleiten, multiplizierte die alte Theorie Gleichung (259) skalar mit $\mathfrak{E}$ und (260) mit $\mathfrak{H}$. Die Addition ergab [vgl. Bd. I, § 4, a)]

$$\left(\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) + c\,div\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = -c\,(\mathfrak{E}\mathfrak{R}),$$

und dabei gab $(\mathfrak{E}\mathfrak{R})$ die in andere Formen umgewandelte elektromagnetische Energie an. Hier leugnen wir alle anderen Energieformen, müssen also diesen Summanden aus einer Gleichung, die den Energiesatz aussprechen soll, fortschaffen. Multiplizieren wir nun (267) mit φ und (268) skalar mit $\mathfrak{R}$, so finden wir durch Addition nach Rechnungaregel £ von Bd. I

$$\varphi \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \left(\mathfrak{R} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) + c\, div\,(\varphi \mathfrak{R}) = -c\,(\mathfrak{E}\mathfrak{R}).$$

Die Subtraktion der beiden letzten Gleichungen aber führt zu der Formel:

$$\left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) - \varphi \frac{\partial \varrho}{\partial t} - \left(\mathfrak{R} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) + c\, div\,\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \varphi \mathfrak{R}\} = 0. \quad (262)$$

Soll dies die Kontinuitätsgleichung der Energie sein, so müssen wir

$$\mathfrak{S} = c([\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \varphi \mathfrak{R}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (263)$$

als Energiestrom deuten und die Energiedichte W aus der Differentialgleichung berechnen:

$$d\,W = (\mathfrak{E}\, d\,\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\, d\,\mathfrak{B}) - \varphi\, d\,\varrho - (\mathfrak{R}\, d\,\mathfrak{A}). \quad (264)$$

Der Vektor $\varphi \mathfrak{R}$ gibt dann eine konvektive Mitführung der Energie durch den elektrischen Strom an.

Es käme nun, um mit diesen Gleichungen etwas anzufangen, auf die Kenntnis der zehn funktionalen Beziehungen zwischen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, φ, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, ϱ, $\mathfrak{A}$ an. Diese Frage läßt sich zurückführen auf die Aufsuchung einer „Weltfunktion"

$$M = \mathfrak{L}\,[W + \varphi\,\varrho - (\mathfrak{E}\mathfrak{D})]. \quad . \quad (265)$$

Doch ist zweckmäßiger, dabei $\mathfrak{E}$ und φ statt $\mathfrak{D}$ und ϱ als Argumente einzuführen. Tun wir dies, so wird nämlich nach (264)

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\, d\, M &= d\,W - (\mathfrak{E}\, d\,\mathfrak{D}) - (\mathfrak{D}\, d\,\mathfrak{E}) + \varphi\, d\,\varrho + \varrho\, d\,\varphi \\ &= (\mathfrak{H}\, d\,\mathfrak{B}) - (\mathfrak{D}\, d\,\mathfrak{E}) + \varrho\, d\,\varphi - (\mathfrak{R}\, d\,\mathfrak{A}) \end{aligned}\right\} \quad (266)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{B}_{23}} &= \mathfrak{H}^{23} \text{ usw.}; & \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{E}_1} &= -\mathfrak{D}^1 \text{ usw.}; \\ \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \varphi} &= \varrho, & \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{A}_1} &= -\mathfrak{R}^1 \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad (267)$$

und diese zehn Gleichungen geben uns die gesuchten Zusammenhänge, sowie M bekannt ist. Für W ergibt sich daraus

$$W = \frac{1}{2}\left(M - \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{E}_i \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{E}_i} - \varphi \frac{\partial M}{\partial \varphi}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

Jetzt führen wir die Forderung ein, daß eine Lorentz-Transformation die Gestalt sämtlicher hier aufgestellter Beziehungen unverändert läßt. Für die Gleichungen (267) erreichen wir dies dadurch, daß wir die Weltfunktion M als invariant gegen diese Transformation ansetzen. D. h. unterscheiden wir die beiden durch solche Transformation verbundenen Bezugssysteme als das gestrichene und das ungestrichene, so soll identisch gelten:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \varphi, \mathfrak{A}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{B}', \mathfrak{E}', \varphi', \mathfrak{A}'), \quad \ldots \quad 269)$$

sofern wir darin $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{E}'$, φ', $\mathfrak{A}'$ als Funktionen von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, φ, $\mathfrak{A}$ einsetzen. Wir schreiben Gleichung (269) kürzer:

$$M = M'. \quad \ldots \quad (270)$$

Aus der mit (267) gleichwertigen Beziehung (266) folgt dann, daß wir wie früher in (113) $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ einerseits, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ andererseits zu Sechservektoren, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$, zusammenfassen und aus ϱ und $\mathfrak{P}$ einerseits, φ und $\mathfrak{A}$ andererseits die Vierervektoren P [vgl. (112)] und Φ bilden müssen*) [$\Phi_i = i\,\mathfrak{A}_i$ $\quad i = 1, 2, 3$), $\Phi_4 = -\varphi$]. Dann schreibt sich nämlich die Beziehung (268):

$$d\,M = 2(\mathfrak{B}\,d\,\mathfrak{M}) - 2(P\,d\,\Phi) = \sum_{ik} \mathfrak{B}^{ik}\,d\,\mathfrak{M}_{ik} - 2\sum_i P^i\,d\,\Phi_i. \quad (271)$$

Auch erhalten die Gleichungen (257) bis (259) die bekannten Formen:

$$Div\,P = 0, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\,\Phi, \quad \mathfrak{Div}\,\mathfrak{B} = P, \quad \varrho o t\,\mathfrak{M} = 0, \quad (272)$$

so daß das Relativitätsprinzip erfüllt ist.

Die Weltfunktion M. macht es nun möglich, die Miesehe Elektrodynamik aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta \int M\,d\,\Sigma = 0. \quad \ldots \quad (273)$$

herzuleiten unter der Nebenbedingung, daß alle Variationen am Rande des Integrationsbereichs verschwinden. Wir nehmen zu diesem Zweck die Komponenten des Viererpotentials als die zu variierenden Veränderlichen und verbinden den Feldvektor mit ihm durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\,\Phi \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M}_{ik} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}, \quad (274)$$

*) P bedeutet hier wieder den elektrischen Viererstrom, während wir zuletzt, in § 25, darunter den Vierervektor einer Flüssigkeitsströmung verstanden.

woraus zunächst die vierte der Gleichungen (272) nach (74 g) hervorgeht. Dann wird nach (271)

$$\int \delta M \, d\Sigma = \int \Big[\sum_{ik} \mathfrak{B}^{ik} \Big(\frac{\partial \delta \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta \Phi_i}{\partial x^k} \Big) - 2 \sum_i P^i \delta \Phi_i \Big] d\Sigma$$

$$= \int \Big[\sum_{ik} \Big(\delta \Phi_i \frac{\partial \mathfrak{B}^{ik}}{\partial x^k} - \delta \Phi_k \frac{\partial \mathfrak{B}^{ik}}{\partial x^i} \Big) - 2 \sum_i P^i \delta \Phi_i \Big] d\Sigma$$

oder, da die beiden Hälften der Doppelsumme durch Vertauschung der Summationszeiger ineinander übergehen:

$$\frac{1}{2} \int \delta M \, d\Sigma = \int \sum_i \delta \Phi_i \Big(\sum_k \frac{\partial \mathfrak{B}^{ik}}{\partial x^k} - P^i \Big) d\Sigma = 0.$$

Das Nullsetzen des Klammerausdrucks liefert dann nach (73d)

$$\mathit{div}\, \mathfrak{B} = P,$$

und aus dieser Gleichung geht die bisher noch fehlende erste Formel (272), *DivP*= 0, also auch (257) bis (261), hervor. Die invariante Form dieses Variationsprinzips bringt die Gültigkeit des Relativitätsprinzips für die Miesche Elektrodynamik besonders deutlich zum Ausdruck.

Die Funktion *M* kann wegen ihrer Invarianz ihre Argumente nur enthalten in den vier ebenfalls invarianten Formen, die sich aus dem Sechservektor $\mathfrak{M}$ und dem Viererverktor Φ bilden lassen. Das sind die absoluten Werte

$$|\mathfrak{M}| = \sqrt{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2}, \quad |\Phi| = \sqrt{\varphi^2 - \mathfrak{A}^2}$$

sowie die absoluten Werte der beiden vektoriellen Produkte $[\Phi \mathfrak{M}]$ und $[\Phi \mathfrak{M}^*]$. Nehmen wir, um ein Beispiel zu bilden, *w* als eine beliebige Funktion von $\pm |\Phi|$ und

$$M = |\mathfrak{M}|^2 - 2w(\pm |\Phi|) \qquad (276)$$

an und untersuchen wir, wie sich dann das Dasein einer Elementarladung erklären läßt. Wir betrachten diese in Buhe gegen das gewählte Bezugssystem und denken uns ihr Feld statisch. Dann können wir den Beziehungen (257) bis (260) genügen durch die Ansätze

$$\mathfrak{N} = 0, \quad \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{E} = -\mathit{grad}\, \varphi,$$

während sich aus (267) und (261), wobei wir wegen $|\Phi| = \varphi$ $w = w(\varphi)$ festsetzen dürfen,

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \varrho = -w'(\varphi), \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{A} = 0$$

ergibt. Aus der zweiten der Gleichungen (261) schließen wir dann auf die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = w'(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (276)$$

für φ. Fügen wir noch die Annahme eines Symmetriezentrums hinzu, so wird daraus*)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = w'(\varphi). \quad . \quad . \quad (277)$$

Sie hat, wenigstens wenn w eine geeignete Funktion ist, Lösungen, die überall endlich und stetig sind, auch überall dem gleichen analytischen Gesetz genügen und im Unendlichen — wo wir ja die gebräuchliche Elektrostatik erhalten müssen — wie 1/r verschwinden. Denn gehen wir umgekehrt von einer solchen Funktion $\varphi(r)$ aus, so können wir die linke Seite in (277) als Funktion von r, also auch als Funktion von φ, ausdrücken und haben dann in (277) eine Differentialgleichung für w vor uns. Die gesamte Ladung beträgt

$$e = \int \varrho\, dx\, dy\, dz = -4\pi \int_0^\infty r^2 w'(\varphi)\, dr = -4\pi \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=\infty}$$

und die Masse beträgt nach Bd. I, § 32, a), für dies vollständige statische System

$$m = \frac{1}{c^2}\int W\, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^\infty r^2 W\, dr.$$

Nach (268) und (275) ist hier

$$W = \tfrac{1}{2}\varphi^2 - w(\varphi) + \varphi w'(\varphi) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 - w(\varphi) + \varphi w'(\varphi).$$

Nun läßt sich durch partielle Integration und nach (277) einsehen, daß

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi\,\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)dr = -\frac{1}{2}\int_0^\infty r^2\,\varphi\, w'(\varphi)\, dr$$

ist. Also folgt

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^\infty r^2\left[\tfrac{1}{2}\varphi\, w'(\varphi) - w(\varphi)\right] dr.$$

*) Die hier benutzte, übrigens wohlbekannte Formel für *div grad* φ, ausgedrückt in räumlichen Polarkoordmaten r, ϑ, φ, ergibt sich ohne weiteres aus Gleichung (73) und der Maßbestimmung

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2.$$

Es ist somit Ladung und Masse durch Funktion $w(\varphi)$ in (275) bestimmt, denn die Abhängigkeit des Potentials φ von r ist ja nach (277) ebenfalls durch sie allein festgelegt. Freilich erhält dabei die Ladung keine bestimmten räumlichen Grenzen; sie erstreckt sich vielmehr genau genommen ins Unendliche. Wenn ihre Dichte aber sehr schnell mit wachsendem r abnimmt, so spielt das nur eine untergeordnete Rolle.

Die Möglichkeit eines rein elektrischen Gleichgewichts innerhalb einer Ladung wäre mit den Maxwellsehen Spannungen, wie wir sie in Bd. 1, Gl. (X), aufgestellt haben, nicht verträglich. Andererseits haben uns ja schon die veränderten Ausdrücke (263) und (264) für Energiestrom und -dichte auf eine neue Form des Energieimpulstensors T hingewiesen. Wir schreiben jetzt:

$$T_i^k = \sum_r \mathfrak{M}_{ir} \mathfrak{B}^{kr} - \Phi_i P^k - \tfrac{1}{2} M \delta_i^k \quad . \quad . \quad . \quad (278)$$

und verstehen unter δ_{ik} ähnlich wie früher die Zahl + 1, wenn $i = k$ ist, sonst 0. Dieser Ansatz gibt einen Tensor, weil jeder Summand ein solcher ist. Daß er symmetrisch ist, ließe sich rechnerisch mit Hilfe von (267) zeigen; doch wird uns der Beweis im nächsten Paragraphen ohnedem in den Schoß fallen. Hier bestätigen wir nur, daß z. B. nach (113)

$$\begin{aligned} T_4^1 &= -\frac{1}{c}\mathfrak{S}^1 = \mathfrak{M}_{42}\mathfrak{B}^{12} + \mathfrak{M}_{43}\mathfrak{B}^{13} - \Phi_4 P^1 \\ &= \mathfrak{E}_2\mathfrak{H}^{21} + \mathfrak{E}_3\mathfrak{H}^{31} + \varphi\mathfrak{R}^1 \end{aligned}$$

ist, in Übereinstimmung mit (263), während in Übereinstimmung mit (268) folgt:

$$\begin{aligned} T_4^4 &= -W = \mathfrak{M}_{41}\mathfrak{B}^{41} + \mathfrak{M}_{42}\mathfrak{B}^{42} + \mathfrak{M}_{43}\mathfrak{B}^{43} - \Phi_4 P^4 - \tfrac{1}{2} M \\ &= -(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \varphi\varrho - \tfrac{1}{2} M. \end{aligned}$$

§ 29. Mies Theorie der Materie in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Wir gehen hier sogleich vom Prinzip der kleinsten Wirkung in der Form (l'90á), aber unter Fortlassung des λ-Gliedes

$$\delta \int [R + \varkappa (M - 2 \sum_i P^i \Phi_i)] d\Sigma = 0,$$

aus, wobei wir durch Variation der g^{ik} einerseits, der Komponenten des Viererpotentials Φ_i andererseits zu den Grundgleichungen des Schwere- und des elektromagnetischen Feldes gelangen. Die Funktion M wählten wir damals, in § 21, so, wie es der Maxwellschen

Theorie entspricht. Es genügt, um die Miesehe Elektrodynamik der allgemeinen Relativitätstheorie anzupassen, daß wir unter Fortlassung des Summanden $2\sum_i P^i \Phi_i$ unter M eine invariante Funktion der g^{ik} und der Φ_i verstehen; die Ableitungen der g^{ik} sollen nicht eingehen, die der Φ_i nur in den Verbindungen

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} = \mathfrak{M}_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (279)$$

Wir setzen dann also als Variationsprinzip an:

$$\delta \int (R + \varkappa M)\, d\Sigma = \delta \int \sqrt{-g}\,(R + \varkappa M)\, d\Sigma = 0 \qquad (280)$$

und ergänzen die Differentialgleichung (271) zu:

$$-dM = \sum_{ik} (S_{ik}\, dg^{ik} + \mathfrak{B}^{ik} d\mathfrak{M}_{ik}) - 2\sum_i P^i\, d\Phi_i. \qquad (281)$$

Die S_{ik} bilden einen neuen, zunächst unbekannten, symmetrischen Tensor. Dann gilt nach (189) für die Funktion

$$\mathfrak{M} = \sqrt{-g}\, M$$

die Gleichung:

$$d\mathfrak{M} = \sqrt{-g}\, dM + M\, d\sqrt{-g}$$

$$= \sqrt{-g}\, \Big[\sum_{ik} \big[(S_{ik} - \tfrac{1}{2} M g_{ik})\, dg^{ik} + \mathfrak{B}^{ik} d\mathfrak{M}_{ik}\big] - 2\sum_i P^i\, d\Phi_i\Big].$$

Nach (188) müssen dann die Differentialquotienten

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{ik}} = T_{ik} = S_{ik} - \tfrac{1}{2} M g_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (282)$$

die Komponenten des Energieimpulstensors sein.

Deren Werte können wir nun aus der Forderung berechnen, daß M. bei einer beliebigen, also auch bei einer unendlich kleinen Koordinatentransformation invariant sein soll. Im allgemeinen gilt nach (47 a):

$$\Phi'_i = \sum_k \Phi_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}, \qquad \mathfrak{M}'_{ik} = \sum_{lm} \mathfrak{M}_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k},$$

$$g'^{ik} = \sum_{lm} g^{lm} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}.$$

Bei der unendlich kleinen Transformation, die wir schon in § 20 benutzt haben:

$$x'^l = x^l + \varepsilon\, \xi^l(x^1, x^2, x^3, x^4)$$

wird bis auf Glieder mit höheren Potenzen der unendlich kleinen Konstanten ε

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^l} = \delta_l^i + \varepsilon \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} = \delta_l^i - \varepsilon \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

$$\delta \Phi_i = \Phi_i' - \Phi_i = -\varepsilon \sum_l \Phi_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i},$$

$$\delta \mathfrak{W}_{ik} = \mathfrak{W}_{ik}' - \mathfrak{W}_{ik} = -\varepsilon \Big[\sum_l \mathfrak{W}_{lk} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + \sum_m \mathfrak{W}_{im} \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} \Big],$$

$$\delta g^{ik} = g'^{ik} - g^{ik} = \varepsilon \Big[\sum_l g^{lk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + \sum_m g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \Big].$$

Nach (281) bilden wir nun die Größe:

$$\begin{aligned} \delta M = \varepsilon \Big\{ & \sum_{ikl} S_{ik} g^{lk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + \sum_{ikm} S_{ik} g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \\ & - \sum_{ikl} \mathfrak{B}^{ik} \mathfrak{W}_{lk} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} - \sum_{ikm} \mathfrak{B}^{ik} \mathfrak{W}_{im} \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} \\ & + 2 \sum_{il} P^i \Phi_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \Big\}. \end{aligned}$$

Hier läßt sich durch Vertauschung von Summationszeigern die zweite Summe in die erste und die vierte in die dritte überführen. Wegen der Invarianz von M. aber muß δM verschwinden. Also:

$$0 = 2\varepsilon \sum_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \Big\{ \sum_k S_{kl} g^{ik} - \sum_k \mathfrak{B}^{ik} \mathfrak{W}_{lk} + P^i \Phi_l \Big\}.$$

Dies gilt, wie wir auch die Funktionen ξ^i wählen mögen. Also muß der Klammerausdruck, in welchem wir die erste Summation nach k unmittelbar ausführen können, Null sein:

$$S_l^i = \sum_k \mathfrak{B}^{ik} \mathfrak{W}_{lk} - P^i \Phi_l.$$

Daraus folgt nach (282)

$$T_l^i = S_l^i - \tfrac{1}{2} M \delta_l^i = \sum_k \mathfrak{B}^{ik} \mathfrak{W}_{lk} - P^i \Phi_l - \tfrac{1}{2} M \delta_l^i. \qquad (283)$$

Diese Formel aber stimmt mit (248) überein. — Die Symmetrie dieses Welttensors folgt unmittelbar aus der Symmetrie des Tensors S_{ik} und aus (282).

Wie die Weltfunktion M von den vier aus $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, P und Φ zu bildenden, in § 28 aufgezählten Invarianten abhängt, bleibt auch

hier eine offene Frage. Die in (189a) getroffene Wahl führt zur Maxwell-Lorentzschen Elektrodynamik zurück, kann also nach Mies Theorie der Materie nur eine Näherung weit außerhalb der Ladungen darstellen. Nach letzterer kann daher auch § 26 für die elektrische Punktladung nicht streng richtig sein. In allen Fällen aber erhalten wir aus dem Variationsprinzip (280) durch Variation der zehn g^{ik} die Gleichungen des Schwerefeldes

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} R g_{ik} = -\varkappa T_{ik}, \qquad (284)$$

durch Variation der Φ_i die vier Gleichungen, die wir vektoriell

$$\mathfrak{Div}\,\mathfrak{B} = P \qquad (285)$$

schreiben, und die zusammen mit (279) die Grundformeln der Elektrodynamik darstellen.

Diese 14 Gleichungen sind aber nicht voneinander unabhängig. Denn da in den Gleichungen des Schwerefeldes links ein divergenzfreier Tensor auftritt (vgl. §§ 10 und 16), folgt aus ihnen der Energieimpulssatz

$$\mathfrak{Div}\,T = 0.$$

$$\mathfrak{Div}_i T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, T_i^k)}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \mathfrak{M}_{il} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, \mathfrak{B}^{kl})}{\partial x^k} + \sum_{kl} \mathfrak{B}^{kl} \frac{\partial \mathfrak{M}_{il}}{\partial x^k}$$

Nu

$$- \frac{\Phi_i}{\sqrt{-g}} \sum_l \frac{\partial (\sqrt{-g}\, P^l)}{\partial x^l} - \sum_l P^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^l}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{M}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}.$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \sum_{kl} \Big(T_{kl} + \frac{1}{2} M g_{kl} \Big) \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{kl} \mathfrak{B}^{kl} \frac{\partial \mathfrak{M}_{kl}}{\partial x^i} - \sum_l P^l \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^i}.$$

Nach (281) und (282) ist aber

Diesen Wert setzen wir ein. Wir können dann alle Summen, in denen die Summanden einen Faktor $\mathfrak{B}^{kl}$ führen, zusammenfassen zu:

$$\sum_{kl} \mathfrak{B}^{kl}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{il}}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{M}_{lk}}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{kl} \mathfrak{B}^{kl}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{ik}}{\partial x^l}\right) = 0$$

[vgl. (111)]. Die beiden Summen, in deren Gliedern die P^l auftreten, ergeben

$$\sum_l P^l\left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^l}\right) = \sum_l P^l \mathfrak{M}_{il}.$$

Schließlich ist $\frac{1}{2}\frac{M}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^i} + \frac{1}{4} M \sum_{kl} g_{kl}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} = 0.$

Also

$$\mathit{Div}_i T = \sum_l \left[\mathfrak{M}_{il}\left(P^l - \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathfrak{B}^{lk})}{\partial x^k}\right) - \Phi_i \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,P^l)}{\partial x^l}\right]$$

oder nach (73) und (73d)

$$\mathit{Div}_i T = \sum_l \mathfrak{M}_{il}(P^l - \mathit{Div}^l \mathfrak{B}) - \Phi^i \mathit{Div}\, P.$$

Bezeichnen wir den Vektor $P - \mathit{Div}\,\mathfrak{B}$ mit A, so ist danach und wegen der Rechnungsregel (74)

$$0 = \sum_l \mathfrak{M}_{il} A^l - \Phi_i \mathit{Div}\, A \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Daraus, also aus den Feldgleichungen (284), kann man freilich nicht auf $A = 0$, also auf die Maxwellsehe Gleichung (285) schließen; aber es liegen darin doch vier Bedingungen für den Vektor A, welche nicht bei jeder vektoriellen Funktion der vier Koordinaten erfüllt wären.

Daß somit zwischen den 14 Differentialgleichungen (284) und (285), welche nach der Mieschen Theorie das System der ganzen Physik umfassen, vier Beziehungen bestehen, hängt mit der Willkür in der Wahl der vier Koordinaten zusammen; wir haben das entsprechend schon in § 17 betont. Denn haben wir eine Lösung dieser Grundgleichungen, so können wir in sie durch die allgemeine

Koordinatentransformation vier willkürliche Funktionen einführen. In diesem Sinne bezeichnet Hubert, dem wir die Übertragung der Mieschen Theorie in die allgemeine Relativitätstheorie verdanken, die elektrodynamischen Erscheinungen als eine Wirkung der Schwere. Er fügt hinzu, daß schon Riemann theoretisch nach einem Zusammenhang zwischen Schwere und Licht gesucht hat.

Anhang I *) (zu § 6).

Satz: Eine algebraische ebene Kurve, welche durch dreifach unendlich viele Kollineationen in sich selbst überführt wird, ist ein Kegelschnitt. In der Ebene gilt dabei euklidische Geometrie; ξ^1, ξ^2, $|^3$ sind homogene Koordinaten in ihr.

Beweis: Eine Bbllineation, welche die Kurve K in sich überführt, ordnet jedem Kurvenpunkt A einen Kurvenpunkt A' als Bild zu. Die Tangente in A erhält als Bild die Tangente in A'. Denn ein dem Punkt A unendlich benachbarter Kurvenpunkt E geht in einen Kurvenpunkt E' über, der unendlich nahe bei A' liegt; und da jede Gerade in eine Gerade überführt wird, muß aus der Geraden AE die Gerade $A'E'$ werden.

Läßt nun die Kurve K dreifach unendlich viele Kollineationen in sich zu, so kann man für drei ihrer Punkte, A, B, C, die Bilder, A', B', C', noch nach Willkür vorschreiben; denn dabei werden die drei ursprünglich vorhandenen Freiheitsgrade festgelegt. Wir bestimmen nun, daß A', das Bild von A, mit B, und umgekehrt B', das Bild von B, mit A zusammenfällt. Es gibt noch eine einfach unendliche Schar derartiger Kollineationen; jede von ihnen läßt den Schnittpunkt D der in A und B an die Kurve gelegten Tangenten ungeändert. Diesen Tangenten geben wir nun die Gleichungen $\xi^1 = 0$ und $\xi^2 = 0$, der Sehne AB die Gleichung $\xi^3 = 0$. Jede der letztgenannten Kollineationen fällt dann unter das Schema:

$$\xi'^1 = a \cdot \xi^2, \quad \xi'^2 = b \cdot \xi^1, \quad \xi'^3 = \xi^3, \quad \ldots \quad \text{(a)}$$

wobei die Konstante a den noch willkürlichen Parameter bedeutet. Denn nur eine solche Transformation führt den Punkt A $(\xi^1 = \xi^3 = 0)$ über in $(\xi^2 = \xi^3 = 0)$ und umgekehrt B in A. Die Konstante b aber läßt sich nach Festlegung von a berechnen; denn irgend ein

*) Nach einer brieflichen Mitteilung von F. Schur.

Punkt $\xi_0^1, \xi_0^2, \xi_0^3$ von *K* geht durch die Transformation (a) über in einen Punkt mit den Koordinaten $\xi_0'^1 = a\,\xi_0^2$, $\xi_0'^3 = \xi_0^3$, aus denen sich mittels der Kurvengleichung $\xi_0'^2$ ableiten läßt, und es ist $b = \xi_0'^2 : \xi_0^1$.

Nun nehmen wir die Gleichung von *K* in der Form an:

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{n} A_{\alpha\beta}\,\xi^{1\alpha}\,\xi^{2\beta}\,\xi^{3(n-\alpha-\beta)} = 0. \qquad \text{(b)}$$

Bei der Transformation (a) gehen die Glieder $A_{\alpha\beta}\xi^{1\alpha}\xi^{2\beta}\xi^{3(n-\alpha-\beta)}$ und $A_{\beta\alpha}\xi^{1\beta}\xi^{2\alpha}\xi^{3(n-\alpha-\beta)}$ über in $A_{\alpha\beta}b^{-\alpha}a^{-\beta}\xi'^{1\beta}\xi'^{2\alpha}\xi'^{3(n-\alpha-\beta)}$ und in $A_{\beta\alpha}b^{-\beta}a^{-\alpha}\xi'^{1\alpha}\xi'^{2\beta}\xi'^{3(n-\alpha-\beta)}$. Soll also Gleichung (b) unverändert bleiben, so muß

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}\,b^{-\beta}a^{-\alpha}, \qquad A_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta}\,b^{-\alpha}a^{-\beta}$$

sein. Ist weder $A_{\alpha\beta} = 0$ noch $A_{\beta\alpha} = 0$, so folgt daraus durch Elimination von *b:*

$$a^{\alpha^2-\beta^2} = \left(\frac{A_{\beta\alpha}}{A_{\alpha\beta}}\right)^{\alpha+\beta};$$

und das wäre eine Gleichung zur Bestimmung von *a* aus den Konstanten der Kurvengleichung, außer wenn entweder $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} = 0$ oder $\alpha = \beta$ ist. Eine solche Bestimmungsgleichung für den willkürlichen Parameter *a* ist aber unmöglich; also können in (b) nur Glieder auftreten, für welche $\alpha = \beta$ ist, und die Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha\alpha}(\xi^1\xi^2)^\alpha\,\xi^{3\,2(n-\alpha)} = 0.$$

Eine solche Kurve hat nun mit der Geraden $\xi^3 = 0$ nur zwei verschiedene Schnittpunkte, die sich aus der Gleichung $(\xi^1\xi^2)^n = 0$ bestimmen, also mit *A* und *B* zusammenfallen. Die Sehne *AB* war aber ganz beliebig gewählt." Also hat *K* mit keiner Sehne mehr als zwei verschiedene Punkte gemein. Folglich ist $n = 1$ und *K* ein Kegelschnitt von der Gleichung

$$A_{00}\,\xi^{3\,2} + A_{11}\,\xi^1\xi^2 = 0.$$

Die Beschränkung unseres Beweises auf algebraische Kurven stört nicht, weil die Funktion *F* der Differentiale dx^i, die wir im Text suchen, immer algebraisch ist. Auch ist es belanglos, ob Gleichung (b) eine reelle oder eine imaginäre Kurve bestimmt.

Anhang II (zu § 5).

In § 5 stellten wir an jedes der zulässigen Koordinatensysteme die Forderung, daß ds^2 negativ sein muß, wenn nur dx^2 von Null verschieden ist, dagegen positiv, wenn $dx^4 = 0$ ist, die anderen dx^i aber beliebige Werte haben. Für die erste dieser Forderungen ist notwendig und hinreichend

$$g_{44} < 0;$$

für die zweite hingegen, daß

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

eine positiv definite Form der drei dx^i darstellt. Dasselbe bedeutet die Forderung, daß die Gleichung

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, \xi^i\, \xi^k = 1$$

zwischen den rechtwinkeligen Koordinaten ξ^i im dreidimensionalen, euklidischen Raume ein Ellipsoid darstellt. In dem durch dessen Hauptachsen bestimmten Koordinatensystem X^i muß aber die letzte Gleichung lauten

$$\alpha_{11} X^{1\,2} + \alpha_{22} X^{2\,2} + \alpha_{33} X^{3\,2} = 1,$$

und die α_{ii} müssen positiv sein. Suchen wir die Hauptachsen dieser Fläche, indem wir die Extremwerte von

$$\sum_{i=1}^{3} \xi^{i\,2} \text{ bei konstantem } \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, \xi^i\, \xi^k$$

bestimmen, so finden wir für die Koordinaten ihrer Durchstoßpunkte nach der Methode des Lagrangeschen Multiplikators die drei Gleichungen:

$$(g_{11} - \lambda)\xi^1 + g_{12}\xi^2 + g_{13}\xi^3 = 0 \text{ usw.}$$

Diese haben nur dann Lösungen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} - \lambda & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} - \lambda & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ist. Dies gibt aber eine Gleichung dritten Grades für λ, und die Bedeutung ihrer Wurzeln erkennen wir, wenn wir dasselbe Problem in den Koordinaten X^i behandeln; denn dann finden wir einfach

$$(\alpha_{11} - \lambda)\,(\alpha_{22} - \lambda)\,(\alpha_{33} - \lambda) = 0.$$

Da die beiden letzten Gleichungen übereinstimmen müssen, ist notwendig

$$\gamma = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}, \qquad \text{(a)}$$

also $\gamma > 0$. Zu dieser notwendigen Bedingung tritt noch die weitere, daß auch die Teilsumme $\sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\xi^i\xi^k$ positiv definit ist; daß also entsprechend auch

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \text{(b)}$$

positiv ist, und schließlich die, daß die „Teilsumme" $g_{11}\xi^{1\,2}$ positiv ist, also

$$g_{11} > 0. \qquad \text{(c)}$$

Diese drei Bedingungen reichen aber auch hin, um die positive Definitheit zu gewährleisten. Aus (a) folgt nämlich umgekehrt, daß von *den* α_{ii} weder nur eins, noch alle drei negativ sein können. Wären zwei negativ, so wäre die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid, und aus (c) müßten wir dann schließen, daß dies Hyperboloid die ξ^1-Achse in einem reellen Punkt schneidet. Dann könnte es aber die ξ^2-Achse nicht schneiden und es wäre sein Schnitt mit der $\xi^1\,\xi^3$-Ebene eine Hyperbel, deren Gleichung

$$\sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\xi^i\xi^k = 1$$

rechts eine indefinite Form enthalten müßte, im Widerspruch zu (b). Die Bedingungen (a), (b), (c) sind also notwendig und hinreichend dafür, daß

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,dx^i\,dx$$

positiv definit ist.

Anhang III*) (zu §8a).

Die zweiten Differentialquotienten der g_{ik} in Riemannschen Koordinaten.

Wenngleich die zweiten Differentialquotienten der g_{ik} nach den Riemannschen Koordinaten x^i im hervorgehobenen Punkt im Gegensatz zu den ersten Differentialquotienten nicht verschwinden, so bestehen doch gewisse Beziehungen zwischen ihnen. Um sie abzuleiten, setzen wir in die Differentialgleichungen (52) der geodätischen Linie die Werte (64) der x^i ein; unter geeigneter Umänderung der Summationsbuchstaben in der zweiten Summe finden wir:

$$\sum_{kl} (2\,g_{ikl} - g_{kli})\,c^k c^l = 0. \qquad \text{(a)}$$

Hier entwickeln wir die g_{ik} nach steigenden Potenzen der x^i, und führen die Abkürzungen

$$\left(\frac{\partial^3 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}\right)_{x^i = 0} = a_{iklm} \qquad \text{(b)}$$

ein. Diese Größen sind im ersten sowie im zweiten Paar ihrer Zeiger symmetrisch. Die Entwicklung lautet wegen des Verschwindens der ersten Differentialquotienten

$$g_{ik} = \overset{\circ}{g}_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{lm} a_{iklm}\,x^l x^m + \cdots \qquad \text{(b)}$$

und daraus folgt durch Differentiation nach x^l

$$g_{ikl} = \sum_m a_{iklm}\,x^m + \cdots = p\sum_m a_{iklm}\,c^m + p^2(\cdots) + \cdots$$

Dies setzen wir in (a) ein und ordnen nach Potenzen von p. Da die Differentialgleichungen (52) für alle Werte von p erfüllt sein müssen, verschwindet jeder Faktor einer Potenz von p für sich allein. Der Faktor von p selbst aber lautet

$$\sum_{klm} (2\,a_{iklm} - a_{kilm})\,c^k c^l c^m;$$

*) Anhang I I I und IV enthält mathematische Ausführungen, welche im vorliegenden Buch nicht gebraucht werden, die aber in der Literatur über die allgemeine Relativitätstheorie eine Bolle spielen.

da er überdies für alle Werte der c^i Null sein muß, ist notwendige Bedingung für die Erfüllung von (62), daß der Koeffizient einer Kombination $c^k\, c^l\, c^m$ verschwindet. Dies ist aber auch die einzige Bedingung, welche die a_{iklm} zu erfüllen haben. Denn setzt man die Koeffizienten von p^2, p^3 usw. gleich Null, so treten diese Größen nicht mehr auf, sondern nur höhere Ableitungen der g_{ik}. Nun finden wir den Faktor von $c^k c^l c^m$, indem wir die drei Zeiger k, l, m allen Permutationen unterwerfen; beachten wir aber dabei die Symmetrieeigenschaften der a_{iklm}, so finden wir als die erwähnte Bedingung

$$2\,(a_{ikl\,m} + a_{il\,mk} + a_{im\,kl}) = a_{kl\,mi} + a_{lm\,ki} + a_{mk\,li}.$$

Die Klammer auf der linken Seite bezeichnen wir hier symbolisch mit I, die rechte Seite mit IL Aus 2 .I = II folgt dann 2.(I + II) = 3 .IL In der Summe

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = a_{ikl\,m} + a_{il\,mk} + a_{im\,kl} + a_{ki\,ml} + a_{lm\,ki} + a_{mk\,li}$$

kann man aber jedes Zeigerpaar vertauschen, ohne daß sie sich ändert. Durch zyklische Vertauschung sämtlicher Zeiger, welche sich durch drei paarweise Vertauschungen ersetzen läßt, geht aber I in II über, also ist auch 2 .(I + II) = 3 .I, oder I = 2.II. Das verträgt sich mit der ersten dieser Gleichungen nur, wenn I = II = 0 ist; also

$$a_{ikl\,m} + a_{il\,mk} + a_{im\,kl} = 0. \qquad \text{(c)}$$

Wir vertauschen hier i mit l:

$$a_{lk\,im} + a_{li\,mk} + a_{lm\,ki} = 0;$$

oder

$$a_{ikl\,m} + a_{km\,li} + a_{lm\,ki} = a_{km\,il} - a_{il\,km}. \qquad \text{(d)}$$

Durch Addition von (c) und (d) aber finden wir

$$a_{ikl\,m} + a_{il\,mk} + a_{im\,kl} + a_{ki\,ml} + a_{km\,il} + a_{lm\,ki} = a_{km\,il} - a_{il\,km}.$$

Eine Vertauschung von k mit i und von m mit l kehrt das Vorzeichen der rechten Seite um; links ändert sie nichts. Folglich sind beide Seiten Null. Zu den schon festgestellten Symmetrieeigenschaften der in (b) definierten Größen

$$a_{ikl\,m} = a_{kl\,im} = a_{ikm\,l},$$

tritt also noch hinzu:

$$a_{ikm\,l} = a_{mi\,kl}.$$

An Gleichung (83) in § 10, f) kann man sich überzeugen, daß diese Gleichung nur für Riemannsche Koordinaten, nicht aber für die allgemeineren geodätischen Systeme zutrifft.

Anhang IV (zu § 10).

Die Krümmungsform.

Den Begriff der Parallel Verschiebung und die anschließende Ableitung des Riemann-Christoffelschen Tensors haben erst, als die allgemeine Relativitätstheorie die Aufmerksamkeit wieder auf diesen Zweig der mathematischen Forschung gelenkt hatte, Levi-Civita, Hessenberg, Weyl und Schouten in die Wissenschaft eingeführt. Riemann selbst ist auf einem anderen Weg zu jenem Tensor gekommen. Um ihm zu folgen, heben wir wieder den Punkt P hervor und führen für ihn Riemannsche Koordinaten x^i ein. Entwickeln wir g_{kl} von P aus nach steigenden Potenzen von x^i, so finden wir nach Anhang III, Gleichung (b') für ein Linienelement, welches die Punkte x^i und x^i+dx^i verbindet:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{kl} \overset{0}{g}_{kl}\, dx^k dx^l + \frac{1}{2}\sum_{klmn} a_{klmn}\, x^m x^n\, dx^k dx^l + \cdots \\ &= \sum_{kl} \overset{0}{g}_{kl}\, dx^k dx^l - \frac{1}{3}\, \Delta\sigma^2. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Das zweite Glied,

$$\Delta\sigma^2 = -\frac{3}{2}\sum_{klmn} a_{klmn}\, x^m x^n\, dx^k dx^l, \quad \text{(b)}$$

nennt man die Krümmungsform.

Die Symmetriebeziehungen (e) und (f) und die Gleichung (c) in Anhang HE gestatten nun die Umformung:

$$-\tfrac{3}{2}\, a_{klmn} = -\tfrac{1}{2}(a_{klnm} + a_{nmkl}) + \tfrac{1}{2}(a_{kmnl} + a_{nklm}).$$

Führt man dies in (b) ein, so entstehen vier Summen. In der vierten vertauschen wir die Summationszeiger k und *l* und ersetzen überall *n* durch *i*. Da nach (79) in Riemannschen Koordinaten im Punkt P

$$\overset{0}{R}_{iklm} = \tfrac{1}{2}(a_{klim} + a_{imkl} - a_{kmil} - a_{ilkm})$$

ist, so finden wir dabei:

$$\Delta\sigma^2 = -\sum_{iklm} \overset{0}{R}_{iklm}\, x^i x^m\, dx^k dx^l.$$

Die Antisymmetrie des Riemann-Christoffelschen Tensors im ersten und im zweiten Zeigerpaar ermöglicht nun durch die Vertauschung der Zeiger *i* und k die Umformung:

$$\Delta\sigma^2 = \sum_{iklm} \overset{\circ}{R}_{iklm}\, x^k x^m\, dx^i dx^l.$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1}{2}\sum_{iklm} \overset{\circ}{R}_{iklm}\,(x^k dx^i - x^i dx^k)\, dx^l\, \delta x^m.$$

Die Wiederholung dieses Verfahrens an den Zeigern *l* und *m* ergibt schließlich:

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1}{4}\sum_{iklm} \overset{\circ}{R}_{iklm}\,(x^i dx^k - x^k dx^i)\,(x^l dx^m - x^m dx^l). \qquad \text{(c)}$$

Wenden wir dies auf unendlich kleine x^i an und ersetzen diese durch δx^i, so finden wir

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1}{4}\sum_{iklm} \overset{\circ}{R}_{iklm}\,(\delta x^i dx^k - \delta x^k dx^i)\,(\delta x^l dx^m - \delta x^m dx^l). \qquad \text{(c')}$$

Hieran erkennen wir, da wir die Tensoreigenschaft der R_{iklm} in § 10 bewiesen haben, daß $\Delta\sigma^2$ nach Einführung der δx^i gegen alle Transformationen invariant ist. Wir können deshalb im folgenden die x^i als beliebige Koordinaten deuten.

Der antisymmetrische Tensor (Sechservektor), dessen Komponenten jetzt in den Klammern auftreten, stellt das von den Verrückungen dx^i und dx^i gebildete (Quasi-)Parallelogramm dar. Das Quadrat seines Flächeninhalts beträgt nach (46)

$$\Delta f^2 = \frac{1}{4}\sum_{iklm} (\overset{\circ}{g}_{il}\overset{\circ}{g}_{km} - \overset{\circ}{g}_{kl}\overset{\circ}{g}_{im})\,(\delta x^i dx^k - \delta x^k dx^i)\,(\delta x^l dx^m - \delta x^m dx^l).$$

Der Quotient

$$\frac{\Delta\sigma^2}{\Delta f^2} = \frac{\sum_{iklm} \overset{\circ}{R}_{iklm}\,(\delta x^i dx^k - \delta x^k dx^i)\,(\delta x^l dx^m - \delta x^m dx^l)}{\sum_{iklm} (\overset{\circ}{g}_{il}\overset{\circ}{g}_{km} - \overset{\circ}{g}_{kl}\overset{\circ}{g}_{im})\,(\delta x^i dx^k - \delta x^k dx^i)\,(\delta x^l dx^m - \delta x^m dx_l)} \qquad \text{(d)}$$

wird also von der Größe dieses Flächenstückes unabhängig, und allein abhängig von den Verhältnissen der Komponenten, d. h. seiner Lage, und der Maßbestimmung ds^2. In euklidischen Verhältnissen ist er Nullj denn die Strecken *ds* und

$$\Big(\sum_{kl} \overset{\circ}{g}_{kl}\, dx^k\, dx^l\Big)^{1/2}$$

in Gleichung (a), welche gegenüberliegende Seiten des genannten Parallelogramms darstellen, sind dann genau gleich lang. Riemann bezeichnet diesen Quotienten als das Maß der Krümmung, welche die durch die Verrückungen bestimmte zweidimensionale Mannigfaltigkeit im Punkt p besitzt.

Für zwei Dimensionen wird einfach

$$\frac{\Delta \sigma^2}{\Delta f^2} = \frac{R_{1212}}{g} = -\frac{1}{2} R, \qquad \text{(e)}$$

also gleich dem Gaussschen Krümmungsmaß K [vgl. Gleichung (81a) und (87)]. Gleichung(d) ermöglicht es somit, in einern-dimensionalen Mannigfaltigkeit aus der Gaußschen Krümmung einer hinreichenden Zahl durch einen Punkt gehender, unendlich kleiner Flächenstücke den Riemann-Christoffelschen Tensor zu ermitteln.

Über geometrische Interpretationen des Krümmungstensors R_{kl} und der invarianten Krümmung R siehe die in Anmerkung 3 zu § 6 bis 10 angeführten Arbeiten.

Besteht in jedem Punkt eine Beziehung

$$R_{ikim} = \alpha (g_{il} g_{km} - g_{kl} g_{im}), \qquad \text{(f)}$$

in welcher α eine beliebige Funktion der Koordinaten ist, so ist nach Formel (d) $\Delta \sigma^2 / \Delta f^2 = \alpha$ unabhängig von der Lage des Flächenstücks Δf. Dann wird nach (80) und (81), sowie im Hinblick auf (20)

$$R_{kl} = \sum_{im} g^{im} R_{ikim} = -\alpha (n-1) \cdot g_{kl}, \quad R = \sum_{kl} g^{kl} R_{kl} = -\alpha n (n-1)$$

und der Tensor, der in den Einsteinschen Feldgleichungen vorkommt, wird

$$R_{kl} - \frac{1}{2} R \cdot g_{kl} = \frac{1}{2} \alpha (n^2 - 1)(n-2) g_{kl}.$$

An ihm bilden wir eine kontravariante Komponente der Divergenz, welche nach § 10, e) Null ergibt. Auf der rechten Seite der Gleichung finden wir dabei nach (73 a) zunächst einen Ausdruck, der α und die entsprechende Komponente der Divergenz des Maßtensors g_{kl} als Faktor enthält, und deswegen verschwindet; daneben aber, wenn wir uns auf ein im Aufpunkt geodätisches Koordinatensystem beschränken, nur noch den Term

$$\frac{1}{2} (n-1)(n-2) \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) \Gamma^{\varrho}_{\varrho\alpha} \delta^{l} \alpha.$$

Da er somit ebenfalls verschwinden muß, sind für $n > 2$ alle Komponenten des Gradienten von α Null, und dies ist wegen der Vektoreigenschaft des Gradienten eine für alle Systeme richtige Aussage,

gilt demnach auch für alle Punkte unserer n-fachen Mannigfaltigkeit. Also gilt der Satz: **Ist in einem «-fachen Baum ($n > 2$) die Krümmung aller Flächenstücke im gleichen Punkt dieselbe, so ist sie auch in allen Punkten des Raumes die gleiche (F. Schur).**

Um ein Beispiel für solche Räume zu finden, legen wir in den euklidischen Raum von n + 1 Dimensionen die n-dimensionale Kugel

$$x^{1^2} + x^{2^2} + \cdots x^{(n+1)^2} = a^2.$$

Auf ihr gilt die Maßbestimmung

$$d s^2 = \sum_1^n d x^{i^2} + \frac{1}{a^2 - r^2}\left(\sum_1^n x^i\, d x^i\right)^2 \quad \left(r^2 = \sum_1^n x^{i^2}\right).$$

Nun machen wir die Substitutionen

$$x^i = \frac{a}{\varrho} \sin\frac{\varrho}{a} \cdot y^i \quad \left(\varrho^2 = \sum_1^n y^{i^2}\right).$$

Aus ihnen folgt durch Quadrieren und Addieren:

$$r = a \sin\frac{\varrho}{a}, \quad a^2 - r^2 = a^2 \cos^2\frac{\varrho}{a};$$

und weiter durch Differentiation:

$$d x^i = \frac{a}{\varrho} \sin\frac{\varrho}{a}\, d y^i + \frac{y^i}{\varrho^2}\left(\cos\frac{\varrho}{a} - \frac{a}{\varrho}\sin\frac{\varrho}{a}\right)\sum_m y^m\, d y^m,$$

$$\sum d x^{i^2} = \left(\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\varrho}{a}\right)^2 \sum_i d y^{i^2} + \frac{1}{\varrho^2}\left(\cos^2\frac{\varrho}{a} - \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\right)\left(\sum_i y^i\, d y^i\right)^2,$$

$$\sum_i x^i\, d x^i = \frac{a}{\varrho}\cos\frac{\varrho}{a}\sin\frac{\varrho}{a}\sum y^i\, d y^i.$$

Also wird die Maßbestimmung

$$d s^2 = \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\sum_i d y^{i^2} + \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\right)\left(\sum_i x^i\, d y^i\right)^2.$$

Benutzen wir sodann die Identität

$$\frac{1}{2}\sum_{ik}\left(y^i\, d y^k - y^k\, d y^i\right)^2 = \varrho^2 \sum_i d y^{i^2} - \left(\sum_i y^i\, d y^i\right)^2$$

zur Elimination von $\sum_i y^i\, d y^i$, so finden wir

$$d s^2 = \sum_i d y^{i^2} - \frac{1}{2\varrho^2}\left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\right)\sum_{ik}\left(y^i\, d y^k - y^k\, d y^i\right)^2. \quad (g)$$

Gilt eine Maßbestimmung von der Form

$$ds^2 = \sum_{ik} \mathring{g}_{ik}\, dx^i\, dx^k + \sum_{iklmn} g_{iklmn}(x^i\, dx^k - x^k\, dx^i)(x^m\, dx^n - x^n\, dx^m)$$

(die g_{iklmn} sind beliebige Funktionen der x^i), so sind die z^i Riemannsche Koordinaten*); denn die Differentialgleichungen der geodätischen Linie, welche man aus dem zugehörigen Variationsproblem ableitet, werden durch den Ansatz

$$x^i = c^i p \quad \left(\sum_{ik} \mathring{g}_{ik} c^i c^k = 1\right),$$

in welchem p die Bogenlänge bedeutet, befriedigt. Also sind im vorliegenden Fall die y^i nach (g) Riemannsche Koordinaten; und man überzeugt sich in der Tat leicht, daß die Riemannschen Koordinaten für die Kugelfläche, welche wir in § 8, a) erwähnten, als Sonderfall zu ihnen gehören. Da nun

$$\lim_{\varrho = 0}\left[\frac{1}{2\varrho^2}\left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\right)\right] = \frac{1}{3a^2},$$

so ist nach (a), wenn wir sogleich die y^i durch δy^i ersetzen,

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1}{a^2}\sum_{ik}(\delta y^i\, dy^k - \delta y^k\, dy^i)^2,$$

somit nach (c')

$$\begin{aligned}\mathring{R}_{iklm} &= \frac{1}{a^2}, \text{ wenn } i = l \text{ und } k = m,\\ &= 0, \text{ wenn nicht } i = l \text{ und } k = m.\end{aligned}$$

Andererseits ist nach (g)

$$\begin{aligned}\mathring{g}_{il}\mathring{g}_{km} - \mathring{g}_{kl}\mathring{g}_{im} &= 1, \text{ wenn } i = l \text{ und } k = m,\\ &= 0, \text{ wenn nicht } i = m \text{ und } k = m.\end{aligned}$$

Also ist die Beziehung (f) hier in der Tat erfüllt, und zwar für jeden Punkt des n-dimensionalen Raumes; denn den Anfangspunkt der Koordinaten x^i für den wir dies nachgewiesen haben, läßt sich durch eine lineare orthogonale Transformation der Koordinaten des $(n+1)$-dimensionalen Raumes, von dem wir ausgingen, beliebig verlegen. Da

*) Daß auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, beweist H. Weber in den Anmerkungen zu Riemanns Werken, 2, Aufl., S.405—411, und F. Schur, Math. Ann. 27, 537, 18.

sich für den Faktor α in (f) hier der Wert $1/a^2$ ergibt, bestätigt sich auch der Schur sche Satz von der Unabhängigkeit dieses Faktors vom Ort.

Nach (80) wird hier

$$\mathring{R}_{kl} = \sum_{im} \mathring{g}^{im} \mathring{R}_{ikim} \quad \begin{matrix} = -\frac{n-1}{a^2}, \text{ wenn } k = l, \\ = 0, \text{ wenn k und l verschieden.} \end{matrix}$$

Das gilt nur im System y^i und in dessen Nullpunkt; in jedem System hingegen bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} &= -\frac{n-1}{a^2} g_{kl}, \quad R = -\frac{n(n-1)}{a^2}, \\ R_{kl} - \frac{1}{2} R . g_{kl} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2a^2} g_{kl}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{ (h)}$$

Literatur,

§ 1.

Eine ausführliche Zusammenfassung der Literatur über die experimentelle Erforschung der Schwere findet sich in der Enzyklopädie der mathem. Wiss., Bd. V, aus der Feder von J. Zenneck.

1) L. Southerns, Proc. Roy. Soc. London 84, 325, 1910.

2) R. v. EötvÖs, Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen. Mathem. u. naturw. Ber. aus Ungarn 8, 65, 1890; Beibl. d. Ann. d. Phys. 15, 688, 1891; vgl. auch Ann. d. Phys. 59, 354, 1895, bes. S. 373.

3) P. Zeeman, Proc. Amsterdam 20, 542, 1917.

[4]) Le Verrier, Ann. de l'observatoire de Paris 5, 76, 1859.

[4a]) S. Newcomb, Discussion of. Observed Transits of Mercury, 1677—1881, Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Vol. I, 363—487. Washington 1882. — Derselbe, The Elements of the four inner planets and the fundamental constants of Astronomy. (Supplement to the American Ephemeris and Nautical Almanac for 1897.) Washington 1895. Der Wert 42" 89 ist wohl zuerst von J. Bauschlnger in der Encykl. d. math. Wissensch. 6, 2, S. 887 berechnet.

5) H.v.Seeliger, Astron. Nachr. **137,** 129, 1895; Münchener Sitzungsber. 1895, S. 373.

5a) A. Einstein, Berliner Sitzungsberichte 1915, S. 831. Eine Zusammenstellung aller astronomischen Arbeiten von Relativitätstheorie gibt F. Kottier in der Encykl. d. math. Wissensch. 6, 2, S. 159 u. f.

[5b]) E. Grossmann, Zeitschr. f. Phys. 5, 280, 1921; Astron. Nachr. 214, 41 und 135.

[5c]) J. Bauschinger, Naturwissenschaften 10, 1005, 1922.

[6]) K. Schwarzschild, Berl. Sitzungsber. 1914, S. 1201.

[7]) Ch. E. St. John und Babcock, Astrophys. Journ. 48, 249, 1917; M. v. Laue und P. Pringsheim, Naturwissenschaften 10, 330, 1922; siehe auch Ch.E. St. John, Astrophys. Journ. 46, 249, 1917; Proc. Nat. Acad. 3. 450, 1917.

[8]) Evershed und Royds, Kodaik. Obs. Bull. 89.

[9]) L. Grebe und A. Bachern; Verh. d. D. Phys. Ges. 21, 457, 1919; Zeitschr. f. Phys. 1, 51, 1920; 2, 415, 1920.

[10]) L. Grebe, Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Nauheim 1920. Phys. Zeitschr. 21, 662, 1920.

[11]) A. Pérot, Conipt. rend. vom 26. April, 26. Juli 1920 und vom 7. März 1921.

12) H. Buisson und 6h. Fabry, Compt. rend. 172, 1020, 1921.

13) E. Freundlich, Phys. Zeitschr. 20, 561, 1919; Naturwissenschaften 7, 629, 1920.

14) P. W. Dyson, A. S. Eddington und C. Davidson, Phil. Trans. Boy. Soc. London 220, 291,1920. Aus dieser Veröffentlichung stammen die Fig. 5 u. 6. Tabelle 2 ist entnommen aus einer brieflichen Mitteilung von L. Silberstein; vgl. M. v. Laue, Naturwissenschaften 8, 390, 1920. Gegen den Einwand, daß photographische Effekte die Ablenkung vorgetäuscht hätten, wendet sich M. Wolf, Astron. Nachr. 212, 181, 1920; R. Emden, Münchener Sitzungsber. 1920, S. 387, widerlegt die Bedenken, als hätte eine ausgedehnte Sonnenatmosphäre die Ablenkung hervorbringen können.

§2.

P. Drude, Ann. d. Phys. u. Chem. 62, l, 1897; M. Abraham, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 11, 470, 1914.

1) C. Neumann, Leipziger Abhandlungen 1874.

2) H. v. Seeliger, Vierteljahrsschr. d. astron. Ges. 41, 234, 1906.

3) Zitiert nach der angefahrten Arbeit von P. Drude.

[4]) P. Gerber, Zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 43, 93, 1898; Ann. d. Phys. 52, 415, 1917. Auf die Unklarheit in Gerbers Potentialbegriff weist hin H. v. Seeliger, Ann. d. Phys. 53, 31 u. 54, 38, 1917. Daß Gerbers Ansatz keine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwere ergibt, weist nach M. v. Laue, Ann. d. Phys. 53, 214, 1917. Von Gerbers vermeintlicher Priorität hinsichtlich der Formel für die Perihelbewegung des Merkurs handeln die Notizen von EL v. Seeliger, Münchener Sitzungsber. 1918, S. 262 u. M. v. Laue, Naturwissenschaften 8, 735, 1920.

5) C. Maxwell, Scient. Papers I, S. 570.

6) M. Abraham, Arch. f. Math. u. Phys. (3) 20, 198, 1912.

7) F. Mossotti, Sur les forces, qui régissent la Constitution Intérieure des corps, Turin 1836. F. Zöllner, Erklärung der universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektrizität, Leipzig 1882. H. A. Lorentz, Versl. Akadem. van Wetenschapen to Amsterdam 8, 603, 1900. Ferner W. Wien, Ann. d. Phys. 5, 501, 1901; R. Gans, Phys. Zeitschr. 6, 803, 1905 und F. Wacker, Über Gravitation und Elektromagnetismus. Diss. Tübingen 1909.

[8]) H. Minkowski, Göttinger Nachrichten 1907, S. 1; Math. Ann. 68, 472, 1910. Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Leipzig u. Berlin 1910, S. 54.

[9]) H. Poincaré Rendiconti del circolo matematico di Palermo 21, 129, 1906; vgl. auch A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 33, 649, 1910.

[10]) F. J. de Wisniewski, Zur Minkowskischen Mechanik. Ann. d. Phys. 40, 387 u. 668, 1918.

11) M. Abraham, Zur Theorie der Gravitation. Phys. Zeitschr. 18, 1, 1912. Das Elementargesetz der Gravitation, ebend. 13, 4, 1912. Der freie Fall, ebend. 13, 810, 1912. Die Erhaltung der Energie und der Materie im Schwerkraftfelde, ebend. 13, 311, 1912. Das Gravitationsfeld, ebend. 18, 793,1912. Dalle onde luminose e gravitazlonali. Nuovo Cimento (6) 8, 211, 1912. Eine neue Gravitationstheorie. Arch. d. Math. u. Phys. (8) 20, 198,

1912. Ferner B. Caldonazzo, Traiettöri dei raggi luminosl dei punti materiali nel campo gravitazionale. Nuovo Cimento (6) 5, 267, 1918.

12) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie. Ann. d. Phys. 37, 511 u. 39, 1, 1912; 40, 1, 1913. Ferner: Das Prinzip von der Relativität des Gravitationspotentials. Elster- und Geitel-Festschrift, S. 251, 1915.

13) Die erste Fassung von Nordströms Theorie findet sich bei G, Nordström, Phys. Zeitschr. 13, 1126, 1912; Ann. d. Phys. 40, 856, 1913; ferner M. Behacker, Phys. Zeitschr. 14, 989, 1913. Die zweite Fassung ist enthalten in G. Nordström, Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips. Ann. d. Phys. 42, 533, 1913. Die Fallgesetze und Planetenbewegungen in der Relativitätstheorie ebend. 43, 1101, 1914; ferner Phys. Zeitschr. 15, 504, 1914; A. Einstein, ebend. 14, 1249, 1913; A. Einstein u. A. D. Fokker, Ann. d. Phys. 44, 321, 1914; M. v. Laue, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 14, 263, 1917.

§3.

A. Einstein, Ann. d. Phys. 49, 769, 1916. „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie", Braunschweig 1917.

1) Immanuel Kant, Neuer Lehrbegriff der Bewegung und der Ruhe 1758; vgl. dazu E. Cassierer, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie. Berlin 1921, Kap. V, und Ilse Schneider.

§ 4.

M. Schlick, Naturwissenschaften 5, 162, 1917.

H. v. Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. „Vorträge und Reden" II, S. 1. Braunschweig 1896.

§ 5.

H. v. Helmholtz, „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie". Verh. d. naturhistorisch-medizinischen Ver. Heidelberg 4, 197, 1886 u. 5, 31, 1889; Ges. Abh. II, S. 610, Leipzig 1883. „Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen". Göttinger Nachr. 1868, S. 193; Ges. Abh. II, S. 618. S. Lie weist in zahlreichen Arbeiten auf Mängel in der mathematischen Behandlung hei Helmholtz hin und verbessert sie, ohne daß dies für das Ergebnis etwas ausmachte, vermittelst seiner Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen. Siehe z. B. S. Lie, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1890, oder Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III, Abt. 5.

Wir folgen im Text dem Gedankengang von F. Klein in einer als Einzelschrift erschienenen Vorlesung über nichteuklidische Geometrie vom Winter 1889/90.

§ 6 bis 11.

B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 18, 133, 1867; Ges. Werke, S. 272, Leipzig 1892. Als Einzelschrift mit Anmerkungen herausgegeben von H. Weyl, Berlin 1919.

Derselbe, Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima academia parisiensi propositae. Ges. Werke, S. 391.

E. B. Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Journ. f. reine u. angewandte Math. 70, 46, 1869.

R. Lipschitz, Untersuchungen in betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen. Journ. f. reine u. angewandte Math. 70, 71, 1869 u. 72, 1, 1870.

F. Schur, Über den Zusammenhang der Bäume konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes mit den projektiven Räumen. Math. Ann. 27, 537, 1886.

G. Ricci u. T. Levi-Civita, Méthodes de calcul difterentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. 54, 125, 1901.

A. Einstein, Ann. d. Phys. **49,** 765, 1916.

A. Einstein u. M. Grossmann, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie. Leipzig u. Berlin 1913.

G. Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie. Math. Ann. 78, 187, 1918.

T. Levi-Civita, Nozione di paralleüsmo in una varietà qualunque. Rendiconti del Circ. mat. Palermo 42, 173, 1917.

F. Jung, Die Feldableitung in allgemeinen Koordinaten. Wiener Sitzungsber. 126, 1437, 1917. Schwerefeld und Krümmung. Phys. Zeitschr. 20, 274, 1919.

J. A. Schouten, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie. Verh. d. Akad. Amsterdam 12, eerste sectie No. 6, 1918. On the direct analysis of the linear quantities belonging to the rotational group in 3 and 4 variables. Proc. Amsterdam 21, 327, 1917. Die Zahlensysteme der geometrischen Größen. Nieuw Archief voor wiskunde 18, 1, 1921. A. Palatini, Sui fondamenti del calcolo differenziale assoluto. Rendiconti del circ. mat. 18, 1919.

1) Herbert Lang, Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie. Diss. München 1919. Ann. d. Phys. 61, 32, 1920. W. Pauli, Em. d. math. Wiss. V, 2, Artikel 13, Nr. 13.

2) A. D. Fokker, On the equivalent of parallel translation in non-euklidean space and on Riemann's measure of curvature. Proc Amsterdam 21, 505, 1918. J. A. Schouten, On the number of degrees of freedom of the geodetically moving Systems and the enclosing euklidean space with the least possible number of dimensions. Proc. Amsterdam 21, 607, 1918. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, § 14. Berlin 1918.

3) G. Herglotz, Zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Sitzungsber. d. Sächs. Akad., Math.-Phys. Klasse 68, 199, 1916.

H. Vermeil, Notiz über das mittlere Krümraungsmaß einem fach ausgedehnten Riemannschen Mannigfaltigkeit. Göttinger Nachr. 1917, S. 834.

§12.

Für ein eingehenderes Studium der Flächentheorie verweisen wir z. B. auf die Vorlesungen über Differentialgeometrie von L. Bianchi, deutsch von M. Lukat, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1910.

§13.

A. Caylev, Sixth memoir upon quantics. London Phil. Transact. **149,** 61,1859; Coll. Papers II, S. 561, 1889. F. Klein, Ober die sogenannte nicht-euklidische Geometrie. Math. Ann. 4, 573, 1871. Siehe auch R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von L. Liebmann. Leipzig u. Berlin (2. Aufl.) 1919.

§ 14 und 15.

J. Laub, Ann. a. Phys. 46, 705, 1915 (nach Vorlesungen von A. Einstein). A. Einstein, Ann. d. Phys. 49, 765, 1916.

M. v. Laue, Phys. Zeitschr. 21, 659, 1920.

[x]) W. Gordon, erscheint demnächst in den Ann. d. Phys.

2) Mitgeteilt von A. Sommerfeld u. J. Bunge, Ann. d. Phys. 35, 277, 1911. M. v. Laue, Berl. Sitzungsber. 1922, S. 118.

§ 16 und 17.

A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 1915, S. 778 u. 844 sowie 1918, S. 448; Ann. d. Phys. 49, 769, 1916.

1) E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. 19, 4, 1918.

2) A. Einstein, ebend. 19, 115, 1918.

[3]) Hans Bauer, ebend. 19, 163, 1918.

§ 18 und 19.

A. Einstein, Ann. d. Phys. 49, 769, 1916; Berl. Sitzungsber. 1915, S. 778 u. 844.

1) M. v. Laue Zeitschr. f. Phys. 3, 389, 1920.

2) Derselbe, Phys. Zeitschr. 21, 659, 1920.

3) A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 1917, S. 142.

§ 20.

A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 19f6, S. 688 u. 1918, S. 154.

H. Thirring, Phys. Zeitschr. 19, 33, 204, 1918.

A. Kopff, Phys. Zeitschr. 22, 24, 179, 1921.

1) H. Thirring, ebend. 19, 33, 1918; 22, 29, 1921.

2) H. Thirring u. J. Lense, ebend. 19, 156, 1918.

§ 21.

H. A. Lorentz, Verslagen Akad. van Wetenschapen Amsterdam 9t, 1073, 1915; 24, 1389, 1759, 1916; 25, 468, 1916.

A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 1916, S. 1111.

J. Tresling, Verslagen Akad. Amsterdam 25, 844, 1916.

A. D. Fokker, ebend. 25, 1067, 1917.

H. Weyl, Ann. d. Phys. 54, 117, 1917.

A. Palatini, Deduzione invariantiva delle equazioni gravitationali dal principio di Hamilton. Rend. del. circ. mad. di Palermo 18, 1919.

§ 22 und 23.

A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkurs aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Berl. Sitzungsber. 1915, S. 881.

K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein sehen Theorie, ebend. 1916, S. 189. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit, nach der Einsteinsehen Theorie, ebend. 1916, S. 424.

D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik. Gattinger Nachr. 1917, S. 53.

L. Flamm, Phys. Zeitschr. 17, 448, 1916.

1) Mie, Ahn. d. Phys. 69, 1, 1922.

§24.

!) A. Einstein, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 4, 411, 1907, bes. S.461; Ann. d. Phys. 85, 898, 1911; 88, 355, 1912.

§25.

Die unzusammendrückbare Flüssigkeit behandelte zuerst K. Schwarzschild, Berl. Sitzungsber. 1916, S. 424; sodann H. Weyl in seinem Buch. Für Fälle mit anderen willkürlich angenommenen Zustandsgieichungen löst dasselbe Problem H. Bauer, Wiener Sitzungsber. 127, 2141, 1918.

§26.

H. Reissner, Aon. d. Phys. 50, 106, 1916.

1) H. Weyl, ebend. 54, 117, 1917. Bach, Math. Zeitschr. 18, 134, 1922.

2) Levi-Civita:

Sulla expressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein.

Rendiconti della reale acoademia dei Lincei. Classe discienze flsiche, matematiche e natural!, serie 5 a, vol. XXVI, l.sem., fasc. 7.; 1. April 1917, S. 381.

Statica einsteiniana. Rend. acc. Line. XXVI, 1, 9; 6. Mai 1917, S.458.

Realtà fisica di aleuni spazt normali del Bianohi. Rend. acc. Line. XXVI, 1, 10; 20. Mai 1917, S. 519.

ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. Rend. acc. Line. 1917—1919.

1. Generalità e prima approssimazione, XXVI, 2,12; 16.Dez. 1917, S.307.

II. Condlzioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale, XXVII, 1, 1; 6. Januar 1918, S.3.

III. Formule ausiliarle, XXVII, 2, 7; 11. Oktober 1918, S. 183.

IV. II sottocaso B_2: Riduzione delle equazioni differenziali, XXVII, 2, 8; 11. Oktober 1918, S. 220.

V. II sottocaso B_2: Soluzioni longitudinali (= 0), XX»VII, 2, 9; 3. November 1918, S. 240.

VI. II sottocaso B_2: Soluzioni quadrantali (N = 0), XXVII, 2, 10; 17. November 1918, S. 283.

VII. Soluzioni binarie di Weyl, XXVIII, 1, 1; 5.Januar 1919, S.3.

IX. L'analogo del Potenziale logaritmico, XXVIII, 1, 2; 19. Januar 1919, S. 101.

La teoria di Einstein e il prineipio di Fermat. Nuovo Cimento, Serie VI, Vol. XVI, September bis Oktober 1918, S. 105.

3) Elena Furlanetto, Sull' integrale generale delle equazione di Einstein, in prima approssimazione. Nuovo Cimento 16, 139, 1918.

4) Oarlotta Longo, Legge eletrostatica elementare nella teoria di Einstein. Nuovo Cimento 15, 191, 1918.

5) A. De-Zuani, Equilibrio relativo ed equazioni gravitazionali di Einstein nel caso stationario. Nuovo Cimento 18, 5, 1919.

6) A. Palatini, Moti einsteiniani stazionari. Atti des R. Istit. Veneto di scienze, lett. ed arti, 78, 589, 1919.

§27.

A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 1917, 8.142.

1) Serini, Rend. Acc. Line. 27, 235, 1918.

2) W. de Sitter, On Einstein's theory of gravitation and its astronomioal consequences. Monthly notices of Royal astronomical Soc. 76, 699, 1916; 77, 155, 1916; 78, 1, 1917. — On the relativity of inertia, remarks concerning Einstein's latest hypothesis. Proc. Akad. Amsterdam 19, 1217, 1917. — On the curvature of space. Proc. Akad. Amsterdam 20, 229, 1917.

3) A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 1918, S. 270. W. de Sitter, Proc. Akad. Amsterdam 20, 1809, 1918.

[4]) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 3. Aufl., 1921, S. 254. Phys. Zeitschrift 20, 81, 1919. E. Trefftz, Math. Ann. 86, 317, 1922. A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 1922, S. 448.

[4a]) A. S. Eddington gibt in seinem Buch: The mathematical theory of relativity (Cambridge 1923), auf S.162, mach Mitteilungen von V. M. Sliper vom Lowell-Observatorium eine Tabelle, welche für 41 Nebel die Linienverschiebung angibt. Davon zeigen nur fünf eine Violettverschiebung, alle anderen eine meist weit beträchtlichere Rotverschiebung. Doch fügt Eddington selbst hinzu, daß die Nebel der südlichen Halbkugel dabei sehr wenig berücksichtigt sind, und daß sich deshalb ein endgültiger Schluß verbietet.

5) A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 1918, S. 448. F. Klein, Göttinger Nachr. 1918, S. 394.

6) J. Grommer, Berl. Sitzungsber. 1919, S. 860.

§ 28 und 29.

G. Mie, s. § 2, Anm. 12.

D. Hilbert, s. § 22 bis 23.

Weitere Literatur.

A. D. Fokker, De geodetische precessie; een uitvloeisel van Einstein's gravitation theorie. Verslagen Akademie Amsterdam 20, 1920.

Zusammenstellung der Hauptformeln.

1. Formeltabelle zur Tensoranalysis in vier Dimensionen:

$$dg^{il} = -\sum_{jk} g^{ik} g^{jl} dg_{jk}, \quad \ldots\ldots \quad (61a)$$

$$dg_{il} = -\sum_{jk} g_{ik} g_{jl} dg^{jk}. \quad \ldots \quad (61b)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} d(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2}\sum_{ik} g^{ik} dg_{ik} = -\frac{1}{2}\sum_{ik} g_{ik} dg^{ik} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \sum_{ik} g_{ik} d(\sqrt{-g}\, g^{ik}), \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(62)\\ \text{und}\\ (62\,b)\end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) = \sum_l g_{il} \left\{\begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix}\right\}, \quad (53), (56)$$

$$\left\{\begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix}\right\} = \sum_i g^{il} \left[\begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \left[\begin{matrix} i\,l \\ k \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right] = \sum_m \left(g_{im} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} + g_{km} \left\{\begin{matrix} i\,l \\ m \end{matrix}\right\}\right), \quad \begin{matrix}(57)\\ \text{u. } (57\,a)\end{matrix}$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\sum_m \left(g^{im} \left\{\begin{matrix} m\,l \\ k \end{matrix}\right\} + g^{km} \left\{\begin{matrix} m\,l \\ i \end{matrix}\right\}\right). \quad \ldots\ldots \quad (61\,c)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^l} = \sum_m \left\{\begin{matrix} l\,m \\ m \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62\,a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{ik})}{\partial x^k} = -\sum_{kl} g^{kl} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (74\,e')$$

Differentialgleichung der geodätischen Linie:

$$\ddot{x}^i + \sum_{kl} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Christoffeische Formeln für die Transformation der g-Klammern:

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^m \partial x'^n} + \sum_{jk} \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} m\,n \\ k \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x^l}{\partial x'^k}. \qquad (60)$$

Bei unendlich kleiner Parallelverschiebung des Vektors A **vom Punkt** x^i **zum Punkt** $x^i + dx^i$ **gilt:**

$$dA^i = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right\} A^k dx^l \quad (67), \qquad dA_i = \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ k \end{matrix} \right\} A_k dx^l. \qquad (67a)$$

Der Gradient eines Skalars (p **ist ein Vierervektor und hat die Komponenten:**

$$\Gamma_\varrho \propto \delta_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \qquad (72)$$

Die Rotation eines Vierervektors* Φ **ist ein Sechservektor und hat die Komponenten:**

$$\mathfrak{Rot}_{ik} \Phi = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}; \qquad (74a)$$

Die Divergenz eines Vierervektors ist ein Skalar:

$$Div \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, \Phi^k)}{\partial x^k}. \qquad (73)$$

Die Divergenz eines beliebigen Tensors zweiten Ranges ist ein Vierervektor mit den Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} Div^l T &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, T^{lk})}{\partial x^k} + \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right\} T^{lk}, \\ Div_i T &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, T_i{}^k)}{\partial x^k} - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\} T_l{}^k. \end{aligned}\right\} \qquad (73a)$$

Für einen symmetrischen Tensor kann man dafür auch schreiben:

$$Div_i T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, T_i{}^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \sum_{kl} T^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \qquad (73b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, T_i{}^k)}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} \qquad (73c)$$

Für einen antisymmetrischen Tensor (Sechservektor) hingegen gilt

$$\mathit{Div}^{i}\mathfrak{W} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{k} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathfrak{W}^{ik})}{\partial x^{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73\,d)$$

$$\mathit{Div}(\mathit{Div}\,\mathfrak{W}) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (741)$$

Weitere Rechnungsregeln:

$$\mathfrak{Rot}\,\Gamma\varphi\alpha\delta\,\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74\,d)$$

$$\varrho\sigma\tau_{ikl}(\mathfrak{Rot}\,P) = 0, \quad \varrho\sigma\tau_{iklm}(\varrho\sigma\tau\,\mathfrak{M}) = 0 \quad . \quad . \quad (74g)$$

Der Riemann-Christoffelsche Tensor hat die Komponenten:

$$R^{j}_{klm} = \frac{\partial}{\partial x^{l}}\left\{\begin{matrix} km \\ j \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^{m}}\left\{\begin{matrix} kl \\ j \end{matrix}\right\} + \sum_{n}\left[\left\{\begin{matrix} ln \\ j \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} km \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} mn \\ j \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} kl \\ n \end{matrix}\right\}\right], \quad (76\,a)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2} g_{kl}}{\partial x^{i}\partial x^{m}} + \frac{\partial^{2} g_{im}}{\partial x^{k}\partial x^{l}} - \frac{\partial^{2} g_{km}}{\partial x^{i}\partial x^{l}} - \frac{\partial^{2} g_{il}}{\partial x^{k}\partial x^{m}}\right) \\ + \sum_{np} g^{np}\left(\left[\begin{matrix} im \\ n \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} kl \\ p \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} il \\ n \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} km \\ p \end{matrix}\right]\right), \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} = R_{lmik} \quad . \quad . \quad (79\,a)$$

$$R_{iklm} + R_{likm} + R_{kilm} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79\,b)$$

Der Krümmungstensor hat die Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} = \sum_{m}\left[\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left\{\begin{matrix} km \\ m \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^{m}}\left\{\begin{matrix} kl \\ m \end{matrix}\right\}\right] \\ + \sum_{mn}\left\{\begin{matrix} kn \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lm \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} kl \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} mn \\ n \end{matrix}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Die invariante Krümmung ist

$$\left.\begin{aligned} R = \sum_{klm} g^{kl}\left[\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left\{\begin{matrix} km \\ m \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^{m}}\left\{\begin{matrix} kl \\ m \end{matrix}\right\}\right. \\ \left. + \sum_{n}\left(\left\{\begin{matrix} kn \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lm \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} kl \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} mn \\ n \end{matrix}\right\}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{Vgl. (81)}$$

Wellenausdruck für den Vektor P:

$$W P_{i} = \Box P_{i} + \sum_{m} P^{m} R_{im} \quad . \quad (85e)$$

2. Die physikalischen Grundgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.

a) Die Gravitationskonstante $C = 6{,}676 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{g^{-1}cm^{3}sec^{-2}}$.

b) Die Maxwellschen Gleichungen:

$$\mathit{Div}^{*}\mathfrak{W} = 0, \quad \mathit{Div}\,\mathfrak{F} = P; \quad . \quad (111)$$

dabei ist

$$P^1 = \frac{1}{c}(\mathfrak{Y}^1 + \varrho q^1)\sqrt{-g^{44}}, \ \ldots, \ P^4 = \varrho\sqrt{-g^{44}}, \qquad (112)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_{14} &= \mathfrak{E}_1 \text{ usw.}, & \mathfrak{M}_{23} &= \mathfrak{B}_{23} \text{ usw.}, \\ \mathfrak{B}^{14} &= -\sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{D}^1 \text{ usw.}, & \mathfrak{B}^{23} &= \sqrt{-g^{44}}\,\mathfrak{H}^{23} \text{ usw.}, \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

$$\sum_k Y^k \mathfrak{B}_{ik} = s \sum_k Y^k \mathfrak{M}_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (117)$$

$$[P_i + (YP)\,Y_i] = \frac{\sigma}{c}\sum_k Y^k \mathfrak{M}_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (116)$$

$$Y_4\mathfrak{M}_{23} + Y_2\mathfrak{M}_{34} + Y_3\mathfrak{M}_{42} = \mu(Y_4\mathfrak{B}_{23} + Y_2\mathfrak{B}_{34} + Y_3\mathfrak{B}_{42}). \qquad (115)$$

Die elektromagnetische Viererkraft für $s = \mu = 1$:

$$F_\alpha = \sum_\beta P^\beta \mathfrak{M}_{\alpha\beta} = -\Delta i v_\alpha T, \qquad (129) \text{ u. } (130)$$

d. h.

$$F_1 = \varrho\left[\mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}(q^2\mathfrak{B}_{12} - q^3\mathfrak{B}_{31})\right]\sqrt{-g^{44}} \text{ usw.}, \ F_4 = -\frac{\varrho}{c}\sum_{i=1}^{3} q^i \mathfrak{E}_i \sqrt{-g^{44}}.$$

Die Maxwellschen Spannungen:

$$T_\alpha^\beta = \sum_\gamma \mathfrak{M}_{\alpha\gamma}\mathfrak{M}^{\beta\gamma} - \tfrac{1}{2}\delta_\alpha^\beta |\mathfrak{M}|^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (132)$$

c) Hamiltonsches Prinzip für die Bewegung eines Massenpunktes:

$$\int (\tfrac{1}{2} c^2 m \delta f + \delta A)\, d\tau = 0, \qquad \delta A = \sum_j K_j \delta x^j$$

($K^i = \int F^i \delta V^0$ Minkowskischer Kraftvektor).

Bewegungsgleichungen:

$$c^2 m\left[\dot{Y}^i + \sum_{kl}\begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix} Y^k Y^l\right] = K^i \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (141)$$

d) Einsteins Feldgleichungen der Schwere:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R - \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (144)$$

oder

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T\right), \quad \left(T = \sum_i T_i^i\right) \qquad (144b)$$

$$\Delta i v\, T = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (134)$$

$$\varkappa = \frac{8\pi C}{c^4} = 2{,}071 \cdot 10^{-48}\,\mathrm{g^{-1}\,cm^{-1}\,sec^2} \qquad (162a) \text{ u. } (162b)$$

$$\left.\begin{aligned} &T_k^i = \sqrt{-g^{44}}\, p_k^i, \quad T_l^i = c\sqrt{-g^{44}}\, g_l, \quad T_4^i = -\tfrac{1}{c}\sqrt{-g^{44}}\, \mathfrak{S}^i, \\ &(i,k = 1,2,3), \qquad T_4^4 = -\sqrt{-g^{44}}\, W, \end{aligned}\right\} \quad (162)$$

Die Funktion b hat die Definition:

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\, H, \quad H = \sum_{klmn} g^{kl}\left[\begin{Bmatrix} kl \\ n \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} nm \\ m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kn \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lm \\ n \end{Bmatrix}\right] + 2\lambda \quad (145)$$

Energiedichte, -Strömung und Spannungen des Schwerefeldes:

$$t^m{}_n = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}}\left[\delta_n^m \mathfrak{H} - \sum_{kl} \gamma_n^{kl}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma_m^{kl}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

dabei ist:

$$\gamma_n^{kl} = \frac{\partial}{\partial x^n}(\sqrt{-g}\, g^{kl}). \quad . \quad . \quad (146)$$

Erhaltungssatz für Energie und Impuls:

$$\sum_m \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,(T_n^m + t^m{}_n)\right)}{\partial x^m} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (151)$$

e) Im statischen Felde mit der Maßbestimmung

$$ds^2 = da^2 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 dx_4^2, \quad da^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx^i\, dx^k; \quad (164)$$

gilt für i,k,l = 1,2,3 **die geodätische Linie**

$$\ddot{x}^l + \sum_{j,k=1}^{3}\begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix}^* + \frac{V}{c^2}\, grad^l V \cdot \dot{x}^4{}^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (157)$$

$$\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}^*, \quad \begin{Bmatrix} 44 \\ l \end{Bmatrix} = \frac{V}{c^2}\, grad^l V, \quad \begin{Bmatrix} i4 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{V}\, grad_i V \quad (158)$$

(die anderen g-Klammern sind Null). Weiter:

$$R_{44} = -\frac{V}{c^2}\Delta V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (159)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} &= P_{kl} + \frac{1}{V} V_{kl} \\ V_{kl} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial x^l} - \sum_{m=1}^{3}\begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}^* \frac{\partial V}{\partial x^m} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \quad (159\,b)$$

$$\left.\begin{aligned} &R = P + \frac{2}{V}\Delta V, \quad R_{44} - \frac{1}{2} R \cdot g_{44} = \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} P \\ &R_{kl} - \frac{1}{2} R\, g_{kl} = P_{kl} - \frac{1}{2} P g_{kl} + \frac{1}{V}\,(V_{kl} - g_{kl}\Delta V) \end{aligned}\right\} \quad (159\,c)$$

Im statischen Felde der Punktladung m gilt, wenn man das λ-Glied fortläßt:

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - c^2\frac{r-\alpha}{r}dt^2 \quad (200)$$

$$\alpha = 2\frac{Gm}{c^2} \quad (201)$$

f) Das Prinzip der kleinsten Wirkung:

$$\delta\int\sqrt{-g}\left[H + \varkappa\left(M - 2\sum_i P^i\Phi_i\right)\right]dX = 0 \quad (190)$$

oder

$$\delta\int\left[R + 2\lambda + \varkappa\left(M - 2\sum_i P^i\Phi_i\right)\right]d\Sigma = 0 \quad (190a)$$

Dabei ist

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\,M)}{\partial g^{kl}} = \sqrt{-g}\,T_{kl} \quad (188)$$

Für das elektromagnetische Feld und den leeren Raum gilt nach der Maxwellsehen Theorie

$$M = |\mathfrak{M}|^2 = -\frac{1}{2}\sum_{h\,k\,l} g^{hk}g^{il}\mathfrak{M}_{hl}\mathfrak{M}_{ik}. \quad (189\ a)$$