P. 22 to P 53
P. 98 to P 122.

فہرست مضامین

علم مثلث تحلیلی (حصہ دوم)

باب	مضمون	صفحہ

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

حصۂ دوم

علم مثلث تمام

باب اوّل

سلسلۂ قوت نما اور لوگارتمی

۱ - باب ہذا میں ہم جملہ $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی تفصیل لا کی قوتوں میں معلوم کرینگے جہاں ا اور لا سے حقیقی مقادیر مراد ہیں - اور نیز $\text{لوگ}_{\text{و}}$ (۱ + لا) کی تفصیل دریافت کرینگے جہاں لا حقیقی ہے اور ایک سے کم ہے اور و ایک ایسی مقدار کو تعبیر کرتا ہے - جسکی تعریف آگے چل کر کیجائیگی -

۲ - مقدار $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی قیمت معلوم کرو جب ن لا انتہا بڑھ جائے اور حقیقی ہو -

چونکہ $\frac{1}{\text{ن}} < 1$ اسلئے مسئلہ ثنائی سے

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{ن} \times \frac{1}{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1} \times \frac{1}{\text{ن}^2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3\times 2\times 1} \times \frac{1}{\text{ن}^3} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{\text{ن}}}{\underline{\lfloor 2}} + \frac{\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)}{\underline{\lfloor 3}} + \frac{\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{3}{\text{ن}}\right)}{\underline{\lfloor 4}} + \cdots$$

یہ سلسلہ ن کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے۔ خواہ یہ قیمتیں کتنی ہی بڑی کیوں نہ ہوں۔ پس اگر ن کو غیر متناہی بنا دیا جائے تو بائیں جانب کا رکن

$$= 1 + 1 + \frac{1}{\underline{\lfloor 2}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 3}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 4}} + \cdots\cdots$$ تا لاتناہی

اسلئے جب ن غیر متناہی ہو تو جملہ $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ذیل کے سلسلہ کے حاصل جمع سے تعبیر ہوگی۔

$$1 + 1 + \frac{1}{\underline{\lfloor 2}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 3}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 4}} + \cdots\cdots$$ تا لاتناہی

اس سلسلہ کے حاصل جمع کو ہمیشہ علامت ' و ' سے تعبیر کرتے ہیں

اسلئے $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{و}$

اس جگہ $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}$ سے مراد $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ہے

جب ن لا انتہا بڑھ جائے

نتیجہ صریح- اگر ہم ن کی بجائے $\frac{۱}{م}$ لکھیں تو ظاہر ہے کہ جب ن مائل بہ لا انتہا ہی ہو تو م صفر کے نہایت قریب ہو جائیگا اس لئے

$$\underset{م \to ۰}{\text{نہا}} \left(۱ + م\right)^{\frac{۱}{م}} = \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = و$$

۳- مقدار 'و' ایک متناہی یا محدود مقدار ہے۔

چونکہ $\frac{۱}{\lfloor ۳} < \frac{۱}{۲ \times ۲} < \frac{۱}{۲^۲}$

اور $\frac{۱}{\lfloor ۴} < \frac{۱}{۲ \times ۲ \times ۲} < \frac{۱}{۲^۳}$

اسلئے $و < ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \ldots$ تا لا انتہا

$$< ۱ + \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}}$$

$$< ۱ + ۲ \text{ یعنی } < ۳$$

نیز صریحاً $و > ۲$

اسلئے 'و' کی قیمت ۲' اور ۳ کے درمیان ہوگی

اگر ہم سلسلہ متذکرہ بالا کی رقوم کی کافی تعداد لیں تو اُنکو جمع کرنے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$و = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵\ldots$$

۴- مقدار 'و' متباین ہے

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ یہ کسی کسر $\frac{ن}{ق}$ کے مساوی ہے۔ جہاں

ن اور ق کوئی صحیح اعداد ہیں۔

تب $\frac{\text{ن}}{\text{ق}} = 1 + 1 + \frac{1}{\underline{2|}} + \frac{1}{\underline{3|}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\underline{\text{ق}|}} + \frac{1}{\underline{\text{ق}+1|}} + \frac{1}{\underline{\text{ق}+2|}} + \cdots\cdots \quad (1)$

مساوات بالا کے دونوں طرف $\underline{\text{ق}|}$ سے ضرب دے دو۔ اس طرح سے سلسلہ (۱) کی سب رقمیں صحیح اعداد بن جائینگی بجز $\frac{\underline{\text{ق}|}}{\underline{\text{ق}+1|}}$ کے اور اسکے بعد کی رقوم کے۔

اسلئے $\text{ن} \times \underline{\text{ق}-1|} =$ ایک صحیح عدد $+ \frac{\underline{\text{ق}|}}{\underline{\text{ق}+1|}} + \frac{\underline{\text{ق}|}}{\underline{\text{ق}+2|}} + \frac{\underline{\text{ق}|}}{\underline{\text{ق}+3|}} + \cdots\cdots$

یعنی ایک صحیح عدد $= \frac{1}{\text{ق}+1} + \frac{1}{(\text{ق}+1)(\text{ق}+2)} + \frac{1}{(\text{ق}+1)(\text{ق}+2)(\text{ق}+3)} + \cdots\cdots \quad (2)$

لیکن اس مساوات کی بائیں جانب کا رکن $> \frac{1}{\text{ق}+1}$ اور

$$< \frac{1}{\text{ق}+1} + \frac{1}{(\text{ق}+1)^2} + \frac{1}{(\text{ق}+1)^3} + \cdots\cdots$$

یعنی $< \frac{1}{\text{ق}+1} \div \left(1 - \frac{1}{\text{ق}+1}\right)$

$\frac{\text{ق}+1}{\text{ق}} \times \frac{1}{\text{ق}+1}$

یعنی $> \frac{۱}{\text{ق}}$

لہذا مساوات (۲) کی بائیں جانب کے رکن کی قیمت $\frac{۱}{\text{ق}+۱}$ اور $\frac{۱}{\text{ق}}$ کے درمیان واقع ہے یعنی ایک کسر ہے اور اسلئے بائیں جانب کے رکن کے مساوی نہیں ہوسکتی۔

اس طرح سے "و" کو متوافق فرض کرنا غلط ثابت ہوا۔

لہذا "و" ایک متباین مقدار ہے۔

۵ ۔ سلسلۂ قوت نما۔ اگر لا حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{و}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \cdots \text{ تا لاتناہی}$$

اور نیز ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا لوک}_{\text{و}}\text{ا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}}(\text{لوک}_{\text{و}}\text{ا})^{۲} + \cdots \text{ تا لاتناہی}$$

اگر لا ایک سے بڑا ہو تو

$$\left\{\left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right\}^{\text{لا}} = \left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}}$$

$$= ۱ + \text{ن لا} \times \frac{۱}{\text{ن}} + \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-۱)}{۲\times۱} \times \frac{۱}{\text{ن}^{۲}} + \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-۱)(\text{ن لا}-۲)}{۳\times۲\times۱} \times \frac{۱}{\text{ن}^{۳}} + \cdots$$

$$= ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-\frac{۱}{\text{ن}})}{۲\times۱} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-\frac{۱}{\text{ن}})(\text{لا}-\frac{۲}{\text{ن}})}{۳\times۲\times۱} + \cdots$$

اس جملہ میں فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑھ جاتا ہے
تب دائیں جانب کا رکن حسب دفعہ (۲) $\text{و}^{\text{لا}}$ بن جاتا ہے اور بائیں جانب کا رکن

$$\text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor\underline{۲}} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor\underline{۳}} + \ldots\ldots\ldots \text{ ہو جاتا ہے}$$

اسلئے

$$\text{و}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor\underline{۲}} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor\underline{۳}} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \ldots (\text{۱})$$

فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{و}^{\text{ج}}$ یعنی $\text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$
پس سلسلہ (۱) میں لا کی بجائے ج لا لکھنے سے

$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{ج لا}} = \text{۱} + \text{ج لا} + \frac{\text{ج}^{۲}\text{لا}^{۲}}{\lfloor\underline{۲}} + \frac{\text{ج}^{۳}\text{لا}^{۳}}{\lfloor\underline{۳}} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

$$\therefore \text{ا}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor\underline{۲}}\left(\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}\right)^{۲}$$

$$+ \frac{}{\lfloor\underline{۳}}\left(\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}\right)^{۳} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \ldots (\text{۲})$$

۶ — یہ ثابت کیا جا سکتا ہے (دیکھو سی سمتھ الجبرا دفعہ ۲۸۷) کہ دفعہ ما قبل کا سلسلہ (۱) اور بنابریں سلسلہ (۲) ہر دو لا کی حقیقی قیمتوں کے واسطے ستدق سلسلے ہیں۔

۷ — مشق ۱ — ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲}\left(\text{و} - \frac{۱}{\text{و}}\right) = \text{۱} + \frac{۱}{\lfloor\underline{۳}} + \frac{۱}{\lfloor\underline{۵}} + \ldots \text{ تا لاتناہی}$

دفعہ ۵ کی مساوات (۱) میں لا کی بجائے بالترتیب ۱ اور -۱ رکھنے سے

$$\text{و} = ۱ + \frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۴}} + \ldots\ldots$$ تا لامتناہی

$$\text{و}^{-۱} = ۱ - \frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۲}} - \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۴}} - \ldots\ldots$$ تا لامتناہی

پس عمل تفریق سے

$$\text{و}^{۱} - \text{و}^{-۱} = ۲\left(۱ + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۵}} + \ldots\ldots\right)$$

یعنی $\frac{۱}{۲}\left(\text{و} - \frac{۱}{\text{و}}\right) = ۱ + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۵}} + \ldots\ldots$ تا لامتناہی

مشق ۲ - سلسلۂ ذیل کو جمع کرو۔

$$۱ + \frac{۱+۲}{\underline{|۲}} + \frac{۱+۲+۳}{\underline{|۳}} + \frac{۱+۲+۳+۴}{\underline{|۴}} + \ldots$$ تا لامتناہی

ن ویں رقم $= \frac{۱+۲+۳+\ldots\text{ن}}{\underline{|\text{ن}}} = \frac{\frac{۱}{۲}\text{ن}(\text{ن}+۱)}{\underline{|\text{ن}}}$

$$= \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ن}+۱}{\underline{|\text{ن}-۱}} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{(\text{ن}-۱)+۲}{\underline{|\text{ن}-۱}}\right] = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{\underline{|\text{ن}-۲}} + \frac{۲}{\underline{|\text{ن}-۱}}\right]$$

بشرطیکہ ن > ۲

اسی طرح سے (ن-۱) ویں رقم $= \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{\underline{|\text{ن}-۳}} + \frac{۲}{\underline{|\text{ن}-۲}}\right]$

....

چوتھی رقم .... $= \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۲}{\underline{|۳}}\right]$

تیسری رقم .... $= \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۲}{\underline{|۲}}\right]$

دوسری رقم $= \frac{۱}{۲}\left[۱ + \frac{۲}{\lfloor ۱}\right]$

پہلی رقم $= \frac{۱}{۲}\left[\frac{۲}{۱}\right]$

پس عمل جمع سے سلسلہ مذکور

$$= \frac{۱}{۲}\left[۱ + \frac{۱}{\lfloor ۱} + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \cdots \text{تا لاتناہی}\right]$$

$$+ \frac{۱}{۲}\times ۲\left[۱ + \frac{۱}{\lfloor ۱} + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \cdots \text{تا لاتناہی}\right]$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{و} + \text{و} = \frac{۳}{۲}\,\text{و}$$

۸ ــ لوکارثمی سلسلہ ــ اگر ما حقیقی ہو اور تعداداً < ۱

تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{ما}) = \text{ما} - \frac{۱}{۲}\,\text{ما}^{۲} + \frac{۱}{۳}\,\text{ما}^{۳} - \frac{۱}{۴}\,\text{ما}^{۴} + \cdots \text{تا لاتناہی}$$

دفعہ ۵ کی مساوات ۲ میں فرض کرو کہ

$$\text{ا} = ۱ + \text{ما}$$

تب $(۱+\text{ما})^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا}\,\text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{ما})$

$$+ \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲}\left\{\text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{ما})\right\}^{۲} + \cdots\cdots \quad (۱)$$

لیکن ما حقیقی ہے اور تعداداً ایک سے کم ہے

اسلیئے

$$(\text{۱}+\text{ما})^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا ما} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{۱})}{\lfloor\text{۲}} \text{ما}^{\text{۲}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{۱})(\text{لا}-\text{۲})}{\lfloor\text{۳}} \text{ما}^{\text{۳}} + \ldots \quad (\text{۲})$$

چونکہ ما تعداداً کم ہے ایک سے، اسلیئے

مساوات (۱) اور مساوات (۲) دونوں میں بائیں جانب کے سلسلے باہم مساوی ہونگے۔ اور نیز مستدق ہونگے۔ علاوہ ازیں یہ بھی آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر (۲) میں بائیں جانب کے سلسلہ کو لا کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جائے تو یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ لہٰذا ہم لا کی برابر قوتوں والی رقوم کے سروں کو مساوی لکھ سکتے ہیں۔

اس طرح سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ما}) = \text{ما} - \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{۱}\times\text{۲}} + \frac{(-\text{۱})(-\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}} \text{ما}^{\text{۳}}$$

$$+ \frac{(-\text{۱})(-\text{۲})(-\text{۳})}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}\times\text{۴}} \cdot \text{ما}^{\text{۴}} + \ldots\ldots \text{تا لاتناہی}$$

$$\text{یعنی لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ما}) = \text{ما} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ما}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{ما}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{ما}^{\text{۴}} + \ldots \text{لاتناہی} \quad (\text{۳})$$

۹۔ اگر ما = ۱ تو دفعہ ماقبل کا سلسلہ

$$= \text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}} + \ldots\ldots \text{تا لاتناہی (جو صریحاً مستدق ہے)}$$

اگر ما = -۱ تو سلسلہ مذکور

$$= -\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}} \ldots\ldots \text{تا لاتناہی (جو صریحاً متسع ہے)}$$

لہٰذا یہ سلسلہ ما کی اُن تمام قیمتوں کے لیئے جو -۱ اور ۱ کے درمیان ہوں درست ہوگا اور علاوہ ازیں اس حالت میں بھی درست رہے گا جب ما = ۱،

لیکن اگر $م = -۱$ تو یہ سلسلہ دائیں جانب کے رکن کا مترادف نہ ہوگا۔

۱۰۔ اساس ق و پر کے لوکارتم معلوم کرو۔

مندرجہ بالا لوکارتمی سلسلہ میں فرض کرو کہ $م = ۱$ تب

$$لوک_و ۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots\ldots \text{تا لا متناہی} \ldots (۱)$$

فرض کرو کہ $م = \frac{۱}{۲}$ تب

$$لوک_و ۳ - لوک_و ۲ = لوک_و \frac{۳}{۲} = لوک_و \left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲^۳} - \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲^۴} + \ldots\ldots (۲)$$

فرض کرو کہ $م = \frac{۱}{۳}$ تب

$$لوک_و ۴ - لوک_و ۳ = لوک_و \left(۱ + \frac{۱}{۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳^۳} - \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳^۴} + \ldots\ldots (۳)$$

اگر ان مساواتوں کی رقوم کی کافی تعداد لی جائے تو ہم $لوک_و ۲$، $لوک_و ۳$، $لوک_و ۴$ کی قیمتیں محسوب کر سکتے ہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ کافی درجہ تک درست نتائج حاصل کرنے کے واسطے سلسلہ بالا میں بہت زیادہ رقوم لینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ اسلئے ہم ایک زیادہ سہولت بخش سلسلہ معلوم کرتے ہیں۔

۱۱۔ دفعہ ۸ کی رو سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ما})=\text{ما}-\frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{۲}}+\frac{\text{ما}^{\text{۳}}}{\text{۳}}-\frac{\text{ما}^{\text{۴}}}{\text{۴}}+\ldots\ldots \qquad (\text{۱})$$

ما کی علامت تبدیل کرنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}-\text{ما})=-\text{ما}-\frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{۲}}-\frac{\text{ما}^{\text{۳}}}{\text{۳}}-\frac{\text{ما}^{\text{۴}}}{\text{۴}}-\ldots\ldots \qquad (\text{۲})$$

ان دونوں سلسلوں کے درست ہونیکے لئے لازمی ہے ۔ کہ ما کی قیمت تعداداً ایک سے کم ہو ۔

عمل تفریق سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ما})-\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}-\text{ما})=\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{۱}+\text{ما}}{\text{۱}-\text{ما}}$$

$$=\text{۲}\left[\text{ما}+\frac{\text{ما}^{\text{۳}}}{\text{۳}}+\frac{\text{ما}^{\text{۵}}}{\text{۵}}+\ldots\ldots\right]\ldots\ldots \qquad (\text{۳})$$

فرض کرو کہ $\text{ما}=\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$ جہاں م اور ن دونوں صحیح

اعداد ہیں

اور $\text{م} > \text{ن}$

پس $\frac{\text{۱}+\text{ما}}{\text{۱}-\text{ما}}=\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

تب مساوات (۳) حسب ذیل ہو جائے گی

$$\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{م}}{\text{ن}}=\text{۲}\left[\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}+\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^{\text{۳}}+\frac{\text{۱}}{\text{۵}}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^{\text{۵}}+\ldots\right]\ldots \qquad (\text{۴})$$

مساوات (۴) میں م کی بجائے ۲ اور ن کی بجائے ۱ لکھنے سے لوک و ۲ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے اور م کی بجائے ۳ اور ن کی بجائے ۲ لکھنے سے [لوک و ۳ - لوک و ۲] معلوم ہو سکتا ہے
اور اس سے لوک و ۳ کی قیمت نکل سکتی ہے۔
اسی عمل سے کسی اور عدد کا لوکارتم اساس و پر معلوم ہو سکتا ہے

۱۲- اساس ۱۰ پر کے لوکارتم معلوم کرو

گزشتہ دفعہ کے لوکارتم اساس و پر نکالے گئے ہیں ان کو بالعموم نیپری یا طبعی لوکارتم کے نام سے موسوم کرتے ہیں ہم ان لوکارتموں کو اساس ۱۰ پر کے لوکارتموں میں منتقل کر سکتے ہیں۔
اگر ع کوئی عدد ہو تو دفعہ ۱۵۴ (حصہ اول) کی رو سے

$$\text{لوک}_{و}\ ع = \text{لوک}_{۱۰}\ ع \times \text{لوک}_{و}\ ۱۰$$

$$\therefore\ \text{لوک}_{۱۰}\ ع = \text{لوک}_{و}\ ع \times \frac{۱}{\text{لوک}_{و}\ ۱۰}$$

اب حسب دفعہ گزشتہ لوک و ۱۰ کی قیمت نکل سکتی ہے جس سے معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{۱}{\text{لوک}_{و}\ ۱۰} = ۰.۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹\ldots$$

اسلئے $\text{لوک}_{۱۰}\ ع = \text{لوک}_{و}\ ع \times ۰.۴۳۴۲۹۴۴۸\ldots$

پس ثابت ہوا کہ اگر کسی عدد کا لوکارتم اساس ۱۰ پر معلوم کرنا

مقصود ہو تو اس عدد کا جو لوکارتم اساس قو پر ہو اس کو مقدار ۰٫۴۳۴۲۹۴۴۸...... سے ضرب دیتے ہیں اس کسر اعشاریہ کو ضارب معیّن کہتے ہیں اور بالعموم 'مب' سے تعبیر کرتے ہیں۔

امثلہ ۱

ثابت کرو کہ

(۱) $۱ + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۴}} + \frac{۱}{\underline{|۶}} + \cdots\cdots = \frac{۱}{۲}(\text{قو} + \text{قو}^{-۱})$

(۲) $(۱ + \frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \cdots)(۱ - \frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۲}} - \frac{۱}{\underline{|۳}} + \cdots) = ۱$

(۳) $(۱ + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۴}} + \frac{۱}{\underline{|۶}} + \cdots)^{۲} = ۱ + (۱ + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۵}} + \cdots)^{۲}$

(۴) $۱ + \frac{۲}{\underline{|۳}} + \frac{۳}{\underline{|۵}} + \frac{۴}{\underline{|۷}} + \cdots = \frac{\text{قو}}{۲}$

(۵) $\frac{۲}{\underline{|۳}} + \frac{۴}{\underline{|۵}} + \frac{۶}{\underline{|۷}} + \cdots\cdots = \text{قو}^{-۱}$

(۶) $\frac{\frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۴}} + \frac{۱}{\underline{|۶}} + \cdots\cdots}{۱ + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۵}} + \cdots\cdots} = \frac{\text{قو} - ۱}{\text{قو} + ۱}$

(۷) $۱ + \frac{۲^{۳}}{\underline{|۲}} + \frac{۳^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{۴^{۳}}{\underline{|۴}} + \cdots\cdots = ۵\text{قو}$

ذیل کے سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

(۸) $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots\cdots$ تا لاتناہی

(۹) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^4} + \cdots$ تالاتناہی

ثابت کرو کہ

(۱۰) $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}}\right)^3 + \cdots\cdots$

$= \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا} - \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ب}$

(۱۱) $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{1 + \text{لا}}{1 - \text{لا}} = 2\left(\text{لا} + \frac{1}{3}\text{لا}^3 + \frac{1}{5}\text{لا}^5 + \cdots\cdots\right.$ تالاتناہی $\left.\right)$

(۱۲) $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{لا} + 1}{\text{لا} - 1} = 2\left(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{3\,\text{لا}^3} + \frac{1}{5\,\text{لا}^5} + \cdots\right.$ تالاتناہی $\left.\right)$

اگر $\text{لا} > 1$

(۱۳) $\text{لوک}_{\text{و}}(1 + 3\,\text{لا} + 2\,\text{لا}^2) = 3\,\text{لا} - \frac{5\,\text{لا}^2}{2} + \frac{9\,\text{لا}^3}{3} - \frac{17\,\text{لا}^4}{4}$

$+ \cdots + (-1)^{\text{ن}-1} \times \frac{1 + 2^{\text{ن}}}{\text{ن}} \times \text{لا}^{\text{ن}} + \cdots\cdots\cdots$

بشرطیکہ ۲ لا بڑا نہ ہو ۱، سے

(۱۴) $2\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} - \text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا} + 1) - \text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا} - 1) = \frac{1}{\text{لا}^2} + \frac{1}{2\,\text{لا}^4}$

$+ \frac{1}{3\,\text{لا}^6} + \cdots\cdots\cdots$ اگر $\text{لا} > 1$

(۱۵) $\text{لوک}_{\text{و}}\,2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots\cdots$ تالاتناہی

(۱۶) $\text{لوک}_{\text{و}}\,2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7} + \cdots$

تالاتناہی

(۱۷) $\text{مس}\,\text{ط} + \frac{1}{3}\,\text{مس}^3\,\text{ط} + \frac{1}{5}\,\text{مس}^5\,\text{ط} + \cdots$

$= \frac{1}{2}\,\text{لوک} \frac{\text{جم}\left(\text{ط} - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{4}\right)}$ اگر $\text{ط} < \frac{\pi}{4}$

(۱۸) اگر طہ > $\frac{\pi}{2}$ اور < π تو ثابت کرو کہ

(۱) جب طہ + $\frac{1}{3}$ جب^{3} طہ + $\frac{1}{5}$ جب^{5} طہ + ... تا لاتناہی

= ۲ [مم $\frac{طہ}{2}$ + $\frac{1}{3}$ مم^{3} $\frac{طہ}{2}$ + $\frac{1}{5}$ مم^{5} $\frac{طہ}{2}$ + ... تا لاتناہی]

اور اگر طہ > صفر اور < $\frac{\pi}{2}$ تو ثابت کرو کہ

(۲) $\frac{1}{2}$ جب^{2} طہ + $\frac{1}{4}$ جب^{4} طہ + $\frac{1}{6}$ جب^{6} طہ + ... تا لاتناہی

= ۲ [مس^{2} $\frac{طہ}{2}$ + $\frac{1}{3}$ مس^{6} $\frac{طہ}{2}$ + $\frac{1}{5}$ مس^{10} $\frac{طہ}{2}$ + ... تا لاتناہی]

(۱۹) اگر مس^{2} طہ < ۱ تو ثابت کرو کہ

مس^{2} طہ − $\frac{1}{2}$ مس^{4} طہ + $\frac{1}{3}$ مس^{6} طہ − .... تا لاتناہی

= جب^{2} طہ + $\frac{1}{2}$ جب^{4} طہ + $\frac{1}{3}$ جب^{6} طہ + ... تا لاتناہی

(۲۰) ثابت کرو کہ اگر ۲ طہ، π کا ضعف نہ ہو تو

لوک مم طہ = جم ۲ طہ + $\frac{1}{3}$ جم^{3} ۲ طہ + $\frac{1}{5}$ جم^{5} ۲ طہ + ... تا لاتناہی

(۲۱) ثابت کرو کہ {لوک$_{و}$ (۱ + لا)}^{2} کی تفصیل میں لا^{ن} کا سر

$\frac{2(-1)^{ن}}{ن}$ [۱ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ + ... + $\frac{1}{ن-1}$] ہوگا

(۲۲) — دفعات ۱۱، ۱۲ کی مدد سے ثابت کرو کہ

لوک$_{10}$ ۲ = ۰.۳۰۱۰۳ .... ء

اور لوک ۳ = ... ۲۷۷۴۳، ۱۲

(۲۳) منحنی ما = لوک لا کو مرتسم کرو

[اگر لا منفی ہو تو ما خیالی ہوگا - جب لا، صفر کے مساوی ہو تو ما = -∞ جب لا = ۱ تو ما کی قیمت صفر ہوگی - جب لا، مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو تو ما ہمیشہ مثبت رہیگا - جب لا، لا متناہی ہو تو ما بھی لا متناہی ہوگا]

(۲۴) منحنی ما = لوک لا کو مرتسم کرو - اس کا اور گزشتہ مشق کے منحنی کا ہندسی ربط معلوم کرو [دفعہ ۱۵۳ حصہ اول کو استعمال کرو]

(۲۵) منحنی ما = ہ^لا کو مرتسم کرو -

۱۳ - اگلے باب میں ذیل کی دو انتہائی قیمتوں کے استعمال کی ضرورت واقع ہوگی -

۱۴ - ثابت کرو کہ $\left(\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے جب ن لا انتہا بڑھ جائے

$$\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}=\left(1-\text{جب}^{2}\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \left(\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}=\left(1-\text{جب}^{2}\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}\right)^{\frac{\text{ن}}{2}}=\left[\left(1-\text{جب}^{2}\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}\right)^{-\frac{1}{\text{جب}^{2}\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}}\right]^{-\frac{\text{ن}}{2}\text{جب}^{2}\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}$$

اب $\left(-\text{جب}^{2}\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}\right)$ کی بجائے م فرض کرنے سے

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left\{1-\text{جب}^{2}\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}\right\}^{-\frac{1}{\text{جب}^{2}\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}}=\underset{\text{م}\to 0}{\text{نہا}}\left\{1+\text{م}\right\}^{\frac{1}{\text{م}}}=\text{و}\ldots\ldots$$ [نتیجہ صریح دفعہ ۲]

نیز از روئے دفعہ ۲۳۴ (حصہ اول)

$$\frac{\text{ن}}{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$$

$$=\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{۲}\times\frac{\text{ع}^{۲}}{۲\text{ن}}=۱\times۰=۰\qquad[\text{بشرطیکہ ن}=\infty]$$

پس جب ن مائل بہ لاتناہی ہو تو

$$\left[\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right]^{\text{ن}}=\text{فو}=۱$$

متبادل ثبوت ۔ لوکارثمی سلسلہ کے استعمال سے بھی یہ انتہائی قیمت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے کیونکہ $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کو ی کے مساوی فرض کرنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ی}=\text{ن}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}=\frac{\text{ن}}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$$

$$=\frac{\text{ن}}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(۱-\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)$$

$$=-\frac{\text{ن}}{۲}\left(\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\frac{۱}{۲}\,\text{جب}^{۴}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\frac{۱}{۳}\,\text{جب}^{۶}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\cdots\right)\text{۔}$$

..... دفعہ ۸

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ بلحاظ قیمت کے $\left(\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)$ اور سلسلہ $\left(\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\text{جب}^{۴}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\text{جب}^{۶}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\cdots\ \text{تا لاتناہی}\right)$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

یعنی یہ سلسلہ $\text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ اور $\dfrac{\text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}{1-\text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے

یعنی $\text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ اور $\text{مس}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے

لہذا (- لوک ی) ذیل کی دو رقوم کے درمیان واقع ہوگا۔

$$\frac{\text{ن}}{2}\,\text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ن}}{2}\,\text{مس}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}} \qquad \dots\dots\dots \quad (1)$$

لیکن

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\text{ن}}{2}\,\text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}{\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}\right)^2 \times \frac{\text{عہ}^2}{2\,\text{ن}} = 1\times 0 = 0$$

$$\text{اور}\ \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\text{ن}}{2}\,\text{مس}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \left\{\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}{\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}\right)^2 \times \frac{1}{\text{جم}^2 \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}} \times \frac{\text{عہ}^2}{2\,\text{ن}}\right\}$$

$= 1\times 1\times 0 = 0$ دفعہ ۲۳۴ حصہ اول

اس سے معلوم ہوا کہ (۱) کی دونوں مقداروں کی انتہائی قیمت صفر ہے

پس لوک ی بھی صفر ہوگا، یعنی $\text{ی} = 1$

۱۵- ثابت کرو کہ اگر ن لا انتہا بڑھ جائے تو $\left(\dfrac{\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}{\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$

کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے۔

دفعہ ۲۳۳ حصہ اول میں بتایا جا چکا ہے کہ جب طہ، طہ، اور مس طہ بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہوتے ہیں۔
بنابریں جب $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$، $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$، اور مس $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ بھی صعودی ترتیب میں ہیں۔

اسلئے ۱، $\frac{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}$، $\frac{1}{\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}$ بھی صعودی ترتیب میں ہیں —

پس $\left(\frac{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی قیمت ۱، اور $\left(\frac{1}{\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کے

درمیان واقع ہوگی یعنی $\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ ۱، اور $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوگا

لیکن دفعہ گزشتہ کی رو سے اگر ن لاانتہا بڑھ جائے تو $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے

اسلئے جب ن لاانتہا بڑھ جائے تو $\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ایک کے نہایت قریب ہوگی

۱۶ — دفعہ ۲ میں ایک بات غور طلب ہے۔
ہمیں زیادہ موثق طور پر یہ ثابت کرنا چاہیئے کہ اگر ن لامتناہی ہو تو فی الحقیقت مساوات (۱) کی بائیں جانب کے سلسلہ کی قیمت سلسلہ (۲) کے

مساوی ہوتی ہے۔

سلسلہ (۱) کی (ق + ۱) ویں رقم پر، یعنی

$$\frac{\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{ق}-1}{\text{ن}}\right)}{\lfloor\underline{\text{ق}}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

پر غور کرو۔

اگر ا، ب، ج، .... سب مثبت مقداریں ہوں اور ان میں سے ہر رقم ایک سے کم ہو تو

$$(1-\text{ا})(1-\text{ب}) = 1-\text{ا}-\text{ب}+\text{ا ب} > 1-\text{ا}-\text{ب}$$

اور $(1-\text{ا})(1-\text{ب})(1-\text{ج}) > (1-\text{ا}-\text{ب})(1-\text{ج}) > 1-\text{ا}-\text{ب}-\text{ج}$

علیٰ ہذا القیاس

یعنی بالآخر $(1-\text{ا})(1-\text{ب})(1-\text{ج})\ldots > 1-(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}+\ldots\ldots)$

پس (۱) کا شمار کنندہ ایک اور ذیل کے سلسلہ کے درمیان واقع ہوگا

$$1-\left(\frac{1}{\text{ن}}+\frac{2}{\text{ن}}+\frac{3}{\text{ن}}+\ldots\ldots\frac{\text{ق}-1}{\text{ن}}\right)$$

یعنی ایک اور $1-\frac{\text{ق}(\text{ق}-1)}{2\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوگا

اسلیئے مقدار (۱)، $\frac{1}{\lfloor\underline{\text{ق}}}$ اور $\frac{1}{\lfloor\underline{\text{ق}}}-\frac{1}{2\text{ن}}\times\frac{1}{\lfloor\underline{\text{ق}-2}}$ کے درمیان واقع ہوگی

لہذا دفعہ ۲ کے پورے سلسلہ (۱) کی قیمت سلسلہ

$1+1+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\ldots\ldots\ldots$ تا لاتناہی اور سلسلہ

$1+1+\left(\frac{1}{\lfloor\underline{2}}-\frac{1}{2\text{ن}}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor\underline{3}}-\frac{1}{2\text{ن}}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor\underline{4}}-\frac{1}{2\text{ن}}\times\frac{1}{\lfloor\underline{2}}\right)+\ldots$ لاتناہی

کے درمیان واقع ہوگی۔

بالفاظ دیگر $1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots\dots$ تالامتناہی

اور $\Big[1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots\dots$ لامتناہی

$- \frac{1}{2^{\text{ن}}} \Big(1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots$ تالامتناہی$\Big) \Big]$ کے درمیان واقع ہوگی

اب بموجب دفعہ ۶ سلسلہ $1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots$ تالامتناہی

مستدق ہے۔ اسلئے مقدار $\frac{1}{2^{\text{ن}}} \Big(1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots \Big)$ کی قیمت

صفر ہو جائے گی جب ن مائل بہ لامتناہی ہو

اسلئے بالآخر دفعہ (۲) کا سلسلہ (۱) انتہائی صورت میں ذیل کا سلسلہ بن جائے گا۔

$1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \dots\dots$ تالامتناہی

اسی قسم کا استدلال دفعہ ۵ کے سلسلوں اور نیز دفعات ۳۲، ۳۳ کے سلسلوں پر بھی صادق آئیگا۔

باب دوم

ملتف مقداریں

Complex

ڈی مائرے کا مسئلہ

۱۷- ملتف مقداریں- اگر لا اور ما دونوں حقیقی ہوں تو مقدار لا + ما √-۱ کو مقدار ملتف کہتے ہیں- لہذا ثابت ہوا کہ ملتف مقدار ایسی دو رقوم کے حاصل جمع پر مشتمل ہوتی ہے- جن میں سے ایک رقم بالتمام حقیقی ہوتی ہے اور دوسری بالتمام غیر حقیقی (یعنی خیالی)

۱۸ - ہر ایک ملتف مقدار کو ہمیشہ ر (جم طہ + √-۱ جب طہ) کی شکل میں لکھ سکتے ہیں- جہاں ر، اور طہ دونوں حقیقی ہیں-

فرض کرو کہ لا + ما √-۱ = ر (جم طہ + √-۱ جب طہ)

= ر جم طہ + √-۱ ر جب طہ

مساوات بالا کے دونوں جانب کے حقیقی اور خیالی حصوں کو الگ الگ مساوی کرنے سے

$\text{ر جم طہ} = \text{لا}$ .... (۱)

اور $\text{ر جب طہ} = \text{ما}$ .... (۲)

اور ان کے مربعوں کو باہم جمع کرنے سے

$$\text{ر}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 \quad \text{یعنی} \quad \text{ر} = \pm\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

رواجاً جذر ہذا کی علامت مثبت لیتے ہیں۔ پس ر کی قیمت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے۔

تب (۱) اور (۲) سے

$$\text{جم طہ} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}} \quad \text{اور} \quad \text{جب طہ} = \frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}}$$

لا اور ما کی قیمتیں خواہ کچھ ہی کیوں نہ ہوں، $+\pi$ اور $-\pi$ کے درمیان طہ کی ایک اور صرف ایک ہی قیمت ہوگی جو اوپر کی دونوں مساواتوں کو پورا کرے گی۔

پس ثابت ہوا کہ مقدار $\text{لا} + \text{ما}\sqrt{-1}$ ہمیشہ $\text{ر}(\text{جم طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب طہ})$ کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے۔

تعریف۔ مقدار $+\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ کو متذکرہ بالا ملتف مقدار کا **مقیاس** کہتے ہیں اور طہ کی وہ قیمت جو $-\pi$ اور $+\pi$ کے درمیان واقع ہو اور ہر دو روابط

$$\text{جم طہ} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}} \quad \text{اور جب طہ} = \frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}}$$

کو پورا کرے

جملہ لا + √-۱ ما کی سعت کی خاص قیمت کہلاتی ہے

مثال — مشق ۱ — مقدار ۱ + √-۱ کو مذکورہ بالا شکل میں ظاہر کرو

یہاں ۱ + √-۱ = ر (جم ط + √-۱ جب ط)

جس سے ر جم ط = ۱

ر جب ط = ۱

پس ر = + √۱+۱ = + √۲

لہذا جم ط = ۱/√۲ اور جب ط = ۱/√۲

یعنی ط = π/۴

اس لئے ۱ + √-۱ = √۲ [جم π/۴ + √-۱ جب π/۴]

پس رقم مذکور کا مقیاس √۲ ہے اور اس کی سعت کی خاص قیمت π/۴ ہے۔

مشق ۲ — رقم -۱ + √-۳ کو مذکورہ بالا شکل میں منتقل کرو۔

اس جگہ -۱ + √-۱ × √۳ = ر (جم ط + √-۱ جب ط)

پس ر جم ط = -۱ اور ر جب ط = √۳

∴ ر = + √۱+۳ = +۲

لہذا جم ط = -۱/۲ اور جب ط = √۳/۲

یعنی ط = ۲π/۳

$$\therefore -1 + \sqrt{-3} = 2\left[\text{جم}\,\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{2\pi}{3}\right]$$

مشق ۳ — مقدار $-1-\sqrt{-3}$ کو مذکورہ بالا شکل میں لاؤ۔

یہاں $\text{ر جم طہ} = -1$ اور $\text{ر جب طہ} = -\sqrt{3}$

پس $\text{ر} = +\sqrt{1+3} = +2$ لہٰذا $\text{جم طہ} = -\frac{1}{2}$ اور $\text{جب طہ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

چونکہ ہم طہ کے لئے ایسی قیمت منتخب کرتے ہیں جو $-\pi$ اور π کے درمیان واقع ہو اسلئے $\text{طہ} = -\frac{2\pi}{3}$

$$\therefore -1 - \sqrt{-3} = 2\left[\text{جم}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{-1}\,\text{جب}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

۲۰ — دفعہ ۱۸ کی مساواتیں

$$\text{جم طہ} = \frac{\text{لا}}{+\sqrt{\text{لا}^2+\text{ما}^2}} \quad \text{اور} \quad \text{جب طہ} = \frac{\text{ما}}{+\sqrt{\text{لا}^2+\text{ما}^2}}$$

طہ کی ایک سے زیادہ قیمتوں سے پوری ہوتی ہوں۔ اس کی وجہ یہ ہے۔ کہ کسی زاویہ کی جیب اور جیب [illegible] قیمتوں میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جب اس زاویہ میں 2π کے کسی ضعف کا اضافہ کر دیا جائے۔

پس اگر طہ سے ایسی قیمت مراد لی جائے جو π اور $-\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ اور مذکورہ بالا روابط کو پورا کرے تو وہ سب زوایا بھی جو $2\text{ن}\pi + \text{طہ}$ سے تعبیر کئے جا سکتے ہیں روابط مذکورہ کو پورا کرینگے۔ یا بالفاظ دیگر ہم یوں کہہ سکتے ہیں

کہ ایک ملتف مقدار کی سمت کثیر القیمت ہوتی ہے اور سمت کی خاص قیمت سے اس کی وہ قیمت مراد ہوتی ہے جو $+\pi$ اور $-\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ اس جگہ ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے

اگر ہم ط کی خاص قیمت میں ۲π کا کوئی ضعف جمع کر دیں۔ تو اس کی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت حاصل ہوگی

خلاصہ یہ ہے کہ

اگر ط سے ایسا زاویہ مراد ہو جو $-\pi$ اور $+\pi$ کے درمیان واقع ہو اور ذیل کی دونوں مساواتوں

$$\text{جم ط} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲}}$$

$$\text{جب ط} = \frac{\text{ما}}{+\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲}} \qquad \text{(۱)}$$

کو پورا کرے

$$\text{تو لا} + \sqrt{-۱}\,\text{ما} = \sqrt{\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲}\left[\text{جم}(۲\text{ن}\pi + \text{ط}) + \sqrt{-۱}\,(۲\text{ن}\pi + \text{ط})\right]$$

مقدار $۲\text{ن}\pi + \text{ط}$ کو سمت اور ط کو اس سمت کی خاص قیمت کہتے ہیں۔

اختصار کی غرض سے مساوات (۱) کو بالعموم $\text{مس ط} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ یعنی $\text{ط} = \text{مس}^{-۱}\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ لیکن یہ یاد رہے کہ یہاں ط سے مراد صرف وہ زاویہ ہے جو ہر دو مساوات

(۱) کو پورا کرتا ہے۔

۲۱۔ ڈی مائیرے کا مسئلہ۔ ن کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو مثبت ہو یا منفی صحیح عدد ہو یا مکسور، ہر حالت میں

(جم طہ + $\sqrt{-1}$ جب طہ)^ن

کی قیمت یا اسکی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت

(جم ن طہ + $\sqrt{-1}$ جب ن طہ) ہوگی

صورت اوّل۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تب عمل ضرب سے

(جم عہ + $\sqrt{-1}$ جب عہ) (جم بہ + $\sqrt{-1}$ جب بہ)

= جم عہ جم بہ − جب عہ جب بہ + $\sqrt{-1}$ [جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ]

= جم (عہ + بہ) + $\sqrt{-1}$ جب (عہ + بہ)

اسی طرح سے (جم عہ + $\sqrt{-1}$ جب عہ) (جم بہ + $\sqrt{-1}$ جب بہ) („ „ „ $\sqrt{-1}$ جب جہ)

= [جم (عہ + بہ) + $\sqrt{-1}$ جب (عہ + بہ)] [جم جہ + $\sqrt{-1}$ جب جہ]

= جم (عہ + بہ) جم جہ − جب (عہ + بہ) جب جہ]

+ $\sqrt{-1}$ [جب (عہ + بہ) جم جہ + جم (عہ + بہ) جب جہ]

= جم (عہ + بہ + جہ) + $\sqrt{-1}$ جب (عہ + بہ + جہ)

ظاہر ہے کہ ہم جہاں تک چاہیں اس عمل کو وسعت دے سکتے ہیں۔

لہذا (جم عہ + $\sqrt{-۱}$ جب عہ)(جم بہ + $\sqrt{-۱}$ جب بہ)

× (جم جہ + $\sqrt{-۱}$ جب جہ) ...... ن اجزائے ضربی تک

= جم (عہ + بہ + جہ + ... ن رقوم تک)

+ $\sqrt{-۱}$ جب (عہ + بہ + جہ + ... ن رقوم تک)

اس میں عہ = بہ = جہ = ... = طہ رکھنے سے

(جم طہ + $\sqrt{-۱}$ جب طہ)^{ن} = جم ن طہ + $\sqrt{-۱}$ جب ن طہ

صورت دوم ۔ فرض کرو کہ ن ایک منفی صحیح عدد ہے۔ اور -م کے برابر ہے۔ قوت نماؤں کے معمولی ضوابط کے بموجب

(جم طہ + $\sqrt{-۱}$ جب طہ)^{ن} = (جم طہ + $\sqrt{-۱}$ جب طہ)$^{-م}$

$$= \frac{۱}{(\text{جم طہ} + \sqrt{-۱}\ \text{جب طہ})^{م}} = \frac{۱}{\text{جم م طہ} + \sqrt{-۱}\ \text{جب م طہ}}$$ ...حسب سابق

$$= \frac{\text{جم م طہ} - \sqrt{-۱}\ \text{جب م طہ}}{(\text{جم م طہ} + \sqrt{-۱}\ \text{جب م طہ})(\text{جم م طہ} - \sqrt{-۱}\ \text{جب م طہ})}$$

$$= \frac{\text{جم م طہ} - \sqrt{-1}\ \text{جب م طہ}}{\text{جم}^{2}\ \text{م طہ} + \text{جب}^{2}\ \text{م طہ}}$$

$$= \text{جم م طہ} - \sqrt{-1}\ \text{جب م طہ}$$

$$= \text{جم}\,(-\text{م})\ \text{طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,(-\text{م})\ \text{طہ}$$

$$= \text{جم ن طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب ن طہ}$$

صورت سوم۔ فرض کرو کہ ن ایک کسر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کے مساوی ہے جہاں ق سے کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے اور ف کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

گزشتہ صورتوں کی رو سے $\left(\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}\right)^{\text{ق}}$

$$= \text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}} \times \text{ق} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}} \times \text{ق} = \text{جم طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب طہ}$$

اسلئے $\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}$ ایک ایسی قیمت ہے جسکی ق ویں قوت $\text{جم طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب طہ}$ ہے۔

لہذا $\text{جم طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب طہ}$ کے ق ویں جذروں میں سے ایک جذر $\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}$ ہے۔

یعنی $\left(\text{جم طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب طہ}\right)^{\frac{1}{\text{ق}}}$ کی ق قیمتوں میں سے ایک

قیمت جم $\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-1}$ جب $\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}$ ہے ان دونوں رقوم میں سے ہر ایک کی ف ویں قوت لو۔ تب ظاہر ہے کہ

$(\text{جم طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب طہ})^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

$$\left(\text{جم}\ \frac{\text{طہ}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{\text{طہ}}{\text{ق}}\right)^{\text{ف}}$$

یعنی جم $\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-1}$ جب $\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}}$ ہے

۲۲۔ بالعموم $\sqrt{-1}$ کو حرف خ سے یا اختصاراً خ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اور بعد ازیں یہی طریق کتابت قائم رکھا جائے گا۔

اسلئے جم طہ + خ جب طہ سے مراد جم طہ + $\sqrt{-1}$ جب طہ ہو گی

مشق ۱۔ اختصار کرو

$$\frac{(\text{جم ۳ طہ} + \text{خ جب ۳ طہ})^{5}\ (\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ})^{3}}{(\text{جم ۵ طہ} + \text{خ جب ۵ طہ})^{7}\ (\text{جم ۲ طہ} - \text{خ جب ۲ طہ})^{5}}$$

ظاہر ہے کہ $(\text{جم ۳ طہ} + \text{خ جب ۳ طہ}) = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{3}$

اور $\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ} = \text{جم}(-\text{طہ}) + \text{خ جب}(-\text{طہ}) = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{-1}$

نیز $(\text{جم ۵ طہ} + \text{خ جب ۵ طہ}) = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{5}$

اور $\text{جم ۲ طہ} - \text{خ جب ۲ طہ} = \text{جم}(-\text{۲ طہ}) + \text{خ جب}(-\text{۲ طہ})$

= (جم طہ + خ جب طہ)$^{-۲}$

پس مذکورہ بالا رقم

$$= \frac{(\text{جم طہ + خ جب طہ})^{۱۵}\ (\text{جم طہ + خ جب طہ})^{-۳۰}}{(\text{جم طہ + جب طہ})^{۳۵}\ (\text{جم طہ + خ جب طہ})^{-۱۰}}$$

= (جم طہ + خ جب طہ)$^{-۱۳}$ = جم ۱۳ طہ − خ جب ۱۳ طہ

مشق ۲ — اگر ۲ جم طہ = لا + $\frac{۱}{\text{لا}}$ اور ۲ جم فہ = ما + $\frac{۱}{\text{ما}}$ تو ثابت کرو کہ

لا^{م} ما^{ن} + $\frac{۱}{\text{لا}^{م}\ \text{ما}^{ن}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

۲ جم (م طہ + ن فہ) ہوگی

ظاہر ہے کہ لا^{۲} − ۲ لا جم طہ = −۱

∴ (لا − جم طہ)^{۲} = −۱ + جم^{۲} طہ = −جب^{۲} طہ

∴ لا = جم طہ + خ جب طہ

یعنی لا^{م} = جم م طہ + خ جب م طہ

اور $\frac{۱}{\text{لا}^{م}}$ = جم م طہ − خ جب م طہ

اسی طرح سے ما = جم فہ + خ جب فہ

یعنی ما^{ن} = جم ن فہ + خ جب ن فہ

اور $\frac{۱}{\text{ما}^{ن}}$ = جم ن فہ − خ جب ن فہ

∴ لا^{م} ما^{ن} + $\frac{۱}{\text{لا}^{م}\ \text{ما}^{ن}}$ = (جم م طہ + خ جب م طہ)(جم ن فہ + خ جب ن فہ)

+ (جم م طہ − خ جب م طہ)(جم ن فہ − خ جب ن فہ)

= جم (م طہ + ن فہ) + خ جب (م طہ + ن فہ)

+ جم (م طہ + ن فہ) – خ جب (م طہ + ن فہ)

= ۲ جم (م طہ + ن فہ)

اسی طرح سے یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}}}{\text{ما}^{\text{ن}}} + \frac{\text{ما}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{م}}}$$

کی ایک قیمت ۲ جم (م طہ – ن فہ) ہوگی

مشق ۳ – اگر جب عہ + جب بہ + جب جہ = جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۰

تو ثابت کرو کہ

جم ۳ عہ + جم ۳ بہ + جم ۳ جہ = ۳ جم (عہ + بہ + جہ)

اور جب ۳ عہ + جب ۳ بہ + جب ۳ جہ = ۳ جب (عہ + بہ + جہ)

علم مثلث میں بہت سی ایسی متماثل مساواتیں ہیں جو الجبرا کی متماثل مساواتوں سے اخذ کی گئی ہیں۔ مشق ہذا ایسی مساواتوں کی ایک مثال ہے۔

ہم کو الجبرا سے معلوم ہے کہ اگر ا + ب + ج = ۰

تو $\text{ا}^{۳} + \text{ب}^{۳} + \text{ج}^{۳}$ = ۳ ا ب ج

فرض کرو کہ ا = جم عہ + خ جب عہ

ب = جم بہ + خ جب بہ

ج = جم جہ + خ جب جہ

چونکہ ا + ب + ج = ۰

∴ (جم عہ + خ جب عہ)^{۳} + (جم بہ + خ جب بہ)^{۳} + (جم جہ + خ جب جہ)^{۳}

= ۳ (جم عہ + خ جب عہ) (جم بہ + خ جب بہ) (جم جہ + خ جب جہ)

یعنی ڈی مائیورے کے مسئلہ سے

(جم ۳ عہ + جم ۳ بہ + جم ۳ جہ) + خ (جب ۳ عہ + جب ۳ بہ + جب ۳ جہ)

= ۳ جم (عہ + بہ + جہ) + ۳ خ جب (عہ + بہ + جہ)

حقیقی حصوں کو آپس میں اور خیالی حصوں کو آپس میں الگ الگ برابر کرنے سے نتائجِ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

امثلہ ۲

ذیل کی رقوم کو ر (جم طہ + خ جب طہ) کی شکل میں منتقل کرو۔

(۱) ۱ + خ (۲) -۱ - خ (۳) -$\sqrt{۳}$ + خ

(۴) ۳ + ۴ خ (۵) ۱ + $\sqrt{۲}$ + خ (۶) ۲ - $\sqrt{۳}$ + خ

اختصار کرو۔

(۷) (جم طہ - خ جب طہ)^{۱۰} ÷ (جم عہ + خ جب عہ)^{۱۲}

(۸) (جم عہ + خ جب عہ) (جم بہ + خ جب بہ) ÷ (جم جہ + خ جب جہ) (جم لہ + خ جب لہ)

(۹) (جم ۲ طہ - خ جب ۲ طہ)^{۷} (جم ۳ طہ + خ جب ۳ طہ)$^{-۵}$ ÷ (جم ۴ طہ + خ جب ۴ طہ)^{۱۲} (جم ۵ طہ - خ جب ۵ طہ)$^{-۶}$

(۱۰) (جم $\frac{\pi}{۶}$ - خ جب $\frac{\pi}{۶}$)$^{\frac{۳}{۲}}$ ÷ (جم $\frac{\pi}{۶}$ + خ جب $\frac{\pi}{۶}$)$^{\frac{۱}{۲}}$

(۱۱) (جم عہ + خ جب عہ)^{۴} ÷ (جب بہ + خ جم بہ)^{۵}

(۱۲) $\left\{(\text{جم ط} - \text{جم فہ}) + \text{خ}\,(\text{جب ط} - \text{جب فہ})\right\}^{\text{ن}}$

$+\left\{(\text{جم ط} - \text{جم فہ}) - \text{خ}\,(\text{جب ط} - \text{جب فہ})\right\}^{\text{ن}}$

(۱۳) ثابت کرو کہ

$$(\text{جب لا} + \text{خ جم لا})^{\text{ن}} = \text{جم ن}\left(\frac{\pi}{۲} - \text{لا}\right) + \text{خ جب ن}\left(\frac{\pi}{۲} - \text{لا}\right)$$

اور

$$\left(\frac{۱ + \text{جب فہ} + \text{خ جم فہ}}{۱ + \text{جب فہ} - \text{خ جم فہ}}\right)^{\text{ن}} = \text{جم}\left(\frac{\text{ن}\pi}{۲} - \text{ن فہ}\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\text{ن}\pi}{۲} - \text{ن فہ}\right)$$

اگر جم عہ + خ جب عہ، جم بہ + خ جب بہ، جم جہ + خ جم جہ (خ جب جہ)
اور جم لہ + خ جم لہ کی بجائے
بالترتیب لا، ما، ی اور سے رکھے جائیں۔ تو ثابت کرو کہ

(۱۴) $$(\text{لا} + \text{ما})(\text{سے} + \text{ی}) = ۴\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{جہ} - \text{لہ}}{۲}\left[\text{جم}\,\frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۲} + \text{خ جب}\,\frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۲}\right]$$

(۱۵) $$\frac{1}{(\text{لا} - \text{ما})(\text{ی} - \text{سے})} = \frac{1}{۴}\,\text{قم}\,\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}\,\text{قم}\,\frac{\text{جہ} - \text{لہ}}{۲}\left[\text{جم}\,\frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۲} - \text{خ جب}\,\frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۲}\right]$$

(۱۶) $$\text{لا ما} + \text{سے ی} = ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{لہ}}{۲} \times \left[\text{جم}\,\frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۲} + \text{خ جب}\,\frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۲}\right]$$

۱۷ــ مساوات مماثلہ

$$(\text{ا}^2-\text{ب}^2)(\text{ج}^2-\text{د}^2)=(\text{ج}^2-\text{ب}^2)(\text{ا}^2-\text{د}^2)+(\text{ا}^2-\text{ج}^2)(\text{ب}^2-\text{د}^2)$$

میں ا کی بجائے جم عہ + خ جب عہ اور اسی طرح ب، ج، د کی بجائے متشابہ رقوم لکھ کر ذیل کی مساوات متماثلہ ثابت کرو

$$\text{جب}(\text{عہ}-\text{بہ})\ \text{جب}(\text{جہ}-\text{لہ})=\text{جب}(\text{عہ}-\text{لہ})\ \text{جب}(\text{جہ}-\text{بہ})$$
$$+\ \text{جب}(\text{عہ}-\text{جہ})\ \text{جب}(\text{بہ}-\text{لہ})$$

۱۸ — مساوات متماثلہ

$$\frac{(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})}+\frac{(\text{لا}-\text{ج})(\text{لا}-\text{ا})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})}=1$$

میں لا کی بجائے جم ۲ طہ + خ جب ۲ طہ اور اسی طرح ا، ب اور ج کی بجائے متشابہ رقوم لکھ کر ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب}(\text{طہ}-\text{بہ})\ \text{جب}(\text{طہ}-\text{جہ})}{\text{جب}(\text{عہ}-\text{بہ})\ \text{جب}(\text{عہ}-\text{جہ})}\ \text{جب}^2(\text{طہ}-\text{عہ})+\text{دو اور متشابہ رقوم}=0$$

اسی طرح سے مساوات $\frac{1}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})}=\frac{1}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ا})}-\frac{1}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ب})}$

سے متماثل مساواتیں مستنبط کرو

۱۹ — ثابت کرو کہ

$$(\text{ا}+\text{ب خ})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}+(\text{ا}-\text{ب خ})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}=2(\text{ا}^2+\text{ب}^2)^{\frac{\text{م}}{2\text{ن}}}\ \text{جم}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\ \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$$

۲۰ — اگر $2\ \text{جم طہ}=\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ $2\ \text{جم ر طہ}=\text{لا}^{\text{ر}}+\frac{1}{\text{لا}^{\text{ر}}}$

۲۱۔ اگر ۲ جم طہ = لا + $\frac{۱}{\text{لا}}$ اور ۲ جم فہ = ما + $\frac{۱}{\text{ما}}$ ، ....

تو ثابت کرو کہ ۲ جم (طہ + فہ + ...) = لا ما ی ..... + $\frac{۱}{\text{لا ما ی ....}}$

۲۲۔ اگر لاِ = جم $\frac{\pi}{۲^{\text{ر}}}$ + $\sqrt{-۱}$ جب $\frac{\pi}{۲^{\text{ر}}}$ تو ثابت کرو کہ

لا$_۱$ × لا$_۲$ × لا$_۳$ .... تا لامتناہی = جم π

۲۳۔ ڈی مائیورے کے مسئلہ کو استعمال کر کے ذیل کی مساوات کو حل کرو

لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ - لا + ۱ = ۰

۲۴۔ دفعہ ۱۲ میں ہم نے صرف یہ ثابت کیا ہے کہ

جم $\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-۱}$ جب $\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}$

جملہ (جم طہ + $\sqrt{-۱}$ جب طہ)$^{\frac{۱}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے صرف ایک قیمت ہے، باقی قیمتیں بھی آسانی سے دریافت ہو سکتی ہیں۔

(جم طہ + $\sqrt{-۱}$ جب طہ)$^{\frac{۱}{\text{ق}}}$ = {جم (۲ ن π + طہ) + $\sqrt{-۱}$ جب (۲ ن π + طہ)}$^{\frac{۱}{\text{ق}}}$

جہاں ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے

اور موخرالذکر مقدار کی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت

جم $\frac{\text{۲ ن π + طہ}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-۱}$ جب $\frac{\text{۲ ن π + طہ}}{\text{ق}}$ ہے

اگر ہم ن کو سلسلہ وار ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ... (ق - ۱) کے برابر فرض کریں تو مقادیر

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ق}}\,،$$

$$\text{جم}\,\frac{۲\pi+\text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{۲\pi+\text{ط}}{\text{ق}}\,،$$

$$\text{جم}\,\frac{۴\pi+\text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\,\text{حب}\,\frac{۴\pi+\text{ط}}{\text{ق}}\,،$$

$$\text{جم}\,\frac{۶\pi+\text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{۶\pi+\text{ط}}{\text{ق}}\,،\ \ldots\ldots(۱)$$

. . . .

میں سے ہر ایک، جملہ $\left(\text{جم ط} + \sqrt{-1}\,\text{جب ط}\right)^{\frac{1}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہو گی۔

یہ امر قابل غور ہے کہ بڑی سے بڑی قیمت جو ن کو دی جا سکتی ہے وہ (ق - ۱) ہے۔ کیونکہ اگر ن کو ق، ق + ۱، ق + ۲ .... کے برابر فرض کریں تو ان سے وہی نتائج حاصل ہوں گے جو ن کو بالترتیب ۰، ۱، ۲ وغیرہ کے مساوی فرض کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

نیز مقادیر (۱) میں سے کوئی دو مقداریں ایک دوسرے کے مساوی نہیں کیونکہ ان میں جتنے زاویے شامل ہیں اُن میں سے کسی دو زاویوں کا فرق ہر حالت میں ۲π سے کم ہے اور ظاہر ہے کہ جب دو زاویوں کا فرق ۲π سے کم ہو تو یہ ناممکن ہے کہ اُن کی جیوب بھی برابر ہوں

اور جیوب التمام بھی۔

خلاصہ یہ ہے کہ جملہ

$$\text{جم}\,\frac{2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}}{\text{ق}}+\sqrt{-1}\;\text{جب}\,\frac{2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}}{\text{ق}}$$

میں ن کو علی التواتر ۰، ۱، ۲، ۳، .... (ق - ۱) قیمتیں دینے سے ہم

$$(\text{جم ط}+\sqrt{-1}\;\text{جب ط})^{\frac{1}{\text{ق}}}$$

کی ق (اور صرف ق ہی) مختلف قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں

۴۴ - اگر لا + خ ما کی شکل کی کوئی رقم دی ہوئی ہو تو ہم دفعہ ماقبل کی رو سے رقم مذکور کے کسی جذر کے واسطے مثلثی جملے معلوم کر سکتے ہیں

دفعہ ۲۰ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ لا + خ ما

$$=\text{ص}\left[\text{جم}(2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط})+\sqrt{-1}\;\text{جب}(2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط})\right]$$

$$\text{جہاں ص}=+\sqrt{\text{لا}^2+\text{ما}^2}$$

اور ط ایک ایسا زاویہ ہے کہ جم ط $=\frac{\text{لا}}{\text{ص}}$ اور جب ط $=\frac{\text{ما}}{\text{ص}}$

اسلئے $(\text{لا}+\text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ق}}}$

$$=\text{ص}^{\frac{1}{\text{ق}}}\left[\text{جم}\,\frac{2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}}{\text{ق}}+\sqrt{-1}\;\text{جب}\,\frac{2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}}{\text{ق}}\right]^{\frac{1}{\text{ق}}}$$

اس میں ن کو علی التواتر ۰، ۱، ۲، .... (ق - ۱) قیمتیں دینے سے ق مطلوبہ جذر معلوم ہوتے ہیں۔

۲۵ - مشق (۱) $\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$= \left[\text{جم}\left(2\,\text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{-1}\,\text{جب}\left(2\,\text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

$$= \text{جم}\left(\frac{2\,\text{ن}\,\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{-1}\,\text{جب}\left(\frac{2\,\text{ن}\,\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$$

ن کو علی التواتر ۰، ۱، ۲، ۳، قیمتیں دینے سے جوابات مطلوبہ کے لئے مندرجہ ذیل رقوم حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{جم}\,\frac{\pi}{12} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{12},$$

$$\text{جم}\,\frac{7\pi}{12} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{7\pi}{12},$$

$$\text{جم}\,\frac{13\pi}{12} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{13\pi}{12},$$

$$\text{جم}\,\frac{19\pi}{12} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{19\pi}{12}$$

یہ امر قابل غور ہے کہ ن کو ۴ کے برابر لینے سے رقم مذکور کی کوئی نئی (پانچویں) قیمت حاصل نہیں ہوتی کیونکہ اس حالت میں ذیل کی رقم حاصل ہوگی۔

$$\text{جم}\left(2\pi + \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{-1}\,\text{جب}\left(2\pi + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \text{جم}\ \frac{\pi}{12} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{\pi}{12}$$

اور یہ رقم مندرجہ بالا چار رقوم میں سے پہلی رقم ہے۔ جسکو ہم معلوم کر چکے ہیں۔

اسی طرح ن = ۵، اور ن = ۶، ن = ۷، سے، اُن چار رقوم میں سے بالترتیب دوسری تیسری اور چوتھی رقوم حاصل ہونگی۔

علیٰ ہذا القیاس

مشق ۲۔ $(-1)^{\frac{1}{3}}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

چونکہ $\text{جم}\ \pi = -1$ اور $\text{جب}\ \pi = 0$

اسلئے $(-1)^{\frac{1}{3}} = (\text{جم}\ \pi + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \pi)^{\frac{1}{3}}$

$$= \left[\text{جم}\,(2\,\text{ن}\,\pi + \pi) + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,(2\,\text{ن}\,\pi + \pi)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \text{جم}\ \frac{2\,\text{ن}\,\pi + \pi}{3} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{2\,\text{ن}\,\pi + \pi}{3}$$

ن کو بالترتیب ۰، ۱، ۲، کے برابر لینے سے مطلوبہ قیمتیں حسب ذیل حاصل ہونگی۔

$\text{جم}\ \frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{\pi}{3}$ یعنی $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$ ،

$\text{جم}\ \pi + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \pi$ یعنی -1 ،

اور $\text{جم}\ \frac{5\pi}{3} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{5\pi}{3}$ یعنی $\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$

مشق ۳۔ ذیل کی مساوات کو حل کرو۔

$$\text{لا}^9 - \text{لا}^5 + \text{لا}^4 - 1 = 0$$

مساوات مذکورہ = (لا^{5} + ۱)(لا^{4} − ۱) = ۰

پہلے جزو ضربی سے لا^{5} = −۱ = جم (۲ن + ۱) π + √−۱ جیب (۲ن + ۱) π

اسلئے لا = [جم (۲ن + ۱) π + √−۱ جب (۲ن + ۱) π]$^{\frac{1}{5}}$

= جم (۲ن + ۱) π / ۵ + √−۱ جب (۲ن + ۱) π / ۵

ن کو حسب سابق ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ قیمتیں دینے سے جوابات مطلوبہ حسب ذیل حاصل ہونگے ۔

جم ۳۶° + √−۱ جب ۳۶°،

جم ۱۰۸° + √−۱ جب ۱۰۸°،

جم ۱۸۰° + √−۱ جب ۱۸۰°

جم ۲۵۲° + √−۱ جب ۲۵۲°

اور جم ۳۲۴° + √−۱ جب ۳۲۴°

دوسرے جزو ضربی سے لا^{4} = ۱ = جم ۲ن π + √−۱ جب ۲ن π

∴ لا = [جم ۲ن π + √−۱ جب ۲ن π]$^{\frac{1}{4}}$

= جم ن π / ۲ + √−۱ جب ن π / ۲

اگر ن کو علی التواتر ۰، ۱، ۲، ۳، کے برابر فرض کیا جائے تو جوابات حسب ذیل حاصل ہونگے ۔

۱، √−۱، −۱، −√−۱

پس مساوات زیر بحث کی سب اصلیں معلوم ہوگئیں

امثلہ ۳

ذیل کی رقوم کی سب قیمتیں معلوم کرو

۱۔ $1^{\frac{1}{3}}$

۲۔ $(-1)^{\frac{1}{6}}$

۳۔ $(-\text{خ})^{\frac{1}{6}}$

۴۔ $(-1)^{\frac{1}{10}}$

۵۔ $(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{4}}$

۶۔ $(1+\sqrt{-3})^{\frac{11}{3}}$

۷۔ $(1-\sqrt{-3})^{\frac{1}{4}}$

۸۔ $(\sqrt{3}+\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$

۹۔ $(\sqrt{3}-\sqrt{-1})^{\frac{2}{5}}$

۱۰۔ $16^{\frac{1}{4}}$

۱۱۔ $32^{\frac{1}{5}}$

۱۲۔ $(1+\sqrt{-3})^{10}+(1-\sqrt{-3})^{10}$

۱۳۔ $\left(\text{جم}\,\frac{2\pi}{3}+\text{خ جب}\,\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ کو مختصر کرو اور جواب ایسی شکل میں حاصل کرو جس میں مثلثی جملات شامل نہ ہوں۔

۱۴۔ $\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{3}+\text{خ جب}\,\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ کی چار قیمتوں کا مسلسل حاصل ضرب معلوم کرو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^{10}+11\,\text{لا}^{5}-1=0$ کی قیمتیں

$$\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}\left[\text{جم}\,\frac{2\text{ر}\pi}{5}+\text{خ جب}\,\frac{2\text{ر}\pi}{5}\right]$$ ہیں

۱۶۔ مساوات $\text{لا}^{12}-1=0$ کو حل کرو اور بتاؤ کہ اس کی کونسی اصل مساوات $\text{لا}^{4}+\text{لا}^{2}+1=0$ کو پورا کرتی ہے

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱۷۔ $لا^5 + 1 = 0$ ۱۸۔ $لا^4 + لا^3 + لا^2 + لا + 1 = 0$

۱۹۔ ثابت کرو کہ $\sqrt[ن]{(1 + ب\,خ)} + \sqrt[ن]{(1 - ب\,خ)}$ کی ن حقیقی قیمتیں ہیں۔

اس سے $\sqrt[6]{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt[6]{1 - \sqrt{-3}}$ کی حقیقی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ ایک کے ن، ن ویں جذر ایک ہندسی سلسلہ بناتے ہیں۔

۲۱۔ ایک کے سات ساتویں جذر معلوم کرو، اگر ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہو تو ثابت کرو کہ ان جذروں کی ن وین قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ بشرطیکہ ن، ۷ کا ضعف نہ ہو۔
لیکن اگر ن، ۷ کا ضعف ہو تو مجموعہ ۷ ہوگا۔

۲۶۔ ملتف مقادیر کے مسئلہ ثنائی

یہ معلوم ہے کہ اگر ن اور ے حقیقی ہوں اور ے ایک سے کم ہو تو

$$(1 + ے)^ن = 1 + ن\,ے + \frac{ن(ن-1)}{1 \times 2} ے^2$$

$$+ \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{1 \times 2 \times 3} ے^3 + \ldots\ldots \quad (1)$$

جب ے ایک ملتف مقدار ہو (یعنی $= لا + خ\,ما$) ہو اور ن اور کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو معمولی ثبوت صادق آئیگا۔

اور مسئلہ (۱) اس صورت میں بھی درست رہیگا۔

اگر ے مختلف ہو اور ن منفی ہو یا کسی کسر کے برابر ہو تو یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$۱ + ن\,ے + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}\,ے^{۲} + \ldots\ldots \quad (۲)$$

$(۱ + ے)^{ن}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہے بشرطیکہ ے کا مقیاس یعنی $+\sqrt{ا^{۲} + ما^{۲}}$ ایک سے کم ہو۔

اگر یہ مقیاس ایک کے برابر ہو تو یہ مسئلہ صرف ذیل کی صورتوں میں درست ہوگا۔

(۱) جب ن مثبت ہو اور

(۲) جب ن منفی کسر واجب ہو اور ے، -۱ کے برابر نہ ہو

اس کا ثبوت قدرے مشکل ہے اور کتاب ہذا کی وسعت سے باہر ہے۔ اسلئے ہم محض نتیجہ کو درست فرض کر لیں گے۔ طالب علم اگر چاہے تو اس مسئلہ کے متعلق مزید معلومات ہابسن کے علم مثلث دفعات ۲۱۱، ۲۱۲ سے یا کرسٹل کے الجبرا جلد دوم صفحہ ۲۶۲ سے حاصل کر سکتا ہے۔

باب سوم

جب ن طہ اور جم ن طہ کی تفصیلات
اور
جب طہ اور جم طہ کے سلسلے طہ کی قوتوں میں

۲۷۔ ڈی مائیرے کے مسئلہ کی مدد سے جم ن طہ اور جب ن طہ کی تفصیلیں طہ کے مثلثی تفاعیل کی رقوم میں معلوم ہوسکتی ہیں۔

ہمیں معلوم ہے کہ (جم ن طہ + خ جب ن طہ)

= (جم طہ + خ جب طہ)$^{\text{ن}}$

چونکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ اسلئے مسئلہ ثنائی کی رو سے (جم طہ + خ جب طہ)$^{\text{ن}}$ کی تفصیل درست ہو گی۔

پس تفصیل کرنے سے

جم ن طہ + خ جب ن طہ = جم$^{\text{ن}}$ طہ + ن جم$^{\text{ن}-۱}$ طہ خ جب طہ

+ $\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}$ جم$^{\text{ن}-۲}$ طہ خ^{۲} جب^{۲} طہ

+ $\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳}$ جم$^{\text{ن}-۳}$ طہ خ^{۳} جب^{۳} طہ + ...

اب چونکہ $\text{خ}^{۲} = -۱،\ \text{خ}^{۳} = -\text{خ}،\ \text{خ}^{۴} = ۱$ اور $\text{خ}^{۵} = \text{خ} \ldots$

اسلئے

$$\text{جم ن طہ} + \text{خ جب ن طہ} = \text{جم}^{ن}\text{طہ} + \text{خ}^{۲}\frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{جم}^{ن-۲}\text{طہ جب}^{۲}\text{طہ} \ldots$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴}\,\text{جم}^{ن-۴}\text{طہ جب}^{۴}\text{طہ} + \ldots\ldots$$

$$+\text{خ}\left[ن\,\text{جم}^{ن-۱}\text{طہ جب طہ} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳}\,\text{جم}^{ن-۳}\text{طہ جب}^{۳}\text{طہ} + \ldots\right]$$

حقیقی رقوم کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{جم ن طہ} = \text{جم}^{ن}\text{طہ} - \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{جم}^{ن-۲}\text{طہ جب}^{۲}\text{طہ} + \ldots \quad (۱)$$

اور غیر حقیقی (خیالی) رقوم کو برابر کرنے سے

$$\text{جب ن طہ} = ن\,\text{جم}^{ن-۱}\text{طہ جب طہ} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳}\,\text{جم}^{ن-۳}\text{طہ جب}^{۳}\text{طہ}$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)(ن-۴)}{\lfloor ۵}\,\text{جم}^{ن-۵}\text{طہ جب}^{۵}\text{طہ} \ldots \quad (۲)$$

اوپر کے دونوں سلسلوں کی رقوم متبادلاً مثبت اور منفی ہیں اور انمیں سے ہر ایک سلسلہ اس وقت تک جاری رہتا ہے۔ جب تک کہ شمار کنندہ کے اجزاء ضربی میں سے ایک جزو ضربی صفر نہ ہو جائے۔ جب ایک جزو ضربی صفر ہو جاتا ہے

تو سلسلہ ختم ہو جاتا ہے۔

۲۸۔ دفعہ ما قبل میں سلسلہ (۲) کو سلسلہ (۱) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{مس ن ط} = \frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ن ط}}$$

$$= \frac{\text{ن جم}^{\text{ن}-۱}\text{ط جب ط} - \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳}\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{ط جب}^{۳}\text{ط} + \ldots\ldots}{\text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} - \frac{\text{ن(ن}-۱)}{\lfloor ۲}\text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{ط جب}^{۲}\text{ط} + \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{\lfloor ۴}\text{جم}^{\text{ن}-۴}\text{ط جب}^{۴}\text{ط} + \ldots\ldots}$$

اس مساوات کی بائیں جانب کے رکن کے شمارکنندہ اور نسب نما دونوں کو $\text{جم}^{\text{ن}}\text{ط}$ پر تقسیم کرنے سے

$$\text{مس ن ط} = \frac{\text{ن مس ط} - \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳}\text{مس}^{۳}\text{ط} + \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)}{\lfloor ۵}\text{مس}^{۵}\text{ط} \ldots}{۱ - \frac{\text{ن(ن}-۱)}{\lfloor ۲}\text{مس}^{۲}\text{ط} + \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{\lfloor ۴}\text{مس}^{۴}\text{ط} \ldots}$$

۲۹۔ جب ط اور جم ط کی قیمتیں **استقراء حسابیہ** کے طریقہ سے بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔

اس طریقہ میں خیالی مقادیر کے استعمال کی ضرورت نہیں پڑتی۔ ثبوت کے لئے فرض کرو کہ سلاسل (۱) اور (۲) ن کی کسی خاص قیمت کے واسطے درست ہیں۔

چونکہ جم (ن+۱) طہ = جم ن طہ جم طہ - جب ن طہ جب طہ

اسلیئے جم ن طہ جم طہ - جب ن طہ جب طہ کی قیمت سلسلہ (۱) کو جم طہ سے ضرب دیکر اور سلسلہ (۲) کو جب طہ سے ضرب دیکر موخرالذکر حاصل ضرب کو پہلے حاصل ضرب میں سے تفریق کرنے سے معلوم ہوسکتی ہے اس حاصل تفریق کے لئے جو سلسلہ برآمد ہوتا ہے اس کی رقوم کو ترتیب دینے سے معلوم ہو گا کہ سلسلۂ محصلہ بعینہٖ وہی ہے جو سلسلہ (۱) میں ن کی بجائے (ن+۱) لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ جب (ن+۱) طہ کے لئے بھی اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔

پس ثابت ہوا کہ اگر سلاسل (۱) اور (۲) ن کی کسی ایک قیمت کے لئے درست ہوں تو لازماً ن کی اس سے بالاتر قیمت کے لئے بھی درست ہونگے۔

لیکن یہ تو ظاہر ہے کہ اگر ن = ۲ یا ۳ تو یہ سلسلے درست ہوتے ہیں، پس استقرا سے یہ سلسلے ن کی ہر قیمت کے لئے درست ہونگے۔

۳۰ - اگر غیر مساوی زوایا کی کسی تعداد کا مجموعہ دیا ہوا ہو تو ڈی مائیور کے مسلۂ سے اُنکے حاصل جمع کی جیب، یا جیب التمام یا مماس، اُن زوایا کے مماسوں کی رقوم میں معلوم ہو سکتے ہیں ہمیں معلوم ہے کہ

جم (عہ + بہ + جہ + ...) + $\sqrt{-1}$ جب (عہ + بہ + جہ + ...)

= (جم عہ + $\sqrt{-1}$ جب عہ) (جم بہ + $\sqrt{-1}$ جب بہ) (جم جہ + $\sqrt{-1}$ جب جہ) ... (۱)

اب جم عہ + خ جب عہ = جم عہ (۱ + خ مس عہ)

جم بہ + خ جب بہ = جم بہ (۱ + خ مس بہ)

....

پس مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے

جم (عہ + بہ + جہ + ...) + خ جب (عہ + بہ + جہ + ...)

= جم عہ جم بہ جم جہ ... (۱ + خ مس عہ) (۱ + خ مس بہ)

(۱ + خ مس جہ) ....

= جم عہ جم بہ جم جہ ... [۱ + خ (مس عہ + مس بہ + مس جہ + ...)

+ خ^2 (مس عہ مس بہ + مس بہ مس جہ + ...)

+ خ^3 (مس عہ مس بہ مس جہ + مس بہ مس جہ مس لہ ...)

+ .....] .... (۲)

دفعہ ۱۳۱ حصہ اول کا طریق کتابت استعمال کرنے سے یہ مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے۔

جم (عہ + بہ + جہ + ...) + خ جب (عہ + بہ + جہ + ...)

= جم عہ جم بہ جم جہ .... [۱ + خ ص۱ - ص۲ - خ ص۳ + ص۴ + خ ص۵ - ص۶]

پس مساوات بالا میں خیالی حصوں کو باہم مساوی رکھنے سے

جب (عہ + بہ + جہ + ...)

= جم عہ جم بہ جم جہ .... (ص۱ - ص۳ + ص۵ - ص۷ ....) ... (۳)

اور حقیقی حصوں کو برابر کرنے سے جم (عہ + بہ + جہ + ...)

= جم عہ جم بہ جم جہ .... (۱ - ص۲ + ص۴ - ص۶ + ص۸ ...) ... (۴)

لہذا عمل تقسیم سے

$$\text{مس}(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ}+\dots)=\frac{\text{ص}_{1}-\text{ص}_{3}+\text{ص}_{5}-\text{ص}_{7}\dots}{1-\text{ص}_{2}+\text{ص}_{4}-\text{ص}_{6}\dots}\dots\quad(5)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) میں بائیں جانب کے رکنوں کی علامات متبادلاً مثبت اور منفی ہیں۔

ربط (۵) کو استقراء حسابیہ سے دفعہ ۱۳۱ حصہ اول میں ثابت کیا جاچکا ہے۔

۱۴ ـ مشق ثابت کرو کہ ذیل کی مساوات $\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ}+\text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ}+2\,\text{ا گ جم طہ}+2\,\text{ف ب جب طہ}+\text{ج}=0$ .... کی چار اصلیں ہیں اور طہ کی اُن قیمتوں کا مجموعہ جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، ۲ نیم قطری زاویوں کا کوئی جفت ضعف ہے۔

فرض کرو کہ $\text{مس}\frac{\text{طہ}}{2}=\text{ت}$

اور چونکہ حصہ اول دفعہ ۱۱۵ کی رو سے $\text{جب طہ}=\dfrac{2\,\text{مس}\frac{\text{طہ}}{2}}{1+\text{مس}^2\frac{\text{طہ}}{2}}$

اور $\text{جم طہ}=\dfrac{1-\text{مس}^2\frac{\text{طہ}}{2}}{1+\text{مس}^2\frac{\text{طہ}}{2}}$

اسلئے مساوات بالا $=\text{ا}^2\left(\dfrac{1-\text{ت}^2}{1+\text{ت}^2}\right)^2+\text{ب}^2\left(\dfrac{2\,\text{ت}}{1+\text{ت}^2}\right)^2$

$$+2\,\text{گ ا}\,\frac{1-\text{ت}^2}{1+\text{ت}^2}+2\,\text{ف ب}\,\frac{2\,\text{ت}}{1+\text{ت}^2}+\text{ج}=0$$

یا بعد از اختصار $\text{ت}^4(\text{ا}^2-2\,\text{گ ا}+\text{ج})+4\,\text{ف ب ت}^3+\text{ت}^2(4\,\text{ب}^2-2\,\text{ا}^2+2\,\text{ج})$

$$\ldots + ۴\,ف\,ب\,ت + ا^{۲} + ۲\,گ\,ا + ج = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

اس مساوات کی صریحاً چار اصلیں ہیں۔

$$\text{نیز } ص_{۱} = \text{اصلوں کا مجموعہ} = -\frac{۴\,ف\,ب}{ا^{۲} - ۲\,ا\,گ + ج}$$

$$ص_{۲} = \text{مجموعہ دو دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = \frac{۴\,ب^{۲} - ۲\,ا^{۲} + ۲\,ج}{ا^{۲} - ۲\,گ\,ا + ج}$$

$$ص_{۳} = \text{مجموعہ تین تین اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = -\frac{۴\,ف\,ب}{ا^{۲} - ۲\,ا\,گ + ج}$$

$$ص_{۴} = \text{مجموعہ چار چار اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = \frac{ا^{۲} + ۲\,گ\,ا + ج}{ا^{۲} - ۲\,گ\,ا + ج}$$

چونکہ $ص_{۱} = ص_{۳}$ اسلئے دفعہ ماقبل سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$مس\left(\frac{ط_{۱} + ط_{۲} + ط_{۳} + ط_{۴}}{۲}\right) = \frac{ص_{۱} - ص_{۳}}{۱ - ص_{۲} + ص_{۴}} = ۰ = مس\, ن\, \pi$$

اور نسب نما $۱ - ص_{۲} + ص_{۴}$ صفر نہیں ہوتا جب تک کہ $ا^{۲}$ $ب^{۲}$ کے برابر نہ ہو۔

اسلئے $ط_{۱} + ط_{۲} + ط_{۳} + ط_{۴} = ۲ \times ن\, \pi$ نیم قطری

یعنی π نیم قطری زاویوں کا کوئی جفت ضِعف

[جو طالب علم ہندسۂ تحلیلیہ سے واقف ہے اُس سے مخفی نہیں کہ مشق ہذا ذیل کے مسئلہ کا حل ہے " اگر ایک دائرہ اور ایک قطع ناقص ایک دوسرے کو چار نقاط پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقاطِ تقاطع کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کا کوئی جفت ضِعف ہوتا ہے]

امثلہ ۴.

ثابت کرو کہ

۱ ـ جم ۴ طہ = جم^{۴} طہ − ۶ جم^{۲} طہ جب^{۲} طہ + جب^{۴} طہ

۲ ـ جب ۶ طہ = ۶ جم^{۵} طہ جب طہ − ۲۰ جم^{۳} طہ جب^{۳} طہ + ۶ جم طہ جب^{۵} طہ

۳ ـ جب ۷ طہ = ۷ جم^{۶} طہ جب طہ − ۳۵ جم^{۴} طہ جب^{۳} طہ + ۲۱ جم^{۲} طہ جب^{۵} طہ − جب^{۷} طہ

۴ ـ جم ۹ طہ = جم^{۹} طہ − ۳۶ جم^{۷} طہ جب^{۲} طہ + ۱۲۶ جم^{۵} طہ جب^{۴} طہ − ۸۴ جم^{۳} طہ جب^{۶} طہ
+ ۹ جم طہ جب^{۸} طہ

۵ ـ جم ۸ طہ = جم^{۸} طہ − ۲۸ جم^{۶} طہ جب^{۲} طہ + ۷۰ جم^{۴} طہ جب^{۴} طہ
− ۲۸ جم^{۲} طہ جب^{۶} طہ + جب^{۸} طہ

مندرجہ ذیل کی قیمتیں مس طہ کی رقوم میں لکھو

۶ ـ مس ۵ طہ ۷ ـ مس ۷ طہ ۸ ـ مس ۹ طہ

۹ ـ ثابت کرو کہ جم ۱۱ طہ اور جب ۱۱ طہ کی تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب
− ۱۱ جم طہ جب^{۱۰} طہ اور − جب^{۱۱} طہ ہیں۔

۱۰ ـ ثابت کرو کہ جب ۸ طہ اور جب ۹ طہ کی تفصیلوں میں آخری رقوم
بالترتیب − ۸ جم طہ جب^{۷} طہ اور جب^{۹} طہ ہیں۔

۱۱ ـ اگر ن کوئی طاق عدد ہو تو ثابت کرو کہ جب ن طہ اور جم ن طہ کی
تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب

$(-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جب^{ن} طہ اور ن $(-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جم طہ جب$^{ن-۱}$ طہ ہونگی۔

۱۲ ـ اگر ن کوئی جفت عدد ہو تو ثابت کرو کہ جب ن طہ اور جم ن طہ کی

تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب

ن (−۱)$^{\frac{ن-۲}{۲}}$ جم طہ جب$^{ن-۱}$ طہ اور (−۱)$^{\frac{ن}{۲}}$ جب^{ن} طہ ہونگی۔

۱۳ — اگر مساوات لا^{۳} + ف لا^{۲} + ق لا + ف = ۰ کی اصلیں عہ، بہ اور جہ ہوں تو ثابت کرو کہ سوائے ایک خاص صورت کے

مس$^{-۱}$ عہ + مس$^{-۱}$ بہ + مس$^{-۱}$ جہ = ن π نیم قطری۔

۱۴ — ثابت کرو کہ مساوات

جب ۳ طہ = ا جب طہ + ب جم طہ + ج

کی ۶ اصلیں ہیں اور طہ کی اُن چھ قیمتوں کا مجموعہ جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں π کے کسی طاق ضعف کے برابر ہے۔

۱۵ — ثابت کرو کہ مساوات

ا ھ قط طہ − ب ک قم طہ = ا^{۲} − ب^{۲}

کی چار اصلیں ہیں اور طہ کی جو چار قیمتیں اس مساوات کو پورا کرتی ہیں اُنکا حاصل جمع، ۲π کے کسی طاق ضعف کے برابر ہے۔

۱۶ — اگر طہ کی وہ تین قیمتیں جو مساوات

مس ۲ طہ = لہ مس (طہ + عہ)

کو پورا کریں طہ$_{۱}$، طہ$_{۲}$، طہ$_{۳}$ ہوں اور ان میں سے کسی دو کا فرق π کا کوئی ضعف نہ ہو تو ثابت کرو کہ

طہ$_{۱}$ + طہ$_{۲}$ + طہ$_{۳}$ + عہ، π کا کوئی ضعف ہے۔

کسی زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی تفصیلیں زاویہ مذکور کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں

۳۲- بموجب دفعہ ۲۷ جم ن طہ = $\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2!}\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\,\text{طہ}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ}$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{4!}\,\text{جم}^{\text{ن}-4}\,\text{طہ}\,\text{جب}^{4}\,\text{طہ}-\ldots\ldots$$

اگر ن طہ کو عہ کے برابر فرض کیا جائے تو

$\text{ن}\,\text{طہ}=\text{عہ}$
$\text{ن}=\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}$

$$\text{جم}\,\text{عہ}=\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}-\frac{\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-1\right)}{2!}\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\,\text{طہ}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ}$$

$$+\frac{\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-1\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-2\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-3\right)}{4!}\,\text{جم}^{\text{ن}-4}\,\text{طہ}\left(\text{جب}^{4}\,\text{طہ}\right)-\ldots\ldots$$

$$=\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}-\frac{\text{عہ}(\text{عہ}-\text{طہ})}{2!}\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\,\text{طہ}\left(\frac{\text{جب}\,\text{طہ}}{\text{طہ}}\right)^{2}+\frac{\text{عہ}(\text{عہ}-\text{طہ})(\text{عہ}-2\,\text{طہ})(\text{عہ}-3\,\text{طہ})}{4!}\,\text{جم}^{\text{ن}-4}\,\text{طہ}\left(\frac{\text{جب}\,\text{طہ}}{\text{طہ}}\right)^{4}$$

$$-\ldots\ldots\quad(1)$$

اس مساوات میں طہ کو لاانتہا چھوٹا بنادو اور عہ کو مستقل رکھو جس سے ن لاانتہا بڑا بن جائے گا۔

تب $\frac{\text{جب}\,\text{طہ}}{\text{طہ}}$ کی انتہا ایک ہوگی اور نیز $\left(\frac{\text{جب}\,\text{طہ}}{\text{طہ}}\right)$ کی سب قوتوں کی انتہا بھی ایک ہوگی۔ (دفعہ ۱۵)

نیز جم طہ کی انتہا بھی ایک ہوگی اور جم طہ کی دیگر قوتوں کی انتہا بھی ایک ہوگی۔ (دفعہ ۱۴)

اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\text{جم عہ} = \text{۱} - \frac{\text{عہ}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{عہ}^{\text{۴}}}{\underline{|\text{۴}}} - \frac{\text{عہ}^{\text{۶}}}{\underline{|\text{۶}}} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

(سلسلہ ہذا کا مقابلہ دفعہ ۱۶ کے سلسلہ سے کرو)

۳۳ — جب عہ کی تفصیل عہ کی رقوم میں

بموجب دفعہ ۲۷

$$\text{جب ن طہ} = \text{ن جم}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{ طہ جب طہ}$$

$$- \frac{\text{ن (ن} - \text{۱)(ن} - \text{۲)}}{\underline{|\text{۳}}} \text{ جم}^{\text{ن}-\text{۳}}\text{ طہ جب}^{\text{۳}}\text{ طہ} + \ldots\ldots$$

حسب سابق ن طہ کو عہ کے برابر فرض کرنے سے

$$\text{جب عہ} = \frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\text{ جم}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{ طہ جب طہ} - \frac{\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}} - \text{۱}\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}} - \text{۲}\right)}{\underline{|\text{۳}}}\text{ جم}^{\text{ن}-\text{۳}}\text{ طہ جب}^{\text{۳}}\text{ طہ}$$

$$+ \frac{\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}} - \text{۱}\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}} - \text{۲}\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}} - \text{۳}\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}} - \text{۴}\right)}{\underline{|\text{۵}}}\text{ جم}^{\text{ن}-\text{۵}}\text{ طہ جب}^{\text{۵}}\text{ طہ} + \ldots\ldots$$

$$= \text{عہ جم}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{ طہ}\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right) - \frac{\text{عہ(عہ} - \text{طہ)(عہ} - \text{۲ طہ)}}{\underline{|\text{۳}}}\text{ جم}^{\text{ن}-\text{۳}}\text{ طہ}\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right)^{\text{۳}} + \ldots\ldots$$

حسب دفعہ ماقبل طہ کو لاانتہا چھوٹا بنانے اور عہ کو مستقل رکھنے سے

$$\text{جب عہ} = \text{عہ} - \frac{\text{عہ}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \frac{\text{عہ}^{\text{۵}}}{\underline{|\text{۵}}} - \frac{\text{عہ}^{\text{۷}}}{\underline{|\text{۷}}} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

[دفعہ ۱۶ سے مقابلہ کرو]

۳۴ — دفعات ۳۲ اور ۳۳ کے سلسلوں کی مانند مس طہ کے لئے

کوئی ایسا سلسلہ نہیں ہے جسکی رقوم کا تسلسل کسی آسان قانون پر مبنی ہو۔
بہر حال ہم مس ط کے لئے ایک سلسلہ ط کی پانچویں قوت تک معلوم کرینگے۔

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جیب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{ط - \frac{ط^{3}}{\underline{|3}} + \frac{ط^{5}}{\underline{|5}} - \cdots\cdots}{1 - \frac{ط^{2}}{\underline{|2}} + \frac{ط^{4}}{\underline{|4}} - \cdots\cdots}$$

$$= \left(ط - \frac{ط^{3}}{6} + \frac{ط^{5}}{120} - \cdots\right)\left[1 - \left(\frac{ط^{2}}{2} - \frac{ط^{4}}{24} + \cdots\right)\right]^{-1}$$

$$= \left(ط - \frac{ط^{3}}{6} + \frac{ط^{5}}{120} - \cdots\right)\left[1 + \left(\frac{ط^{2}}{2} - \frac{ط^{4}}{24} + \cdots\right) + \left(\frac{ط^{2}}{2} - \frac{ط^{4}}{24} \cdots\right)^{2} \cdots\right]$$

مسئلہ ثنائی سے

$$= \left(ط - \frac{ط^{3}}{6} + \frac{ط^{5}}{120} - \cdots\right)\left[1 + \frac{ط^{2}}{2} - \frac{ط^{4}}{24} \cdots + \frac{ط^{4}}{4} \cdots\right]$$

$ط^{6}$ اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنے سے

$$= \left(ط - \frac{ط^{3}}{6} + \frac{ط^{5}}{120} - \cdots\right)\left(1 + \frac{ط^{2}}{2} + \frac{5}{24}\,ط^{4} \cdots\cdots\right)$$

جو اختصار کرنے اور $ط^{5}$ سے اوپر کی رقوم چھوڑ دینے سے

$$= ط + \frac{ط^{3}}{3} + \frac{2}{15}\,ط^{5}$$

اگرچہ ہم اس قاعدہ سے مس ط کے لئے سلسلہ بالا کی جتنی رقوم چاہیں معلوم کرسکتے ہیں تاہم یہ سلسلہ بہت جلد دشوار اور تکلیف دہ ہو جاتا ہے۔

۳۵ — دفعات ۳۲ اور ۳۳ میں ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ زاویہ زیر بحث میں عہ نیم قطریوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر ایسا نہ ہو تو ط کو لا انتہا چھوٹا فرض کرنے سے $\frac{\text{جیب ط}}{ط}$ کی انتہائی قیمت

ایک نہیں ہو سکتی۔

اگر زاویہ کی مقدار درجوں میں دی ہوئی ہو تو ذیل کا عمل اختیار کیا جائے گا۔

فرض کرو کہ $\text{ع}^\circ = \text{لا}$ نیم قطری یعنی

$$\frac{\text{ع}}{۱۸۰} = \frac{\text{لا}}{\pi} \quad \text{یعنی} \quad \text{لا} = \frac{\pi}{۱۸۰}\,\text{ع}$$

تب $\text{جم ع}^\circ = \text{جم لا}^{\text{نق}}$

$$= ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^۴}{\underline{|۴}} - \frac{\text{لا}^۶}{\underline{|۶}} + \cdots\cdots$$

$$= ۱ - \frac{۱}{\underline{|۲}}\,\frac{\pi^۲\text{ع}^۲}{(۱۸۰)^۲} + \frac{۱}{\underline{|۴}}\,\frac{\pi^۴\text{ع}^۴}{(۱۸۰)^۴} - \frac{۱}{\underline{|۶}}\,\frac{\pi^۶\text{ع}^۶}{(۱۸۰)^۶} + \cdots\cdots \quad \text{لاتناہی تک}$$

اسی طرح سے

$\text{حب ع}^\circ = \text{حب لا}^{\text{نق}}$

$$= \text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^۵}{\underline{|۵}} - \cdots\cdots$$

$$= \frac{\pi\text{ع}}{۱۸۰} - \frac{۱}{\underline{|۳}}\left(\frac{\pi\text{ع}}{۱۸۰}\right)^۳ + \frac{۱}{\underline{|۵}}\left(\frac{\pi\text{ع}}{۱۸۰}\right)^۵ - \cdots\cdots \quad \text{تا لاتناہی}$$

۳۶ ـ چھوٹے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام

دفعات ۳۲ اور ۳۳ کے سلسلوں کی مدد سے چھوٹے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام بآسانی معلوم ہو سکتی ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ حب ۱۰″ اور جم ۱۰″ کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہے

$$\text{چونکہ } ۱۰'' = \left(\frac{۱}{۶۰\times۶}\times\frac{\pi}{۱۸۰}\right)\text{نیم قطری} = \left(\frac{\pi}{۶۴۸۰۰}\right)^{\text{نق}}$$

$$\text{لہٰذا حب } ۱۰'' = \frac{\pi}{۶۴۸۰۰} - \frac{۱}{\underline{|۳}}\left(\frac{\pi}{۶۴۸۰۰}\right)^۳ + \frac{۱}{\underline{|۵}}\left(\frac{\pi}{۶۴۸۰۰}\right)^۵ - \cdots\cdots$$

اور $\text{جم}\,10'' = 1 - \frac{1}{\lfloor 2}\left(\frac{\pi}{648000}\right)^2 + \frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{\pi}{648000}\right)^4 - \frac{1}{\lfloor 6}\left(\frac{\pi}{648000}\right)^6 + \cdots\cdots$

اب $\frac{\pi}{648000} = $ ٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸ ......

اور $\left(\frac{\pi}{648000}\right)^2 = $ ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۰۴ ......

اور $\left(\frac{\pi}{648000}\right)^3 = $ ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۱۳۹۲۸ ....

پس اعشاریہ کے بارہویں مقام تک

جب ۱۰″ = ٫۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸

اور جم ۱۰″ = ۱ − $\frac{\text{٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۰۴}}{۲}$

= ۱ − ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۱۷۵

= ٫۹۹۹۹۹۹۹۹۹۸۸۲۵

۳۷ ـ کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت

دفعہ ۳۳ کا سلسلہ کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرنے میں بھی بہت کارآمد ہوتا ہے، اس قاعدہ کی بہترین تشریح چند مثالوں سے ہوسکتی ہے۔

مشق ۱ ـ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۱۳۴۹}{۱۳۵۰}$ تو ثابت کرو کہ زاویہ ط قریباً $\frac{۱}{۱۵}$ نق کے مساوی ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ زاویہ ط جتنا چھوٹا ہوگا $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ کی قیمت اتنی ہی ایک کے زیادہ قریب ہوگی۔ اور چونکہ اس مشق میں $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ کی قیمت قریباً ۱ کے مساوی ہے اسلئے ظاہر ہے کہ ط بہت چھوٹا ہے۔

اگر جب ط کے سلسلہ (دفعہ ۳۳) میں ط کی تیسری قوت سے بڑی قوتیں

چھوڑ دی جائیں تو

$$\frac{\text{جب } ط}{ط} = \frac{ط - \frac{ط^{۳}}{\lfloor ۳}}{ط} = \frac{۱۳۴۹}{۱۳۵۰} = ۱ - \frac{۱}{۱۳۵۰}$$

$$\therefore \quad ط^{۲} = \frac{۶}{۱۳۵۰} = \frac{۱}{۲۲۵}$$

$$\text{پس } ط = \frac{۱}{۱۵}$$

یعنی زاویہ مطلوبہ $= \frac{۱}{۱۵}$ نق تقریباً

اگر زیادہ صحیح قیمت معلوم کرنا مقصود ہو تو سلسلہ بالا میں ط کی پانچویں قوت کو بھی شامل کرلینا چاہیئے۔

$$\text{تب} \quad \frac{ط - \frac{ط^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{ط^{۵}}{\lfloor ۵}}{ط} = ۱ - \frac{۱}{۱۳۵۰}$$

$$\therefore \quad ط^{۴} - ۲۰\,ط^{۲} = -\frac{۱۲۰}{۱۳۵۰} = -\frac{۲۰}{۲۲۵}$$

$$\text{حل کرنے سے} \quad ط^{۲} = ۱۰ \pm \frac{\sqrt{۲۲۴۸۰}}{۱۵}$$

$$= \frac{۱۴۹٫۹۳۳۳۱۲۰۰۰ - ۱۵۰}{۱۵} = \frac{٫۰۶۶۶۸۸}{۱۵}$$

$$= \frac{۱٫۰۰۰۳۲}{۲۱۵}$$

$$\therefore \quad ط = \frac{۱٫۰۰۰۱۶}{۱۵} \text{ نیم قطری}$$

اس قیمت اور پہلی قیمت کا فرق تقریباً پہلی قیمت کے $\frac{۱}{۶۰۰۰}$ ویں حصہ کے مساوی ہے۔

مشق ۲ — ذیل کی مساوات کا تقریبی حل معلوم کرو۔

$$\text{جم}\left(\frac{\pi}{۳} + ط\right) = ٫۴۹$$

صریحاً ٫۴۹، $\frac{۱}{۲}$ کے تقریباً مساوی ہے اور چونکہ $\frac{۱}{۲}$، جم $\frac{\pi}{۳}$ کی پوری قیمت

ہے اس لئے لازماً طہ کی قیمت بہت چھوٹی ہوگی۔
مساوات مذکورہ اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے

$\frac{۱}{۲}$ جم طہ $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جب طہ $=$ ۴۹ء $= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۱۰۰}$ .... (۱)

پہلی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے لئے طہ کا مربع اور مربع سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنا کافی ہوگا۔

تب دفعہ ۳۳ کی رو سے یہ مساوات

$\frac{۱}{۲}\times ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طہ $= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۱۰۰}$

جس سے طہ $= \frac{۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳۰۰} = \frac{۳ء۴۶۴۱...}{۳۰۰}$

$=$ ۰ء۰۱۱۵۴۷ .... نیم قطری

اس سے زیادہ صحیح تقریبی قیمت معلوم کرنے کے واسطے طہ کی تیسری قوت اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنا چاہیئے۔

اس صورت میں مساوات (۱) ہو جائے گی:

$\frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{\text{طہ}^۲}{۲}\right) - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طہ $= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۱۰۰}$

یعنی طہ^۲ + ۲ $\sqrt{۳}$ طہ $= \frac{۴}{۱۰۰}$

$\therefore$ طہ $= -\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳۰۴}}{۱۰} =$ ... ۰ء۰۱۱۵۰۸۶ نیم قطری

اس سے ظاہر ہے کہ پہلی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چوتھے مقام تک درست ہے لہذا زاویہ طہ تقریباً ۰ء۰۱۱۵ نیم قطری یعنی $۴۰'$ کے مساوی ہے۔

جدولوں کی رُو سے درست جواب ۰ء۰۱۱۵۰۷۵ نیم قطری ہے۔

۳۸ - بظاہر غیر متعین مقادیر کی قیمت معلوم کرنا

اکثر اوقات ہمیں ایسی مقادیر کی قیمت معلوم کرنی پڑتی ہے جو بظاہر غیر متعین ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ

$$\frac{۳\,\text{جب}\,ط - \text{جب}\,۳\,ط}{ط\,(\text{جم}\,ط - \text{جم}\,۳\,ط)}$$

کی قیمت معلوم کرنا مطلوب ہے جہاں ط صفر ہے۔

اگر ہم جملۂ ہذا میں ط کی جگہ صفر رکھیں تو یہ

$$= \frac{۰ - ۰}{۰ \times ۰}$$

جو بظاہر غیر متعین ہے۔

تاہم ط کی تمام قیمتوں کے لئے مذکورہ بالا جملہ

$$= \frac{۳\,\text{جب}\,ط - (۳\,\text{جب}\,ط - ۴\,\text{جب}^{۳}\,ط)}{ط\,\{\text{جم}\,ط - (۴\,\text{جم}^{۳}\,ط - ۳\,\text{جم}\,ط)\}} = \frac{۴\,\text{جب}^{۳}\,ط}{ط\,\{۴\,\text{جم}\,ط - ۴\,\text{جم}^{۳}\,ط\}}$$

$$= \frac{\text{جب}^{۳}\,ط}{ط\,\text{جم}\,ط\,\text{جب}^{۲}\,ط} = \frac{\text{جب}\,ط}{ط\,\text{جم}\,ط} = \frac{1}{\text{جم}\,ط} \times \frac{\text{جب}\,ط}{ط}$$

اب ط جتنا چھوٹا ہوگا اتنا ہی $\frac{1}{\text{جم}\,ط}$ اور $\frac{\text{جب}\,ط}{ط}$ دونوں کی قیمتیں ایک کے قریب ہونگی۔

اسلئے جس وقت ط کی انتہائی قیمت صفر ہوجاتی ہے اس وقت متذکرہ بالا جملہ کی انتہائی قیمت ۱ × ۱ یعنی ۱ ہوجاتی ہے۔

اس قسم کی رقم کو جیسا کہ ہم نے ابھی اوپر ذکر کیا ہے غیر متعین رقم کہتے ہیں یہہ کہنا شاید

زیادہ درست ہوگا کہ مذکورہ بالا جملہ صرف بادی النظر میں غیر متعین ہے۔

۳۹۔ جب ط اور جم ط کے سلسلوں کو استعمال کرنے سے اس قسم کے بہت سے جملوں کی اصلی قیمت نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے۔

اس قاعدہ کی توضیح کے لئے چند مشقیں ذیل میں درج کیجاتی ہیں۔ دفعہ ماقبل کی مثال ذیل کی پہلی مشق کی ایک خاص صورت ہے۔

مشق ۱۔ اگر ط صفر ہو تو ذیل کے جملہ کی قیمت معلوم کرو

$$\frac{\text{ن جب ط} - \text{جب ن ط}}{\text{ط}\,(\text{جم ط} - \text{جم ن ط})}$$

$$\text{جملہ مذکورہ} = \frac{\text{ن}\left(\text{ط} - \frac{\text{ط}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{ط}^{۵}}{\underline{|۵}} - \cdots\right) - \left(\text{ن ط} - \frac{\text{ن}^{۳}\text{ط}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{ن}^{۵}\text{ط}^{۵}}{\underline{|۵}} - \cdots\right)}{\text{ط}\left[\left(۱ - \frac{\text{ط}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{ط}^{۴}}{\underline{|۴}} - \cdots\right) - \left(۱ - \frac{\text{ن}^{۲}\text{ط}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{ن}^{۴}\text{ط}^{۴}}{\underline{|۴}} - \cdots\right)\right]}$$

$$= \frac{\frac{\text{ن}^{۳} - \text{ن}}{\underline{|۳}}\,\text{ط}^{۳} - \frac{\text{ن}^{۵} - \text{ن}}{\underline{|۵}}\,\text{ط}^{۵} + \text{ط کی بڑی قوتیں}}{\text{ط}\left[\frac{\text{ن}^{۲} - ۱}{\underline{|۲}}\,\text{ط}^{۲} - \frac{\text{ن}^{۴} - ۱}{\underline{|۴}}\,\text{ط}^{۴} + \text{ط کی بڑی قوتیں}\right]}$$

$$= \frac{\frac{\text{ن}^{۳} - \text{ن}}{\underline{|۳}} - \frac{\text{ن}^{۵} - \text{ن}}{\underline{|۵}}\,\text{ط}^{۲} + \text{ط کی بڑی قوتیں}}{\frac{\text{ن}^{۲} - ۱}{\underline{|۲}} - \frac{\text{ن}^{۴} - ۱}{\underline{|۴}}\,\text{ط}^{۲} + \text{ط کی بڑی قوتیں}}$$

اگر ط صفر ہو جائے تو یہ رقم

$$= \frac{\text{ن}^{۳} - \text{ن}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{ن}^{۲} - ۱}{\underline{|۲}} = \frac{\text{ن}}{۳}$$

مشق ۲۔ اگر لا صفر ہو جائے تو جملہ

$$\frac{\text{جم لا} - \text{لوک}_{\text{و}}(۱ + \text{لا}) + \text{جب لا} - ۱}{\text{و}^{\text{لا}} - (۱ + \text{لا})}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

چونکہ $لوک_و(۱+لا) = لا - \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۱}{۳} لا^۳ - \frac{۱}{۴} لا^۴ + \cdots\cdots$

اور $و^{لا} = ۱ + لا + \frac{لا^۲}{\underline{|۲}} + \frac{لا^۳}{\underline{|۳}} + \frac{لا^۴}{\underline{|۴}} + \cdots\cdots\cdots$ (دفعات ۵ اور ۸)

اسلئے یہ جملہ $= \dfrac{\left(۱ - \frac{لا^۲}{\underline{|۲}} + \frac{لا^۴}{\underline{|۴}} - \cdots\right) - \left(لا - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \cdots\right) + \left(لا - \frac{لا^۳}{\underline{|۳}} + \frac{لا^۵}{\underline{|۵}} \cdots\right) - ۱}{\left(۱ + لا + \frac{لا^۲}{\underline{|۲}} + \frac{لا^۳}{\underline{|۳}} + \cdots\cdots\right) - (۱ + لا)}$

$$= \frac{-\frac{لا^۳}{\underline{|۲}} + \text{لا کی بڑی قوتیں}}{\frac{لا^۲}{\underline{|۲}} + \text{لا کی بڑی قوتیں}} = -\frac{\frac{لا}{\underline{|۲}} + \text{لا کی بڑی قوتیں}}{\frac{۱}{\underline{|۲}} + \text{لا کی بڑی قوتیں}}$$

اگر لا صفر ہو تو یہ $= \frac{۰}{۱} = ۰$

مشق ۳۔ اگر لا صفر ہو جائے تو

$\left(\frac{مس\ لا}{لا}\right)^{\frac{۱}{لا^۲}}$ کی قیمت معلوم کرو

اگر لا صفر ہو جائے تو یہ رقم $\left(\frac{صفر}{صفر}\right)^{\infty}$ کی شکل اختیار کر لیتی ہے

نیز یہ رقم $= \left(\frac{لا + \frac{لا^۳}{۳} + \cdots\cdots}{لا}\right)^{\frac{۱}{لا^۲}}$ (دفعہ ۳۴)

اب بموجب نتیجہ صریح دفعہ ۲ $\left(۱ + \frac{لا^۲}{۳}\right)^{\frac{۳}{۳لا^۲}}$ کی قیمت و ہوتی ہے جب لا صفر ہو

لہذا رقم مذکور $= و^{\frac{۱}{۳}} = فو = ۱$

جملہ زیر بحث کی قیمت اس کا لوکارثم معلوم کرنے سے بھی حاصل کیجا سکتی ہے۔

امثلہ ۵

۱۔ اگر $\frac{جب\ طہ}{طہ} = \frac{۱۰۱۳}{۱۰۱۴}$ تو ثابت کرو کہ

ط تقریباً نیمقطریوں کی اس تعداد کو تعبیر کرتا ہے جو ۴° ۲۴′ میں ہیں۔

۲۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{863}{864}$ تو ثابت کرو کہ
ط تقریباً ۴° ۴۷′ کے برابر ہے۔

۳۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{5045}{5046}$ تو ثابت کرو کہ
زاویہ ط تقریباً ۱° ۵۸′ کے برابر ہے۔

۴۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{2165}{2166}$ تو ثابت کرو کہ
زاویہ ط تقریباً ۳° ۱′ کے برابر ہے۔

۵۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{19493}{19494}$ تو ثابت کرو کہ
ط کی تقریبی قیمت ۱° ہے۔

۶۔ اگر مس ط $= \frac{1}{15}$، تو ط کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

اگر لا صفر ہو جائے تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو۔

۷۔ $\frac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا}^{3}}$

۸۔ $\frac{\text{لا}^{2}}{1 - \text{جم م لا}}$

۹۔ $\frac{\text{جب ا لا}}{\text{جب ب لا}}$

۱۰۔ $\frac{\text{مس لا} - \text{جب لا}}{\text{جب}^{3}\text{ لا}}$

۱۱۔ $\frac{\text{مس }2\text{لا} - 2\text{ جب لا}}{\text{لا}^{3}}$

۱۲۔ $\frac{\text{سہ ا لا}}{\text{سہ ب لا}}$ (نوٹ) سہ سے مراد سہم الجیب یعنی جیب معکوس ہے)

۱۳۔ $\frac{\text{م جب لا} - \text{جب م لا}}{\text{م (جم لا} - \text{جم م لا)}}$

۱۴– (ا^۲ جب ا لا − ب^۲ جب ب لا) / (ب^۲ مس ا لا − ا^۲ مس ب لا)

۱۵– (ب^۲ جب^۲ ا لا − ا^۲ جب^۲ ب لا) / (ب^۲ مس^۲ ا لا − ا^۲ مس^۲ ب لا)

۱۶– (لا لوک_و (۱ + لا)) / (۱ − جم لا)

۱۷– (و^لا − ۱ + لوک_و (۱ − لا)) / (جب^۳ لا)

۱۸– (لا + ۲ جب لا − جب ۳ لا) / (لا + مس لا − مس ۲ لا)

۱۹– (جب لا + جب ۶ لا − ۷ لا) / (لا^۵)

۲۰– (جب^۲ ن لا − جب^۲ م لا) / (۱ − جم ف لا)

۲۱– (۱ / لا^۴) [(جب لا / لا) + ((و^لا − و^−لا) / ۲ لا) − ۲]

۲۲– (جب^۲ √(م ن) لا − جب م لا جب ن لا) / ((۱ − جم م لا) (۱ − جم ن لا))

۲۳– (۳ جب لا − جب ۳ لا) / (لا − جب لا)

۲۴– ((جب لا − ۲ جب لا/۲)^۲ − (۱ − جم لا)^۳) / (جب لا جب ۲ لا − ۸ جم لا جب^۲ لا/۲ − ۳/۲ جب^۲ لا)

۲۵– (ا^لا − ب^لا) / لا

۲۶– (مس لا / لا)^(۳/لا^۲)

۲۷ — $\left(\text{جم}\ \frac{\text{لا}}{۴} + \text{جب}\ \frac{۳\ \text{لا}}{۴}\right)^{\frac{۴}{\text{لا}}}$

اگر لا ← $\frac{\pi}{۲}$ کے مساوی ہو تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو:

۲۸ — $\dfrac{(\text{جم لا} + \text{جب}\ ۲\ \text{لا} + \text{جم}\ ۳\ \text{لا})^{۲}}{(\text{جب لا} + ۲\ \text{جم}\ ۲\ \text{لا} - \text{جب}\ ۳\ \text{لا})^{۳}}$

۲۹ — $(\text{جب لا})^{\text{مس لا}}$

۳۰ — $\text{قظ لا} - \text{مس لا}$

اگر ن لا انتہا بڑا ہو تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو:—

۳۱ — $\left(\text{جم}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ ۳۲ — $\left(\text{جم}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}^{۲}}$ ۳۳ — $\left(\text{جم}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}^{۳}}$

۳۴ — اگر ن > ۱ اور ط = $\frac{\pi}{\text{ن}}$ تقریباً تو ثابت کرو کہ $(\text{جب ط})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$ کی تقریبی قیمت

$$\frac{(\text{ن} - ۱) + (\text{ن} + ۱)\ \text{جب ط}}{(\text{ن} + ۱) + (\text{ن} - ۱)\ \text{جب ط}}$$ ہوگی

۳۵ — اگر بہ کی قیمت انتہائی صورت میں عہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{عہ جب بہ} - \text{بہ جب عہ}}{\text{عہ جم بہ} - \text{بہ جم عہ}} = \text{مس}\,(\text{عہ} - \text{مس}^{-۱}\ \text{عہ})$$

۳۶ — ثابت کرو کہ $۴\ \text{مس}^{-۱}\ \frac{۱}{۵} - \frac{\pi}{۴} = \text{مس}^{-۱}\ \frac{۱}{۲۳۹}$

اور اس سے حاصل کرو کہ اگر ایک قائم الزاویہ مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہو اور ج ا، ج ب کا پانچ گنا ہو تو زاویہ ا زاویہ قائمہ کے $\frac{۱}{۸}$ سے بقدر ۳َ ۳۶ًَ کے بڑا ہوگا جب مؤخر الذکر اعداد کی صحت کو قریب ترین ثانیہ تک ملحوظ رکھا جائے۔

۳۷۔ ا اور ب کی ایسی قیمتیں معلوم کرو کہ جملہ ا جب لا + ب جب ۲ لا کی قیمت ایک چھوٹے زاویہ لا کے نیمقطریوں کی تعداد کے اتنی قریب ہو جتنی کہ ممکن ہے۔

۳۸۔ اگر ما = لا ۔ ر جب لا جہاں ر ایک نہایت چھوٹی مقدار ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\ \frac{\text{ما}}{۲} = \text{مس}\ \frac{\text{لا}}{۲}\left(۱ - \text{ر} + \text{ر}^{۲}\ \text{جب}^{۲}\ \frac{\text{لا}}{۲}\right)$$

اور

$$\text{مس}\ \frac{\text{لا}}{۲} = \text{مس}\ \frac{\text{ما}}{۲}\left(۱ + \text{ر} + \text{ر}^{۲}\ \text{جم}^{۲}\ \frac{\text{ما}}{۲}\right)$$

جہاں ر کی دو سے بڑی قوتیں نظر انداز کردی گئی ہیں۔

۳۹۔ اگر مساوات جب (سہ ۔ طہ) = جب سہ جم عہ میں طہ بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ اس کی تقریبی قیمت

$$۲\ \text{مس سہ جب}^{۲}\ \frac{\text{عہ}}{۲}\left(\text{مس}^{۲}\ \text{سہ جب}^{۲}\ \frac{\text{عہ}}{۲}\right)$$

ہو گی۔

۴۰۔ اگر جب فہ کی قیمت سے یہ معلوم ہو کہ زاویہ فہ، ۵° سے بڑا نہیں ہے تو ثابت کرو کہ اس کی قیمت اور کسر

$$\frac{۲۸\ \text{جب ۲ فہ} + \text{جب ۴ فہ}}{۱۲\ (۳ + ۲\ \text{جم ۲ فہ})}$$

کی قیمت میں تفاوت ا کے نیمقطریوں کی تعداد سے کم ہے۔

۴۱۔ مشق ۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۸\ \text{لا}^{۳} - ۴\ \text{لا}^{۲} - ۴\ \text{لا} + ۱ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱)$$

کی اصلیں جم $\frac{\pi}{۷}$، جم $\frac{۳\pi}{۷}$، جم $\frac{۵\pi}{۷}$ ہیں۔

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$\text{جم}\,\frac{\pi}{۷} + \text{جم}\,\frac{۳\pi}{۷} + \text{جم}\,\frac{۵\pi}{۷} = \frac{۱}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\text{جم}\,\frac{\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{۳\pi}{۷} + \text{جم}\,\frac{۳\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{۵\pi}{۷} + \text{جم}\,\frac{۵\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{۷} = -\frac{۱}{۲} \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{اور}\ \text{جم}\,\frac{\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{۳\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{۵\pi}{۷} = -\frac{۱}{۸} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

پہلا طریقہ ـ فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}$، جہاں طہ کی قیمت ذیل کی مقادیر میں سے کوئی ایک ہے

$\frac{\pi}{۷}$، $\frac{۳\pi}{۷}$، $\frac{۵\pi}{۷}$، π، $\frac{۹\pi}{۷}$، $\frac{۱۱\pi}{۷}$ اور $\frac{۱۳\pi}{۷}$

تب $\text{ما}^{۷} = \text{جم ۷ طہ} + \text{خ جب ۷ طہ} = -۱$

یعنی $(\text{ما}+۱)(\text{ما}^{۶} - \text{ما}^{۵} + \text{ما}^{۴} - \text{ما}^{۳} + \text{ما}^{۲} - \text{ما} + ۱) = ۰$

اب اصل $\text{ما} = -۱$ طہ کی قیمت π کے متناظر ہے۔

پس مساوات

$$\text{ما}^{۶} - \text{ما}^{۵} + \text{ما}^{۴} - \text{ما}^{۳} + \text{ما}^{۲} - \text{ما} + ۱ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

کی اصلیں $\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}$ ہیں جہاں طہ کی قیمت مقادیر ذیل میں سے کوئی ایک ہے

$\frac{\pi}{۷}$، $\frac{۳\pi}{۷}$، $\frac{۵\pi}{۷}$، $\frac{۹\pi}{۷}$، $\frac{۱۱\pi}{۷}$، $\frac{۱۳\pi}{۷}$

۲ لا کو $\text{ما} + \frac{۱}{\text{ما}}$ کے مساوی رکھو

$$\text{تب}\ ۲\,\text{لا} = \text{ما} + \frac{۱}{\text{ما}} = \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} + \frac{۱}{\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}}$$

$$= \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} + \text{جم طہ} - \text{خ جب طہ} = ۲\,\text{جم طہ}$$

$$\text{پس}\ \text{ما}^{۲} + \frac{۱}{\text{ما}^{۲}} = \left(\text{ما} + \frac{۱}{\text{ما}}\right)^{۲} - ۲ = ۴\,\text{لا}^{۲} - ۲$$

$$\text{اور}\ \left(\text{ما}^{۳} + \frac{۱}{\text{ما}^{۳}}\right) = \left(\text{ما} + \frac{۱}{\text{ما}}\right)\left\{\left(\text{ما} + \frac{۱}{\text{ما}}\right)^{۲} - ۳\right\} = ۸\,\text{لا}^{۳} - ۶\,\text{لا}$$

مساوات (۵) کو م^3 پر تقسیم کرنے سے

$$\text{م}^3 + \frac{1}{\text{م}^3} - \left(\text{م}^2 + \frac{1}{\text{م}^2}\right) + \left(\text{م} + \frac{1}{\text{م}}\right) - 1 = 0$$

یعنی $8\,\text{لا}^3 - 4\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 1 = 0$ .... (۶)

اس مساوات کی اصلیں

جم $\frac{\pi}{7}$، جم $\frac{3\pi}{7}$، جم $\frac{5\pi}{7}$، جم $\frac{9\pi}{7}$، جم $\frac{11\pi}{7}$، جم $\frac{13\pi}{7}$

ہیں اور چونکہ

جم $\frac{13\pi}{7}$ = جم $\frac{\pi}{7}$، جم $\frac{11\pi}{7}$ = جم $\frac{3\pi}{7}$ اور جم $\frac{9\pi}{7}$ = جم $\frac{5\pi}{7}$

اس لئے مساوات (۶) کی اصلیں

جم $\frac{\pi}{7}$، جم $\frac{3\pi}{7}$ اور جم $\frac{5\pi}{7}$ ہیں۔

تب صریحاً

جم $\frac{\pi}{7}$ + جم $\frac{3\pi}{7}$ + جم $\frac{5\pi}{7}$ $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

جم $\frac{\pi}{7}$ جم $\frac{3\pi}{7}$ + جم $\frac{3\pi}{7}$ جم $\frac{5\pi}{7}$ + جم $\frac{5\pi}{7}$ جم $\frac{\pi}{7}$ $= -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

اور جم $\frac{\pi}{7}$ جم $\frac{3\pi}{7}$ جم $\frac{5\pi}{7}$ $= -\frac{1}{8}$

دوسرا طریقہ

مساوات (جم طہ + خہ جب طہ)$^7 = -1$ .... (۷)

یعنی جم ۷ طہ + خہ جب ۷ طہ $= -1$

طہ کی مندرجہ ذیل قیمتوں میں سے ہر ایک سے پوری ہوتی ہے

$\frac{\pi}{7}$، $\frac{3\pi}{7}$، $\frac{5\pi}{7}$، π، $\frac{9\pi}{7}$، $\frac{11\pi}{7}$، $\frac{13\pi}{7}$ .... (۸)

اگر ہم جب طہ کی بجائے ج اور جم طہ کی بجائے م لکھیں اور مساوات (۷) کو

مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو

$$\text{م}^{7} + 7\text{خ}\,\text{م}^{6}\text{ج} - 21\,\text{م}^{5}\text{ج}^{2} - 35\text{خ}\,\text{م}^{4}\text{ج}^{3} + 35\,\text{م}^{3}\text{ج}^{4} + 21\text{خ}\,\text{م}^{2}\text{ج}^{5} - 7\,\text{م}\,\text{ج}^{6} - \text{خ}\,\text{ج}^{7} = -1$$

اس مساوات کی دونو جانبوں کے حقیقی حصوں کو برابر کرنے سے

$$\text{م}^{7} - 21\,\text{م}^{5}\text{ج}^{2} + 35\,\text{م}^{3}\text{ج}^{4} - 7\,\text{م}\,\text{ج}^{6} = -1$$

چونکہ $\text{ج}^{2} = 1 - \text{م}^{2}$، اس لئے ظاہر ہے کہ زوایا (۸) میں سے ہر ایک کی جیب التمام ذیل کی مساوات کو پورا کرتی ہے۔

$$64\,\text{م}^{7} - 112\,\text{م}^{5} + 56\,\text{م}^{3} - 7\,\text{م} + 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

$$(\text{م}+1)\left\{8\,\text{م}^{3} - 4\,\text{م}^{2} - 4\,\text{م} + 1\right\}^{2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

لیکن

$$\text{جم}\,\pi = -1،\ \text{جم}\,\frac{13\pi}{7} = \text{جم}\,\frac{\pi}{7}،\ \text{جم}\,\frac{11\pi}{7} = \text{جم}\,\frac{3\pi}{7}$$

$$\text{اور}\ \text{جم}\,\frac{9\pi}{7} = \text{جم}\,\frac{5\pi}{7}$$

اس لئے مساوات (۱۰) کی اصلیں

$$-1،\ \text{جم}\,\frac{\pi}{7}،\ \text{جم}\,\frac{3\pi}{7}،\ \text{جم}\,\frac{5\pi}{7}$$

ہیں جہاں آخر کی تین اصلیں دو دو دفعہ آتی ہیں۔

اس لئے $\text{جم}\,\frac{\pi}{7}،\ \text{جم}\,\frac{3\pi}{7}،\ \text{جم}\,\frac{5\pi}{7}$،

مساوات $8\,\text{م}^{3} - 4\,\text{م}^{2} - 4\,\text{م} + 1 = 0$

کی اصلیں ہیں اور یہ مساوات وہی ہے جو مساوات (۶) ہے۔ باب مابعد میں دفعہ ۹۴ کی مساوات (۲) میں ن کی بجائے ۷ لکھنے سے بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

تیسرا طریقہ۔

اگر زاویوں کی کم تعداد کو شریک کیا جائے تو مساوات (۶) خیالی مقادیر کے

استعمال کے بغیر بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ طہ زوایائے (۸) میں سے کسی زاویہ کو تعبیر کرتا ہے یعنی ۷ طہ، π کا کوئی طاق ضعف ہے۔

$$\therefore \text{جم } ۴ \text{ طہ} = -\text{جم } ۳ \text{ طہ}$$

پس اگر جم طہ کی بجائے م لکھیں تو

$$۲\left\{۲\,\text{م}^۲ - ۱\right\} - ۱ = -\left\{۴\,\text{م}^۳ - ۳\,\text{م}\right\}$$

یعنی $۸\,\text{م}^۴ - ۸\,\text{م}^۲ + ۱ = ۳\,\text{م} - ۴\,\text{م}^۳$

یا $۸\,\text{م}^۴ + ۴\,\text{م}^۳ - ۸\,\text{م}^۲ - ۳\,\text{م} + ۱ = ۰$

یا $(\text{م}+۱)(۸\,\text{م}^۳ - ۴\,\text{م}^۲ - ۴\,\text{م} + ۱) = ۰$

لہذا طریقہ دوم کے عمل کے بموجب

مساوات $۸\,\text{م}^۳ - ۴\,\text{م}^۲ - ۴\,\text{م} + ۱ = ۰$

کی اصلیں جم $\frac{\pi}{۷}$، جم $\frac{۳\pi}{۷}$ اور جم $\frac{۵\pi}{۷}$ (ہیں)۔

۴۱۔ دفعہ ماقبل کی مدد سے ہم ایک ایسی مساوات حاصل کر سکتے ہیں جس کی اصلیں

$$\text{قط}^۲\frac{\pi}{۷}،\ \text{قط}^۲\frac{۳\pi}{۷}،\ \text{قط}^۲\frac{۵\pi}{۷}$$

ہوں۔

گذشتہ دفعہ کی مساوات (۶) میں $\frac{۱}{\text{لا}^۲}$ کو لکھے اور بنابریں لا کو $\frac{۱}{\text{م}}$ کے برابر فرض کرو۔ تب فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{قط}^۲\frac{\pi}{۷}،\ \text{قط}^۲\frac{۳\pi}{۷}،\ \text{قط}^۲\frac{۵\pi}{۷}$$

مساوات ۸/ماماما − ۴/ما − ۴/ماما + ۱ = ۰ کی اصلیں ہیں یا مساوات کو ناطق بنانے سے ما۳ − ۲۴ ما۲ + ۸۰ ما − ۶۴ = ۰ .... (۱)
کی اصلیں ہیں۔

اب ما کو ۱ + ی کے برابر فرض کرو تب چونکہ قط۲ طہ = ۱ + مس۲ طہ
اسلئے

مس۲ π/۷ ، مس۲ ۳π/۷ ، مس۲ ۵π/۷

مساوات (۱ + ی)۳ − ۲۴ (۱ + ی)۲ + ۸۰ (۱ + ی) − ۶۴ = ۰
یعنی ی۳ − ۲۱ ی۲ + ۳۵ ی − ۷ = ۰ .... (۲)
کی اصلیں ہیں۔

مساوات (۲) براہ راست بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے۔
کیونکہ اگر طہ ذیل کے زاویوں

π/۷ ، ۲π/۷ ، ۳π/۷ ، ۴π/۷ ، ۵π/۷ ، ۶π/۷ ، π

میں سے کسی ایک کو تعبیر کرے تو مس ۷ طہ = ۰۔
یعنی (اگر مس طہ کو ت سے تعبیر کیا جائے تو دفعہ ۳۰ کی رو سے

۷ ت − ج۷،۳ ت۳ + ج۷،۵ ت۵ − ج۷،۷ ت۷ = ۰

یا ت۷ − ۲۱ ت۵ + ۳۵ ت۳ − ۷ ت = ۰

یا ت {ت۶ − ۲۱ ت۴ + ۳۵ ت۲ − ۷} = ۰ .... (۳)

لیکن چونکہ مس π = ۰، مس ۶π/۷ = − مس π/۷ ، مس ۵π/۷ = − مس ۲π/۷
اور مس ۴π/۷ = − مس ۳π/۷
اسلئے مساوات (۳) کی اصلیں

۰، ± مس π/۷ ، ± مس ۳π/۷ ، ± مس ۵π/۷

ہیں۔

پس ت^2 کو ی کے مساوی رکھنے سے

مس$^2 \frac{\pi}{7}$ ، مس$^2 \frac{3\pi}{7}$ ، مس$^2 \frac{5\pi}{7}$

مساوات (۲) کی اصلیں ہیں۔

امثلہ ۶

۱۔ ثابت کرو کہ

$$(\text{لا} - 2\,\text{جم}\,\tfrac{2\pi}{5})(\text{لا} - 2\,\text{جم}\,\tfrac{4\pi}{5})(\text{لا} - 2\,\text{جم}\,\tfrac{6\pi}{5})(\text{لا} - 2\,\text{جم}\,\tfrac{8\pi}{5})$$
$$= \text{لا}^4 + 2\,\text{لا}^3 - \text{لا}^2 - 2\,\text{لا} + 1$$

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$8\,\text{لا}^3 + 4\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} - 1 = 0$$

کی اصلیں جم $\frac{2\pi}{7}$ ، جم $\frac{4\pi}{7}$ ، جم $\frac{6\pi}{7}$ ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ

جب $\frac{2\pi}{7}$ ، جب $\frac{4\pi}{7}$ ، جب $\frac{8\pi}{7}$

مساوات $\text{لا}^3 - \frac{\sqrt{7}}{2}\,\text{لا}^2 + \frac{\sqrt{7}}{8} = 0$ کی اصلیں ہیں۔

ثابت کرو کہ

$$\text{۴-}\quad \frac{1}{4 - \text{قط}^2\,\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{4 - \text{قط}^2\,\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{4 - \text{قط}^2\,\frac{6\pi}{7}} = 1$$

$$\text{۵-}\quad \text{جم}^4\,\frac{\pi}{9} + \text{جم}^4\,\frac{2\pi}{9} + \text{جم}^4\,\frac{3\pi}{9} + \text{جم}^4\,\frac{4\pi}{9} = \frac{19}{16}$$

$$\text{۶-}\quad \text{قط}^4\,\frac{\pi}{9} + \text{قط}^4\,\frac{2\pi}{9} + \text{قط}^4\,\frac{3\pi}{9} + \text{قط}^4\,\frac{4\pi}{9} = 1120$$

$$\text{۷-}\quad \text{جم}\,\frac{\pi}{11} + \text{جم}\,\frac{3\pi}{11} + \text{جم}\,\frac{5\pi}{11} + \text{جم}\,\frac{7\pi}{11} + \text{جم}\,\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

۸- وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$\text{مس}^2\frac{\pi}{11}$، $\text{مس}^2\frac{2\pi}{11}$، $\text{مس}^2\frac{3\pi}{11}$، $\text{مس}^2\frac{4\pi}{11}$، $\text{مس}^2\frac{5\pi}{11}$

ہیں۔ [نوٹ۔ دفعہ ۳۰ کی مساوات (۳) سے شروع کرو]

ثابت کرو کہ

۹- $\text{مم}^2\frac{\pi}{11}+\text{مم}^2\frac{2\pi}{11}+\text{مم}^2\frac{3\pi}{11}+\text{مم}^2\frac{4\pi}{11}+\text{مم}^2\frac{5\pi}{11}=15$

۱۰- $\text{قط}^2\frac{\pi}{11}+\text{قط}^2\frac{2\pi}{11}+\text{قط}^2\frac{3\pi}{11}+\text{قط}^2\frac{4\pi}{11}+\text{قط}^2\frac{5\pi}{11}=60$

۱۱- $\text{جم}\frac{2\pi}{13}+\text{جم}\frac{6\pi}{13}+\text{جم}\frac{18\pi}{13}=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$

۱۲- $\text{جم}\frac{10\pi}{13}+\text{جم}\frac{14\pi}{13}+\text{جم}\frac{22\pi}{13}=\frac{-\sqrt{13}-1}{4}$

۱۳- $\text{جم}\frac{\pi}{15}+\text{جم}\frac{7\pi}{15}+\text{جم}\frac{11\pi}{15}+\text{جم}\frac{13\pi}{15}=-\frac{1}{2}$

۱۴- ثابت کرو کہ $\text{جب}\frac{\pi}{14}$ ذیل کی مساوات کی ایک اصل ہے

$64\,\text{لا}^6-80\,\text{لا}^4+24\,\text{لا}^2-1=0$

باب چہارم

کسی زاویہ کے اضعاف کی جیوب اور جیوب التمام کے پھیلاؤ
اور
جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کی تفصیلیں

[پہلی خواندگی کے وقت طالب علم دفعہ ۴۸ سے باب ہذا کے اختتام تک چھوڑ سکتا ہے]

۴۲ — اس باب میں پہلے ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح سے کسی زاویہ کی جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کی تفصیلیں اس زاویہ کے اضعاف کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کی جا سکتی ہیں اور پھر یہ بتائینگے کہ کس طرح سے ایک زاویہ کے کسی ضِعف کی جیوب اور جیوب التمام کو زاویہ مذکورہ کی جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کے سلسلوں میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

اس باب میں ن سے ہر جگہ ایک مثبت صحیح عدد مراد لی جائیگی۔

۴۳ — فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}$$

$$\text{پس } \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}} = \frac{(\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ})}{\text{جم}^2\text{ طہ} + \text{جب}^2\text{ طہ}}$$

$$= \text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}$$

$$\text{اسلئے } \text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = 2\,\text{جم طہ}$$

$$\text{اور}\quad \text{لا} - \frac{1}{\text{لا}} = ۲\,\text{خ جب ط}$$

نیز ڈی مائیورے کے مسئلہ سے ثابت ہے کہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} = \text{جم ن ط} + \text{خ جب ن ط}$$

$$\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \text{جم ن ط} - \text{خ جب ن ط}$$

$$\text{لہٰذا}\quad \text{لا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ۲\,\text{جم ن ط}$$

$$\text{اور}\quad \text{لا}^{\text{ن}} - \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ۲\,\text{خ جب ن ط}$$

۴۴۔ جم^ن ط کی تفصیل ط کے اضعاف کی جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کرو۔

اس جگہ ن سے مراد کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

دفعۂ ماسبق سے ظاہر ہے کہ

$$(۲\,\text{جم ط})^{\text{ن}} = \left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\frac{1}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\frac{1}{\text{لا}^{۲}} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^{۲}\,\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} + \text{ن}\,\text{لا}\,\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}} \times \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۴}} + \text{ن} \times \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} \cdots \quad (۱)$$

پہلی رقم کو آخری رقم کے ساتھ، دوسری رقم کو آخر کی طرف سے دوسری رقم کے ساتھ، اور علیٰ ہذا القیاس . . . . . . لینے سے

$$(۲\,\text{جم ط})^{\text{ن}} = \left(\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right) + \text{ن}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}}\right)$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۴}}\right) + \cdots\cdots$$

لیکن دفعہ ماقبل کی رُو سے

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ۲\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{طہ}$$

$$\text{اور}\quad \text{لا}^{\text{ن}-۲} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} = ۲\,\text{جم}\,(\text{ن}-۲)\,\text{طہ}$$

وغیرہ .... وغیرہ ....

$$\text{پس}\quad ۲^{\text{ن}}\,\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ} = ۲\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{طہ} + \text{ن} \times ۲\,\text{جم}\,(\text{ن}-۲)\,\text{طہ}$$

$$+ \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲} \times ۲\,\text{جم}\,(\text{ن}-۴)\,\text{طہ} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{یعنی}\quad ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ} = \text{جم}\,\text{ن}\,\text{طہ} + \text{ن}\,\text{جم}\,(\text{ن}-۲)\,\text{طہ} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{جم}\,(\text{ن}-۴)\,\text{طہ} + \ldots \quad (۲)$$

اگر ن طاق ہو تو مساوات (۱) کے بائیں جانب رقوم کی تعداد جفت ہوگی۔ اس لئے دو دو رقموں کے زوج پورے ہوجائیں گے۔ اور کوئی رقم اکیلی نہ بچیگی۔ اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ آخری رقم میں جم طہ شامل ہوگا۔

لیکن اگر ن کوئی جفت عدد ہو تو مساوات (۱) کی بائیں جانب کے رکن میں رقوم کی تعداد طاق ہوگی۔ اس لئے جملہ ازواج پورے کرنے کے بعد ایک رقم بچ جائیگی جس میں لا شامل نہیں ہوگا۔ اس کو ۲ پر تقسیم کرنے سے جو رقم حاصل ہوگی وہی رقم سلسلہ (۲) کی آخری رقم ہوگی۔

یہ آسانی سے ثابت ہوسکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو آخری رقم $\dfrac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \frac{\text{ن}-۱}{۲}\ \lfloor \frac{\text{ن}+۱}{۲}}\,\text{جم}\,\text{طہ}$

ہوگی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم $\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ن}!}{\left\{\left(\frac{\text{ن}}{۲}\right)!\right\}^{۲}}$ ہوگی۔

۴۵- مشق ۱- $\text{جم}^{۸}\,\text{ط}$ کو ط کے اضعاف کی جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

یہ معلوم ہے کہ $(۲\,\text{جم}\,\text{ط})^{۸} = \left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right)^{۸}$

$$= \text{لا}^{۸} + ۸\,\text{لا}^{۶} + ۲۸\,\text{لا}^{۴} + ۵۶\,\text{لا}^{۲} + ۷۰ + ۵۶ \times \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} + ۲۸ \times \frac{۱}{\text{لا}^{۴}} + ۸ \times \frac{۱}{\text{لا}^{۶}} + \frac{۱}{\text{لا}^{۸}}$$

$$= \left(\text{لا}^{۸} + \frac{۱}{\text{لا}^{۸}}\right) + ۸\left(\text{لا}^{۶} + \frac{۱}{\text{لا}^{۶}}\right) + ۲۸\left(\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{\text{لا}^{۴}}\right)$$
$$+ ۵۶\left(\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right) + ۷۰$$

$$= ۲\,\text{جم}\,۸\text{ط} + ۸ \times ۲\,\text{جم}\,۶\text{ط} + ۲۸ \times ۲\,\text{جم}\,۴\text{ط} + ۵۶ \times ۲\,\text{جم}\,۲\text{ط} + ۷۰$$

$$\therefore ۲^{۷}\,\text{جم}^{۸}\,\text{ط} = \text{جم}\,۸\text{ط} + ۸\,\text{جم}\,۶\text{ط} + ۲۸\,\text{جم}\,۴\text{ط} + ۵۶\,\text{جم}\,۲\text{ط} + ۳۵$$

مشق ۲- $\text{جم}^{۷}\,\text{ط}$ کو ط کے اضعاف کی جیوب التمام کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔

$$(۲\,\text{جم}\,\text{ط})^{۷} = \left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right)^{۷}$$

$$= \text{لا}^{۷} + ۷\,\text{لا}^{۵} + ۲۱\,\text{لا}^{۳} + ۳۵\,\text{لا} + ۳۵\,\frac{۱}{\text{لا}} + ۲۱\,\frac{۱}{\text{لا}^{۳}} + ۷\,\frac{۱}{\text{لا}^{۵}} + \frac{۱}{\text{لا}^{۷}}$$

$$= \left(\text{لا}^{۷} + \frac{۱}{\text{لا}^{۷}}\right) + ۷\left(\text{لا}^{۵} + \frac{۱}{\text{لا}^{۵}}\right) + ۲۱\left(\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{\text{لا}^{۳}}\right) + ۳۵\left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right)$$

$$= ۲\,\text{جم}\,۷\text{ط} + ۷ \times ۲\,\text{جم}\,۵\text{ط} + ۲۱ \times ۲\,\text{جم}\,۳\text{ط} + ۳۵ \times ۲\,\text{جم}\,\text{ط}$$

$$\therefore ۲^{۶}\,\text{جم}^{۷}\,\text{ط} = \text{جم}\,۷\text{ط} + ۷\,\text{جم}\,۵\text{ط} + ۲۱\,\text{جم}\,۳\text{ط} + ۳۵\,\text{جم}\,\text{ط}$$

۴۶- $\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ط}$ **کی تفصیل جب ن جفت ہو تو ط کے اضعاف کی جیوب التمام کی رقوم میں اور جب ن طاق ہو تو ط کے اضعاف کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو**

دفعہ ۴۳ کی رو سے

$$۲\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط} = \text{لا} - \frac{۱}{\text{لا}}$$

اس لئے $۲^{\text{ن}}\,\text{خ}^{\text{ن}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ط} = \left(\text{لا} - \frac{۱}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ ....(۱)

صورت اول- فرض کرو کہ ن جفت ہے۔ تب (۱) کی تفصیل

میں آخری رقم $+\dfrac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ ہو گی۔

نیز چونکہ $\text{خ}^{\text{ن}} = (-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}$

اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

$$2^{\text{ن}}(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ} = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\times\frac{1}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2}\times\frac{1}{\text{لا}^{2}} - \cdots + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\,\text{لا}^{2}\times\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-2}} - \text{ن}\,\text{لا}\times\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-1}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$= \left(\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right) - \text{ن}\left(\text{لا}^{\text{ن}-2} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-2}}\right) + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\left(\text{لا}^{\text{ن}-4} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-4}}\right) - \cdots\cdots$$

$$= 2\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{طہ} - \text{ن}\times 2\,\text{جم}\,(\text{ن}-2)\,\text{طہ} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\,2\,\text{جم}\,(\text{ن}-4)\,\text{طہ} - \cdots\cdots$$

حسب دفعہ ۴۴

$$\therefore\; 2^{\text{ن}-1}(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ} = \text{جم}\,\text{ن}\,\text{طہ} - \text{ن}\,\text{جم}\,(\text{ن}-2)\,\text{طہ} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\,\text{جم}\,(\text{ن}-4)\,\text{طہ} - \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

چونکہ ن جفت ہے اس لئے مساوات (۲) کے بائیں جانب کی رقموں کی تعداد طاق ہو گی۔ لہذا درمیانی رقم میں لا شامل نہ ہوگا، اسکو ۲ پر تقسیم کرنے سے جو رقم حاصل ہو گی وہی رقم مساوات (۳) کی آخری رقم ہو گی۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ آخری رقم

$$\frac{1}{2}(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\frac{\lfloor \text{ن}}{\left\{\lfloor \frac{\text{ن}}{2}\right\}^{2}}$$ ہو گی۔

صورت دوم — فرض کرو کہ ن طاق ہے

تب سلسلہ (۱) میں آخری رقم $-\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ ہو گی۔

نیز چونکہ $\text{خ}^{\text{ن}} = \text{خ} \times \text{خ}^{\text{ن}-۱} = \text{خ}\,(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}$ اس لئے

مساوات (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

$$۲^{\text{ن}} \times \text{خ} \times (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\, \text{جب}^{\text{ن}}\, \text{طہ} = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}\, \text{لا}^{\text{ن}-۱} \times \frac{۱}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor\underline{۲}}\, \text{لا}^{\text{ن}-۲} \times \frac{۱}{\text{لا}^۲} \cdots$$

$$\cdots - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor\underline{۲}}\, \text{لا}^۲\, \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} + \text{ن}\, \text{لا}\, \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}}$$

$$= \left(\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right) - \text{ن}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۲} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}}\right)$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor\underline{۲}}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۴} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۴}}\right) \cdots\cdots (۴)$$

اب بموجب دفعہ (۳۴) $\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ۲\, \text{خ جب ن طہ}$

$$\text{لا}^{\text{ن}-۲} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} = ۲\, \text{خ جب}\, (\text{ن} - ۲)\, \text{طہ}$$

....

لہذا مساوات (۴) ہو جاتی ہے:

$$۲^{\text{ن}}\, \text{خ}\, (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\, \text{جب}^{\text{ن}}\, \text{طہ} = ۲\, \text{خ جب ن طہ}$$

$$- \text{ن}\, ۲\, \text{خ جب}(\text{ن}-۲)\,\text{طہ} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor\underline{۲}}\, ۲\, \text{خ جب}(\text{ن}-۴)\,\text{طہ} - \cdots\cdots$$

یعنی $۲^{\text{ن}-۱} (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\, \text{جب}^{\text{ن}}\, \text{طہ} = \text{جب ن طہ} - \text{ن جب}\,(\text{ن}-۲)\,\text{طہ}$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor\underline{۲}}\, \text{جب}\,(\text{ن} - ۴)\, \text{طہ} - \cdots\cdots\cdots (۵)$$

چونکہ صورت ہذا میں ن طاق ہے اس لئے مساوات (۴) کی بائیں جانب تعدادِ رقوم جفت ہوگی۔ پس کل رقوم دو دو رقموں کے ازدواج میں پوری تقسیم ہو جائینگی اور کوئی رقم اکیلی نہ بچیگی لہذا (۵) کی آخری رقم میں جب طہ شامل ہوگا۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ آخری رقم $(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}} \dfrac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}\;\lfloor\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{۲}}}\,\text{جب طہ}$ ہوگی۔

۷۴۔ مشق ۱۔ جب^۶ طہ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کرو۔

یہ معلوم ہے کہ

$$\text{۲}^{\text{۶}}\,\text{خ}^{\text{۶}}\,\text{جب}^{\text{۶}}\,\text{طہ} = \left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)^{\text{۶}}$$

$$= \text{لا}^{\text{۶}} - \text{۶}\,\text{لا}^{\text{۴}} + \text{۱۵}\,\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲۰} + \text{۱۵} \times \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}} - \text{۶} \times \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۴}}} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۶}}}$$

$$\text{اسلئے}\; -\text{۲}^{\text{۶}}\,\text{جب}^{\text{۶}}\,\text{طہ} = \left(\text{لا}^{\text{۶}} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۶}}}\right) - \text{۶}\left(\text{لا}^{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۴}}}\right) + \text{۱۵}\left(\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}}\right) - \text{۲۰}$$

$$= \text{۲ جم ۶ طہ} - \text{۶} \times \text{۲ جم ۴ طہ} + \text{۱۵} \times \text{۲ جم ۲ طہ} - \text{۲۰}$$

$$\therefore\; -\text{۲}^{\text{۵}}\,\text{جب}^{\text{۶}}\,\text{طہ} = \text{جم ۶ طہ} - \text{۶ جم ۴ طہ} + \text{۱۵ جم ۲ طہ} - \text{۱۰}$$

مشق ۲ — جب^۷ طہ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو۔

ظاہر ہے کہ $\text{۲}^{\text{۷}}\,\text{خ}^{\text{۷}}\,\text{جب}^{\text{۷}}\,\text{طہ} = \left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)^{\text{۷}}$

$$= \text{لا}^{\text{۷}} - \text{۷}\,\text{لا}^{\text{۵}} + \text{۲۱}\,\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۳۵}\,\text{لا} + \text{۳۵} \times \frac{\text{۱}}{\text{لا}} - \text{۲۱} \times \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۳}}} + \text{۷} \times \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۵}}} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۷}}}$$

$$= \left(\text{لا}^{\text{۷}} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۷}}}\right) - \text{۷}\left(\text{لا}^{\text{۵}} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۵}}}\right) + \text{۲۱}\left(\text{لا}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۳}}}\right) - \text{۳۵}\left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)$$

∴ −۲^{۶} خ جب^{۷} طہ = ۲ خ جب ۷ طہ − ۷ × ۲ خ جب ۵ طہ
+ ۲۱ × ۲ خ جب ۳ طہ − ۳۵ × ۲ خ جب طہ

∴ −۲^{۶} جب^{۷} طہ = جب ۷ طہ − ۷ جب ۵ طہ + ۲۱ جب ۳ طہ − ۳۵ جب طہ

مشق ۳ — جم^{۵} طہ جب^{۷} طہ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو —

ہمیں معلوم ہے کہ ۲^{۵} جم^{۵} طہ = (لا + ۱/لا)^{۵} اور ۲^{۷} خ^{۷} جب^{۷} طہ = (لا − ۱/لا)^{۷}

اسلئے ۲^{۱۲} خ^{۷} جم^{۵} طہ جب^{۷} طہ = (لا^{۲} − ۱/لا^{۲})^{۵} (لا − ۱/لا)^{۲}

= [لا^{۱۰} − ۵ لا^{۶} + ۱۰ لا^{۲} − ۱۰/لا^{۲} + ۵/لا^{۶} − ۱/لا^{۱۰}] [لا^{۲} − ۲ + ۱/لا^{۲}]

= (لا^{۱۲} − ۱/لا^{۱۲}) − ۲ (لا^{۱۰} − ۱/لا^{۱۰}) − ۴ (لا^{۸} − ۱/لا^{۸}) + ۱۰ (لا^{۶} − ۱/لا^{۶})
+ ۵ (لا^{۴} − ۱/لا^{۴}) − ۲۰ (لا^{۲} − ۱/لا^{۲})

لہذا حسب سابق

− ۲^{۱۱} جم^{۵} طہ جب^{۷} طہ = جب ۱۲ طہ − ۲ جب ۱۰ طہ − ۴ جب ۸ طہ
+ ۱۰ جب ۶ طہ + ۵ جب ۴ طہ − ۲۰ جب ۲ طہ

امثلہ ۷

ثابت کرو کہ

۱ — جب^{۵} طہ = ۱/۱۶ [جب ۵ طہ − ۵ جب ۳ طہ + ۱۰ جب طہ]

۲ — جم^{۹} طہ = ۱/۲۵۶ [جم ۹ طہ + ۹ جم ۷ طہ + ۳۶ جم ۵ طہ + ۸۴ جم ۳ طہ + ۱۲۶ جم طہ]

۳ — جم^{۱۰} طہ = ۱/۵۱۲ [جم ۱۰ طہ + ۱۰ جم ۸ طہ + ۴۵ جم ۶ طہ + ۱۲۰ جم ۴ طہ + ۲۱۰ جم ۲ طہ + ۱۲۶]

۴- $\text{جب}^{۸}$ طہ = $\frac{۱}{۱۲۸}$ [جم ۸ طہ - ۸ جم ۶ طہ + ۲۸ جم ۴ طہ - ۵۶ جم ۲ طہ + ۳۵]

۵- $\text{جب}^{۹}$ طہ = $\frac{۱}{۲۵۶}$ [جب ۹ طہ - ۹ جب ۷ طہ + ۳۶ جب ۵ طہ - ۸۴ جب ۳ طہ + ۱۲۶ جب طہ]

۶- $۲^{۵}$ $\text{جب}^{۴}$ طہ $\text{جم}^{۲}$ طہ = جم ۶ طہ - ۲ جم ۴ طہ - جم ۲ طہ + ۲

۷- $۲^{۶}$ $\text{جب}^{۵}$ طہ $\text{جم}^{۲}$ طہ = جب ۷ طہ - ۳ جب ۵ طہ + جب ۳ طہ + ۵ جب طہ

۸- $۲^{۱۰}$ $\text{جب}^{۳}$ طہ $\text{جم}^{۸}$ طہ = جب ۱۱ طہ + ۵ جب ۹ طہ + ۷ جب ۷ طہ - ۵ جب ۵ طہ - ۲۲ جب ۳ طہ - ۱۴ جب طہ

۴۸- $\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}$ کی تفصیل جم طہ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔

اگر لا > ۱ تو

$$\frac{\text{جب طہ}}{\text{۱-۲ لا جم طہ + لا}^{۲}} = \text{جب طہ + لا جب ۲ طہ + لا}^{۲}\text{ جب ۳ طہ}$$

+ .... + $\text{لا}^{\text{ن-۱}}$ جب ن طہ + ... تالامتناہی .....(۱)

اس کو ثابت کرنے کے لئے دونوں جانب ۱- ۲ لا جم طہ + $\text{لا}^{۲}$ سے ضرب دو تو دائیں طرف کا رکن جب طہ کے مساوی ہوگا۔

اس کا باضابطہ ثبوت باب ہشتم میں دیا جائے گا۔

مساوات (۱) میں $\text{لا}^{\text{ن-۱}}$ کے سروں کو برابر کرنے سے

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{لا}^{\text{ن-۱}}\text{ کا سر }[\text{۱-۲ لا جم طہ + لا}^{۲}]^{-۱}\text{ کی تفصیل میں}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن-۱}}\text{ کا سر }[\text{۱- لا (۲ جم طہ - لا)}]^{-۱}\text{ کی تفصیل میں}$$

= لا$^{\text{ن-۱}}$ کا سر ۱ + لا (۲ جم طہ - لا) + لا^{۲} (۲ جم طہ - لا)^{۲} + ...

+ لا$^{\text{ن-۳}}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن-۳}}$ + لا$^{\text{ن-۲}}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن-۲}}$ + لا$^{\text{ن-۱}}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن-۱}}$

+ لا$^{\text{ن}}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}}$ + ... میں .... (۲)

اب لا$^{\text{ن-۱}}$ کا سر لا$^{\text{ن-۱}}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن-۱}}$ کی تفصیل میں

= (۲ جم طہ)$^{\text{ن-۱}}$

لا$^{\text{ن-۱}}$ کا سر لا$^{\text{ن-۲}}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن-۲}}$ کی تفصیل میں

= لا کا سر (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن-۲}}$ کی تفصیل میں

= - (ن - ۲) (۲ جم طہ)$^{\text{ن-۳}}$

اسی طرح سے لا$^{\text{ن-۱}}$ کا سر، لا$^{\text{ن-۳}}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن-۳}}$ میں

= لا^{۲} کا سر (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن-۳}}$ میں

$$= \frac{\text{(ن-۳)(ن-۴)}}{\underline{|\text{۲}}} \text{(۲ جم طہ)}^{\text{ن-۵}}$$

علیٰ ہذا القیاس

اس لئے مندرجہ بالا طریقہ کے بموجب مساوات (۲) کی تمام رقوم میں سے لا$^{\text{ن-۱}}$ کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{(۲ جم طہ)}^{\text{ن-۱}} - \text{(ن-۲) (۲ جم طہ)}^{\text{ن-۳}}$$

$$+ \frac{\text{(ن-۳)(ن-۴)}}{\underline{|\text{۲}}} \text{(۲ جم طہ)}^{\text{ن-۵}}$$

$$- \frac{\text{(ن-۴)(ن-۵)(ن-۶)}}{\underline{|\text{۳}}} \text{(۲ جم طہ)}^{\text{ن-۷}} + \ldots\ldots$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو سلسلہ بالا کی آخری رقم

(-۱)$^{\frac{ن-۱}{۲}}$ ہو گی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم (-۱)$^{\frac{ن}{۲}-۱}$ (ن جم طہ) ہو گی۔

۴۹ — جم ن طہ کی تفصیل جم طہ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔

اگر لا $<$ ۱ تو

$$\frac{\text{۱ - لا}^{۲}}{\text{۱ - ۲ لا جم طہ + لا}^{۲}} = \text{۱ + ۲ لا جم طہ + ۲ لا}^{۲}\text{ جم ۲ طہ}$$

+ ۲ لا^{۳} جم ۳ طہ + ... + ۲ لا^{ن} جم ن طہ + ... تا لا تناہی.....(۱)

اس کو ثابت کرنے کے لئے مساوات کے دونوں جانب ۱ - ۲ لا جم طہ + لا^{۲} سے ضرب دو۔ تب بائیں جانب کا رکن ۱ - لا^{۲} کے مساوی ہو جائے گا۔ اس کا باضابطہ ثبوت باب ہشتم میں دیا جائے گا۔

مساوات (۱) میں لا^{ن} کے سروں کو باہم مساوی کرنے سے

۲ جم ن طہ = لا^{ن} کا سر (۱ - لا^{۲}) [۱ - ۲ لا جم طہ + لا^{۲}]$^{-۱}$ کی تفصیل میں

= لا^{ن} کا سر - لا$^{ن-۲}$ کا سر [۱ - لا (۲ جم طہ - لا)]$^{-۱}$ کی تفصیل میں

= لا^{ن} کا سر - لا$^{ن-۲}$ کا سر ذیل کے سلسلہ میں [۱ + لا (۲ جم طہ - لا) + لا^{۲} (۲ جم طہ - لا)^{۲}

+ ..... + لا$^{ن-۲}$ (۲ جم طہ - لا)$^{ن-۲}$ + لا$^{ن-۱}$ (۲ جم طہ - لا)$^{ن-۱}$

+ لا^{ن} (۲ جم طہ - لا)^{ن} + لا$^{ن+۱}$ (۲ جم طہ - لا)$^{ن+۱}$ + ...]

دفعہ گذشتہ کی طرح رقم لا^{ن} (۲ جم طہ - لا)^{ن} سے شروع ہو کر لا^{ن} کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

۲ جم ن طہ = (۲ جم طہ)^{ن} - (ن - ۱) (۲ جم طہ)$^{ن-۲}$

$$+\frac{(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{|\underline{۲}}(۲\ \text{جم طہ})^{\text{ن}-۴}$$

$$-\frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{|\underline{۳}}(۲\ \text{جم طہ})^{\text{ن}-۶}+\cdots\cdots$$

$$-\Big[(۲\text{جم طہ})^{\text{ن}-۲}-(\text{ن}-۳)(۲\text{جم طہ})^{\text{ن}-۴}+\frac{(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{|\underline{۲}}\times(۲\ \text{جم طہ})^{\text{ن}-۶}-\cdots\cdots\Big]$$

$$=(۲\text{جم طہ})^{\text{ن}}-\text{ن}(۲\text{جم طہ})^{\text{ن}-۲}+\Big[\frac{(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{|\underline{۲}}+(\text{ن}-۳)\Big](۲\text{جم طہ})^{\text{ن}-۴}$$

$$-\Big[\frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{|\underline{۳}}+\frac{(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{|\underline{۲}}\Big](۲\text{جم طہ})^{\text{ن}-۶}+\cdots\cdots$$

یعنی بالآخر $۲\ \text{جم ن طہ}=(۲\ \text{جم طہ})^{\text{ن}}-\text{ن}\,(۲\ \text{جم طہ})^{\text{ن}-۲}$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-۳)}{|\underline{۲}}(۲\ \text{جم طہ})^{\text{ن}-۴}$$

$$-\frac{\text{ن}(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{|\underline{۳}}(۲\text{جم طہ})^{\text{ن}-۶}+\cdots\cdots\quad(۲)$$

یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو آخری رقم $(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{ن}\,(۲\text{جم طہ})$ ہو گی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم $(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\times ۲$ ہو گی۔

۵۰ — $\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}$ کی تفصیل جم طہ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔

حسب دفعہ ۴۸

$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}=\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کا سر $[۱-۲\text{لا جم طہ}+\text{لا}^۲]^{-۱}$ کی تفصیل میں

$= \text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کا سر $[۱ + \text{لا}\,(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})]^{-۱}$ کی تفصیل میں

$= \text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کا سر ذیل کے سلسلہ میں $[۱ - \text{لا}\,(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ}) + \text{لا}^{۲}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{۲} - \dots\dots + (-۱)^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\text{ر}} + \dots\dots]$ (۱)

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے یعنی ن-۱ جفت ہے تب ظاہر ہے کہ سلسلہ بالا کی صرف انہی رقوم سے $\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کا کوئی سر حاصل ہو سکتا ہے جن میں ر کی قیمت $\frac{\text{ن}-۱}{۲}$ یا اس سے زیادہ ہے، لہذا صورت موجودہ میں

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{لا}^{\text{ن}-۱}\ \text{کا سر ذیل کے سلسلہ میں}$$

$$۱ - \text{لا}\,(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ}) + \dots\dots + (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}$$

$$+ (-۱)^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}} + (-۱)^{\frac{\text{ن}+۳}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}+۳}{۲}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}+۳}{۲}}$$

$$+ \dots\dots + (-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-۱} + \dots\dots$$

دفعہ ۸۴ کی طرح مذکورہ بالا سلسلہ میں سے $\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}} + (-۱)^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}}\left[\frac{\frac{\text{ن}-۱}{۲}\times\frac{\text{ن}+۱}{۲}}{\underline{|۲}}\right](-۲\,\text{جم طہ})^{۲}$$

$$+ (-۱)^{\frac{\text{ن}+۳}{۲}}\,\frac{\frac{\text{ن}-۳}{۲}\times\frac{\text{ن}-۱}{۲}\times\frac{\text{ن}+۱}{۲}\times\frac{\text{ن}+۳}{۲}}{\underline{|۴}}(-۲\,\text{جم طہ})^{۴} + \dots\dots + (۲\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-۱}$$

پس جب ن طاق ہو تو بالآخر

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = ۱ - \frac{\text{ن}^{۲} - ۱^{۲}}{\underline{|۲}}\,\text{جم}^{۲}\,\text{طہ} + \frac{(\text{ن}^{۲} - ۱^{۲})(\text{ن}^{۲} - ۳^{۲})}{\underline{|۴}}\,\text{جم}^{۴}\,\text{طہ}$$

$$-\frac{(\text{ن}^2-١^2)(\text{ن}^2-٣^2)(\text{ن}^2-٥^2)}{\lfloor ٦}\ \text{جم}^6\,\text{طہ} - \ldots + (-١)^{\frac{\text{ن}-١}{٢}}(٢\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-١} \ldots (٢)$$

صورت دوم فرض کرو کہ ن **جفت** ہے یعنی ن−١ طاق ہے۔
سلسلہ (١) میں صرف انہی رقوم سے $\text{لا}^{\text{ن}-١}$ کا کوئی سر حاصل ہو سکتا ہے جن میں ر کی قیمت $\frac{\text{ن}}{٢}$ یا اس سے زیادہ ہو۔
لہذا صورت ہذا میں

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{لا}^{\text{ن}-١}\ \text{کا سر ذیل کے سلسلہ میں}$$

$$١ - \text{لا}(\text{لا} - ٢\,\text{جم طہ}) + \ldots + (-١)^{\frac{\text{ن}}{٢}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}}{٢}}(\text{لا} - ٢\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}}{٢}}$$

$$+ (-١)^{\frac{\text{ن}}{٢}+١}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}}{٢}+١}(\text{لا} - ٢\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}}{٢}+١} + (-١)^{\frac{\text{ن}}{٢}+٢}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}}{٢}+٢}(\text{لا} - ٢\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}}{٢}+٢} + \ldots$$

$$+ (-١)^{\text{ن}-١}\,\text{لا}^{\text{ن}-١}(\text{لا} - ٢\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-١} + \ldots\ldots$$

مطلوبہ سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = (-١)^{\frac{\text{ن}}{٢}} \times \frac{\text{ن}}{٢}(-٢\,\text{جم طہ}) + (-١)^{\frac{\text{ن}}{٢}+١}\frac{(١-\frac{\text{ن}}{٢})(-\frac{\text{ن}}{٢})(١+\frac{\text{ن}}{٢})}{\lfloor ٣}(-٢\,\text{جم طہ})^3$$

$$+ (-١)^{\frac{\text{ن}}{٢}+٢} \times \frac{(٢-\frac{\text{ن}}{٢})(١-\frac{\text{ن}}{٢})(-\frac{\text{ن}}{٢})(١+\frac{\text{ن}}{٢})(٢+\frac{\text{ن}}{٢})}{\lfloor ٥}(-٢\,\text{جم طہ})^5 \times \ldots + (٢\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-١}$$

پس جب ن جفت ہو تو بالآخر

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{ن جم طہ} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-٢^2)}{\lfloor ٣}\,\text{جم}^3\,\text{طہ}\ (-١)^{\frac{\text{ن}}{٢}+١}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-٢^2)(\text{ن}^2-٤^2)}{\lfloor ٥}\,\text{جم}^5\,\text{طہ} - \ldots + (-١)^{\frac{\text{ن}}{٢}+١}(٢\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-١} \ldots\ldots (٣)$$

نوٹ - یہ معلوم کرنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ دفعہ ہذا کے ہر دو سلسلے در اصل دفعہ ۴۸ ہی کا سلسلہ ہیں جبکہ موخرالذکر کو الٹا لکھا جائے - یہ امر طریقہ ثبوت سے بخوبی واضح ہے اور نیز اس کا بلا واسطہ ثبوت الگ دیا جا سکتا ہے۔

۵۱ - جم ن طہ کی تفصیل جم طہ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو -

بموجب دفعہ ۴۹

$$\text{۲ جم ن طہ} = \text{لا}^{\text{ن}} \text{ کا سر} - \text{لا}^{\text{ن}-۲} \text{ کا سر } (۱ - ۲\,\text{لا جم طہ} + \text{لا}^{۲})^{-۱} \text{ میں}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} \text{ کا سر} - \text{لا}^{\text{ن}-۲} \text{ کا سر ذیل کے سلسلۂ ذیل میں}$$

$$۱ - \text{لا}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ}) + \text{لا}^{۲}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{۲} - \dots + (-۱)^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\text{ر}} + \dots\dots \quad (۱)$$

حسب دفعہ ۴۹ -

صورت اول - فرض کرو کہ ن طاق ہے یعنی ن - ۱ جفت ہے

جن سروں کی ہمیں ضرورت ہے وہ صرف انہی رقوم سے حاصل ہوتے ہیں جن میں ر کی قیمت $\frac{\text{ن}-۱}{۲}$ یا اس سے زیادہ ہو۔

لہذا ۲ جم ن طہ = لا^ن کا سر - لا^(ن-۲) کا سر ذیل کے سلسلہ میں

$$۱ - \text{لا}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ}) + \dots + (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}$$

$$+ (-۱)^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}} + (-۱)^{\frac{\text{ن}+۳}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}+۳}{۲}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}+۳}{۲}}$$

$$+ \dots\dots + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}(\text{لا} - ۲\,\text{جم طہ})^{\text{ن}} + \dots\dots$$

$$= (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\left[-\frac{\text{ن}-۱}{۲}(-۲\,\text{جم طہ})\right] + (-۱)^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}}\left[\frac{\text{ن}+۱}{۲}(-۲\,\text{جم طہ}) - \frac{\frac{\text{ن}+۱}{۲}\times\frac{\text{ن}-۱}{۲}\times\frac{\text{ن}-۳}{۲}}{|\underline{۳}}(-۲\,\text{جم طہ})^{۳}\right]$$

$$+(-1)^{\frac{\text{ن}+3}{2}}\left[\frac{\frac{\text{ن}+3}{2}\times\frac{\text{ن}+1}{2}\times\frac{\text{ن}-1}{2}}{\lfloor 3}(-2\,\text{جم ط})^{3}-\frac{\frac{\text{ن}+3}{2}\times\frac{\text{ن}+1}{2}\times\frac{\text{ن}-1}{2}\times\frac{\text{ن}-3}{2}\times\frac{\text{ن}-5}{2}}{\lfloor 5}(-2\,\text{جم ط})^{5}\right]$$

$$+\dots\dots+(2\,\text{جم ط})^{\text{ن}}$$

$$\therefore\quad(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}(2\,\text{جم ن ط})$$

$$=\text{جم ط}\left[(\text{ن}-1)+(\text{ن}+1)\right]-\frac{(\text{ن}+1)(\text{ن}-1)}{\lfloor 3}\text{جم}^{3}\text{ط}\left[(\text{ن}-3)+(\text{ن}+3)\right]$$

$$+\frac{(\text{ن}+3)(\text{ن}+1)(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)}{\lfloor 5}\text{جم}^{5}\text{ط}\left[(\text{ن}-5)+(\text{ن}+5)\right]+\dots$$

$$+(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}(2\,\text{جم ط})^{\text{ن}}$$

پس جب ن طاق ہو تو بالآخر

$$(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\,\text{جم ن ط}$$

$$=\text{ن جم ط}-\frac{\text{ن}(\text{ن}^{2}-1^{2})}{\lfloor 3}\text{جم}^{3}\text{ط}+\frac{\text{ن}(\text{ن}^{2}-1^{2})(\text{ن}^{2}-3^{2})}{\lfloor 5}\text{جم}^{5}\text{ط}$$

$$-\dots\dots(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\,2^{\text{ن}-1}\,\text{جم}^{\text{ن}}\text{ط}\dots\dots(2)$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن **جفت** ہے۔

جن سروں کی ہمیں ضرورت ہے وہ صرف انہی رقوم سے حاصل ہو سکتے ہیں جن میں ر کی قیمت $\frac{\text{ن}-2}{2}$ یا اس سے زیادہ ہو اس لئے

۲ جم ن ط = $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر - $\text{لا}^{\text{ن}-2}$ کا سر ذیل کے سلسلہ میں

$$1-\text{لا}(\text{لا}-2\,\text{جم ط})+\dots\dots+(-1)^{\frac{\text{ن}-2}{2}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}-2}{2}}(\text{لا}-2\,\text{جم ط})^{\frac{\text{ن}-2}{2}}$$

$$+(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,(\text{لا}-۲\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}}{۲}}+(-۱)^{\frac{\text{ن}+۲}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}+۲}{۲}}\,(\text{لا}-۲\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}+۲}{۲}}$$

$$+\cdots\cdots+(-۱)^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,(\text{لا}-۲\,\text{جم طہ})^{\text{ن}}+\cdots\cdots$$

$$=(-۱)^{\frac{\text{ن}-۲}{۲}}\Big[-۱\Big]+(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\left[۱-\frac{\frac{\text{ن}}{۲}\left(\frac{\text{ن}-۲}{۲}\right)}{\lfloor ۲}(-۲\,\text{جم طہ})^{۲}\right]$$

$$+(-۱)^{\frac{\text{ن}+۲}{۲}}\left[\frac{\frac{\text{ن}+۲}{۲}\times\frac{\text{ن}}{۲}}{\lfloor ۲}(-۲\,\text{جم طہ})^{۲}-\frac{\frac{\text{ن}+۲}{۲}\times\frac{\text{ن}}{۲}\times\frac{\text{ن}-۲}{۲}\times\frac{\text{ن}-۴}{۲}}{\lfloor ۴}(-۲\,\text{جم طہ})^{۴}\right]$$

$$+(-۱)^{\frac{\text{ن}+۴}{۲}}\left[\frac{\frac{\text{ن}+۴}{۲}\times\frac{\text{ن}+۲}{۲}\times\frac{\text{ن}}{۲}\times\frac{\text{ن}-۲}{۲}}{\lfloor ۴}(-۲\,\text{جم طہ})^{۴}\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{\text{ن}+۴}{۲}\times\frac{\text{ن}+۲}{۲}\times\frac{\text{ن}}{۲}\times\frac{\text{ن}-۲}{۲}\times\frac{\text{ن}-۴}{۲}\times\frac{\text{ن}-۶}{۲}}{\lfloor ۶}(-۲\,\text{جم طہ})^{۶}\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots+(۲\,\text{جم طہ})^{\text{ن}}$$

$$\therefore(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}(۲\,\text{جم ن طہ})=\Big[۱+۱\Big]-\frac{\text{جم}^{۲}\text{طہ}}{\lfloor ۲}\Big[\text{ن}(\text{ن}-۲)+(\text{ن}+۲)\,\text{ن}\Big]$$

$$+\frac{\text{جم}^{۴}\text{طہ}}{\lfloor ۴}\Big[(\text{ن}+۲)\,\text{ن}\,(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۴)+(\text{ن}+۴)(\text{ن}+۲)\,\text{ن}\,(\text{ن}-۲)\Big]$$

$$+\cdots\cdots+(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}(۲\,\text{جم طہ})^{\text{ن}}$$

پس جب ن **جفت** ہو تو بالآخر

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,\text{جم ن طہ}=۱-\frac{\text{ن}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\text{طہ}}{\lfloor ۲}+\frac{\text{ن}^{۲}(\text{ن}^{۲}-۲^{۲})}{\lfloor ۴}\,\text{جم}^{۴}\text{طہ}$$

$$-\frac{\text{ن}^{۲}(\text{ن}^{۲}-۲^{۲})(\text{ن}^{۲}-۴^{۲})}{\lfloor ۶}\,\text{جم}^{۶}\text{طہ}+\cdots\cdots+(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}$$

نوٹ - حسب سابق دفعہ ہذا کے ہر دو سلسلے (۲)، (۳) درحقیقت دفعہ ۴۶ (۳)

ہی کا سلسلہ (۲) ہیں جبکہ موخرالذکر کو الٹا لکھا جائے۔

۵۲۔ اگر ن طاق ہو تو دفعہ ۵۰ کی مساوات (۲) سے اور دفعہ ۵۱ کی مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ

$$(-1)^{\frac{ن-1}{2}}\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = 1 - \frac{ن^2-1^2}{\lfloor 2}\,\text{جم}^2\text{طہ} + \frac{(ن^2-1^2)(ن^2-3^2)}{\lfloor 4}\,\text{جم}^4\text{طہ}$$
$$- \frac{(ن^2-1^2)(ن^2-3^2)(ن^2-5^2)}{\lfloor 6}\,\text{جم}^6\text{طہ} + \dots\dots$$
$$+ (-1)^{\frac{ن-1}{2}}(2\,\text{جم طہ})^{ن-1} \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

اور

$$(-1)^{\frac{ن-1}{2}}\text{جم ن طہ} = ن\,\text{جم طہ} - \frac{ن(ن^2-1^2)}{\lfloor 2}\,\text{جم}^3\text{طہ} + \frac{ن(ن^2-1^2)(ن^2-3^2)}{\lfloor 5}\,\text{جم}^5\text{طہ}$$
$$+ \dots\dots + (-1)^{\frac{ن-1}{1}}\,2^{ن-1}\,\text{جم}^{ن}\text{طہ} \dots\dots\dots \quad (2)$$

ان مساواتوں میں اگر طہ کو $\frac{\pi}{2}$ ۔ طہ میں اور بنا بریں جم طہ کو جب طہ میں تبدیل کردیا جائے تو جب ن طہ بدل کر جب $(\frac{ن\pi}{2} - ن\,\text{طہ})$ یعنی $(-1)^{\frac{ن-1}{2}}$ جم ن طہ اور جم ن طہ بدل کر جم $(\frac{ن\pi}{2} - ن\,\text{طہ})$ یعنی $(-1)^{\frac{ن-1}{2}}$ جب ن طہ ہو جائیگا۔

دفعہ ہذا کی مساوات (۱) اور (۲) میں حسبہ تغیر کرنے سے اگر ن **طاق** ہو تو

$$\text{جم ن طہ} = \text{جم طہ}\left\{1 - \frac{ن^2-1^2}{\lfloor 2}\,\text{جب}^2\text{طہ} + \frac{(ن^2-1^2)(ن^2-3^2)}{\lfloor 4}\,\text{جب}^4\text{طہ}\right.$$
$$\left. - \dots\dots + (-1)^{\frac{ن-1}{2}}\,2^{ن-1}\,\text{جب}^{ن-1}\text{طہ}\right\} \dots\dots \quad (3)$$

اور

$$\text{جب ن طہ} = ن\,\text{جب طہ} - \frac{ن(ن^2-1^2)}{\lfloor 3}\,\text{جب}^3\text{طہ} + \frac{ن(ن^2-1^2)(ن^2-3^2)}{\lfloor 5}\,\text{جب}^5\text{طہ}$$

$$+\ \ldots\ldots + (-1)^{\frac{ن-1}{2}} \times 2^{ن-1}\,\text{جب}^{ن}\,\text{طہ}\ \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

۵۳ - نیز اگر ن **جفت** ہو تو دفعہ ۵۰ کی مساوات (۳) اور دفعہ ۵۱ کی مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ

$$(-1)^{\frac{ن}{2}+1}\,\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{ن جم طہ}\ \frac{ن(ن^2-2^2)}{\underline{\lfloor 3}}\,\text{جم}^3\,\text{طہ}$$

$$+\ \frac{ن(ن^2-2^2)(ن^2-4^2)}{\underline{\lfloor 5}}\,\text{جم}^5\,\text{طہ} + \ldots + (-1)^{\frac{ن}{2}+1}\,(2\,\text{جم طہ})^{ن-1}\ \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{اور}\ (-1)^{\frac{ن}{2}}\,\text{جم ن طہ} = 1 - \frac{ن^2}{\underline{\lfloor 2}}\,\text{جم}^2\,\text{طہ} + \frac{ن^2(ن^2-2^2)}{\underline{\lfloor 4}}\,\text{جم}^4\,\text{طہ} - \ldots\ldots$$

$$+\ (-1)^{\frac{ن}{2}}\,2^{ن-1}\,(\text{جم}^{ن}\,\text{طہ})\ \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ان مساواتوں میں اگر طہ کو $(\frac{\pi}{2} - \text{طہ})$ میں اور بنا بریں جم طہ کو جب طہ میں تبدیل کردیا جائے تو جب ن طہ بدل کر جب $(\frac{ن\pi}{2} - \text{ن طہ})$ یعنی $(-1)^{\frac{ن}{2}+1}$ جب ن طہ اور جم ن طہ بدل کر جم $(\frac{ن\pi}{2} - \text{ن طہ})$ یعنی $(-1)^{\frac{ن}{2}}$ جم ن طہ ہو جائے گا۔

پس حسبہٗ تغیر کرنے سے اگر ن **جفت** ہو تو

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جم طہ}} = \text{ن جب طہ} - \frac{ن(ن^2-2^2)}{\underline{\lfloor 3}}\,\text{جب}^3\,\text{طہ} + \frac{ن(ن^2-2^2)(ن^2-4^2)}{\underline{\lfloor 5}}\,\text{جب}^5\,\text{طہ}$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{ن}{2}+1}\,(2\,\text{جب طہ})^{ن-1}\ \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{اور جم ن طہ} = 1 - \frac{ن^2}{\underline{\lfloor 2}}\,\text{جب}^2\,\text{طہ} + \frac{ن^2(ن^2-2^2)}{\underline{\lfloor 4}}\,\text{جب}^4\,\text{طہ}$$

$$+\ \ldots\ldots (-1)^{\frac{ن}{2}}\,2^{ن-1}\,\text{جب}^{ن}\,\text{طہ}\ \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

۵۴ - اگر ن طاق ہو تو دفعہ ۵۲ کے سلسلے (۱)، (۲) اور اگر ن

جفت ہو تو دفعہ ۵۳ کے سلسلے (۱)، (۲) بالترتیب جب ن طہ اور جم ن طہ کی تفصیلوں کو جم طہ کی صعودی قوتوں کی رقوم میں ظاہر کرتے ہیں۔ نیز ن کی طاق یا جفت قیمتوں کے واسطے دفعات بالا کے سلسلے (۳)، (۴) ہر دو مقادیر مذکورہ یعنی جب ن طہ کی اور جم ن طہ کی تفصیلوں کو جب طہ کی صعودی قوتوں کی رقوم میں ظاہر کرتے ہیں

امثلہ ۸

ثابت کرو کہ

۱۔ جب ۷ طہ = ۷ جب طہ − ۵۶ جب^{۳} طہ + ۱۱۲ جب^{۵} طہ − ۶۴ جب^{۷} طہ

۲۔ جم ۷ طہ = ۶۴ جم^{۷} طہ − ۱۱۲ جم^{۵} طہ + ۵۶ جم^{۳} طہ − ۷ جم طہ

۳۔ جب ۸ طہ = جب طہ [۱۲۸ جم^{۷} طہ − ۱۹۲ جم^{۵} طہ + ۸۰ جم^{۳} طہ − ۸ جم طہ]

۴۔ جم ۸ طہ = ۱ − ۳۲ جب^{۲} طہ + ۱۶۰ جب^{۴} طہ − ۲۵۶ جب^{۶} طہ + ۱۲۸ جب^{۸} طہ

۵۔ جب ۹ طہ = جب طہ {۲۵۶ جم^{۸} طہ − ۴۴۸ جم^{۶} طہ + ۲۴۰ جم^{۴} طہ − ۴۰ جم^{۲} طہ + ۱}

۶۔ جم ۶ طہ کو صرف جم طہ کی رقوم میں بیان کرو اور نتیجہ کی تصدیق کرو

جبکہ طہ = $\frac{\pi}{۳}$ اور طہ = $\frac{\pi}{۲}$

۷۔ ذیل کی جبریہ مساوات متماثلہ کو ثابت کرو

ف^{ن} + ق^{ن} = (ف + ق)^{ن} − ن (ف + ق)$^{ن-۲}$ ف ق

+ $\frac{ن(ن-۳)}{۲}$ (ف + ق)$^{ن-۴}$ ف^{۲} ق^{۲} + ...

اور اس سے حاصل کرو

۲ جم ن طہ = (۲ جم طہ)^{ن} − ن (۲ جم طہ)$^{ن-۲}$ + $\frac{ن(ن-۳)}{۲}$ (۲ جم طہ)$^{ن-۴}$

− ......

۵۵ - مشق - ذیل کے سلسلوں کی قیمتیں معلوم کرو

$\text{قط ط} + \text{قط}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right) + \text{قط}\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right) + \cdots$ ن رقموں تک

$\text{قط ط} + \text{قط}^{۲}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right) + \text{قط}^{۲}\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right) + \cdots$ ن رقموں تک

دفعہ ۵۱ کی مساواتوں (۲) اور (۳) سے ہمیں معلوم ہے کہ اگر ن **طاق** ہو اور جم ط کو م سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ن م} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^{۲}-۱^{۲})}{|\underline{۳}}\text{م}^{۳} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^{۲}-۱^{۲})(\text{ن}^{۲}-۳^{۲})}{|\underline{۵}}\text{م}^{۵} + \cdots + (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{م}^{\text{ن}}$$

$$= (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جم ن ط} \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

اور اگر ن **جفت** ہو تو

$$۱ - \frac{\text{ن}^{۲}}{|\underline{۲}}\text{م}^{۲} + \frac{\text{ن}^{۲}(\text{ن}^{۲}-۲^{۲})}{|\underline{۴}}\text{م}^{۴} + \cdots + (-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{م}^{\text{ن}}$$

$$= (-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,\text{جم ن ط} \quad \cdots\cdots\cdots (۲)$$

اب اگر جم ن ط کی قیمت معلوم ہو تو مساواتوں (۱)، (۲) سے جم ط کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

لیکن چونکہ $\text{جم ن ط} = \text{جم}(\text{ن ط} + ۲\pi) = \text{جم}(\text{ن ط} + ۴\pi) = \cdots$

اسلئے ان مساواتوں سے

$\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)$، $\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)$، $\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۶\pi}{\text{ن}}\right)$،

وغیرہ کی قیمتیں بھی حاصل ہونگی۔

اسلئے ہر حالت میں قیمتیں حسب ذیل ہونگی:-

جم ط، $\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)$، $\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right) \cdots\cdots$ ن رقموں تک

مساواتوں (۱)، (۲) میں م کو $\frac{۱}{\text{ما}}$ کے برابر لکھو اور $\text{ما}^{\text{ن}}$ سے ضرب دو تب ذیل کی مساواتیں حاصل ہونگی:-

جب ن **طاق** ہو تو

$$(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\,\text{جم ن طہ} \times \text{ما}^{\text{ن}} - \text{ن ما}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1)}{|2}\,\text{ما}^{\text{ن}-3} - \ldots\ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ (3)$$

اور جب ن **جفت** ہو تو

$$\left\{(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\,\text{جم ن طہ} - 1\right\}\text{ما}^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}^2}{|2}\,\text{ما}^{\text{ن}-2} - \ldots\ldots \quad (4)$$

ان مساواتوں کی اصلیں

$$\text{قط طہ}،\ \text{قط}\left(\text{طہ} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)،\ \text{قط}\left(\text{طہ} + \frac{4\pi}{\text{ن}}\right)،\ \ldots\ldots$$

ہونگی۔

ان کو ما_1، ما_2، ما_3 .... $\text{ما}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کرو

تب $\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \text{ما}_3 + \ldots + \text{ما}_{\text{ن}}$ = قیمتوں کا مجموعہ

$$= \frac{\text{ن}}{(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\,\text{جم ن طہ}} = (-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\,\text{ن قط ن طہ} \quad (\text{اگر ن طاق ہو})$$

$$\text{اور} = 0 \qquad (\text{اگر ن جفت ہو})$$

$$\text{نیز}\ \text{ما}_1^2 + \text{ما}_2^2 + \ldots + \text{ما}_{\text{ن}}^2 = (\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \ldots + \text{ما}_{\text{ن}})^2 - 2(\text{ما}_1\text{ما}_2 + \text{ما}_2\text{ما}_3 + \ldots\ldots)$$

$$= \frac{\text{ن}^2}{\text{جم}^2\,\text{ن طہ}} = \text{ن}^2\,\text{قط}^2\,\text{ن طہ} \quad (\text{اگر ن طاق ہو})$$

$$\text{اور} = -2\,\frac{\frac{\text{ن}^2}{|2}}{(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\,\text{جم ن طہ} - 1} = \frac{\text{ن}^2}{1 - (-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\,\text{جم ن طہ}} \quad (\text{اگر ن جفت ہو})$$

امثلہ ۹

ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو

$$1 - \text{جم طہ جم}\left(\text{طہ} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{4\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\ldots\text{جم}\left\{\text{طہ} + (\text{ن}-1)\frac{2\pi}{\text{ن}}\right\}$$

۲- جب ط جب $\left(ط+\frac{\pi ٢}{ن}\right)$ جب $\left(ط+\frac{\pi ٤}{ن}\right)$ .... جب $\left[ط+(ن-١)\frac{\pi ٢}{ن}\right]$

۳- قم^٢ ط + قم^٢ $\left(ط+\frac{\pi ٢}{ن}\right)$ + قم^٢ $\left(ط+\frac{\pi ٤}{ن}\right)$ .... ن رقموں تک

۴- مس^٢ ط + مس^٢ $\left(ط+\frac{\pi ٢}{ن}\right)$ + مس^٢ $\left(ط+\frac{\pi ٤}{ن}\right)$ ...... ن رقموں تک۔

[ذیل کے پانچ سوالوں میں دفعہ ۳۰ کی مساوات (۵) سے شروع کرو]

۵- مس ط + مس $\left(ط+\frac{\pi}{ن}\right)$ + مس $\left(ط+\frac{\pi ٢}{ن}\right)$ ..... ن رقموں تک

۶- ‌ظم ط + ظم $\left(ط+\frac{\pi}{ن}\right)$ + ظم $\left(ط+\frac{\pi ٢}{ن}\right)$ .... رر

۷- مس ط مس $\left(ط+\frac{\pi}{ن}\right)$ مس $\left(ط+\frac{\pi ٢}{ن}\right)$ .... ن اجزائے ضربی تک

۸- مس^٢ ط + مس^٢ $\left(ط+\frac{\pi}{ن}\right)$ + مس^٢ $\left(ط+\frac{\pi ٢}{ن}\right)$ + ... ن رقموں تک

۹- اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ ق = ۳ ھ = ن^٢ - ۱

جہاں ق = قط^٢ $\frac{\pi}{ن}$ + قط^٢ $\frac{\pi ٢}{ن}$ + قط^٢ $\frac{\pi ٣}{ن}$ + ... (ن-۱) رقموں تک

اور ھ = قم^٢ $\frac{\pi}{ن}$ + قم^٢ $\frac{\pi ٢}{ن}$ + قم^٢ $\frac{\pi ٣}{ن}$ + ... (ن-۱) رقموں تک

۱۰- اگر قط $\left(ط+\frac{\pi ر٢}{ن}\right)$ میں ر کو صفر سے لیکر ن - ۱ تک تمام قیمتیں دی جائیں تو جو رقوم اس طرح سے حاصل ہوں گی ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

نوٹ - ابواب مابعد کی خواندگی سے طالب علم کو معلوم ہو جائیگا کہ دفعات ۱۴۹ اور ۱۵۰ کے نتائج دفعہ ۱۱۰ کی مدد سے بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔

یعنی $\frac{٢ جم ن ط}{}$ = لا^{ن} کا سر - لوک [۱ - لا (۲ جم ط - لا)] کی تفصیل میں۔

It is ... Gm from ... ... required

باب پنجم

سلسلۂ قوت نما ملتف مقداروں کیلئے

تفاعیلِ مستدیرہ ملتف زاویوں کیلئے اور زائدی تفاعیل

۵۶۔ اگر لا کوئی حقیقی مقدار ہو تو ہم دفعہ ۵ میں ثابت کر چکے ہیں کہ

$$و^{لا} = ۱ + لا + \frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{لا^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \quad (۱)$$

اگر لا حقیقی نہ ہو بلکہ ملتف ہو یعنی اگر لا، د + خ ب کی شکل کا ہو تو اس صورت میں فی الحال ہم و^لا کو کوئی معنی نہیں پہنا سکتے۔

فرض کرو کہ ہم اس رقم (یعنی و^لا) کی تعریف یوں کرتے ہیں کہ لا کی تمام قیمتوں کے واسطے (خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا ملتف) و^لا سے مراد ذیل کا سلسلہ ہے۔

$$۱ + لا + \frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{لا^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \ldots (۲)$$

۵۷۔ ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر لا ملتف ہو تو یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{ر} \left(\text{جم طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب طہ}\right)$

$$\text{تب}\ \text{و}^{\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\ \text{تالاتناہی}$$

$$= 1 + \text{ر}\left(\text{جم طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب طہ}\right) + \frac{\text{ر}^2\left(\text{جم ۲ طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب ۲ طہ}\right)}{\lfloor 2} + \frac{\text{ر}^3\left(\text{جم ۳ طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب ۳ طہ}\right)}{\lfloor 3}$$

$$+ \ldots\ldots\ \text{تالاتناہی}$$

$$= 1 + \text{ر جم طہ} + \frac{\text{ر}^2\ \text{جم ۲ طہ}}{\lfloor 2} + \frac{\text{ر}^3\ \text{جم ۳ طہ}}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$$

$$+ \sqrt{-1}\left[\text{ر جب طہ} + \frac{\text{ر}^2\ \text{جب ۲ طہ}}{\lfloor 2} + \frac{\text{ر}^3\ \text{جب ۳ طہ}}{\lfloor 3} + \ldots\right]$$

مقدار $1 + \text{ر جم طہ} + \frac{\text{ر}^2\ \text{جم ۲ طہ}}{\lfloor 2} + \frac{\text{ر}^3\ \text{جم ۳ طہ}}{\lfloor 3} + \ldots$ تالاتناہی

$$< 1 + \text{ر} + \frac{\text{ر}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{ر}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\ \text{تالاتناہی}$$

اور چونکہ موخرالذکر سلسلہ ر کی تمام حقیقی قیمتوں کے واسطے مستدق ہے اس لئے پہلا سلسلہ بھی مستدق ہے ... (دفعہ ۲)

اسی طرح سے سلسلہ

$$\text{ر جب طہ} + \frac{\text{ر}^2\ \text{جب ۲ طہ}}{\lfloor 2} + \frac{\text{ر}^3\ \text{جب ۳ طہ}}{\lfloor 3} + \ldots$$

بھی مستدق ہے۔

پس ثابت ہوا کہ $\text{و}^{\text{لا}}$ کا سلسلہ ہمیشہ مستدق ہوتا ہے۔

۵۸ — پس اگر لا کوئی ملتف مقدار ہو تو $\text{و}^{\text{لا}}$ سلسلہ

$$1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$$

کو لکھنے کا ایک مختصر طریقہ ہوا۔

یاد رہے کہ سوائے اُس صورت کے کہ جب لا حقیقی ہو، مقدار ولا میں و سے مراد سلسلہ

$$1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

نہیں ہے۔

جب لا ملتف ہو تو ولا اُسی شکل کے ایک سلسلہ کو تعبیر کرتا ہے جو سلسلہ کہ لا کے حقیقی ہونے کی صورت میں

$$\left(1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\right)^{\text{لا}}$$

کے برابر ثابت کیا جا چکا ہے۔

۵۹۔ اُسی قسم کے ثبوت سے جو سی سمتھ کے الجبرا دفعہ ۳۰۴ میں دیا گیا ہے یہ آسانی سے بتایا جا سکتا ہے کہ

$$\text{و}^{\text{لا}}\,\text{و}^{\text{ما}}=\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}}$$

جہاں لا اور ما خواہ حقیقی ہوں خواہ ملتف۔

پس لا اور ما کے ملتف ہونے کی صورت میں بھی تفاعیل ولا اور وما قوت نما کے معمولی ضوابط کے تابع رہتے ہیں۔

۶۰۔ اگر لا کی بجائے خ طہ رکھا جائے جہاں طہ حقیقی ہے تو

$$\text{و}^{\text{خ طہ}}=1+\text{خ طہ}+\frac{\text{خ}^2\,\text{طہ}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{خ}^3\,\text{طہ}^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{\text{طہ}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{طہ}^4}{\underline{|4}}-\frac{\text{طہ}^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$$

$$+\text{خ}\left[\text{طہ}-\frac{\text{طہ}^3}{\underline{|3}}+\frac{\text{طہ}^5}{\underline{|5}}-\frac{\text{طہ}^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots\right]$$

= جم طہ + خ جب طہ ...... (دفعات ۳۲، ۳۳)

لہذا $\text{و}^{-\text{خ طہ}}$ = جم طہ − خ جب طہ

پس عمل جمع سے جم طہ = $\frac{\text{و}^{\text{خ طہ}} + \text{و}^{-\text{خ طہ}}}{۲}$

اور عمل تفریق سے جب طہ = $\frac{\text{و}^{\text{خ طہ}} - \text{و}^{-\text{خ طہ}}}{۲\,\text{خ}}$

ملتف زاویوں کے تفاعیل مستدیرہ

۶۱ — اگر لا کوئی ملتف مقدار ہو تو اب تک تفاعیل جب لا اور جم لا کو کوئی معنی نہیں دئے جا سکتے۔

ہم پہلے دفعات ۳۲، ۳۳ میں ثابت کر چکے ہیں کہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے واسطے

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\lfloor ۵} - \frac{\text{لا}^{۷}}{\lfloor ۷} + \ldots\ldots \text{ تا لا تناہی}$$

$$\text{اور جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\lfloor ۴} - \frac{\text{لا}^{۶}}{\lfloor ۶} + \ldots\ldots \text{ تا لا تناہی}$$

فرض کرو کہ ہم جب لا اور جم لا کی تعریف ہی اس طرح کرتے ہیں کہ لا کے ملتف ہونے کی صورت میں ان سے بالترتیب اوپر کے سلسلے مراد ہوتے ہیں، یعنی فرض کرو کہ

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\lfloor ۵} - \frac{\text{لا}^{۷}}{\lfloor ۷} + \ldots\ldots \text{ تا لا تناہی} \quad (۱)$$

$$\text{اور جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\lfloor ۴} - \frac{\text{لا}^{۶}}{\lfloor ۶} + \ldots\ldots \text{ تا لا تناہی} \quad (۲)$$

جس صورت میں لا ملتف ہو تو سلاسل بالا کی بائیں جانب کے

رکنوں کو بالتفصیل لکھنے کی بجائے ہم ان کو محض اختصار کی خاطر جب لا اور جم لا سے تعبیر کرتے ہیں۔

۶۲۔ تب لا کی تمام (حقیقی یا ملتف) قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم لا} + \text{خ جب لا} = ۱ + \text{خ لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲!} - \frac{\text{خ لا}^{۳}}{۳!} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۴!} \cdots$$

$$= ۱ + \text{خ لا} + \frac{(\text{خ لا})^{۲}}{۲!} + \frac{(\text{خ لا})^{۳}}{۳!} + \frac{(\text{خ لا})^{۴}}{۴!} + \cdots\cdots$$

$$= \text{و}^{\text{خ لا}} \quad \cdots\cdots \quad (\text{دفعہ ۵۶})$$

لہذا $\text{جم لا} - \text{خ جب لا} = \text{و}^{-\text{خ لا}}$

پس لا کی تمام حقیقی یا ملتف قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}}}{۲} \quad \text{اور} \quad \text{جب لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}}}{۲\text{خ}}$$

ان مقادیر کو **آئیلر کی قوت نما قیمتیں** کہتے ہیں۔

۶۳۔ اس موقع پر یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ جمع اور تفریق کے مثلثی ضابطے خیالی زاویوں کے لئے بھی درست ہوتے ہیں، یعنی یہ کہ لا خواہ حقیقی ہو یا ملتف

$$\text{جب}(\text{لا} + \text{ما}) = \text{جب لا جم ما} + \text{جم لا جب ما}$$

$$\text{جم}(\text{لا} + \text{ما}) = \text{جم لا جم ما} - \text{جب لا جب ما}$$

$$\text{جب}(\text{لا} - \text{ما}) = \text{جب لا جم ما} - \text{جم لا جب ما}$$

$$\text{اور جم}(\text{لا} - \text{ما}) = \text{جم لا جم ما} + \text{جب لا جب ما}$$

چونکہ $\text{جم لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}}}{۲}$ اور $\text{جب لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}}}{۲\text{خ}}$

اسلئے جب لا جم ما + جم لا جب ما $= \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}}}{\text{۲خ}} \times \frac{\text{و}^{\text{خ ما}} + \text{و}^{-\text{خ ما}}}{\text{۲}} + \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}}}{\text{۲}} \times \frac{\text{و}^{\text{خ ما}} - \text{و}^{-\text{خ ما}}}{\text{۲خ}}$

$= \frac{\text{۲ و}^{\text{خ لا}} \times \text{و}^{\text{خ ما}} - \text{۲ و}^{-\text{خ لا}} \times \text{و}^{-\text{خ ما}}}{\text{۴خ}} = \frac{\text{و}^{\text{خ(لا+ما)}} - \text{و}^{-\text{خ(لا+ما)}}}{\text{۲خ}}$ ..... دفعہ ۵۹

= جب (لا + ما)

اسی طرح سے باقی نتائج بھی ثابت کئے جا سکتے ہیں۔

۶۴— جو کچھ اوپر بیان ہوا اس سے ظاہر ہے کہ جو مثلثی ضوابط حقیقی زوایا کے واسطے ثابت کئے جا چکے ہیں اور جمع اور تفریق کے نظریات پر مبنی ہیں وہ سب اس صورت میں بھی درست رہتے ہیں جب ہم حقیقی زوایا کی بجائے کوئی ملتف مقداریں مندرج کردیں۔

مثلاً اگر طہ حقیقی ہو تو ہم جانتے ہیں کہ

جم ۳ طہ = ۴ جم^{۳} طہ − ۳ جم طہ

اسلئے جم ۳ (لا + خ ما) = ۴ جم^{۳} (لا + خ ما) − ۳ جم (لا + خ ما)

نیز چونکہ ڈمی مائیور کے مسئلہ سے ہم جانتے ہیں کہ اگر طہ حقیقی ہو تو ن کی کسی قیمت کے واسطے

جم ن طہ + خ جب ن طہ، (جم طہ + خ جب طہ)$^{\text{ن}}$ کی ن قیمتوں میں سے ایک قیمت ہے اسلئے جم ن (لا + خ ما) + خ جب ن (لا + خ ما)

ہمیشہ $\{$جم (لا + خ ما) + خ جب (لا + خ ما)$\}^{\text{ن}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہوگی

۶۵۔ ملتف تفاعیل مستدیرہ کے ادوار۔ دفعہ ۶۳ کی مساواتوں (۱)، (۲) میں فرض کرو کہ لا کوئی ملتف مقدار ہے اور نیز فرض کرو کہ

ما = ۲π

تب $\text{جب}\,(\text{لا} + ۲\pi) = \text{جب لا جم}\,۲\pi + \text{جم لا جب}\,۲\pi$

$= \text{جب لا}$

اور $\text{جم}\,(\text{لا} + ۲\pi) = \text{جم لا جم}\,۲\pi - \text{جب لا جب}\,۲\pi$

$= \text{جم لا}$

پس جب لا اور جم لا کی قیمتوں میں کوئی فرق نہیں آتا اگر لا میں ۲π کا اضافہ کردیا جائے، اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر لا میں

$۴\pi,\ ۶\pi,\ \ldots\ ۲\text{ن}\pi$

کا اضافہ کر دیا جائے تو بھی جب لا اور جم لا کی قیمتوں میں کوئی فرق نہیں آتا۔ لہذا اگر لا ملتف ہو تو جب لا اور جم لا دوری تفاعل ہیں جنکا دور ۲π ہے۔

یہ نتیجہ اُن نتائج کے عین موافق ہے جو حقیقی زوایار کے واسطے حصۂ اول دفعہ ۷۶ میں معلوم کئے جا چکے ہیں۔

امثلہ ۱۰

اگر یہ تسلیم کرلیا جائے کہ $\text{جم لا} = \dfrac{\text{و}^{\text{خلا}} + \text{و}^{-\text{خلا}}}{۲}$ اور $\text{جب لا} = \dfrac{\text{و}^{\text{خلا}} - \text{و}^{-\text{خلا}}}{۲\text{خ}}$

تو ثابت کرو کہ لا اور ما کی تمام (حقیقی یا ملتف) قیمتوں کے واسطے

(۱) $\text{جم}^{۲}\,\text{لا} + \text{جب}^{۲}\,\text{لا} = ۱$ (۲) $\text{جم}\,(-\text{لا}) = \text{جم لا}$

(۳) $\text{جب}\,(-\text{لا}) = -\text{جب لا}$ (۴) $\text{جم}\,۲\text{لا} = \text{جم}^{۲}\,\text{لا} - \text{جب}^{۲}\,\text{لا} = ۱ - ۲\,\text{جب}^{۲}\,\text{لا}$

(۵) $\text{جب}\,۳\text{لا} = ۳\,\text{جب لا} - ۴\,\text{جب}^{۳}\,\text{لا}$ (۶) $\text{جم لا} - \text{جم ما} = ۲\,\text{جب}\,\dfrac{\text{لا}+\text{ما}}{۲}\,\text{جب}\,\dfrac{\text{ما}-\text{لا}}{۲}$

(۷) $\text{جب لا} - \text{جب ما} = ۲\,\text{جم}\,\dfrac{\text{لا}+\text{ما}}{۲}\,\text{جب}\,\dfrac{\text{لا}-\text{ما}}{۲}$

ثابت کرو کہ

۸- $\{\text{جب}\,(\text{عہ} + \text{طہ}) - \text{و}^{\text{خ عہ}}\,\text{جب طہ}\}^{\text{ن}} = \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{عہ}\;\text{و}^{-\text{خ ن طہ}}$

۹- $\text{جب}\,(\text{عہ} + \text{ن طہ}) - \text{و}^{\text{خ عہ}}\,\text{جب ن طہ} = \text{و}^{-\text{خ ن طہ}}\,\text{جب عہ}$

۱۰- $\{\text{جب}\,(\text{عہ} - \text{طہ}) \pm \text{و}^{\pm\text{خ عہ}}\,\text{جب طہ}\}^{\text{ن}} = \text{جب}^{\text{ن}-۱}\,\text{عہ}\,\{\text{جب}\,(\text{عہ} - \text{ن طہ}) \pm \text{و}^{\pm\text{خ عہ}}\,\text{جب ن طہ}\}$

۶۶- دفعہ ۶۲ کے ضوابط میں اگر لا کوئی خالص خیالی مقدار ہو اور خ ما کے مساوی ہو تو

چونکہ $\text{خ}^۲ = -۱$

اسلئے $\text{جم خ ما} = \frac{\text{و}^{\text{خ}\times\text{خ ما}} + \text{و}^{-\text{خ}\times\text{خ ما}}}{۲} = \frac{\text{و}^{-\text{ما}} + \text{و}^{\text{ما}}}{۲} = \frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$

اور $\text{جب خ ما} = \frac{\text{و}^{\text{خ}\times\text{خ ما}} - \text{و}^{-\text{خ}\times\text{خ ما}}}{۲\text{خ}} = \frac{\text{و}^{-\text{ما}} - \text{و}^{\text{ما}}}{۲\text{خ}} = \text{خ}\,\frac{\text{و}^{-\text{ما}} - \text{و}^{\text{ما}}}{۲(-۱)} = \text{خ}\,\frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$

۶۷- زائدی تفاعیل - **تعریف** - مقدار

$$\frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$$

کو خواہ ما حقیقی ہو یا ملتف ہمیشہ ما کی زائدی جیب کہتے ہیں اور کتابت میں اسے اختصاراً **جبز ما** سے تعبیر کرتے ہیں۔

اسی طرح سے مقدار

$$\frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$$

کو ما کی زائدی جیب التمام کہتے ہیں اور کتابت میں اختصاراً **جمز ما** سے تعبیر کرتے ہیں۔

[بغور دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جبز ما اور جمز ما کی قیمتیں بالترتیب جب ما اور جم ما کی قوت نما قیمتوں میں علامات خ کو حذف کردینے سے حاصل ہوتی ہیں]

زائدی مماس، مماس التمام، قاطع، قاطع التمام کی قیمتیں زائدی جیب اور

جیب التمام سے اسی طرح سے معلوم کی جاتی ہیں جس طرح سے کہ معمولی مماس، مماس التمام، قاطع، قاطع التمام کی قیمتیں معمولی جیب اور جیب التمام سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثلاً $\text{مسز ما} = \frac{\text{جبز ما}}{\text{جمز ما}} = \frac{\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}}}{\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}}}$

$\text{قمز ما} = \frac{1}{\text{جبز ما}} = \frac{2}{\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}}}$

$\text{قطز ما} = \frac{1}{\text{جمز ما}} = \frac{2}{\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}}}$

$\text{ممز ما} = \frac{1}{\text{مسز ما}} = \frac{\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}}}{\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}}}$

زائدی جیوب اور جیوب التمام کو ایک منحنی کے ساتھ جس کو قائم ہذلولی یا قائم قطع زائد کہتے ہیں وہی تعلق ہے جو معمولی جیوب اور جیوب التمام کو دائرہ کے ساتھ ہے۔ اسی وجہ سے لفظ زائدی کا استعمال کیا گیا ہے۔

۶۸ ـ دفعات ۶۶، ۶۷ سے ظاہر ہے کہ

$$\left.\begin{aligned} &\text{جم}(\text{خ ما}) = \text{جمز ما} \\ &\text{اور جب}(\text{خ ما}) = \text{خ جبز ما} \\ &\text{اسلئے مس}(\text{خ ما}) = \text{خ مسز ما} \end{aligned}\right\} \text{ضوابط}$$

۶۹ ـ علم مثلث کے اُن عام ترین ضوابط کے جواب میں جو زوایا کی نسبتوں سے متعلق ہیں ہذلولی نسبتوں کے ضوابط کا بھی ایک نظام ہے مثلاً ہمیں معلوم ہے کہ زاویہ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم}^2\,\text{طہ} + \text{جب}^2\,\text{طہ} = 1$$

پس $\text{جم}^2(\text{خ طہ}) + \text{جب}^2(\text{خ طہ}) = 1$

لہذا دفعہ گذشتہ کی رو سے

$$\text{جمز}^2\,\text{طہ} - \text{جبز}^2\,\text{طہ} = 1$$

[یہ نتیجہ زائدی تفاعیل کی تعریف سے بھی براہِ راست حاصل ہو سکتا ہے ۔

$$\text{جمز}^{۲}\,\text{طه} - \text{جیبز}^{۲}\,\text{طه} = \left(\frac{\text{و}^{\text{طه}} + \text{و}^{-\text{طه}}}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{\text{و}^{\text{طه}} - \text{و}^{-\text{طه}}}{۲}\right)^{۲}$$

$$= \frac{\text{و}^{۲\text{طه}} + ۲ + \text{و}^{-۲\text{طه}}}{۴} - \frac{\text{و}^{۲\text{طه}} - ۲ + \text{و}^{-۲\text{طه}}}{۴} = ۱$$]

نیز ہم جانتے ہیں کہ ی اور و کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جب}\,(\text{ی} + \text{و}) = \text{جب ی جم و} + \text{جم ی جب و}$$

ی کی بجائے خ لا اور و کی بجائے خ ما رکھنے سے

$$\text{جب}\,[\text{خ}\,(\text{لا} + \text{ما})] = \text{جب خ لا جم خ ما} + \text{جم خ لا جب خ ما}$$

تب دفعۂ ماقبل کی رو سے

$$\text{خ جیبز}\,(\text{لا} + \text{ما}) = \text{خ جیبز لا جمز ما} + \text{جمز لا} \times \text{خ جیبز ما}$$

$$\therefore \text{جیبز}\,(\text{لا} + \text{ما}) = \text{جیبز لا جمز ما} + \text{جمز لا جیبز ما}$$

[براہ راست زائدی نسبتوں کی تعریف کی رو سے

$$\text{جیبز لا جمز ما} + \text{جمز لا جیبز ما}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{۲} \times \frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{۲} + \frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{۲} \times \frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$$

جو عمل ضرب سے $= \dfrac{۲\,\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}} - ۲\,\text{و}^{-(\text{لا}+\text{ما})}}{۴} = \text{جیبز}\,(\text{لا} + \text{ما})$]

نیز ہمیں معلوم ہے کہ طه کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{مس}\,۳\,\text{طه} = \frac{۳\,\text{مس طه} - \text{مس}^{۳}\,\text{طه}}{۱ - ۳\,\text{مس}^{۲}\,\text{طه}}$$

اس میں طه کی بجائے خ لا رکھنے سے

$$\text{مس}\,(۳\,\text{خ لا}) = \frac{۳\,\text{مس}\,(\text{خ لا}) - \text{مس}^{۳}\,(\text{خ لا})}{۱ - ۳\,\text{مس}^{۲}\,(\text{خ لا})}$$

اس لئے دفعہ ۶۸ کی رُو سے

$$\text{خ مسنز}\,(\text{۳ لا}) = \frac{\text{۳ خ مسنز لا} - \text{خ}^{۳}\ \text{مسنز}^{۳}\ \text{لا}}{\text{۱} - \text{۳ خ}^{۲}\ \text{مسنز}^{۲}\ \text{لا}}$$

$$\text{پس مسنز ۳ لا} = \frac{\text{۳ مسنز لا} + \text{مسنز}^{۳}\ \text{لا}}{\text{۱} + \text{۳ مسنز}^{۲}\ \text{لا}}$$

حسب سابق اسکا ثبوت بھی مسنز لا کی تعریف سے بآسانی اخذ کیا جا سکتا ہے۔

۷۰۔ عام طور پر دفعہ ۶۸ کی مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی عام ضابطہ میں جو زوایا کی جیوب التمام کے لئے درست ہو 'جم' کی بجائے جمز پڑھیں تو بھی ضابطہ مذکور درست رہے گا۔
نیز چونکہ جب^{۲} (خ ما) = ۔ جبنز^{۲} ما اسلئے دفعہ مذکورہ بالا کی مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں کوئی ایسا ضابطہ معلوم ہو جس میں کسی زاویہ کی جیب کا مربع اور جیب التمام دونوں شامل ہوں تو اس ضابطہ میں 'جم' کی بجائے 'جمز' اور 'جب^{۲}' کی بجائے '۔ جبنز^{۲}' لکھنے سے جو ضابطہ حاصل ہوگا وہ بھی درست ہوگا۔
اسی طرح مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ ہم کسی ضابطہ کو جس میں 'مس^{۲}' شامل ہو محض مسز^{۲} کی بجائے '۔ مسنز^{۲}' لکھنے سے ایک متشابہ ضابطہ میں تحویل کر سکتے ہیں۔

اس طریقہ سے ہم دفعات ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۴۴، ۴۶، اور ۴۸ - ۵۳ سے اور نیز حصہ اول کی دفعات ۲۴۷ اور ۲۴۸ سے ایسے متشابہ سلسلے اور ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زائدی تفاعیل پر مشتمل ہوں

۷۱۔ (دفعہ ۵۶ کے سلسلہ کو مدنظر رکھتے ہوئے) دفعہ ۶۷ کی رُو سے ظاہر ہے کہ

$$\text{جمز لا} = \frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{-\text{لا}}\right)$$

$$= 1 + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4} + \frac{\text{لا}^6}{\lfloor 6} + \cdots\cdots$$

$$\text{اور جبز لا} = \frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{-\text{لا}}\right)$$

$$= \text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^5}{\lfloor 5} + \frac{\text{لا}^7}{\lfloor 7} + \cdots\cdots$$

یہ جمز لا اور جبز لا کی تفصیلی قیمتیں کہلاتی ہیں۔

۶۷ — زائدی تفاعیل کے ادوار۔

ہم جانتے ہیں کہ ط کی تمام حقیقی یا مختلف قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم خ ط} = \text{جمز ط}$$

$$\text{اس لئے جمز}\,(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{جم}\left\{(\text{لا} + \text{خ ما})\,\text{خ}\right\} = \text{جم}\,(\text{خ لا} - \text{ما})$$

$$= \text{جم}\left[-2\pi + \text{خ لا} - \text{ما}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{دفعہ ۶۵}$$

$$= \text{جم}\left[(2\pi\,\text{خ} + \text{لا} + \text{خ ما})\,\text{خ}\right] = \text{جمز}\left[2\pi\,\text{خ} + \text{لا} + \text{خ ما}\right]$$

$$= \text{اسی طرح سے جمز}\left[4\pi\,\text{خ} + \text{لا} + \text{خ ما}\right] = \cdots\cdots$$

پس ثابت ہوا کہ زائدی جیب التمام ایک دوری تفاعل ہے جس کا دور خیالی ہے اور '۲خ π' کے مساوی ہے۔

نیز چونکہ جبز ط = −خ جب خ ط اسلئے

$$\text{جبز}\,(\text{لا} + \text{خ ما}) = -\text{خ جب}\left\{(\text{لا} + \text{خ ما})\,\text{خ}\right\}$$

$$= -\text{خ جب}\left\{\text{خ لا} - \text{ما}\right\}$$

$$= -\text{خ جب}\left[-2\pi + \text{خ لا} - \text{ما}\right]$$

$$= -\text{خ جب}\left\{\left[2\pi\,\text{خ} + \text{لا} + \text{خ ما}\right]\text{خ}\right\}$$

= جبز [۲π خ + لا + خ ما]

پس جبز (لا + خ ما) کا دور ۲π خ ہے۔

اسی طرح یہ بتایا جا سکتا ہے کہ مسز (لا + خ ما) کا دور خ π ہوتا ہے

زائدی تفاعلوں کا دور حقیقی نہیں ہوتا بلکہ خیالی ہوتا ہے، اس لحاظ سے زائدی تفاعیل، مستدیر تفاعیل سے اختلاف رکھتے ہیں۔

۳۷- مشق ۱- جب (عہ + خ بہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو۔ ہمیں معلوم ہے کہ

جب (عہ + خ بہ) = جب عہ جم خ بہ + جم عہ جب خ بہ

$$= \text{جب عہ}\ \frac{\text{و}^{\text{بہ}} + \text{و}^{-\text{بہ}}}{۲} + \text{جم عہ}\ \frac{\text{و}^{\text{بہ}} - \text{و}^{-\text{بہ}}}{۲\text{خ}}$$

$$= \text{جب عہ}\ \frac{\text{و}^{\text{بہ}} + \text{و}^{-\text{بہ}}}{۲} + \text{خ جم عہ}\ \frac{\text{و}^{\text{بہ}} - \text{و}^{-\text{بہ}}}{۲}$$

= جب عہ جمز بہ + خ جم عہ جبز بہ

مشق ۲- مس (عہ + خ بہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{مس (عہ + خ بہ)} = \frac{\text{جب (عہ + خ بہ)}}{\text{جم (عہ + خ بہ)}}$$

$$= \frac{\text{۲جب (عہ + خ بہ) جم (عہ − خ بہ)}}{\text{۲جم (عہ + خ بہ) جم (عہ − خ بہ)}} = \frac{\text{جب ۲عہ + جب ۲خ بہ}}{\text{جم ۲عہ + جم ۲خ بہ}}$$

$$= \frac{\text{جب ۲عہ + خ جبز ۲بہ}}{\text{جم ۲عہ + جمز ۲بہ}} \quad \ldots\ldots \text{(دفعہ ۶۸)}$$

متبادل ثبوت

فرض کرو کہ مس (عہ + خ بہ) = لا + خ ما

پس مس (عہ - خ بہ) = لا - خ ما

$\therefore$ لا = $\frac{1}{2}$ [مس (عہ + خ بہ) + مس (عہ - خ بہ)]

$= \frac{\text{جب(عہ+خ بہ) جم(عہ-خ بہ) + جم(عہ+خ بہ) جب(عہ-خ بہ)}}{\text{۲ جم(عہ+خ بہ) جم(عہ-خ بہ)}}$

$= \frac{\text{جب ۲ عہ}}{\text{جم ۲ عہ + جم ۲ خ بہ}} = \frac{\text{جب ۲ عہ}}{\text{جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ}}$

نیز ما = $\frac{1}{2\text{خ}}$ {مس (عہ + خ بہ) - مس (عہ - خ بہ)}

$= \frac{1}{2\text{خ}} \times \frac{\text{جب(عہ+خ بہ) جم(عہ-خ بہ) - جم(عہ+خ بہ) جب(عہ-خ بہ)}}{\text{جم(عہ+خ بہ) جم(عہ-خ بہ)}}$

$= \frac{1}{\text{خ}} \times \frac{\text{جب ۲ خ بہ}}{\text{جم ۲ عہ + جم ۲ خ بہ}} = \frac{\text{جبز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ}}$

$\therefore$ مس (عہ + خ بہ) = $\frac{\text{جب ۲ عہ + خ جبز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ}}$

مشق ۳ — جمز (عہ + خ بہ) کے حقیقی اور غیر حقیقی حصے الگ الگ کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ جمز (عہ + خ بہ) = $\frac{\text{و}^{\text{عہ+خ بہ}} + \text{و}^{\text{-عہ-خ بہ}}}{2}$ ...... دفعہ ۶۷

$= \frac{\text{و}^{\text{عہ}} \times \text{و}^{\text{خ بہ}} + \text{و}^{\text{-عہ}} \times \text{و}^{\text{-خ بہ}}}{2}$

$= \frac{\text{و}^{\text{عہ}}\text{(جم بہ + خ جب بہ)} + \text{و}^{\text{-عہ}}\text{(جم بہ - خ جب بہ)}}{2}$ ...... دفعہ ۶۲

$= \frac{\text{جم بہ (و}^{\text{عہ}} + \text{و}^{\text{-عہ}}\text{) + خ جب بہ (و}^{\text{عہ}} - \text{و}^{\text{-عہ}}\text{)}}{2}$

= جم بہ جمز عہ + خ جب بہ جبنز عہ

متبادل ثبوت

جمز (عہ + خ بہ) = جم {(عہ + خ بہ) خ} ...... دفعہ ۶۸

= جم {خ عہ − بہ} = جم (خ عہ) جم بہ + جب (خ عہ) جب بہ

= جمز عہ جم بہ + خ جبنز عہ جب بہ

Im part

امثلہ ۱۱

ثابت کرو کہ

۱− جمز ۲ لا = ۱ + ۲ (جبنز لا)^{2} = ۲ (جمز لا)^{2} − ۱

۲− جمز (عہ + بہ) = جمز عہ جمز بہ + جبنز عہ جبنز بہ

۳− جمز (عہ + بہ) − جمز (عہ − بہ) = ۲ جبنز عہ جبنز بہ

۴− مسز (عہ + بہ) = (مسز عہ + مسز بہ) ÷ (۱ + مسز عہ مسز بہ)

۵− جمز ۳ لا = ۴ جمز^{3} لا − ۳ جمز لا

۶− جبنز ۳ لا = جبنز لا + ۴ جبنز^{3} لا

۷− جبنز (لا + ما) جمز (لا − ما) = $\frac{1}{2}$ (جبنز ۲ لا + جبنز ۲ ما)

۸− جمز ۲ لا + جمز ۵ لا + جمز ۸ لا + جمز ۱۱ لا = ۴ جمز (۱۳ لا ÷ ۲) جمز ۳ لا جمز (۳ لا ÷ ۲)

۹− جمز لا + جمز (لا + ما) + جمز (لا + ۲ ما) + جمز (لا + ۳ ما) ..... ن رقموں تک

= جمز (لا + (ن − ۱) ÷ ۲ ما) جبنز (ن ما ÷ ۲) ÷ جبنز (ما ÷ ۲)

۱۰− جبنز لا + جبنز (لا + ما) + جبنز (لا + ۲ ما) + ... ن رقموں تک

$$= \frac{\text{جبز}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن}-1}{2}\,\text{ما}\right)\ \text{جبز}\,\frac{\text{ن ما}}{2}}{\text{جبز}\,\frac{\text{ما}}{2}}$$

۱۱ـ جبز لا + ن جبز ۲ لا + $\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\underline{|2}}$ جبز ۳ لا + ... (ن + ۱) رقموں تک

$$= 2^{\text{ن}}\ \text{جمز}^{\text{ن}}\,\frac{\text{لا}}{2}\ \text{جبز}\left(\frac{\text{ن}}{2} + 1\right)\text{لا}$$

۱۲ـ جبز به جب عه + خ جمز به جم عه = خ جم (عه + خ به)

۱۳ـ جب ۲ عه + خ جبز ۲ به = ۲ جب (عه + خ به) جم (عه − خ به)

۱۴ـ جم (عه + خ به) + خ جب (عه + خ به) = $\text{ق}^{\text{به}}$ (جم عه + خ جب عه)

۱۵ـ اگر مس ما = مس عه مسز به اور مس ی = مم عه مسز به تو ثابت کرو کہ مس (ما + ی) = جبز ۲ به قم ۲ عه

۱۶ـ اگر ی = لوک مس $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ط}}{2}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مسز}\,\frac{\text{ی}}{2} = \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

ذیل کی مقادیر کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو۔

۱۷ـ جم (عه + خ به) ۱۸ـ مم (عه + خ به)

۱۹ـ قم (عه + خ به) ۲۰ـ قط (عه + خ به)

۲۱ـ جبز (عه + خ به) ۲۲ـ مسز (عه + خ به)

۲۳ـ قطز (عه + خ به)

۲۴ـ ثابت کرو کہ مس $\frac{\text{ی} + \text{خ و}}{2} = \frac{\text{جب ی} + \text{خ جبز و}}{\text{جم ی} + \text{جمز و}}$

۲۵ـ اگر جب (ا + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{جمز}^2\,\text{ب}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{جبز}^2\,\text{ب}} = 1$$

اور $\frac{\text{لا}^2}{\text{جب}^2\,\text{ا}} - \frac{\text{ما}^2}{\text{جم}^2\,\text{ا}} = ۱$

۲۶- اگر مس (ا + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

لا² + ما² + ۲ لا مم ۲ ا = ۱

اور لا² + ما² − ۲ ما ممز ۲ ب + ۱ = ۰

۲۷- اگر جب (طہ + خ فہ) = جم عہ + خ جب عہ تو ثابت کرو کہ

جم² طہ = ± جب عہ

۲۸- اگر جب (طہ + خ فہ) = ر (جم عہ + خ جب عہ) تو ثابت کرو کہ

ر² = $\frac{۱}{۲}$ [جمز ۲ فہ − جم ۲ طہ] اور مس عہ = مسز فہ مم طہ

۲۹- اگر جم (طہ + خ فہ) = ر (جم عہ + خ جب عہ) تو ثابت کرو کہ

$\text{فہ} = \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}\ \frac{\text{جب (طہ − عہ)}}{\text{جب (طہ + عہ)}}$

۳۰- اگر مس (طہ + خ فہ) = مس عہ + خ قط عہ تو ثابت کرو کہ

نو^۲فہ = ± مم $\frac{\text{عہ}}{۲}$ اور ۲ طہ = ن π + $\frac{\pi}{۲}$ + عہ

۳۱- اگر مس (طہ + خ فہ) = جم عہ + خ جب عہ تو ثابت کرو کہ

طہ = $\frac{\text{ن}\pi}{۲}$ + $\frac{\pi}{۴}$ اور فہ = $\frac{۱}{۲}$ لوک مس ($\frac{\pi}{۴}$ + $\frac{\text{عہ}}{۲}$)

۳۲- اگر ا + خ ب = ج مس (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

$\text{مس ۲ لا} = \frac{\text{۲ ج ا}}{\text{ج}^2 - \text{ا}^2 - \text{ب}^2}$

۳۳- اگر مس (طہ + خ فہ) = جب (لا + خ ما)

تو ممز ما جبز ۲ فہ = مم لا جب ۲ طہ

۳۴- اگر مس (عہ + خ بہ) = خ
جہاں عہ اور بہ دونوں حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ عہ غیر معین ہے اور بہ لامتناہی ہے -
ثابت کرو کہ

۳۵- $\frac{۱}{۲}$ {جبز لا + جب لا} = لا + $\frac{لا^۵}{\lfloor ۵}$ + $\frac{لا^۹}{\lfloor ۹}$ + ...تا لامتناہی

۳۶- $\frac{۱}{۲}$ {جمز لا + جم لا} = ۱ + $\frac{لا^۴}{\lfloor ۴}$ + $\frac{لا^۸}{\lfloor ۸}$ + ...تا لامتناہی

۴۷ - مقلوب دستدیر تفاعل - اگر عہ اور بہ دونوں حقیقی ہوں اور عہ = جم بہ تو دفعہ ۳۴۲ حصۂ اول میں بتایا جا چکا ہے کہ عہ کی مقلوب جیب التمام سے مراد بہ کی وہ قیمت ہے جو ۰ اور π کے درمیان واقع ہے اور یہ بھی اشارۃً مذکور ہو چکا ہے کہ بہ ایک کثیر القیمت مقدار ہوتی ہے -

اگر اب لا + خ ما = جم (ی + خ د)

تو اسی طرح سے ہم ی + خ د کو لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام کہینگے۔
لیکن چونکہ

لا + خ ما = جم (ی + خ د) = جم [۲ ن π ± (ی + خ د)] ....(دفعہ ۶۵)

اس لئے ظاہر ہے کہ

۲ ن π ± (ی + خ د)

بھی لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام ہے جہاں ن سے مراد کوئی صحیح عدد ہے
پس لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام ایک کثیر القیمت تفاعل ہے -
اگر مقلوب جیب التمام کی قیمتوں کی کثرت کو بھی ملحوظ رکھنا مقصود ہو تو

اس کو جم$^{-1}$ (لا + خ ما) کی بجائے جتم$^{-1}$ (لا + خ ما) لکھتے ہیں، اسی طرح سے دیگر مثلثی نسبتوں کی رموز کا خصا نسخ میں لکھا جانا بھی انہی معنوں پر دلالت کرتا ہے نیز لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام کی خاص قیمت سے ۲ ن π ± (ی + خ و) کی ایسی قیمت مراد ہے جس سے کہ ۲ ن π + ی یا ۲ ن π - ی کی قیمت صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔

اس قیمت خاص کو جم$^{-1}$ (لا + خ ما) سے تعبیر کرتے ہیں۔

تب ظاہر ہے کہ

جم$^{-1}$ (لا + خ ما) = ۲ ن π ± جتم$^{-1}$ (لا + خ ما)

۵۷۔ اسی طرح سے اگر

لا + خ ما = جب (ی + خ و) = جب {ن π + (-۱)^{ن} (ی + خ و)}

تو ن π + (-۱)^{ن} (ی + خ و) کو لا + خ ما کی مقلوب جیب کہتے ہیں یہ بھی ایک کثیر القیمت مقدار ہے اور جب$^{-1}$ (لا + خ ما) سے تعبیر کی جاتی ہے۔ نیز اس کی قیمت خاص سے وہ قیمت مراد ہے جس سے اس کا حقیقی حصہ $-\frac{\pi}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے، اس خاص قیمت کو جب$^{-1}$ (لا + خ ما) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ

جب$^{-1}$ (لا + خ ما) = ن π + (-۱)^{ن} جب$^{-1}$ (لا + خ ما)

اسی طرح مس$^{-1}$ (لا + خ ما) اور مس$^{-1}$ (لا + خ ما) کی تعریفات بھی حسبہ کی جا سکتی ہیں یعنی مس$^{-1}$ (لا + خ ما) کی قیمت خاص سے وہ قیمت مراد ہے جس سے اس کا حقیقی حصہ $-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ کے

درمیان واقع ہوتا ہے۔ تب ظاہر ہے کہ

$$\text{مس}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ن}\pi + \text{مس}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

اسی طرح سے

$$\text{قط}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = ۲\text{ن}\pi \pm \text{قط}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

$$\text{قم}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ن}\pi + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{قم}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

اور $\text{مم}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ن}\pi + \text{مم}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$

۷۶ - آیندہ ہم جتم^{-1}، جتب^{-1}، جتم^{-1} اور جتب^{-1} کو انہی معنوں میں استعمال کرینگے جو اوپر تجویز کئے گئے ہیں۔

۷۷ - مقلوب زائدی تفاعیل

اگر لا = جبز ما تو بموجب دفعہ ۴۸ ما = جبز^{-1} لا

اگر لا حقیقی ہو تو $\text{لا} = \dfrac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$

یعنی $\text{و}^{۲\text{ما}} - ۲\,\text{لا}\,\text{و}^{\text{ما}} + ۱ = ۰$

اس لئے $\text{و}^{\text{ما}} = \text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^۲ - ۱}$

$$= \text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ - ۱} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ + ۱}}$$

$$\therefore \text{ما} = \pm\,\text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ - ۱}\right)$$

بائیں جانب کے رکن کی علامت ہمیشہ مثبت لی جاتی ہے۔

پس ثابت ہوا کہ جب لا حقیقی ہو تو جبز^{-1} لا ایک قیمت والا تفاعل ہے۔
جبز^{-1} لا اور مسز^{-1} لا کی تعریفات بھی بدستور کی جا سکتی ہیں اور اگر لا حقیقی،

ہو تو یہ ایک قیمت والے تفاعل ہیں۔

۸۷۔ اگر عہ + خ بہ = جمز (لا + خ ما) تو لا + خ ما کو عہ + خ بہ کی مقلوب زائدی جیب التمام کہتے ہیں۔

لیکن جمز (لا + خ ما) = جمز {۲ ن خ π ± (لا + خ ما)} ... بموجب دفعہ ۲۷

اس لئے ۲ ن خ π ± (لا + خ ما) مقدار عہ + خ بہ کی مقلوب زائدی جیب التمام ہے اور اسکی خاص قیمت سے مراد اس کی وہ قیمت ہے جس میں اس کا خیالی حصہ ۰ اور خ π کے درمیان واقع ہو یعنی وہ قیمت جس سے ۲ ن π ± ما ۰ اور π کے درمیان واقع ہو۔

اسی طرح سے عہ + خ کے مقلوب زائدی جیب و مماس کی بھی تعریفیں کی جا سکتی ہیں۔ ان صورتوں میں ان کی خاص قیمتیں وہ ہونگی جن میں خیالی حصہ $-\frac{\pi}{2}$ خ اور $\frac{\pi}{2}$ خ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۸۹۔ مشق ۱۔ جب$^{-1}$ (جم طہ + خ جب طہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ کرو جہاں طہ حقیقی ہے۔

فرض کرو کہ جب$^{-1}$ {جم طہ + خ جب طہ} = لا + خ ما

یعنی جم طہ + خ جب طہ = جب (لا + خ ما)

= جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما = جب لا جمز ما + خ جم لا جبز ما

اس لئے جب لا جمز ما = جم طہ .... (۱)

اور جم لا جبز ما = جب طہ .... (۲)

مربع لینے اور جمع کرنے سے

۱ = جب^2 لا جمز^2 ما + جم^2 لا جبز^2 ما = جب^2 لا {۱ + جبز^2 ما} + جم^2 لا جبز^2 ما = جب^2 لا + جبز^2

∴ جبز^2 ما = جم^2 لا ∴ جبز ما = جم لا

اس لئے اگر جیب طہ کو مثبت فرض کیا جائے تو

مساوات (۲) سے جم² لا = جیب طہ

اور چونکہ لا کو $(-\frac{\pi}{2})$ اور $(+\frac{\pi}{2})$ کے درمیان واقع ہونا چاہئے ..... دفعہ (۵)

اس لئے جم لا = + $\sqrt{\text{جیب طہ}}$ یعنی لا = جم⁻¹ $(\sqrt{\text{جیب طہ}})$

تب مساوات (۲) سے

جیبز ما = + $\sqrt{\text{جیب طہ}}$

اسلئے $\text{تو}^{2\text{ما}} - 2\,\text{تو}^{\text{ما}}\sqrt{\text{جیب طہ}} = 1$ جو $\text{تو}^{\text{ما}}$ کے لحاظ سے درجہ دوم کی مساوات ہے

لہذا $\text{تو}^{\text{ما}} = \sqrt{\text{جیب طہ}} + \sqrt{1 + \text{جیب طہ}}$

یعنی ما = لوک $\left\{\sqrt{\text{جیب طہ}} + \sqrt{1 + \text{جیب طہ}}\right\}$

مشق ۲ — $\text{مس}^{-1}\{\text{عہ} + \text{خ بہ}\}$ کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو۔

فرض کرو کہ $\text{مس}^{-1}\{\text{عہ} + \text{خ بہ}\} = (\text{لا} + \text{خ ما})$

یعنی مس (لا + خ ما) = عہ + خ بہ

اور مس (لا − خ ما) = عہ − خ بہ

$$\therefore \text{مس } 2\,\text{لا} = \text{مس}\left\{(\text{لا} + \text{خ ما}) + (\text{لا} - \text{خ ما})\right\}$$

$$= \frac{(\text{عہ} + \text{خ بہ}) + (\text{عہ} - \text{خ بہ})}{1 - (\text{عہ} + \text{خ بہ})(\text{عہ} - \text{خ بہ})} = \frac{2\,\text{عہ}}{1 - \text{عہ}^2 - \text{بہ}^2}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{1}{2}\,\text{مس}^{-1}\frac{2\,\text{عہ}}{1 - \text{عہ}^2 - \text{بہ}^2}$$

$$\text{نیز مس }(2\,\text{خ ما}) = \text{مس}\left\{(\text{لا} + \text{خ ما}) - (\text{لا} - \text{خ ما})\right\}$$

$$= \frac{(\text{عہ} + \text{خ بہ}) - (\text{عہ} - \text{خ بہ})}{1 + (\text{عہ} + \text{خ بہ})(\text{عہ} - \text{خ بہ})} = \frac{2\,\text{خ بہ}}{1 + \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}$$

$$\therefore \text{خ}\,\frac{\text{و}^{۲\text{ما}} - \text{و}^{-۲\text{ما}}}{\text{و}^{۲\text{ما}} + \text{و}^{-۲\text{ما}}} = \frac{۲\,\text{خ}\,\text{ب}}{۱ + \text{عہ}^۲ + \text{ب}^۲} \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

$$\therefore \frac{\text{و}^{۲\text{ما}}}{\text{و}^{-۲\text{ما}}} = \frac{۱ + \text{عہ}^۲ + \text{ب}^۲ + ۲\text{ب}}{۱ + \text{عہ}^۲ + \text{ب}^۲ - ۲\text{ب}}$$

$$= \frac{(۱+\text{ب})^۲ + \text{عہ}^۲}{(۱-\text{ب})^۲ + \text{عہ}^۲}$$

$$\therefore \text{ما} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\left\{\frac{(۱+\text{ب})^۲ + \text{عہ}^۲}{(۱-\text{ب})^۲ + \text{عہ}^۲}\right\}$$

نیز مساوات (۱) سے $\text{مسز}\,۲\,\text{ما} = \dfrac{۲\text{ب}}{۱ + \text{عہ}^۲ + \text{ب}^۲}$

اس لئے $\text{ما} = \dfrac{۱}{۲}\,\text{مسز}^{-۱}\,\dfrac{۲\text{ب}}{۱ + \text{عہ}^۲ + \text{ب}^۲}$

پس $\text{مس}^{-۱}(\text{عہ} + \text{خ}\,\text{ب}) = \text{ن}\,\pi + \text{مس}^{-۱}(\text{عہ} + \text{خ}\,\text{ب})$

$$= \text{ن}\,\pi + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\text{عہ}}{۱ - \text{عہ}^۲ - \text{ب}^۲} + \frac{\text{خ}}{۲}\,\text{مسز}^{-۱}\,\frac{۲\text{ب}}{۱ + \text{عہ}^۲ + \text{ب}^۲}$$

امثلہ ۱۲

ذیل کی مقادیر کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو

۱۔ $\text{مس}^{-۱}\{\text{جم}\,\text{طہ} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{طہ}\}$

۲۔ $\text{جم}^{-۱}\{\text{جم}\,\text{طہ} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{طہ}\}$ ... جہاں طہ کوئی مثبت حادہ زاویہ ہے

ثابت کرو کہ

۳۔ $\text{جبز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ + ۱}\right\}$ ۴۔ $\text{مسز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{جبز}^{-۱}\,\dfrac{\text{لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}}$

۵۔ $\text{جمز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ - ۱}\right\}$

۶۔ $\text{مسز}^{-۱}\,\text{لا} = \dfrac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\dfrac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}}$

۷۔ $\text{جب}^{-1}(\text{قم طہ}) = \{۲\text{ن} + (-۱)^{\text{ن}}\}\frac{\pi}{۲} + \text{خ}\,(-۱)^{\text{ن}}\ \text{لوک مم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}$

۸۔ $\text{مس}^{-1}(\text{تو}^{\text{خ طہ}}) = \frac{\text{ن}\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} - \frac{\text{خ}}{۲}\ \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\text{طہ}}{۲}\right)$

۹۔ $\text{مس}^{-1}\frac{\text{مس ۲طہ} + \text{مسز ۲فہ}}{\text{مس ۲طہ} - \text{مسز ۲فہ}} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{مس طہ} - \text{مسز فہ}}{\text{مس طہ} + \text{مسز فہ}}$

$= \text{مس}^{-1}(\text{مم طہ ممز فہ})$

ذیل کی مقادیر کی ترسیمیں بناؤ جہاں لا سے مراد کوئی حقیقی مقدار ہے۔

۱۰۔ جبز لا اور قمز لا

۱۱۔ جمز لا اور قطز لا

۱۲۔ مسز لا اور ممز لا

باب ششم

ملتف مقادیر کے لوکارثم

۸۰ — اگر عہ = $\text{و}^{\text{لا}}$ اور عہ اور لا دونوں حقیقی ہوں تو ہمیں معلوم ہے کہ لا کو عہ کا لوکارثم اساس و پر کہتے ہیں۔

نیز ہم دفعہ ۵ میں بتا چکے ہیں کہ

$$\text{عہ} = \text{و}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

اس لئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ اساس و پر عہ کا لوکارثم لا ذیل کی مساوات

$$\text{عہ} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \quad \ldots\ldots(۱)$$

کی ایک اصل ہے

اب ہم مندرجہ بالا نتیجہ کو وسعت دیکر یہ معلوم کرینگے کہ ملتف مقادیر کی صورت میں یہ مسئلہ کیا شکل اختیار کرتا ہے۔

۸۱ — **تعریف** — اگر لا + خ ما کوئی ملتف مقدار ہو اور عہ + خ بہ ایک اور ملتف مقدار ایسی ہو جو $\text{و}^{\text{لا} + \text{خ ما}}$ کے یعنی سلسلہ

$$۱ + (\text{لا} + \text{خ ما}) + \frac{(\text{لا} + \text{خ ما})^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{(\text{لا} + \text{خ ما})^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots\ldots$$

کے مساوی ہو تو لا + خ ما کو مقدار عہ + خ بہ کا ایک لوکارثم کہتے ہیں

لفظ 'ایک' کے استعمال کرنے کی وجہ یہ ہے کہ درحقیقت مندرجہ بالا تعریف کے ماتحت کسی مقدار کے اور بھی بہت سے لوکارثم ہوتے ہیں اس امر کی تشریح ذیل میں کیجاتی ہے

عہ + خ بہ = و^(لا+خ ما) .... (۱)

نیز ہمیں معلوم ہے کہ دفعہ ۶۲ کے مطابق ن کی ایسی تمام قیمتوں کے لیئے جو صحیح اعداد ہوں

و^(۲ن خ π) = جم ۲ن π + خ جب ۲ن π = ۱ .... (۲)

اسلیئے مساوات (۱) اور (۲) سے ازروئے دفعہ ۵۹

عہ + خ بہ = و^(لا+خ ما) × و^(۲ن خ π) = و^(لا+(ما+۲ن π) خ)

پس متذکرہ بالا تعریف کے ماتحت یہ ظاہر ہے کہ اگر عہ + خ بہ کا لوکارثم لا + خ ما ہو تو

لا + خ ما + ۲ن π خ

یعنی لا + خ (ما + ۲ن π)

بھی اس کا ایک لوکارثم ہوگا۔

۸۲ — اب ہم ملتف مقدار عہ + خ بہ کے لوکارثم معلوم کرتے ہیں جہاں عہ اور بہ دونوں حقیقی ہیں۔

دفعہ ۲۰ کی رو سے

عہ + خ بہ = ر { جم (۲ن π + طہ) + خ جب (۲ن π + طہ) }

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

ر = + √(عہ² + بہ²)

اور طہ سے مراد $-\pi$، اور $+\pi$ کے درمیان ایسا زاویہ ہے کہ $\text{جم طہ} = \frac{\text{عہ}}{\text{ر}}$

اور $\text{جب طہ} = \frac{\text{بہ}}{\text{ر}}$

یعنی دفعہ ۲۰ کی قیود کے ماتحت

$$\text{طہ} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$$

پس اگر $\text{لا} + \text{خ ما}$ ایک لوکارتم ہو $\text{عہ} + \text{خ بہ}$ کا،

$$\text{تو ر}\left[\text{جم}(2\text{ن}\pi + \text{طہ}) + \text{خ جب}(2\text{ن}\pi + \text{طہ})\right] = \text{و}^{\text{لا}+\text{خ ما}}$$

$$= \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{خ ما}} \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{دفعہ } 59)$$

$$= \text{و}^{\text{لا}}(\text{جم ما} + \text{خ جب ما})$$

حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم ما} = \text{ر جم}\{2\text{ن}\pi + \text{طہ}\}$$

اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$$\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب ما} = \text{ر جب}\{2\text{ن}\pi + \text{طہ}\}$$

اس لئے $\text{و}^{\text{لا}} = \text{ر}$ اور $\text{ما} = 2\text{ن}\pi + \text{طہ}$

چونکہ لا اور ر دونوں حقیقی ہیں اسلئے لا، ر کا معمولی جبریہ نیپیری لوکارتم ہے

یعنی $\text{لا} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ر}$

اسلئے $\text{عہ} + \text{خ بہ}$ کا ایک لوکارتم

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ر} + \text{خ}(2\text{ن}\pi + \text{طہ})$$

یعنی $\text{لوک}_{\text{و}}\sqrt{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} + \text{خ}\left(2\text{ن}\pi + \text{مس}^{-1}\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}\right)$ ہے۔

چونکہ ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہوسکتی ہے اس لئے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\text{عہ} + \text{خ بہ}$ کے لوکارتم تعداد میں لا انتہا ہوتے ہیں اور اُنکا فرق $2\pi\,\text{خ}$ کا ضعف ہوتا ہے۔

۸۳ ۔ دفعہ ماقبل کی رو سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ لوکارتم کی اُس وسیع تعریف کے ماتحت جو دفعہ ۸۱ میں بیان کی گئی ہے کسی عدد کا لوکارتم ایک کثیر القیمت تفاعل ہوتا ہے یا صاف الفاظ میں ایک عدد کے لاانتہا لوکارتم ہوتے ہیں۔

جب قیمتوں کی اس کثرت کو بھی ملحوظ رکھنا مقصود ہو تو عہ + خ بہ کے لوکارتم کو لوك (عہ + خ بہ) لکھا جاتا ہے ۔

اسلیے لوك (عہ + خ بہ) = لوکو √(عہ۲ + بہ۲) + خ (۲ ن ٹ + مس‌ا بہ/عہ)

اگر ہم لوك (عہ + خ بہ) کی مندرجہ بالا قیمت میں ن کو صفر کے برابر فرض کریں تو جملہ محصلہ کو لوك (عہ + خ بہ) کی خاص قیمت کہتے ہیں اور لوک (عہ + خ بہ) سے تعبیر کرتے ہیں، پس

لوک (عہ + خ بہ) = لوکو √(عہ۲ + بہ۲) + خ مس‌ا بہ/عہ اور

لوك (عہ + خ بہ) = ۲ ن خ ٹ + لوک (عہ + خ بہ)

علامات لوك اور لوک کو آئندہ اختلاف معنی کے مندرجہ بالا مفہوم کے لحاظ سے استعمال کیا جائیگا۔

۸۴ ۔ ایک مثبت مقدار کا حقیقی لوکارتم صرف ایک ہوتا ہے لیکن اس کے خیالی لوکارتموں کی تعداد لاتناہی ہوتی ہے ۔

گذشتہ دفعہ کے نتیجہ میں بہ کو صفر کے برابر رکھنے سے

لوك عہ = ۲ ن خ ٹ + لوکو عہ

اس سے صاف ظاہر ہے کہ لوکارتم کی وسیع تعریف کے ماتحت ہر ایک حقیقی مقدار کا حقیقی لوکارتم صرف ایک ہوتا ہے اور یہ معمولاً لوکو عہ سے تعبیر کیا جاتا ہے لیکن غیر حقیقی لوکارتم تعداد میں لاانتہا ہوتے ہیں

اور

موخر الذکر لوکارتم، اس حقیقی لوکارتم میں ۲ خ π کا کوئی ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ نتیجہ دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) سے بھی براہ راست حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ دفعہ مذکورہ کی مساوات لامتناہی درجہ کی مساوات ہے اسلئے اسکی اصلوں کی تعداد بھی لامتناہی ہے جن میں سے حقیقی صرف ایک ہی ہے۔

یہ امر قابل توجہ ہے کہ لوکارتم کی وسیع تعریف کے بموجب کسی حقیقی عدد کا جو لوکارتم ہوتا ہے اس کی قیمت خاص، اس عدد کے معمولی جبریہ لوکارتم کے مساوی ہوتی ہے۔

۸۵ — کسی منفی مقدار کا لوکارتم۔ دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں رکھو بہ = ۰ اور عہ = − لا جہاں لا ایک حقیقی مثبت مقدار ہے

∴ + √(عہ² + بہ²) = + لا

اور مس⁻¹ (بہ/عہ) [جو ایسا زاویہ ہے کہ اسکی جیب التمام (−لا)/(+لا) یعنی −۱ ہے اور اس کی جیب صفر ہے بموجب دفعہ ۲۰] = π

∴ لوک (−لا) = ۲ ن خ π + لوک، لا + خ π

اور لوک (−لا) = لوک، لا + خ π

لہذا لوکارتم کی وسیع تعریف کے بموجب کسی منفی مقدار (−لا) کا جو لوکارتم ہوگا اسکی قیمت خاص، لا کے معمولی جبریہ لوکارتم اور خ π کے مجموعہ کے مساوی ہوگی۔

۸۶ — ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو بالتمام خیالی ہو۔ دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں عہ کو صفر کے مساوی رکھنے سے

لوگ (خ ب) = ۲ ن خ π + لوگ و ب + خ $\frac{\pi}{2}$

= لوگ و ب + خ (۲ ن + $\frac{1}{2}$) π

اس سے ثابت ہوا کہ ایک ایسی مقدار کا لوکارثم جو بالتمام خیالی ہو دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے جن میں سے پہلا حصہ حقیقی ہوتا ہے اور دوسرا خیالی اور کثیر القیمت۔

بطور صورت خاص کے ب = ۱ فرض کرو، تب

لوگ ($\sqrt{-1}$) = خ (۲ ن + $\frac{1}{2}$) π

یعنی لوگ ($\sqrt{-1}$) کی قیمت خاص $\frac{\pi}{2}$ خ ہوتی ہے۔

۸۷ — دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں

ا = جم ط

اور ب = جب ط رکھو، تب

لوگ (جم ط + خ جب ط)

= لوگ و ۱ + خ (۲ ن π + ط) = خ ط + ۲ ن خ π

اسلئے لوگ و و$^{\text{خ ط}}$ = خ ط + ۲ ن خ π

لہذا لوگ و و$^{\text{خ ط}}$ کی قیمت خاص سے یعنی لوگ و و$^{\text{خ ط}}$ سے (ط + ۲ ن π) خ کی وہ قیمت مراد ہوتی ہے جس سے ط + ۲ ن π، − π اور + π کے درمیان واقع ہو۔

۸۸ — مشق ۱ — ذیل کی رقم کو اس کے حقیقی اور خیالی حصوں میں تحلیل کرو۔

لوگ جب (لا + خ ما)

فرض کرو کہ لوگ جب (لا + خ ما) = ی + خ د

جس سے و$^{\text{ی + خ د}}$ = جب (لا + خ ما)

= جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما

$$= \text{جب لا}\ \frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{۲} + \text{خ جم لا}\ \frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{۲} \quad .... (۱)$$

بموجب دفعہ ۱۸، فرض کرو کہ مساوات بالا کی بائیں جانب کا رکن

$$\text{ر}\ [\text{جم}\ (۲\ \text{ن}\ \pi + \text{ط}) + \text{خ جب}\ (۲\ \text{ن}\ \pi + \text{ط})]$$

کے مساوی ہے، اسلئے

$$\text{ر} = + \sqrt{\text{جب}^۲\text{لا} \left(\frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}\right)^۲ + \text{جم}^۲\text{لا} \left(\frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}\right)^۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} \sqrt{(\text{و}^{۲\text{ما}} + \text{و}^{-۲\text{ما}}) - ۲\ \text{جم}\ ۲\ \text{لا}}$$

$$= \frac{۱}{۲} \sqrt{۲\ \text{جمز}\ ۲\ \text{ما} - ۲\ \text{جم}\ ۲\ \text{لا}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{جمز}\ ۲\ \text{ما} - \text{جم}\ ۲\ \text{لا}}{۲}}$$

$$\text{اور ط} = \text{مس}^{-۱} \left[\text{مم لا}\ \frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}\right] = \text{مس}^{-۱} \left[\text{مم لا مسز ما}\right]$$

اس میں ط انہی قیود کے ماتحت ہے جو دفعہ ۲۰ میں بیان کی گئی ہیں۔

تب مساوات (۱) سے

$$\text{و}^{\text{ی}}\ (\text{جم و} + \text{خ جب و}) = \text{ر} \{\text{جم}\ (۲\ \text{ن}\ \pi + \text{ط}) + \text{خ جب}\ (۲\ \text{ن}\ \pi + \text{ط})\}$$

اسلئے $\text{و}^{\text{ی}} = \text{ر}$، جس سے ی = لوگ$_{\text{و}}$ ر

اور و = ۲ ن π + ط

$\therefore$ لوگ جب (لا + خ ما) = ی + خ و

= لوگ$_{\text{و}}$ ر + (۲ ن π + ط) خ

$$= \frac{1}{2} \text{لوک}_\text{و} \left[\frac{\text{جمز ۲ ما} - \text{جم ۲ لا}}{2} \right] + \text{خ} \left[\text{۲ ن} \pi + \text{مس}^{-1} (\text{مم لا مسز ما}) \right]$$

اس میں ن کو صفر کرنے سے لوٹ جب (لا + خ ما) کی قیمت خاص معلوم ہو سکتی ہے۔

مشق ۲ — لوٹ (−۳) کی عام قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ

لا + خ ما = لوٹ (−۳)

اسلئے　　$\text{و}^{\text{لا} + \text{خ ما}} = -۳$

دفعہ ۱۸ کی طرح

−۳ = ر {جم (۲ ن π + طہ) + خ جب (۲ ن π + طہ)} رکھو۔

تب　ر = ۳　　اور　طہ = π

اسلئے ۳ {جم (۲ ن π + π) + خ جب (۲ ن π + π)}

$= \text{و}^{\text{لا} + \text{خ ما}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{خ ما}}$

$= \text{و}^{\text{لا}}$ {جم ما + خ جب ما}

لہذا $\text{و}^{\text{لا}} = ۳$ جس سے لا = $\text{لوک}_\text{و}$ ۳ اور ما = ۲ ن π + π

∴　لوٹ (−۳) = $\text{لوک}_\text{و}$ ۳ + (۲ ن π + π) خ

اس میں ن کو صفر کے مساوی رکھنے سے اس کی قیمت خاص

$\text{لوک}_\text{و}$ ۳ + خ π

حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ ۱۳

ثابت کرو کہ

۱ — لوک (جم طہ + خ جب طہ) = خ طہ　اگر　− π < طہ ≯ + π

۲ ۔ لوک (-۱) = خ π

۳ ۔ لوک (-خ) = - π/۲ خ

۴ ۔ لوک (۱ + جم ۲ طہ + خ جب ۲ طہ) = لوکو (۲ جم طہ) + خ طہ

اگر - π < طہ ≯ π

۵ ۔ لوک مس (π/۴ + لا/۲ خ) = خ مس^-۱ جبز لا

۶ ۔ لوک جم (لا + خ ما) = ۱/۲ لوکو ((جمز ۲ ما + جم ۲ لا)/۲)

- خ مس^-۱ (مس لا مسز ما)

۷ ۔ لوک جب (لا + خ ما) / جب (لا - خ ما) = ۲ خ مس^-۱ (مم لا مسز ما)

۸ ۔ لوک جم (لا - خ ما) / جم (لا + خ ما) = ۲ خ مس^-۱ (مس لا مسز ما)

۹ ۔ خ لوک (لا - خ)/(لا + خ) = π - ۲ مس^-۱ لا

۱۰ ۔ لوک (۱ + خ مس عہ) = لوکو قطعہ + خ عہ ...... جہاں عہ سے مراد کوئی مثبت حادہ زاویہ ہے۔

۱۱ ۔ لوک (۱/(۱ - لوخ طہ)) = لوکو (۱/۲ قم طہ/۲) + خ (π/۲ - طہ/۲)

۱۲ ۔ لوک (ا + خ ب)/(ا - خ ب) = ۲ خ مس^-۱ ب/ا

۱۳ ۔ لوک (-۵) = لوکو ۵ + (۲ ن π + π) خ

۱۴ ۔ لوک (۱ + خ) = ۱/۲ لوکو ۲ + خ (۲ ن π + π/۴)

۱۵ ۔ لوک لوک جب (لا + خ ما) کی قیمت معلوم کرو۔

۸۹ — $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی تعریف جب ا اور لا کوئی حقیقی یا ملتف مقادیر ہوں

جب ا اور لا حقیقی مقادیر ہوں تو ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{نو}^{\text{لا لوک ا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{دفعہ ۵})$$

لیکن جب ا اور لا دونوں ملتف ہوں تو $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی معمولی جبریہ تعریف قائم نہیں رہتی۔

فرض کرو کہ ہم اس کی (یعنی $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی) تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ لا اور ا کی تمام قیمتوں کے واسطے خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا ملتف

$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{نو}^{\text{لا لوک ا}}$$

اب بموجب دفعہ ۸۳ اگر ا ملتف ہو تو لوک ا کثیر القیمت اور ملتف ہوگا۔ یعنی $\text{ا}^{\text{لا}}$ بھی کثیر القیمت اور ملتف ہوگا۔

اسلئے $\text{ا}^{\text{لا}} = \text{نو}^{\text{لا لوک ا}} = \text{نو}^{\text{لا (۲ ن خ ر۲ + لوک ا)}}$

$\text{ا}^{\text{لا}}$ کی اس قیمت میں اگر ن کو صفر کردیا جائے تو محصلہ قیمت $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی قیمت خاص کہلاتی ہے۔

یعنی $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی قیمتِ خاص

$$= \text{نو}^{\text{لا لوک ا}}$$

$$= ۱ + \text{لا لوک ا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} (\text{لوک ا})^{۲} + \ldots\ldots\ldots \quad (\text{دفعہ ۵۶})$$

دفعہ ۵۹ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر صرف خاص قیمتوں کا لحاظ رکھا جائے تو

$$\text{ا}^{\text{لا}} \times \text{ا}^{\text{ما}} = \text{ا}^{\text{لا+ما}}$$

یعنی $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی قیمت خاص قوت نماؤں کے جبریہ ضابطہ کو پورا کرتی ہے۔

۹۰ — یہ بھی آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ اگر ما ملتف ہو تو

$$\text{لوک}(۱ + \text{ما}) = \text{ما} - \frac{۱}{۲}\text{ما}^{۲} + \frac{۱}{۳}\text{ما}^{۳} - \frac{۱}{۴}\text{ما}^{۴} + \ldots\ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

اس کا ثبوت بھی اُس ثبوت کے بعینہٖ متشابہ ہے جو ما کے حقیقی ہونے کی صورت میں دیا گیا ہے - دیکھو دفعہ ۸

بالعموم یہ ضروری ہے کہ ما کا مقیاس ایک سے کم ہو کیونکہ ملتف مقداروں کے لئے مسئلہ ثنائی صرف ایسی صورت میں درست ہے دیکھو دفعہ ۲۶

جب ما کا مقیاس ایک کے مساوی ہو یعنی جب ہم ما کو جم فہ + خ جب فہ کے مساوی فرض کر سکیں تو یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ تفصیل بالا درست ہو گی سوائے اُس صورت کے جبکہ فہ، π کا کوئی طاق ضعف ہو -

چونکہ لوٹ (۱ + ما) = ۲ ن خ π + لوک (۱ + ما)

اس لئے لوٹ (۱ + ما) = ۲ ث π + ما − $\frac{۱}{۲}$ ما^{۲} + $\frac{۱}{۳}$ ما^{۳} − $\frac{۱}{۴}$ ما^{۴} + ... تا لاانتہا

۹۱ - جملہ (عہ + خ بہ)$^{لا + خ ما}$ کے خیالی اور حقیقی حصوں کو الگ الگ کرو

فرض کرو کہ عہ + خ بہ = ر (جم طہ + خ جب طہ)

یعنی بموجب دفعہ ۱۸

ر = + $\sqrt{عہ^{۲} + بہ^{۲}}$ اور طہ = مس$^{-۱}$ $\frac{بہ}{عہ}$

لہٰذا حسب تعریف

(عہ + خ بہ)$^{لا + خ ما}$ = و$^{(لا + خ ما)}$ لوٹ (عہ + خ بہ)

= و$^{\{لا + خ ما\}}$ {لوک (عہ + خ بہ) + ۲ م خ π}

= و$^{\{لا + خ ما\}}$ {لوک ر + (طہ + ۲ م π) خ}

= و$^{\{لا لوک ر - ما (طہ + ۲ م π)\} + خ \{ما لوک ر + لا (طہ + ۲ م π)\}}$

= و$^{لا لوک ر}$ × و$^{- ما (طہ + ۲ م π)}$ × و$^{خ \{ما لوک ر + لا (طہ + ۲ م π)\}}$

= ر^{لا} و$^{- ما (طہ + ۲ م π)}$ [جم {ما لوک ر + لا (طہ + ۲ م π)}

$+$ خ جب $\{$ ما لوک ر $+$ لا (ط $+$ ۲ م ۲۲) $\}]$

اگر ہم م کو صفر کر دیں تو جملہ مندرجہ بالا کی قیمت خاص معلوم ہو سکتی ہے جو حسب ذیل ہے -

ر^{لا} و$^{-اط}$ [جم (ما لوک ر $+$ لا ط) $+$ خ جب (ما لوک ر $+$ لا ط)]

۹۲ - مشق ۱ - $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ کی قیمت عامہ معلوم کرو -

$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = $ و$^{\sqrt{-1}}$ لوک $\sqrt{-1}$

لیکن لوک $\sqrt{-1} = $ لوک [جم (۲ ن ۲۲ $+ \frac{۲۲}{۲}$) $+$ خ جب (۲ ن ۲۲ $+ \frac{۲۲}{۲}$)]

$=$ لوک و$^{(۲ ن ۲۲ + \frac{۲۲}{۲}) خ} = (۲$ ن ۲۲ $+ \frac{۲۲}{۲})$ خ

$\therefore (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = $ و$^{(۲ ن ۲۲ + \frac{۲۲}{۲}) خ^۲} = $ و$^{-(۲ ن ۲۲ + \frac{۲۲}{۲})}$

جہاں ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے

نیز $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ کی قیمت خاص و$^{-\frac{۲۲}{۲}}$ ہے -

مشق ۲ - لوک$_۲$ (-۳) کی قیمت عامہ معلوم کرو -

فرض کرو کہ لوک$_۲$ (-۳) $=$ لا $+$ خ ما　　یعنی ۲$^{لا + خ ما} = -۳$

یعنی و$^{(لا + خ ما)}$ لوک$_و$ ۲ $=$ ۳ $\{$جم (۲ م ۲۲ $+$ ۲۲) $+$ خ جب (۲ م ۲۲ $+$ ۲۲)$\}$ .... دفعہ ۲۰

لیکن لوک ۲ $=$ ۲ ن خ ۲۲ $+$ لوک$_و$ ۲　اور ۳ $=$ و$^{لوک_و ۳}$

$\therefore$ و$^{(لا + خ ما)(۲ ن خ ۲۲ + لوک_و ۲)} = $ و$^{لوک_و ۳} \times $ و$^{(۲ م ۲۲ + ۲۲) خ}$

$\therefore$ (لا $+$ خ ما)(۲ ن خ ۲۲ $+$ لوک$_و$ ۲) $=$ لوک$_و$ ۳ $+$ (۲ م ۲۲ $+$ ۲۲) خ

حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

لا لوک$_و$ ۲ $-$ ۲ ن ۲۲ ما $=$ لوک$_و$ ۳

اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

لا $\times$ ۲ ن ۲۲ $+$ ما لوک$_و$ ۲ $=$ ۲ م ۲۲ $+$ ۲۲

$و^{-\frac{\pi^2}{8}}$ جم ($\frac{\pi}{4}$ لوک ۲) ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ $(ا + خ ب)^{ہ + خ بہ}$ کی قیمت خاص بالتمام حقیقی ہو گی اگر

$\frac{1}{2}$ بہ لوک (ا² + ب²) + ع مس$^{-1}\frac{ب}{ا}$

$\frac{\pi}{2}$ کا کوئی جفت ضعف ہو اور خیالی ہو گی اگر بہ $\frac{\pi}{2}$ کا کوئی طاق ضعف ہو۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ (۱ + خ مس ع)$^{-خ}$ کی قیمت عامہ

$و^{ع + ۲م\pi}$ [جم {لوک جم ع} + خ جب {لوک جم ع}] ہے۔

۱۲۔ اگر $\left(\frac{۱ + لا + خ ما}{۱ - لا - خ ما}\right)^{ل + خ مہ} = لا + خ ما$

تو ثابت کرو کہ مس$^{-1}\frac{ما}{لا}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

ل مس$^{-1}\left(\frac{۲ ما}{۱ - لا^2 - ما^2}\right) + \frac{مہ}{2}$ لوک $\frac{(۱+لا)^2 + ما^2}{(۱ - لا)^2 + ما^2}$ ہو گی۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ لوث$_{\sqrt{-1}}(\sqrt{-1}) = \frac{۲ن + ۱}{۴م + ۱}$

جہاں م اور ن سے کوئی صحیح اعداد مراد ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ لوث$_{۴}$ (-۲) کی عام قیمت

$\frac{(لوک ۲)^2 + م(۲ن + ۱)\pi^2}{۲(لوک ۲)^2 + ۲م^2\pi^2} + خ \frac{(۲ن + ۱ - م)\pi\, لوک ۲}{۲(لوک ۲)^2 + ۲م^2\pi^2}$ ہے

بتاؤ کہ ذیل کے دو سوالوں میں جو استدلال کیا گیا ہے، اس میں کہاں غلطی ہے؟

۱۵۔ جب ن کوئی صحیح عدد ہو تو

$و^{۲ن خ\pi}$ = جم ۲ن π + خ جب ۲ن π = ۱

یعنی $و^{۲خ\pi} = و^{۴خ\pi} = و^{۶خ\pi} = ...$

ان سب کو $\sqrt{-1}$ کی قوت پر اٹھانے سے

$\text{و}^{-۲\pi} = \text{و}^{-۴\pi} = \text{و}^{-۶\pi} = \ldots\ldots$

$\therefore \quad ۲\pi = ۴\pi = ۶\pi = \ldots\ldots$

۱۶ — ط کی تمام قیمتوں کے واسطے

$\text{جم}(\text{ط} - \pi) + \text{خ جب}(\text{ط} - \pi) = \text{جم}(\text{ط} + \pi) + \text{خ جب}(\text{ط} + \pi)$

یعنی $\text{و}^{\text{خ}(\text{ط} - \pi)} = \text{و}^{\text{خ}(\text{ط} + \pi)}$

لہذا $\text{ط} - \pi = \text{ط} + \pi$ یعنی $\pi = ۰$

۱۷ — اگر لا اور ما دو مختلف عدد ہوں اور اُن کی سعت کی خاص قیمتیں ط اور فہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$\text{لوک لا ما} = \text{لوک لا} + \text{لوک ما} + ۲\,\text{ن خ}\,\pi$

جہاں ن = −۱، اگر ط + فہ بڑا ہو π سے،

یا ن = ۰، اگر ط + فہ بڑا ہو $-\pi$ سے اور بڑا نہ ہو π سے،

یا ن = ۱ اگر ط + فہ بڑا نہ ہو $-\pi$ سے۔

باب ہفتم

گرگیوری کا سلسلہ - π کی قیمت کا محسوب کرنا

۹۴ - گرگیوری کا سلسلہ -

ثابت کرو کہ اگر ط، - $\frac{\pi}{4}$ سے کم نہ ہو اور + $\frac{\pi}{4}$ سے زیادہ نہ ہو تو

ط = مس ط - $\frac{1}{3}$ مس^{3} ط + $\frac{1}{5}$ مس^{5} ط - ..... تا لاانتہا ہی

ظاہر ہے کہ

۱ + خ مس ط = قط ط (جم ط + خ جب ط)

= قط ط × و$^{\text{خ ط}}$

اس لئے دفعہ ۸۳ کی مدد سے

لوک$_{و}$ قط ط + خ ط = لوک (۱ + خ مس ط)

اسلئے دفعہ ۹۰ کی رو سے اگر مس ط تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو تو

لوک$_{و}$ (قط ط) + خ ط

= لوک (۱ + خ مس ط)

= خ مس ط - $\frac{1}{2}$ خ^{2} مس^{2} ط + $\frac{1}{3}$ خ^{3} مس^{3} ط - ....

= خ مس ط + $\frac{1}{2}$ مس^{2} ط - $\frac{1}{3}$ خ مس^{3} ط - $\frac{1}{4}$ مس^{4} ط + ... تا لاانتہا ہی

اس مساوات کے خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

ط = مس ط − ۱/۳ مس^{3} ط + ۱/۵ مس^{5} ط − ۱/۷ مس^{7} ط + ... تا لاتناہی
.... (۱)

ظاہر ہے کہ یہ سلسلہ اُن حادہ زاویوں کے لئے درست ہے جن کا مماس تعداداً ایک سے بڑا نہیں ہوتا گویا یہ سلسلہ اُن سب زوایا کے لئے جو $-\frac{\pi}{4}$ اور $+\frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہوتے ہیں اور نیز زوایا $-\frac{\pi}{4}$ اور $+\frac{\pi}{4}$ کے لئے درست ہے۔

۹۵ — دفعہ ما قبل کے سلسلہ میں اگر ہم مس ط کی بجائے لا لکھیں یعنی جب لا بڑا نہ ہو ۱ سے اور چھوٹا نہ ہو −۱ سے تو ہم سلسلہ بالا کو ذیل کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

مس$^{-1}$ لا = لا − ۱/۳ لا^{3} + ۱/۵ لا^{5} − ۱/۷ لا^{7} + ... لاتناہی

جہاں مس$^{-1}$ لا کی نسبت $-\frac{\pi}{4}$ اور $+\frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہے۔

۹۶ — گریگوری کا سلسلہ ذیل کے عام مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔

اگر زاویہ ط کی قیمت ف π $-\frac{\pi}{4}$ اور ف π $+\frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو یا ان دو انتہائی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو تو

ط − ف π = مس ط − ۱/۳ مس^{3} ط + ۱/۵ مس^{5} ط − .... تا لاتناہی

فرض کرو کہ ط = ف π + فہ جہاں فہ، $\frac{\pi}{4}$ سے بڑا نہیں ہے اور $-\frac{\pi}{4}$ سے چھوٹا نہیں ہے۔

تب ۱ + خ مس ط = ۱ + خ مس فہ = قط فہ (جم فہ + خ جب فہ)

= قط فہ × و$^{\text{خ فہ}}$

لہذا اگر مس طہ تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو تو دفعات ۸۳ اور ۹۰ کی رو سے ظاہر ہے کہ

لوک$_و$ قط فہ + خ فہ = لوک (۱ + خ مس طہ)

= خ مس طہ − $\frac{۱}{۲}$ خ^{۲} مس^{۲} طہ + $\frac{۱}{۳}$ خ^{۳} مس^{۳} طہ − ....

= خ مس طہ + $\frac{۱}{۲}$ مس^{۲} طہ − $\frac{۱}{۳}$ خ مس^{۳} طہ + $\frac{۱}{۴}$ مس^{۴} طہ

+ $\frac{۱}{۵}$ خ مس^{۵} طہ − .... تا لاتناہی

مساوات بالا کے ہر دو جانب کے خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے فہ = مس طہ − $\frac{۱}{۳}$ مس^{۳} طہ + $\frac{۱}{۵}$ مس^{۵} طہ − .... تا لاتناہی

یعنی طہ − ف π = مس طہ − $\frac{۱}{۳}$ مس^{۳} طہ + $\frac{۱}{۵}$ مس^{۵} طہ − ...... تا لاتناہی ..... (۱)

۹۷ — خاص صورتیں۔

اگر طہ، $\frac{۳\pi}{۴}$ اور $\frac{۵\pi}{۴}$ کے درمیان یعنی $\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور $\pi + \frac{\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو تو ظاہر ہے کہ ف = ۱، تب دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) ذیل کی صورت اختیار کر لیتی ہے :-

طہ − π = مس طہ − $\frac{۱}{۳}$ مس^{۳} طہ + $\frac{۱}{۵}$ مس^{۵} طہ − .... تا لاتناہی

اگر طہ، $\frac{۷\pi}{۴}$ اور $\frac{۹\pi}{۴}$ کے درمیان یعنی $۲\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور $۲\pi + \frac{\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو تو مساوات مذکورہ حسب ذیل ہو جاتی ہے ۔

طہ − ۲π = مس طہ − $\frac{۱}{۳}$ مس^{۳} طہ + $\frac{۱}{۵}$ مس^{۵} طہ − .... تا لاتناہی

اسی طرح سے اگر طہ، $-\frac{۱۳\pi}{۴}$ اور $-\frac{۱۱\pi}{۴}$ کے درمیان یعنی $-۳\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور $-۳\pi + \frac{\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو تو ف = −۳ اور مساوات بالا حسب ذیل ہو جاتی ہے

طہ + ۳π = مس طہ − $\frac{۱}{۳}$ مس^{۳} طہ + $\frac{۱}{۵}$ مس^{۵} طہ − .... تا لاتناہی

۹۸ — اگر طہ، $\frac{\pi}{۴}$ اور $\frac{۳\pi}{۴}$ کے درمیان یا $\frac{۵\pi}{۴}$ اور $\frac{۷\pi}{۴}$ کے درمیان

...... یا بالعموم ن $\pi + \frac{\pi}{4}$ اور ن $\pi + \frac{3\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو تو مس طہ تعداداً ایک سے بڑا ہوگا۔ اسلئے ان صورتوں میں لوک (۱+خ مس طہ) کی تفصیل برقرار نہیں رہیگی، بنابریں دفعہ ۹۶ کی تفصیل (۱) کی سی کوئی تفصیل حاصل نہیں ہوگی۔

۹۹ - π کی قیمت

گریگوری کے سلسلہ کا ایک خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کے استعمال سے π کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

دفعہ ۹۵ میں لا = ۱ رکھو، تب

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) \ldots\ldots$$

$$= 1 - 2\left[\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{11 \times 13} + \ldots\ldots\right]$$

اس سلسلہ سے π کی قیمت محسوب کی جاسکتی ہے۔ لیکن اس سلسلہ میں بڑا نقص یہ ہے کہ اس کی رقمیں جلدی جلدی کم نہیں ہوتیں، اس لئے اگر π کی قیمت کافی حد تک درست نکالنا مقصود ہو تو رقوم کی ایک بڑی تعداد لینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ لامحالہ اور سلسلے تجویز کرنے پڑے ہیں۔

۱۰۰ - آئیلر کا سلسلہ

ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\pi}{4} = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$$

دفعہ ۹۵ میں لا کو بالترتیب

$\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$

کے مساوی رکھو۔ تب

$$\frac{\pi}{4} = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\times\frac{1}{2^7} + \dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\times\frac{1}{3^7} + \dots\dots\dots$$

یہ سلسلہ دفعہ ماقبل کے سلسلہ کی نسبت زیادہ جلدی جلدی گھٹتا ہے لیکن π کی قیمت کو اعشاریہ کے ساتویں مقام تک درست نکالنے کے لئے مس$^{-1}\frac{1}{2}$ کے سلسلہ میں ۱۱ سے زیادہ رقوم لینے کی ضرورت ہے۔

۱۰۱۔ میکن کا سلسلہ

مندرجہ بالا سلاسل سے زیادہ مستدق سلسلہ میکن کا دریافت کردہ ہے جو ذیل کی مساوات سے ماخوذ ہوتا ہے۔

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$$

..... دفعہ ۲۴۲ حصہ اول مشق ۴

دفعہ ۹۵ میں لا کی بجائے بالترتیب $\frac{1}{5}$ اور $\frac{1}{239}$ رکھنے سے

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\times\frac{1}{5^7} + \dots\dots\right]$$

$$-\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{239^5} - \dots\dots\right]$$

$$\therefore \pi = 16\left[\frac{2}{10} - \frac{1}{3}\times\frac{2^3}{10^3} + \frac{1}{5}\times\frac{2^5}{10^5} - \frac{1}{7}\times\frac{2^7}{10^7} + \dots\dots\right]$$

$$-4\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{239^5} - \dots\dots\dots\right]$$

$$۱۶ \times \frac{۲}{۱۰} = ۳٫۲$$
$$۱۶ \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۲^۵}{۱۰^۵} = ۰٫۰۰۱۰۲۴$$
$$۱۶ \times \frac{۱}{۹} \times \frac{۲^۹}{۱۰^۹} = ۰٫۰۰۰۰۰۰۹۱۰۲$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$۴ \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲۳۹^۳} = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۹۷۷$$

$$۳٫۲۰۱۰۲۵۰۰۷۹$$

$$۱۶ \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۲^۳}{۱۰^۳} = ۰٫۰۴۲۶۶۶۶۶۶۶۶\ldots$$
$$۱۶ \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۲^۷}{۱۰^۷} = ۰٫۰۰۰۰۲۹۲۵۷۱\ldots$$
$$۱۶ \times \frac{۱}{۱۱} \times \frac{۲^{۱۱}}{۱۰^{۱۱}} = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۲۹۸\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$۴ \times \frac{۱}{۲۳۹} = ۰٫۰۱۶۷۳۶۴۰۱۷\ldots$$

$$۰٫۰۵۹۴۳۲۳۵۵۲$$

لہذا

$$۳٫۲۰۱۰۲۵۰۰۷۹$$
$$-۰٫۰۵۹۴۳۲۳۵۵۲$$

$$π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵/۲۷$$

π کی یہ قیمت اعشاریہ کے آٹھویں مقام تک درست ہے۔

اگر پہلے سلسلہ میں سے ۱۲ رقوم لی جائیں اور دوسرے سلسلہ میں سے ۳، تو π کی قیمت اعشاریہ کے سولھویں مقام تک درست نکالی جاسکتی ہے

۱۰۲ — روتھرفورڈ کا سلسلہ

ہیکن کے سلسلہ کو ذیل کی مساوات اور بھی آسان بنا دیتی ہے ۔

$$۴\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵} - \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷۰} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۹۹} = \frac{\pi}{۴}$$

کیونکہ $\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷۰} - \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۹۹} = \text{مس}^{-1}\dfrac{\frac{۱}{۷۰} - \frac{۱}{۹۹}}{۱ + \frac{۱}{۷۰} \times \frac{۱}{۹۹}}$

$$= \text{مس}^{-1}\frac{۲۹}{۶۹۳۱} = \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۲۳۹}$$

امثلہ ۱۵

اگر یہ تسلیم کرلیا جائے کہ

$$\text{ط} - \text{ن}\,\pi = \text{مس ط} - \frac{۱}{۳}\text{مس}^{۳}\text{ط} + \frac{۱}{۵}\text{مس}^{۵}\text{ط} - \ldots\ldots$$

تو ن کی قیمت معلوم کرو جبکہ ط ذیل کی رقوم کے درمیان واقع ہو

(۱) $\frac{۱۱\pi}{۴}$ اور $\frac{۱۳\pi}{۴}$ کے (۲) $\frac{۱۷\pi}{۴}$ اور $\frac{۱۹\pi}{۴}$ کے

(۳) $\frac{۱۹\pi}{۴}$ اور $\frac{۲۱\pi}{۴}$ کے (۴) $-\frac{۳\pi}{۴}$ اور $-\frac{۵\pi}{۴}$ کے

(۵) $-\frac{۱۱\pi}{۴}$ اور $-\frac{۱۳\pi}{۴}$ کے

۶ ـــ ثابت کرو کہ

$$\pi = ۲\sqrt{۳}\left\{۱ - \frac{۱}{۳ \cdot ۳} + \frac{۱}{۳^{۲} \times ۵} - \frac{۱}{۳^{۳} \times ۷} + \ldots\ldots\right\}$$

۷ ـــ ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi}{۴} = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳^{۳}} + \frac{۱}{۷^{۳}}\right) + \frac{۱}{۵}\left(\frac{۲}{۳^{۵}} + \frac{۱}{۷^{۵}}\right) - \ldots\ldots\ldots$$

۸ ـــ اگر $\text{لا} < \sqrt{۲} - ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$۲\left(\text{لا} - \frac{۱}{۳}\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{۵}\text{لا}^{۵} \ldots\ldots\ldots \text{تا لاتناہی}\right)$$

$$= \frac{۲\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}} - \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}\right)^{۳} + \frac{۱}{۵}\left(\frac{۲\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}\right)^{۵} - \ldots\ldots\ldots \text{تا لاتناہی}$$

ذیل کے سلسلوں سے π کی قیمت محسوب کرو جو اعشاریہ کے تیسرے مقام تک درست ہو۔

۹ — آئیلر کے سلسلے سے

۱۰ — ہیکن کے سلسلے سے

۱۱ — روتھرفورڈ کے سلسلے سے

۱۲ — ثابت کرو کہ دوسرے مرتبہ کی مقادیر صغیرہ تک

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\text{جب ط}}\ \text{لوک}\ (1-\text{ط}) + \text{مس}^{-1}\,\text{ط جب}\left(\frac{\pi}{4}+\text{ط}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\ \text{ط}$$

۱۳ — اگر ط اور مس^{-1} (قتا ط) دونوں صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}(\text{قتا ط}) = \frac{\pi}{4} + \text{مس}^{2}\frac{\text{ط}}{2} - \frac{1}{3}\text{مس}^{6}\frac{\text{ط}}{2} + \frac{1}{5}\text{مس}^{10}\frac{\text{ط}}{2} - \ldots\ldots$$

باب ہشتم

سلسلوں کو جمع کرنا

اور سلسلوں میں پھیلانا

۱۰۳ — اب ہم گذشتہ ابواب کے نتائج کو چند مثلثی سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرنے میں استعمال کرینگے۔

مشہور سلسلوں کو چار اقسام میں منقسم کیا جا سکتا ہے

(۱) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر سلسلۂ ہندسیہ پر مبنی ہوتی ہے۔

(۲) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر مسئلہ ثنائی پر مبنی ہوتی ہے۔

(۳) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر مسئلہ قوت نما پر (جیب اور جیب التمام کے سلسلے بھی اسی میں شامل ہیں) منحصر ہوتی ہے۔

(۴) وہ سلسلے جن کی جمع لوکارتمی سلسلہ پر (گریگوری کا سلسلہ بھی اسی میں شامل ہے) منحصر ہوتی ہے۔

۱۰۴ — دفعات ۱۰۵ - ۱۰۸ میں ہم مندرجہ بالا اقسام میں سے ایک ایک سلسلہ بطور مثال جمع کرینگے۔

نیز جب ضعفی زاویوں کی جیوب (مثلاً جیب عہ، جیب ۲ عہ، جیب ۳ عہ ....) کے کسی سلسلہ کو جمع کرنا مقصود ہو تو ابھی معلوم ہو جائیگا کہ بالعموم انہی ضعفی زاویوں کی جیوب التمام (مثلاً جم عہ، جم ۲ عہ، جم ۳ عہ)

کے ایک رفیق سلسلہ کو بھی ساتھ ہی جمع کرنا آسان اور سہولت بخش ہوتا ہے - یہ طریقہ ذیل کی چار دفعات کو بغور پڑھنے سے بخوبی سمجھ میں آجائے گا۔

۱۰۵ - مشق - سلسلہ

ا + ج جم عہ + ج^{۲} جم ۲ عہ + ج^{۳} جم ۳ عہ + ۔۔۔۔۔

کو ن رقوم تک اور نیز لاتناہی تک جمع کرو ' اس میں ج ایک سے کم فرض کرو کہ

م ≡ ا + ج جم عہ + ج^{۲} جم ۲ عہ + ۔۔ ج$^{ن-۱}$ جم (ن-۱) عہ ۔۔۔۔ (۱)

اور ح ≡ ج جب عہ + ج^{۲} جب ۲ عہ + ۔۔۔ ج$^{ن-۱}$ جب (ن-۱) عہ ۔۔۔ (۲)

(۲) کو خ سے ضرب دینے اور (۱) میں جمع کرنے سے

م + خ ح = ا + ج (جم عہ + خ جب عہ) + ج^{۲} (جم ۲ عہ + خ جب ۲ عہ) + ۔۔۔۔۔

= ا + ج و$^{خ عہ}$ + ج^{۲} و$^{۲ خ عہ}$ + ۔۔۔ + ج$^{ن-۱}$ و$^{(ن-۱) خ عہ}$ ۔۔۔۔ (دفعہ ۶۲)

= (ا - ج^{ن} و$^{ن خ عہ}$) / (ا - ج و$^{خ عہ}$) ۔۔۔۔ سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے

= (ا - ج^{ن} و$^{ن خ عہ}$) (ا - ج و$^{-خ عہ}$) / (ا - ج و$^{خ عہ}$) (ا - ج و$^{-خ عہ}$)

= [ا - ج و$^{-خ عہ}$ - ج^{ن} و$^{ن خ عہ}$ + ج$^{ن+۱}$ و$^{(ن-۱) خ عہ}$] / [ا - ج (و$^{خ عہ}$ + و$^{-خ عہ}$) + ج^{۲}]

= {ا - ج (جم عہ - خ جب عہ) - ج^{ن} (جم ن عہ + خ جب ن عہ) + ج$^{ن+۱}$ {جم (ن-۱) عہ + خ جب (ن-۱) عہ}} / (ا - ۲ ج جم عہ + ج^{۲})

پس حقیقی حصوں کو باہم برابر کرنے سے

$$م = \frac{۱ - ج\ جم\ عہ - ج^{ن} جم\ ن\ عہ + ج^{ن+۱} جم\ (ن-۱)\ عہ}{۱ - ۲ ج\ جم\ عہ + ج^{۲}}$$

اور خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$ج = \frac{ج\ جب\ عہ - ج^{ن} جب\ ن\ عہ + ج^{ن+۱} جب\ (ن-۱)\ عہ}{۱ - ۲ ج\ جم\ عہ + ج^{۲}}$$

اگر سلسلہ ہذا کا حاصل جمع لاتناہی تک معلوم کرنا مطلوب ہو تو اُن رقوم کو جن میں $ج^{ن}$ اور $ج^{ن+۱}$ شامل ہیں چھوڑ دینا کافی ہوگا کیونکہ جب ن لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے تو یہ رقمیں صفر ہو جاتی ہیں -

$$پس\ م_{\infty} = \frac{۱ - ج\ جم\ عہ}{۱ - ۲ ج\ جم\ عہ + ج^{۲}}$$

$$اور\ ج_{\infty} = \frac{ج\ جب\ عہ}{۱ - ۲ ج\ جم\ عہ + ج^{۲}}$$

[نوٹ - م اور ج کے لئے جو رقوم اوپر حاصل ہوئی ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ سلاسل زیر بحث کی جمع، خیالی مقادیر کے استعمال کے بغیر بھی حاصل ہو سکتی ہے -

مساوات (۱) و (۲) کے دونوں جانب مقدار $۱ - ۲ ج\ جم\ عہ + ج^{۲}$ کے ساتھ ضرب دینے سے معلوم ہوگا کہ $ج^{۲}$، $ج^{۳}$، .... $ج^{ن-۱}$ کے سر غائب ہو جاتے ہیں اور بعدہ، م اور ج کی قیمتیں بآسانی معلوم ہو جاتی ہیں -]

۱۰۶ - مشق - سلسلہ

$\frac{۱}{۲}$ جب عہ + $\frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲}$ جب ۲ عہ + $\frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲}$ جب ۳ عہ + ... تالاتناہی کو جمع کرو -

فرض کرو کہ $\text{ج} = \frac{۱}{۲}\,\text{جب عہ} + \frac{۳\times۱}{۴\times۲}\,\text{جب ۲عہ} + \frac{۵\times۳\times۱}{۶\times۴\times۲}\,\text{جب ۳عہ} + \cdots$

اور $\text{م} = ۱ + \frac{۱}{۲}\,\text{جم عہ} + \frac{۳\times۱}{۴\times۲}\,\text{جم ۲عہ} + \frac{۵\times۳\times۱}{۶\times۴\times۲}\,\text{جم ۳عہ} + \cdots$

اس لئے پہلے سلسلہ کو خ سے ضرب دیکر دوسرے سلسلہ میں جمع کرنے سے

$$\text{م} + \text{خ ج} = ۱ + \frac{۱}{۲}\,\text{و}^{\text{خ عہ}} + \frac{۳\times۱}{۴\times۲}\,\text{و}^{\text{۲خ عہ}} + \frac{۵\times۳\times۱}{۶\times۴\times۲}\,\text{و}^{\text{۳خ عہ}} + \cdots$$

$$= \left(۱ - \text{و}^{\text{خ عہ}}\right)^{-\frac{۱}{۲}} \quad \text{اگر عہ} \neq ۲\text{ن}\,\pi$$

مسئلہ ثنائی کی رو سے ... (دفعہ ۲۶)

$$\text{م} + \text{خ ج} = \left\{۱ - \text{جم عہ} - \text{خ جب عہ}\right\}^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\left(\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲} - \text{خ جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right)\right\}^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right\}^{-\frac{۱}{۲}} \left\{\text{جم}\left(\frac{\text{عہ}}{۲} - \frac{\pi}{۲}\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\text{عہ}}{۲} - \frac{\pi}{۲}\right)\right\}^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right\}^{-\frac{۱}{۲}} \left\{\text{جم}\,\frac{\pi - \text{عہ}}{۴} + \text{خ جب}\,\frac{\pi - \text{عہ}}{۴}\right\}$$

اب حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{م} = \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right\}^{-\frac{۱}{۲}} \text{جم}\,\frac{\pi - \text{عہ}}{۴}$$

اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$$\text{ج} = \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right\}^{-\frac{۱}{۲}} \text{جب}\left(\frac{\pi - \text{عہ}}{۴}\right)$$

اگر $\text{عہ} = ۲\text{ن}\,\pi$ تو ظاہر ہے کہ $\text{ج} = ۰$ اور $\text{م} = \infty$

امثلہ ۱۶

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو:۔

(۱) جب عہ + $\frac{1}{2}$ جب ۲ عہ + $\frac{1}{2^2}$ جب ۳ عہ + ... تالاتناہی

(۲) جم عہ × جم عہ + جم^2 عہ جم ۲ عہ + جم^3 عہ جم ۳ عہ + ... تالاتناہی

(۳) جب عہ × جب عہ + جب^2 عہ جب ۲ عہ + جب^3 عہ جب ۳ عہ + ... تالاتناہی

جہاں عہ $\neq \frac{\pi}{2}$

(۴) جب عہ جم عہ + جب^2 عہ جم ۲ عہ + جب^3 عہ جم ۳ عہ + ... تالاتناہی

جہاں عہ $\neq \pm \frac{\pi}{2}$

(۵) جب عہ + ج جب (عہ + بہ) + ج^2 جب (عہ + ۲ بہ) + ...

ن رقوم تک اور لاتناہی تک

(۶) ۱ + ج جمز عہ + ج^2 جمز ۲ عہ + ... + ج$^{(ن-1)}$ جمز (ن - ۱) عہ

(۷) ج جبز عہ + ج^2 جبز ۲ عہ + ج^3 جبز ۳ عہ + ... تالاتناہی

(۸) ۱ - ۲ جم عہ + ۳ جم ۲ عہ - ۴ جم ۳ عہ + ... تا ن رقوم

(۹) ۳ جب عہ + ۵ جب ۲ عہ + ۷ جب ۳ عہ + ... تا ن رقوم

(۱۰) اگر عہ = $\frac{\pi}{2}$ تو مشق (۳) اور مشق (۴) کے سلسلوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱۱) جب عہ + ن جب (عہ + بہ) + $\frac{ن(ن-1)}{2!}$ جب (عہ + ۲ بہ) + ... تا (ن + ۱) رقوم

جہاں ن کسی مثبت صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔

(۱۲) جب عہ + $\frac{1}{2}$ جب ۳ عہ + $\frac{1 \times 3}{2 \times 4}$ جب ۵ عہ + ... تالاتناہی

(۱۳) جم^{ن} عہ - ن جم$^{ن-1}$ عہ جم عہ + $\frac{ن(ن-1)}{2!}$ جم$^{ن-2}$ عہ جم ۲ عہ + ...

تا (ن + ۱) رقوم

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

$$(\text{۱۴})\quad \text{ن جب ع} + \frac{\text{ن(ن+۱)}}{\text{۱×۲}}\text{ جب ۲ع} + \frac{\text{ن(ن+۱)(ن+۲)}}{\text{۱×۲×۳}}\text{ جب ۳ع} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

$$(\text{۱۵})\quad \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ جم ۲ط} - \frac{\text{۱}}{\text{۲×۴}}\text{ جم ۴ط} + \frac{\text{۱×۳}}{\text{۲×۴×۶}}\text{ جم ۶ط} \ldots \text{ تا لاتناہی}$$

$$(\text{۱۶})\quad \text{جبز ی} + \text{ن جبز ۲ی} + \frac{\text{ن(ن−۱)}}{\lfloor\underline{\text{۲}}}\text{ جبز ۳ی} + \ldots\ldots \text{ (ن+۱) رقوم تک}$$

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۰۷ ـ مشق - ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

$$\text{۱} + \frac{\text{ج}^{۲}\text{ جم ۲ط}}{\lfloor\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{ج}^{۴}\text{ جم ۴ط}}{\lfloor\underline{\text{۴}}} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

فرض کرو کہ
$$\text{م} = \text{۱} + \frac{\text{ج}^{۲}\text{ جم ۲ط}}{\lfloor\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{ج}^{۴}\text{ جم ۴ط}}{\lfloor\underline{\text{۴}}} + \ldots \text{ تا لاتناہی} \quad (\text{۱})$$

اور
$$\text{ج} = \frac{\text{ج}^{۲}\text{ جب ۲ط}}{\lfloor\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{ج}^{۴}\text{ جب ۴ط}}{\lfloor\underline{\text{۴}}} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \quad (\text{۲})$$

اسلئے

$$\text{م} + \text{خ ج} = \text{۱} + \frac{\text{ج}^{۲}\text{ و}^{\text{۲خ ط}}}{\lfloor\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{ج}^{۴}\text{ و}^{\text{۴خ ط}}}{\lfloor\underline{\text{۴}}} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

$$= \text{۱} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\lfloor\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{ما}^{۴}}{\lfloor\underline{\text{۴}}} + \frac{\text{ما}^{۶}}{\lfloor\underline{\text{۶}}} + \ldots\ldots$$

جہاں ج $\text{و}^{\text{خ ط}}$ یعنی ج (جم ط + خ جب ط) کی بجائے 'ما' لکھا گیا ہے

$$\therefore\quad \text{م} + \text{خ ج} = \frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{\text{۲}}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ و}^{\text{ج جم ط + خ ج جب ط}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ و}^{\text{− ج جم ط − خ ج جب ط}} \ldots\ldots \quad (\text{۳})$$

= ½ و^(ج جم طہ) [جم (ج جب طہ) + خ جب (ج جب طہ)]

+ ½ و^(-ج جم طہ) [جم (ج جب طہ) - خ جب (ج جب طہ)]

.... (دفعہ ۶۲)

اسلئے حقیقی حصوں کو باہم برابر کرنے سے

م = ½ جم (ج جب طہ) [و^(ج جم طہ) + و^(-ج جم طہ)]

= جم (ج جب طہ) جمز (ج جم طہ)

اور خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

ج = ½ جب (ج جب طہ) {و^(ج جم طہ) - و^(-ج جم طہ)}

= جب (ج جب طہ) جبز (ج جم طہ)

متبادل ثبوت

مساوات (۳) سے

م + خ ج = ½ و^((ج جب طہ - خ ج جم طہ) خ) + ½ و^(-(ج جب طہ - خ ج جم طہ) خ)

= جم (ج جب طہ - خ ج جم طہ) .... (دفعہ ۶۲)

= [جم (ج جب طہ) جم (خ ج جم طہ) + جب (ج جب طہ) جب (خ ج جم طہ)]

= [جم (ج جب طہ) جمز (ج جم طہ) + خ جب (ج جب طہ) جبز (ج جم طہ)] .... دفعہ ۶۸

اس سے م اور ج کی قیمتیں حسب سابق حاصل ہو سکتی ہیں۔

۱۰۸ — مشق - ذیل کے دو سلسلوں

ج جب عہ + ج²/۲ جب ۲ عہ + ج³/۳ جب ۳ عہ + ... تا لاتناہی

اور ج جم عہ + ج²/۲ جم ۲ عہ + ج³/۳ جم ۳ عہ + ... تا لاتناہی

کو الگ الگ جمع کرو جبکہ ج تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو۔

فرض کرو کہ اوپر کے سلسلے بالترتیب ج اور م کے مساوی ہیں تب حسب سابق

م + خ ج = ج (جم عہ + خ جب عہ) + ج^{2}/۲ (جم ۲عہ + خ جب ۲عہ) + ...

= ج و$^{\text{خ عہ}}$ + ج^{2}/۲ و$^{\text{۲خ عہ}}$ + ج^{3}/۳ و$^{\text{۳خ عہ}}$ + ... (۱)

= - لوک [۱ - ج و$^{\text{خ عہ}}$] دفعہ ۹۰ کی رو سے .... (۲)

= - لوک [۱ - ج جم عہ - خ ج جب عہ] .... دفعہ ۶۲

فرض کرو کہ ۱ - ج جم عہ = ر جم طہ اور - ج جب عہ = ر جب طہ

یعنی ر = + $\sqrt{}$(۱ - ۲ ج جم عہ + ج^{2}) جم طہ = (۱ - ج جم عہ)/ر

اور جب طہ = - ج جب عہ/ر

یعنی طہ = مس$^{-1}$ (- ج جب عہ)/(۱ - ج جم عہ) ...... [زیر شرائط دفعہ ۲۰]

∴ م + خ ج = - لوک {$\sqrt{}$(۱ - ۲ ج جم عہ + ج^{2}) (جم طہ + خ جب طہ)}

= - لوک {$\sqrt{}$(۱ - ۲ ج جم عہ + ج^{2}) × و$^{\text{خ طہ}}$}

= - لوک $\sqrt{}$(۱ - ۲ ج جم عہ + ج^{2}) - خ طہ

∴ م = - لوک $\sqrt{}$(۱ - ۲ ج جم عہ + ج^{2})

= - $\frac{1}{2}$ لوک (۱ - ۲ ج جم عہ + ج^{2}) .... (۳)

اور ج = - طہ = - مس$^{-1}$ ((- ج جب عہ)/(۱ - ج جم عہ)) .... (۴)

مستثنیٰ صورتیں

اگر ج = ۱ تو مقدار (۲)

= - لوک [۱ - جم عہ - خ جب عہ] = - لوک [۱ + جم (عہ - π) + خ جب (عہ - π)]

دفعہ ۹۰ کی رو سے یہ رقم ہمیشہ سلسلہ (۱) کے مساوی ہوتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ عہ - π، (۲ ن + ۱) π کے برابر ہو یعنی سوائے اس صورت کے جبکہ عہ، ۲ π کا کوئی ضعف ہو۔

اس صورت میں ج = ۰

اور م = ۰ + ۱ + ۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ...

جو صریحاً ایک متسع سلسلہ ہے

اگر ج = -۱، تو مقدار (۲) = - لوک (۱ + جم عہ + خ جب عہ)

دفعہ ۹۰ کی رو سے یہ رقم ہمیشہ سلسلہ (۱) کے مساوی ہوتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ عہ، (۲ ن + ۱) π کے برابر ہو۔

اس صورت میں ج = ۰

اور م = ۱ + ۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ...

پس مقادیر (۳) اور (۴) دو سلسلوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتی ہیں سوائے ان صورتوں کے جب

(۱) ج = ۱ اور عہ = ۲ ن π

(۲) ج = -۱ اور عہ = (۲ ن + ۱) π

(۳) ج > ۱

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ان امثلہ میں جن کی جمع لوکارتمی سلسلہ پر مبنی ہوتی اکثر اوقات زاویہ کی خاص خاص قیمتوں کے لئے کوئی حاصل جمع حاصل نہیں ہوتا۔

صورت خاص

اگر ج = جم عہ جہاں عہ، صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہے تو

ج = جم عہ جب عہ + $\frac{1}{2}$ جم^{2} عہ جب ٢ عہ + $\frac{1}{3}$ جم^{3} عہ جب ٣ عہ + ...

اس صورت میں

ج = سس$^{-1}$ $\left(\frac{\text{- جب عہ جم عہ}}{\text{جب}^{2}\text{ عہ}}\right)$ .... مساوات (۴) سے یعنی

= سس$^{-1}$ (- مم عہ)

= - (عہ - $\frac{\pi}{2}$) ...... (زیر قیود مندرجہ دفعہ ٢٠)

= $\frac{\pi}{2}$ - عہ

امثلہ ١٧

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

١- جب عہ + ج جب (عہ + بہ) + $\frac{\text{ج}^{2}}{\lfloor 2}$ جب (عہ + ٢ بہ) + ... تا لاتناہی

٢- جم عہ + ج جم (عہ + بہ) + $\frac{\text{ج}^{2}}{\lfloor 2}$ جم (عہ + ٢ بہ) + ... تا لاتناہی

٣- ١ - جم عہ جم بہ + $\frac{\text{جم}^{2}\text{ عہ}}{\lfloor 2}$ جم ٢ بہ - $\frac{\text{جم}^{3}\text{ عہ}}{\lfloor 3}$ جم ٣ بہ + ... تا لاتناہی

۴- جب عہ - $\frac{\text{جب (عہ + ٢ بہ)}}{\lfloor 2}$ + $\frac{\text{جب (عہ + ۴ بہ)}}{\lfloor 4}$ - .... تا لاتناہی

۵- جم عہ - $\frac{\text{جم (عہ + ٢ بہ)}}{\lfloor 3}$ + $\frac{\text{جم (عہ + ۴ بہ)}}{\lfloor 5}$ - .... تا لاتناہی

٦- ١ + جمز عہ + $\frac{\text{جمز ٢ عہ}}{\lfloor 2}$ + $\frac{\text{جمز ٣ عہ}}{\lfloor 3}$ + ... تا لاتناہی

۷ — جیبز عہ + $\frac{\text{جیبز ۲ عہ}}{\underline{|۲}}$ + $\frac{\text{جیبز ۳ عہ}}{\underline{|۳}}$ + ... تالاتناہی

۸ — ۱ + و$^{\text{جم عہ}}$ جم (جب عہ) + $\frac{۱}{\underline{|۲}}$ و$^{\text{۲ جم عہ}}$ جم (۲ جب عہ) + ... تالاتناہی

۹ — ۱ + و$^{\text{جب عہ}}$ جم (جم عہ) + $\frac{\text{و}^{\text{۲ جب عہ}}}{\underline{|۲}}$ جم (۲ جم عہ) + $\frac{\text{و}^{\text{۳ جب عہ}}}{\underline{|۳}}$ جم (۳ جم عہ) + ... تالاتناہی

۱۰ — $\frac{\text{۵ جم طہ}}{۱}$ + $\frac{\text{۷ جم ۳ طہ}}{\underline{|۳}}$ + $\frac{\text{۹ جم ۵ طہ}}{\underline{|۵}}$ .... تالاتناہی

ذیل کے امثلہ میں ج کو مثبت اور ایک سے کم فرض کیا جائے۔ اگر ج ایک کے برابر ہو تو دفعہ ۱۰۸ کے بموجب زاویہ عہ کی بعض قیمتوں کے واسطے مستثنیٰ صورتیں پیدا ہونگی

۱۱ — ج جب عہ - $\frac{\text{ج}^{۲}}{۲}$ جب ۲ عہ + $\frac{\text{ج}^{۳}}{۳}$ جب ۳ عہ - .... تالاتناہی

۱۲ — ج جب عہ + $\frac{۱}{۳}$ ج^{۳} جب ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ ج^{۵} جب ۵ عہ + ... تالاتناہی

۱۳ — ج جم عہ + $\frac{۱}{۳}$ ج^{۳} جم ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ ج^{۵} جم ۵ عہ + ... تالاتناہی

۱۴ — ج جم عہ - $\frac{۱}{۳}$ ج^{۳} جم ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ ج^{۵} جم ۵ عہ - .... تالاتناہی

۱۵ — ج جب عہ - $\frac{۱}{۳}$ ج^{۳} جب ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ ج^{۵} جب ۵ عہ - .... تالاتناہی

۱۶ — جم عہ - $\frac{۱}{۳}$ جم ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ جم ۵ عہ - .... تالاتناہی

۱۷ — ج جم عہ - $\frac{۱}{۳}$ ج^{۳} جم (عہ + ۲ بہ) + $\frac{۱}{۵}$ ج^{۵} جم (عہ + ۴ بہ) - .... تالاتناہی

۱۸ — جب عہ جب بہ + $\frac{۱}{۲}$ جب ۲ عہ جب ۲ بہ + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ عہ جب ۳ بہ + ... تالاتناہی

۱۹ — ج جب^{۲} عہ - $\frac{۱}{۲}$ ج^{۲} جب^{۲} ۲ عہ + $\frac{۱}{۳}$ ج^{۳} جب^{۲} ۳ عہ - .... تالاتناہی

۲۰ — جیبز عہ - $\frac{۱}{۲}$ جیبز ۲ عہ + $\frac{۱}{۳}$ جیبز ۳ عہ - .... تالاتناہی

۲۱ — تو^{ہ} جم ہ − $\frac{۱}{۳}$ تو^{۳ہ} جم ۳ ہ + $\frac{۱}{۵}$ تو^{۵ہ} جم ۵ ہ − .... تا لا متناہی

۲۲ — جم $\frac{π}{۳}$ + $\frac{۱}{۲}$ جم $\frac{۲π}{۳}$ + $\frac{۱}{۵}$ جم $\frac{۳π}{۳}$ + $\frac{۱}{۷}$ جم $\frac{۴π}{۳}$ + ... تا لا متناہی

۲۳ — اگر ط − ع = مس^{۲} $\frac{سہ}{۲}$ جب ۲ ط − $\frac{۱}{۲}$ مس^{۴} $\frac{سہ}{۲}$ جب ۴ ط

+ $\frac{۱}{۳}$ مس^{۶} $\frac{سہ}{۲}$ جب ۶ ط − .... تا لا متناہی

تو ثابت کرو کہ مس ع = مس ط جم سہ

۲۴ — اگر ط اور ف، مثبت حادّے زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ سلسلہ

جب ط جم ف + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ ط جم ۳ ف + $\frac{۱}{۵}$ جب ۵ ط جم ۵ ف + ... تا لا متناہی

کا حاصل جمع $\frac{π}{۴}$ ہوگا۔ اگر ط > ف، اور صفر ہوگا۔ اگر ط < ف،

ثابت کرو کہ

۲۵ — مسز لا + $\frac{۱}{۳}$ مسز^{۳} لا + $\frac{۱}{۵}$ مسز^{۵} لا + ... تا لا متناہی

= مس لا − $\frac{۱}{۳}$ مس^{۳} لا + $\frac{۱}{۵}$ مس^{۵} لا − ....

جہاں لا، − $\frac{π}{۴}$ اور + $\frac{π}{۴}$ کے درمیان واقع ہے

۲۶ — ۲ جب^{۲} ط + $\frac{۱}{۲}$ × ۴ جب^{۴} ط + $\frac{۱}{۳}$ × ۸ جب^{۶} ط + ...

= ۲ { مس^{۲} ط + $\frac{۱}{۳}$ مس^{۶} ط + $\frac{۱}{۵}$ مس^{۱۰} ط + ... }

جہاں ط، − $\frac{π}{۴}$ اور + $\frac{π}{۴}$ کے درمیان واقع ہے۔

۲۷ — جب ط + $\frac{۱}{۳}$ جب^{۳} ط + $\frac{۱}{۵}$ جب^{۵} ط + ...

X

= ۲ (جب ط − $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ ط + $\frac{۱}{۵}$ جب ۵ ط − ....

جہاں ط ≠ (۲ ن + ۱) $\frac{π}{۲}$

۱۰۹ — اب ہم چند ایسے سلسلوں کی مثالیں درج کرتے ہیں جو نہ تو

مندرجہ بالا ابواب میں سے کسی کے تحت میں آتے ہیں اور نہ باب ۱۹ حصہ اول کے تحت میں۔ ایسی صورتوں میں بالعموم یہ طریقہ کارگر ہوگا کہ ہر ایک رقم کو توڑ کر اسکو دو اور رقوم کے فرق کی شکل میں لکھ لیا جائے۔ اس عمل کے لئے بعض اوقات بڑی فراست کی ضرورت ہوتی ہے لیکن اگر جواب معلوم ہو تو اس کی مدد سے جمع کرنے کا طریقہ نسبتاً آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ جواب میں ن کی بجائے ایک لکھنے سے ظاہر ہو جاتا ہے کہ پہلی رقم کو کس شکل میں لکھنا چاہیئے۔

مشق ا۔ سلسلہ

$$\text{جب}^{۳}\frac{\text{طہ}}{۳} + ۳\,\text{جب}^{۳}\frac{\text{طہ}}{۳^{۲}} + ۳^{۲}\,\text{جب}^{۳}\frac{\text{طہ}}{۳^{۳}} + \ldots\ldots$$

کو ن رقوم تک جمع کرو۔

چونکہ ہمیشہ $\text{جب}\,۳\,\text{فہ} = ۳\,\text{جب}\,\text{فہ} - ۴\,\text{جب}^{۳}\,\text{فہ}$

$$\therefore\quad \text{جب}^{۳}\frac{\text{طہ}}{۳} = \frac{۱}{۴}\left(۳\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳} - \text{جب}\,\text{طہ}\right)$$

$۳\times\text{جب}^{۳}\frac{\text{طہ}}{۳^{۲}} = \frac{۱}{۴}\times۳\left(۳\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳^{۲}} - \text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳}\right.$ [illegible] $\left[۳^{۲}\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳^{۲}} - ۳\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳}\right]$

$$۳^{۲}\,\text{جب}^{۳}\frac{\text{طہ}}{۳^{۳}} = \frac{۱}{۴}\left[۳^{۳}\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳^{۳}} - ۳^{۲}\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳^{۲}}\right]$$

. . . .

$$۳^{(ن-۱)}\,\text{جب}^{۳}\frac{\text{طہ}}{۳^{ن}} = \frac{۱}{۴}\left[۳^{ن}\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳^{ن}} - ۳^{(ن-۱)}\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳^{(ن-۱)}}\right]$$

پس جمع کرنے سے مطلوبہ حاصل جمع

$$= \frac{۱}{۴}\left[۳^{ن}\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۳^{ن}} - \text{جب}\,\text{طہ}\right]$$

نیز لاتناہی تک حاصل جمع

$= \frac{۱}{۴}\left[\text{طہ} - \text{جب}\,\text{طہ}\right]$ .... حصہ اول دفعہ ۲۳۴

مشق ۲ ۔ ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

مس عہ + ۲ مس ۲ عہ + ۲^{۲} مس ۲^{۲} عہ + ... + ۲$^{ن-۱}$ مس ۲$^{ن-۱}$ عہ

ظاہر ہے کہ

مس عہ = مم عہ − ۲ مم ۲ عہ

مس ۲ عہ = مم ۲ عہ − ۲ مم ۲^{۲} عہ

مس ۲^{۲} عہ = مم ۲^{۲} عہ − ۲ مم ۲^{۳} عہ

مس ۲$^{ن-۱}$ عہ = مم ۲$^{ن-۱}$ عہ − ۲ مم ۲^{ن} عہ

ان قطاروں کو بالترتیب ۱، ۲، ۲^{۲}، ۲^{۳} .... ۲$^{ن-۱}$ سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

مس عہ + ۲ مس ۲ عہ + ۲^{۲} مس ۲^{۲} عہ + ... ۲$^{ن-۱}$ مس ۲$^{ن-۱}$ عہ

= مم عہ − ۲^{ن} مم ۲^{ن} عہ

کیونکہ باقی سب رقوم کٹ جاتی ہیں ۔

لہٰذا حاصل جمع مطلوب = مم عہ − ۲^{ن} مم ۲^{ن} عہ

مشق ۳ ۔ ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو ۔

مس عہ مس (عہ + بہ) + مس (عہ + بہ) مس (عہ + ۲ بہ) + [مس (عہ + ۲ بہ)
مس (عہ + ۳ بہ)] + ... تا ن رقوم

فرض کرو کہ ر ویں رقم = ی$_{ر}$ = مس {عہ + (ر − ۱) بہ} مس (عہ + ر بہ)

∴ (ی$_{ر}$ + ۱) مس بہ = [۱ + مس {عہ + (ر − ۱) بہ} مس {عہ + ر بہ}]
× مس [عہ + ر بہ − (عہ + ر − ۱ بہ)]

= مس [عہ + ر بہ] − مس [عہ + (ر − ١) بہ] .... دفعہ ٩٨ حصہ اول

پس ر کو بالترتیب ١، ٢، ...... ن قیمتیں دینے سے

(١ + ی١) مس بہ = مس (عہ + بہ) − مس عہ

(١ + ی٢) مس بہ = مس (عہ + ٢ بہ) − مس (عہ + بہ)

....

(١ + ین) مس بہ = مس (عہ + ن بہ) − مس {عہ + (ن − ١) بہ}

جمع کرنے سے

(ن + جن) مس بہ = مس (عہ + ن بہ) − مس عہ

پس جن = [مس (عہ + ن بہ) − مس عہ − ن مس بہ] / مس بہ

امثلہ ١٨

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

١۔ قم طہ + قم ٢ طہ + قم ٣ طہ + ... تا ن رقوم

٢۔ قم طہ قم ٢ طہ + قم ٢ طہ قم ٣ طہ + قم ٣ طہ قم ٤ طہ + ... تا ن رقوم

٣۔ قط طہ قط ٢ طہ + قط ٢ طہ قط ٣ طہ + قط ٣ طہ قط ٤ طہ + ... تا ن رقوم

٤۔ قط طہ قط (طہ + فہ) + قط (طہ + فہ) قط (طہ + ٢ فہ) + قط (طہ + ٢ فہ) قط (طہ + ٣ فہ)

+ .... تا ن رقوم

٥۔ ١ / (جم عہ + جم ٣ عہ) + ١ / (جم عہ + جم ٥ عہ) + ١ / (جم عہ + جم ٧ عہ) + ... تا ن رقوم

٦۔ مس طہ + ١/٢ مس طہ/٢ + ١/٢٢ مس طہ/٢٢ + ١/٢٣ مس طہ/٢٣ + ... تالاانتہا

۷ ـ $\text{مسز طہ} + \frac{1}{2}\text{مسز}\frac{\text{طہ}}{2} + \frac{1}{2^2}\text{مسز}\frac{\text{طہ}}{2^2} + \frac{1}{2^3}\text{مسز}\frac{\text{طہ}}{2^3} + \dots$ تا ن رقوم

۸ ـ $\text{مس طہ قط } 2\text{ طہ} + \text{مس } 2\text{ طہ قط } 4\text{ طہ} + \text{مس } 4\text{ طہ قط } 8\text{ طہ} + \dots$ تا ن رقوم

۹ ـ $\text{مس}\frac{\text{طہ}}{2}\text{ قط طہ} + \text{مس}\frac{\text{طہ}}{2^2}\text{ قط}\frac{\text{طہ}}{2} + \text{مس}\frac{\text{طہ}}{2^3}\text{ قط}\frac{\text{طہ}}{2^2} + \dots$ ن رقوم تک اور نیز لاتناہی تک

۱۰ ـ $\frac{1}{2\text{ جم طہ}} + \frac{1}{2^2\text{ جم طہ جم } 2\text{ طہ}} + \frac{1}{2^3\text{ جم طہ جم } 2\text{ طہ جم } 2^2\text{ طہ}} + \dots$ تا ن رقوم

۱۱ ـ $\text{جب } 2\text{ طہ جم}^2\text{ طہ} - \frac{1}{2}\text{جب } 4\text{ طہ جم}^2\, 2\text{ طہ} + \frac{1}{4}\text{جب } 8\text{ طہ جم}^2\, 4\text{ طہ} - \dots$ تا ن رقوم

۱۲ ـ $\text{جب } 2\text{ طہ جب}^2\text{ طہ} + \frac{1}{2}\text{جب } 4\text{ طہ جب}^2\, 2\text{ طہ} + \frac{1}{4}\text{جب } 8\text{ طہ جب}^2\, 4\text{ طہ} + \dots$ تا ن رقوم

۱۳ ـ $\frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ} + \text{جم } 2\text{ طہ}} + \frac{\text{جب } 2\text{ طہ}}{\text{جم طہ} + \text{جم } 4\text{ طہ}} + \frac{\text{جب } 3\text{ طہ}}{\text{جم طہ} + \text{جم } 6\text{ طہ}} + \dots$ تا ن رقوم

۱۴ ـ $\text{مس}^2\text{ عہ مس } 2\text{ عہ} + \frac{1}{2}\text{مس}^2\, 2\text{ عہ مس } 4\text{ عہ} + \frac{1}{2^2}\text{مس}^2\, 4\text{ عہ مس } 8\text{ عہ} + \dots$ تا ن رقوم

۱۵ ـ $\text{جم}^3\text{ طہ} - \frac{1}{3}\text{جم}^3\, 3\text{ طہ} + \frac{1}{3^2}\text{جم}^3\, 3^2\text{ طہ} - \frac{1}{3^3}\text{جم}^3\, 3^3\text{ طہ} + \dots$ تا ن رقوم

۱۶ ـ $\text{جب}^3\frac{\text{طہ}}{3} + 3\text{ جب}^3\frac{\text{طہ}}{3^2} + 3^2\text{ جب}^3\frac{\text{طہ}}{3^3} + \dots$ تا ن رقوم

۱۷ ـ $\frac{1}{\text{مم طہ} - 3\text{ مس طہ}} + \frac{3}{\text{مم } 3\text{ طہ} - 3\text{ مس } 3\text{ طہ}} + \frac{3^2}{\text{مم } 3^2\text{ طہ} - 3\text{ مس } 3^2\text{ طہ}} + \dots$ تا ن رقوم

۱۸ ـ $\frac{\text{جم طہ} - \text{جم } 3\text{ طہ}}{\text{جب } 3\text{ طہ}} + 3\,\frac{\text{جم } 3\text{ طہ} - \text{جم } 3^2\text{ طہ}}{\text{جب } 3^2\text{ طہ}} + 3^2\,\frac{\text{جم } 3^2\text{ طہ} - \text{جم } 3^3\text{ طہ}}{\text{جب } 3^3\text{ طہ}} + \dots$ تا ن رقوم

۱۹ ـ $\text{مس}^{-1}\frac{2}{4\times3+1} + \text{مس}^{-1}\frac{4}{9\times8+1} + \text{مس}^{-1}\frac{8}{16\times15+1} + \dots$ تا ن رقوم

۲۰ ـ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{3} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{7} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{13} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{21} + \dots$ تا ن رقوم

۲۱- $\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۲} + \text{مس}^{-1}\frac{۲}{۹} + \ldots\ldots + \text{مس}^{-1}\frac{۲^{\text{ن}-۱}}{۱+۲^{۲\text{ن}-۱}}$ .... تا لاتناہی

۲۲- $\text{جب}^{-1}\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \text{جب}^{-1}\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۶}} + \text{جب}^{-1}\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۲}} + \ldots\ldots$

$+ \text{جب}^{-1}\frac{\sqrt{\text{ن}}-\sqrt{\text{ن}-۱}}{\sqrt{\text{ن}(\text{ن}+۱)}} + \ldots\ldots$ تا لاتناہی

تفصیلیں

۱۱۰- اعلیٰ ریاضی کی بعض شاخوں میں کبھی کبھی بعض مقادیر کو صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلانے کی ضرورت واقع ہوتی ہے - بطور مثال ہم

$$\text{لوک}\,(۱ - ۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{ا}^{۲})$$

کی تفصیل ط کی صعودی قوتوں میں معلوم کرتے ہیں -

چونکہ $۲\,\text{جم}\,\text{ط} = \text{و}^{\text{خ}\text{ط}} + \text{و}^{-\text{خ}\text{ط}}$

اسلئے $\text{لوک}\,(۱-۲\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط}+\text{ا}^{۲}) = \text{لوک}\left[۱ - \text{ا}\,(\text{و}^{\text{خط}}+\text{و}^{-\text{خط}}) + \text{ا}^{۲}\right]$

$$= \text{لوک}\left[(۱-\text{ا}\,\text{و}^{\text{خط}})(۱-\text{ا}\,\text{و}^{-\text{خط}})\right]$$

$$= \text{لوک}\,(۱-\text{ا}\,\text{و}^{\text{خط}}) + \text{لوک}\,(۱-\text{ا}\,\text{و}^{-\text{خط}})$$

$$= -\text{ا}\,\text{و}^{\text{خط}} - \frac{۱}{۲}\text{ا}^{۲}\text{و}^{۲\text{خط}} - \frac{۱}{۳}\text{ا}^{۳}\text{و}^{۳\text{خط}} - \frac{۱}{۴}\text{ا}^{۴}\text{و}^{۴\text{خط}} - \ldots\ldots$$

$$-\text{ا}\,\text{و}^{-\text{خط}} - \frac{۱}{۲}\text{ا}^{۲}\text{و}^{-۲\text{خط}} - \frac{۱}{۳}\text{ا}^{۳}\text{و}^{-۳\text{خط}} - \frac{۱}{۴}\text{ا}^{۴}\text{و}^{-۴\text{خط}} - \ldots\ldots$$

$$= -\text{ا}\left[\text{و}^{\text{خط}}+\text{و}^{-\text{خط}}\right] - \frac{۱}{۲}\text{ا}^{۲}\left[\text{و}^{۲\text{خط}}+\text{و}^{-۲\text{خط}}\right] - \frac{۱}{۳}\text{ا}^{۳}\left[\text{و}^{۳\text{خط}}+\text{و}^{-۳\text{خط}}\right] - \ldots\ldots$$

$$= -\text{ا}\times ۲\,\text{جم}\,\text{ط} - \tfrac{1}{2}\,\text{ا}^{2}\times ۲\,\text{جم}\,۲\,\text{ط} - \tfrac{1}{3}\,\text{ا}^{3}\times ۲\,\text{جم}\,۳\,\text{ط} \ldots\ldots\ldots$$

$$= -۲\left[\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط} + \tfrac{1}{2}\,\text{ا}^{2}\,\text{جم}\,۲\,\text{ط} + \tfrac{1}{3}\,\text{ا}^{3}\,\text{جم}\,۳\,\text{ط} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

دفعہ ۹۰ کی رو سے لوک (۱ - ا $\text{و}^{\text{خ ط}}$) کی مندرجہ بالا تفصیل اس صورت میں درست اور جائز ہو گی اگر - ا $\text{و}^{\text{خ ط}}$ کا مقیاس ایک سے کم ہو اور چونکہ - ا $\text{و}^{\text{خ ط}}$ = ا {جم (π + ط) + خ جب (π + ط)}

اس لئے اس کا مقیاس ا ہے۔

اسلئے بالعموم مندرجہ بالا تفصیل اس صورت میں درست ہو گی جب ا ۱ سے کم ہو۔

اگر ا ایک کے مساوی ہو تو بھی مندرجہ بالا تفصیل درست رہے گی بشرطیکہ ط، π کے کسی جفت ضعف کے مساوی نہ ہو

نیز اگر ا، - ۱ کے برابر ہو اور ط، π کے کسی طاق ضعف کے مساوی نہ ہو تو بھی تفصیل بالا درست رہیگی۔

۱۱۱ - مشق -

$$\frac{۱ - \text{ا}^{2}}{۱ - ۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{ا}^{2}}$$

کو ا کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ

ظاہر ہے کہ

$$\frac{۱ - \text{ا}^{2}}{۱ - ۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{ا}^{2}} = -۱ + \frac{۲ - ۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط}}{۱ - ۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{ا}^{2}}$$

$$= -۱ + \frac{۲ - \text{ا}\,(\text{و}^{\text{خ ط}} + \text{و}^{-\text{خ ط}})}{۱ - \text{ا}\,(\text{و}^{\text{خ ط}} + \text{و}^{-\text{خ ط}}) + \text{ا}^{2}}$$

$$= -1 + \frac{2 - \text{ا}\left(\text{و}^{\text{خ ط}} + \text{و}^{-\text{خ ط}}\right)}{\left(1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}\right)\left(1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}\right)}$$

$$= -1 + \frac{1}{1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}} + \frac{1}{1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}}$$

$$= -1 + \left(1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}\right)^{-1} + \left(1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}\right)^{-1}$$

$$= -1 + 1 + \text{ا و}^{\text{خ ط}} + \text{ا}^{2}\,\text{و}^{2\text{خ ط}} + \text{ا}^{3}\,\text{و}^{3\text{خ ط}} + \cdots\cdots$$

$$+ 1 + \text{ا و}^{-\text{خ ط}} + \text{ا}^{2}\,\text{و}^{-2\text{خ ط}} + \text{ا}^{3}\,\text{و}^{-3\text{خ ط}} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \text{ا}\left(\text{و}^{\text{خ ط}} + \text{و}^{-\text{خ ط}}\right) + \text{ا}^{2}\left(\text{و}^{2\text{خ ط}} + \text{و}^{-2\text{خ ط}}\right) + \cdots\cdots$$

$$= 1 + 2\,\text{ا جم ط} + 2\,\text{ا}^{2}\,\text{جم}\,2\text{ط} + 2\,\text{ا}^{3}\,\text{جم}\,3\text{ط} + \cdots\cdots \text{تا لامتناہی}$$

$\left(1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}\right)^{-1}$ اور $\left(1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}\right)^{-1}$ کی تفصلیں مسئلہ ثنائی کی مدد سے اسی صورت میں درست ہونگی جبکہ $\text{ا و}^{\text{خ ط}}$ کا مقیاس ایک سے کم ہو یعنی جب ا تعداداً ایک سے کم ہو لیکن اس کے سوائے اور کسی صورت میں درست نہ ہونگی (دفعہ ۲۶)

یاد رہے کہ سلسلہ بالا وہی ہے جو دفعہ ۴۹ میں بلا ثبوت تسلیم کرلیا گیا تھا۔ اسی طرح سے ہم دفعہ ۴۸ کا سلسلہ بھی معلوم کرسکتے ہیں کیونکہ

$$\frac{2\,\text{ا جب ط}}{1 - 2\,\text{ا جم ط} + \text{ا}^{2}} = \frac{1}{\text{خ}}\;\frac{\text{ا}\left(\text{و}^{\text{خ ط}} - \text{و}^{-\text{خ ط}}\right)}{1 - \text{ا}\left(\text{و}^{\text{خ ط}} + \text{و}^{-\text{خ ط}}\right) + \text{ا}^{2}}$$

$$= \frac{1}{\text{خ}} \times \frac{\text{ا و}^{\text{خ ط}} - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}}{\left(1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}\right)\left(1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}\right)} = \frac{1}{\text{خ}}\left[\frac{1}{1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}} - \frac{1}{1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}}\right]$$

$$= \frac{1}{\text{خ}}\left\{\left(1 + \text{ا و}^{\text{خ ط}} + \text{ا}^{2}\,\text{و}^{2\text{خ ط}} + \cdots\cdots\right) - \left(1 + \text{ا و}^{-\text{خ ط}} + \text{ا}^{2}\,\text{و}^{-2\text{خ ط}} + \cdots\cdots\right)\right\}$$

$= \text{۲ ا جب طہ} + \text{۲ ا}^{۲}\text{جب ۲ طہ} + \text{۲ ا}^{۳}\text{جب ۳ طہ} + \ldots\ldots$ تالامتناہی

حسب سابق یہ تفصیل بھی اسی صورت میں جائز ہوگی جب ا < ۱

۱۱۲ — مشق ۔ اگر جب لا = ن جب (عہ + لا) تو لا کو ن کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ جہاں ن ایک سے کم ہے ۔

چونکہ جب لا = ن جب (عہ + لا) = ن {جب عہ جم لا + جم عہ جب لا}

$$\therefore \quad \text{مس لا} = \frac{\text{ن جب عہ}}{\text{۱ − ن جم عہ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}}}{\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}}} = \frac{\text{ن خ جب عہ}}{\text{۱ − ن جم عہ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{و}^{\text{خ لا}}}{\text{و}^{-\text{خ لا}}} = \frac{\text{۱ − ن جم عہ + ن خ جب عہ}}{\text{۱ − ن جم عہ − ن خ جب عہ}} = \frac{\text{۱ − ن و}^{-\text{خ عہ}}}{\text{۱ − ن و}^{\text{خ عہ}}}$$

$$\therefore \quad \text{۲ خ لا} = \text{لوک}\left(\text{۱ − ن و}^{-\text{خ عہ}}\right) - \text{لوک}\left(\text{۱ − ن و}^{\text{خ عہ}}\right)$$

$$= -\text{ن و}^{-\text{خ عہ}} - \frac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\text{و}^{-\text{۲خ عہ}} - \frac{۱}{۳}\text{ن}^{۳}\text{و}^{-\text{۳خ عہ}} - \ldots\ldots$$

$$+ \text{ن و}^{\text{خ عہ}} + \frac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\text{و}^{\text{۲خ عہ}} + \frac{۱}{۳}\text{ن}^{۳}\text{و}^{\text{۳خ عہ}} + \ldots\ldots$$

$$= \text{ن}\left(\text{و}^{\text{خ عہ}} - \text{و}^{-\text{خ عہ}}\right) + \frac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\left(\text{و}^{\text{۲خ عہ}} - \text{و}^{-\text{۲خ عہ}}\right)$$

$$+ \frac{۱}{۳}\text{ن}^{۳}\left(\text{و}^{\text{۳خ عہ}} - \text{و}^{-\text{۳خ عہ}}\right) \ldots\ldots\ldots \text{ تالامتناہی}$$

$$= \text{ن} \times \text{۲خ جب عہ} + \frac{۱}{۲}\text{ن}^{۲} \times \text{۲خ جب ۲عہ} + \frac{۱}{۳}\text{ن}^{۳} \times \text{۲خ جب ۳عہ} + \ldots$$

$$\therefore \quad \text{لا} = \text{ن جب عہ} + \frac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\text{جب ۲عہ} + \frac{۱}{۳}\text{ن}^{۳}\text{جب ۳عہ} + \ldots\ldots \quad (۱)$$

اس مساوات میں ہم نے فرض کرلیا ہے کہ لا، $-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ کے

درمیان واقع ہے۔ اگر ایسا نہ ہو تو ہم کو چاہیئے کہ ۲ خ لا کی بجائے ۲ ک خ ہ + ۲ خ لا لکھیں، تب مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن لا + ک ہ ہو جائیگا۔ بعد ازیں ہم ک کے لئے ایسی قیمت تجویز کر سکتے ہیں جس سے لا + ک ہ، $-\frac{\text{ہ}}{۲}$ اور $+\frac{\text{ہ}}{۲}$ کے درمیان واقع ہو۔

حسب سابق یہ تفصیلات اسی صورت میں درست ہونگی جبکہ ن، ایک سے کم ہو۔

۱۱۳ — مشق۔ $\text{و}^{\text{لا}}$ جم ب لا کو لا کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

ظاہر ہے کہ

$$\text{و}^{\text{لا}}\ \text{جم ب لا} = \text{و}^{\text{لا}}\ \frac{\text{و}^{\text{ب خ لا}} + \text{و}^{-\text{ب خ لا}}}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{و}^{(۱+\text{خ ب})\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\,\text{و}^{(۱-\text{خ ب})\text{لا}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[۱ + (۱+\text{خ ب})\text{لا} + \frac{(۱+\text{خ ب})^۲\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{(۱+\text{خ ب})^۳\text{لا}^۳}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots\right]$$

$$+ \frac{۱}{۲}\left[۱ + (۱-\text{خ ب})\text{لا} + \frac{(۱-\text{خ ب})^۲\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{(۱-\text{خ ب})^۳\text{لا}^۳}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots\right]$$

اس میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $= \dfrac{(۱+\text{خ ب})^{\text{ن}} + (۱-\text{خ ب})^{\text{ن}}}{۲\,\lfloor \text{ن}}$

اگر $۱ + \text{خ ب} = \text{ر}\,(\text{جم ع} + \text{خ جب ع})$

یعنی $\text{ر} = +\sqrt{۱^۲ + \text{ب}^۲}$ اور $\text{مس ع} = \frac{\text{ب}}{۱}$ (زیر شرائط دفعہ ۲۰)

تب $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $= \dfrac{\{\text{ر}(\text{جم عہ} + \text{خ جب عہ})\}^{\text{ن}} + \{\text{ر}(\text{جم عہ} - \text{خ جب عہ})\}^{\text{ن}}}{۲\,\underline{|\text{ن}}}$

مسئلہ ڈی مائیور کی رو سے $= \text{ر}^{\text{ن}} \dfrac{\text{جم ن عہ}}{\underline{|\text{ن}}}$

لہذا

$$\text{و}^{\text{الا}}\,\text{جم ب لا} = ۱ + \text{ر جم عہ} \times \text{لا} + \frac{\text{ر}^۲ \text{جم ۲ عہ}}{\underline{|۲}}\text{لا}^۲ + \frac{\text{ر}^۳ \text{جم ۳ عہ}}{\underline{|۳}}\text{لا}^۳ + \frac{\text{ر}^۴ \text{جم ۴ عہ}}{\underline{|۴}}\text{لا}^۴ + \ldots\ldots$$

جہاں $\text{ر} = +\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}$ اور $\text{مس عہ} = \dfrac{\text{ب}}{\text{ا}}$

یہ تفصیل ا، ب، اور لا کی تمام قیمتوں کے واسطے درست ہے ... (دفعہ ۵۷)

امثلہ ۱۹

رقوم ذیل کو لا متناہی سلسلوں میں پھیلاؤ

(۱) $\dfrac{۱ + \text{ا جم طہ}}{۱ + ۲\,\text{ا جم طہ} + \text{ا}^۲}$ (۲) $\dfrac{\text{جم طہ} - \text{ا جم}(\text{طہ} - \text{فہ})}{۱ - ۲\,\text{ا جم فہ} + \text{ا}^۲}$

(۳) $\dfrac{\text{جب طہ} - \text{ا جب}(\text{طہ} - \text{فہ})}{۱ - ۲\,\text{ا جم فہ} + \text{ا}^۲}$ (۴) $\text{و}^{\text{ا جم فہ}}\,\text{جم}(\text{طہ} + \text{ا جب فہ})$

(۵) $\text{و}^{\text{اطہ}}\,\text{جب ب طہ}$

ثابت کرو کہ

(۶) $\text{لوگ}\,\dfrac{\text{ا}^۲}{\text{ا}^۲\,\text{جم}^۲\,\text{طہ} + \text{ب}^۲\,\text{جب}^۲\,\text{طہ}}$

$= ۲\left[\text{ج جب}^۲\text{طہ} - \tfrac{۱}{۲}\text{ج}^۲\,\text{جب}^۲\,۲\text{طہ} + \tfrac{۱}{۳}\text{ج}^۳\,\text{جب}^۲\,۳\text{طہ} - \ldots\ldots\right]$ ... جہاں $\text{ج} = \dfrac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}$

(۷) مس$^{-1}$ $\frac{\text{ا جب ط}}{\text{۱ - ا جم ط}}$ = ا جب ط + $\frac{۱}{۲}$ ا^{۲} جب ۲ ط + $\frac{۱}{۳}$ ا^{۳} جب ۳ ط + ... تالانتناہی

(۸) $\frac{۱}{۲}$ مس$^{-1}$ (جب عہ مس ۲ بہ) = جب عہ مس بہ + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ عہ مس^{۳} بہ + $\frac{۱}{۵}$ جب ۵ عہ مس^{۵} بہ

+ .... تالاتناہی

(۹) اگر جب ط = لا جم (ط + عہ)، تو ط کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(۱۰) اگر ۲ مس ما = جب لا قم $\frac{\text{لا + عہ}}{۲}$ قم $\frac{\text{لا - عہ}}{۲}$ تو

ما کو، جم عہ، کی رقوم میں پھیلاؤ

(۱۱) اگر مس لا = ن مس ما اور $\frac{\text{۱ - ن}}{\text{۱ + ن}}$ = م، تو ثابت کرو کہ

لا + ر π = ما - م جب ۲ ما + $\frac{\text{م}^{۲}}{۲}$ جب ۴ ما - $\frac{\text{م}^{۳}}{۳}$ جب ۶ ما + ... تالاتناہی

جہاں ر کے لئے ایسی قیمت تجویز کرنی چاہئے جس سے لا + ر π - ما کی قیمت

- $\frac{\pi}{۲}$ اور + $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہو۔

(۱۲) اگر (۱) ن = جم عہ اور

(۲) ن = $\frac{۱}{\text{جم ۲ عہ}}$

تو دونوں صورتوں میں مشق ماقبل کا سلسلہ کونسی شکل اختیار کرتا ہے۔

(۱۳) لوک جم ($\frac{\pi}{۴}$ + ط) کو ط کے صعودی اضعاف کی جیوب اور جیوب التمام کے رقوم میں پھیلاؤ۔

(۱۴) لوک مس ($\frac{\pi}{۴}$ + $\frac{\text{ط}}{۲}$) کو ط کے صعودی اضعاف کی جیوب کی رقوم میں پھیلاؤ۔

(۱۵) ثابت کرو کہ

(۱ + و$^{-\text{خ ط}}$ کم عہ)(۱ + و$^{\text{خ ط}}$ کم عہ)(۱ + و$^{-\text{خ ط}}$ مس عہ)(۱ + و$^{\text{خ ط}}$ مس عہ)

= ۴ (قطہ بہ + جم طہ)^{۲}

جہاں بہ = $\frac{\pi}{۲}$ − ۲ عہ

اس کی مدد سے لوک (۱ + جم بہ جم طہ) کے لئے ایک سلسلہ طہ کے اضعاف کی جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کرو۔

(۱۶) ثابت کرو کہ

$\frac{\text{۲ ا جم طہ}}{\text{۱ − ۲ ا جب طہ + ا}^{۲}}$ = ۲ ا جم طہ + ۲ ا^{۲} جب ۲ طہ − ۲ ا^{۳} جم ۳ طہ − ۲ ا^{۴} جب ۴ طہ + ... تالاتناہی

(۱۷) ثابت کرو کہ

لوک جم طہ = − لوک ۲ + جم ۲ طہ − $\frac{۱}{۲}$ جم ۴ طہ + $\frac{۱}{۳}$ جم ۶ طہ − .... تالاتناہی

جہاں طہ سے ایسا زاویہ مراد ہے جسکی جیب التمام مثبت ہو

(۱۸) ثابت کرو کہ اگر کسی مثلث میں اَ > بَ، تو

لوک جَ = لوک اَ − $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ جم جَ − $\frac{۱}{۲}$ $\frac{\text{بَ}^{۲}}{\text{اَ}^{۲}}$ جم ۲ جَ − $\frac{۱}{۳}$ $\frac{\text{بَ}^{۳}}{\text{اَ}^{۳}}$ جم ۳ جَ ... تالاتناہی

[ہمیں معلوم ہے کہ جَ^{۲} = اَ^{۲} + بَ^{۲} − ۲ اَبَ جم جَ = اَ^{۲}(۱ − $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ و$^{\text{خ ج}}$)(۱ − $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ و$^{-\text{خ ج}}$)]

(۱۹) اگر و$^{\text{ا لا}}$ جب ب لا + و$^{\text{ب لا}}$ جب ا لا کی تفصیل لا کی قوتوں میں معلوم کیجائے تو ثابت کرو کہ

لا$^{\text{ن}}$ کا سر = $\frac{۲(\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲})^{\frac{\text{ن}}{۲}}}{\underline{|\text{ن}}}$ جب $\frac{\text{ن}\,\pi}{۴}$ جم $\frac{\text{ن}}{۲}$ [$\frac{\pi}{۲}$ − ۲ مس$^{-۱}$ $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$]

(۲۰) ثابت کرو کہ لوک (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} − ۳ ا ب ج) کی تفصیل میں

ج$^{\text{ن}}$ کا سر = $\frac{۱}{\text{ن}}$ [$\frac{(-۱)^{\text{ن}-۱}}{(\text{ا} + \text{ب})^{\text{ن}}}$ − $\frac{\text{۲ جم ن طہ}}{(\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} - \text{ا ب})^{\frac{\text{ن}}{۲}}}$]

جہاں مس طہ = $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}$ $\sqrt{۳}$

باب ہشتم

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا اور جیب طہ اور جم طہ کے لئے لاتناہی حاصل ضرب

۱۱۴ - ہم الجبرا میں یہ معلوم کر چکے ہیں کہ اگر ف سے لا کا کوئی تفاعل مراد ہو اور اگر یہ جملہ لا کی بجائے عہ رکھنے سے صفر ہوجاتے تو لا - عہ، ف کا ایک جزو ضربی ہوتا ہے۔

لہذا ثابت ہوا کہ کسی ف کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لئے پہلے ہمیں مساوات ف = ۰ کو حل کرنا چاہیئے۔

نیز ہمیں معلوم ہے کہ اگر ف = ۰ ن ویں درجہ کی مساوات ہو تو اس مساوات کے ن حل ہونگے اور اگر یہ تمام ن جو مساوات مذکورہ کو حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں، عہ، بہ، جہ …… نہ ہوں تو ف کے اجزائے ضربی لا - عہ، لا - بہ، لا - جہ، …… لا - نہ ہونگے اور ان کے علاوہ اور کوئی جزو ضربی ایسا نہ ہوگا جس میں لا شامل ہو

دفعات مابعد میں اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لئے ہم یہی طریقہ اختیار کرینگے۔

۱۱۵ - جملہ لا^۲ن ـ ۲ لا^ن جم ن طہ + ۱ کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

ہمیں پہلے مساوات

لا^{۲ن} - ۲ لا^ن جم ن طہ + ۱ = ۰

کو حل کرنا چاہیئے

مساوات بالا اس طرح لکھی جاسکتی ہے لا^{۲ن} - ۲ لا^ن جم ن طہ + جم^۲ ن طہ = - جب^۲ ن طہ

یعنی　　لا^ن - جم ن طہ = ± $\sqrt{-1}$ جب ن طہ

اور اس سے　لا = [جم ن طہ ± $\sqrt{-1}$ جب ن طہ]^{1/ن}

دفعہ ۲۴ کی رو سے اس کی قیمتیں ذیل کی ن مقادیر ہیں

جم طہ ± $\sqrt{-1}$ جب طہ، جم (طہ + $\frac{۲\pi}{ن}$) ± $\sqrt{-1}$ جب (طہ + $\frac{۲\pi}{ن}$)

جم (طہ + $\frac{۴\pi}{ن}$) ± $\sqrt{-1}$ جب (طہ + $\frac{۴\pi}{ن}$) ......

...... جم {طہ + $\frac{۲\pi(ن - ۱)}{ن}$} ± $\sqrt{-1}$ جب {طہ + $\frac{۲\pi(ن - ۱)}{ن}$}

پہلے زوج سے ذیل کے دو اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں -

لا - جم طہ + $\sqrt{-1}$ جب طہ　اور　لا - جم طہ - $\sqrt{-1}$ جب طہ

یا اگر ان دونوں کو ضرب دیکر ایک جزو ضربی بنالیا جائے تو گویا اول زوج سے متعلق درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

(لا - جم طہ)^۲ + جب^۲ طہ

یعنی　　لا^۲ - ۲ لا جم طہ + ۱　　حاصل ہوتا ہے

اسی طرح سے متذکرہ بالا مقادیر کے دوسرے، تیسرے ...... ازواج سے بالترتیب ذیل کے اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں -

لا^۲ - ۲ لا جم (طہ + $\frac{۲\pi}{ن}$) + ۱

$$\text{لا}^{۲} - ۲\ \text{لا جم}\ (\text{طہ} + \frac{۲\ \text{ٹ}}{\text{ن}}) + ۱$$

. . . .

اور $$\text{لا}^{۲} - ۲\ \text{لا جم}\ (\text{طہ} + \frac{۲\ \text{ن} - ۲}{\text{ن}}\ \text{ٹ}) + ۱$$

نیز ان اجزائے ضربی کو ضرب دینے سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ لا^۲ن کا سر ایک ہے اور اصلی جملہ میں بھی لا^۲ن کا سر ایک ہی ہے۔ لہٰذا جملہ مذکور کو ان اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی کرنے میں مؤخر الذکر کے ساتھ کسی عددی جزو ضربی کے ثبت کرنے کی ضرورت نہیں۔

پس

$$\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\ \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{جم ن طہ} + ۱$$

$$= (\text{لا}^{۲} - ۲\ \text{لا جم طہ} + ۱)\{\text{لا}^{۲} - ۲\ \text{لا جم}(\text{طہ} + \frac{۲\ \text{ٹ}}{\text{ن}}) + ۱\}\{\text{لا}^{۲} - ۲\ \text{لا جم}(\text{طہ} + \frac{۴\ \text{ٹ}}{\text{ن}})$$

$$+ ۱\} \ldots \{\text{لا}^{۲} - ۲\ \text{لا جم}(\text{طہ} + \frac{۲\ \text{ن} - ۲}{\text{ن}}\ \text{ٹ}) + ۱\} \ldots\ldots\ldots (۱)$$

لا^ن پر تقسیم کرنے سے

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}} - ۲\ \text{جم ن طہ} = \{\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} - ۲\ \text{جم طہ}\}\{\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} - ۲\ \text{جم}\ (\text{طہ} + \frac{۲\ \text{ٹ}}{\text{ن}})\} \ldots$$

$$\ldots \{\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} - ۲\ \text{جم}\ (\text{طہ} + \frac{۲\ \text{ن} - ۲}{\text{ن}}\ \text{ٹ})\} \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ربط (۲) کو بطریقۂ ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}} - ۲\ \text{جم ن طہ} = \prod_{\text{ر}=\cdot}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \{\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} - ۲\ \text{جم}\ (\text{طہ} + \frac{۲\ \text{ر}\ \text{ٹ}}{\text{ن}})\}$$

جہاں علامت $\prod_{\text{ر}=\cdot}^{\text{ن}-۱}$ سے مراد ان سب جملوں کا حاصل ضرب ہے جو اس کے بائیں

جانب کے جملہ میں ر کو بالتسلسل صفر سے لیکر ن - ۱ تک کے کل صحیح اعداد کے برابر رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں ۔ اسی طرح سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

لا^{۲ن} - ۲ ا^ن لا^ن جم ن طہ + ا^{۲ن}

= {لا^۲ - ۲ ا لا جم طہ + ا^۲} {لا^۲ - ۲ ا لا جم (طہ + ۲π/ن) + ا^۲}

{لا^۲ - ۲ ا لا جم (طہ + ۴π/ن) + ا^۲} ......

...... {لا^۲ - ۲ ا لا جم (طہ + (۲ن - ۲)/ن π) + ا^۲} .... (۳)

۱۱۶ — دفعہ ماقبل کا مسئلہ استقرار سے بھی ثابت ہوسکتا ہے ۔ پہلے ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ

لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن عہ،

لا + ۱/لا - ۲ جم عہ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہے ۔

اگر لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن عہ کو فہ (ن) سے تعبیر کیا جائے

اور لا + ۱/لا - ۲ جم عہ کو لہ سے، تو گویا ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ فہ (ن)،

لہ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہے جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے ۔

مان لو کہ یہ مسئلہ فہ (ن - ۱) اور فہ (ن - ۲) کے لئے درست ہے ۔

یعنی فہ (ن - ۱) اور فہ (ن - ۲) دونوں لہ پر پورے تقسیم ہوجاتے ہیں ۔

(لا + ۱/لا) فہ (ن - ۱) = (لا + ۱/لا) {لا^{ن-۱} + ۱/لا^{ن-۱} - ۲ جم (ن - ۱) عہ}

= (لا^ن + ۱/لا^ن) + (لا^{ن-۲} + ۱/لا^{ن-۲}) - ۲ جم (ن - ۱) عہ × (لا + ۱/لا)

= {لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن عہ}

+ {لا^{ن-۲} + ۱/لا^{ن-۲} - ۲ جم (ن - ۲) عہ} - ۲ جم (ن - ۱) عہ {لا + ۱/لا - ۲ جم عہ}

کیونکہ ۲ جم ن عہ + ۲ جم (ن - ۲) عہ = ۴ جم عہ جم (ن - ۱) عہ

اس لئے (لا + ۱/لا) × فہ (ن - ۱) = فہ (ن) + فہ (ن - ۲) - ۲ لہ جم (ن - ۱) عہ

∴ فہ (ن) = (لا + ۱/لا) فہ (ن - ۱) - فہ (ن - ۲) + ۲ لہ جم (ن - ۱) عہ ...... (۱)

اس سے ظاہر ہے کہ اگر فہ (ن - ۱) اور فہ (ن - ۲) میں جزو ضربی لہ شامل ہو تو لازماً فہ (ن) میں بھی ایک جزو ضربی لہ واقع ہوگا۔

اب فہ (۱) = لا + ۱/لا - ۲ جم عہ = لہ

اور فہ (۲) = لا^۲ + ۱/لا^۲ - ۲ جم ۲ عہ = (لا + ۱/لا - ۲ جم عہ)(لا + ۱/لا + ۲ جم عہ)

= لہ (لا + ۱/لا + ۲ جم عہ)

یعنی فہ (۱) اور فہ (۲) دونوں لہ پر پورے تقسیم ہو سکتے ہیں۔

اور مساوات (۱) میں ن = ۳ رکھنے سے ظاہر ہے کہ فہ (۳)، لہ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے، اسی طرح سے اگر مساوات (۱) میں بالتسلسل ن = ۴، ن = ۵، ن = ۶، ...... رکھا جائے تو استقراءً سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ن کی تمام قیمتوں کے لئے فہ (ن)، لہ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

∴ لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن عہ، پورا تقسیم ہو جاتا ہے لا + ۱/لا - ۲ جم عہ پر

نیز چونکہ لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن عہ = لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن (عہ + ۲ط ر/ن)

اور موخر الذکر جملہ، حسب ثبوت سابق لا + ۱/لا - ۲ جم (عہ + ۲ط ر/ن) پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔ اس لئے ثابت ہوا کہ اول الذکر جملہ لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن عہ بھی مقدار لا + ۱/لا - ۲ جم (عہ + ۲ط ر/ن) پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

اسی قسم کے مزید استدلال سے آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ جملہ زیر بحث مقادیر لا + ۱/لا - ۲ جم (عہ + ۲ط ر/ن)،

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} - 2\ \text{جم}\ \text{ن}\left(\text{ط} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)$$

....

اور　$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} - 2\ \text{جم}\ \text{ن}\left(\text{ط} + \frac{2(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}\right)$$

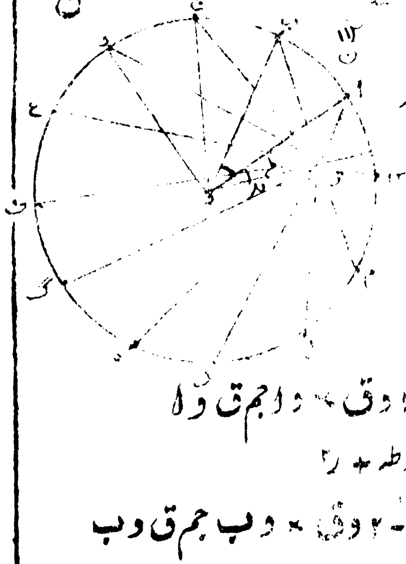
پر بھی پورا تقسیم ہو سکتا ہے ... دفعہ ۱۱۴ کی مساوات (۲) آسانی سے حاصل ہو جاتی ہے۔

۱۱۵ — دائرہ سے متعلق ڈی موائیور کا مسئلہ

دفعہ ۱۱۴ کی مساوات (۳) کو ... شکل میں ... سکتے ہیں

فرض کرو کہ ایک دائرہ کے اندر جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر ر ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ...... بنایا گیا ہے

پس $\angle$ ا و ب $=$ $\angle$ ب و ج $=$ $\angle$ ج و د ...... $= \frac{2\pi}{\text{ن}}$



فرض کرو کہ دائرہ کے اندر یا باہر ایک نقطہ ق ایسا ہے کہ

و ق $=$ لا اور $\angle$ ق و ا $=$ ط

نیز $\angle$ ق و ب $=$ ط $+ \frac{2\pi}{\text{ن}}$

$\angle$ ق و ج $=$ ط $+ \frac{4\pi}{\text{ن}}$ ......

اور چونکہ ق ا^2 $=$ و ق^2 $+$ و ا^2 $-$ ۲ و ق $\times$ و ا جم ق و ا

$=$ لا^2 $-$ ۲ ر لا جم ط $+$ ر^2

ق ب^2 $=$ و ق^2 $+$ و ب^2 $-$ ۲ و ق $\times$ و ب جم ق و ب

$=$ لا^2 $-$ ۲ ر لا جم $\left(\text{ط} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)$ $+$ ر^2

ق ج^2 $=$ لا^2 $-$ ۲ ر جم $\left(\text{ط} + \frac{4\pi}{\text{ن}}\right)$ $+$ ر^2

....

لہٰذا ق ا^{۲} × ق ب^{۲} × ق ج^{۲} × .... ن اجزائے ضربی تک

= {لا^{۲} − ۲ ر لا جم ط + ر^{۲}} {لا^{۲} − ۲ ر لا جم (ط + $\frac{۲\pi}{ن}$) + ر^{۲}}

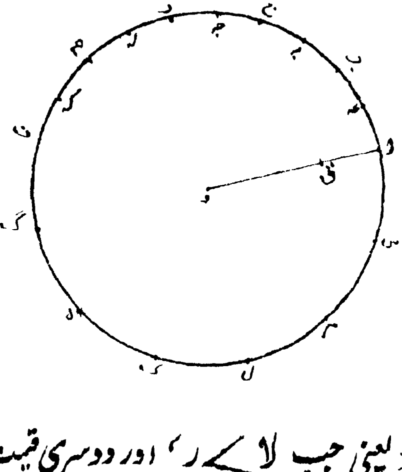
{لا^{۲} − ۲ ر لا جم (ط + $\frac{۴\pi}{ن}$) + ر^{۲}} .... ن اجزائے ضربی تک

= لا^{۲ن} − ۲ ر^{ن} لا^{ن} جم ن ط + ر^{۲ن}

۱۱۸ — دائرہ کے متعلق کوٹی کا مسئلہ

دفعہ ماقبل میں فرض کرو کہ نقطہ ق، و ا پر واقع ہے۔
یعنی فرض کرو کہ نقطہ ق، اُن خطوط میں سے جو دائرہ کے مرکز و کو کثیر الاضلاع کے راُسوں کے ساتھ ملاتے ہیں، کسی ایک پر واقع ہے
اس صورت میں ط = ۰ اور

ق ا^{۲} × ق ب^{۲} × ق ج^{۲} .... ن اجزائے ضربی تک



= لا^{۲ن} − ۲ ر^{ن} لا^{ن} + ر^{۲ن}

= (لا^{ن} − ر^{ن})^{۲}

∴ ق ا × ق ب × ق ج

.... ن اجزائے ضربی تک

= لا^{ن} − ر^{ن} یا ر^{ن} − لا^{ن}

پہلی قیمت اس صورت میں درست ہوگی جب ق دائرہ کے باہر و ا ممدودہ پر واقع ہو یعنی جب لا > ر، اور دوسری قیمت اس صورت میں درست ہوگی، جبکہ نقطہ ق دائرہ کے اندر و ا پر واقع ہو۔

لہذا ثابت کرو کہ

ق ا × ق ب × ق ج × ق د ۔۔۔۔۔۔۔۔ ن اجزائے ضربی تک = لا^ن ۔ ر^ن
۔۔۔۔۔ (۱)

نیز فرض کرو کہ قوسوں اب، ب ج، ج د ۔۔۔۔۔ کے نقاطِ تنصیف بالترتیب عہ، بہ، جہ، لہ ۔۔۔۔ ہیں، یعنی ا عہ ب بہ ج جہ ۔۔۔۔۔ ۲ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے جو دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے ۔

مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ

ق ا × ق عہ × ق ب × ق بہ × ق ج × ق جہ ۔۔۔۔۔ ۲ ن اجزائے ضربی تک = لا^۲ن ۔ ر^۲ن ۔۔۔۔۔۔۔۔۔ (۲)

(۱) کو (۲) پر تقسیم کرنے سے

ق عہ × ق بہ × ق جہ ۔۔۔۔ ن اجزائے ضربی تک = لا^ن + ر^ن ۔۔۔۔۔ (۳)

اس دفعہ کی مساوات (۳)، دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۳) میں ط = $\frac{\pi}{ن}$ رکھنے سے براہ راست حاصل ہو سکتی ہے ۔ یعنی

(لا^۲ ۔ ۲ ر لا جم $\frac{\pi}{ن}$ + ر^۲) (لا^۲ ۔ ۲ ر لا جم $\frac{۳\pi}{ن}$ + ر^۲) (لا^۲ ۔ ۲ ر لا جم $\frac{۵\pi}{ن}$ + ر^۲)
۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ ن اجزائے ضربی تک = لا^۲ن ۔ ۲ ر^ن لا^ن جم π + ر^۲ن
= لا^۲ن + ۲ ر^ن لا^ن + ر^۲ن = (لا^ن + ر^ن)^۲

یعنی ق عہ^۲ × ق بہ^۲ × ۔۔۔۔۔۔۔۔۔ ن اجزائے ضربی تک = (لا^ن + ر^ن)^۲

دفعہ ہذا کی مساوات (۳) یہی ہے ۔

۱۱۹ ۔ لا^ن ۔ ۱ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

پہلے ہمیں مساوات لا^ن ۔ ۱ = ۰
کو حل کرنا چاہیئے ۔

مساوات مذکورہ سے $لا^{ن} = ۱ = جم ۲ ر \pi \pm خ جب ۲ ر \pi$ جہاں ر سے
کوئی صحیح عدد مراد ہے۔

پس $لا = [جم ۲ ر \pi \pm خ جب ۲ ر \pi]^{\frac{۱}{ن}}$ .... (۱)

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن، جفت ہے

بموجب دفعہ ۱۲۴ جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہیں۔

$جم ۰ \pm خ جب ۰$ ، $جم \frac{۲\pi}{ن} \pm خ جب \frac{۲\pi}{ن}$

$جم \frac{۴\pi}{ن} \pm خ جب \frac{۴\pi}{ن}$ ...... $جم \frac{ن-۲}{ن}\pi \pm خ جب \frac{ن-۲}{ن}\pi$ ،

$جم \frac{ن\pi}{ن} \pm خ جب \frac{ن\pi}{ن}$ ،

لیکن $جم ۰ \pm خ جب ۰ = ۱$

اور $جم \frac{ن\pi}{ن} \pm خ جب \frac{ن\pi}{ن} = -۱$

لہذا اس صورت میں مساوات (۱) کی اصلیں ذیل کی ن مقداریں ہیں

± ۱، $جم \frac{۲\pi}{ن} \pm خ جب \frac{۲\pi}{ن}$ ، $جم \frac{۴\pi}{ن} \pm خ جب \frac{۴\pi}{ن}$

.... $جم \frac{ن-۲}{ن}\pi \pm خ جب \frac{ن-۲}{ن}\pi$

پہلے زوج سے متعلق اجزائے ضربی $لا - ۱$ اور $لا + ۱$ ہیں جو دونوں
ملکر درجہ دوم کے ایک جزو ضربی $لا^{۲} - ۱$ کے مساوی ہیں۔

دوسرے زوج کے متعلقہ اجزائے ضربی $لا - جم \frac{۲\pi}{ن} - خ جب \frac{۲\pi}{ن}$
اور $لا - جم \frac{۲\pi}{ن} + خ جب \frac{۲\pi}{ن}$ ہیں یعنی اس زوج سے متعلق

جزو ضربی درجہ دوم $\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\pi}{\text{ن}} + 1$ ہے۔

اس طرح ہمیں درجہ دوم کے اجزائے ضربی کے $\frac{\text{ن}}{2}$ زوج حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ان سب کو ضرب دیا جائے تو $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر ایک ہوگا، اسلئے ہمیں اس حاصل ضرب کے ساتھ کوئی عددی مقدار لگانے کی ضرورت نہیں۔

لہٰذا بالآخر ثابت ہوا کہ اگر ن **جفت** ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - 1 = (\text{لا}^2 - 1)\left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{2\pi}{\text{ن}} + 1\right)\left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{4\pi}{\text{ن}} + 1\right)$$

$$\ldots\ldots\left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{\text{ن}-2}{\text{ن}}\pi + 1\right)\ldots\ldots \quad (2)$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن **طاق** ہے۔

تب حسب دفعہ ۴۲ جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی۔

$$\text{جم}\,0 \pm \text{خ}\,\text{جب}\,0\,،\quad \text{جم}\frac{2\pi}{\text{ن}} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{2\pi}{\text{ن}}$$

$$\text{جم}\frac{4\pi}{\text{ن}} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{4\pi}{\text{ن}}\,،\ \ldots\ \text{جم}\frac{\text{ن}-3}{\text{ن}}\pi \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{\text{ن}-3}{\text{ن}}\pi$$

$$\text{جم}\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\pi \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\pi$$

پہلے زوج سے صرف ایک ہی قیمت $+1$ حاصل ہوتی ہے

حسب سابق باقی زوجوں کو لینے سے جب ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - 1 = (\text{لا} - 1)\left\{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{2\pi}{\text{ن}} + 1\right\}\left\{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{4\pi}{\text{ن}} + 1\right\}$$

$$\ldots\ldots\left\{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\pi + 1\right\}\ldots\ldots \quad (3)$$

اختصاراً اگر ن **جفت** ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا}^{۲} - ۱)\prod_{\text{ر}=۱}^{\frac{\text{ن}}{۲}-۱}\left(\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + ۱\right)$$

اور اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا} - ۱)\prod_{\text{ر}=۱}^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\left(\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + ۱\right)$$

یہ ضوابط دفعہ ۱۱۵ کے اساسی ضابطہ میں ن طہ کی بجائے ۲π لکھنے سے بھی بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۲۰۔ لاٰن + ۱ کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

پہلے ہمیں مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = ۰$ کو حل کرنا چاہیئے۔

$$\text{لا}^{\text{ن}} = -۱ = \text{جم}(۲\text{ر}\pi + \pi) \pm \text{خ}\,\text{جب}(۲\text{ر}\pi + \pi)$$

جہاں ر کوئی صحیح عدد ہے۔

$$\text{یعنی}\quad \text{لا} = \left\{\text{جم}(۲\text{ر}\pi + \pi) \pm \text{خ}\,\text{جب}(۲\text{ر}\pi + \pi)\right\}^{\frac{۱}{\text{ن}}}$$

$$= \text{جم}\frac{۲\text{ر}\pi + \pi}{\text{ن}} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{۲\text{ر}\pi + \pi}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

صورت اوّل ۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے

بموجب دفعہ ۲۴ جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی :—

$$\text{جم}\frac{\pi}{\text{ن}} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{ن}}\ ،\quad \text{جم}\frac{۳\pi}{\text{ن}} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{۳\pi}{\text{ن}}$$

$$\text{جم}\frac{۵\pi}{\text{ن}} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{۵\pi}{\text{ن}} \ldots\ldots \text{جم}\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

ان ازواج میں سے پہلے زوج کے متعلق اجزائے ضربی

$$\text{لا} - \text{جم}\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{خ}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{ن}}$$

اور $لا - جم \frac{\pi}{ن} + خ \; جب \frac{\pi}{ن}$

ہیں جو دونوں ملکر درجہ دوم کے ایک جزو ضربی

$$لا^۲ - ۲ \, لا \, جم \frac{\pi}{ن} + ۱$$ کے مساوی ہیں۔

اسی طرح دوسرے زوج کے متعلق درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

$$لا^۲ - ۲ \, لا \, جم \frac{۳\pi}{ن} + ۱$$

ہے علیٰ ہذا القیاس، لہذا حسب دفعہ ماقبل جب ن جفت ہو تو

$$لا^ن + ۱ = \left(لا^۲ - ۲ \, لا \, جم \frac{\pi}{ن} + ۱\right)\left(لا^۲ - ۲ \, لا \, جم \frac{۳\pi}{ن} + ۱\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots \left[لا^۲ - ۲ \, لا \, جم \frac{(ن-۱)\pi}{ن} + ۱\right]$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے۔

اس صورت میں جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی۔

$$جم \frac{\pi}{ن} \pm خ \; جب \frac{\pi}{ن} \;،\; جم \frac{۳\pi}{ن} \pm خ \; جب \frac{۳\pi}{ن} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots جم \frac{(ن-۲)\pi}{ن} \pm خ \; جب \frac{(ن-۲)\pi}{ن} \;،\; جم \frac{ن\pi}{ن} \pm خ \; جب \frac{ن\pi}{ن}$$

آخری زوج سے صرف ایک قیمت ۔ ۱ حاصل ہوتی ہے پس مطلوبہ اجزائے ضربی میں سے $لا + ۱$ ایک جزو ضربی ہے۔

دیگر مندرجہ بالا قیمتوں کے مسلسل ازواج کے متعلق درجہ دوم کے اجزائے ضربی حسب ذیل ہیں۔

$$\left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}} + 1\right),\quad \left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{3\pi}{\text{ن}} + 1\right)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(\text{ن}-2)\pi}{\text{ن}} + 1\right)$$

لہذا بالآخر جب ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}}+1 = (\text{لا}+1)\left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}} + 1\right)\left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{3\pi}{\text{ن}} + 1\right)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\left[\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}-2}{\text{ن}}\pi + 1\right]$$

اختصاراً اگر ن جفت ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}}+1 = \prod_{\text{ر}=0}^{\frac{\text{ن}-2}{2}} \left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}\pi + 1\right)$$

اور اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}}+1 = (\text{لا}+1)\prod_{\text{ر}=0}^{\frac{\text{ن}-3}{2}} \left(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}\pi + 1\right)$$

یہ ضوابط دفعہ ١١٥ کے اساسی ضابطہ میں ن طہ کی بجائے π لکھنے سے بھی آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

١٢١۔ مشق ا۔ مقادیر جم ن فہ - جم ن طہ اور جم ن فہ - جم ن طہ کو ن اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھو۔

دفعہ ١١٥ کی مساوات (٢) میں $\text{لا} = \text{و}^{\text{خ}\,\text{فہ}}$ رکھو

بس $\text{لا}^{-1} = \text{و}^{-\text{خ}\,\text{فہ}}$ اسلئے

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \text{و}^{\text{خ}\,\text{فہ}} + \text{و}^{-\text{خ}\,\text{فہ}} = 2\,\text{جم}\,\text{فہ}$$

اور $\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \text{و}^{\text{ن خ فہ}} + \text{و}^{-\text{ن خ فہ}} = ۲\,\text{جم ن فہ}$

تب $۲\,\text{جم ن فہ} - ۲\,\text{جم ن طہ} = (۲\,\text{جم فہ} - ۲\,\text{جم طہ})\left[۲\,\text{جم فہ} - ۲\,\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ط}}{\text{ن}}\right)\right]$

$\left[۲\,\text{جم فہ} - ۲\,\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۴\text{ط}}{\text{ن}}\right)\right] \ldots\ldots$ ن اجزائے ضربی تک

یعنی $\text{جم ن فہ} - \text{جم ن طہ} = ۲^{\text{ن}-۱}\left\{\text{جم فہ} - \text{جم طہ}\right\}\left\{\text{جم فہ} - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ط}}{\text{ن}}\right)\right\}$

$\ldots\ldots\ldots\left\{\text{جم فہ} - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ن}-۲}{\text{ن}}\,\text{ط}\right)\right\}$

$= ۲^{\text{ن}-۱}\prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱}\left\{\text{جم فہ} - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ر ط}}{\text{ن}}\right)\right\}$

اسی طرح سے $\text{لا} = \text{و}^{\text{فہ}}$ رکھنے سے

$\text{جمز ن فہ} - \text{جم ن طہ} = ۲^{\text{ن}-۱}\left[\text{جمز فہ} - \text{جم طہ}\right]\left[\text{جمز فہ} - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ط}}{\text{ن}}\right)\right]\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\left[\text{جمز فہ} - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ن}-۲}{\text{ن}}\,\text{ط}\right)\right]$

مشق ۲ — اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}\frac{۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۴\text{ط}}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۶\text{ط}}{۲\text{ن}}\ldots\ldots\text{جب}\frac{(\text{ن}-۲)\text{ط}}{۲\text{ن}} = \sqrt{\text{ن}}$$

دفعہ ۱۱۹ کی مساوات (۲) میں ن کو ایک کے برابر فرض کرو۔

اب چونکہ $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}-۱}{\text{لا}^{۲}-۱} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots \text{لا} + ۱}{\text{لا} + ۱}$

اس لیے اگر لا ایک کے مساوی ہو تو $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}-۱}{\text{لا}^{۲}-۱} = \frac{\text{ن}}{۲}$

لہذا $\frac{\text{ن}}{۲} = \left(۲ - ۲\,\text{جم}\frac{۲\text{ط}}{\text{ن}}\right)\left(۲ - ۲\,\text{جم}\frac{۴\text{ط}}{\text{ن}}\right)\left(۲ - ۲\,\text{جم}\frac{۶\text{ط}}{\text{ن}}\right)\ldots\ldots\left(۲ - ۲\,\text{جم}\frac{\text{ن}-۲}{\text{ن}}\,\text{ط}\right)$

یعنی ن = ۲ × ۴ جب$^{۲}\frac{\pi}{۲ن}$ × ۴ جب$^{۲}\frac{۲\pi}{۲ن}$ ...... ۴ جب$^{۲}\frac{ن-۲}{۲ن}\pi$ ۲

جہاں اجزائے ضربی کی تعداد $\frac{ن}{۲}$ − ۱ ہے۔

= ۲$^{ن-۱}$ × جب$^{۲}\frac{\pi}{۲ن}$ جب$^{۲}\frac{۲\pi}{۲ن}$ .... جب$^{۲}\frac{ن-۲}{۲ن}\pi$ ۲۔ اسلئے

± $\sqrt{ن}$ = ۲$^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جب $\frac{\pi}{۲ن}$ جب $\frac{۲\pi}{۲ن}$ .... جب $\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن}$ .... (۱)

اب زوایا $\frac{\pi}{۲ن}$ ، $\frac{۲\pi}{۲ن}$ ...... $\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن}$ ، میں سے ہرایک زاویہ قائمہ سے کم ہے

اس لئے مساوات (۱) کی بائیں جانب کی سب جیوب مثبت ہیں۔
بنابریں دائیں جانب کے رکن کی مشتبہ علامت کی بجائے مثبت کی علامت لکھنی چاہیئے جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ ۲۰

ذیل کی مقادیر کے اجزائے ضربی معلوم کرو۔

۱− لا^{۶} + ۲ لا^{۳} جم ۲۰° + ۱ ۲− لا^{۸} − ۲ لا^{۴} جم ۶۰° + ۱ ۳− لا^{۱۰} − ۲ لا^{۵} جم $\frac{\pi}{۳}$ + ۱

۴− لا^{۱۲} + لا^{۶} + ۱ ۵− لا^{۱۴} + لا^{۷} + ۱ ۶− لا^{۵} − ۱

۷− لا^{۶} + ۱ ۸− لا^{۷} − ۱ ۹− لا^{۹} + ۱

۱۰− لا^{۱۰} − ۱ ۱۱− لا^{۱۳} + ۱ ۱۲− لا^{۱۴} − ۱ ۱۳− لا^{۲۰} + ۱

۱۴− اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

۲$^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جب $\frac{\pi}{۲ن}$ جب $\frac{۳\pi}{۲ن}$ جب $\frac{۵\pi}{۲ن}$ ...... جب $\frac{ن-۱}{۲ن}\pi$ = ۱

= ۲$^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جم $\frac{\pi}{۲ن}$ جم $\frac{۳\pi}{۲ن}$ جم $\frac{۵\pi}{۲ن}$ .... جم $\frac{ن-۱}{۲ن}\pi$

۱۵- اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$۲^{\frac{ن-۱}{۲}}\ \text{جب}\,\frac{۲\pi}{۲ن}\ \text{جب}\,\frac{۴\pi}{۲ن}\ \text{جب}\,\frac{۶\pi}{۲ن}\ \cdots\cdots\ \text{جب}\,\frac{ن-۱}{۲ن}\pi$$

$$=\sqrt{ن}=۲^{\frac{ن-۱}{۲}}\ \text{جم}\,\frac{\pi}{۲ن}\ \text{جم}\,\frac{۳\pi}{۲ن}\ \cdots\cdots\cdots\ \text{جم}\,\frac{ن-۲}{۲ن}\pi$$

اور

$$۲^{\frac{ن-۱}{۲}}\ \text{جب}\,\frac{\pi}{۲ن}\ \text{جب}\,\frac{۳\pi}{۲ن}\ \cdots\cdots\ \text{جب}\,\frac{ن-۲}{۲ن}\pi$$

$$=۱=۲^{\frac{ن-۱}{۲}}\ \text{جم}\,\frac{۲\pi}{۲ن}\ \text{جم}\,\frac{۴\pi}{۲ن}\ \cdots\cdots\ \text{جم}\,\frac{ن-۱}{۲ن}\pi$$

۱۶- ثابت کرو کہ $\text{جب}\,\frac{\pi}{ن}\ \text{جب}\,\frac{۲\pi}{ن}\ \cdots\cdots\ \text{جب}\,\frac{ن-۱}{ن}\pi=\frac{ن}{۲^{ن-۱}}$

۱۷- اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\frac{\pi}{ن}\ \text{مس}\,\frac{۲\pi}{ن}\ \text{مس}\,\frac{۳\pi}{ن}\ \cdots\cdots\ \text{مس}\,\frac{\frac{۱}{۲}(ن-۱)\pi}{ن}=\sqrt{ن}$$

۱۸- ثابت کرو کہ $\text{جم}\,ن\,ط=۲^{ن-۱}\left(\text{جم}\,ط-\text{جم}\,\frac{\pi}{۲ن}\right)\left(\text{جم}\,ط-\text{جم}\,\frac{۳\pi}{۲ن}\right)\cdots\left(\text{جم}\,ط-\text{جم}\,\frac{۲ن-۱}{۲ن}\pi\right)$

ثابت کرو کہ

$$\text{جب}\,ن\,\text{فہ}=۲^{ن-۱}\ \text{جب}\,\text{فہ}\ \text{جب}\left(\text{فہ}+\frac{\pi}{ن}\right)\cdots\cdots\ \text{جب}\left(\text{فہ}+\frac{ن-۱}{ن}\pi\right)$$

$$=۲^{ن-۱}\prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱}\text{جب}\left(\text{فہ}+\frac{ر\pi}{ن}\right)$$

[دفعہ ۱۱۵ کی مساوات میں لا = ۱، اور ط = ۲ فہ رکھو]

۲۰- $\text{جم}\,ن\,\text{فہ}=۲^{ن-۱}\ \text{جب}\left(\text{فہ}+\frac{\pi}{۲ن}\right)\text{جب}\left(\text{فہ}+\frac{۳\pi}{۲ن}\right)\cdots\text{جب}\left(\text{فہ}+\frac{۲ن-۱}{۲ن}\pi\right)$

[مشق ماقبل کے ضابطہ میں فہ کو $\text{فہ}+\frac{\pi}{۲ن}$ میں بدل دو]

۲۱- $۲^{ن-۱}\ \text{جم}\,\text{فہ}\ \text{جم}\left(\text{فہ}+\frac{\pi}{ن}\right)\text{جم}\left(\text{فہ}+\frac{۲\pi}{ن}\right)\cdots\cdots\text{جم}\left(\text{فہ}+\frac{ن-۱}{ن}\pi\right)$

$= (-1)^{\frac{ن}{2}}$ جب ن فہ اگر ن جفت ہو

اور $= (-1)^{\frac{ن-1}{2}}$ جم ن فہ اگر ن طاق ہو

[مثق ۱۹ میں فہ کو فہ $+ \frac{\pi}{2}$ میں بدل دو]

۲۲ — $2^{ن-1}$ جم $\frac{\pi}{2ن}$ جم $\frac{3\pi}{2ن}$ جم $\frac{5\pi}{2ن}$ ..... جم $\frac{(2ن-1)\pi}{2ن}$ = جم $\frac{ن\pi}{2}$

۲۳ — $2^{ن-1}$ جب $\frac{\pi}{2ن}$ جب $\frac{3\pi}{2ن}$ جب $\frac{5\pi}{2ن}$ ..... جب $\frac{(2ن-1)\pi}{2ن}$ $= 1$

۲۴ — جم $\frac{\pi}{ن}$ جم $\frac{2\pi}{ن}$ .... جم $\frac{(2ن-1)\pi}{ن} = \frac{1-(-1)^{ن}}{2^{2ن-1}}$

۲۵ — ثابت کرو کہ

$$\frac{لا^{ن} - ا^{ن}\ \text{جم}\ ن\ طہ}{لا^{2ن} - 2ا^{ن} لا^{ن}\ \text{جم}\ ن\ طہ + ا^{2ن}} = \frac{1}{ن\ لا^{ن-1}} \sum_{ر=0}^{ر=ن-1} \frac{لا - ا\ \text{جم}\left(طہ + \frac{2ر\pi}{ن}\right)}{لا^{2} - 2ا\ لا\ \text{جم}\left(طہ + \frac{2ر\pi}{ن}\right) + ا^{2}}$$

[دفعہ ۱۱۱ کی مساوات (۳) میں لا کو لا + ہ میں بدل دو اور پھیلانے کے بعد ہ کے سروں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھو یا لوگارثم لیکر بلحاظ طہ کے تفرق کرو]

۲۶ — ایک دائرہ کا نصف قطر ر ہے دائرہ کے محیط کو نقاط $ق_1$ $ق_2$ $ق_3$ ... $ق_{2ن}$ پر ۲ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اگر $ق_1$ کو باقی سب نقاط $ق_2$ $ق_3$ ... $ق_{2ن}$ سے ملایا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ق_1ق_2 \times ق_1ق_3 \ldots\ldots\ ق_1ق_{2ن} = ر^{2ن-1}\ 2ن$$

نیز اگر وتر $ق_1ق_{2ن}$ کا نقطہ تنصیف و ہو تو ثابت کرو کہ

$$وق_1 \times وق_2 \ldots\ldots\ وق_{ن} = \sqrt{2}\ ر^{ن}$$

۲۷ — ایک دائرہ کا نصف قطر ر ہے اور اس کے اندر (۲ن + ۱) اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع $ا_1ا_2 \ldots\ldots ا_{2ن+1}$ بنایا گیا ہے اگر و $ا_{2ن+1}$ دائرہ کا

قطر ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{و}\,\text{ا}_1 \times \text{و}\,\text{ا}_2 \times \text{و}\,\text{ا}_3 \ldots\ldots\ldots\ \text{و}\,\text{ا}_{\text{ن}} = \text{ر}^{\text{ن}}$$

۲۸ — ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع $\text{ا}_1\,\text{ا}_2 \ldots\ \text{ا}_{\text{ن}}$ ہے۔ اس کے گرد ایک بیرونی دائرہ کھینچا گیا ہے جو اس کے سب راسوں میں سے گزرتا ہے۔ اور ایک اندرونی دائرہ کھینچا گیا ہے جو اندر کی طرف سے اس کے سب اضلاع کو مس کرتا ہے کثیر الاضلاع کے مرکز و میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو اندرونی دائرہ سے ق_1 پر اور بیرونی دائرہ سے ق_2 پر ملتا ہے۔ اگر ق_1 اور ق_2 دونوں میں سے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ق_1 میں سے گزرنے والے عمودوں کے حاصل ضرب کو ق_2 میں سے گزرنے والے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ نسبت

$$\text{جم}^{\text{ن}} \frac{\pi}{\text{ن}}\ \text{مم}^2 \frac{\text{ن}\,\text{ط}}{2} : 1$$

ہو گی جہاں ط وہ زاویہ ہے جو خطوط $\text{و}\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2$ اور $\text{و}\,\text{ا}_1$ کے درمیان بنتا ہے۔

۲۹ — ایک دائرہ کا نصف قطر ا_1 ہے اور مرکز و۔ دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ...... بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ق کوئی نقطہ ہو تو

$$\text{ق}\,\text{ا}^2 \times \text{ق}\,\text{ب}^2 \times \text{ق}\,\text{ج}^2 \ldots\ldots = \text{ر}_1^{2\text{ن}} - 2\,\text{ا}_1^{\text{ن}}\,\text{ر}_1^{\text{ن}}\ \text{جم}\ \text{ن}\,\text{ط} + \text{ا}_1^{2\text{ن}}$$

جہاں ر_1 سے مراد و ق کا طول ہے اور ط سے مراد زاویہ ق و ا ہے

نیز ثابت کرو کہ اُن زاویوں کا مجموعہ جو ا ق، ب ق، ج ق ......

بالترتیب و ا، و ب، و ج، ...... حدود کے ساتھ بناتے ہیں

$$\text{مس}^{-1} \frac{\text{ر}_1^{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ن}\,\text{ط}}{\text{ر}_1^{\text{ن}}\ \text{جم}\ \text{ن}\,\text{ط} - \text{ا}_1^{\text{ن}}}$$ ہے۔

جیب طہ اور جم طہ کی تحلیل اجزائے ضربی میں

۱۲۲ ـ جیب طہ کو اجزائے ضربی کے ایک لامتناہی سلسلہ کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرو

ہمیں معلوم ہے کہ جیب طہ = ۲ جیب $\frac{\text{طہ}}{۲}$ جم $\frac{\text{طہ}}{۲}$

= ۲ جیب $\frac{\text{طہ}}{۲}$ جیب $\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\text{طہ}}{۲}\right)$ .... (۱)

اسی طرح سے مساوات (۱) میں طہ کو بالترتیب $\frac{\text{طہ}}{۲}$ اور $\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\text{طہ}}{۲}\right)$ میں بدلنے سے

جیب $\frac{\text{طہ}}{۲}$ = ۲ جیب $\frac{\text{طہ}}{۲^۲}$ جیب $\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\text{طہ}}{۲^۲}\right)$ = ۲ جیب $\frac{\text{طہ}}{۲^۲}$ جیب $\left(\frac{۲\pi}{۲^۲}+\frac{\text{طہ}}{۲^۲}\right)$

اور جیب $\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\text{طہ}}{۲}\right)$ = ۲ جیب $\left(\frac{\pi}{۲^۲}+\frac{\text{طہ}}{۲^۲}\right)$ × جیب $\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲^۲}+\frac{\text{طہ}}{۲^۲}\right)$

= ۲ جیب $\left(\frac{\pi}{۲^۲}+\frac{\text{طہ}}{۲^۲}\right)$ جیب $\left(\frac{۳\pi}{۲^۲}+\frac{\text{طہ}}{۲^۲}\right)$

مساوات (۱) کی بائیں جانب یہ قیمتیں مندرج کرکے رقوم کو ترتیب وار لکھنے سے

جیب طہ = $۲^۳$ جیب $\frac{\text{طہ}}{۲^۲}$ جیب $\frac{\pi+\text{طہ}}{۲^۲}$ جیب $\frac{۲\pi+\text{طہ}}{۲^۲}$ جیب $\frac{۳\pi+\text{طہ}}{۲^۲}$ ... (۲)

ایک مرتبہ اور مساوات (۲) کے بائیں جانب یہی عمل کرنے اور رقوم محصلہ کو ترتیب وار لکھنے سے

جیب طہ = $۲^۷$ جیب $\frac{\text{طہ}}{۲^۳}$ جیب $\frac{\pi+\text{طہ}}{۲^۳}$ جیب $\frac{۲\pi+\text{طہ}}{۲^۳}$ جیب $\frac{۳\pi+\text{طہ}}{۲^۳}$

× جیب $\frac{۴\pi+\text{طہ}}{۲^۳}$ جیب $\frac{۵\pi+\text{طہ}}{۲^۳}$ جیب $\frac{۶\pi+\text{طہ}}{۲^۳}$ جیب $\frac{۷\pi+\text{طہ}}{۲^۳}$ ... (۳)

کئی بار مسلسل یہی عمل کرنے سے بالآخر

$$\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{\pi+\text{ط}}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۲\pi+\text{ط}}{\text{ن}}\,\ldots\ldots\,\text{جب}\,\frac{(\text{ن}-۱)\pi+\text{ط}}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

جہاں ن، ۲ کی قوت کو تعبیر کرتا ہے۔

مساوات (۴) میں آخری جزو ضربی

$$\text{جب}\,\frac{(\text{ن}-۱)\pi+\text{ط}}{\text{ن}} = \text{جب}\left[\pi - \frac{\pi-\text{ط}}{\text{ن}}\right] = \text{جب}\,\frac{\pi-\text{ط}}{\text{ن}}$$

ہے، آخر کی طرف سے دوسرا جزو ضربی

$$\text{جب}\,\frac{(\text{ن}-۲)\pi+\text{ط}}{\text{ن}} = \text{جب}\left[\pi - \frac{۲\pi-\text{ط}}{\text{ن}}\right] = \text{جب}\,\frac{۲\pi-\text{ط}}{\text{ن}}$$

ہے اور علیٰ ہذا القیاس

اسلئے دوسرے جزو ضربی اور آخری جزو ضربی کو اکٹھا لیتے ہے، اور تیسرے جزو ضربی اور آخر کی طرف سے دوسرے جزو ضربی کو اکٹھا لیتے ہے..... علیٰ ہذا القیاس، مساوات (۴) ذیل کی شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

$$\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\left[\text{جب}\,\frac{\pi+\text{ط}}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{\pi-\text{ط}}{\text{ن}}\right]\left[\text{جب}\,\frac{۲\pi+\text{ط}}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۲\pi-\text{ط}}{\text{ن}}\right]\ldots \quad \ldots (۵)$$

اس میں آخری جزو ضربی

$$\text{جب}\,\frac{\frac{\text{ن}}{۲}\pi+\text{ط}}{\text{ن}} = \text{جب}\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right) = \text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$$ ہے

اسلئے مساوات (۵) ہوجاتی ہے

$$\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\left[\text{جب}^۲\frac{\text{ٹ}}{\text{ن}}-\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right]\left[\text{جب}^۲\frac{۲\text{ٹ}}{\text{ن}}-\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right]\cdots$$

$$\cdots\left[\text{جب}^۲\frac{\left(\frac{\text{ن}}{۲}-۱\right)\text{ٹ}}{\text{ن}}-\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right]\times\text{جم}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\cdots\cdots(۶)$$

مساوات (۶) کی دونوں جانبوں کو جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ پر تقسیم کرو اور ط کو صفر بناؤ

چونکہ $\left[\dfrac{\text{جب ط}}{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right]_{\text{ط}\to۰} = \left[\text{ن}\,\dfrac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\times\dfrac{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right]_{\text{ط}\to۰} = \text{ن}$

اسلئے مساوات (۶) ہوجاتی ہے

$$\text{ن} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^۲\frac{\text{ٹ}}{\text{ن}}\,\text{جب}^۲\frac{۲\text{ٹ}}{\text{ن}}\,\text{جب}^۲\frac{۳\text{ٹ}}{\text{ن}}\cdots\cdots\text{جب}^۲\frac{\left(\frac{\text{ن}}{۲}-۱\right)\text{ٹ}}{\text{ن}}\cdots\cdots(۷)$$

مساوات (۶) کو مساوات (۷) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{جب ط} = \text{ن جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\left[۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\text{ٹ}}{\text{ن}}}\right]\left[۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۲\text{ٹ}}{\text{ن}}}\right]\left[۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۳\text{ٹ}}{\text{ن}}}\right]\cdots$$

$$\cdots\left[۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\left(\frac{\text{ن}}{۲}-۱\right)\text{ٹ}}{\text{ن}}}\right]\text{جم}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\cdots\cdots(۸)$$

اب ن کو لاانتہا بڑھا دو تب

چونکہ $\left[\text{ن جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right]_{\text{ن}\to\infty} = \left[\dfrac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\times\text{ط}\right]_{\text{ن}\to\infty} = \text{ط}$ ...(دفعہ ۲۴۳ حصہ اول)

$$\left[\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\text{ٹ}}{\text{ن}}}\right]_{\text{ن}\to\infty} = \left[\frac{\text{ط}^۲}{\text{ٹ}^۲}\times\frac{\frac{\text{ٹ}^۲}{\text{ن}^۲}}{\text{جب}^۲\frac{\text{ٹ}}{\text{ن}}}\times\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}^۲}{\text{ن}^۲}}\right] = \frac{\text{ط}^۲}{\text{ٹ}^۲}\ \ldots\text{دفعہ ۲۴۳ حصہ اول}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، اسلئے

$$\text{جب طہ} = \text{طہ}\left(۱-\frac{\text{طہ}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{\text{طہ}^۲}{۲^۲\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{\text{طہ}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\text{...... تالامتناہی}$$

یہ مسئلہ ذیل کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\text{جب طہ} = \text{طہ}\prod_{\text{ر}\to ۱}^{\text{ر}\to\infty}\left(۱-\frac{\text{طہ}^۲}{\text{ر}^۲\pi^۲}\right)$$

۱۲۳۔ جم طہ کو اجزائے ضربی کے ایک لامتناہی سلسلہ کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرو۔

دفعہ ۱۲۲ کی مساوات (۴) میں طہ کی بجائے مقدار طہ + $\frac{\pi}{۲}$ لکھو

تب یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{جم طہ} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\frac{\pi+۲\text{طہ}}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۳\pi+۲\text{طہ}}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۵\pi+۲\text{طہ}}{۲\text{ن}}\cdots$$

$$\cdots\,\text{جب}\frac{(۲\text{ن}-۱)\pi+۲\text{طہ}}{۲\text{ن}}\,\cdots\cdots\ (۱)$$

آخری جزو ضربی

$$= \text{جب}\left[\pi-\frac{\pi-۲\text{طہ}}{۲\text{ن}}\right] = \text{جب}\frac{\pi-۲\text{طہ}}{۲\text{ن}}$$

آخر کی طرف سے دوسرا جزو ضربی

$$= \text{جب}\left[\frac{(۲\text{ن}-۳)\pi+۲\text{طہ}}{۲\text{ن}}\right] = \text{جب}\frac{۳\pi-۲\text{طہ}}{۲\text{ن}}$$

اور علیٰ ہذا القیاس

لہٰذا حسب سابق دو دو اجزائے ضربی کو اکٹھا لینے سے

$$\text{جم ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left[\text{جب}\,\frac{\pi+۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\ \text{جب}\,\frac{\pi-۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\right]\left[\text{جب}\,\frac{۳\pi+۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\ \text{جب}\,\frac{۳\pi-۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\right]\cdots\cdots$$

$$= ۲^{\text{ن}-۱}\left[\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\frac{۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\right]\left[\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\frac{۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\right]\cdots\cdots\ (۲)$$

مساوات (۲) میں ط کو صفر بنانے سے

$$۱ = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}}\ \text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\ \text{جب}^۲\frac{۵\pi}{۲\text{ن}}\cdots\cdots\cdots\ (۳)$$

مساوات (۲) کو (۳) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{جم ط} = \left[۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{۲\text{ط}}{۲\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}}}\right]\left[۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{۲\text{ط}}{۲\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}}\right]\left[۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{۲\text{ط}}{۲\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۵\pi}{۲\text{ن}}}\right]\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\left[۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{۲\text{ط}}{۲\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}}\right]\cdots\cdots\cdots\ (۴)$$

اب مساوات (۴) میں ن کو لا انتہا بڑھا دو، تب حسب دفعہ ماقبل

$$\text{جم ط} = \left[۱ - \frac{۴\text{ط}^۲}{\pi^۲}\right]\left[۱ - \frac{۴\text{ط}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right]\left[۱ - \frac{۴\text{ط}^۲}{۵^۲\pi^۲}\right]\cdots\cdots \text{نالامتناہی}$$

اختصار کی خاطر اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{جم ط} = \prod_{\text{ر}\to ۱}^{\text{ر}\to\infty}\left\{۱ - \frac{۴\text{ط}^۲}{(۲\text{ر}-۱)^۲\pi^۲}\right\}$$

چونکہ $\text{جم ط} = \dfrac{\text{جب ۲ط}}{\text{۲ جب ط}}$

اس لئے جم ط کا حاصل ضرب، جب ۲ط اور جب ط کے حاصل ضربوں

سے بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

۱۲۴ — دفعہ ۱۱۵ کی مدد سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دفعہ ۱۲۲ کی مساوات (۴) ن کی تمام صحیح قیمتوں کے لئے درست رہتی ہے۔ کیونکہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{لا}^{\text{۲ن}} - \text{۲ لا}^{\text{ن}}\ \text{جم ن فہ} + ۱ = \{\text{لا}^۲ - \text{۲ لا جم فہ} + ۱\}\{\text{لا}^۲ - \text{۲ لا جم}(\text{فہ} + \tfrac{۲\pi}{\text{ن}}) + ۱\}$$

$$\{\text{لا}^۲ - \text{۲ لا جم}(\text{فہ} + \tfrac{۴\pi}{\text{ن}}) + ۱\} \ldots\ldots \text{ ن اجزائے ضربی تک}$$

اس میں لا = ۱ رکھنے سے

$$۲(۱ - \text{جم ن فہ}) = \{۲ - \text{۲ جم فہ}\}\{۲ - \text{۲ جم}(\text{فہ} + \tfrac{۲\pi}{\text{ن}})\}\ldots \text{ن اجزائے ضربی تک}$$

یعنی $\text{۴ جب}^۲ \tfrac{\text{ن فہ}}{۲} = \text{۴ جب}^۲ \tfrac{\text{فہ}}{۲} \times \text{۴ جب}^۲ (\tfrac{\text{فہ}}{۲} + \tfrac{\pi}{\text{ن}}) \times \text{۴ جب}^۲ (\tfrac{\text{فہ}}{۲} + \tfrac{۲\pi}{\text{ن}}) \ldots$

$\ldots\ldots\ldots$ ن اجزائے ضربی تک

$\tfrac{\text{ن فہ}}{۲} = \text{طہ}$ رکھنے سے اور دونوں طرفوں کے جذر لینے سے

$$\pm\ \text{جب طہ} = ۲^{\text{ن}-۱}\ \text{جب}\tfrac{\text{طہ}}{\text{ن}}\ \text{جب}\tfrac{\pi + \text{طہ}}{\text{ن}}\ \text{جب}\tfrac{۲\pi + \text{طہ}}{\text{ن}} \ldots \text{جب}\tfrac{(\text{ن}-۱)\pi + \text{طہ}}{\text{ن}} \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اگر طہ، صفر اور π کے درمیان واقع ہو تو بائیں جانب کے رکن کے سب اجزائے ضربی مثبت ہوتے ہیں اس لئے جب طہ بھی صریحاً مثبت ہوگا۔ لہذا مشتبہ علامت کی بجائے علامت مثبت ثبت کرنی چاہیئے۔

اگر طہ، π اور ۲π کے درمیان واقع ہو تو بائیں جانب کے رکن کے سب اجزائے ضربی مثبت ہوتے ہیں سوائے آخر جزو ضربی کے، جو منفی ہے۔ اس لئے حاصل ضرب منفی ہوگا اور نیز جب طہ منفی ہوگا۔ پس اس صورت میں بھی علامت ہمیشہ مثبت رکھی جائے گی۔

اسی طرح سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ہر صورت میں مثبت علامت لینی چاہیئے،

لہٰذا ن کی تمام صحیح قیمتوں کے لئے

$$\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\ \text{جب}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\ \text{جب}\ \frac{\pi+\text{ط}}{\text{ن}}\ \text{جب}\ \frac{۲\pi+\text{ط}}{\text{ن}} \ldots\ \text{جب}\ \frac{(\text{ن}-۱)\pi+\text{ط}}{\text{ن}}$$

۱۲۵ - جبز ط اور جمز ط کے اجزائے ضربی لاتناہی سلسلہ میں

دفعہ ۶۸ کی رو سے

$$\text{جبز ط} = -\text{خ جب (خ ط)}\quad \text{اور}\quad \text{جمز ط} = \text{جم (خ ط)}$$

نیز چونکہ دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ کے سلسلے مسئلہ جمع پر مبنی ہیں اس لئے یہ اُس صورت میں بھی درست ہونگے جب ط کو خ ط میں بدل دیا جائے۔

$$\therefore\ \text{جبز ط} = -\text{خ} \times \text{خ ط}\left(۱-\frac{\text{خ}^۲\text{ط}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{\text{خ}^۲\text{ط}^۲}{۲^۲\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{\text{خ}^۲\text{ط}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right) \ldots (۱)$$

$$= \text{ط}\left(۱+\frac{\text{ط}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱+\frac{\text{ط}^۲}{۲^۲\pi^۲}\right)\left(۱+\frac{\text{ط}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right) \ldots\ \text{تالاتناہی}$$

$$\text{اور جمز ط} = \left(۱-\frac{۴\text{خ}^۲\text{ط}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{۴\text{خ}^۲\text{ط}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{۴\text{خ}^۲\text{ط}^۲}{۵^۲\pi^۲}\right) \ldots\ \text{تالاتناہی}$$

$$= \left(۱+\frac{۴\text{ط}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱+\frac{۴\text{ط}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\left(۱+\frac{۴\text{ط}^۲}{۵^۲\pi^۲}\right) \ldots\ \text{تالاتناہی} \ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) دونوں مستدق سلسلے ہیں۔ کیونکہ ہمیں معلوم ہے (دیکھو سی سمتھ کا الجبرا دفعہ ۲۴۳) کہ سلسلہ لاتناہی Π (۱ + ی ن) مستدق ہوگا اگر Σ ی ن مستدق ہو۔

مساوات (۱) میں Σ ی ن

$$= \frac{\text{ط}^۲}{\pi^۲}\left(۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\ldots\right)$$

اور ہمیں معلوم ہے کہ یہ سلسلہ مستدق ہے۔

۱۲۶ - طبعی اعداد کے متکافیوں کی قوتوں کے مجموعے

دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ کی رو سے ہم چند دلچسپ سلسلوں کے حاصل

جمع معلوم کر سکتے ہیں

دفعات ۲۳ اور ۱۲۲ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\left(1-\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)\ \ldots\ldots \text{تا لاتناہی}$$

$$=\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}=1-\frac{\text{ط}^2}{\underline{|3}}+\frac{\text{ط}^4}{\underline{|5}}+\ \ldots\ldots \text{تا لاتناہی}$$

طرفین کے لوکارثم لینے سے

$$\text{لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\right)+\text{لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}\right)+\text{لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)+\ldots\ldots$$

$$=\text{لوک}\left[1-\frac{\text{ط}^2}{6}+\frac{\text{ط}^4}{120}-\ldots\right]\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

اب دفعہ ۸ کی مدد سے

$$\text{لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\right)=-\left[\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{\text{ط}^4}{\pi^4}+\frac{1}{3}\frac{\text{ط}^6}{\pi^6}+\ldots\ldots\right]$$

$$\text{اور لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}\right)=-\left[\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{\text{ط}^4}{2^4\pi^4}+\frac{1}{3}\frac{\text{ط}^6}{2^6\pi^6}+\ldots\ldots\right]$$

....

لہذا مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$-\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right]-\frac{1}{2}\frac{\text{ط}^4}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\ldots\right]$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\text{ط}^6}{\pi^6}\left[\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots\ldots\right]\ldots\ldots$$

$$=\text{لوک}\left[1-\left(\frac{\text{ط}^2}{6}-\frac{\text{ط}^4}{120}+\ldots\ldots\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{ط^۲}{۶} - \frac{ط^۴}{۱۲۰} + \cdots\right) - \frac{۱}{۲}\left(\frac{ط^۲}{۶} - \frac{ط^۴}{۱۲۰} + \cdots\right)^۲ - \cdots$$

$$= -\frac{ط^۲}{۶} + ط^۴\left(\frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳۶}\right) - \cdots$$

$$= -\frac{ط^۲}{۶} - \frac{ط^۴}{۱۸۰} \cdots\cdots \quad (۲)$$

چونکہ مساوات (۲)، ط کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اسلئے ط۲ کے سر مساوات کے دونوں جانب برابر ہونے چاہئیں نیز ط۴ کے سر برابر ہونے چاہئیں، وغیرہ وغیرہ

پس $-\frac{۱}{\pi^۲}\left(\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots \text{تا لاتناہی}\right) = -\frac{۱}{۶}$

$-\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\pi^۴}\left(\frac{۱}{۱^۴} + \frac{۱}{۲^۴} + \frac{۱}{۳^۴} + \frac{۱}{۴^۴} + \cdots \text{تا لاتناہی}\right) = -\frac{۱}{۱۸۰}$

. . . .

لہٰذا $\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots$ تا لاتناہی $= \frac{\pi^۲}{۶}$ .... (۳)

اور $\frac{۱}{۱^۴} + \frac{۱}{۲^۴} + \frac{۱}{۳^۴} + \cdots$ تا لاتناہی $= \frac{\pi^۴}{۹۰}$ .... (۴)

۱۲۷ — یہی عمل دفعہ ۱۲۳ کے سلسلہ پر کرنے سے

$$\left(۱ - \frac{۴ط^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{۴ط^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{۴ط^۲}{۵^۲\pi^۲}\right)\cdots$$

$$= \text{جم}\,ط = ۱ - \frac{ط^۲}{\underline{|۲}} + \frac{ط^۴}{\underline{|۴}} \cdots$$

جس سے لوک $\left(۱ - \frac{۴ط^۲}{\pi^۲}\right)$ + لوک $\left(۱ - \frac{۴ط^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)$ + لوک $\left(۱ - \frac{۴ط^۲}{۵^۲\pi^۲}\right) + \cdots$

$=$ لوک $\left(۱ - \frac{ط^۲}{۲} + \frac{ط^۴}{۲۴} - \cdots\right)$

لہٰذا حسب سابق

$$-\frac{4\,\text{ط}^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{16\,\text{ط}^4}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots$$

$$=\text{لوک}\left[1-\left(\frac{\text{ط}^2}{2}-\frac{\text{ط}^4}{|4}+\cdots\cdots\right)\right]$$

$$=-\left(\frac{\text{ط}^2}{2}-\frac{\text{ط}^4}{24}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ط}^2}{2}-\frac{\text{ط}^4}{24}+\cdots\right)^2+\cdots\cdots$$

$$=-\frac{\text{ط}^2}{2}+\frac{\text{ط}^4}{24}+\cdots-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ط}^4}{4}-\cdots\right)-\cdots\cdots$$

$$=-\frac{\text{ط}^2}{2}-\frac{\text{ط}^4}{12}-\cdots\cdots$$

ط² کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$-\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots\right)=-\frac{1}{2}$$

اور ط⁴ کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$-\frac{8}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots\right)=-\frac{1}{12}$$

علیٰ ہذا القیاس ....

یعنی $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{8}\cdots\cdots\cdots(1)$

اور $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots=\frac{\pi^4}{96}\cdots\cdots\cdots(2)$

....

۱۲۸ - والس کا ضابطہ.... دفعہ ۱۲۲ کے جملہ میں طہ کو $\frac{\pi}{2}$ کے مساوی رکھنے سے

$$1 = \frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2^2}\right]\left[1-\frac{1}{4^2}\right]\left[1-\frac{1}{6^2}\right]\cdots\cdots \text{تالانتناہی}$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\frac{5\times7}{6^2}\cdots\cdots\frac{(2\text{ن}-3)(2\text{ن}-1)}{(2\text{ن}-2)^2}\times\frac{(2\text{ن}-1)(2\text{ن}+1)}{(2\text{ن})^2}$$

جہاں ن لاانتہا بڑا ہے

یعنی $$\frac{2}{\pi} = \frac{1^2\times3^2\times5^2\times7^2\cdots\cdots(2\text{ن}-1)^2\times(2\text{ن}+1)^2}{2^2\times4^2\times6^2\cdots\cdots(2\text{ن})^2}$$

یعنی $\frac{2\times4\times6\cdots\cdots2\text{ن}}{1\times3\times5\times\cdots\cdots(2\text{ن}-1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(2\text{ن}+1)}$ جہاں ن لاانتہا بڑا ہے

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ن بہت بڑا ہو (لیکن ضروری نہیں کہ لا متناہی ہو) تو

$$\frac{2\times4\times6\times\cdots\cdots\times2\text{ن}}{1\times3\times5\times\cdots\cdots(2\text{ن}-1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(2\text{ن}+1)} \quad \text{تقریباً}$$

جو بالآخر $= \sqrt{\text{ن}\pi}$

اس ضابطہ کو والس کا ضابطہ کہتے ہیں - اور اس سے اُس نسبت کی تقریبی قیمت نہایت آسان اور سادہ شکل میں ظاہر ہوتی ہے جو پہلے ن جفت اعداد کے حاصل ضرب کو پہلے ن طاق اعداد کے حاصل ضرب کے ساتھ ہے جبکہ ن بہت بڑا ہو

۱۲۹ - مشق - ثابت کرو کہ

$$\text{مس طہ} = 8\,\text{طہ}\left\{\frac{1}{\pi^2-4\text{طہ}^2}+\frac{1}{3^2\pi^2-4\text{طہ}^2}+\frac{1}{5^2\pi^2-4\text{طہ}^2}+\cdots\cdots\right\}$$

دفعہ ۱۲۳ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{لوک جم طہ} = \text{لوک}\left(1-\frac{4\text{طہ}^2}{\pi^2}\right)+\text{لوک}\left(1-\frac{4\text{طہ}^2}{3^2\pi^2}\right)+\text{لوک}\left(1-\frac{4\text{طہ}^2}{5^2\pi^2}\right)+\cdots\quad(1)$$

اس مساوات میں ط کی بجائے (ط + ھ) لکھنے سے

$$\text{لوک جم}(\text{ط}+\text{ھ}) = \text{لوک}\left[1-\frac{4}{\pi^2}(\text{ط}+\text{ھ})^2\right]+\text{لوک}\left[1-\frac{4}{3^2\pi^2}(\text{ط}+\text{ھ})^2\right]+\cdots \quad (2)$$

$$\text{اب لوک جم}(\text{ط}+\text{ھ}) = \text{لوک}\left[\text{جم ط}(\text{جم ھ} - \text{مس ط جب ھ})\right]$$

$$= \text{لوک جم ط} + \text{لوک}\left[1-\frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 2}+\cdots - \text{مس ط}\left(\text{ھ}-\frac{\text{ھ}^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)\right] \quad \text{دفعہ ۴۳}$$

$$= \text{لوک جم ط} + \text{لوک}\left[1-\text{ھ مس ط} + \text{ھ کی بڑی قوتیں}\right]$$

$$= \text{لوک جم ط} - \text{ھ مس ط} + \text{ھ کی بڑی قوتیں} \cdots\cdots \quad (\text{دفعہ ۸})$$

$$\text{نیز لوک}\left[1-\frac{4}{\pi^2}(\text{ط}+\text{ھ})^2\right] = \text{لوک}\frac{\pi^2-4\text{ط}^2}{\pi^2}+\text{لوک}\left[1-\frac{8\,\text{ط ھ}}{\pi^2-4\text{ط}^2}+\cdots\right]$$

$$= \text{لوک}\left[1-\frac{4\text{ط}^2}{\pi^2}\right]-\frac{8\,\text{ط ھ}}{\pi^2-4\text{ط}^2}+\text{ھ کی بڑی قوتیں}$$

$$\text{اور لوک}\left[1-\frac{4}{3^2\pi^2}(\text{ط}+\text{ھ})^2\right]$$

$$= \text{لوک}\left[1-\frac{4\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right]-\frac{8\,\text{ط ھ}}{3^2\pi^2-4\text{ط}^2}+\text{ھ کی قوتیں۔}$$

....

مساوات (۲) میں یہ قیمتیں درج کرنے اور مساوات کے دونوں طرف (−ھ) کے سروں کو برابر کرنے سے

$$\text{مس ط} = \frac{8\text{ط}}{\pi^2-4\text{ط}^2}+\frac{8\text{ط}}{3^2\pi^2-4\text{ط}^2}+\frac{8\text{ط}}{5^2\pi^2-4\text{ط}^2}+\cdots\cdots \quad (3)$$

$$= \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\infty}\frac{8\text{ط}}{(2\text{ر}+1)^2\pi^2-4\text{ط}^2}$$

سلسلہ (۳) کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس ط} = \frac{2}{\pi - 2\text{ط}} - \frac{2}{\pi + 2\text{ط}} + \frac{2}{3\pi - 2\text{ط}} - \frac{2}{3\pi + 2\text{ط}} + \cdots\cdots$$

جو طالب علم احصار تفرقات سے واقف ہے۔ اس سے مخفی نہیں کہ مساوات (۳) مساوات (۱) کو بلحاظ ط کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۳۰ - مشق - ثابت کرو کہ جمز ۲ ع − جم ۲ ط

$$= 2\,\text{جب}^2\text{ط}\left[1 + \frac{\text{ع}^2}{\text{ط}^2}\right]\left[1 + \left(\frac{\text{ع}}{\pi + \text{ط}}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\text{ع}}{\pi - \text{ط}}\right)^2\right]$$

$$\left[1 + \left(\frac{\text{ع}}{2\pi + \text{ط}}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\text{ع}}{2\pi - \text{ط}}\right)^2\right]\cdots\cdots \text{تالا متناہی}$$

$$= 2\,\text{جب}^2\text{ط}\,\Pi\left[1 + \left(\frac{\text{ع}}{\text{ر}\pi + \text{ط}}\right)^2\right]$$

جہاں ر صفر ہے یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

$$\text{جمز}\,2\,\text{ع} - \text{جم}\,2\,\text{ط} = \text{جم}\,2\,\text{خ ع} - \text{جم}\,2\,\text{ط} = 2\,\text{جب}(\text{ط} + \text{خ ع})\,\text{جب}(\text{ط} - \text{خ ع})$$

$$= 2(\text{ط} + \text{خ ع})\left[1 - \frac{(\text{ط} + \text{خ ع})^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{(\text{ط} + \text{خ ع})^2}{2^2\pi^2}\right]\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \times (\text{ط} - \text{خ ع})\left[1 - \frac{(\text{ط} - \text{خ ع})^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{(\text{ط} - \text{خ ع})^2}{2^2\pi^2}\right]\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\text{اب}\quad\left[1 - \frac{(\text{ط} + \text{خ ع})^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{(\text{ط} - \text{خ ع})^2}{\pi^2}\right]$$

$$= \left[\frac{(\pi + \text{ط} + \text{خ ع})(\pi - \text{ط} - \text{خ ع})}{\pi^2}\right]\left[\frac{(\pi + \text{ط} - \text{خ ع})(\pi - \text{ط} + \text{خ ع})}{\pi^2}\right]$$

$$= \frac{(\pi + \text{ط})^2 + \text{ع}^2}{\pi^2} \times \frac{(\pi - \text{ط})^2 + \text{ع}^2}{\pi^2}$$

پس مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$\text{جمز}\,۲\,\text{عہ} - \text{جم}\,۲\,\text{طہ} = ۲(\text{طہ}^2 + \text{عہ}^2)\left[\frac{(\pi + \text{طہ})^2 + \text{عہ}^2}{\pi^2}\right]\left[\frac{(\pi - \text{طہ})^2 + \text{عہ}^2}{\pi^2}\right]$$

$$\left[\frac{(۲\pi - \text{طہ})^2 + \text{عہ}^2}{۴\pi^2}\right]\left[\frac{(۲\pi + \text{طہ})^2 + \text{عہ}^2}{۴\pi^2}\right] \dots \text{تالامتناہی} \dots (۲)$$

مساوات (۲) میں عہ = صفر، رکھنے سے

$$۲\,\text{جب}^2\,\text{طہ} = ۲\,\text{طہ}^2 \times \frac{(\pi + \text{طہ})^2}{\pi^2} \times \frac{(\pi - \text{طہ})^2}{\pi^2} \times \frac{(۲\pi + \text{طہ})^2}{۴\pi^2} \times \frac{(۲\pi - \text{طہ})^2}{۴\pi^2} \dots$$

$$\dots \text{تالامتناہی} \dots (۳)$$

مساوات (۲) کو مساوات (۳) پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{جمز}\,۲\,\text{عہ} - \text{جم}\,۲\,\text{طہ}}{۲\,\text{جب}^2\,\text{طہ}} = \left[۱ + \frac{\text{عہ}^2}{\text{طہ}^2}\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\pi - \text{طہ}}\right)^2\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\pi + \text{طہ}}\right)^2\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{۲\pi - \text{طہ}}\right)^2\right]$$

$$\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{۲\pi + \text{طہ}}\right)^2\right] \dots \text{تالامتناہی}$$

اب جمز ۲ عہ + جم ۲ طہ کے اجزائے ضربی طہ کو $\text{طہ} + \frac{\pi}{۲}$ میں بدل دینے سے معلوم ہو سکتے ہیں اور یہ اجزائے ضربی

$$۲\,\text{جم}^2\,\text{طہ}\ \Pi\left\{۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ} + \text{ر}\pi}\right)^2\right\}$$

ہیں جہاں ر سے کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد مراد ہے

مسئلہ ۲۱

ثابت کرو کہ

۱ — $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\dots$ تالامتناہی $= \frac{\pi^2}{12}$

۲ — $\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\dots\dots$ تا لاتناہی $=\frac{\pi^6}{945}$

۳ — $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times6}+\frac{1}{4\times8}+\dots$ تا لاتناہی $=\frac{\pi^2}{12}$

۴ — $\frac{1}{3^4}+\frac{3}{5^4}+\frac{6}{7^4}+\frac{10}{9^4}+\dots\dots$ تا لاتناہی $=\frac{\pi^2}{64}\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)$

۵ — ثابت کرو کہ اگر تمام طاق اعداد کے مربعوں کے متکافیوں میں سے دو دو کو باہم ضرب دیا جائے تو ان حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{\pi^4}{384}$ ہوتا ہے۔

۶ — ثابت کرو کہ اگر تمام طبعی اعداد کے مربعوں کے متکافیوں میں سے دو دو کو باہم ضرب دیا جائے تو ان حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{\pi^4}{120}$ ہوگا۔

ثابت کرو کہ

۷ — $\text{مم}\,\theta=\frac{1}{\theta}-\frac{2\theta}{\pi^2-\theta^2}-\frac{2\theta}{2^2\pi^2-\theta^2}-\dots\dots$

$=\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta-\pi}+\frac{1}{\theta+\pi}+\frac{1}{\theta-2\pi}+\frac{1}{\theta+2\pi}+\dots\dots$ تا لاتناہی

۸ — $\text{قم}\,\theta=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta-\pi}-\frac{1}{\theta+\pi}+\frac{1}{\theta-2\pi}+\frac{1}{\theta+2\pi}-\frac{1}{\theta-3\pi}-\frac{1}{\theta+3\pi}+\dots$

$=\frac{1}{\theta}+2\theta\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{\theta^2-n^2\pi^2}$

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$\frac{1+\theta\,\text{قم}\,\theta}{2\theta^2}=\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{\theta^2-\pi^2}+\frac{1}{\theta^2-2^2\pi^2}-\dots\dots$ تا لاتناہی

[ربط $\text{قم}\,\theta=\frac{1}{2}\left(\text{مس}\,\frac{\theta}{2}+\text{مم}\,\frac{\theta}{2}\right)$ کو استعمال کرو]

۹ — $\frac{1}{4\pi}\,\text{قط}\,\theta=\frac{1}{\pi^2-4\theta^2}-\frac{3}{3^2\pi^2-4\theta^2}+\frac{5}{5^2\pi^2-4\theta^2}-\dots\dots$ تا لاتناہی

[ربط $۲\,\text{قط}\,\text{طہ} = \text{سس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{طہ}}{۲}\right) + \text{مم}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{طہ}}{۲}\right)$ کو استعمال کرو]

۱۰۔ $\frac{۱}{۴}\,\text{قط}^۲\,\text{طہ} = \frac{۱}{(\pi - ۲\,\text{طہ})^۲} + \frac{۱}{(\pi + ۲\,\text{طہ})^۲} + \frac{۱}{(۳\pi - ۲\,\text{طہ})^۲} + \frac{۱}{(۳\pi + ۲\,\text{طہ})^۲} + \cdots\cdots$ تالاتناہی

[دفعہ ۱۲۹ کا عمل اُسی دفعہ کے جواب پر دوبارہ کرو]

۱۱۔ $\text{قم}^۲\,\text{طہ} = \frac{۱}{\text{طہ}^۲} + \frac{۱}{(\text{طہ} - \pi)^۲} + \frac{۱}{(\text{طہ} + \pi)^۲} + \frac{۱}{(\text{طہ} - ۲\pi)^۲} + \frac{۱}{(\text{طہ} + ۲\pi)^۲} + \cdots\cdots$ تالاتناہی

ثابت کرو کہ

۱۲۔ $\frac{\text{جب}\,(\text{عہ} - \text{طہ})}{\text{جب}\,\text{عہ}} = \left(۱ - \frac{\text{طہ}}{\text{عہ}}\right)\left(۱ + \frac{\text{طہ}}{\pi - \text{عہ}}\right)\left(۱ - \frac{\text{طہ}}{\pi + \text{عہ}}\right)\left(۱ + \frac{\text{طہ}}{۲\pi - \text{عہ}}\right)\left(۱ - \frac{\text{طہ}}{۲\pi + \text{عہ}}\right)\cdots$

$= \Pi\left(۱ - \frac{\text{طہ}}{\text{عہ} + \text{ر}\pi}\right)$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے یا صفر ہے۔

۱۳۔ $\frac{\text{جب}\,(\text{عہ} + \text{طہ})}{\text{جب}\,\text{عہ}} = \Pi\left(۱ + \frac{\text{طہ}}{\text{عہ} + \text{ر}\pi}\right)$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے یا صفر ہے۔

۱۴۔ $\frac{\text{جم}\,(\text{عہ} + \text{طہ})}{\text{جم}\,\text{عہ}} = \left(۱ + \frac{۲\,\text{طہ}}{\pi + ۲\,\text{عہ}}\right)\left(۱ - \frac{۲\,\text{طہ}}{\pi - ۲\,\text{عہ}}\right)\left(۱ + \frac{۲\,\text{طہ}}{۳\pi + ۲\,\text{عہ}}\right)$

$\left(۱ - \frac{۲\,\text{طہ}}{۳\pi - ۲\,\text{عہ}}\right)\cdots\cdots = \Pi\left[۱ + \frac{۲\,\text{طہ}}{۲\,\text{عہ} + \text{ر}\pi}\right]$

جہاں ر سے مراد کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔

۱۵۔ $\frac{\text{جم}\,(\text{عہ} - \text{طہ})}{\text{جم}\,\text{عہ}} = \Pi\left[۱ - \frac{۲\,\text{طہ}}{۲\,\text{عہ} + \text{ر}\pi}\right]$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔

۱۶۔ $\dfrac{\text{جم ط} + \text{جم ع}}{۱ + \text{جم ع}} = \left[۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(\pi + \text{ع})^۲}\right]\left[۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(\pi - \text{ع})^۲}\right]\left[۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(۳\pi + \text{ع})^۲}\right]$

$\left[۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(۳\pi - \text{ع})^۲}\right] \ldots\ldots = \Pi\left[۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(\text{ر}\pi + \text{ع})^۲}\right]$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔

[مشق ۱۴ اور ۱۵ کے جوابوں کو ضرب دو اور پھر ۲ ط کو ط میں اور ۲ ع کو ع میں بدل دو]

۱۷۔ $\dfrac{\text{جم ط} - \text{جم ع}}{۱ - \text{جم ع}} = \left\{۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{\text{ع}^۲}\right\}\left\{۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(۲\pi + \text{ع})^۲}\right\}$

$\left\{۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(۲\pi - \text{ع})^۲}\right\}\left\{۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(۴\pi + \text{ع})^۲}\right\} \ldots\ldots = \Pi\left[۱ - \dfrac{\text{ط}^۲}{(\text{ع} + \text{ر}\pi)^۲}\right]$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے یا صفر ہے۔

اس سے جمز ط − جم ع کے اجزائے ضربی مستنبط کرو۔

۱۸۔ $\dfrac{\text{جب ع} - \text{جب ط}}{\text{جب ع}} = \left(۱ - \dfrac{\text{ط}}{\text{ع}}\right)\left(۱ + \dfrac{\text{ط}}{\pi - \text{ع}}\right)\left(۱ - \dfrac{\text{ط}}{\pi + \text{ع}}\right)$

$\left(۱ + \dfrac{\text{ط}}{۲\pi - \text{ع}}\right)\left(۱ - \dfrac{\text{ط}}{۲\pi + \text{ع}}\right) \ldots\ldots$

۱۹۔ $۲\,\text{جمز ط} + ۲\,\text{جم ط} = ۴\,\text{جم}^۲\dfrac{\text{ع}}{۲}\left[۱ + \dfrac{\text{ط}^۲}{(\pi + \text{ع})^۲}\right]\left[۱ + \dfrac{\text{ط}^۲}{(\pi - \text{ع})^۲}\right] \ldots\ldots$

$= ۴\,\text{جم}^۲\dfrac{\text{ع}}{۲}\,\Pi\left[۱ + \dfrac{\text{ط}^۲}{(\text{ر}\pi + \text{ع})^۲}\right]$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے

۳۰ — ثابت کرو کہ

$$\text{جبز ن ی} = \text{ن جبز ی} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \left[1 + \frac{\text{جبز}^2 \frac{\text{ی}}{2}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{2\text{ن}}} \right]$$

اور اس سے جبزی کے اجزاے ضربی کے لیے حاصل ضربوں کا ایک ایسا لامتناہی سلسلہ مستنبط کرو جس کا ہر جزو ضربی بلحاظ ی کے درجہ دوم کا ایک رقم ہو۔ [دفعہ ۱۲۱ کی مشق اول کے جواب سے شروع کرو، پہلے ط کو صفر بناؤ اور پھر اس جواب میں ف کو صفر کرو۔ بعد ازاں تقسیم کرو]

۳۱ — ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \ldots\ldots \text{تا متناہی}$$

کا حاصل ضرب $\frac{1}{\pi}$ جبز π ہے۔

۳۲ — ایک نصف دائرہ کے محیط کے م برابر حصے کئے گئے ہیں اور ایک دوسرے ہم مرکز نصف دائرہ کے جو پہلے نصف دائرہ کے ہم وضع رکھا گیا ہے ن برابر حصے کئے گئے ہیں۔ پہلے نصف دائرہ کا ہر ایک نقطہ تقسیم دوسرے نصف دائرہ کے ہر ایک نقطہ تقسیم سے ملایا گیا ہے۔ ان نقاط کے ملانے والے خطوں کے مربعوں کا اوسط حسابی دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اگر م اور ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو اوسط مذکور $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \frac{8\,\text{ا}\,\text{ب}}{\pi^2}$ ہوگا۔ جہاں ا اور ب نصف دائروں کے نصف قطر ہیں۔

۳۳ — ہم مرکز دائروں کا ایک لامتناہی نظام دیا ہوا ہے، ان دائروں کے نصف قطر بالترتیب ا، $\frac{\text{ا}}{2}$، $\frac{\text{ا}}{3}$ .... ہیں۔ ایک نقطہ سے جسکا فاصلہ مشترک مرکز سے ج ($>$ ا) ہے سب دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان مماسوں کے محاذی مشترک مرکز پر بالترتیب زاویے ط_1، ط_2، ط_3 .... بنیں تو

$$\text{جب}\,\text{ط}\,\text{جب}\,\text{ط}\,\text{جب}\,\text{ط}\ \ldots\ldots = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{۲ن}}}\ \text{جب}\,\frac{\text{ن ط}}{\text{ج}}$$

۲۴۔ نقاط کی ایک لامتناہی تعداد ایک لا متناہی طول کے خط مستقیم کو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ہر مساوی حصہ کا طول ا ہے، اگر ن ایک ایسا نقطہ ہو جس کا فاصلہ خط مستقیم سے ما ہو اور ایک نقطہ تقسیم سے ن کا وہ فاصلہ جو خط مستقیم پر ناپا جائے لا ہو تو ثابت کرو کہ نقطہ ن کے جوڑنے والے سب نقاط تقسیم سے ہیں اُن کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ

$$\frac{\text{ط}}{\text{ا ما}} \times \frac{\text{جبہر}\,\frac{\text{۲ط ما}}{\text{ا}}}{\text{جمز}\,\frac{\text{۲ط ما}}{\text{ا}} - \text{جم}\,\frac{\text{۲ط لا}}{\text{ا}}}$$

ہوگا۔ [مشق ۷ کے جواب کو استعمال کرو]

۲۵۔ اگر ا، ب، ج .... سے تمام مفرد اعداد ۲، ۳، ۵، .... مراد لیے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\left(1 - \frac{1}{\text{ا}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\text{ب}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\text{ج}^2}\right)\ldots\ldots = \frac{6}{\text{ط}^2}$$

اور

$$\left(1 + \frac{1}{\text{ا}^2}\right)\left(1 + \frac{1}{\text{ب}^2}\right)\left(1 + \frac{1}{\text{ج}^2}\right)\ldots\ldots = \frac{15}{\text{ط}^2}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ

$$\prod_{\text{م}=1}^{\text{م}=\infty}\left[1 - \frac{\text{لا}}{\text{م}^2 - \text{ج}^2}\right] = \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ج}^2 + \text{لا}}}\cdot\frac{\text{جب}\left\{\text{ط}\sqrt{\text{ج}^2 + \text{لا}}\right\}}{\text{جب}\,\text{ط ج}}$$

باب دہم

اصولِ اجزائے متناسب

۱۳۱۔ اس باب میں ہم اجزائے متناسب کے اصول پر بحث کرینگے اس اصول کی صداقت کو ہم نے حصہ اول باب یازدہم میں بلاثبوت تسلیم کرلیا تھا۔ وہاں ہم نے یہ تسلیم کیا تھا کہ اگر ن اور ن+۱ دو متصل اعداد ہوں جن کے لوکارتم جدولوں میں دئے ہوئے ہوں اور اگر ھ کوئی کسر ہو تو اعشاریہ کے ساتویں مقام تک

$$\frac{\text{لوک}\,(\text{ن}+\text{ھ})-\text{لوک ن}}{\text{لوک}\,(\text{ن}+۱)-\text{لوک ن}}=\text{ھ}$$

اب ہم اس بیان کی صحت پر غور کرینگے۔

۱۳۲۔ **مروج لوکارتم**۔ دفعہ ۱۲ کی رو سے

$$\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن}+\text{ھ})-\text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن}=\text{لوک}_{۱۰}\frac{\text{ن}+\text{ھ}}{\text{ن}}=\text{مب}\;\text{لوک}_{\text{ہ}}\left(۱+\frac{\text{ھ}}{\text{ن}}\right)$$

جہاں مب = ۴۳۴۲۹۴۴۸... ،

پس دفعہ ۸ کی رو سے

$$\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن}+\text{ھ})-\text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن}=\frac{\text{مب ھ}}{\text{ن}}-\frac{\text{مب}}{۲}\times\frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}+\frac{\text{مب}}{۳}\times\frac{\text{ھ}^{۳}}{\text{ن}^{۳}}-\cdots\cdots(۱)$$

اب لوکارتم کی معمولی جدولوں میں ن پانچ ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے

یعنی ن ... ۱۰۰۰ سے کم نہیں ہوتا اس لئے اگر ھ ایک سے کم ہو تو

$\frac{\text{سب}}{۲} \times \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}$ کم ہوگا $\frac{۱}{۲}$ (۶۴۴۳۴۲۹۴۴۸...) × $\frac{۱}{۱۰^{۸}}$ سے

یعنی کم ہوگا $\frac{...۶۲۱۷۱۴۷۲۲۴}{۱۰^{۸}}$ سے

یعنی ...۲۱۰۰۰۰۰۰۰۰ سے

اور $\frac{\text{سب}}{۳} \times \frac{\text{ھ}^{۳}}{\text{ن}^{۳}}$ تو اس کے بھی دس ہزارویں حصہ سے کم ہے اس لئے اگر مساوات (۱) کی بائیں جانب کے رکن میں پہلی رقم کے بعد کی سب رقوم چھوڑ دی جائیں تو اعشاریہ کے کم از کم ساتویں مقام تک کوئی فرق نہیں آئے گا۔ اس لئے اعشاریہ کے ساتویں مقام تک

$$\text{لوک}_{۱۰}\,(\text{ن} + \text{ھ}) - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن} = \frac{\text{سب} \times \text{ھ}}{\text{ن}}$$

پس $\text{لوک}_{۱۰}\,(\text{ن} + ۱) - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن} = \frac{\text{سب} \times ۱}{\text{ن}}$

اس لئے عمل تقسیم سے

$$\text{ھ} = \frac{\text{لوک}_{۱۰}\,(\text{ن} + \text{ھ}) - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن}}{\text{لوک}_{۱۰}\,(\text{ن} + ۱) - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن}}$$

اسلئے اصول اجزائے متناسب معمولی اعداد کے اُن لوکارتموں کے لئے جو جدولوں میں دئے ہوئے ہیں درست ہے۔

۱۳۳۔ اس موقع پر یہ دریافت کرنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ جداول میں چھوٹے سے چھوٹا عدد کونسا ہے جس پر اجزائے متناسب کے اصول کا اطلاق ہوسکتا ہے۔

اس غرض کے لئے ہمیں ن کی ایسی قیمت معلوم کرنی چاہئے جو

مقدار $\frac{\text{سب ھ}^2}{\text{۲ ن}^2}$ کو $\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}^{\text{ع}}}$ سے کم بنا دے۔

یعنی $\text{ن}^2 > \frac{\text{سب}}{\text{۲}} \times \text{۱۰}^{\text{ع}} \times \text{ھ}^2$

چونکہ ھ کی بڑی سے بڑی قیمت ایک ہوسکتی ہے اس لئے

$\text{ن}^2 > \frac{\text{سب}}{\text{۲}} \times \text{۱۰}^{\text{ع}}$ یعنی $>$ ۲۱۶۱۴۶۲۲۴.....

$\therefore$ ن $>$ ۱۴۶۳

اس لئے مطلوبہ چھوٹے سے چھوٹا عدد ۱۴۶۳ ہے

۱۴۴۔ طبعی جیوب۔ فرض کرو کہ ایک جدول میں زاویوں کے متواتر فرقوں کے لئے ہمارے پاس اندراجات موجود ہیں۔ اور ان متواتر فرقوں میں سے ہر ایک میں نیم قطری زاویوں کی تعداد ھ ہے۔

[ہماری معمولی جدولوں میں ھ = آیں کے نیم قطریوں کی تعداد

$= \frac{\text{ط}}{\text{۱۸۰} \times \text{۶۰}} = \text{۰۰۰۲۹۰۸۸۸....} ۰$

یعنی ھ $<$ ۰۰۰۳ ۰]

نیز فرض کرو کہ ک ھ سے کم ہے۔ ہمارا اصول یہ تھا کہ

$$\frac{\text{ک}}{\text{ھ}} = \frac{\text{جب (ط + ک) - جب ط}}{\text{جب (ط + ھ) - جب ط}}$$

اب ہم اس مفروضہ کے جواز پر غور کرتے ہیں۔

جب (ط + ک) - جب ط = جب ط جم ک + جم ط جب ک - جب ط

$= \text{جب ط} \left[\text{۱} - \frac{\text{ک}^2}{\text{۲}!} + \frac{\text{ک}^4}{\text{۴}!} - \text{....} \right] + \text{جم ط} \left[\text{ک} - \frac{\text{ک}^3}{\text{۳}!} + \text{....} \right] - \text{جب ط}$

... (دفعات ۳۲ اور ۳۳)

$= \text{ک جم ط} - \frac{\text{ک}^2}{\text{۲}!} \text{جب ط} - \frac{\text{ک}^3}{\text{۳}!} \text{جم ط} \text{...}$

تیسری رقم کی نسبت پہلی رقم کے ساتھ = $\frac{1}{4}$ ک^{2} اور یہ ہمیشہ $\frac{1}{4}$ (۰۰۰۳ء۰)^{2} سے یعنی ۰۰۰۰۰۰۲ء۰ سے کم ہوتی ہے۔ پس تیسری رقم اور رقوم مابعد بلا خوف نظر انداز کی جاسکتی ہیں۔ تب

جب (طہ + ک) ۔ جب طہ = ک جم طہ ۔ $\frac{ک^{2}}{۲}$ جب طہ ۔۔۔۔ (۱)

پہلی رقم کی عددی نسبت دوسری رقم کے ساتھ

= $\frac{1}{۲}$ ک مس طہ ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ (۲)

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جب طہ، $\frac{\pi}{۲}$ کے تقریباً برابر ہو، اس لئے سوائے اُس صورت کے جب زاویہ طہ، قائمہ کے تقریبا برابر ہو مساوات (۱) میں دوسری رقم کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے،

تب جب (طہ + ک) ۔ جب طہ = ک جم طہ

اسی طرح سے جب (طہ + ھ) ۔ جب طہ = ھ جم طہ

لہذا $\frac{\text{جب (طہ + ک) ۔ جب طہ}}{\text{جب (طہ + ھ) ۔ جب طہ}} = \frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ ۔۔۔۔۔۔ (۳)

اگر طہ، زاویہ قائمہ کے بالکل قریب ہو تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ

جب (طہ + ک) ۔ جب طہ = ک جم طہ

اور اس لئے ربط (۳) اس صورت میں قائم نہیں رہتا اور جیب کا فرق زاویہ کے فرق کے متناسب نہیں ہوتا، پس اس صورت میں فرق بے قاعدہ ہوتے ہیں، لیکن ساتھ ہی فرق نہایت خفیف ہونگے کیونکہ اگر طہ، $\frac{\pi}{۲}$ کے بالکل قریب ہو تو ک جم طہ بہت چھوٹا ہوگا۔ دراصل اگر زاویہ طہ اور زاویہ قائمہ کا فرق چند

نشوں سے متجاوز نہ ہو تو ک جم طہ کی قیمت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک سب صفر ہوں گے۔ نیز

$\frac{\text{ک}^2}{2}$ جب طہ ہمیشہ > $\frac{(۰٫۰۰۰۳)^2}{2}$ یعنی > ۰٫۰۰۰۰۰۰۵....

اس سے ثابت ہوا کہ جب زاویہ طہ قائمہ کے بالکل قریب ہو تو زاویہ طہ میں نسبتاً زیادہ تبدیلی واقع ہونے سے زاویہ مذکور کی جیب میں نسبتاً تھوڑی تبدیلی واقع ہوگی نیز یہ تبدیلیاں بے قاعدہ ہونگی۔

۱۳۵ - طبعی جیوب التمام - چونکہ کسی زاویہ کی جیب التمام زاویہ مذکور کے متمم کی جیب کے برابر ہوتی ہے اس لئے یہ صورت بھی درحقیقت جیب ہی کی صورت کے مماثل ہے۔ پس اصول مذکورہ برقرار رہے گا سوائے اُس صورت کے جب زاویہ طہ صفر کے قریب ہو موخرالذکر صورت میں فرق حسب سابق بے قاعدہ اور نہایت خفیف ہوں گے۔

۱۳۶ - طبعی مماسات - سابقہ طریق کتابت کے بموجب

$$\text{مس}\,(\text{طہ}+\text{ک}) - \text{مس طہ} = \frac{\text{مس طہ} + \text{مس ک}}{1 - \text{مس طہ مس ک}} - \text{مس طہ}$$

$$= \frac{\text{مس ک قط}^2\,\text{طہ}}{1 - \text{مس طہ مس ک}}$$

$$= \text{مس ک قط}^2\,\text{طہ}\,(1 + \text{مس طہ مس ک} + \text{مس}^2\,\text{طہ مس}^2\,\text{ک} \ldots\ldots)$$

$$= \text{قط}^2\,\text{طہ}\left[\text{ک} + \frac{\text{ک}^3}{3} + \ldots\right]\left[1 + \text{مس طہ}\,(\text{ک} + \frac{\text{ک}^3}{3} + \ldots) + \text{مس}^2\,\text{طہ}\,(\text{ک}^2 + \ldots\ldots) \ldots\right] \quad (\text{دفعہ ۳۴})$$

$$= \text{ک قط}^2\,\text{طہ} + \text{ک}^2\,\frac{\text{جب طہ}}{\text{جم}^3\,\text{طہ}} + \text{ک}^3\,\text{قط}^2\,\text{طہ}\left[\frac{1}{3} + \text{مس}^2\,\text{طہ}\right] + \ldots \quad (1)$$

تیسری رقم اور رقوم مابعد حسب سابق ترک کی جاسکتی ہیں سوائے اس صورت کے جب زاویہ طہ قائمہ کے بہت قریب ہو۔

تب اگر مقدار $\text{ک}^{۲}\,\dfrac{\text{جب طہ}}{\text{جم}^{۳}\,\text{طہ}}$ بہت بڑی نہ ہو تو

$$\text{مس (طہ + ک)} - \text{مس طہ} = \text{ک قط}^{۲}\,\text{طہ} \quad \ldots\ldots\ (۲)$$

اور اصول تقریباً درست اور برقرار رہیگا۔

اگر طہ $> \frac{\pi}{۴}$ ، تو مساوات (۱) کی دوسری رقم $> ۲\,\text{ک}^{۲}$

پس اگر ہم ک کی بڑی سے بڑی قیمت (یعنی تقریباً ۰۰۰۳ء) لیں تو اس سے اعشاریہ کے ساتویں مقام پر ملحوظ ہندسہ آئیگا۔ لہذا جب جدول کے زاویوں کا فرق ۱' ہو تو اصول زیر بحث $\frac{\pi}{۴}$ سے بڑے زاویوں کے لئے درست نہیں ہوگا۔

۱۳۷۔ طبعی مماسات التمام۔ حسب دفعہ ماقبل یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اصول مذکورہ ان زاویوں کے لئے جو صفر اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں قابل اعتبار نہیں۔

۱۳۸۔ طبعی قاطع۔ ہم جانتے ہیں کہ قط (طہ + ک) − قط طہ

$$= \frac{۱}{\text{جم طہ جم ک} - \text{جب طہ جب ک}} - \frac{۱}{\text{جم طہ}}$$

$$= \text{قط طہ} \left\{ \frac{۱}{۱ - \text{ک مس طہ} - \frac{۱}{۲}\text{ک}^{۲} \ldots} - ۱ \right\}$$

$$= \text{قط طہ} \left[\text{ک مس طہ} + \text{ک}^{۲} \left(\tfrac{۱}{۲} + \text{مس}^{۲}\,\text{طہ} \right) + \ldots \right]$$

$$= \text{ک قط طہ مس طہ} + \text{ک}^{۲}\,\text{قط طہ} \left(\tfrac{۱}{۲} + \text{مس}^{۲}\,\text{طہ} \right) + \ldots\ldots\ (۱)$$

دوسری رقم کی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

$$= ک \frac{\frac{1}{2} + مس^2 ط}{مس ط} = ک \left[\frac{1}{2} مم ط + مس ط\right]$$

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ ط، صفر یا $\frac{\pi}{2}$ کے بہت قریب ہو' اس لئے سوائے ان دو صورتوں کے

$$قط (ط + ک) - قط ط = ک مس ط قط ط$$

پس اصولِ مذکور ثابت ہوا۔

اگر ط بہت چھوٹا ہو تو رقم ک قط ط مس ط بہت چھوٹی ہوگی اور فرق بے قاعدہ ہونے کے علاوہ نہایت خفیف ہونگے اگر ط، $\frac{\pi}{2}$ کے بالکل قریب ہو تو یہ رقم بڑی ہوگی' اس لئے اس صورت میں فرق خفیف نہ ہوں گے۔

۱۳۹۔ طبعی قاطع التمام۔ جیسے قاطع کی صورت میں ثابت کیا گیا ہے ویسے ہی قاطع التمام کی صورت میں بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ فرق خفیف اور بے قاعدہ ہوں گے اگر ط، 90° کے قریب ہو اور بے قاعدہ ہوں گے اگر ط صفر کے قریب ہو۔ سوائے ان صورتوں کے اصول برقرار رہتا ہے۔

۱۴۰۔ لوکارثمی جیوب کی جدولوں کے متعلق۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$ل جب (ط + ک) - ل جب ط = لوک_{10} \frac{جب (ط + ک)}{جب ط}$$

$$= لوک_{10} \left[جم ک + مم ط جب ک\right] = لوک_{10} \left[1 + ک مم ط - \frac{ک^2}{2} \ldots\right]$$

(دفعات ۳۲ اور ۳۳)

$$= \text{مب} \left[\text{ک مم طہ} - \frac{\text{ک}^2}{2} - \frac{1}{2}\,\text{ک}^2\,\text{مم}^2\,\text{طہ} + \ldots\ldots \right]$$

(دفعات ۸ اور ۱۲)

$$= \text{مب ک مم طہ} - \frac{\text{مب ک}^2}{2}\,\text{قم}^2\,\text{طہ} \ldots\ldots$$

دوسری رقم کی عددی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

$$= \frac{1}{2}\,\text{ک}\;\frac{1}{\text{جب طہ جم طہ}} = \frac{\text{ک}}{\text{جب ۲ طہ}}$$

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ طہ صفر یا زاویہ قائمہ کے قریب ہو۔

لہذا سوائے ان دو صورتوں کے

$$\text{ل جب (طہ + ک)} - \text{ل جب طہ} = \text{مب مم طہ} \times \text{ک}$$

پس اصول عام طور پر درست ہے۔

اگر طہ چھوٹا ہو تو رقم مب ک مم طہ بڑی ہوگی اور بنا برین فرق بڑے اور بے قاعدہ ہونگے۔ اس لئے ہم اُن جدولوں میں جو اً کے فرق پر مرتب کی گئی ہوں چھوٹے زاویوں پر اس اصول کا اطلاق نہیں کرسکتے۔

نیز خواہ جدولیں ۱۰ً کے فرقوں پر مرتب کی گئی ہوں تو بھی ہم اعشاریہ کے ساتویں مقام پر غلطی کے احتمال سے مطمئن نہیں ہو سکتے تاوقتیکہ طہ ۵° سے بڑا نہ ہو۔

اگر طہ ۹۰° کے بہت قریب ہو تو رقوم مب ک مم طہ اور $\frac{\text{مب ک}^2}{2}$ قم^2 طہ دونوں بہت چھوٹی ہونگی۔ لہذا اگر طہ زاویہ قائمہ کے قریب ہو تو فرق خفیف اور بے قاعدہ ہوں گے۔

۱۴۱- لوگارثمی جیوب التمام کی جدولوں کے متعلق - چونکہ کسی زاویہ کی

جیب اس زاویہ کے متمم کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے اس لئے اس صورت میں بھی اصول مذکور برقرار رہتا ہے سوائے اِن دو صورتوں کے جب زاویہ بہت چھوٹا ہو یا ۹۰° کے قریب ہو پہلی صورت میں فرق بے قاعدہ اور نیز خفیف ہوں گے اور دوسری صورت میں یہ بہت بڑے ہوں گے۔

۱۴۲- لوکارثمی مماسوں کی جدولوں کے متعلق۔ اِس صورت میں

$$\text{ل مس } (\text{ط} + \text{ک}) - \text{ل مس ط}$$

$$= \text{لوک}_{\text{ا}} \frac{\text{مس } (\text{ط} + \text{ک})}{\text{مس ط}} = \text{لوک}_{\text{ا}} \frac{\text{۱} + \text{مم ط مس ک}}{\text{۱} - \text{مس ط مس ک}}$$

$$= \text{لوک}_{\text{ا}} \left[\frac{\text{۱} + \text{ک مم ط}}{\text{۱} - \text{ک مس ط}} \right]$$

$$= \text{لوک}_{\text{ا}} \left[(\text{۱} + \text{ک مم ط})(\text{۱} + \text{ک مس ط} + \text{ک}^{\text{۲}} \text{ مس}^{\text{۲}} \text{ ط} + \dots\dots) \right]$$

$$= \text{لوک}_{\text{ا}} \left[\text{۱} + \frac{\text{ک}}{\text{جب ط جم ط}} + \frac{\text{ک}^{\text{۲}}}{\text{جم}^{\text{۲}} \text{ ط}} + \dots\dots \right]$$

$$= \text{مب} \left[\frac{\text{ک}}{\text{جب ط جم ط}} + \frac{\text{ک}^{\text{۲}}}{\text{جم}^{\text{۲}} \text{ ط}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \cdot \frac{\text{ک}^{\text{۲}}}{\text{جب}^{\text{۲}} \text{ ط جم}^{\text{۲}} \text{ ط}} + \dots\dots \right]$$

(دفعات ۸ اور ۱۲)

$$= \frac{\text{مب ک}}{\text{جب ط جم ط}} - \text{۲ مب ک}^{\text{۲}} \frac{\text{جم ۲ ط}}{\text{جب}^{\text{۲}} \text{ ۲ ط}} + \dots\dots$$

دوسری رقم کی عددی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

= ک مم ۲ط اور یہ چھوٹی ہوگی سوائے اِس صورت کے جبکہ

زاویہ طہ، صفر یا زاویہ قائمہ کے قریب ہو اس لئے سوائے ان دو صورتوں کے

ل مس (طہ + ک) ـ ل مس طہ = $\frac{۲ \text{ مسب}}{\text{جب ۲ طہ}}$ × ک

یعنی اصول بالعموم قائم رہیگا۔

متذکرہ بالا دونوں مستثنےٰ صورتوں میں $\frac{\text{ک}}{\text{جب ۲ طہ}}$ چھوٹا نہیں ہوگا اسلئے فرق بے قاعدہ ہوں گے لیکن خفیف نہیں ہوں گے۔

یہی الفاظ مماس التمام کے لوکارتموں کی جدولوں کیلئے بھی درست ہوں گے۔

۱۴۳۔ لوکارتمی قاطع اور قاطع التمام کی جدولوں کے متعلق۔

اس صورت میں

ل قط (طہ + ک) ـ ل قط طہ = ل جم طہ ـ ل جم (طہ + ک)

اور ل قم (طہ + ک) ـ ل قم طہ = ل جب طہ ـ ل جب (طہ + ک)

اس لئے ل جب طہ اور ل جم طہ کے نتائج بالترتیب ل قم طہ اور ل قط طہ پر بھی صادق آئینگے۔

باب یازدہم

اغلاطِ مشاہدہ

۱۴۴ - اب تک ہم یہ تسلیم کرتے رہے ہیں کہ کسی زاویہ کا مشاہدہ پوری پوری صحت کے ساتھ ہر صورت میں ممکن ہے لیکن فی الحقیقت ایسا نہیں ہوتا۔ ہمارے مشاہدات دو قسم کی اغلاط کے مورد ہو سکتے ہیں اولاً وہ جو کہ آلات کی نادرستی کی وجہ سے وقوع میں آتی ہیں کیونکہ ہمارے آلات شاذو نادر ہی مکمل طور پر صحیح ہوتے ہیں اور ثانیاً وہ جو سوال کے عمل کے دوران میں واقع ہوتی ہیں۔

۱۴۵ - اگر ہمارے مشاہدات میں کوئی غلطی ہو تو ظاہر ہے کہ بالعموم وہ مقدار بھی جو مشاہدات مذکورہ کی بناء پر محسوب کی گئی ہے غلط ہوگی مثلاً اگر حصہ اول دفعہ ۱۹۸ میں عہ کی پیمائش میں کوئی خفیف سی غلطی وقوع میں آئی ہو تو اس سے لا کی قیمت میں بھی جس کا انحصار صریحاً اُس دفعہ کے نتیجہ کے بموجب عہ پر ہے غلطی رونما ہوگی۔

۱۴۶ - کسی طول کی پیمائش میں غلطی کا قابل لحاظ ہونا بالعموم اُس نسبت پر منحصر ہوتا ہے جو غلطی کو طول مذکور کے ساتھ ہو مثلاً لکڑی کے ایک ٹکڑے کو ناپنے میں جس کا طول قریباً ۶ فٹ ہو ایک انچ کی غلطی نہایت وقیع اور قابل لحاظ سمجھی جائے گی۔ لیکن گھڑ دوڑ کے ایک میل لمبے راستے کی

پیمائش میں ایک انچ کی غلطی کو کوئی وقعت نہیں دی جا سکتی، اور زمین سے چاند کا فاصلہ ناپنے میں تو ایک انچ کی غلطی بالکل ناقابل لحاظ ہوگی۔

۱۴۷- ہم یہاں فرض کرلیں گے کہ وہ غلطیاں جن پر ہم بحث کرینگے اتنی چھوٹی ہیں کہ اُن کے مربعوں کو (جن کو نیم قطری زاویوں میں ناپنا چاہیئے اگر مقادیر مذکورہ زاویے ہوں) نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ ہم یہاں اُن مقادیر میں غلطی معلوم کرنے کی چند مثالیں درج کرتے ہیں جو غلط مقادیر کو استعمال کرنے سے حاصل ہوئی ہوں۔

ہم یہاں تسلیم کریں گے کہ ہماری جدولیں اور عمل دونوں درست ہیں یعنی ہم عمل کی غلطیوں کو معرض بحث میں نہیں لائیں گے بلکہ صرف ابتدائی مشاہدہ کی اغلاط پر اکتفا کرینگے۔

۱۴۸- مشق ا- م ع ایک عمودی لاٹھ ہے۔ (حصہ اول دفعہ ۷۴ کی شکل ملاحظہ ہو) ایک نقطہ و سے جس کا فاصلہ اس کے قاعدہ سے ا ہے لاٹھ کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع، طہ مشاہدہ کیا گیا ہے اور لاٹھ کی بلندی اس پیمائش کی بناء پر محسوب کی گئی ہے۔ اگر طہ کے مشاہدہ کرنے میں غلطی لہ واقع ہوئی ہو تو معلوم کرو کہ لاٹھ کی محصلہ بلندی پر اس غلطی سے کیا اثر پڑے گا۔

صریحاً محسوبہ بلندی ف = ا مس طہ

اگر مشاہدہ شدہ زاویہ طہ اصلی زاویہ سے بقدر لہ کے زیادہ ہو تو

اصلی زاویہ ارتفاع = طہ - لہ اس لئے

اصلی بلندی = فَ = ا مس (طہ - لہ)

اس لئے بلندی کی غلطی = ف - فَ = ا مس طہ - ا مس (طہ - لہ)

$$= \text{ا} \left\{ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{جب (طہ} - \text{لہ)}}{\text{جم (طہ} - \text{لہ)}} \right\}$$

$$= \text{ا} \frac{\text{جب لہ}}{\text{جم طہ جم (طہ} - \text{لہ)}}$$

اگر ہم لہ کے مربع اور نیز لہ کی بڑی قوتوں کو نظرانداز کردیں تو یہ

$$= \text{ا قط}^{2}\,\text{طہ} \times \text{لہ}$$

لہذا غلطی کو محسوبہ بلندی کے ساتھ نسبت

$$\text{لہ قط}^{2}\,\text{طہ} \div \text{مس طہ} = \frac{\text{۲ لہ}}{\text{جب ۲ طہ}} \text{ ہے}$$

چونکہ لہ بہت چھوٹا ہے اس لئے اگر جب ۲ طہ بھی چھوٹا نہ ہو تو یہ نسبت صریحاً بہت چھوٹی ہوگی۔ اور اس کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہوگی جبکہ جب طہ بڑا سے بڑا ہو یعنی ۲ طہ، $\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہو یعنی طہ $= \frac{\pi}{4}$ لیکن یہ نسبت بڑی ہوگی اگر طہ، صفر کے یا $\frac{\pi}{2}$ کے قریب ہو۔

پس معلوم ہوا کہ اگر وہ زاویہ جو لاٹھ کے محاذی بنتا ہے صفر کے قریب ہو یا اگر زاویہ مذکورہ $\frac{\pi}{2}$ کے قریب ہو تو اس کی پیمائش میں خفیف سی غلطی بھی جواب میں نسبتاً بہت بڑی غلطی پیدا کرے گی۔

اگر طہ بہت چھوٹا ہو تو محصلہ بلندی یعنی ا مس طہ اور مطلق غلطی یعنی ا قط^{2} طہ × لہ دونوں بہت چھوٹی ہونگی لیکن موخرالذکر، اول الذکر کے مقابلہ میں نسبتاً بڑی ہوگی۔

اگر طہ، 90° کے قریب ہو تو ہر دو مقادیر بڑی ہونگی۔

مشق ۲ — دفعہ ۱۹۸ حصہ اول کی طرح ایک برج کی بلندی معلوم کی گئی ہے اگر اصلی زاویہ، زاویہ عہ سے جو پیمائش سے معلوم ہوا ہے بمقدار طہ کے کم ہو تو

بتاؤ کہ ہمیں محصلہ بلندی میں کیا تبدیلی کرنی پڑے گی -

چونکہ عہ کی اصلی قیمت عہ - طہ ہے، اس لئے بلندی کی اصلی قیمت معلوم کرنے کے واسطے جواب میں عہ کی بجائے عہ - طہ لکھنا کافی ہوگا -

$$\text{اس لئے اصلی بلندی} = \text{ا}\,\frac{\text{جب (عہ - طہ) جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ + طہ)}}$$

$$= \text{ا جب بہ}\,\frac{\text{جب عہ جم طہ - جم عہ جب طہ}}{\text{جب (بہ - عہ) جم طہ + جم (بہ - عہ) جب طہ}}$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \times \frac{\text{۱ - طہ مم عہ}}{\text{۱ + طہ مم (بہ - عہ)}} \quad \text{............ دفعات ۳۲ اور ۳۳}$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \left[\text{۱ - طہ مم عہ}\right] \left[\text{۱ - طہ مم (بہ - عہ) + ...}\right]$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \left[\text{۱ - طہ} \left\{\text{مم (بہ - عہ) + مم عہ}\right\}\right]$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} - \text{طہ}\,\frac{\text{ا جب}^2\text{ بہ}}{\text{جب}^2\text{ (بہ - عہ)}}$$

اس لئے محصلہ بلندی اصلی بلندی سے بقدر طہ $\frac{\text{ا جب}^2\text{ بہ}}{\text{جب}^2\text{ (بہ - عہ)}}$ کے زیادہ ہے -

نیز غلطی کو محسوبہ بلندی کے ساتھ نسبت

$$\frac{\text{طہ جب بہ}}{\text{جب عہ جب (بہ - عہ)}} \text{ ہے -}$$

مشق ۴ - ایک مثلث کے اضلاع اَ = ۲، بَ = ۳ اور جَ = ۴ سے

مثلث کے زاویے محسوب کئے گئے ہیں۔ اگر یہ معلوم ہو جائے کہ ج کا اصلی طول پیمودہ طول سے بقدر ایک چھوٹی مقدار ل کے کم ہے تو دریافت کرو کہ پیمائش کی اس غلطی کی بناء پر محصلہ زاویوں کی قیمتوں میں کیا غلطی واقع ہوئی ہے۔

اضلاع کی مندرجہ بالا قیمتوں سے زوایا کی مثلثی نسبتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{جم ا} = \frac{\text{۷}}{\text{۸}} \qquad \text{جم ب} = \frac{\text{۱۱}}{\text{۱۶}} \qquad \text{جم ج} = -\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$$

$$\text{جب ا} = \frac{\text{۲}\sqrt{\text{۱۵}}}{\text{۱۶}} \qquad \text{جب ب} = \frac{\text{۳}\sqrt{\text{۱۵}}}{\text{۱۶}} \qquad \text{جب ج} = \frac{\text{۴}\sqrt{\text{۱۵}}}{\text{۱۶}}$$

فرض کرو کہ ج کی قیمت ۴ − ل کے جواب میں مثلث کے زاویوں کی قیمتیں

$\text{ا} - \text{ط}_{\text{۱}}$ ، $\text{ب} - \text{ط}_{\text{۲}}$ اور $\text{ج} - \text{ط}_{\text{۳}}$ ہیں ۔ تب

$$\text{جم}(\text{ا} - \text{ط}_{\text{۱}}) = \frac{\text{۳}^{\text{۲}} + (\text{۴} - \text{ل})^{\text{۲}} - \text{۲}^{\text{۲}}}{\text{۲} \times (\text{۴} - \text{ل}) \times \text{۳}} = \frac{\text{۲۱} - \text{۸ ل}}{\text{۲۴}}\left(\text{۱} - \frac{\text{ل}}{\text{۴}}\right)^{-\text{۱}}$$

$$\text{یعنی جم ا} + \text{جب ا} \times \text{ط}_{\text{۱}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲۴}}\left[\text{۲۱} - \text{۸ ل}\right]\left[\text{۱} + \frac{\text{ل}}{\text{۴}}\right] = \frac{\text{۱}}{\text{۲۴}}\left[\text{۲۱} - \frac{\text{۱۱}}{\text{۴}}\text{ ل}\right]$$

[دفعات ۳۲ اور ۳۳]

$$\text{یعنی } \frac{\text{۷}}{\text{۸}} + \frac{\text{۲}\sqrt{\text{۱۵}}}{\text{۱۶}}\text{ط}_{\text{۱}} = \frac{\text{۷}}{\text{۸}} - \frac{\text{۱۱}}{\text{۹۶}}\text{ ل}$$

$$\text{اس لئے ط}_{\text{۱}} = -\frac{\text{۱۱}\sqrt{\text{۱۵}}}{\text{۱۸۰}}\text{ ل} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

$$\text{نیز جم}(\text{ب} - \text{ط}_{\text{۲}}) = \frac{(\text{۴} - \text{ل})^{\text{۲}} + \text{۲}^{\text{۲}} - \text{۳}^{\text{۲}}}{\text{۲} \times (\text{۴} - \text{ل})\text{۲}} = \frac{\text{۱۱} - \text{۸ ل}}{\text{۱۶}}\left(\text{۱} - \frac{\text{ل}}{\text{۴}}\right)^{-\text{۱}}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{۱۱}}{\text{۱۶}} + \text{جب ب} \times \text{ط}_{\text{۲}} = \frac{\text{۱}}{\text{۱۶}}\left[\text{۱۱} - \text{۸ ل}\right]\left[\text{۱} + \frac{\text{ل}}{\text{۴}}\right] = \frac{\text{۱}}{\text{۱۶}}\left[\text{۱۱} - \frac{\text{۲۱}}{\text{۴}}\text{ ل}\right]$$

یعنی $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۱۶}\,\text{طہ} = -\frac{۲۱}{۶۴}\,\text{لہ}$

اس لیئے $\text{طہ} = -\frac{۷\sqrt{۱۵}}{۶۰}\,\text{لہ}$ .... (۲)

نیز جم $(\text{ج} - \text{طہ}) = \frac{۲^۲ + ۳^۲ - (۴ - \text{لہ})^۲}{۲ \times ۲ \times ۳} = \frac{-۳ + ۸\,\text{لہ}}{۱۲}$

یعنی $-\frac{۱}{۴} + \frac{۴\sqrt{۱۵}}{۱۶}\,\text{طہ} = -\frac{۱}{۴} + \frac{۲\,\text{لہ}}{۳}$

اس لیئے $\text{طہ} = \frac{۸\sqrt{۱۵}}{۴۵}\,\text{لہ}$

لہٰذا زاویوں ا، ب، ج میں اغلاط بالترتیب

$-\frac{۱۱\sqrt{۱۵}}{۱۸۰}\,\text{لہ}$ ، $-\frac{۲۱\sqrt{۱۵}}{۱۸۰}\,\text{لہ}$ اور $\frac{۳۲\sqrt{۱۵}}{۱۸۰}\,\text{لہ}$

نیم قطریوں کی ہیں

یعنی سب سے کم غلطی سب سے چھوٹے زاوئے میں ہے۔

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ہر سہ زوایا کی غلطیوں کا مجموعہ صفر ہے اور ہونا بھی یہی چاہیئے کیونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے۔ تیسرے زاویہ کی غلطی ہم اس اصول کی بناء پر بھی معلوم کرسکتے ہیں۔

امثلہ ۲۲

۱ — ایک ٹیلہ کے اوپر ایک مینار ہے جسکی بلندی ب ہے۔ مینار کی چوٹی اور قاعدہ کے ارتفاعی زاوئے بالترتیب عہ اور بہ مشاہدہ کئے گئے ہیں اور اس بناء پر ٹیلہ کی بلندی محسوب کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ عہ کی پیمائش میں طہ کی غلطی واقع ہونے سے ٹیلہ کی اصلی بلندی ف میں جو غلطی رونما ہوگی وہ محصلہ بلندی کا

ط × جم بہ قط عہ قم (عہ - بہ) گنا ہوگی۔

۲ ۔ ایک نقطہ سے جو مینار کے قاعدہ سے ۱۰۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع °۳۰ مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر زاویہ ارتفاع کی پیمائش میں ′۱ کی غلطی واقع ہوئی ہو اور طول کی پیمائش میں ۶ انچ کی، تو بتاؤ کہ محصلہ بلندی میں چھوٹی سے چھوٹی اور بڑی سے بڑی غلطیاں کیا پیدا ہوسکتی ہیں۔

۳ ۔ اگر حصہ اول دفعہ ۲۰۲ کی مشق میں زاویہ عہ کی پیمائش میں غلطی لہ واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اس سے مینار اور جھنڈے کی محصلہ بلندیوں میں کیا غلطیاں رونما ہونگی۔ اگر ا = ۱۰۰۰ فٹ، عہ = °۳۰ اور بہ = °۱۵ اور عہ کی قیمت میں ′۱ کی غلطی ہو تو مطلوبہ غلطیوں کی عددی قیمتیں معلوم کرو۔

۴ ۔ ا ب ایک عمودی لاٹھ ہے اور ج د ایک ایسا افقی خط ہے کہ ج د ممدودہ لاٹھ کے قاعدہ ب میں سے گزرتا ہے، لاٹھ کے محاذی ج اور د پر جو زاویے بنتے ہیں اُن کے ماس بالترتیب $\frac{3}{4}$ اور $\frac{4}{3}$ ہیں۔ اگر ج د کا طول ۳۵ فٹ معلوم ہو تو لاٹھ کی بلندی معلوم کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اگر د پر کے زاویۂ ارتفاع کے مشاہدہ میں ′۱ کی غلطی واقع ہو تو اس سے لاٹھ کی محصلہ بلندی میں قریباً ایک انچ کی غلطی رونما ہوگی۔

۵ ۔ ایک مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ایک مقام ا پر عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اور ایک اور مقام ب پر جو مینار کے قاعدہ اور مقام ا کے ملانے والے افقی خط پر واقع ہے اور جسکا فاصلہ ا سے ج ہے زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے

اس طرح سے مینار کی بلندی $\frac{\text{ج جب عہ جب بہ}}{\text{جب (عہ - بہ)}}$ فٹ محسوب کی گئی ہے۔

اگر ا ب، مینار کے قاعدہ اور ا کے ملانے والے خط پر نہ ناپا جائے بلکہ ایسی

سمت میں ناپا جائے جو متوازی الافق ہو اور موخرالذکر خط کے ساتھ ایک چھوٹا زاویہ ط بنائے تو بتاؤ کہ مینار کی بلندی میں دوسرے مرتبہ کی چھوٹی مقادیر تک صحت کرنے کے لئے محسوبہ بلندی میں سے مقدار $\frac{ج\ جم\ عہ\ جب^{۲}\ بہ}{جم\ بہ\ جب\ (عہ - بہ)}$ × $\frac{ط^{۲}}{۲}$ تفریق کرنی پڑیگی۔

۶ — تین نقاط ا، ب، ج ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اور ایک اور نقطہ د کا فاصلہ ب سے اس مشاہدہ کی بنا پر محسوب کیا گیا ہے کہ

$$\angle\ ا د ب = \angle\ ب د ج = ط،$$

ثابت کرو کہ اگر ط کے مشاہدہ میں ایک چھوٹی غلطی لہ واقع ہو تو اس کی وجہ سے د ب کے محصلہ طول میں تقریباً

$$\frac{-۲\ اَ\ بَ\ (اَ + بَ)^{۲}\ جب\ ط}{(اَ^{۲} + بَ^{۲} - ۲\ اَ\ بَ\ جم\ ۲ط)^{\frac{۳}{۲}}}\ لہ$$

کی غلطی واقع ہوگی جہاں ا ب = اَ اور ب ج = بَ

۷ — ایک مثلث کے تین اضلاع کی پیمائش کرتے وقت دو اضلاع اَ اور بَ کے طولوں میں دو چھوٹی غلطیاں بالترتیب لا اور ما واقع ہوئیں، ثابت کرو کہ زاویہ ج میں $-\frac{ما}{بَ}$ قم ا $-\frac{لا}{اَ}$ قم ب کی غلطی واقع ہوگی، نیز بتاؤ کہ باقی زاویوں میں کیا کیا غلطیاں واقع ہونگی۔

۸ — ایک مثلث ا ب ج میں ذیل کی تقریبی قیمتیں دی گئی ہیں

$$اَ = ۳۶\ فٹ،\ بَ = ۵۰\ فٹ\ اور\ ج = مس^{-۱}\ \frac{۳}{۴}$$

معلوم کرو کہ اَ کی دی ہوئی قیمت میں کتنی غلطی جَ کی محسوبہ قیمت میں اتنی ہی غلطی پیدا کریگی جو ج کی پیمائش میں ۵″ کی غلطی سے پیدا ہوتی ہے

۹ — ایک مثلث ذیل کی قیمتوں کی بنا پر حل کیا گیا ہے

ج = ۱۵° ، اَ = ۳√۶ اور ب = ۲

ثابت کرو کہ ج کی قیمت میں ۱۰ً کی غلطی واقع ہونے سے ب کی محسوبہ قیمت میں تقریباً ۱۳۶۶ءً کی غلطی واقع ہوگی۔

۱۰ـ ایک مثلث کا زاویہ ا اور دو اضلاع بَ اور جَ معلوم ہیں، اگر زاویہ ا کی پیمائش میں ایک چھوٹی غلطی طہ واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی بنا پر

(۱) بَ کی محصلہ قیمت میں طہ جب ب جم ج قم ا/ نیم قطریوں کی غلطی واقع ہوگی۔

(۲) اَ کی محصلہ قیمت میں جَ جب ب × طہ کی غلطی واقع ہوگی۔

(۳) اور مثلث مذکور کے محصلہ رقبہ میں اس کے طہ مم ا گنا کی غلطی واقع ہوگی۔

۱۱ـ ایک مثلث کے اضلاع اَ ، بَ اور جَ میں بالترتیب لا ، ما ، ی کی غلطیاں ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان اغلاط کی بنا پر مثلث کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر محسوب کیا جائے تو اس میں

½ مم ا مم ب مم ج [لا قط ا + ما قط ب + ی قط ج]

کی غلطی واقع ہوگی۔

۱۲ـ ایک مثلث کا رقبہ اس کے اضلاع کو ناپنے سے محسوب کیا گیا ہے، یہ معلوم ہے کہ کسی طول کی پیمائش میں انتہائی غلطی جو اصل کو کم یا زیادہ کر سکتی ہے اصلی طول کی ن گنی ہے جہاں ن بہت چھوٹا ہے ، ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کے اضلاع حسب پیمائش ۱۱۰، ۸۱، ۵۹ گز ہوں اور اُن کی بنا پر مثلث مذکور کا رقبہ محسوب کیا جائے تو اس رقبہ میں جس غلطی کے وقوع کا امکان ہے وہ زیادہ سے زیادہ رقبہ محصلہ کی ۱۴۳۳ء۳×ن گنی ہو سکتی ہے۔

۱۳ـ پیمائش سے معلوم ہوا ہے کہ ایک مثلث کے تینوں اضلاع ایک دوسرے کے تقریباً مساوی ہیں، اگر پیمائش میں غلطی کی یا بیشی کے لحاظ سے ایک فیصد ہو تو ثابت

کرو کہ بڑی سے بڑی غلطی جو ایک زاویہ کے محسوب کرنے میں واقع ہوسکتی ہے تقریباً
۸۰ً ہے۔

۱۴ ــ ایک مستوی متساوی الاضلاع مثلث افقی سطح میں واقع ہے، مثلث کے ہر ایک کونے سے ایک پہاڑ کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ اگر ہر ایک زاویہ عہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{ا مس عہ}$$

ہے جہاں ا متساوی الاضلاع مثلث کا ایک ضلع ہے، اگر ج پر کے ارتفاعی زاویے کی پیمائش میں نً کی غلطی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی اصلی بلندی

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{ا مس عہ}\left[1+\frac{\text{جب نً}}{\text{۳ جب عہ جم عہ}}\right]$$ ہے

جو طالب علم احصائے تفرقات سے واقف ہے وہ فوراً دیکھ سکتا ہے کہ بابِ ہذا کی بعض مثالیں محض تفرق کرنے سے زیادہ آسانی سے حل ہوسکتی ہیں

مثلاً دفعہ ۱۳۹ کی مشق ۲ میں مینار کی بلندی لا

$$=\frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ − عہ)}}$$

اگر بہ مستقل ہو اور عہ بدلے تو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرعہ}}=\text{ا جب بہ}\ \frac{\text{جم عہ جب (بہ − عہ) + جب عہ جم (بہ − عہ)}}{\text{جب}^2\text{ (بہ − عہ)}}$$

$$\therefore\ \text{مف لا} = \frac{\text{ا جب}^2\text{ بہ}}{\text{جب}^2\text{ (بہ − عہ)}}\ \text{مف عہ}$$

جس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ عہ میں خفیف تبدیلی مف عہ واقع ہونے سے لا میں

ایک خفیف تبدیلی مف لا پیدا ہوتی ہے۔

اسی طرح سے امثلہ ۲۲ مشق ۶ میں

$$\text{جم ج} = \frac{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲}}{\text{۲ ا ب}}$$

لیکن چونکہ ج مستقل ہے اسلئے تفرق کرنے سے

$$-\text{جب ج مف ج} = \frac{(\text{۲ ا مف ا} + \text{۲ ب مف ب}) \times \text{ا ب} - (\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲})(\text{ا مف ب} + \text{ب مف ا})}{\text{۲ ا}^{۲}\text{ ب}^{۲}}$$

$$= \frac{\text{ب} \times \text{۲ ا ج جم ب} \times \text{مف ا} + \text{ا} \times \text{۲ ب ج جم ا} \times \text{مف ب}}{\text{۲ ا}^{۲}\text{ ب}^{۲}}$$

$$\therefore \text{مف ج} = -\text{مف ا} \frac{\text{ج جم ب}}{\text{ا ب جب ج}} - \text{مف ب} \frac{\text{ج جم ا}}{\text{ا ب جب ج}}$$

$$= -\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} \text{ مم ب} - \frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} \text{ مم ا}$$

باب دوازدہم

متفرق مسائل

مساوات درجہ سوم کا حل

۱۴۹ـ مساوات درجہ سوم کی معیاری شکل یہ ہے

$$\text{ما}^{۳} + ۳\,\text{ا}\,\text{ما}^{۲} + ۳\,\text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$$

اس میں ما کی بجائے لا − ا رکھنے سے یہ مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۳(\text{ا}^{۲} - \text{ب})\,\text{لا} + (۲\,\text{ا}^{۳} - ۳\,\text{اب} + \text{ج}) = ۰$$ ہو جاتی ہے،

یعنی ہو جاتی ہے $\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{ف}\,\text{لا} + \text{ق} = ۰$ .... (۱)

گویا ہم درجہ سوم کی کسی مساوات کو مساوات (۱) کی شکل میں یعنی ایسی شکل میں جس میں $\text{لا}^{۲}$ کی کوئی رقم نہ ہو تحویل کر سکتے ہیں۔

۱۵۰ـ مساوات $\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{ف}\,\text{لا} + \text{ق} = ۰$ کا حل

اس میں $\text{لا} = \frac{\text{ی}}{\text{ن}}$ رکھنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ی}^{۳} - ۳\,\text{ن}^{۲}\,\text{ف}\,\text{ی} + \text{ق}\,\text{ن}^{۳} = ۰ \quad ....\ (۲)$$

اب دفعہ ۱۰۷ کی رو سے ہمیشہ

$$\text{جم}\,۳\,\text{ط} = ۴\,\text{جم}^{۳}\,\text{ط} - ۳\,\text{جم}\,\text{ط}$$

اسلئے $\text{جم}^{۳}\,\text{ط} - \frac{۳}{۴}\,\text{جم}\,\text{ط} - \frac{۱}{۴}\,\text{جم}\,۳\,\text{ط} = ۰$ .... (۳)

ظاہر ہے کہ مساوات (۲) اور (۳) دونوں دراصل ایک ہی مساوات ہیں

بشرطیکہ ی = جم طہ ، ۳ ف ن۲ = ۳/۴ اور − ۱/۴ جم ۳ طہ = ق ن۳

اسلئے ن = (۱/۴ف)^(۱/۲)

اور اسلئے جم ۳ طہ = − ۴ ق (۱/۴ف)^(۳/۲) ....(۴)

مساوات (۴) ہمیشہ (بشرط ضرورت جداول کی مدد سے) حل ہوسکتی ہے اگر ف مثبت ہو اور ۴ ق (۱/۴ف)^(۳/۲) > ۱

یعنی اگر ق۲ > ۴ ف۳

[جو طالب علم نظریہ مساواتات سے واقف ہے اس سے مخفی نہیں کہ یہ وہ صورت ہے جو کارڈن کے طریقہ سے حل نہیں ہوسکتی یعنی وہ صورت ہے جس میں کہ مساوات کی تینوں اصلیں حقیقی ہوں]

اگر چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو مساوات (۴) کو پورا کرے طہ ہو تو مقادیر (طہ + ۲π/۳) اور (طہ + ۴π/۳) بھی مساوات مذکورہ کو پورا کرینگی گویا مساوات

لا۳ − ۳ ف لا + ق = ۰

کی اصلیں ۱/ن جم طہ ، ۱/ن جم (طہ + ۲π/۳) اور ۱/ن جم (طہ + ۴π/۳)

یعنی ۲ √ف جم طہ ، ۲ √ف جم (طہ + ۲π/۳) اور ۲ √ف جم (طہ + ۴π/۳)

ہونگی۔

۱۵۱ – مشق – مساوات لا۳ + ۶ لا۲ + ۹ لا + ۳ = ۰ کو حل کرو۔

لا = ما − ۲ رکھنے سے مساوات بالاحسب ذیل ہو جاتی ہے

ما۳ − ۳ ما + ۱ = ۰

اب اگر ما = ی/ن رکھا جائے تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

ی۳ − ۳ ن۲ ی + ن۳ = ۰ ....(۱)

اور جم۳ طہ − ۳/۴ جم طہ − ۱/۴ جم ۳ طہ = ۰ .... (۲)

(۱) اور (۲) دونوں دراصل ایک ہی مساوات ہونگی اگر

ی = جم طہ، ن۲ = ۱/۴ اور − ۱/۴ جم ۳ طہ = ن۳

یعنی اگر ن = ۱/۲

اور جم ۳ طہ = − ۱/۲ = جم ۱۲۰° .... (۳)

مساوات (۳) کی اصلیں صریحاً حسب ذیل ہیں

۴۰°، ۱۲۰° + ۴۰°، ۲۴۰° + ۴۰°

اسلئے ی = جم ۴۰° یا جم ۱۶۰° یا جم ۲۸۰°

∴ ما = ۲ جم ۴۰°، یا ۲ جم ۱۶۰° یا ۲ جم ۲۸۰°

∴ لا = ما − ۲ = − ۲ + ۲ جم ۴۰° یا − ۲ − ۲ جم ۲۰° یا − ۲ + ۲ جم ۸۰°

لا کی عددی قیمتیں جدولوں کے ذریعہ معلوم ہوسکتی ہیں۔

امثلہ ۲۳

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(۱) ۲ لا۳ − ۳ لا − ۱ = ۰ (۲) لا۳ + ۳ لا۲ − ۱ = ۰

(۳) لا۳ − ۴۲ لا − ۳۲ = ۰ (۴) لا۳ − ۶ لا۲ + ۶ لا + ۸ = ۰

(۵) لا۳ − ۲۱ لا + ۷ = ۰ (۶) لا۳ + ۴ لا۲ + ۲ لا − ۱ = ۰

(۷) لا۳ − ۷ لا + ۵ = ۰

اعظم اور اقل قیمتیں

۱۵۲ — ایک مثلثی جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرنے کی ایک مثال

حصہ اول دفعہ ۱۳۹ میں درج کی گئی ہے۔ اس جگہ ہم ایک اور مثال حل کرتے ہیں۔

اگر دو مثبت زاویے لا اور ما ایسے ہوں کہ اُن کا حاصل جمع ایک مستقل زاویہ عہ (<۲) کے برابر ہو تو بتاؤ کہ جب لا جب ما کی بڑی سے بڑی قیمت کب ہوگی، نیز یہ مسئلہ دو سے زیادہ زاویوں کی صورت میں کیا ہو جائے گا۔

ظاہر ہے کہ ۲ جب لا جب ما = ۲ جب لا جب (عہ ـ لا)

= جم (عہ ـ ۲ لا) ـ جم عہ

اسلیئے ۲ جب لا جب ما کی قیمت بڑی سے بڑی اسوقت ہوگی جب جم (عہ ـ ۲ لا) بڑے سے بڑا ہو یعنی اگر عہ = ۲ لا

اس لیئے لا = ما = $\frac{\text{عہ}}{۲}$

اس لیئے حاصل ضرب مذکورہ بڑے سے بڑا اُسوقت ہوگا جب زاویے لا اور ما باہم مساوی ہوں۔

اب فرض کرو کہ تین زاویے لا، ما، ی ایسے ہیں کہ اُن کا مجموعہ ایک مستقل زاویہ یہ (<۲ = ۲) کے مساوی ہے۔ اگر حاصل ضرب

جب لا جب ما جب ی

کے زاویوں میں سے کوئی دو زاویے مثلاً لا اور ما باہم مساوی نہ ہوں تو ظاہر ہے کہ اگر ہم لا اور ما دونوں کی بجائے اُن کے حاصل جمع کا نصف لکھیں تو زاویوں کے حاصل جمع میں تو کوئی فرق نہ آئیگا لیکن حاصل ضرب مذکورہ کی قیمت بڑھ جائے گی۔ اس لیئے جب تک زاویے لا، ما اور ی آپس میں برابر نہ ہو جائیں ہم ہمیشہ زاویوں کو بتدریج ایک دوسرے کے مساوی کرنے سے حاصل ضرب مذکور کی قیمت بڑھا سکتے ہیں۔ پس بڑی سے بڑی قیمت

اس وقت حاصل ہوگی جب لا ، ما اور ری آپس میں برابر ہونگے۔

زوایا لا ، ما اور ری .... کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو صریحًا اسی قسم کا مسئلہ صادق آئے گا۔

۱۵۳ - اب ہم بتا سکتے ہیں کہ بڑے سے بڑے رقبہ کا مثلث جو ایک دائرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے مثلث متساوی الاضلاع ہے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر ر ہو تو حصہ اول، امثلہ ۳۶ مشق ۱۰ کے بموجب مثلث کا رقبہ

$$= ۲ ر^۲ \text{ جب ا جب ب جب ج}$$

ہوگا جہاں ا + ب + ج = ۲ ق = ایک مستقل زاویہ

دفعۂ ماقبل کی رو سے ظاہر ہے کہ یہ مثلث بڑے سے بڑا اس وقت ہوگا جب ا = ب = ج

۱۵۴ - مشق - مقدار $ا^۲$ مس لا + $ب^۲$ مم لا کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $ا^۲$ مس لا + $ب^۲$ مم لا = ما

یعنی $ا^۲$ مس^۲ لا - ما مس لا + $ب^۲$ = ۰

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$\text{مس لا} = \frac{\text{ما} \pm \sqrt{\text{ما}^۲ - ۴ ا^۲ ب^۲}}{۲ ا^۲}$$

چونکہ مس لا حقیقی ہے اسلئے علامت جذر کے اندر جو مقدار ہے وہ مثبت ہونی چاہئے یعنی ضرور ہے کہ $\text{ما}^۲ > ۴ ا^۲ ب^۲$

اس لئے ما کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۲ ا ب ہے اور اس قیمت کے جواب میں مس لا کی قیمت $\frac{ب}{ا}$ ہے۔

امثلہ ۲۴

۱۔ اگر لا + ما ایک دیا ہوا زاویہ ہو جو π سے کم ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جب لا + جب ما (۲) جم لا جم ما

دونوں کی بڑی سے بڑی قیمتیں اس وقت ہونگی جب لا = ما

۲۔ اگر لا + ما = ایک دیا ہوا زاویہ < π/۲ ، تو ثابت کرو کہ

جم لا + جم ما اور جم² لا + جم² ما

دونوں کی بڑی سے بڑی قیمتیں اس وقت ہونگی جب لا = ما

مندرجہ ذیل رقوم کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ (۲ جم طہ)/√۳ + √۳/(۲ جم طہ) ۴۔ ا قط طہ − ب مس طہ

۵۔ (قم² طہ − مم طہ)/(قم² طہ + مم طہ) ۶۔ ا² جب² طہ + ب² قم² طہ

۷۔ ا² قط² طہ + ب² قم² طہ

اگر لا + ما کی قیمت ہمیشہ ایک دیئے ہوئے زاویہ ۲ عہ کے مساوی ہو جہاں ۲ عہ کم ہے π سے تو ذیل کے جملوں کی کم سے کم قیمتیں دریافت کرو

۸۔ مس لا + مس ما ۹۔ قط لا + قط ما

ہم آسانی سے ثابت کرسکتے ہیں کہ

قط لا + قط ما = جم عہ [۱/(جم (عہ − لا) − جب عہ) + ۱/(جم (عہ − لا) + جب عہ)]

۱۰۔ اگر لا + ما = عہ جہاں عہ < π/۲، تو معلوم کرو کہ مس لا مس ما کی

قیمت بڑی سے بڑی کب ہوگی۔

[ا - مس لا مس ما = $\frac{\text{۲ جم عہ}}{\text{جم عہ + جم (عہ - ۲ لا)}}$]

۱۱ — ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا مثلث جسکے اضلاع کا مجموعہ ایک دی ہوئی مقدار کے برابر ہو مساوی الاضلاع ہوتا ہے۔

[ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ایک مثلث کا رقبہ = ن۲ مس $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ مس $\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ مس $\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$] جہاں ن = نصف محیط

۱۲ — اگر لا، ما، ی ..... ایسے زاویے ہوں جنکا حاصل جمع ایک دئے ہوئے زاویہ کے مساوی ہو اور نیز ان زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ مثبت ہو اور زاویہ قائمہ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب جم لا جم ما جم ی ...... کی قیمت بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب سب زاویے باہم مساوی ہوں۔

۱۳ — اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مقادیر جب ا + جب ب + جب ج اور جب ا جب ب جب ج کی قیمتیں بڑی سے بڑی اسوقت ہونگی جب مثلث مساوی الاضلاع ہو۔

۱۴ — ایک حادالزوایا مثلث کا مثلث پائین کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث پائین کا رقبہ اول الذکر مثلث کے رقبہ کے ایک چوتھائی سے کبھی زیادہ نہیں ہوسکتا۔

۱۵ — ا ب ج ایک مثلث ہے، ثابت کرو کہ مقدار

جم ۲ ا + جم ۲ ب + جم ۲ ج

کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت $-\frac{۳}{۲}$ ہے، نیز ثابت کرو کہ جم ا + جم ب + جم ج ہمیشہ ایک سے بڑا ہوگا اور $\frac{۳}{۲}$ سے بڑا نہیں ہوگا۔

۱۶ — اگر ا ب ج ایک مثلث ہو تو ثابت کرو کہ ہر دو مقادیر

مم ا + مم ب + مم ج

مم۲ ا + مم۲ ب + مم۲ ج   اور

کی قیمتیں چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہونگی جبکہ مثلث مذکور مساوی الاضلاع ہو۔

مقادیرِ ملتف کی ہندسی تعبیر

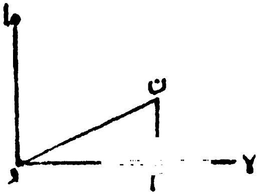
۱۵۵ - حصہ اول باب چہارم میں بتایا جاچکا ہے کہ اگر کوئی فاصلہ کسی خاص سمت میں (مثلاً انق کے متوازی دائیں جانب) ناپا جائے اور اس فاصلہ کو ا سے تعبیر کیا جائے تو اتنا ہی فاصلہ جو اول الذکر سمت کی مقابل سمت میں (یعنی انق کے متوازی بائیں جانب) ناپا جائے گا وہ - ا ، سے تعبیر ہوگا۔

اس لئے ا کے ماقبل منفی علامت (-) ثبت کرنیکا وہی نتیجہ ہوتا ہے گویا د ا (ملاحظہ ہو حصہ اول دفعہ ۵۳ کی شکل) کو مثبت سمت میں دو قائموں میں سے گھما دیا گیا ہے گویا ا پر (-۱) کا عمل عائد کرنے کے یہ معنی ہیں کہ ا کو دو قائموں میں سے مثبت سمت میں گھمایا گیا ہے۔

۱۵۶ - اب $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$، اس لئے عمل $\sqrt{-1}$ کے لئے جو معنی بھی تجویز کئے جائیں وہ ایسے ہونے چاہئیں کہ کسی مقدار پر یہ عمل دو دفعہ کرنے سے وہی نتیجہ مترتب ہو جو اسی مقدار پر - ۱ ، کا عمل ایک دفعہ کرنے سے مترتب ہوتا ہے۔

پس ہم عمل $\sqrt{-1}$ سے یہ مراد لے سکتے ہیں کہ یہ کسی طول کو ایک زاویہ قائمہ میں سے (بسمت مثبت) گھما دیتا ہے۔ اسلئے کسی طول ا پر $\sqrt{-1}$ کا عمل دو دفعہ کرنے کے یہ معنی ہونگے کہ اس طول ا کو بسمت مثبت دو قائموں میں سے گھمایا گیا ہے۔ لہٰذا ان معنوں کے مطابق $\sqrt{-1}$ ا سے ایک خط مراد ہے

جو اس خط پر عمود ہے جو ا سے تعبیر ہوتا ہے ۔



۱۵۷ ۔ اب ہم یہ بتا سکتے ہیں کہ مقدار لا + $\sqrt{-1}$ ما سے کیا مراد ہے

دو خط ولا اور وما کھینچو جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں، ولا پر ایک فاصلہ وم = لا ناپو، م سے م ن، وما کے متوازی کھینچو اور اس کو ما کے مساوی بناؤ۔ تب م ن، $\sqrt{-1}$ ما کو تعبیر کرتا ہے، پس مقدار لا + $\sqrt{-1}$ ما گویا نقطہ ن سے تعبیر ہوتی ہے۔

یا ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ خط و ن اس ملتف مقدار کو تعبیر کرتا ہے۔

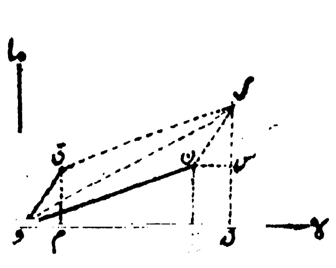
ظاہر ہے کہ و ن = $\sqrt{\text{وم}^2 + \text{م ن}^2} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

اور $\angle$ م و ن = مس$^{-1}$ $\frac{\text{م ن}}{\text{و م}}$ = مس$^{-1}$ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

لہذا طول و ن، مقدار لا + خ ما کے مقیاس کو تعبیر کرتا ہے اور زاویہ م و ن مقدار مذکور کے اہتزاز کی قیمت خاص کو (دفعہ ۱۸) تعبیر کرتا ہے۔

۱۵۸ ۔ دو ملتف مقداروں کو جمع کرنا

فرض کرو کہ و ن مقدار لا + خ ما کو تعبیر کرتا ہے اور و ق، ی + خ سے کو یعنی وع = لا، ع ن = ما، وم = ی اور م ق = سے



متوازی الاضلاع و ن ر ق

کی تکمیل کرو، ولا پر عمود ساں اور ساں پر عمود ن س کھینچو۔

چونکہ ن ر، دق کے مساوی اور متوازی ہے

اس لئے غ ل = ن س = وم اور س ر = م ق

لہٰذا ول = وع + ع ل = لا + ی

اور ل ر = ل س + س ر = ما + سے

اسلئے و ر، مقدار ملتف

(لا + ی + خ (ما + سے) کو تعبیر کرتا ہے۔

اسلئے دو ملتف مقداروں کا مجموعہ اُس متوازی الاضلاع کے قطر سے تعبیر ہوتا ہے جس کے دو متصل اضلاع مذکورہ مقادیر کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۵۹- فرض کرو کہ لا + خ ما = ر(جم طہ + خ جب طہ) بموجب دفعہ ۱۸

تب (جم عہ + خ جب عہ) (لا + خ ما)

= ر(جم عہ + خ جب عہ) (جم طہ + خ جب طہ)

= ر[جم (عہ + طہ) + خ جب (عہ + طہ)] ....(۱)

اب ان معنوں کے بموجب جو ملتف مقادیر کے لئے اوپر تجویز کئے جاچکے ہیں

ر [جم طہ + خ جب طہ]

سے مراد ایک ایسا خط ہے جس کا طول ر ہے اور جو ولا سے زاویہ طہ بناتا ہے

نیز حسبۂ ر[جم (عہ + طہ) + خ جب (عہ + طہ)]

سے مراد ر طول کا ایک خط ہے جو ولا سے زاویہ 'عہ + طہ' بناتا ہے (دفعہ ۱۵۷)

اسلئے مساوات (۱) کی رو سے لا + خ ما کو جم عہ + خ جب عہ سے

ضرب دینے کے گویا یہ معنی ہیں کہ اس خط کو جو ۱ + خم ما سے تعبیر ہوتا ہے ایک زاویہ عہ میں سے گھما دیا گیا ہے۔

۱۶۰ ۔ ڈی مائیور کے مسئلہ کی ہندسی تعبیر

مقدار (جم عہ + خم جب عہ) (جم بہ + خم جب بہ) (جم جہ + خم جب جہ) (جم لہ + خم جب لہ) سے یہ مراد ہے کہ ایک خط کو جو جم لہ + خم جب لہ سے تعبیر ہو پہلے زاویہ جہ، پھر زاویہ بہ اور بالآخر زاویہ عہ میں سے گھمایا گیا ہے۔ یعنی فی الجملہ زاویہ عہ + بہ + جہ میں سے گھمایا گیا ہے۔ لیکن اس موخرالذکر مجموعی عمل سے جو خط حاصل ہوگا وہ وہی ہوگا جو

[جم (عہ + بہ + جہ) + خم جب (عہ + بہ + جہ)] (جم لہ + خم جب لہ)

سے تعبیر ہوتا ہے۔

یہی استدلال زوایا کی کسی تعداد پر صادق آئیگا۔ اسلیئے ڈی مائیور کا مسئلہ جبریہ طرز میں محض اس ہندسی امر واقعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ ایک خط کو یکے بعد دیگرے مختلف زاویوں میں سے گردش دینے سے وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو اس خط کو ایک دم اُن زاویوں کے مجموعہ میں سے گردش دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مشق ۔ یہ آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے کہ عدد ۱ کے تین جذر الکعب حسب ذیل ہیں

جم ۰ + خم جب ۰ ، جم $\frac{۲\pi}{۳}$ + خم جب $\frac{۲\pi}{۳}$ ، جم $\frac{۲\pi}{۳}$ + خم جب $\frac{۲\pi}{۳}$ اسلیئے

(جم ۰ + خم جب ۰) (جم ۰ + خم جب ۰) (جم ۰ + خم جب ۰) = ۱

(جم $\frac{۲\pi}{۳}$ + خم جب $\frac{۲\pi}{۳}$) (جم $\frac{۲\pi}{۳}$ + خم جب $\frac{۲\pi}{۳}$) (جم $\frac{۲\pi}{۳}$ + خم جب $\frac{۲\pi}{۳}$) = ۱

اور جم $\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)$ + خ جب $\frac{۴\pi}{۳}$) (جم $\frac{۴\pi}{۳}$ + خ جب $\frac{۴\pi}{۳}$) (جم $\frac{۴\pi}{۳}$ + خ جب $\frac{۴\pi}{۳}$) = ۱

ان مساواتوں میں سے پہلی مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو تین بار صفر زاویہ میں سے گردش دینے سے وہی خط حاصل ہوتا ہے۔

دوسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو مسلسل تین بار زاویہ $\frac{۲\pi}{۳}$ میں سے (یعنی فی الجملہ زاویہ ۲ π میں سے) گردش دینے سے وہی خط حاصل ہوتا ہے۔

تیسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو مسلسل تین بار زاویہ $\frac{۴\pi}{۳}$ میں سے (یعنی فی الجملہ ۴ π میں سے) گردش دینے سے وہی ابتدائی خط حاصل ہوتا ہے۔

یہ سب امور صریحاً درست ہیں۔

۱۶۱ - دو ملتف مقداروں کو ضرب دینا

اگر لا + خ ما = ر (جم طہ + خ جب طہ)

اور ی + خ ے = ر٫ (جم فہ + خ جب فہ)

تو (لا + خ ما) (ی + خ ے) = ر ر٫ (جم طہ + خ جب طہ) (جم فہ + خ جب فہ)

= ر ر٫ [جم (طہ + فہ) + خ جب (طہ + فہ)]

پس ایک ملتف مقدار لا + خ ما کو دوسری ملتف مقدار ی + خ ے سے ضرب دینے کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ اس خط کو جو لا + خ ما سے تعبیر ہوتا ہے زاویہ فہ

[یعنی مس$^{-۱}$ $\frac{ے}{ی}$]

میں سے گھمایا گیا ہے اور اس کے طول کو نسبت

$$ا : ر \quad یعنی \quad ا : \sqrt{ی^۲ + س^۲}$$

سے بدلا گیا ہے، اسلئے ایک ملتف مقدار کو دوسری ملتف مقدار سے ضرب دینے سے مراد گویا "گردش دینا اور کھینچنا" ہے۔

متفرق مثالیں ۲۵

۱ - ثابت کرو کہ مساوات مس لا = ک لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد لا متناہی ہے

۲ - اگر ا، ب، ج ایک مثلث کے تین زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ مقدار

۱ - ۸ جم ا جم ب جم ج ہمیشہ مثبت ہوگی

۳ - اگر ا کے خیالی جذر الکعب عہ اور بہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$عہ\, و^{عہ لا} - بہ\, و^{بہ لا} = - و^{-\frac{لا}{۲}} \left[\frac{\sqrt{۳}}{۲}\, جب \frac{\sqrt{۳}\, لا}{۲} + جم \frac{\sqrt{۳}\, لا}{۲} \right]$$

۴ - اگر لا ایک نیم قطری سے کم ہو تو ثابت کرو کہ $لا = ۲ \sqrt{\frac{۳ - ۳ جم لا}{۵ + جم لا}}$ تقریباً اور دائیں جانب کے رکن میں غلطی تقریباً $\frac{لا^۵}{۴۸۰}$ نیم قطری زاویوں کی ہے۔

۵ - اگر جم (طہ + خ فہ) = قط (عہ + خ بہ) جہاں عہ، بہ، طہ اور فہ سب حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$مس^۲ فہ\, جمز^۲ بہ = جب^۲ عہ$$

$$اور \quad مس^۲ بہ\, جمز^۲ فہ = جب^۲ طہ$$

۶ - اگر لا = ۲ جم عہ جمز بہ اور ما = ۲ جب عہ جبز بہ تو ثابت کرو کہ

$$قط (عہ + خ بہ) + قط (عہ - خ بہ) = \frac{۴ لا}{لا^۲ + ما^۲}$$

$$قط (عہ + خ بہ) - قط (عہ - خ بہ) = \frac{۴ خ ما}{لا^۲ + ما^۲}$$

۷ — ثابت کرو کہ

جب^{ن} فہ جم ن فہ + ن جب$^{ن-۱}$ فہ جم (ن - ۱) طہ جب (طہ - فہ)

+ $\frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}$ جب$^{ن-۲}$ فہ جم (ن - ۲) طہ جب^{۲} (طہ - فہ) + ... + جب^{ن} (طہ - فہ)

= جب^{ن} طہ جم ن فہ

۸ — ثابت کرو کہ مساوات

لا^{ن} جب ن طہ - ن لا$^{ن-۱}$ جب (ن طہ + فہ)

+ $\frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}$ لا$^{ن-۲}$ جب (ن طہ + ۲ فہ) - ...... تا (ن + ۱) رقوم = ۰

کی اصلیں مساوات لا = جب (طہ + فہ - ک $\frac{\pi}{ن}$) قم (طہ - ک $\frac{\pi}{ن}$)

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ن سے مراد کوئی صحیح عدد ہے اور ک کی قیمت صفر سے ن - ۱ تک کوئی صحیح عدد ہے۔

۹ — ثابت کرو کہ سلسلۂ لا متناہی

جب طہ + $\frac{۱}{۲}$ $\frac{\text{جب}^{۳}\text{ طہ}}{۳}$ + $\frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲}$ $\frac{\text{جب}^{۵}\text{ طہ}}{۵}$ + ...

کی قیمت طہ کے مساوی ہے جہاں طہ کوئی حادہ زاویہ ہے، اور بالعموم اگر ن کا انتخاب اس طرح کیا جائے کہ مقدار ن π + (- ۱)^{ن} طہ کی قیمت - $\frac{\pi}{۲}$ اور + $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان ہو تو سلسلہ بالا کی قیمت ن π + (-۱)^{ن} طہ ہوگی۔

۱۰ — ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جسکا نصف قطر ایک ہے اور اس دائرہ کے محیط کو ن مساوی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ان قوسوں کے وتروں پر قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بنائے گئے ہیں جن کے راس باہر کی جانب ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان مثلثوں کی تعداد کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو

ان راسوں کے جو فاصلے دائرہ کے مرکز سے ہوں گے اُن سب کے حاصل ضرب کی انتہا تو ۲ ہوگی جہاں عہ سے مراد وہ زاویہ ہے جو قوس کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

۱۱ — ایک دائرہ کے اندر جسکا نصف قطر ا ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے، دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ ق سے دائرہ کا مماس کھینچا گیا ہے اور کثیر الاضلاع کے اضلاع اس مماس کو نقاط ا، ب، ج، د... ..... پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ حاصل ضرب ق ا × ق ب × ق ج × ق د .... = اُن مس ن طہ اگر ن طاق ہو اور = اُن اگر ن جفت ہو، اس میں طہ سے مراد وہ زاویہ ہے جو ق اور کثیر الاضلاع کے ایک راس کے خط وصل کے محاذی دائرہ کے محیط پر بنتا ہے۔

۱۲ — ایک دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ق ہے۔ دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا۱ ا۲ ا۳ ..... ان بنایا گیا ہے جہاں راس ا۱ وہ نقطہ ہے جو نقطہ ق کے قریب ترین ہے۔ اگر وتر ق ا۱، ق ا۲، ق ا۳...ق ان کے طول بالترتیب ج۱، ج۲، ..... جن ہوں تو ثابت کرو کہ مقدار

ج۱ ج۲ + ج۲ ج۳ + ... جن-۱ جن - جن ج۱

کی قیمت ق کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۱۳ — ایک دائرہ کے نصف قطروں کا ایک سلسلہ دائرہ کے محیط کو ۲ ن مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے اور محیط پر کے کسی دئے ہوئے نقطہ سے ن مسلسل نصف قطروں پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان ن عمودوں کا حاصل ضرب

$$\frac{\text{رن}}{\text{۲ن-۱}} \text{ جب ن طہ}$$

ہوگا جہاں ر دائرہ مذکور کا نصف قطر ہے اور طہ ان دو نصف قطروں کا درمیانی زاویہ ہے جن میں سے ایک تو محیط پر کے دئے ہوئے نقطہ کو مرکز سے وصل کرتا ہے۔

اور دوسرا مذکورہ بالا ان نصف قطروں میں سے پہلا یا آخری نصف قطر ہے۔

۱۴ — اگر ایک دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع بنایا جائے اور اُس وتر کا طول جو محیط پر کے کسی ثابت نقطہ کو کثیر الاضلاع کے ایک راُس سے وصل کرے ل ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ح}\,\text{ل}^{\text{۲م}} = \text{ن}\,\text{ا}^{\text{۲م}}\,\frac{\underline{|\text{۲م}}}{\left\{\underline{|\text{م}}\right\}^{\text{۲}}}$$

۱۵ — ایک دائرہ کے اندر جسکا مرکز د ہے اور نصف قطر ل ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ...... بنایا گیا ہے۔ کثیر الاضلاع کے سب راُسوں سے ایک خط پر جو د ا پر عمود ہے اور جس کا فاصلہ مرکز د سے بَ (> اَ) ہے عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب

$$\text{بَ}^{\text{ن}}\left[\text{جم}^{\text{ن}}\left(\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{-\text{۱}}\frac{\text{اَ}}{\text{بَ}}\right) - \text{جب}^{\text{ن}}\left(\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{-\text{۱}}\frac{\text{اَ}}{\text{بَ}}\right)\right]^{\text{۲}}$$ ہے

۱۶ — ثابت کرو کہ مساوات ط = جم ط سے ط کی ایک اور صرف ایک ہی قیمت حاصل ہوتی ہے اور یہ قیمت $\frac{\pi}{\text{۴}}$ سے کم ہے۔

۱۷ — ثابت کرو کہ ط کی عام قیمت، جو مساوات

(جم ط + خر جب ط)(جم ۲ ط + خر جب ۲ ط) ...... ن اجزاے ضربی تک = ۱ کو پورا کرتی ہے، $\frac{\text{۴م}\,\pi}{\text{ن}\,(\text{ن}+\text{۱})}$ ہے جہاں م سے مراد کوئی صحیح عدد ہے۔

۱۸ — ثابت کرو کہ $\text{و}^{\pi} + \text{و}^{-\pi} = \text{۲}\left\{\text{۱}+\text{۲}^{\text{۲}}\right\}\left\{\text{۱}+\left(\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\right)^{\text{۲}}\right\}\left\{\text{۱}+\left(\frac{\text{۲}}{\text{۵}}\right)^{\text{۲}}\right\}\cdots$ تا لا تناہی

۱۹ — ثابت کرو کہ $\text{۱} + \frac{\text{ل}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \frac{\text{ل}^{\text{۶}}}{\underline{|\text{۶}}} + \frac{\text{ل}^{\text{۹}}}{\underline{|\text{۹}}} + \cdots\cdots$ تا لا تناہی

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\left[\text{و}^{\text{ل}} + \text{۲}\,\text{و}^{-\frac{\text{ل}}{\text{۲}}}\,\text{جم}\left(\frac{\sqrt{\text{۳}}\,\text{ل}}{\text{۲}}\right)\right]$$

۲۰ — ثابت کرو کہ $\text{لا} + \frac{\text{لا}^{4}}{\lfloor 4} + \frac{\text{لا}^{7}}{\lfloor 7} + \frac{\text{لا}^{10}}{\lfloor 10} + \ldots\ldots$ تا لاتناہی

$$= \frac{1}{3}\,\text{و}^{\text{لا}} - \frac{1}{3}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{2}} \left(\text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{3}}{2} \right)$$

۲۱ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\infty} \left[\frac{1}{(3\text{ر}-1)^{4}} + \frac{1}{(3\text{ر}+1)^{4}} \right]$$

کا حاصل جمع $\frac{8\pi^{4}}{729} - 1$ ہے۔

۲۲ — ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\,\frac{2\pi}{17} + \text{جم}\,\frac{4\pi}{17} + \text{جم}\,\frac{6\pi}{17} + \ldots\ldots + \text{جم}\,\frac{14\pi}{17} + \text{جم}\,\frac{16\pi}{17} = -\frac{1}{2}$$

اور $\text{قط}\,\frac{2\pi}{17} + \text{قط}\,\frac{4\pi}{17} + \ldots\ldots + \text{قط}\,\frac{14\pi}{17} + \text{قط}\,\frac{16\pi}{17} = 8$

۲۳ — اگر $\text{عہ} = \frac{2\pi}{21}$ تو ثابت کرو کہ جملات

$$\text{جم عہ} + \text{جم}\,5\,\text{عہ} + \text{جم}\,17\,\text{عہ}$$

اور $\text{جم}\,11\,\text{عہ} + \text{جم}\,13\,\text{عہ} + \text{جم}\,19\,\text{عہ}$

کی قیمتیں بالترتیب $\frac{\sqrt{21}+1}{4}$ اور $\frac{-\sqrt{21}+1}{4}$ ہیں۔

۲۴ — ثابت کرو کہ $\text{مس عہ} + \text{مس}\left(\text{عہ} + \frac{2\pi}{5}\right) + \text{مس}\left(\text{عہ} + \frac{4\pi}{5}\right)$

$$+ \text{مس}\left(\text{عہ} + \frac{6\pi}{5}\right) + \text{مس}\left(\text{عہ} + \frac{8\pi}{5}\right) = 5\,\text{مس}\,5\,\text{عہ}$$

۲۵ — ثابت کرو کہ جن مساوات کی اصلیں $\text{مس}\,\frac{\text{ر}\pi}{15}$ ہیں (جہاں ر بشمول ۱ کے کوئی عدد ہے جو ۱۵ سے کم ہے اور بلحاظ ۱۵ کے مفرد ہے) وہ یہ ہے

$$\text{لا}^{8} - 92\,\text{لا}^{6} + 134\,\text{لا}^{4} - 28\,\text{لا}^{2} + 1 = 0$$

۲۶ — سلسلہ $\text{جب}\,2\,\text{ط} - \frac{1}{2}\,\text{جب}\,4\,\text{ط} + \frac{1}{3}\,\text{جب}\,6\,\text{ط} - \ldots\ldots$ تا لاتناہی

سکے حاصل جمع سے یا کسی دوسرے طریقہ سے ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi\sqrt{۲}}{۴} = ۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۱} - \ldots\ldots \text{ تا لا تناہی}$$

۲۷ — دفعہ ۵۳ مساوات (۴) کو تسلیم کرکے ثابت کرو کہ

$$\text{ط}^{۲} = \text{جب}^{۲}\text{ط} + \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{جب}^{۴}\text{ط}}{۲} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵}\,\frac{\text{جب}^{۶}\text{ط}}{۳} + \ldots\ldots$$

۲۸ — ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۲\text{لا}}\,\frac{\text{جیبز لا}}{\text{جمز لا} - \text{جم عہ}} - \frac{۱}{\text{عہ}^{۲} + \text{لا}^{۲}}$$

$$= \sum_{\text{ن} \to \infty}^{\text{ن} \to \infty} \left\{ \frac{۱}{(۲\text{ن}\pi - \text{عہ})^{۲} + \text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{(۲\text{ن}\pi + \text{عہ})^{۲} + \text{لا}^{۲}} \right\}$$

۲۹ — ثابت کرو کہ $\text{جیبز}^{-۱}\text{ لا}$ کی عام قیمت

$$\text{خ ک}\pi + (-۱)^{\text{ک}}\ \text{لوک}\left[\text{لا} + \sqrt{۱ + \text{لا}^{۲}}\right]$$

ہے جہاں ک کسی صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔

۳۰ — ایک مربع ا ب ج د کا ایک ضلع ب ج لا انتہا بڑھایا گیا ہے اور اس پر فاصلے ج $\text{ج}_{۱}$، $\text{ج}_{۱}$ $\text{ج}_{۲}$، $\text{ج}_{۲}$ $\text{ج}_{۳}$ ...... ناپے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ ب ج کے برابر ہے، اگر زوایا ب ا $\text{ج}_{۱}$، ب ا $\text{ج}_{۲}$، ب ا $\text{ج}_{۳}$، ...... کو بالترتیب $\text{ط}_{۱}$، $\text{ط}_{۲}$، $\text{ط}_{۳}$، ...... سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ط}_{۱}\ \text{جب ط}_{۲}\ \text{جب ط}_{۳} \ldots\ldots \text{ تا لا تناہی} = \sqrt[۴]{\frac{۳۲}{\text{و}^{\pi} - \text{و}^{-\pi}}}$$

۳۱ — ایک نقطہ ن ایک منتظم کثیر الاضلاع کی سطح میں واقع ہے۔ اگر کثیر الاضلاع کے راسوں کے فاصلے ن سے بالترتیب $\text{ر}_{۱}$، $\text{ر}_{۲}$، $\text{ر}_{۳}$، ...... $\text{ر}_{\text{ن}}$ ہوں تو

ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{پ_۱^۲}+\frac{1}{پ_۲^۲}+\cdots\cdots\frac{1}{پ_ن^۲}=\frac{ن}{ر^۲-ا^۲}=\frac{ر^{۲ن}-ا^{۲ن}}{ر^{۲ن}-۲ا^ن ر^ن \text{ جم } ن ط+ا^{۲ن}}$$

جہاں ا، کثیر الاضلاع کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، ر اس دائرہ کے مرکز اور ن کے مابینی فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے اور ط سے مراد وہ زاویہ ہے جو خط و ن، کسی زاویہ کے راس اور مرکز کو ملانے والے خط سے بناتا ہے۔

۳۲۔ اگر ط + ف + پ = ۲ ۱۲ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^۲ ط + \text{جم}^۲ ف + \text{جم}^۲ پ - ۲ \text{ جم } ط \text{ جم } ف \text{ جم } پ = ۱$$

اس سے ان چھ خطوط کے طولوں کا باہمی ربط مستنبط کرو جو چار ہم سطح نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مزید متفرق مثالیں

۱۔ اگر $(\text{ا}_۱+\text{خ ب}_۱)(\text{ا}_۲+\text{خ ب}_۲)\dots(\text{ا}_\text{ن}+\text{خ ب}_\text{ن})=\text{ا}+\text{خ ب}$
تو ثابت کرو کہ $\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ب}_۱}{\text{ا}_۱}+\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ب}_۲}{\text{ا}_۲}+\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ب}_۳}{\text{ا}_۳}+\dots$

$\dots+\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ب}_\text{ن}}{\text{ا}_\text{ن}}=\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ [ڈی مائیور کا مسئلہ استعمال کرو]

۲ ۔ اگر لا چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک جب لا}=\text{لوک لا}-\frac{\text{لا}^۲}{۶}-\frac{\text{لا}^۴}{۱۸۰}$$

۳ ۔ ثابت کرو کہ $\text{جبنز}(\text{بہ}-\text{جہ})+\text{جبنز}(\text{جہ}-\text{عہ})+\text{جبنز}(\text{عہ}-\text{بہ})$

$$=۴\ \text{جبنز}\frac{\text{بہ}-\text{جہ}}{۲}\ \text{جبنز}\frac{\text{جہ}-\text{عہ}}{۲}\ \text{جبنز}\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{۲}$$

۴ ۔ ثابت کرو کہ کسی زاویہ طہ کا توسی ناپ ایک مستقل مقدار اور ذیل کے دو سلسلوں میں سے ایک کے حاصل جمع کے مساوی ہے:

$$\text{مس طہ}-\frac{۱}{۳}\text{مس}^۳\text{طہ}+\frac{۱}{۵}\text{مس}^۵\text{طہ}-\dots\dots$$

$$-\text{مم طہ}+\frac{۱}{۳}\text{مم}^۳\text{طہ}-\frac{۱}{۵}\text{مم}^۵\text{طہ}+\dots\dots\dots\dots$$

دونوں صورتوں میں تمیز کرو اور ۴۹° ، ۲۰۰° کے زاویوں کے لئے مستقلوں کی مقدار معلوم کرو۔

۵ ۔ سلسلہ $۱-\frac{\text{لا}^۲}{۲!}+\frac{۳\,\text{لا}^۴}{۴!}-\frac{۵\,\text{لا}^۶}{۶!}+\dots\dots$ تا لاتناہی کو جمع کرو

۶ ۔ ثابت کرو کہ $\text{مز}^{-۱}\text{لا}=\frac{۱}{۲}\text{لوک}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}$

نیز مس$^{-1}$ لا کو لا کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ

۷ — ثابت کرو کہ

۱ / (۲ جم عہ −) ۱ / (۲ جم عہ −) ۱ / (۲ جم عہ − ...) ۱ / (۲ جم عہ + ق) = (جب ن عہ + ق جب (ن − ۱) عہ) / (جب (ن + ۱) عہ + ق جب ن عہ)

جہاں دائیں جانب کے خارج قسمتوں کی تعداد ن ہے۔ (استقراء کا طریقہ استعمال کرو)

۸ — ثابت کرو کہ ن حادہ زاویوں کی جیوب التمام کی ہندسی اوسط ان زاویوں کی حسابی اوسط کی جیب التمام سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی۔

۹ — ۸۸ + ۱۶ √(−۱) کے تمام جذر الکعب محسوب کرو، یہ معلوم ہے کہ جب مس ط = ۲ تو مس ۳ ط = ۲/۱۱

۱۰ — اگر لا گھٹتے گھٹتے صفر ہو جائے تو (قو$^{\text{جب لا}}$ − قو$^{\text{جب لا}}$ − ۲ مس لا) / (مس لا − لا) کی انتہائی قیمت معلوم کرو۔

۱۱ — ثابت کرو کہ

(۱) ۲ مس$^{-1}$ [√((ا − ب)/(ا + ب)) مس (لا/۲)] = جم$^{-1}$ ((ب + ا جم لا)/(ا + ب جم لا))

(۲) لوک ((√(ب + ا) + √(ب − ا) مس (لا/۲)) / (√(ب + ا) − √(ب − ا) مس (لا/۲))) = جمز$^{-1}$ ((ب + ا جم لا)/(ا + ب جم لا))

۱۲ — صفر سے π تک لا کی سب قیمتوں کے لئے سلسلہ

(۲/(۱×۳)) جب ۲ لا − (۴/(۳×۵)) جب ۴ لا + (۶/(۵×۷)) جب ۶ لا − ..... تا لا متناہی

کی قیمت معلوم کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

مس عہ مس ۲عہ + مس ۲عہ مس ۳عہ + مس ۳عہ مس ۴عہ ......

کی ن۔۱ رقموں کا حاصل جمع مس ن عہ مم ط۔ ن ہے۔

اس سے سلسلہ ۱×۲ + ۲×۳ + ۳×۴ + ...(ن۔۱) رقموں تک کا حاصل جمع مستنبط کرو۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ

$$\sqrt{۲} = \frac{۴ \times ۳۶ \times ۱۰۰ \times ۱۹۶ \times ۳۲۴ \times \cdots}{۳ \times ۳۵ \times ۹۹ \times ۱۹۵ \times ۳۲۳ \times \cdots}$$

اور

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۸ \times ۸۰ \times ۲۲۴ \times ۴۴۰ \times \cdots}{۹ \times ۸۱ \times ۲۲۵ \times ۴۴۱ \times \cdots}$$

[دفعہ ۱۲۳ کا جواب استعمال کرو]

۱۵۔ ایک جریب کے ذریعہ زمین کے ایک مثلث ٹکڑے کی پیمائش کرنے سے معلوم ہوا کہ اس کے اضلاع کے طول بالترتیب ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ جریب ہیں۔ لیکن جریب کے متواتر استعمال سے اس کا طول اصلی جریب کے طول سے بقدر ۲ فیصد کے زیادہ ہو گیا ہے۔ اگر ۱۰۰ جریب = ۶۶ فٹ تو بتاؤ کہ مثلث کے محسوبہ رقبہ میں کتنے مربع فٹ کی غلطی ہے

۱۶۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی دائرہ کا قطر بیرونی دائرہ کے نصف قطر سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔ [حصہ اول دفعہ ۲۰۸ کے نتیجہ صریح کو استعمال کرو]

۱۷۔ اگر لا = جم طہ + خ جب طہ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{۲ لا +}} + \frac{1}{\text{۲ لا +}} + \frac{1}{\text{۲ لا +}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{تا لا متناہی}$$

$$= \left(\text{جم ط} + \text{جم}^{۲}\text{ط}\right)^{\frac{1}{2}} - \text{جم ط} + \sqrt{-1}\left[\left(\text{جم ط} - \text{جم}^{۲}\text{ط}\right)^{\frac{1}{2}} - \text{جب ط}\right]$$

۱۸ — سنی لیس کا ضابطہ ثابت کرو یعنی یہ ثابت کرو کہ اگر لا چھوٹا ہو تو لا اور

$\dfrac{\text{۳ جب ۲ لا}}{\text{۲ (۲ + جم ۲ لا)}}$ کا فرق تقریباً $\dfrac{\text{۴ لا}^{۵}}{\text{۴۵}}$ ہوتا ہے۔

۱۹ — ثابت کرو کہ $\text{مس}^{-1}\left(\text{خ}\ \dfrac{\text{لا} - 1}{\text{لا} + 1}\right) = -\dfrac{\text{خ}}{۲}\ \text{لوک}\ \dfrac{1}{\text{لا}}$

۲۰ — سلسلہ $\dfrac{۷}{۱ \times ۳ \times ۵} + \dfrac{۱۹}{۵ \times ۷ \times ۹} + \dfrac{۳۱}{۹ \times ۱۱ \times ۱۳} + \cdots\cdots\cdots$ کا حاصل جمع لا متناہی تک محسوب کرو، اس میں شمار کنندے سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔
(دفعہ ۹۴ میں ط کو $\frac{\pi}{۴}$ کے مساوی رکھو)

۲۱ — سلسلہ $\dfrac{\text{جم ط}}{۱ \times ۲} + \dfrac{\text{جم ۲ ط}}{۲ \times ۳} + \dfrac{\text{جم ۳ ط}}{۳ \times ۴} + \cdots\cdots$ کا حاصل جمع لا متناہی تک معلوم کرو۔

۲۲ — سلسلہ $\text{مس ع} + ۲\ \text{مس ۲ ع} + ۲^{۲}\ \text{مس ۲}^{۲}\text{ع} + \cdots\cdots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۲۳ — $\dfrac{\text{جب ط}}{\text{۱ − جب ع جم ط}}$ کو ط کے اضعاف کی جیوب کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔

۲۴ — سلسلہ $\displaystyle\sum_{\text{ن} = -\infty}^{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{ا ن + ب}}{(\text{ن + ا})(\text{ن + ب})(\text{ن + ج})}$ کا حاصل جمع معلوم کرو۔
(اس کو کسور جزوی میں تحلیل کرو اور امثلہ ۲۱ مشق ۷ کے ربط سے کام لو)

۲۵۔ اگر جم طہ + جم فہ + جم سہ = ۰ اور جب طہ + جب فہ + جب سہ = ۰
تو ثابت کرو کہ جم ۳ طہ + جم ۳ فہ + جم ۳ سہ - ۳ جم (طہ + فہ + سہ) = ۰
اور جب ۳ طہ + جب ۳ فہ + جب ۳ سہ - ۳ جب (طہ + فہ + سہ) = ۰

۲۶۔ ثابت کرو کہ جس زاویہ کی جیب $\frac{۱}{۴}$ √۳ ہے اس کا اور دو قائموں کے ساتویں حصہ کا فرق ایک نیم قطری کے ہزارویں حصہ سے کم ہے۔

۲۷۔ ایک دائرہ کے قطعہ کا ارتفاع ف ہے اور اس کے وتر کا طول ج ہے ثابت کرو کہ اگر $\frac{\text{ف}}{\text{ج}}$ کی دوسری اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کر دیا جائے تو اس قطعہ کا رقبہ $\frac{۲}{۳}$ ف ج کے مساوی ہے۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ مساوات جبز لا = جبز عہ کے سب حل جملہ ن خ ۲ + (-۱)ن عہ میں شامل ہیں۔

۲۹۔ اگر لا ، ۰ اور ۲ ∏ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ۲ لا}}{۱ \times ۳} + \frac{\text{جب ۳ لا}}{۲ \times ۴} + \frac{\text{جب ۴ لا}}{۳ \times ۵} + \text{..... تا لا متناہی}$$

$$= \frac{۱}{۴}\ \text{جب لا} \left[۱ - ۴\ \text{لوک} \left(۲\ \text{جب}\ \frac{\text{لا}}{۲} \right) \right]$$

۳۰۔ اگر یہ معلوم ہو کہ مس (فہ + طہ) جم ۲ عہ = مس فہ تو ثابت کرو کہ
طہ = مس۲ عہ جب ۲ فہ + $\frac{۱}{۲}$ مس۴ عہ جب ۴ فہ + $\frac{۱}{۳}$ مس۶ عہ جب ۶ فہ + ...

۳۱۔ ایک مثلث کا رقبہ ذیل کی پیمائشوں کی بنا پر محسوب کیا گیا ہے:
ب = ۱۲۵ فٹ، ج = ۱۶۰ فٹ، ا = ۵۷° ۳۵′، انہی اجزا کی دوسری پیمائش کی رو سے ب = ۱۲۵٫۵ فٹ، ج = ۱۶۱ فٹ، ا = ۵۷° ۲۵′ بتاؤ کہ ان محصلہ رقبوں میں کتنے فیصد کا فرق ہے۔

۴۲ — جب (عہ – بہ) + جب (بہ – جہ) + جب (جہ – عہ) کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

[ایک مثلث ا ب ج کے بڑے سے بڑا رقبہ پر غور کرو جبکہ مثلث ایک ایسے دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے جسکا مرکز و ہے اور خطوط و ا، و ب، و ج ایک ثابت خط مستقیم کے ساتھ زاویے عہ، بہ، جہ بناتے ہیں]

۴۳ — مساواتِ متماثلہ $\frac{ا^{2}}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب^{2}}{(ب-ا)(ب-ج)} + \frac{ج^{2}}{(ج-ا)(ج-ب)} = 1$

سے ذیل کے متماثلات مستنبط کرو:۔

$\sum$ جم ۳ (عہ + طہ) جب (بہ – جہ)

= ۴ جم (۳ طہ + عہ + بہ + جہ) جب (بہ – جہ) جب (جہ – عہ) جب (عہ – بہ)

اور $\sum$ جب ۳ (عہ + طہ) جب (بہ – جہ)

= ۴ جب (۳ طہ + عہ + بہ + جہ) جب (بہ – جہ) جب (جہ – عہ) جب (عہ – بہ)

[ا = جم (۲ عہ + ۲ طہ) + خ جب (۲ عہ + ۲ طہ)، ...... رکھو]

۴۴ — ثابت کرو کہ مس لا – ۲۴ مس $\frac{لا}{2}$ اور ۴ جب لا – ۱۵ لا کا فرق ساتویں مرتبہ کی مقدار سے بھی کم ہے۔

۴۵ — اگر ایک مستدیر قوس کے وتر کا طول ا ہو اور اس قوس کے نصف کے وتر کا طول ب ہو تو ثابت کرو کہ قوس کا طول تقریباً $\frac{۸ ب - ا}{۳}$ ہے۔

اگر قوس مذکور کے ایک ربع کے وتر کا طول ج ہو تو ثابت کرو کہ قوس کے طول کی نسبتاً زیادہ صحیح قیمت $\frac{ا - ۴۰ ب + ۲۵۶ ج}{۴۵}$ ہوگی۔

اگر قوس ایک ربع ہو تو ثابت کرو کہ ان سے π کی قیمتیں بالترتیب اعشاریہ کے دوسرے اور پانچویں مقام تک صحیح نکلتی ہیں۔

۳۶ ۔ اگر لوک و لوک و (لا + خ ما) = ف + خ ق تو

ما = لا مس [مس ق لوک ر √(لا² + ما²)]

۳۷ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم ط} - \frac{\text{جم}^3\text{ط}}{\lfloor 3} + \frac{\text{جم}^5\text{ط}}{\lfloor 5} - \cdots}{1 - \frac{\text{جم}^2\text{ط}}{\lfloor 2} + \frac{\text{جم}^4\text{ط}}{\lfloor 4} - \cdots} = \frac{\text{جم ط} - \frac{\text{جم ۳ ط}}{\lfloor 3} + \frac{\text{جم ۵ ط}}{\lfloor 5} - \cdots}{1 - \frac{\text{جم ۲ ط}}{\lfloor 2} + \frac{\text{جم ۴ ط}}{\lfloor 4} - \cdots}$$

۳۸ ۔ سلسلہ جب ط قط ۳ ط + جب ۳ ط قط ۳² ط + جب ۳² ط قط ۳³ ط + ... تا ن رقوم کو جمع کرو ۔

۳۹ ۔ ایک مثلث ا ب ج میں اگر ب > ا تو ثابت کرو کہ

(۱) ب = $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ جب ج + $\frac{1}{2}$ $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ جب ۲ ج + $\frac{1}{3}$ $\frac{\text{ب}^3}{\text{ا}^3}$ جب ۳ ج + ...

اور (۲) $\frac{\text{ا}^{\text{ن}}}{\text{ج}^{\text{ن}}}$ جب ن ب = ن $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ جب ج + $\frac{\text{ن(ن+1)}}{\lfloor 2} \times \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ جب ۲ ج

+ $\frac{\text{ن(ن+1)(ن+2)}}{1\times 2\times 3} \times \frac{\text{ب}^3}{\text{ا}^3}$ جب ۳ ج + ...

۴۰ ۔ ایک مثلث کے اضلاع کے طول حسب پیمائش یہ ہیں : ا = ۲، ب = ۳، ج = ۴، بعد میں معلوم ہوا کہ ج کی پیمائش میں تھوڑی سی غلطی واقع ہوگئی ہے، بتاؤ کہ کونسا زاویہ بہ کمال صحت کے ساتھ معلوم ہوسکتا ہے ۔

۴۱ — مساوات متماثلہ

$$ا^2 \frac{(لا-ب)(لا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + ب^2 \frac{(لا-ج)(لا-ا)}{(ب-ج)(ب-ا)} + ج^2 \frac{(لا-ا)(لا-ب)}{(ج-ا)(ج-ب)} = لا^2$$

سے متماثلات $جم\,۲(طہ+عہ) \frac{جب(طہ-بہ)\ جب(طہ-جہ)}{جب(عہ-بہ)\ جب(عہ-جہ)}$ + دو متشابہ رقوم = جم ۴ طہ

اور $جب\,۲(طہ+عہ) \frac{جب(طہ-بہ)\ جب(طہ-جہ)}{جب(عہ-بہ)\ جب(عہ-جہ)}$ + دو متشابہ رقوم = جب ۴ طہ مستنبط کرو

۴۲ — اگر $مس(طہ-فہ) = \frac{د^2\ جب\ طہ\ جم\ طہ}{1 - د^2\ جب^2\ طہ}$ اور د بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$فہ = طہ - \frac{د^2}{2}\ جب\ ۲\ طہ - \frac{د^4}{8}(۲\ جب\ ۲\ طہ - جب\ ۴\ طہ) + \cdots\cdots$$

۴۳ — اگر $جم\left(\frac{\pi}{2}\ جب\ طہ\right) = جب\left(\frac{\pi}{2}\ جم\ طہ\right)$ تو ثابت کرو کہ طہ کی قیمتوں کے چار جوڑے جملہ

$$* \quad طہ = \left(۲م + \frac{3}{4}\right)\pi + خم\ لوک \frac{۴ن - ۱ + \sqrt{۱۶ن^2 - ۸ن - ۱}}{\sqrt{2}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں م اور ن کسی مثبت یا منفی صحیح عددوں کو تعبیر کرتے ہیں اور م صفر بھی ہوسکتا ہے۔

ن = ۰ کی صورت میں اس کا کیا حل ہوگا؟

۴۴ — سلسلہ $مس\ طہ\ مس^2 \frac{طہ}{2} + ۲\ مس \frac{طہ}{2}\ مس^2 \frac{طہ}{2^2}$

$+ 2^2\ مس \frac{طہ}{2^2}\ مس^2 \frac{طہ}{2^3} + \cdots\cdots$ کی ن رقموں کا حاصل

جمع معلوم کرو۔

۴۵ — اگر مم فہ = $\frac{۱}{لا}$ + مم طہ تو فہ کو ایک ایسے سلسلہ میں پھیلاؤ جو لا کی صعودی قوتوں پر مشتمل ہو۔

۴۶ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۱ \times ۲}{۴^۳} + \frac{۲ \times ۳}{۴^۵} + \frac{۳ \times ۴}{۴^۷} + \cdots\cdots \text{تا لا متناہی}$$

کا حاصل جمع $\frac{۴^۲(۱۲ - ۴^۲)}{۳۸۴}$ ہے۔ (دفعہ ۱۲۷ کو استعمال کرو)

۴۷ — کسر مسلسل مم طہ − $\frac{۲}{\text{مم ۲ طہ} - \frac{۲}{\text{مم ۲}^۲ \text{ طہ} - \cdots\cdots - \frac{۲}{\text{مم ۲}^{ن-۱} \text{ طہ} - \text{مس ۲}^{ن} \text{ طہ}}}}$

کی قیمت معلوم کرو۔

۴۸ — ثابت کرو کہ کسی مستوی مثلث کی صورت میں جملہ

مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب

کی قیمت ۰ اور ۹ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

(پہلے دکھاؤ کہ جملہ مذکور = ۱ + قط ا قط ب قط ج اور پھر دفعہ ۱۵۲ کا طریقہ استعمال کرو)

۴۹ — اگر جم ی = جم (ی + ا) جم △ + جب (ی + لا) جب △ جم ھ ہو جہاں ھ اور △ اس قدر چھوٹے ہیں کہ اُن کے کعبوں سے بڑی قوتیں نظر انداز ہو سکتی ہیں) تو ثابت کرو کہ

لا = △ جم ھ − $\frac{۱}{۲}$ △^{۲} مم ی جب^۲ ھ + $\frac{۱}{۳}$ △^{۳} جم ھ جب^۲ ھ

۵۰ — ثابت کرو کہ اگر

(۱ + خ مس عہ)$^{۱ + \text{خ مس بہ}}$

کی قیمتیں حقیقی ہوں تو ایک نسبت (قط عہ)$^{\text{قط}^۲ \text{بہ}}$ ہوگی۔

۵۱ — سلسلہ $\frac{\text{مم ۲ عہ}}{\text{۱ - جم}^2\text{ ۲ عہ قط}^2\text{ عہ}} + \frac{\text{مم ۳ عہ}}{\text{۱ - جم}^2\text{ ۳ عہ قط}^2\text{ عہ}} + \frac{\text{مم ۴ عہ}}{\text{۱ - جم}^2\text{ ۴ عہ قط}^2\text{ عہ}} + \dots$

... کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۵۲ — ثابت کرو کہ

$$\sqrt{\text{۱ + قم}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}} = (\text{۱ - قو}^{\text{خ طہ}})^{-\frac{1}{2}} + (\text{۱ - قو}^{\text{خ طہ}})^{-\frac{1}{2}}$$

اس سے $\frac{1}{2}\sqrt{\text{۱ + قم}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}}$ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی جیوب التمام میں معلوم کرو۔

۵۳ — ثابت کرو کہ $\frac{(\text{لا + ۱})^{2\text{ن}} + (\text{لا - ۱})^{2\text{ن}}}{\text{۲}} = \prod_{\text{ر = ۱}}^{\text{ر = ن}} \left[\text{لا}^2 + \text{مس}^2 \frac{(\text{۲ر - ۱})\pi}{\text{۴ ن}}\right]$

(دفعہ ۱۲۰ کا پہلا ضابطہ استعمال کرو)

۵۴ — سلسلہ $\frac{1}{1^2 \times 2^2} \times \frac{1}{2^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 4^2} + \dots\dots$ تا لامتناہی کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۵۵ — ثابت کرو کہ اُس بڑے سے بڑے مثلث کا رقبہ جس کا قاعدہ ب ہو اور جسکے اضلاع کی نسبت ر ہو $\frac{\text{ر ب}^2}{\text{۲ (ر}^2\text{ - ۱)}}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

۵۶ — ترسیم بنا کر ثابت کرو کہ مساوات جب لا = مس لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد لامتناہی ہوتی ہے اور بڑی مثبت اصلیں زوجوں پر مشتمل ہوتی ہیں جن میں سے ایک $(\text{۲ ث} + \frac{1}{2})\pi$ سے قدرے بڑی ہوتی ہے اور دوسری قدرے چھوٹی جہاں ث کسی بڑے مثبت صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔

۵۷ — ایک دائرہ کے اندر اور باہر ن اضلاع کے منتظم کثیر الاضلاع بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ن بہت بڑا ہو تو محیطوں کا اوسط لینے سے π کی جو تقریبی قیمت حاصل ہوتی ہے وہ اُس قیمت سے جو رقبوں کا اوسط لینے سے حاصل ہوتی ہے بقدر $\frac{\pi^3}{\text{۱۲ ن}^2}$ کے زیادہ صحیح ہے

۵۸ — ایک دائرہ کے اندر جسکا نصف قطر ا ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے۔ اس کثیر الاضلاع کے راسوں سے دائرہ کے ایک مماس پر عمود نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے متکافیوں کا حاصل جمع $\frac{\text{ن}^2}{2\,\text{ا}}$ قم^2 ن ط ہے جہاں ۲ ط اس زاویے کو تعبیر کرتا ہے جو نقطہ تماس میں سے گزرنے والا نصف قطر کثیر الاضلاع کے کسی راس الزاویہ میں سے گزرنے والے نصف قطر کے ساتھ بناتا ہے۔

۵۹ — ثابت کرو کہ $\dfrac{(\text{ا} + \text{خ ب})^{\text{ف} + \text{خ ق}}}{(\text{ا} - \text{خ ب})^{\text{ف} - \text{خ ق}}}$ کی قیمت خالص

جم ۲ (ف عہ + ق لوگ ر) + خ جب ۲ (ف عہ + ق لوگ ر) ہے

جہاں ر = $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ اور عہ = مس$^{-1}$ $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

۶۰ — سلسلہ قم ط + قم $\frac{\text{ط}}{2}$ + قم $\frac{\text{ط}}{2^2}$ + …… کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۶۱ — سلسلہ $\dfrac{1}{1 - \text{مسز عہ مسز ۲عہ}} + \dfrac{1}{1 - \text{مسز ۲عہ مسز ۳عہ}} + \dfrac{1}{1 - \text{مسز ۳عہ مسز ۴عہ}} + \cdots$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۶۲ — ثابت کرو کہ $\dfrac{\text{جب ط}}{1 - 2\,\text{ما} + \text{ما}^2\,\text{قط}^2\,\text{ط}} = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}=\infty} \text{ما}^{\text{ن}}\,\text{قط}^{\text{ن}}\,\text{ط جب}\,(\text{ن}+1)\,\text{ط}$

۶۳ — ثابت کرو کہ $\dfrac{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{25}+\frac{\pi^2}{4}\right)\cdots\cdots}{\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{36}+\frac{\pi^2}{4}\right)\cdots\cdots} = \dfrac{\text{ہو}^2+1}{\text{ہو}^2-1}$

۶۴ — ثابت کرو کہ

جب ط + جم ط $= \left(1+\frac{4\,\text{ط}}{\pi}\right)\left(1-\frac{4\,\text{ط}}{3\pi}\right)\left(1+\frac{4\,\text{ط}}{5\pi}\right)\left(1-\frac{4\,\text{ط}}{7\pi}\right)\cdots\cdots$

اور اس سے مستنبط کرو $۱ - \frac{۱}{۳^۳} + \frac{۱}{۵^۳} - \frac{۱}{۷^۳} + \dots\dots = \frac{\pi^۳}{۳۲}$

(اشارہ ۲۱ سوال ۱۳ میں ع = $\frac{\pi}{۴}$ رکھو، پھر لوکارثم لو اور طہ کی قوتوں کے سروں کو مساوی کرو)

۶۵ — ثابت کرو کہ جم$^۲ \frac{\pi}{۱۱}$ + جم$^۲ \frac{۲\pi}{۱۱}$ + جم$^۲ \frac{۳\pi}{۱۱}$ + جم$^۲ \frac{۴\pi}{۱۱}$ + جم$^۲ \frac{۵\pi}{۱۱} = \frac{۹}{۴}$

۶۶ — اگر لا = جب $\frac{\pi}{۹}$ تو ثابت کرو کہ لا مساوات

$$۶۴\,\text{لا}^۶ - ۹۶\,\text{لا}^۴ + ۳۶\,\text{لا}^۲ - ۳ = ۰$$

کی اصل ہے، مساوات کی باقی اصلیں دریافت کرو۔

۶۷ — ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{ما}^۶ - \text{ما}^۵ - ۶\,\text{ما}^۴ + ۶\,\text{ما}^۳ + ۸\,\text{ما}^۲ + ۱ = ۰$$

کی اصلیں ۲ جم $\frac{ر\pi}{۲۱}$ کی قیمتیں ہیں جبکہ ر کو ۲، ۴، ۸، ۱۰، ۱۶، ۲۰ میں سے کوئی قیمت دی جائے۔

۶۸ — اگر لا + خ ما = ب (جم ہ + خ جب ہ) (جم طہ + خ جب طہ)
+ ج (جم جہ − خ جب جہ) (جم طہ − خ جب طہ)

(جہاں ب، ہ، ج، جہ حقیقی مستقل ہیں اور لا، ما، طہ حقیقی متغیر ہیں) تو ثابت کرو کہ جیسے طہ بدلتا ہے نقطہ (لا، ما) ایک مخروطی کو مرتسم کرتا ہے۔

۶۹ — اگر ف = طہ − ۲د جب طہ + $\frac{۳د^۲}{۴}$ جب ۲ طہ − $\frac{د^۳}{۳}$ جب ۳ طہ تو ثابت کرو کہ

طہ = ف + ۲د جب ف + $\frac{۵د^۲}{۴}$ جب ۲ف + $\frac{د^۳}{۱۲}$ (۱۳ جب ۳ ف − ۳ جب ف)

جہاں د کی تیسری سے بڑی قوتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

۷۰ — ثابت کرو کہ اگر طہ کی پانچویں سے بڑی قوتیں نظر انداز کر دی جائیں تو

طہ = ۲ جب $\frac{\text{طہ}}{۸}$ + ۳ $\sqrt{(\text{جب طہ} - ۲\ \text{جب}\ \frac{\text{طہ}}{۸})^۲ + (۱ - \text{جم طہ})^۲}$

۷۱ — اگر ایک دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ا ہے ایک منتظم مسبع (سات ضلعوں کی شکل) بنایا جائے اور اس کے چار متصل راس ا، ب، ج، د ہوں تو ثابت کرو کہ

$$اج + اد - اب = \sqrt{۷}$$

۷۲ — ثابت کرو کہ

$$قط\,لا = ۱ + \frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{۵لا^{۴}}{\lfloor ۴} + \frac{۶۱لا^{۶}}{\lfloor ۶} + \frac{۱۳۸۵لا^{۸}}{\lfloor ۸} + \cdots\cdots$$

$$اور\ قط^{۳}لا = ۱ + \frac{۳لا^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{۳۳لا^{۴}}{\lfloor ۴} + \frac{۷۲۳لا^{۶}}{\lfloor ۶} + \cdots\cdots$$

۷۳ — اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$مم^{۲}\frac{۲π}{۲ن} + مم^{۲}\frac{۴π}{۲ن} + \cdots + مم^{۲}\frac{(ن-۱)π}{۲ن} = \frac{۱}{۶}(ن-۱)(ن-۲)$$

۷۴ — اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$مم^{۲}\frac{π}{۲ن} + مم^{۲}\frac{۳π}{۲ن} + \cdots + مم^{۲}\frac{(ن-۱)π}{۲ن} = \frac{۱}{۲}ن(ن-۱)$$

۷۵ — اگر ن کوئی جفت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو

$$قط^{۲}\frac{π}{۲ن} + قط^{۲}\frac{۵π}{۲ن} + قط^{۲}\frac{۹π}{۲ن} + \cdots + قط^{۲}\frac{(۲ن-۳)π}{۲ن} = \frac{ن^{۲}}{۲}$$

۷۶ — ثابت کرو کہ اگر ن طاق ہو تو $\sum_{ر=۰}^{ر=ن-۱} قط^{۲}\left(ع + \frac{۲رπ}{ن}\right)$

مساوی ہے $ن^{۲}\,قط^{۲}\,ن\,ع$ کے اور اگر ن جفت ہو تو یہ مساوی ہے

$$\frac{ن^{۲}}{۱ - (-۱)^{\frac{ن}{۲}}\,جم\,ن\,ع}\ کے۔$$

۷۷ — دفعہ ۵۲ کی مساوات (۴) میں $ن^{۳}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے

ثابت کرو کہ $\frac{1}{6}(\text{جب}^{-1}\text{لا})^3 = \frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}^3}{3} + \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{\text{لا}^5}{5}$

$$+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{\text{لا}^7}{7}+\ldots\ldots$$

۷۸ — مساوات جبز لا = ۳ لا کو ترسیمی طریق پر حل کرو اور اس سے تحلیلی طریق پر زیادہ صحیح طور پر تقریبی قیمت معلوم کرو۔

۷۹ — مساوات $\text{و}^{\text{لا}} = 3\,\text{لا}$ کو ترسیمی طریق پر حل کرو اور اس سے تحلیلی طریق پر جوابوں کی زیادہ صحیح تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

۸۰ — اگر مس $\frac{\text{لا}}{2}$ = مسز $\frac{\text{لا}}{2}$ تو ثابت کرو کہ جم لا جمز لا = ۱

ترسیم اور جدولوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ اس مساوات کی چھوٹی سے چھوٹی اصل تقریباً ۰۴۰، ۲۴۰ ہے، نیز دوسری اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

۸۱ — جب کعبی مساوات $\text{لا}^3 - 3\,\text{ف}\,\text{لا} + \text{ق} = 0$ کی دو اصلیں خیالی ہوں یعنی $\text{ق}^2 > 4\,\text{ف}^3$ تو ثابت کرو کہ (۱) اگر ف منفی ہو تو اصلیں

$$2\sqrt{-\text{ف}}\ \text{جبز ی}،\quad \sqrt{-\text{ف}}\left[-\text{جبز ی} \pm \text{خ}\sqrt{3}\ \text{جمز ی}\right] \text{ ہونگی}$$

$$\text{جہاں جبز } 3\,\text{ی} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ق}}{\left(\sqrt{-\text{ف}}\right)^3}$$

اور (۲) اگر ف مثبت ہو اور ق منفی ہو تو اصلیں

$$2\sqrt{\text{ف}}\ \text{جمز ی}،\quad \sqrt{\text{ف}}\left[-\text{جمز ی} \pm \text{خ}\sqrt{3}\ \text{جبز ی}\right] \text{ ہونگی}$$

$$\text{جہاں جمز } 3\,\text{ی} = -\frac{1}{2}\,\frac{\text{ق}}{\left(\sqrt{\text{ف}}\right)^3}$$

۸۲ — اگر $\text{لا}^{\text{لا}^{\ldots\text{تا لاانتہائی}}} = \text{ا}\,(\text{جم عہ} + \text{خ جب عہ})$

تو ثابت کرو کہ لا کی قیمت عامہ ر (جم طہ + خ جب طہ) ہے

$$\text{جہاں لوک ر} = \frac{(2\,\text{ن}\,\pi + \text{عہ})\ \text{جب طہ} + \text{لوک ا جم طہ}}{\text{ا}}$$

اور $\text{ط} = \dfrac{(\text{۲ن}\pi + \text{عہ})\ \text{جم عہ} - \text{لوک ا جب عہ}}{\text{و}}$

۸۳ — استدلال ذیل کی غلطی معلوم کرو

$$\text{و}^{\text{ط}} = \left(\text{و}^{\text{خ ط}}\right)^{\text{خ}} = \left[\text{و}^{\text{خ}(\text{ط} - \text{۲}\pi)}\right]^{\text{خ}} = \text{و}^{\text{ط} - \text{۲}\pi}$$

۸۴ — $\dfrac{\text{۱}}{\text{عہ}} = (\text{۲ن} + \text{۱})\dfrac{\pi}{\text{۲}}$ جہاں ن کی قیمت کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ مساوات مس لا = لا کے حل تقریباً $\pm\left(\dfrac{\text{۱}}{\text{عہ}} - \text{عہ} - \dfrac{\text{۲}}{\text{۳}}\text{عہ}^{\text{۳}}\right)$

۸۵ — ثابت کرو کہ $\dfrac{\text{۱}}{\text{۱}\times\text{۳}} - \dfrac{\text{۱}}{\text{۳}\times\text{۵}} + \dfrac{\text{۱}}{\text{۵}\times\text{۷}} - \dfrac{\text{۱}}{\text{۷}\times\text{۹}} + \cdots = \dfrac{\pi - \text{۲}}{\text{۴}}$

اور $\dfrac{\text{۱}}{\text{۳}\times\text{۵}} - \dfrac{\text{۱}}{\text{۷}\times\text{۹}} + \dfrac{\text{۱}}{\text{۱۱}\times\text{۱۳}} - \dfrac{\text{۱}}{\text{۱۵}\times\text{۱۷}} + \cdots = \dfrac{\pi\sqrt{\text{۲}} - \text{۴}}{\text{۸}}$

[دوسرے حصہ کے لئے لوک $\dfrac{\text{۱}+\text{لا}}{\text{۱}-\text{لا}}$ کی تفصیل میں لا کی بجائے خ ا؍خ $\dfrac{\text{خ}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}$ رکھو]

ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع ن رقموں تک معلوم کرو

۸۶ — $\dfrac{\text{جب ۳ عہ}}{\text{جم ۲ عہ جم ۴ عہ}} + \dfrac{\text{جب ۵ عہ}}{\text{جم ۴ عہ جم ۶ عہ}} + \dfrac{\text{جب ۷ عہ}}{\text{جم ۶ عہ جم ۸ عہ}} + \cdots\cdots$

۸۷ — $\dfrac{\text{مس}^{\text{۳}}\text{ط}}{\text{۱} - \text{۳ مس}^{\text{۲}}\text{ط}} + \dfrac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\dfrac{\text{مس}^{\text{۳}}\text{ ۳ ط}}{\text{۱} - \text{۳ مس}^{\text{۲}}\text{ ۳ ط}} + \dfrac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲}}}\,\dfrac{\text{مس}^{\text{۳}}\text{ ۳}^{\text{۲}}\text{ط}}{\text{۱} - \text{۳ مس}^{\text{۲}}\text{ ۳}^{\text{۲}}\text{ط}} + \cdots\cdots$

۸۸ — $\dfrac{\text{۱} + \text{۲ جم ۲ عہ}}{\text{جب ۴ عہ}} + \dfrac{\text{۱} + \text{۲ جم ۴ عہ}}{\text{جب ۸ عہ}} + \dfrac{\text{۱} + \text{۲ جم ۸ عہ}}{\text{جب ۱۶ عہ}}$

۸۹ — $\text{۲ جم}\dfrac{\text{ط}}{\text{۲}} + \text{۲}^{\text{۲}}\text{ جم}\dfrac{\text{ط}}{\text{۲}}\text{ جم}\dfrac{\text{ط}}{\text{۲}^{\text{۲}}} + \text{۲}^{\text{۳}}\text{ جم}\dfrac{\text{ط}}{\text{۲}}\text{ جم}\dfrac{\text{ط}}{\text{۲}^{\text{۲}}}\text{ جم}\dfrac{\text{ط}}{\text{۲}^{\text{۳}}} + \cdots\cdots$

۹۰ — $\dfrac{\text{۲ جم ط} - \text{جم ۳ ط}}{\text{جب ۳ ط}} + \text{۳}\,\dfrac{\text{۲ جم ۳ ط} - \text{جم ۳}^{\text{۲}}\text{ط}}{\text{جب ۳}^{\text{۲}}\text{ط}} + \cdots + \text{۳}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\dfrac{\text{۲ جم ۳}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{ط} - \text{جم ۳}^{\text{ن}}\text{ط}}{\text{جب ۳}^{\text{ن}}\text{ط}}$

۹۱ — $\dfrac{\text{۳ جب لا} - \text{جب ۳ لا}}{\text{جم ۳ لا}} + \dfrac{\text{۳ جب ۳ لا} - \text{جب ۳}^{\text{۲}}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{۲}}\text{لا}} + \cdots + \dfrac{\text{۳ جب ۳}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{لا} - \text{جب ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}{\text{۳}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{ جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$

۹۲ — $\frac{\text{جب عہ}}{\text{جم ۲ عہ}} + \frac{\text{جب ۳ عہ}}{\text{جم ۲ عہ جم ۴ عہ}} + \frac{\text{جب ۵ عہ}}{\text{جم ۴ عہ جم ۶ عہ}} + \ldots\ldots$

۹۳ — $\frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ} - \text{جم ۲ طہ}} + \frac{\text{جب ۳ طہ}}{\text{جم ۳ طہ} - \text{جم ۶ طہ}} + \frac{\text{جب ۹ طہ}}{\text{جم ۹ طہ} - \text{جم ۱۸ طہ}} + \ldots\ldots$

۹۴ — $\frac{\text{جب ۳ لا}}{\text{جب لا جب}^{۲}\,\text{۲ لا}} + \frac{\text{جب ۶ لا}}{\text{جب ۲ لا جب}^{۲}\,\text{۴ لا}} + \frac{\text{جب ۱۲ لا}}{\text{جب ۴ لا جب}^{۲}\,\text{۸ لا}} + \ldots\ldots$

۹۵ — $\frac{۱}{۲}\,\text{مس ۲ طہ مس}^{۲}\,\text{طہ} + \frac{۱}{۲^{۲}}\,\text{مس}\,۲^{۲}\,\text{طہ مس}^{۲}\,\text{۲ طہ} + \ldots\ldots$

$\ldots + \frac{۱}{۲^{ر}}\,\text{مس}\,۲^{ر}\,\text{طہ مس}^{۲}\,۲^{ر-۱}\,\text{طہ} + \ldots\ldots$

۹۶ — $\text{مس}^{-۱}\,\frac{۱۲}{۳۱} + \text{مس}^{-۱}\,\frac{۱۲}{۱۳۹} + \ldots + \text{مس}^{-۱}\,\frac{۱۲}{۳۶\,ر^{۲} - ۵} + \ldots\ldots$

۹۷ — $\text{مس}^{-۱}\,\frac{۴}{۷} + \text{مس}^{-۱}\,\frac{۴}{۱۹} + \ldots + \text{مس}^{-۱}\,\frac{۴}{۴\,ر^{۲} + ۳} + \ldots\ldots$

۹۸ — $\text{مس}^{-۱}\,\text{لا} + \text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}}{۱ - ۱\times۲\,\text{لا}^{۲}} + \text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}}{۱ - ۲\times۳\,\text{لا}^{۲}} + \ldots\ldots$

۹۹ — $\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا جب طہ}}{۱ + \text{لا جم طہ}} + \text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}^{۲}\,\text{جب ۲ طہ}}{۱ + \text{لا}^{۲}\,\text{جم ۲ طہ}} + \text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}^{۴}\,\text{جب ۴ طہ}}{۱ + \text{لا}^{۴}\,\text{جم ۴ طہ}}$

$+ \text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}^{۸}\,\text{جب ۸ طہ}}{۱ + \text{لا}^{۸}\,\text{جم ۸ طہ}} + \ldots\ldots$

۱۰۰ — $\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۲} + ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۴} + \ldots + ۲^{ن-۱}\,\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۴}\,\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۸}\ldots\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۲^{ن}}$

۱۰۱ — $\frac{۱}{۲}\,\text{قم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\,\text{مم}\,\frac{\text{طہ}}{۲} + \frac{۱}{۲^{۲}}\,\text{قم}\,\frac{\text{طہ}}{۲^{۲}}\,\text{مم}\,\frac{\text{طہ}}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۲^{۳}}\,\text{قم}\,\frac{\text{طہ}}{۲^{۳}}\,\text{مم}\,\frac{\text{طہ}}{۲^{۳}} + \ldots\ldots$

۱۰۲ — ایک سلسلہ کی ر ویں رقم $\frac{۱}{۲^{ر}}\,\text{جم ر طہ مس}^{ر}\,\text{طہ}$ ہے، اس سلسلہ کا حاصل جمع لا تناہی تک معلوم کرو۔

۱۰۳ ثابت کرو کہ

$$\text{ط} - \text{جب ط جم ط} = ۲\,\text{جب ط جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲} + ۲^{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{۲}\,\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲^{۲}} + ۲^{۳}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{۲^{۲}}\,\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲^{۳}} + \ldots\ldots \text{تا لا متناہی}$$

۱۰۴۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\infty} \frac{\text{مس}\dfrac{\text{ط}}{۲^{\text{ن}}}}{۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم}\dfrac{\text{ط}}{۲^{\text{ن}-۱}}} = \frac{۲}{\text{جب ۲ط}} - \frac{۱}{\text{ط}}$$

۱۰۵۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi}{۴} = \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۳} + \text{مس}^{-۱}\frac{۲}{۹} + \text{مس}^{-۱}\frac{۴}{۳۳} + \text{مس}^{-۱}\frac{۸}{۱۲۹} + \ldots\ldots \text{تا لا متناہی}$$

اور

$$\frac{\pi}{۴} = \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۳} + \text{مس}^{-۱}\frac{۲}{۹} + \text{مس}^{-۱}\frac{۴}{۳۳} + \text{مس}^{-۱}\frac{۸}{۱۲۹} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۱۶}$$

۱۰۶۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\infty} \text{مس}^{-۱}\left(\frac{۲}{\text{ن}^{۲}}\right) = \frac{۳\pi}{۴}$$

۱۰۷۔ ثابت کرو کہ $\text{مم}^{-۱}۲ + \text{مم}^{-۱}۸ + \text{مم}^{-۱}۱۸ + \text{مم}^{-۱}۳۲ + \ldots\ldots \text{تا لا متناہی} = \frac{\pi}{۴}$

۱۰۸۔ سلسلہ لا متناہی $۱ + \frac{۲}{\underline{|۳}}\,\text{لا}^{۳} + \frac{۷}{\underline{|۶}}\,\text{لا}^{۶} + \frac{۱۰}{\underline{|۹}}\,\text{لا}^{۹} + \ldots\ldots$ کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۰۹۔ ثابت کرو کہ $\text{لا} + \frac{\text{لا}^{۷}}{۷} + \frac{\text{لا}^{۱۳}}{۱۳} + \frac{\text{لا}^{۱۹}}{۱۹} + \ldots\ldots \text{تا لا متناہی}$

$$= \frac{۱}{۱۲}\,\text{لوک}\frac{(۱+\text{لا})^{۲}(۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲})}{(۱-\text{لا})^{۲}(۱-\text{لا}+\text{لا}^{۲})} + \frac{\sqrt{۳}}{۶}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۱-\text{لا}^{۲}}$$

۱۱۰۔ سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۷} - \frac{۱}{۲۳} + \frac{۱}{۲۵} - \ldots\ldots \text{تا لا متناہی}$

کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۱۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱^{۴}\times ۳^{۴}} + \frac{۱}{۳^{۴}\times ۵^{۴}} + \frac{۱}{۵^{۴}\times ۷^{۴}} + \ldots\ldots \text{تا لا متناہی}$

$$= \frac{\pi^{۴} + ۳۰\pi^{۲} - ۳۸۴}{۷۶۸}$$

۱۱۲ — ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{1}{1+4^2}+\frac{1}{1+8^2}+\frac{1}{1+12^2}+\frac{1}{1+16^2}+\ldots\ldots$ تا لاتناہی

$=\frac{\pi}{8}\ \text{مز}\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

اور (۲) $\frac{1}{2^4-1}+\frac{1}{4^4-1}+\frac{1}{6^4-1}+\ldots\ldots$ تا لاتناہی

$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\ \text{مز}\ \frac{\pi}{2}$

(اشلہ ۱۲ مشق ۷ کا جواب استعمال کرو)

۱۱۳ — ثابت کرو کہ $\frac{1}{1^2+\text{لا}^2}-\frac{3}{3^2+\text{لا}^2}+\frac{5}{5^2+\text{لا}^2}-\ldots\ldots$ تا لاتناہی

$=\frac{\pi}{4}\ \text{قطز}\ \frac{\pi\,\text{لا}}{2}$

اور $\frac{1}{1^2+\text{لا}^2}+\frac{3}{3^2+\text{لا}^2}-\frac{5}{5^2+\text{لا}^2}-\frac{7}{7^2+\text{لا}^2}+\ldots\ldots$ تا لاتناہی

$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ \text{جمز}\ \frac{\pi\,\text{لا}}{4}\ \ \text{قطز}\ \frac{\pi\,\text{لا}}{2}$

(اشلہ ۱۲ مشق ۹ میں ط کی بجائے $\frac{\pi}{4}-\frac{\text{ط}}{2}$ اور $\frac{\pi}{4}+\frac{\text{ط}}{2}$ رکھو)

۱۱۴ — اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(1+\text{لا})^{\text{ن}}-(1-\text{لا})^{\text{ن}}}{2\,\text{لا}}=\text{ن}\prod_{\text{ر}=1}^{\frac{\text{ن}}{2}-1}\left(\text{لا}^2+\text{مس}^2\frac{\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}\right)$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$\text{مس}\frac{\pi}{2\text{ن}}\ \text{مس}\frac{2\pi}{2\text{ن}}\ \text{مس}\frac{3\pi}{2\text{ن}}\ \ldots\ldots\ \text{مس}\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}=1$$

۱۱۵ — ثابت کرو کہ $\frac{(1+\text{لا}^{\text{ن}})-(1-\text{لا}^{\text{ن}})}{2\,\text{لا}}$

$$=\left(\text{لا}^2+\text{مس}^2\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}^2+\text{مس}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\ldots\left(\text{لا}^2+\text{مس}^2\frac{\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}\right)$$

جہاں ر = ½ (ن - ۱) اور ن طاق ہے -

۱۱۶ - ثابت کروکہ لامتناہی حاصل ضرب $\frac{۱ + \frac{۱}{۱۲}}{۱ + \frac{۱}{۱ \times ۲}} \times \frac{۱ + \frac{۱}{۲۴}}{۱ + \frac{۱}{۲ \times ۳}} \times \frac{۱ + \frac{۱}{۴۳}}{۱ + \frac{۱}{۳ \times ۴}} \times \ldots$

مساوی ہے قطز (½ ۱۱ ۳‾) جیب ۱۱

۱۱۷ - اگر عہ، بہ، جہ ...... اعدادِ مفرد ۲، ۳، ۵ ...... کو تعبیر کریں

تو $\frac{عہ^۲ - عہ^{-۲}}{عہ^۲ + ۱ - عہ^{-۲}} \times \frac{بہ^۲ - بہ^{-۲}}{بہ^۲ + ۱ - بہ^{-۲}}$ ..... تا لامتناہی = $\frac{۴}{۲}$

۱۱۸ - ن اضلاع کے دو منتظم کثیر الاضلاع ا، ا، .... ان اور ب، ب، ... بن ایک ہی دائرہ کے اندر بنائے گئے ہیں جس کا نصف قطر ا ہے، ثابت کروکہ

$\prod (ار بس) = ۲^ن ا^ن جب^ن \frac{ن طہ}{۲}$

جہاں ر اور س کو ۱ سے ن تک سب قیمتیں دی جائیں اور طہ اُس زاویہ کو تعبیر کرے جو دو اشکال مذکورہ بالا میں سے ہر ایک کے ایک رأس الزاویہ کو مرکز دائرہ سے وصل کرنے والے نصف قطروں کے درمیان بنتا ہے۔

۱۱۹ - ا ب ج د ....، ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے جو نصف قطر ا کے ایک دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے، دائرہ کا مرکز و ہے۔ ثابت کروکہ اُن زوایا کا حاصل جمع جو اق، ب ق، ج ق، ..... وغیرہ و ق کے ساتھ بناتے ہیں

$مس^{-۱} \frac{ا^ن جب ن طہ}{ا^ن جم ن طہ - ر^ن}$

ہے، جہاں و ق = ر اور ∠ ا و ق = طہ

(دفعہ ۱۱۹ کی مانند لا^ن - ا^ن جم ن طہ + خ ا^ن جب ن طہ کو اس کے خطی اجزائے

ضربی میں تحلیل کرو اور امثلہ ہذا کی پہلی مشق کے مسئلہ کے مطابق عمل کرو)

۱۲۰- ایک دائرہ کے مماس پر نقطۂ تماس ب سے مساوی فاصلے ب ب۱، ب ب۲،..... ناپے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ دائرہ کے قطر کے مساوی ہے، ان فاصلوں کے وسطی نقاط ج۱، ج۲..... ہیں، نقطہ تماس ب میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے ا کو نقاط ب۱، ب۲،..... ج۱، ج۲..... سے وصل کیا گیا ہے اور یہ خط دائرہ سے بالترتیب نقاط بَ۱، بَ۲، بَ۳،..... جَ۱، جَ۲،..... پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اوتار ب بَ۱، ب بَ۲..... کے حاصل ضرب کی نسبت ب جَ۱، ب جَ۲،..... کے حاصل ضرب کے ساتھ $\sqrt{\text{م} \text{ممز} \pi} : 1$ ہے۔

۱۲۱- ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}(\text{مسز} \text{ما} \text{مم} \text{لا}) = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \sum_{1}^{\infty} \text{مس}^{-1}\frac{2\,\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ن}^2\pi^2 - \text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

دو نقاط ن اور ق کا باہمی فاصلہ ۲ ف کے مساوی ہے اور یہ دونوں نقطے ایک خط مستقیم سے مساوی فاصلوں ج پر واقع ہیں۔ اس خط مستقیم پر لامتناہی نقطوں کا ایک ایسا سلسلہ واقع ہے کہ ان نقطوں کا باہمی فاصلہ ا ہے اور نقاط ن اور ق ان میں سے ایک نقطہ سے متساوی الفصل ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان زاویوں کا مجموعہ جو ن ق کے محاذی سلسلہ بالا کے ہر ایک نقطہ پر بنتا ہے ط ہو تو

$$\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2} = \text{مس}\,\frac{\pi\,\text{ف}}{\text{ا}}\,\text{ممز}\,\frac{\pi\,\text{ج}}{\text{ا}}$$

(دفعہ ۱۲۲ کے مطابق حبب (لا + خ ما) کے اجزائے ضربی لو اور امثلہ ہذا کی مشق اول کا مسئلہ لگاؤ)

۱۲۲ — ثابت کرو کہ $\prod_{ن=۱}^{ن=\infty}\left[۱-\dfrac{۱}{ن^{۲}+ن^{۴}}\right]=\dfrac{جمز\,\pi - جم\,\pi\sqrt{۳}}{جمز\,\pi\sqrt{۲}-جم\,\pi\sqrt{۲}}$

(دفعہ ۱۳۰ کی مساوات (۲) میں ۲ ع = π اور ۲ ط = $\pi\sqrt{۳}$ رکھو، پھر ۲ ع = $\pi\sqrt{۲}$ اور ۲ ط = $\pi\sqrt{۲}$ رکھو، ایک جواب کو دوسرے جواب پر تقسیم کرو)

۱۲۳ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$مس^{-۱}ن^{۲} + مس^{-۱}\frac{ن^{۲}}{۲^{۲}} + مس^{-۱}\frac{ن^{۲}}{۳^{۲}} + \ldots\ldots$$

کا حاصل جمع $مس^{-۱}\dfrac{مس\,ع - مسز\,ع}{مس\,ع + مسز\,ع}$ ہے جہاں ع = $\dfrac{ن\,\pi}{\sqrt{۲}}$

(دفعہ ۱۲۲ کے نتیجہ سے شروع کرو اور ط = ن $\pi\sqrt{-۱}$ رکھو)

۱۲۴ — ثابت کرو کہ

$$مس^{-۱}ن^{۲} + مس^{-۱}\frac{ن^{۲}}{۳^{۲}} + مس^{-۱}\frac{ن^{۲}}{۵^{۲}} + \ldots\ldots \text{لا متناہی} = مس^{-۱}(مس\,ط\,مسط$$

جہاں ط = $\dfrac{ن\,\pi}{۲\sqrt{۲}}$

۱۲۵ — ثابت کرو کہ $مس^{-۱}(مم\,ط\,ممز\,فہ) + مس^{-۱}\left[مم\left(ط+\dfrac{\pi}{ن}\right)ممز\,فہ\right]$

$+ مس^{-۱}\left[مم\left(ط+\dfrac{۲\pi}{ن}\right)ممز\,فہ\right] + \ldots\ldots$ ن رقوم

کا حاصل جمع $مس^{-۱}$(مم ن ط ممز ن فہ) ہے۔ اگر ن طاق ہو اور

$مس^{-۱}$(مم ن ط مسز ن فہ) ہے اگر ن جفت ہو

(امثلہ ۲۰ مشق ۱۲ کے نتیجہ کو استعمال کرو)

۱۲۶ — سلسلہ $مس^{-۱}\dfrac{۱}{۱^{۲}} + مس^{-۱}\dfrac{۱}{۲^{۲}} + مس^{-۱}\dfrac{۱}{۳^{۲}} + \ldots\ldots$ لا متناہی

کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(دفعہ ۱۳۰ کی مساوات (۲) سے شروع کرو اور ۲ عہ = ۲ طہ = ۲ ماس$^{-1}$ خ رکھو)

۱۲۷۔ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ لا - مس$^{-1}$ $\frac{۱}{۳}$ لا + مس$^{-1}$ $\frac{۱}{۵}$ لا - ..... تا لا متناہی = مس$^{-1}$ (مسنر $\frac{\text{ط} \, \text{لا}}{۲}$)

(امثلہ ۱۲ کی مشق ۱۳ میں عہ = $\frac{\text{ط}}{۴}$ اور طہ = $\frac{\text{ط} \, \text{لاخ}}{۴}$ رکھو)

۱۲۸۔ اگر لا کوئی مثبت کسر ہو اور مس$^{-1}$ ما اُس چھوٹے سے چھوٹے مثبت زاویہ کو تعبیر کرے جس کا مماس ما ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ر}=۰}^{\infty} (-۱)^{\text{ر}} \text{مس}^{-1} \frac{(۲\text{ر}+۱)\,\text{لا}}{(۲\text{ر}+۱)^۲ - \text{لا}^۲} = \text{مس}^{-1} \left[\text{جبنر} \frac{\text{ط} \, \text{لا}}{۴} \, \text{قط} \frac{\text{ط} \, \text{لا}}{۴} \, \text{ما}^{-1} \frac{\text{ط لا}}{۴} \right]$$

۱۲۹۔ اگر مثلث ا ب ج کے زاویے حادہ ہوں تو ثابت کرو کہ

جب ا + جب ب + جب ج > جم ا + جم ب + جم ج

۱۳۰۔ ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے داخلی منصف مقابل کے اضلاع سے نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا رقبہ مثلث ا ب ج کے رقبہ کے ایک چوتھائی سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

۱۳۱۔ اگر بہ کی قیمت صفر اور $\frac{\text{ط}}{۲}$ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ اگر طہ صفر سے بڑھکر بہ ہو جائے تو جملہ بہ جب طہ - طہ جب بہ کی قیمت پہلے بالتسلسل بڑھتی ہے اور پھر بالتسلسل گھٹتی ہے۔

۱۳۲۔ ثابت کرو کہ مقطعہ

جم طہ	۱	۰	......	۰	
۱	۲جم طہ	۱	......	۰	
۰	۱	۲جم طہ	۱	۰	
......	......	......	......	......	
۰	......	۱	۲جم طہ	۱	
۰	......	.....	۰	۱	۲جم طہ

کی قیمت جو ن ستونوں اور ن قطاروں پر مشتمل ہے جم ن طہ کے مساوی ہے
۱۳۳ - ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{۱}{۲\,\text{مس عہ} +}\ \frac{۱}{۲\,\text{مس عہ} +}\ \frac{۱}{۲\,\text{مس عہ} +}\ \ldots\ldots$$

کا ن واں متدق $\dfrac{(\text{مس عہ} + \text{قط عہ})^{ن} - (\text{مس عہ} - \text{قط عہ})^{ن}}{(\text{مس عہ} + \text{قط عہ})^{ن+۱} - (\text{مس عہ} - \text{قط عہ})^{ن+۱}}$ ہے
۱۳۴ - ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{\text{قط}^{۲}\,\text{عہ}}{۲ - ۲\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ} -}\ \frac{\text{قط}^{۲}\,\text{عہ}}{۲ - ۲\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ} -}\ \frac{\text{قط}^{۲}\,\text{عہ}}{۲ - ۲\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ} -}\ \ldots\ldots$$

کا ن واں متدق $\dfrac{\text{جب ۲ ن عہ}}{\text{جم}^{۲}\,\text{عہ جب (۲ ن + ۲) عہ}}$ ہے -
۱۳۵ - ثابت کرو کہ ذیل کی کسر مسلسل کی قیمت

$$\frac{\text{قط}^{۲}\,\text{عہ}}{۴ -}\ \frac{\text{قط}^{۲}\,\text{عہ}}{۱ -}\ \frac{\text{قط}^{۲}\,\text{عہ}}{۴ -}\ \frac{\text{قط}^{۲}\,\text{عہ}}{۱ -}\ \ldots\ldots$$ ر خارج قسمتوں تک

$$\frac{\text{جب ر عہ}}{۲\,\text{جب (ر + ۱) عہ جم عہ}}$$ ہے -
۱۳۶ - ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} = \frac{۱}{۱ -}\ \frac{\text{طہ}^{۲}}{۳ -}\ \frac{\text{طہ}^{۲}}{۵ -}\ \ldots\ldots$$

(ذیل کے سوالوں میں احصائے تفرقات سے کام لینے میں بہت آسانی ہوگی)

۱۳۷- ثابت کرو کہ $\text{مم}^{۳}\,\text{فہ} + \text{مم}^{۳}\left(\text{فہ} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right) + \text{مم}^{۳}\left(\text{فہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right) + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

$$= \text{ن}^{۳}\,\text{قم}^{۲}\,\text{ن فہ مم ن فہ} - \text{ن مم ن فہ}$$

(اشلہ ۹ مشق ۶ کے جواب کو دو دفعہ تفرق کرو)

۱۳۸- ایک متساوی الساقین مثلث کے دو مساوی اضلاع کا طول دیا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اندرونی دائرہ کا نصف قطر بڑے سے بڑا ہو تو مساوی اضلاع کے درمیانی زاویہ کی قیمت قریب ترین درجہ تک ۷۶° کے مساوی ہوگی۔

۱۳۹- سلسلہ $\text{قط}^{۲}\,\text{لا} + \frac{۱}{۴}\,\text{قط}^{۲}\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{۱}{۴^{۲}}\,\text{قط}^{۲}\frac{\text{لا}}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۴^{۳}}\,\text{قط}^{۲}\frac{\text{لا}}{۲^{۳}} + \cdots\cdots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۴۰- سلسلہ $\text{جم طہ} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{جم}^{۳}\,\text{طہ}}{۳} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}\,\frac{\text{جم}^{۵}\,\text{طہ}}{۵} + \cdots\cdots$ تا لا متناہی کو جمع کرو۔

۱۴۱- $\dfrac{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}{\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن طہ} + ۱}$ کو ن ایسے کسور جزوی کے حاصل جمع کی شکل میں لکھو جن میں سے ہر ایک کا نسب نما لا میں درجہ دوم کا ایک جملہ ہو۔

۱۴۲- ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم لا}}{\text{جب}^{۳}\,\text{لا}} = \frac{۱}{\text{لا}^{۳}} + \frac{۱}{(\text{لا}+\pi)^{۳}} + \frac{۱}{(\text{لا}-\pi)^{۳}} + \frac{۱}{(\text{لا}+۲\pi)^{۳}} + \frac{۱}{(\text{لا}-۲\pi)^{۳}} + \cdots\cdots$$

(اشلہ ۲۱ مشق ۱۱ کے جواب کو تفرق کرو)

۱۴۳- ایک لا متناہی طول کا خط نقطوں کی ایک لا متناہی تعداد سے ایسے حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن میں سے ہر ایک حصہ کا طول ا ہے، اس خط پر ایک اور نقطہ و کہیں لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ و سے جو فاصلے نقاط تقسیم سے ہیں اُن کے متکافیوں کی چوتھی قوتوں کا مجموعہ

$$\frac{\pi^{۳}}{\text{۳}\,\text{و}^{۳}}\left(\text{۳ قم}^{۲}\,\frac{\pi\,\text{ب}}{\text{و}} - \text{۲ قم}^{۲}\,\frac{\pi\,\text{ب}}{\text{و}}\right) \quad \text{ہے۔}$$

(اشلہ ۲۱ مشق ۱۱ کے جواب کو دو مرتبہ تفرق کرو)

۱۴۴ - ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\infty} \frac{۱}{\text{ن}^{۴}+\text{لا}^{۴}} = \frac{\pi\sqrt{۲}}{\text{۴ لا}^{۳}} \times \frac{\text{جبز}\,\pi\,\text{لا}\sqrt{۲} + \text{جب}\,\pi\,\text{لا}\sqrt{۲}}{\text{جبز}\,\pi\,\text{لا}\sqrt{۲} - \text{جم}\,\pi\,\text{لا}} - \frac{۱}{\text{۲ لا}^{۴}}$$

(دفعہ ۱۴۰ کی مساوات (۲) میں ۲ عہ = ۲ طہ = π لا $\sqrt{۲}$ رکھو پھر لوگارتھم لیکر طہ کے لحاظ سے تفرق کرو)

جوابات

حصۂ دوم

۱ صفحہ ۱۳

۸— لوک و۲ ۹— لوک و۳ - لو ...

۲ صفحہ ۳۳

۱— $\sqrt{2}\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{4} + \text{خ}\ \text{جب}\,\frac{\pi}{4}\right)$

۲— $\sqrt{2}\left[\text{جم}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \text{خ}\ \text{جب}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

۳— $2\left[\text{جم}\,\frac{5\pi}{6} + \text{خ}\ \text{جب}\,\frac{5\pi}{6}\right]$

۴— $5\left[\frac{3}{5} + \text{خ}\,\frac{4}{5}\right]$

۵— $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} + \text{خ}\,\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right]$

۶— $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\left[\text{جم}\,\frac{5\pi}{12} + \text{خ}\ \text{جب}\,\frac{5\pi}{12}\right]$

۷— $\text{جم}\,(10\,\text{طہ} + 12\,\text{عہ}) - \text{خ}\ \text{جب}\,(10\,\text{طہ} + 12\,\text{عہ})$

۸— $\text{جم}\,(\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{لہ}) + \text{خ}\ \text{جب}\,(\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{لہ})$

۹— $\text{جم}\ 107\,\text{طہ} - \text{خ}\ \text{جب}\ 107\,\text{طہ}$ ۱۰— ۱-

۱۱- جب (۳ ء + ۵ ب) - خ جم (۴ ء + ۵ ب)

۱۲- ۲^(ن/۲+۱) جب^ن ط/۲ جم ن(π + ط + ف)/۲

۱۳- جم π/۵ ± خ جب π/۵، جم ۳π/۵ ± خ جب ۳π/۵

۳ صفحہ ۲۴۴

۱- ا، (-۱ ± √۳ خ)/۲ ۲- ± خ، (√۳ ± خ)/۲، (-√۳ ± خ)/۲

۳- ± (جم رπ/۱۲ + خ جب رπ/۱۲)، جہاں ر = ۳، ۷، یا ۱۱

۴- ± خ اور ± (جم رπ/۱۰ ± خ جب رπ/۱۰)، جہاں ر = ۱ یا ۳

۵- ± √۲ (جم رπ/۲۴ + خ جب رπ/۲۴)، جہاں ر = ۱، ۹ یا ۱۷

۶- ∛۲۰۴۸ [جم رπ/۹ + خ جب رπ/۹]، جہاں ر = ۵، ۱۱ یا ۱۷

۷- ± √۲ [جم رπ/۱۲ - خ جب رπ/۱۲]، جہاں ر = ۱ یا ۷

۸- ∛۲ [جم رπ/۱۸ + خ جب رπ/۱۸]، جہاں ر = ۱، ۱۳ یا ۲۵

۹- ⁵√۴ [جم رπ/۱۵ + خ جب رπ/۱۵]، جہاں ر = ۱، ۵، ۱۱، ۱۷ یا ۲۳

۱۰- ± ۲ اور ± ۲ خ

۱۱- ۲ اور ۲ [جم رπ/۵ ± خ جب رπ/۵]، جہاں ر = ۲ یا ۴

۱۲- - ۱۰۲۴ ۱۳- ± (√۳ + خ)/۲ اور ± (۱ - √۳ خ)/۲

۱۴- ۱ ۱۶- ± ۱، ± خ، ± (جم π/۶ ± خ جب π/۶) اور ± (جم ۵π/۶ ± خ جب ۵π/۶)
چار آخری قیمتیں

۱۷- -۱ اور جم رπ/۷ ± خ جب رπ/۷ جہاں ر = ۱، ۳ یا ۵

۱۸- -۱، جم π/۳ ± خ جب π/۳ ± (جم π/۴ + خ جب π/۴) اور ± (جم ۳π/۴ + خ جب ۳π/۴)

۱۹- ۲ ∛۲ جم رπ/۹ جہاں ر = ۱، ۷ یا ۱۳

۴ صفحہ ۵۲

۶ — $\frac{۵\,مس\,ط - ۱۰\,مس^{۳}\,ط + مس^{۵}\,ط}{۱ - ۱۰\,مس^{۲}\,ط + ۵\,مس^{۴}\,ط}$

۷ — $\frac{۷\,مس\,ط - ۳۵\,مس^{۳}\,ط + ۲۱\,مس^{۵}\,ط - مس^{۷}\,ط}{۱ - ۲۱\,مس^{۲}\,ط + ۳۵\,مس^{۴}\,ط - ۷\,مس^{۶}\,ط}$

۸ — $\frac{۹\,مس\,ط - ۸۴\,مس^{۳}\,ط + ۱۲۶\,مس^{۵}\,ط - ۳۶\,مس^{۷}\,ط + مس^{۹}\,ط}{۱ - ۳۶\,مس^{۲}\,ط + ۱۲۶\,مس^{۴}\,ط - ۸۴\,مس^{۶}\,ط + ۹\,مس^{۸}\,ط}$

۵ صفحہ ۶۳

۶ — ۳° ۴۸′ ۱۵″ ‏ ۷ — $\frac{۱}{۶}$ ‏ ۸ — $\frac{۲}{م^{۲}}$

۹ — $\frac{ا}{ب}$ ‏ ۱۰ — $\frac{۱}{۲}$ ‏ ۱۱ — ۳ ‏ ۱۲ — $\frac{ا^{۲}}{ب^{۲}}$

۱۳ — صفر ‏ ۱۴ — $-\frac{ا^{۲} + اب + ب^{۲}}{اب}$ ‏ ۱۵ — $-\frac{۱}{۲}$

۱۶ — ۲ ‏ ۱۷ — $-\frac{۱}{۹}$ ‏ ۱۸ — $-\frac{۲۵}{۱۴}$

۱۹ — $-\infty$ ‏ ۲۰ — $\frac{۲(ن^{۲} - م^{۲})}{ن}$ ‏ ۲۱ — $\frac{۱}{۹۰}$

۲۲ — $\frac{۲}{۳}$ ‏ $\frac{(م - ن)^{۲}}{م\,ن}$ ‏ ۲۳ — ۲۴ ‏ ۲۴ — صفر

۲۵ — لوک $\frac{ا}{ب}$ ‏ ۲۶ — و ‏ ۲۷ — $و^{۳}$

۲۸ — $-\frac{۹}{ن^{۲}}$ ‏ ۲۹ — ۱ ‏ ۳۰ — صفر ‏ ۳۱ — ۱

۳۲ — $\frac{و}{۲}$ ‏ ۳۳ — صفر ‏ ۳۴ — $\frac{۵}{۶}$ — $\frac{۱}{۶}$

۶ صفحہ ۷۳

۸ — $لا^{۵} - ۵۵\,لا^{۴} + ۳۳۰\,لا^{۳} - ۴۶۲\,لا^{۲} + ۱۶۵\,لا - ۱۱ = ۰$

۹ صفحہ ۹۶

۱۔ $\frac{1}{2^{\text{ن}-1}}$ جم ن طہ (ن طاق) اور $\frac{1}{2^{\text{ن}-1}}\left[(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}} - \text{جم ن طہ}\right]$ (ن جفت)

۲۔ $(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}} \frac{1}{2^{\text{ن}-1}}$ جب ن طہ (ن طاق) اور $(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}} \frac{1}{2^{\text{ن}-1}}$ (۱ - جم ن طہ) (ن جفت)

۳۔ $\text{ن}^2\ \text{قم}^2$ ن طہ (ن طاق) اور $\frac{1}{2}\ \text{ن}^2\ \text{قم}^2\ \frac{\text{ن طہ}}{2}$ (ن جفت)

۴۔ $\text{ن}^2\ \text{قط}^2$ ن طہ - ن (ن طاق) اور $\text{ن}^2 \div \left[1 - (-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\ \text{جم ن طہ}\right]$ - ن (ن جفت)

۵۔ $-\text{ن مم}\left(\frac{\pi\,\text{ن}}{2} + \text{ن طہ}\right)$ (۶) ن مم ن طہ

۷۔ $(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}$ مس ن طہ (ن طاق) اور $(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}$ (ن جفت)

۸۔ $\text{ن}^2\ \text{مم}^2\left(\frac{\pi\,\text{ن}}{2} + \text{ن طہ}\right) + \text{ن}(\text{ن}-1)$

۱۰۔ اگر ن طاق ہو تو صفر، اگر ن جفت ہو تو $\frac{1}{2} \times \frac{\text{ن}^2}{(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\ \text{جم ن طہ} - 1}$

۱۱ صفحہ ۱۱۲

۱۷۔ جم عہ جمنر بہ - خم جب عہ جبنر بہ

۱۸۔ $\frac{\text{جب ۲ عہ} - \text{خم جبنر ۲ بہ}}{\text{جمنر ۲ بہ} - \text{جم ۲ عہ}}$

۱۹۔ $2\ \frac{\text{جب عہ جمنر بہ} - \text{خم جم عہ جبنر بہ}}{\text{جمنر ۲ بہ} - \text{جم ۲ عہ}}$

۲۰۔ $2\ \frac{\text{جم عہ جمنر بہ} + \text{خم جب عہ جبنر بہ}}{\text{جم ۲ عہ} + \text{جمنر ۲ بہ}}$

۲۱۔ جبنر عہ جم بہ + خم جمنر عہ جب بہ

۲۲- $\dfrac{\text{جبنر ۲ عہ} + \text{خ جب ۲ ہ}}{\text{جبنر ۲ عہ} + \text{جم ۲ ہ}}$

۲۳- ۲ $\dfrac{\text{جبنر عہ جم ہ} - \text{خ جبنر عہ جب ہ}}{\text{جبنر ۲ عہ} + \text{جم ۲ ہ}}$

۱۲ صفحہ ۱۲۰

۱- $\pm \frac{\text{ل}\pi}{\text{۴}} + \frac{\text{خ}}{\text{۴}}$ لوک $\frac{\text{۱+جب ط}}{\text{۱-جب ط}}$ [اگر جم ط مثبت ہو تو علامت + ہونی چاہیئے
اگر جم ط منفی ہو تو -]

۲- جب$^{-۱}$ ۲/۱جب ط + خ لوک [۲/۱ + جب ط - ۲/۱جب ط]

۱۳ صفحہ ۱۲۹

۱۵- $\frac{۱}{۲}$ لوک (ی^{۲} + ے^{۲}) + خ مس$^{-۱}$ $\frac{\text{ے}}{\text{ی}}$ جہاں
ی = $\frac{۱}{۲}$ لوک $\frac{\text{جبنر ۲ ما - جم ۲ لا}}{۲}$ اور ے = مس$^{-۱}$ (جم لا مسنر ما)

۱۵ صفحہ ۱۴۴

۱- ۳ ۲- ۲ ۳- ۵ ۴- ۱ ۵- ۳

۱۶ صفحہ ۱۵۰

۱- $\dfrac{\text{۴ جب عہ}}{\text{۵} - \text{۴ جم عہ}}$ ۲- صفر، بشرطیکہ عہ ۲π کا کوئی ضعف نہ ہو

۳- $\dfrac{\text{جب}^{۲}\text{ عہ}}{\text{۱- جب ۲ عہ} + \text{جب}^{۲}\text{ عہ}}$ ۴- $\dfrac{\text{جب عہ (جم عہ - جب عہ)}}{\text{۱- جب ۲ عہ} + \text{جب}^{۲}\text{ عہ}}$

۵ـ $$\frac{\text{جب عہ} - \text{ج جب}(\text{عہ} - \text{ب}) - \text{ج}^{\text{ن}}\,\text{جب}(\text{عہ} + \text{ن ب}) + \text{ج}^{\text{ن}+۱}\,\text{جب}\{\text{عہ} + (\text{ن}-۱)\text{ب}\}}{۱ - ۲\,\text{ج جم ب} + \text{ج}^{۲}}$$

$$\frac{\text{جب عہ} - \text{ج جب}(\text{عہ} - \text{ب})}{۱ - ۲\,\text{ج جم ب} + \text{ج}^{۲}}$$

۶ـ $$\frac{۱ - \text{ج جمنر عہ} - \text{ج}^{\text{ن}}\,\text{جمنر ن عہ} + \text{ج}^{\text{ن}+۱}\,\text{جمنر}(\text{ن}-۱)\,\text{عہ}}{۱ - ۲\,\text{ج جمنر عہ} + \text{ج}^{۲}}$$

۷ـ $$\frac{\text{ج جمنر عہ}}{۱ - ۲\,\text{ج جمنر عہ} + \text{ج}^{۲}}$$

۸ـ $$\frac{\text{جم عہ} + (-۱)^{\text{ن}-۱}\left\{(\text{ن}+۱)\,\text{جم}(\text{ن}-۱)\,\text{عہ} + \text{ن جم ن عہ}\right\}}{۲(۱ + \text{جم عہ})}$$

۹ـ $$\frac{\text{جب عہ} + (۲\text{ن} + ۳)\,\text{جب ن عہ} - (۲\text{ن}+۱)\,\text{جب}(\text{ن}+۱)\,\text{عہ}}{۲(۱ - \text{جم عہ})}$$

۱۰ـ اگر ن = ۴م یا ۴م + ۳، تو صفر اور اگر ن = ۴م + ۱ یا ۴م + ۲ تو ۱
اگر ن = ۴م یا ۴م + ۱ تو صفر اور اگر ن = ۴م + ۲ یا ۴م + ۳ تو ۱

۱۱ـ $\left(۲\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲}\right)^{\text{ن}}\,\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{\text{ن ب}}{۲}\right)$

۱۲ـ $(۲\,\text{جب عہ})^{\frac{۱}{۲}}\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{عہ}}{۲}\right)$ سوائے اس صورت کے جبکہ عہ = ن π

۱۳ـ اگر ن طاق ہو تو صفر اور اگر ن جفت ہو تو $(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{عہ}$

۱۴ـ $\left(۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right)^{-\text{ن}} \times \text{جب}\left(\frac{\text{ن}\pi}{۲} - \frac{\text{ن عہ}}{۲}\right)$ ؛ ...... اگر ن < ۱

۱۵ـ با جم طہ (۱ + جم طہ) ...... اگر طہ $-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہے۔

۱۶ـ $\left(۲\,\text{جمنر}\,\frac{\text{ی}}{۲}\right)^{\text{ن}}\,\text{جمنر}\,\frac{\text{ن}+۱}{۲}\,\text{ی}$

۱۷ صفحہ ۱۵۵

۱- $و^{\text{ج جم بہ}}$ جب (عہ + ج جب بہ)

۲- $و^{\text{ج جم بہ}}$ جم (عہ + ج جب بہ)

۳- $و^{\text{-جم عہ جم بہ}}$ جم (جم عہ جب بہ)

۴- جب عہ جم (جم بہ) جمنر (جب بہ) - جم عہ جب (جم بہ) جمنر (جب بہ)

۵- جب (جم بہ) جمنر (جب بہ) جم (عہ - بہ)

- جم (جم بہ) جمنر (جب بہ) جب (عہ - بہ)

۶- $و^{\text{جمنر عہ}}$ جمنر (جبنر عہ) ۷- $و^{\text{جمنر عہ}}$ جبنر (جمنر عہ)

۸- $و^{\text{ما جم (جب عہ)}}$ جم {ما جب (جب عہ)} . . . جہاں ما = $و^{\text{جم عہ}}$

۹- $و^{\text{ما جم (جم عہ)}}$ × جم {ما جب (جم عہ)} . . . جہاں ما = $و^{\text{جب عہ}}$

۱۰- $\frac{1}{2}$ $و^{\text{جم طہ}}$ {جم (طہ + جب طہ) + ہ جم (جب طہ)}

+ $\frac{1}{2}$ $و^{\text{-جم طہ}}$ {جم (طہ - جب طہ) - ہ جم (جب طہ)}

۱۱- $مس^{-1}$ $\frac{\text{ج جب عہ}}{\text{۱ + ج جم عہ}}$ سوائے اس صورت کے جب ج = ۱ اور عہ = (۲ن+۱) π

۱۲- $\frac{1}{2}$ $مس^{-1}$ $\frac{\text{۲ ج جب عہ}}{\text{۱ - ج}^2}$ سوائے اُس صورت کے جب ج = ۱ اور عہ = ن π

۱۳- $\frac{1}{4}$ لوک $\frac{\text{۱ + ۲ ج جم عہ + ج}^2}{\text{۱ - ۲ ج جم عہ + ج}^2}$ (۱۴) $\frac{1}{2}$ $مس^{-1}$ $\frac{\text{۲ ج جم عہ}}{\text{۱ - ج}^2}$

۱۵- $\frac{1}{4}$ لوک $\frac{\text{۱ + ۲ ج جب عہ + ج}^2}{\text{۱ - ۲ ج جب عہ + ج}^2}$

۱۶- اگر جم عہ مثبت ہو تو + $\frac{\pi}{4}$، منفی ہو تو - $\frac{\pi}{4}$، صفر ہو تو صفر

۱۷- $\frac{1}{2}$ جم (عہ - بہ) $مس^{-1}$ $\frac{\text{۲ ج جم بہ}}{\text{۱ - ج}^2}$ - $\frac{1}{2}$ جب (عہ - بہ) مسنر $\frac{\text{۲ ج جب بہ}}{\text{۱ + ج}^2}$

۱۸- $\frac{1}{2}$ لوک (جب $\frac{\text{عہ + بہ}}{2}$ قم $\frac{\text{عہ - بہ}}{2}$) سوائے اس صورت کے جبکہ عہ ± بہ ۲ π کا کوئی ضعف ہو

۱۹- $\frac{۱}{۲}$ لوک $\left[(۱+ج) \div \sqrt{۱+۲\,ج\,جم\,۲\,عہ+ج^{۲}}\right]$

۲۰- $\frac{عہ}{۲}$　　۲۱- $-\frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}$ (جم بہ قمز عہ)

۲۲- $\frac{۱}{۴}\left[۲\sqrt{۳}\ \text{لوک}_{و}(۲+\sqrt{۳})-\pi\right]$

۱۸ صفحہ ۱۶۰

۱- مم $\frac{ط}{۲}$ - مم $۲^{ن-۱}$ ط　　(۲) قم ط $\{$مم ط - مم (ن + ۱) ط$\}$

۳- قم ط $\{$مس (ن + ۱) ط - مس ط$\}$

۴- قم فہ $\{$مس (ط + ن فہ) - مس ط$\}$

۵- $\frac{۱}{۲}$ قم عہ $\{$مس (ن + ۱) عہ - مس عہ$\}$

۶- $ج_{ن} = \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ مم $\frac{ط}{۲^{ن-۱}}$ - ۲ مم ۲ ط، اور

$ج_{\infty} = \frac{۱}{ط}$ - ۲ مم ۲ ط

۷- ۲ ممز ۲ ط - $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ ممز $\frac{ط}{۲^{ن-۱}}$

۸- مس $۲^{ن}$ ط - مس ط

۹- مس ط - مس $\frac{ط}{۲^{ن}}$، مس ط

۱۰- جب ط (مم ط - مم $۲^{ن}$ ط)

۱۱- $\frac{۱}{۲}$ جب ۲ ط + $(-۱)^{ن+۱}$ $\frac{۱}{۲^{ن+۱}}$ جب $۲^{ن+۱}$ ط

۱۲- $\frac{۱}{۲}$ جب ۲ ط - $\frac{۱}{۲^{ن+۱}}$ جب $۲^{ن+۱}$ ط

۱۳- $\frac{۱}{۴}$ قم $\frac{ط}{۲}$ (قط $\frac{۲ن+۱}{۲}$ ط - قط $\frac{ط}{۲}$)

۱۴- $ج_{ن} = \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ مس $۲^{ن}$ عہ - ۲ مس عہ

۱۵- $\frac{۱}{۴}\{$۳ جم ط + $(-\frac{۱}{۳})^{ن-۱}$ جم $۳^{ن}$ ط$\}$

۱۶- $\frac{۱}{۴}\{$$۳^{ن}$ جب $\frac{ط}{۳^{ن}}$ - جب ط$\}$

۱۷– $\frac{۱}{۸}$ { ۳^ن^ سسِ ۳^ن^ ط – سسِ ط }

۱۸– $\frac{۱}{۲}$ { م ط – ۳^ن^ مم ۳^ن^ ط }

۱۹– سس^-۱^ { (ن + ۱) (ن + ۲) } – سس^-۱^ ۲

۲۰– سس^-۱^ (ن + ۱) – سس^-۱^ ۱ یعنی سس^-۱^ $\frac{ن}{ن+۲}$

۲۱– جن = سس^-۱^ ن – سس^-۱^ ۱ ، ج∞ = $\frac{\pi}{۴}$

۲۲– جن = جب^-۱^ ۱ – جب^-۱^ $\frac{۱}{\sqrt{ن+۱}}$ ، اور ج∞ = $\frac{\pi}{۲}$

۱۹ صفحہ ۱۶۷

۱– ۱ – ا جم ط + ا^۲^ جم ۲ط – ا^۳^ جم ۳ط + ... تالاتناہی

۲– جم ط + ا جم (ط + ف) + ا^۲^ جم (ط + ۲ف) + ... تالاتناہی

۳– جب ط + ا جب (ط + ف) + ا^۲^ جب (ط + ۲ف) + ... تالاتناہی

۴– جم ط + ا جم (ط + ف) + $\frac{ا^۲}{۲!}$ جم (ط + ۲ف) + $\frac{ا^۳}{۳!}$ جم (ط + ۳ف) + ... تالاتناہی

۵– ر ط جب ف + $\frac{ر^۲ ط^۲}{۲!}$ جب ۲ف + $\frac{ر^۳ ط^۳}{۳!}$ جب ۳ف + ... تالاتناہی

۶– جہاں ر = + $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ اور ف = سس^-۱^ $\frac{ب}{ا}$

۹– لا جم ع – $\frac{۱}{۲}$ لا^۲^ جب ۲ع – $\frac{۱}{۳}$ لا^۳^ جم ۳ع + $\frac{۱}{۴}$ لا^۴^ جب ۴ع
+ $\frac{۱}{۵}$ لا^۵^ جم ۵ع – ...... تالاتناہی

۱۰– لا + ۱ – ر π = – جم ع جب لا – $\frac{۱}{۲}$ جم^۲^ ع جب ۲لا – $\frac{۱}{۳}$ جم^۳^ ع جب ۳لا
– ...... تالاتناہی

۱۲– (۱) م = سس^-۱^ $\frac{ع}{۲}$ (۲) م = – سس^-۱^ ع

– لوک ۲ – جب ۲ط + $\frac{۱}{۲}$ جم ۴ط + $\frac{۱}{۳}$ جب ۶ط – $\frac{۱}{۴}$ جم ۸ط
– $\frac{۱}{۵}$ جب ۱۰ط + ... تالاتناہی

۱۴— ۲ [جب ط − ½ جب ۲ ط + ⅓ جب ۳ ط − .... تالاتناہی]

۱۵— ۲ [جم ط مس (π/۴ − ط/۲) − ½ جم ۲ ط مس² (π/۴ − ط/۲) + ...]
+ ۲ لوک جم (π/۴ − ط/۲)

اگر صفر < ب < π/۲

۴۰ صفحہ ۱۸۴

۱— ∏ [لا² + ۲ لا جم (۳ر+۱) π/۹ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱ یا ۲

۲— ∏ [لا² − ۲ لا جم (۶ر+۱) π/۱۲ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲ یا ۳

۳— ∏ [لا² − ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۱۵ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴

۴— ∏ [لا² − ۲ لا جم (۳ر+۱) π/۹ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵

۵— ∏ [لا² − ۲ لا جم (۶ر+۲) π/۱۲ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶

۶— (لا − ۱) ∏ [لا² − ۲ لا جم ۲رπ/۵ + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲

۷— ∏ [لا² − ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۹ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱ یا ۲

۸— (لا − ۱) ∏ [لا² − ۲ لا جم ۲رπ/۷ + ۱] جہاں ر = ۱، ۲ یا ۳

۹— (لا + ۱) ∏ [لا² − ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۹ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲ یا ۳

۱۰— (لا² − ۱) ∏ [لا² − ۲ لا جم رπ/۵ + ۱] جہاں ر = ۱، ۲، ۳ یا ۴

۱۱— (لا + ۱) ∏ [لا² − ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۱۳ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱ ... یا ۵

۱۲— (لا² − ۱) ∏ [لا² − ۲ لا جم رπ/۷ + ۱] جہاں ر = ۱، ۲ ....، ۶

۱۳— ∏ [لا² − ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۲۰ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲ ....، ۹

۳۹— دفعہ ۱۱۵ کی رقم میں لا کی بجائے ر لکھو اور پھر طرفین کا لوکارتم لو۔ ر کے لحاظ سے تفرق کرو اور پھر ط کے لحاظ سے تکمیل کرو۔

۲۲ صفحہ ۲۲۲

۲ — ± .....۶۳۲۷۴۶ فٹ اور ± .....۶۲۴۹۸۹ فٹ

۳ — $\frac{ا\ جم\ ۲\ بہ}{جم^{۲}\ (عہ + ۲\ بہ)}$ لہ^{۲} اور $\frac{ا\ جب^{۲}\ بہ}{جم^{۲}\ (عہ + ۲\ بہ)}$ لہ

$\frac{۱۰\ \sqrt{۳}\ \pi}{۵۴}$ اور $\frac{\pi\ (\sqrt{۳} - ۲)\ ۵}{۵۴}$ فٹ

۶ — $\frac{ل - ما\ جم\ ج}{ج\ جب\ ب}$ اور $\frac{ما - ل\ جم\ ج}{ج\ جب\ ا}$ نیم قطری زاویے

۸ — $\frac{\pi}{۴}$ انچ

۲۳ صفحہ ۲۳۰

۱ — ۱ اور $\frac{\sqrt{۳} \pm ۱}{۲}$

۲ — $-۱ + ۲\ جم\ ۴۰^{\circ}$، $-۱ + ۲\ جم\ ۱۶۰^{\circ}$ اور $-۱ + ۲\ جم\ ۲۸۰^{\circ}$

۳ — ۴ اور $۲ \pm ۲\sqrt{۳}$ (۴) ۴ اور $۱ \pm \sqrt{۳}$

۵ — $۲\sqrt{۲}$ جم ط جہاں ط = ۳۳° ۳۰′ ۵۲″، ۱۵۳° ۳۰′ ۵۲″، ۲۷۳° ۳۰′ ۵۲″

۶ — $-\frac{۳}{۴} + \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۳}$ جم ط، جہاں ط = ۳۹° ۵′ ۱۵″، ۱۵۹° ۵′ ۱۵″، ۲۷۹° ۵′ ۱۵″

۷ — $\frac{۳}{۴}\sqrt{۲۱}$ جم ط جہاں ط = ۴۰° ۵۰′ ۴۹″، ۱۶۰° ۵۰′ ۴۹″، ۲۸۰° ۵۰′ ۴۹″

۲۴ صفحہ ۲۳۳

۴ — جملہ کی قیمت ۲ اور −۲ کے درمیان واقع نہیں ہوسکتی۔

۴- چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۲ $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ ہے بشرطیکہ ا > ب

۵- بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں بالترتیب ۳ اور $\frac{1}{3}$ ہیں۔

۶- چھوٹی سے چھوٹی قیمت = ۲ ا ب

۷- اگر ا اور ب کی علامات یکساں ہوں تو چھوٹی سے چھوٹی قیمت
(ا + ب)^2 ہے۔

۸- ۲ مس ع ۹- ۲ قطع ع

متفرق مثالیں ۲۴۷

۴- $\frac{\pi}{2}$ ، π ۵- ۲ - لا جب لا - جم لا

۶- $\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{3\,\text{لا}^3} + \frac{1}{5\,\text{لا}^5} + \cdots$ ۹- ۲- ۴ خ ، ۱ ± ۲ ۳ $\sqrt{3}$ + خ (۲ ∓ $\sqrt{3}$)

۱۰- ۲ ۱۲- $\frac{\pi}{4}$ جب لا اگر ۰ < لا < $\frac{\pi}{2}$ ، اگر لا = $\frac{\pi}{2}$ ، $-\frac{\pi}{4}$ جب لا اگر $\frac{\pi}{2}$ < لا < π

۱۵- ۱۸ء۱۱۵ مربع فٹ ۲۰- ۱ - $\frac{\pi}{8}$

۲۱- ۱- (۱- جم ط) لوک (۲ جب $\frac{\text{ط}}{2}$) - $\frac{\pi - \text{ط}}{2}$ جب ط تاوقتیکہ ط کا ۲ π کا کوئی ضعف نہ ہو اس صورت میں مجموعہ ایک ہوگا۔

۲۲- مم ع - $\frac{\text{ن}}{2}$ مم $\frac{\text{ن}}{2}$ ع

۲۳- $\frac{2}{\text{جب ع}}$ [مس $\frac{\text{ع}}{2}$ جب ط + مس^2 $\frac{\text{ع}}{2}$ جب ۲ ط + ⋯⋯]

۲۴- $\frac{\pi}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})}$ [ا (ا - ب) (ب - ج) مم π ا + ⋯ + ⋯]

۳۱ ۴⋯۸ء ۳۲- $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۳۸- $\frac{1}{2}$ [مس $\frac{\text{ن}}{2}$ ط - مس ط]

۴۰- زاویہ ا ۴۴- مس ط - $\frac{\text{ن}}{2}$ مس $\frac{\text{ط}}{2}$

۴۵- $\frac{\text{لا}}{\text{جب ط}}$ × جب ط - $\frac{1}{2}$ $\frac{\text{لا}^2}{\text{جب}^2\,\text{ط}}$ جب ۲ ط + $\frac{1}{3}$ $\frac{\text{لا}^3}{\text{جب}^3\,\text{ط}}$ جب ۳ ط - ⋯⋯

۷۴ = مس طہ

۵۱ = $\frac{\text{جم}^{2}\text{عہ}}{\text{۲ جب عہ}}\left[\frac{\text{۱}}{\text{جب عہ جب ۲ عہ}} - \frac{\text{۱}}{\text{جب (ن + ۱) عہ جب (ن + ۲) عہ}}\right]$

۵۲ = ۱ + $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ جم طہ + $\frac{\text{۳ × ۱}}{\text{۴ × ۲}}$ جم ۲ طہ + $\frac{\text{۵ × ۳ × ۱}}{\text{۶ × ۴ × ۲}}$ جم ۳ طہ + ...

۵۴ = $\frac{\text{ط}^{2}}{\text{۴}}$ − ۳ ۶۰ = مم $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}^{\text{ن}}}$ − مم طہ

۶۱ = $\frac{\text{جمنر (ن + ۱) عہ جبنر ن عہ}}{\text{جبنر عہ}}$ ۷۸ = ۲٫۸۴۰

۷۹ = ۱٫۵۱۲۱، ۱٫۹۱۹۱ ۸۰ = ۷٫۸، ۱۰، ۱۱... ۱۴

۸۶ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ قم عہ [قط (۲ ن + ۲) عہ − قط ۲ عہ]

۸۷ = $\frac{\text{۱}}{\text{۸}}$ ($\frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{ن}} - \text{۱}}$ مس $\text{۳}^{\text{ن}}$ طہ − ۳ مس طہ)

۸۸ = جب ۳ عہ قم عہ قم ۲ عہ − جب (۳ × $\text{۲}^{\text{ن}}$ عہ) قم $\text{۲}^{\text{ن}}$ عہ قم $\text{۲}^{\text{ن}+\text{۱}}$ عہ

۸۹ = جب طہ [مم $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}^{\text{ن}+\text{۱}}}$ − مم $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$]

۹۰ = مم طہ − $\text{۲}^{\text{ن}}$ مم $\text{۳}^{\text{ن}}$ طہ ۹۱ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$[$\frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{ق}}$ مس $\text{۳}^{\text{ن}}$ لا − ۳ مس لا]

۹۲ = جب^{2} ن عہ قم عہ قط ۲ ن عہ ۹۳ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$[مم $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$ − مم $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}^{\text{ن}}}$]

۹۴ = قم^{2} لا − قم^{2} $\text{۲}^{\text{ن}}$ لا ۹۵ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{ن}}}$ مس $\text{۲}^{\text{ن}}$ طہ − مس طہ

۹۶ = مس^{-1} $\frac{\text{۱۲ ن}}{\text{۱۸ ن + ۱۳}}$ ۹۷ = مس^{-1} $\frac{\text{۴ ن}}{\text{۲ ن + ۵}}$ ۹۸ = مس^{-1} ن لا

۹۹ = مس^{-1} $\frac{\text{لا جب طہ}}{\text{۱ − لا جم طہ}}$ − مس^{-1} $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}\text{ جب ۲}^{\text{ن}}\text{ طہ}}{\text{۱ − لا}^{\text{ن}}\text{ جم ۲}^{\text{ن}}\text{ طہ}}$

۱۰۰ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ جبنر طہ [ممنر $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}^{\text{ن}+\text{۱}}}$ − ممنر $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$]

۱۰۱ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{ن}+\text{۱}}}$ قمنر^{2} $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}^{\text{ن}+\text{۱}}}$ − $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ قمنر^{2} $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$

۱۰۲- تو^(جب ط) جم (جب ط مس ط) - ۱

۱۰۸- (۱+لا)/۳ تو^لا + ۱/۳ تو^(-لا/۲) [(۲-لا) جم (√۳ لا)/۲ - ۲√۳ جب (√۳ لا)/۲]

۱۱۰- π/۸ (۲√۲ + ۱)

۱۲۶- مس^(-۱) (جبز له جب مه + جب له جبز مه)/(جبز له جم مه - جم له جبز مه) - π/۲ جہاں

له = π ۲√۲ جب π/۸ اور مه = π ۲√۲ جم π/۸

۱۳۹- ۴ قم^(-۲) ۲ لا - ۱/(۴ن-۱) قم^(-۱) لا/(۲ن-۱)

۱۴۰- ۱/۲ جم^(-۱) (۲ جب ط - ۱) تاوقتیکہ طہ ن π کے برابر نہ ہو
اس صورت میں حاصل جمع جم π/۲ ہوگا اگر ن جفت ہو اور - π/۲
ہوگا اگر ن طاق ہو

۱۴۱- ۱/(ن جب ن ط) Σ (ر = ۰ سے ر = ن - ۱) جب (ط + ۲رπ/ن) / (لا^۲ - ۲ لا جم (ط + ۲رπ/ن) + ۱)

فہرست اصطلاحات

Amplitude	سعت
Analytical Trigonometry	علم مثلث تحلیلی
Analyse	تحلیل کرو
Complex	ملتفہ
Convergency	استدقاق
Circular function (s)	تفاعل، تفاعیل مستدیرہ
Cubic equation	مساوات درجہ سوم۔ تکعیبی
Co-efficient	سر
Commensurable	متوافق
Data	معطیات، مفروضات
Double Valued function	دو قیمت والا تفاعل
e (exponent)	و
Exponential series	سلسلہ قوت نما
Expansion	تفصیل
Expand	پھیلاؤ
Hyperbolic functions	زائدی یا ہذلولی تفاعیل۔
Sinh, Cosh, etc	ہذلولی جیب۔ جبز جمز وغیرہ
Index. Indices	قوت نما۔ قوت نماؤں
Incommensurable	متباین
Imaginary (wholly, partly)	خیالی۔ (کلاً جزاً)

Indeterminate	غیر معین
I	خ
Limiting value	انتہائی قیمت
Limit	انتہا - نہایت - غایت
$\underset{n=\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$	$\underset{ن=\infty}{نہا}\left(۱+\frac{۱}{ن}\right)^{ن}$
Limit when n becomes infinitely great	انتہا جب ن لا انتہا بڑھ جاتا ہے
Logarithm to base e	لوگارثم اساس 'و' پر
Log	لوگ
Many valued function	بہت سی قیمتوں والا تفاعل
Method of Induction	استقرا کا طریقہ
Multiple angle	ضعفی زاویے
Multiples of 2π	۲π کے اضعاف
Modulus	مقیاس (مق)
Order of small quantities	مقادیر صغیر کا مرتبہ
Oscillating series	سلسلہ اہتزازی
Operation	عمل
Operator	عامل
Principal value	قیمت خاص
Proportional Parts	اجزائے متناسبہ
Quadratic equation	مساوات درجہ دوم
Quadrature	رقبہ دریافت کرنا - تربیع کرنا
Resolve	تحلیل کرنا
Root	اصل

قیمت	Value
ایک قیمت والا	Single valued function
حل کرو	Solve
اصول نظریہ	Theory
غیرحقیقی یا خیالی	Unreal
ایک تفاعل کا دَور (ادوار)	Period (s) of function
احصاء	Calculus
احصاء تفرقات	Differential calculus
تفرقی مساواتیں	Differential equations
تفرقی سر	Differentail coefficient
تفرقی	Differential
تفرقہ	Differentiation
تفرق کرو	Differentiate
احصاء تکملات	Integral Calculus
تکملی	Integral
تکمل	Integration
تکمل کرو	Integrate

غلط نامہ

علم مثلث تحلیلی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
٥	١٣	=١+ن لا+	=١+ن لا×
٩	١٣	ماقبل کا سلسلہ	ماقبل کا سلسلہ ٣
١٠	١	مترادف	معادل
١٠	٢	قو	تو
١٨	٩	یعنی ی=١	یعنی انتہائی صورت میں ی=١
٢٤	١٠	پس رقم مذکور	پس جملہ مذکور
″	١٣	$\sqrt{-1}+\sqrt{3}$	$\sqrt{-1}\times\sqrt{3}$
٣٢	١١	مثاثل	متماثل
٣٤	٧	خ جم جہ	خ جب جہ
″	٨	خ جم لہ	خ جب لہ
٣٨	١٥	(لا+خ/ما)^ق/١	(لا+خ/ما)^١/ق =
″	١٦	مرق	نکالا جائے
٣٩	١٢	$\sqrt{100}$	$\sqrt{-1}$
٤٠	١٥	جب ٢٢/٣	جب ٢٢
٤٣	٣	+√(١-ب خ)	+ن√(١-ب خ)
٤٦	٨	(ن-٢	(ن-٢)
٤٧	١٠	١ ن(ن-)/٢	١- ن(ن-١)/٢
٤٨	١٩	....)خ	....)+خ
٥٤	٨	=جم^ن طہ عہ	=جم^ن طہ-عہ
٥٩	٢	=(طہ - طہ/٣)/طہ	=(طہ - طہ^٣/٣)/طہ
٦٣	١٢	=و^(١١/٣)=	=و^(لا/٣)=
٧١	٦	١-ک	١-ک^٢
٧٨	١٨	٢^٣خ جب طہ	٢خ جب طہ
٨٢	٦	اور ٦/٢	اور ٢^٦
٨٢	١٦	جب^٥ طہ	جب ٥ طہ
٨٩	٨	سلسلۂ ذیل میں	سلسلہ میں

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۹۲	۸	$\frac{\text{ن}-۱}{۱}$	$\frac{\text{ن}-۱}{۲}$
۱۰۹	۲	$+\frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor\underline{۴}}$	$+\frac{\text{لا}^{۴}}{\lfloor\underline{۴}}$
۱۱۷	۱۳	$\sqrt{\text{لا}^{۱}-۱}$	$\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}$
۱۳۲	۱۰	$۲\,\text{ن}\,\pi +$	$۲\,\text{ن}\,\text{خ}\,\pi +$
۱۳۵	۳	$+\frac{\text{ل}}{۲})$	$+\frac{\pi}{۲})$
۱۳۷	۱۲	$\text{ج}^{۲}\,\text{و}^{۱}\,\text{خ عہ}$	$\text{ج}^{۲}\,\text{و}^{۲}\,\text{خ عہ}$
۱۵۰	۲	$\neq = \frac{\pi}{۲}$	$\neq \pm \frac{\pi}{۲}$
۱۵۷	۱۰	$\text{مسٹر لا}^{۳۰}\ \frac{۱}{۵}$	$\text{مسٹر لا}^{۳} + \frac{۱}{۵}$
۱۶۹	۱۲	$۲(\text{أ}^{۲}+\text{ب}^{۲})\frac{\text{ن}}{۲}$	$۲(\text{أ}^{۲}+\text{ب}^{۲})^{\frac{\text{ن}}{۲}}$
۱۷۶	۴	$-۱۲^{\text{ن}}$	$-۲\,\text{ر}^{\text{ن}}$
۱۷۷	۱	ثابت کرو کہ	ثابت ہوا کہ

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۹۴	۱۵	$=\frac{\text{طہ}^{۲}}{۱\pi}$	$=-\frac{\text{طہ}^{۲}}{۲\pi}$
۱۹۶	۱۱	$=\frac{\pi}{۹۰}$	$=\frac{\pi^{۴}}{۹۰}$
۱۹۷	۲	$=\frac{\text{طہ}^{۲}}{۲}$	$=-\frac{\text{طہ}^{۲}}{۲}$
۲۴۹	۴	عہ مم طہ	نہ مم عہ
۲۵۰	۱	$\frac{۱}{۲\text{لا}+}+\frac{۱}{۲\text{لا}+}$	$\frac{۱}{۲\text{لا}+}-\frac{۱}{۲\text{لا}+}$
۲۵۱	۲	ثابت کرو رجم	ثابت کرو کہ جم
۲۵۴	۹	$\pi + \text{خ}$	$\pi \pm \text{خ}$
۲۵۶	۲	$(۲\text{ل}-۱)^{\pi}$	$(۲\text{ل}-۱)\,\pi$
۲۵۸	۹	$۸\,\text{ما}^{۲}+۱$	$۸\,\text{ما}^{۲}-۸\,\text{ما}+۱$
۲۶۹	۴	$(\text{قط عہ})^{\text{ج}}$	$(\text{قط نہ})^{\text{ن}}$
۲۷۷	۱۲	$۲\,\text{جیب عہ})^{\frac{۱}{۲}}$	$۲\,\text{جیب عہ})^{-\frac{۱}{۲}}$
۲۷۸	۵	(جیم بہ) جمز	(جیم بہ) جبنر