इंटरमीडिएट कक्षाओं के लिये

स्थिति-विज्ञान

लेखक

आर० एस० वर्मा

डी० एस-सी०, एफ० एन० ए० एस-सी०

हल

(SOLUTIONS)

लखनऊ

दि अपर इंडिया पब्लिशिंग हाउस लिमिटेड

१९५८

प्रथम संस्करण १९५८

मुद्रक
दि अपर इंडिया पब्लिशिंग हाउस लिमिटेड
लखनऊ

प्राक्कथन

डॉक्टर वर्मा के स्थिति-विज्ञान पुस्तक के द्वितीय हिन्दी संस्करण की प्रश्नावलियों को प्रस्तुत पुस्तक में हल किया गया है। यथासाध्य प्रयत्न किया गया है कि पुस्तक त्रुटियों से रहित हो। यदि कोई सज्जन इन हलों में सुधार लिख भेजने का कष्ट करेंगे तो हम उनके अत्यन्त अनुगृहीत होंगे।

१ जनवरी, १९५८ —प्रकाशक

विषय-सूची

वर्मा—स्थिति-विज्ञान के हल

प्रश्नावली १. (पृष्ठ २०-२२)

१. (i) $$R=\sqrt{P_1^2+P_2^2+2P_1P_2\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{8^2+6^2+2\times8\times6\times\cos 90^\circ}=10.$$

(ii) $$R=\sqrt{5^2+3^2+2\times5\times3\times\cos 60^\circ}=7.$$

(iii) $$25=\sqrt{P_1^2+(29)^2+2\times P_1\times29\times\cos 90^\circ},$$
$$\therefore\quad P_1=7.$$

(iv) $$\sqrt{13}=\sqrt{3^2+P_2^2+2\times3\times P_2\times\cos 120^\circ},$$
$$\therefore\quad P_2=4.$$

(v) $$14=\sqrt{6^2+(10)^2+2\times6\times10\cos\alpha},$$
$$\therefore\quad \alpha=60^\circ.$$

२. $R=\sqrt{4^2+3^2}=5$ पौंड

३. यदि दूसरा बल P है तो
$$13=\sqrt{8^2+P^2+2\times8\times P\cos 60^\circ},$$
$$\therefore\quad P=7 \quad \text{या} \quad -15 \text{ पौंड}$$

यदि दूसरा बल -15 पौंड लिया जायगा तो यह 8 पौंडके बलके साथ 60° का कोण न बनाकर 120° का कोण बनायगा जो कि अग्राह्य है। अतः दूसरा बल 7 पौंड है।

४. यदि P तथा Q के बीचका कोण α है तो

पहली दशामें $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

तथा दूसरी दशामें $R'^2=P^2+Q^2-2PQ\cos\alpha$

अतः $R^2+R'^2=2(P^2+Q^2)$.

५. यदि समान बलोंके बीचका कोण α है तो

$$P^2 = P^2 + P^2 + 2P \times P \times \cos\alpha, \quad \therefore \quad \alpha = 120^\circ.$$

६. यदि बलोंके बीचका कोण α है तो

$$\sqrt{6}k = \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2 + 2 \times 3k \times 2k \cos\alpha},$$

$$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}(-\tfrac{7}{12}).$$

७. यदि परिणामी तथा छोटे बलका मान क्रमशः R तथा P है तो

पहली दशामें $\tan 90^\circ = \dfrac{100 \sin 120^\circ}{P + 100 \cos 120^\circ}$

या $P + 100 \cos 120^\circ = 0, \quad \therefore \quad P = 50$ पौंड

$\therefore \quad R = \sqrt{(100)^2 + (50)^2 + 2 \times 100 \times 50 \cos 120^\circ}$
$= 50\sqrt{3}$ पौंड

८. यदि दोनों बल P तथा Q है तो

पहली दशामें $10 = P^2 + Q^2$ ....(i)

तथा दूसरी दशामें $13 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 60^\circ$ ......(ii)

अतः (i) तथा (ii) से $P = 3$ पौंड तथा $Q = 1$ पौंड

९. पहली दशामें

$(2m+1)^2 (P^2 + Q^2) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\theta$

या $4m(m+1)(P^2 + Q^2) = 2PQ \cos\theta$ ....(i)

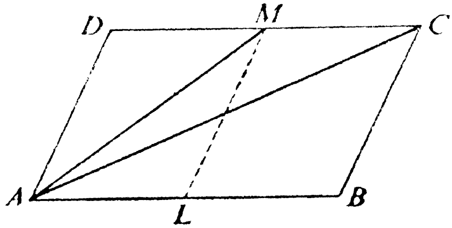
तथा दूसरी दशामें

$(2m-1)^2 (P^2 + Q^2) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(90^\circ - \theta)$

या $4m(m-1)(P^2 + Q^2) = 2PQ \sin\theta$ ....(ii)

(i) से (ii) को भाग देनेसे $\tan\theta = \dfrac{m-1}{m+1}$.

१०. यदि AB तथा AD, P तथा Q बल निरूपित करते है तो बलोके समानान्तर चतुर्भुजके नियमसे उनका परिणामी AC द्वारा निरूपित होगा।



यदि $LB = S$ तो $AL = P - S$

$\because$ AL तथा AD का परिणामी AM है,

अतः $AM = R'$

यदि $\angle CAB = \theta$ तथा $\angle MAB = 2\theta$ तो $\angle MAC = \theta$

$\therefore$ $\angle MAC = \angle CAB = \angle ACM$

या $AM = MC = LB$, $\therefore$ $R' = S$.

११. यदि P तथा Q के बीचका कोण α है, तो

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha \quad \text{......................(i)}$$

Q को दूना करनेसे $\tan 90° = \dfrac{2Q \sin \alpha}{P + 2Q \cos \alpha}$

या $P + 2Q \cos \alpha = 0$ ....(ii)

(i) तथा (ii) से $R^2 = P^2 + Q^2 - P^2$ या $R = Q$.

१२. यदि अज्ञात बल X, बल P से α कोण बनाता है तो

पहली स्थितिमें $\tan 90° = \dfrac{X \sin \alpha}{4 + X \cos \alpha}$

या $4 + X \cos \alpha = 0$ ....(i)

दूसरी स्थितिमें $\tan 45° = \dfrac{X \sin \alpha}{7 + X \cos \alpha}$

$7 + X \cos \alpha - X \sin \alpha = 0$ ....(ii)

(i) तथा (ii) से $X = 5$ डाइन तथा $\alpha = \cos^{-1}(-\frac{4}{5})$.

१३. प्रश्न १० के चित्रमें यदि AL तथा AD, बलों P तथा Q को निरूपण करें तो बलोंके समानान्तर चतुर्भुजके नियमसे इनका परिणामी R, AM से दर्शित होगा जो कि P के साथ $\angle MAB (=\theta)$ बनाता है।

यदि $LB=R$ तो $MC=LB=R=AM$

$\therefore \quad \angle MAC=\angle MCA=\angle CAB=\frac{1}{2}\theta$

अतः AB तथा AD अर्थात् $(P+R)$ तथा Q का परिणामी $(P+R)$ से $\frac{1}{2}\theta$ का कोण बनाता है।

१४. यदि बल F_1 तथा F_2 हैं तो

$$\text{महत्तम परिणामी}=F_1+F_2=P$$

$$\text{तथा न्यूनतम परिणामी}=F_1-F_2=Q$$

$$\therefore \quad F_1=\tfrac{1}{2}(P+Q) \quad \text{तथा} \quad F_2=\tfrac{1}{2}(P-Q)$$

यदि R उस समयका परिणामी है जब कि F_1 तथा F_2, β कोण पर कार्य करते हैं तो

$$R=\sqrt{\tfrac{1}{4}(P+Q)^2+\tfrac{1}{4}(P-Q)^2+2\times\tfrac{1}{2}(P+Q)\times\tfrac{1}{2}(P-Q)\cos\beta}$$

$$=\sqrt{P^2.\tfrac{1}{2}(1+\cos\beta)+Q^2.\tfrac{1}{2}(1-\cos\beta)}$$

$$=\sqrt{P^2\cos^2\tfrac{1}{2}\beta+Q^2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta}.$$

१५. यदि P तथा Q के बीचका कोण α है तो

पहली स्थितिमें $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

दूसरी स्थितिमे $4R^2=P^2+4Q^2+4PQ\cos\alpha$

तीसरी स्थितिमें $4R^2=P^2+Q^2-2PQ\cos\alpha$

इन तीनों समीकरणोंसे $P:Q:R=\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$

१६. $\because \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$

$$\therefore \quad \tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{(P^2-Q^2)\operatorname{Sin}\theta}{(P^2+Q^2)\cos\theta+2PQ}$$

मान लो पहला अवस्थामें R बल P से θ_1 कोण बनाता है और दूसरी अवस्थामें यह Q से θ_2 कोण बनाता है।

अतः $\tan\theta_1 = \dfrac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}$ तथा $\tan\theta_2 = \dfrac{P\sin\theta}{Q+P\cos\theta}$

और $\theta_2 - \theta_1 = \alpha$,

अतः $\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1)$

$$= \frac{\dfrac{P\sin\theta}{Q+P\cos\theta} - \dfrac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}}{1+\dfrac{P\sin\theta}{Q+P\cos\theta}\cdot\dfrac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}}$$

$$= \frac{(P^2-Q^2)\sin\theta}{(P^2+Q^2)\cos\theta+2PQ}.$$

परन्तु यह दिया हुआ है अतः प्रमेय।

प्रश्नावली २. (पृष्ठ २५-२६)

१. 200 पौंडका प्रथम अवयव $= 200\cos 45^\circ$

$= 100\sqrt{2}$ पौंड

200 पौंडका दूसरा अवयव $= 200\sin 45^\circ$

$= 100\sqrt{2}$ पौंड

२. क्षैतिज दिशामें विश्लेषित भाग $= 100\cos 30^\circ = 50\sqrt{3}$ पौंड

उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषित भाग $= 100\sin 30^\circ = 50$ पौंड

३. 45° की दिशामें बल P का अवयव $= \dfrac{P\sin 30^\circ}{\sin(45^\circ+30^\circ)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)P.$

30° की दिशामें बल P का अवयव $= \dfrac{P\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ+30^\circ)} = (\sqrt{3}-1)P.$

४. $15°$ की दिशा में बल P का अवयव $=\dfrac{P\sin 45°}{\sin(15°+45°)}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}P.$

५. यदि P तथा Q के बीचका कोण α है तो

$$(25)^2=(10)^2+Q^2+2\times 10\times Q\cos\alpha \quad \text{.........(i)}$$

और $\quad \tan 90°=\dfrac{Q\sin\alpha}{10+Q\cos\alpha}$

अत: $\quad 10+Q\cos\alpha=10 \quad \text{.........................(ii)}$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\quad Q=5\sqrt{29}$ डाइन

६. यदि दिया हुआ बल तथा इसका $90°$ के कोण पर अवयव P हो तथा दूसरा अवयव Q हो जो कि दिये हुए बलसे α कोण बनाता हो तो

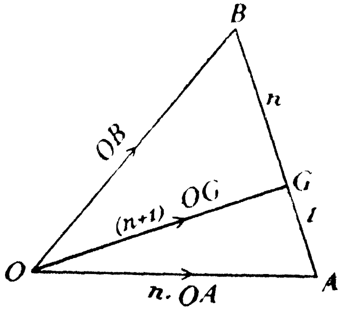
$$Q=\frac{P\sin 90°}{\sin(90°+\alpha)}=\frac{P}{\cos\alpha} \quad \text{...................... (i)}$$

तथा $\quad P^2=P^2+Q^2+2PQ\cos(90°+\alpha) \quad \text{...........(ii)}$

(i) तथा (ii) से $Q=P\sqrt{2}$ तथा $\alpha=45°$.

प्रश्नावली ३. (पृष्ठ २६)

१. त्रिभुज OAG में, $\quad n.\overrightarrow{OA}+n.\overrightarrow{AG}=n.\overrightarrow{OG}$



तथा त्रिभुज OBG में, $\quad \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OG}$

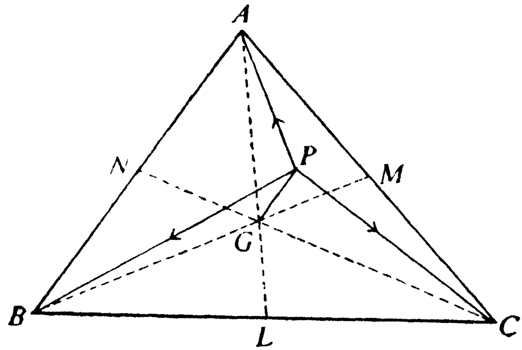
$$\therefore \quad n.\overrightarrow{OA}+n.\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}=(n+1)\overrightarrow{OG}$$

परन्तु $n.\overrightarrow{AG}$ तथा $\overrightarrow{BG}$ की दिशाएं विपरीत हैं और इनके परिमाण बराबर हैं।

$$\therefore \quad n.\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=0$$

$$\therefore \quad n.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(n+1)\overrightarrow{OG}.$$

२. यदि N, भुजा AB का मध्य बिन्दु हो तो

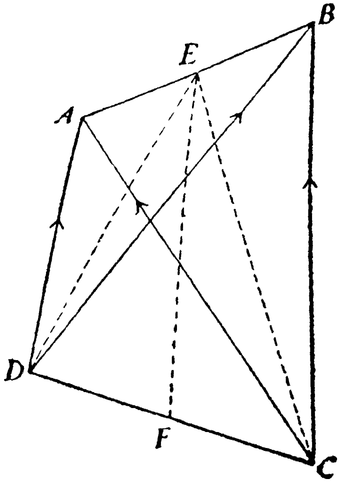


$$\mu.\overrightarrow{PA}+\mu.\overrightarrow{PB}=2\mu.\overrightarrow{PN}$$

और $\because$ GC : GN = 2 : 1, $\therefore$ $2\mu.\overrightarrow{PN}+\mu.\overrightarrow{PC}=3\mu.\overrightarrow{PG}$

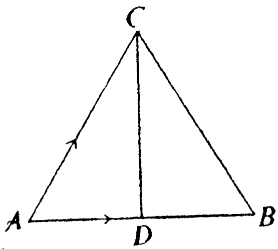
$$\therefore \quad \mu.\overrightarrow{PA}+\mu.\overrightarrow{PB}+\mu.\overrightarrow{PC}=3\mu.\overrightarrow{PG}.$$

३. DA और DB द्वारा निरूपित बलोंका परिणामी 2DE है। इसी प्रकार CA और CB द्वारा निरूपित बलोंका परिणामी 2CE है। 2DE और 2CE द्वारा निरूपित बलोंका परिणामी 4FE है।



अतः यह चारों बल 4FE के तुल्य हैं।

४. $\because$ D, AB का मध्य बिन्दु है। $\therefore$ AB=AC=2AD



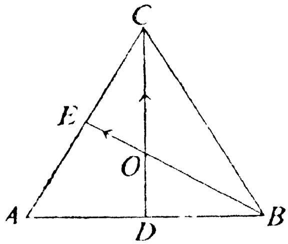
AD तथा AC द्वारा निरूपित बलोंका परिणामी

$$=\sqrt{AC^2+AD^2+2AC.AD\cos 60^\circ}$$

$$=\sqrt{4AD^2+AD^2+2AD.AD}=\sqrt{7}\ AD.$$

५. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$

$$=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OE}$$

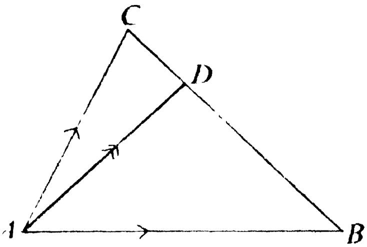


$$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}=\tfrac{3}{2}\,\overrightarrow{BC}.$$

६. बल $\text{Sec B}=AB.\dfrac{\text{Sec B}}{AB}=\dfrac{1}{BD}.AB$, AB की दिशामें

इसी प्रकार बल $\text{Sec C}=\dfrac{1}{CD}.AC$, AC की दिशामें

यदि $\dfrac{1}{BD}=\lambda$ तथा $\dfrac{1}{CD}=\mu$



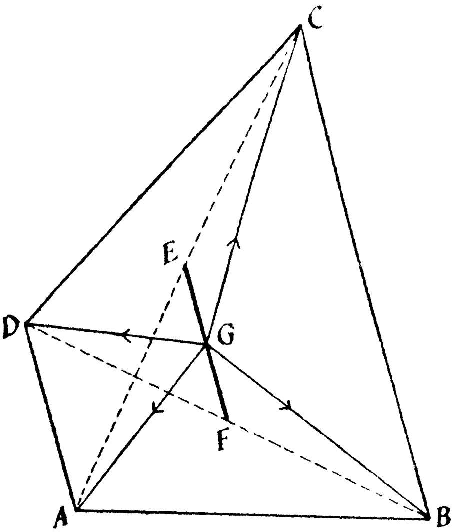
∴ AB की दिशामें Sec B तथा AC की दिशामें Sec C का परिणामी

$=(\lambda+\mu)$ AD, AD की दिशामें

$=\left(\dfrac{1}{BD}+\dfrac{1}{CD}\right)$ AD, AD की दिशामें

$=(\tan B+\tan C)$, AD की दिशामें

७. GA और GC द्वारा निरूपित बलोंका परिणामी 2GE है (क्योंकि E बिन्दु, AC का मध्य बिन्दु है)



इसी प्रकार GB और GD द्वारा निरूपित बलोंका परिणामी 2GF है (क्योंकि F बिन्दु, BD का मध्य बिन्दु है)

किन्तु G बिन्दु, EF का मध्य बिन्दु है। अतः 2GE और 2GF द्वारा निरूपित बल सन्तुलनमें होंगे।

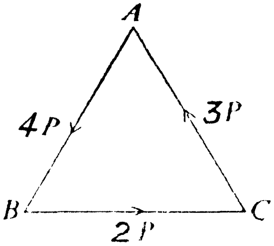
अतः चारों बल सन्तुलनमें हैं।

प्रश्नावली ४. (पृष्ठ ३६-३७)

१. यदि बलोंका परिणामी F, 2P बलसे θ कोण बनाता हो तो 2P बलके अनुगत तथा उसके लम्ब दिशामें बलोंका विश्लेषण करनेसे

$$F\cos\theta = 2P - 3P\cos 60^\circ - 4P\cos 60^\circ = -\tfrac{3}{2}P$$

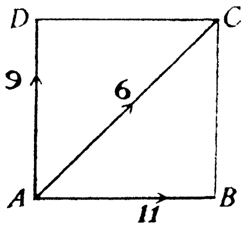
तथा $$F\sin\theta = 3P\sin 60^\circ - 4P\sin 60^\circ = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,P$$



$$\therefore \quad F = P\sqrt{3} \quad \text{तथा} \quad \theta = 30^\circ.$$

२. प्रश्न १ की तरह हल कीजिये।

३. यदि बलोंका परिणामी F, AB से θ कोण बनाता है तो बलोंका AB के अनुगत व लम्ब दिशामें विश्लेषण करनेसे



$$F \cos \theta = 11 + 6 \cos 45^\circ = 11 + 3\sqrt{2}$$

$$\text{तथा} \quad F \sin \theta = 9 + 6 \sin 45^\circ = 9 + 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad F = \sqrt{238 + 120\sqrt{2}} \text{ पौंड}$$

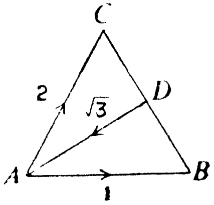
४. यदि परिणामी बल R, 2 पौडके बलसे θ कोण बनाता हो तो बलोंका क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे

$$R \cos \theta = 2 + 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 4$$

$$\text{तथा} \quad R \sin \theta = 2\sqrt{2} \sin 45^\circ + 1 = 3$$

$$\therefore \quad R = 5 \text{ पौंड} \quad \text{तथा} \quad \theta = \tan^{-1}(\tfrac{3}{4}).$$

५. यदि परिणामी R, 1 पौंडके बलसे θ कोण बनाता हो तो बलोंका AB के अनुगत और लम्ब दिशामें विश्लेषण करनेसे



$$R\cos\theta = 1 - \sqrt{3}\cos 30^\circ + 2\cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}$$

तथा $R\sin\theta = -\sqrt{3}\ \sin\ 30^\circ + 2\ \sin 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

$\therefore$ $R = 1$ पौंड तथा $\theta = 60^\circ$.

६. इन बलोंको सन्तुलनमें रखने वाला बल, परिणामीके बराबर ही होगा। अतः

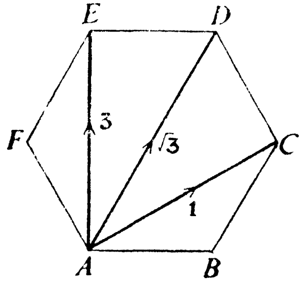
यदि परिणामी बल F, 10 पौंडके बलसे θ का कोण बनाता हो तो बलोंका 10 पौंडके बलके अनुगत एवं लम्ब दिशामें विश्लेषण करनेसे

$$F\cos\theta = 10 + 8\cos 45^\circ = 10 + 4\sqrt{2}$$

तथा $F\sin\theta = 6 + 8\ \sin\ 45^\circ = 6 + 4\sqrt{2}$

$\therefore$ $F = \sqrt{200 + 128\sqrt{2}}$ पौंड

७. यदि परिणामी R, AB से θ कोण बनाता हो तो बलोंका AB और AE के अनुगत विश्लेषण करनेसे

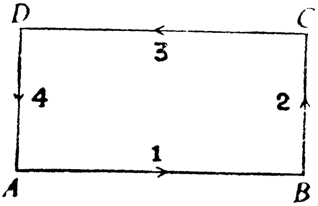


$$R\cos\theta = 1\cos 30^\circ + \sqrt{3}\cos 60^\circ = \sqrt{3}$$

तथा $R\sin\theta = 1\sin\ 30^\circ + \sqrt{3}\ \sin\ 60^\circ + 3 = 5$

$\therefore$ $R = 2\sqrt{7}$.

८. यदि परिणामी R, AB से θ कोण बनाता हो तो बलोंको AB और AD के अनुगत विश्लेषित करनेसे

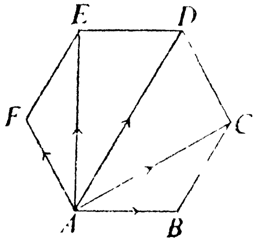


$$R\cos\theta = 1-3 = -2$$

तथा $R\sin\theta = 2-4 = -2$

$$\therefore\quad R = 2\sqrt{2}.$$

९. यदि $AB=a$ तो $AC=a\sqrt{3}$, $AD=2a$ तथा $AE=a\sqrt{3}$ अतः A पर बलोंके परिमाण क्रमशः a, $2a\sqrt{3}$, $6a$, $a\sqrt{3}$ तथा a है। यदि इन बलोंका परिणामी R, AB से θ कोण बनाता हो तो बलों को AB तथा AE के अनुगत विश्लेषित करनेसे



$$R\cos\theta = a + 2a\sqrt{3}\cos 30^\circ + 6a\cos 60^\circ + a\cos 120^\circ = \tfrac{13}{2}\,a$$

तथा $R\sin\theta = 2a\sqrt{3}\sin 30^\circ + 6a\sin 60^\circ + a\sqrt{3} + a\sin 120^\circ = \tfrac{11}{2}\sqrt{3}a$

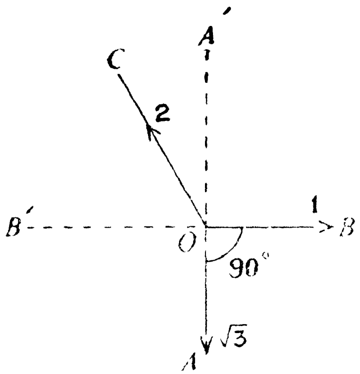
$$\therefore\quad R = \sqrt{133}\,a \quad \text{तथा} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\tfrac{11}{13}\sqrt{3}\right).$$

प्रश्नावली ५. (पृष्ठ ५२-५४)

१. यदि तीनों बल P, Q, R हैं तो लामीके प्रमेयके अनुसार

$$P = Q = R.$$

२. मान लिया कि 5P तथा 8P बलोंके बीचका कोण α है तथा बल 7P शेष दो बलोंका परिणामी है, क्योंकि सभी बल सन्तुलनमें है।



$$\therefore \quad (7P)^2 = (5P)^2 + (8P)^2 + 2 \times 5P \times 7P \times \cos \alpha$$

या $\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \therefore \quad \alpha = 120^\circ.$

$\therefore$ लामीके प्रमेयसे, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin Boc} = \dfrac{1}{\sin Aoc} = \dfrac{2}{\sin 90^\circ}$

या $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B'oc} = \dfrac{1}{\sin A'oc} = \dfrac{2}{\sin 90^\circ}$

$\therefore \quad \sin B'oc = \sqrt{\frac{3}{2}}$ या $\angle B'oc = 60^\circ,$

$\therefore \quad \angle Boc = 120^\circ.$

तथा $\sin A'oc = \frac{1}{2}$ या $\angle A'oc = 30^\circ,$

$\therefore$ वाह्य $\angle Aoc = 180^\circ + 30 = 210^\circ.$

४. सूत्र $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$ में P, Q, R का 3, 4, 9 मे से कोई भी मान रखनेसे $\cos \alpha$ का मान $+1$ से अधिक या -1 से कम आता है जो कि अग्राह्य है।

अतएव उपर्युक्त अनुपातमें तीन बल सन्तुलनमे नही रह सकते।

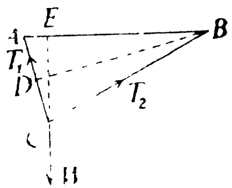
५. § 3.7 के उदाहरण १ की तरह हल कीजिए।

६. यदि § 3.7 के उदाहरण १ के चित्रमें डोरी CA तथा CB के झुकाव उर्ध्वाधरसे क्रमशः 30° तथा 45° हों तथा भार 65 पौंडके स्थान पर भार 100 पौंडका हो तो लामीके प्रमेयसे

$$\frac{T_2}{\sin 150^\circ}=\frac{T_1}{\sin 135^\circ}=\frac{100}{\sin 75^\circ}$$

$\therefore\ T_2=50\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ पौंड तथा $T_1=100(\sqrt{3}-1)$ पौंड

७. मान लीजिये CA तथा CB में तनाव क्रमशः T_1 तथा T_2 है। B तथा C से AC तथा AB में BD तथा CE लम्ब डालिये।



यहा पर $\angle ECB=90^\circ-\angle ABC=90^\circ-2\angle ABD$,

$\angle ACE=90^\circ-\angle CAE=\angle ABD$,

$ACB=\angle BAC$, $AD=\frac{1}{2}\,l$ तथा $BD=\frac{1}{2}\sqrt{15}\,l$

$\because$ W, T_1 तथा T_2 सन्तुलनमें है, इसलिए लामीके प्रमेयसे

$$\frac{T_1}{\sin ECB}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}$$

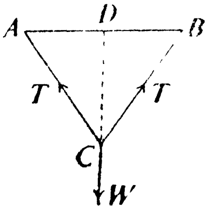
$$\therefore\ T_1=\frac{W\cos 2EBD}{\sin BAC}=W.\frac{7}{8}\times\frac{4}{\sqrt{15}}=\frac{7}{30}\sqrt{15}\,W.$$

$$\text{तथा}\ T_2=\frac{W\sin ABD}{\sin BAC}=W.\frac{1}{4}\times\frac{4}{\sqrt{15}}=\frac{1}{15}\sqrt{15}\,W.$$

८. यदि डोरीमें तनाव T हो तो लामीके प्रमेयसे

$$\frac{T}{\sin ACD}=\frac{W}{\sin ACB}$$

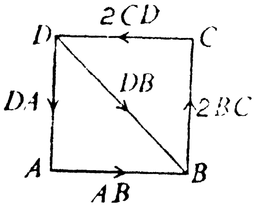
$$\therefore\ T=W.\frac{\sin ACD}{\sin 2ACD}=\frac{W}{2\cos ACD}$$



$$=\frac{Wl}{2\sqrt{l^2-d^2}}. \qquad [\because AB=d, AC=\tfrac{1}{2}l]$$

९. § 3.7 के उदाहरण ५ की तरह हल कीजिए।

१०. यदि क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें बलोंके विघटित अंश क्रमशः x तथा y हों तथा $AB=BC=a$ हो तो

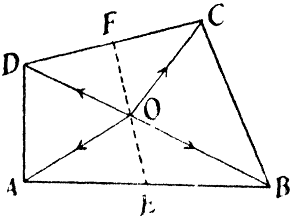


$$x=AB-2CD+DB\cos 45°=a-2a+a=0$$

तथा $y=2BC-DA-DB\sin 45°=2a-a-a=0$

अतएव बल सन्तुलनमें हैं।

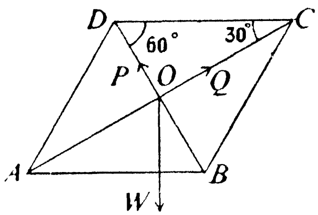
११. यदि E, AB का मध्य बिन्दु हो तो OA तथा OB बलोंका



परिणामी 2OE होगा। इसी प्रकार यदि F, DC का मध्य बिन्दु हो तो

OC तथा OD बलोंका परिणामी 2OF होगा। परन्तु O सन्तुलनमें है, इसलिए OE तथा OF एक ही सरल रेखामें हैं तथा O, EF का मध्य बिन्दु है।

१२. यदि समचतुर्भुजाकार समपटलका भार W हो तो यह अपने भार W, OD दिशामें बल P तथा OC दिशामें बल Q के अन्तर्गत



सन्तुलनमें होगा। अतएव लामीके प्रमेयसे

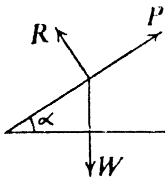
$$\frac{P}{\sin 60^\circ}=\frac{Q}{\sin 30^\circ}=\frac{W}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore \quad P \sin 30^\circ = Q \sin 60^\circ \quad \text{या} \quad P^2=3Q^2.$$

१३. यदि तलका क्षितिजसे झुकाव α हो तो प्रथम स्थितिमें तलके अनुगत बलोंके विश्लिष्ट भागोंका योग $= W \sin \alpha - P = 0$

$$\therefore \sin^2 \alpha = \frac{P^2}{W^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

तथा दूसरी स्थितिमें तलके अनुगत बलोंके विश्लिष्ट भागोंका योग



$= W_1 \sin \alpha - P \cos \alpha = 0$

$$\therefore \sin^2 \alpha = \frac{P^2}{W_1^2 + P^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $P^2 = W^2 - W_1^2$.

१४. प्रश्न १३ के चित्रमें मान लिया $W = 10$ पौंड

$\because$ P, R तथा 10 गणितीय श्रेणीमें हैं, इसलिए यदि सार्व अन्तर (common difference) x हो तो

$$R = 10 + x \text{ तथा } P = 10 + 2x$$

तलके अनुगत तथा लम्ब दिशामें बलोंको विघटित करनेसे

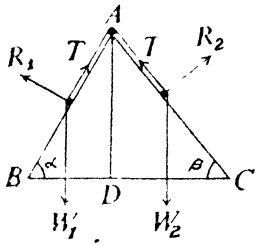
$$10 \sin \alpha = 10 + 2x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$10 \cos \alpha = 10 + x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $x = -2$ या -10, परन्तु $x = -10$ अग्राह्य है, इसलिए $P = 10 - 2 \times 2 = 6$ पौंड

१५. मान लीजिये कि तलोंका झुकाव α तथा β है, तथा AB तथा AC में भार W_1 तथा W_2 रखे हैं जो उन डोरियोंसे बंधे हैं जिनमें तनाव T है और जिनकी तलों पर प्रतिक्रिया R_1 तथा R_2 हैं। चूंकि दोनों भार सन्तुलनमें हैं, इसलिए तलोके अनुगत बलोंका विघटन करनेसे

$W_1 \sin \alpha = T$, (उस पिंडका सन्तुलन ध्यानमें रखते हुए, जो तल AB पर है।)



तथा $w_2 \sin \beta = T$, (उस पिंडका सन्तुलन ध्यानमे रखते हुए, जो AC पर है।)

$$\therefore \frac{W_1}{W_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AD}{AC} \Big/ \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{अत: प्रमेय।}$$

प्रश्नावली ६. (पृष्ठ ६१-६३)

१. चूंकि बल अनुदिश हैं, इसलिए परिणामीका परिमाण

$$=10+15=25 \text{ पौंड}$$

यदि परिणामी 10 पौंडके बलसे x फ़ीटकी दूरी पर हो तो

$$10x=15(15-x), \quad \therefore \quad x=9 \text{ फ़ीट}$$

२. चूंकि बल अवदिश हैं, इसलिए परिणामीका परिमाण

$$=12-3=9 \text{ पौंड}$$

यदि परिणामी 12 पौंडके भारसे x इंचकी दूरी पर हो तो

$$12x=3(12+x), \quad \therefore \quad x=4 \text{ इंच}$$

३. यदि बल P_1 तथा P_2 हैं तो

$$P_1+P_2=8 \text{ तथा } P_1\times 1=P_2\times 3$$

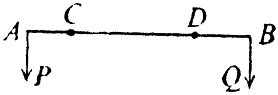
$$\therefore \quad P_1=6 \text{ पौंड तथा } P_2=2 \text{ पौंड}$$

४. यदि बल P_1 तथा P_2 हैं तो

$$P_1-P_2=2 \text{ तथा } P_1\times 6=P_2\times 8$$

$$\therefore \quad P_1=8 \text{ पौंड तथा } P_2=6 \text{ पौंड}$$

५. यदि P तथा Q बल क्रमशः A तथा B पर कार्य करते हों तो परिणामीके क्रिया रेखाकी A से दूरी $=\frac{Q}{P+Q}\cdot AB$



यदि Q के स्थान पर P^2/Q बल लगा दिया जाय तो परिणामीके क्रिया रेखाकी A से दूरी $=\frac{P^2/Q}{P+P^2/Q}\cdot AB=\frac{P}{P+Q}\cdot AB$

जो कि वही है, यदि P तथा Q को बदल दिया जाय।

६. यदि दोनों बल क्रमशः A तथा B पर (चित्र प्रश्न ५) कार्य करते हैं तो

पहली दशामें परिणामीके क्रिया बिन्दुकी A से दूरी $=\dfrac{Q}{P+Q}.AB$

तथा दूसरी ,, ,, ,, ,, ,, ,, $=\dfrac{P}{P+Q}.AB$

यदि यह दूरियां बराबर हैं तो

$$\frac{Q}{P+Q}.AB=\frac{P}{P+Q}.AB, \quad \therefore \quad P=Q.$$

७. पहली स्थितिमें E तथा F पर लगे बल P तथा Q का परिणामी C से होकर जाता है।

$$\therefore \quad EC=\frac{Q}{P+Q}.EF \quad \text{या} \quad \frac{AC}{2}=\frac{Q}{P+Q}\cdot\frac{AB}{2} \quad \ldots\ldots(i)$$

दूसरी स्थितिमें, जबकि P तथा Q की स्थिति बदल दी जाती है, यदि परिणामी D से होकर जाय तो

$$Q.ED=P.FD$$

$$\text{या} \quad Q(AD-AE)=P(AE+EF-AD)$$

$$\text{या} \quad Q(AD-\tfrac{1}{2}AC)=P(\tfrac{1}{2}AC+\tfrac{1}{2}AB-AD) \quad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $AD=\frac{1}{2}AB.$

८. यदि बल P तथा Q क्रमशः A तथा B पर (चित्र प्रश्न ५) कार्य करते हैं तो इनके परिणामीकी A से दूरी $=\dfrac{Q}{P+Q}.AB$

यदि P तथा Q को आपसमें बदल दिया जाय तो नये परिणामीकी A से दूरी $=\dfrac{P}{P+Q}.AB$

$\therefore$ दोनों दूरियोंका अन्तर $= \frac{P}{P+Q}.AB - \frac{Q}{P+Q}.AB$

$$= \frac{P-Q}{P+Q}.AB.$$

९. यदि दोनों बल P_1 तथा P_2 हों तथा P_1 बल परिणामीसे x इंच की दूरी पर हो तो

$$P_1 - P_2 = 21 \quad \text{तथा} \quad P_1/P_2 = 16/9$$

$$\therefore \quad P_1 = 48 \text{ पौंड} \quad \text{तथा} \quad P_2 = 27 \text{ पौंड}$$

यदि दिये बलसे 48 पौंडकी दूरी x इंच हो तो

$$48 \times x = 27(7+x), \quad \therefore \quad x = 9 \text{ इंच}$$

१०. यदि P तथा Q क्रमशः A तथा B पर (चित्र प्रश्न ५) कार्य करते हैं तो

अनुदिशकी स्थितिमें

$$AC = \frac{Q}{P+Q}.AB \quad \text{तथा} \quad BC = \frac{P}{P+Q}.AB$$

तथा अवदिशकी स्थितिमें

$$AD = \frac{Q}{P-Q}.AB \quad \text{तथा} \quad BD = \frac{P}{P-Q}.AB$$

क्योंकि $(P+Q)\ AC = Q.AB = (P-Q).\ \frac{Q}{(P-Q)}.AB$

$$= (P-Q)AD$$

अतः जब $(P+Q)$ और $(P-Q)$ अनुदिश हैं तथा C और D पर कार्य करते हैं तो इनका परिणामी A पर कार्य करता है।

इसी प्रकार

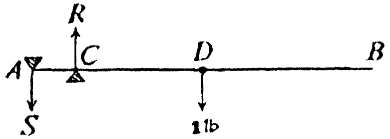
$$(P+Q)\,BC = P.AB = (P-Q).\ \frac{P}{(P-Q)}.AB$$

$$= (P-Q)BD$$

अतः जब $(P+Q)$ तथा $(P-Q)$ अवदिश हैं और C तथा D बिन्दुओं पर कार्य करते हैं तो इनका परिणामी B बिन्दु पर कार्य करता है।

प्रश्नावली ७. (पृष्ठ ६६-६७)

१. छड़ AB को A तथा C खूंटियों पर सन्तुलनमें रखनेके लिए आवश्यक है कि खूंटी A ऊपर तथा खूंटी C नीचे रहे।



यदि खूंटियोंकी प्रतिक्रियाएं S तथा R हों तो चूंकि छड़ सन्तुलनमें है

$\therefore \quad R = S + 1$ ....(i)

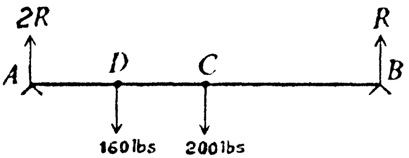
तथा C के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$S \times AC = 1 \times DC$ या $S \times 3 = 1 \times 9$ ....(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $S = 3$ पौंड तथा $R = 4$ पौंड

२. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

३. यदि छड़ AB पर, जो कि A तथा B सहारों पर टिकी हुई है, व्यक्तिकी स्थिति अधिक दबाव वाले सिरे A से x हो तथा B पर प्रतिक्रिया R हो तो A पर प्रतिक्रिया 2R होगी।



क्योंकि छड़ सन्तुलनमें है, इसलिए

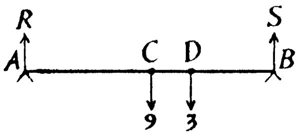
$2R + R = 200 + 160$ या $R = 120$ पौंड

तथा A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$160 \times AD + 200 \times AC = R.AB$ या $160 \times x + 200 \times 8 = 120 \times 16$

या $x = 2$ फ़ीट

४. यदि पुल A तथा B स्तम्भों पर स्थित हो, गाड़ी D पर हो तथा प्रतिक्रियाएं R और S हों तो

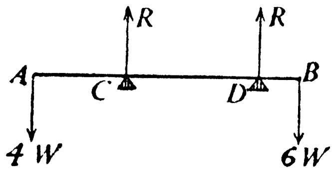


$R+S=9+3$ या $R+S=12$ ....(i)

तथा A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $9\times24+3\times32=S\times48$ ......(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $R=5\frac{1}{2}$ टन तथा $S=6\frac{1}{2}$ टन

५. यदि पहली खूंटी, A से x इंच दूर है तो चूंकि छड़ सन्तुलनमें है, इसलिए $2R=4W+6W$ या $R=5W$

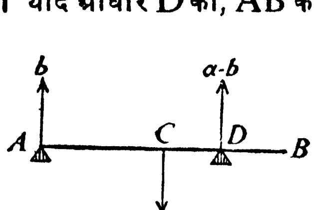


तथा C के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $4W.AC+R.CD=6W.CB$

या $4W.x+5W\times10=6W(20-x)$

$\therefore$ $x=7$ इंच

६. मान लिया कि गर्डर AB, जिसकी लम्बाई l है, A तथा D आधारों पर टिका है। यदि आधार D की, AB के मध्य बिन्दु C से दूरी



x हो तथा A की प्रतिक्रिया b हो तो D की प्रतिक्रिया $a-b$ होगी, क्योंकि $b<\frac{1}{2}a$.

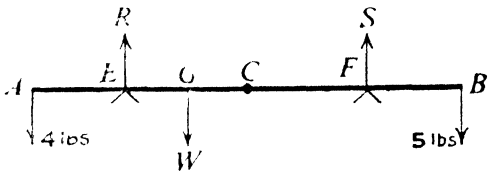
अब C के सापेक्ष घूर्ण लेनेमे

$b.\frac{1}{2}l = x.(a-b)$, $\therefore$ $x = \frac{lb}{2(a-b)}$, (जहां l गर्डरकी लम्बाई है।)

७. मान लिया कि छड़का भार W है तथा गुरुत्वकेन्द्र G है, जो कि 4 पौंडका भार लटकाने वाले बिन्दु A से x इंचकी दूरी पर है।

जब हम बिन्दु A से 4 पौंडका भार लटकाते हैं तो छड़, खूंटी E के सापेक्ष उलटनेकी अवस्थामे हो जाती है और तब $S=0$.

अतः E के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $4 \times 3\frac{1}{2} = W(x - 3\frac{1}{2})$ ....(i)

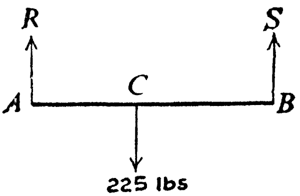


इसी प्रकार B से 5 पौंडका भार लटकानेसे, छड़ खूंटी F के सापेक्ष उलटनेकी अवस्थामें आ जाती है और तब $R=0$ और F के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $5 \times 3\frac{1}{2} = W(12\frac{1}{2} - x)$ ....(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $W = 3\frac{1}{2}$ पौंड तथा $x = 7\frac{1}{2}$ इंच

८. प्रश्न ७ की तरह हल कीजिए।

९. यदि कन्धों पर दबाव R तथा S हैं तो चूंकि भार सन्तुलित अवस्थामें हैं, इसलिए $R+S=225$ ....(i)



तथा C के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $R \times 4 = S \times 5$ ....(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $R = 125$ पौंड तथा $S = 100$ पौंड

१०. प्रश्न ६ के चित्रमें मान लो बलवान तथा निर्बल मनुष्योंकी स्थिति क्रमश: A तथा B हैं तथा C पर 270 पौंड भार है। यदि बलवान मनुष्य पर दबाव $R=180$ पौंड हो, तो निर्बल मनुष्य पर दबाव

$$S=270-180=90 \text{ पौंड}$$

यदि भार A से x फ़ीट दूर हो तो चूंकि भार सन्तुलित अवस्थामें हैं, इसलिए C के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$180\times x=90(6-x), \quad \therefore \quad x=2 \text{ फ़ीट}$$

११. प्रश्न १० की तरह हल कीजिए।

१२. मान लिया कि दंड AB है, जिसके सिरे A को एक व्यक्ति पकड़े हुए है तथा सिरे B पर भार W है।

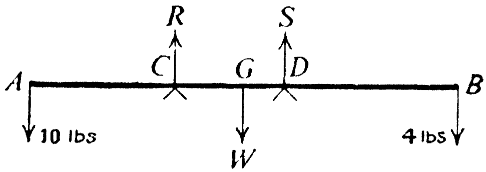
यदि कन्धे पर दबाव R, कन्धेकी A से दूरी x तथा $AB=l$ हो तो A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$R.x=W.l \quad \text{या} \quad R=Wl.\frac{1}{x} \quad \text{या} \quad R \propto \frac{1}{x},$$

(क्योंकि Wl एक स्थिर संख्या है।)

१३. मान लीजिए W छड़का भार है तथा खूंटी C की, गुरुत्वकेन्द्र G से दूरी x फ़ुट है। यदि छड़ A पर 10 पौंडका भार लटकानेसे C के सापेक्ष उलटनेकी अवस्थामें हो जाती है तो $S=0$ और C के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$W.x=10\,(2-x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$



इसी प्रकार B पर 4 पौंडका भार लटकाने पर छड़ D के सापेक्ष उलटनेकी अवस्थामें हो जाती है, इसलिए $R=0$.

अत: D के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $W(1-x)=4\{2-(1-x)\}$ ...(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $x=\frac{2}{3}$ फुट $=8''$ तथा $W=20$ पौंड

प्रश्नावली ८. (पृष्ठ ७१)

१. O के सापेक्ष AB दिशामें 3 पौंडके बलका घूर्ण =

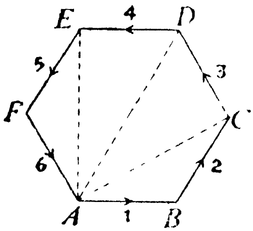
(क) $3\times10=30$ पौंड इंच

(ख) $3\times10\ \sin\ 45^\circ=15\sqrt{2}$ पौंड इंच

(ग) $3\times10\sin135^\circ=15\sqrt{2}$ पौंड इंच

(घ) $3\times10\sin120^\circ=15\sqrt{3}$ पौंड इंच

२. यदि $AB=a$, तो $AC=a\sqrt{3}$, $AD=2a$ तथा $AE=a\sqrt{3}$.



A के सापेक्ष AB के अनुगत बलका घूर्ण $=1\times0=0$ इकाई

„ BC „ „ $=2\times a\sqrt{3}\sin30^\circ$

$=a\sqrt{3}$ इकाई

„ CD „ „ $=3\times a\sqrt{3}$ इकाई

„ DE „ „ $=4\times a\sqrt{3}$ „

„ EF „ „ $=5\times a\sqrt{3}\sin30^\circ$

$=\frac{5}{2}a\sqrt{3}$ इकाई

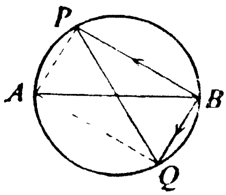
„ FA „ „ $=6\times0=0$ „

प्रश्नावली ९. (पृष्ठ ७९-८०)

१. देखिए § 5.7 तथा § 5.8.

२. त्रिभुजकी दो भुजाओं द्वारा एक क्रममें निरूपित बलोंका परिणामी तीसरी भुजाके समानान्तर होगा। इसलिए इन बलोके परिणामीका, त्रिभुजकी तीसरी भुजाके प्रत्येक बिन्दुके सापेक्ष घूर्ण बराबर होगा, क्योंकि किसी बिन्दुके सापेक्ष बलोके परिणामीका घूर्ण, उस बिन्दुके सापेक्ष बलोके घूर्णके योगके बराबर होता है।

३ चूंकि PAQ समकोण है, इसलिए AQBP एक आयत है।

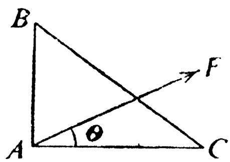


$\therefore \quad QA = BP$ तथा $BQ = PA$

अब A के सापेक्ष BP का घूर्ण $= BP \times AP$

तथा A ,, BQ ,, $= BQ \times AQ$ जो कि बराबर हैं।

४. मान लिया कि बल F है, जो कि AC से θ कोण बनाता है। चूंकि A के सापेक्ष F का घूर्ण शून्य है, इसलिए F, A से होकर जायगा।

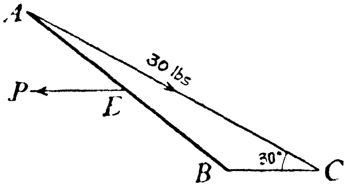


B के सापेक्ष F का घूर्ण $= F \times 3 \cos \theta = 9$ .... (i)

C ,, F ,, $= F \times 4 \sin \theta = 16$ ....(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\theta = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$, $F = 5$ इकाई

५. यदि क्षैतिज बल P हो तो दंडके निचले सिरेके सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



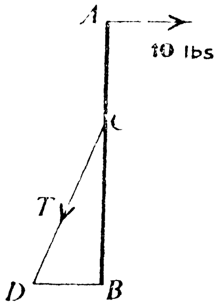
$$P \times 4 = 30 \times 20 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \quad P = 75\sqrt{3} \text{ पौंड}$$

६. यदि डोरीका तनाव T हो तो B के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$10 \times 20 = T \times 12 \sin DCB = T \times 12 \times \tfrac{5}{13}$$

$$\therefore \quad T = 43\tfrac{1}{3} \text{ पौंड}$$

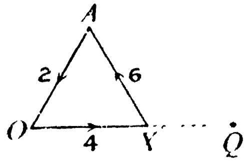


खम्भेके निचले सिरेमें खूंटीकी ओर बल $= T \cos CDB - 10$

$$= 6\tfrac{2}{3} \text{ पौंड}$$

प्रश्नावली १०. (पृष्ठ ८२-८३)

१. यदि परिणामी, OX को Q पर काटता हो तो Q के सापेक्ष बलोंके घूर्णोंका योग शून्य होगा। अतः Q के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$2(a+QX)\sin 60^\circ = 6QX\sin 60^\circ$, $\therefore$ $QX=\frac{1}{2}a$ या $OQ=\frac{3}{2}a$,
(जहां a समत्रिबाहु त्रिभुजकी भुजाकी लम्बाई है।)

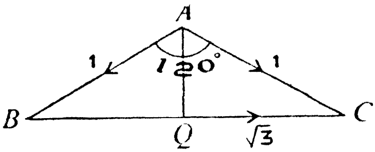
OX दिशामें बलोंके अवयव $=4-2\cos 60^\circ-6\cos 60^\circ=0$

तथा OX के लम्बकी दिशामें बलोके अवयव $=6\sin 60^\circ-2\sin 60^\circ$
$=2\sqrt{3}$ पौंड

२ तथा ३. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

४. यदि परिणामी BC को Q पर काटता है तो Q के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$1\times BQ\sin ABQ = 1\times QC\sin ACQ$$
$$\therefore \quad BQ=QC \qquad (\text{क्योंकि } \angle ABQ=\angle ACQ)$$



BC के अनुगत बलोंके अवयव
$=\sqrt{3}+1\cos ACQ-1\cos ABQ=\sqrt{3}$

तथा BC के लम्ब दिशामें बलोंके अवयव
$=1\cos 60^\circ+1\cos 60^\circ=1$

$\therefore$ परिणामीकी दिशा BC से $\tan^{-1}(1/\sqrt{3})$ अर्थात् 30° के कोण पर अर्थात् AC के समानान्तर।

५. यदि परिणामीकी क्रिया रेखा X तथा Y अक्षको F तथा E पर काटती हो तो F के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

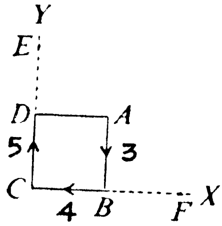
$$3(CF-CB)=5.CF, \quad \therefore \quad CF=-\tfrac{3}{2}BC=-\tfrac{3}{2}AB$$

इसी प्रकार E के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$4.CE+3.BC=0 \quad \text{या} \quad CE=-\tfrac{3}{4}AB$$

इसलिए E तथा F बढ़ाई गई DC तथा BC पर स्थित

CX की दिशामें बलोंके अवयव $= -4$



तथा CY की दिशामे बलोंके अवयव $= 5-3 = 2$

$\therefore$ परिणामी $= \sqrt{(-4)^2+2^2} = 2\sqrt{5}$ पौंड

तथा CF से परिणामीकी दिशा $\tan^{-1}(-\frac{1}{2})$ के कोण

परिणामीके क्रिया रेखा EF की C से दूरी

$$= CF.\sin CFE = \tfrac{3}{2}AB.\frac{CE}{EF} = \tfrac{3}{2}AB.\tfrac{3}{4}AB\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}AB^2+\frac{9}{16}AB^2}}$$

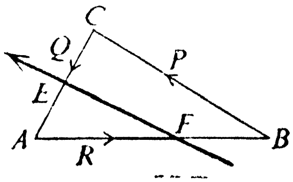
$$= \tfrac{3}{10}\sqrt{5}AB.$$

६, ७, ८ तथा ६. प्रश्न ५ की तरह हल कीजिए।

१०. यदि परिणामी AC तथा AB के बिन्दु E तथा F से जाय तो E के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$R.AE\sin A + P.CE\sin C = 0$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = -\frac{P\sin C}{R\sin A} = -\frac{P.c}{R.a}$$



इसी प्रकार F के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

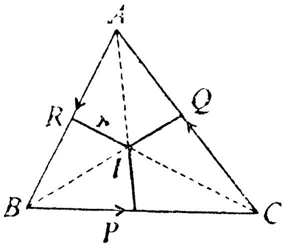
$$\frac{AF}{BF}=-\frac{P\sin B}{Q\sin A}=-\frac{P.b}{Q.a}$$

चूंकि यह दोनों अनुपात ऋणात्मक हैं, इसलिए E तथा F बढ़ाये गय CA तथा BA पर इस प्रकार स्थित होंगे कि

$$\frac{AE}{CE}=\frac{P.c}{R.a} \quad \text{या} \quad \frac{AF}{BF}=\frac{P.b}{Q.a}.$$

प्रश्नावली ११. (पृष्ठ ८५)

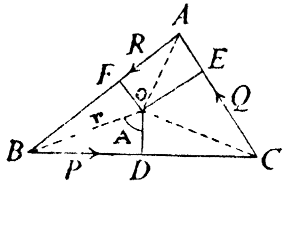
१. यदि कोण A, B तथा C के अर्धक I पर मिलते हैं तो I अन्तः केन्द्र होगा।



यदि परिणामी I से होकर जाता हो तो इस बिन्दुके सापेक्ष बलोंका घूर्ण शून्य होगा।

$$\therefore \quad P.r+Q.r+R.r=0 \quad \text{या} \quad P+Q+R=0.$$

२. यदि AB, BC तथा CA के लम्ब अर्धक O पर मिलते हैं तो O बिन्दु $\triangle ABC$ का परिवृत्त केन्द्र होगा।



यदि परिणामी O से होकर जाता है तो इस बिन्दुके सापेक्ष बलोंका घूर्ण शून्य होगा।

$$\therefore\quad P.r\cos A+Q.r\cos B+R.r\cos C=0$$

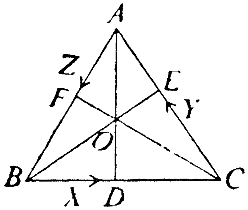
या $$P.\cos A+Q.\cos B+R.\cos C=0.$$

३. यदि शीर्षोंसे, सामनेको भुजाओं पर खीचे गये लम्ब O पर मिलें तो O बिन्दु लम्ब केन्द्र होगा।

यदि परिणामी O से होकर जाता हो तो इस बिन्दुके सापेक्ष बलोंका घूर्ण शून्य होगा।

$$\therefore\quad X.OD+Y.OE+Z.OF=0$$

परन्तु $$OD=BD\tan OBD=BD\tan(90^\circ-ECB)$$
$$=BD\cot C=AB\cos B.\cot C=c\cos B\cot C$$



इसी प्रकार $OE=a\cos C\cot A$ तथा $OF=b\cos A\cot B$

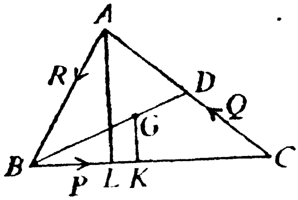
$$\therefore\quad X.\frac{c\cos B.\cos C}{\sin C}+Y.\frac{a\cos C.\cos A}{\sin A}+Z.\frac{b\cos A.\cos B}{\sin B}=0$$

$$\because\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore\quad X.\cos B.\cos C+Y.\cos C.\cos A+Z.\cos A.\cos B=0$$

या $$X\operatorname{Sec}A+Y\operatorname{Sec}B+Z\operatorname{Sec}C=0.$$

४. मान लिया कि BC, CA तथा AB के अनुगत P, Q तथा R बल लगे हैं। यदि त्रिभुजके गुरुत्वकेन्द्र G तथा शीर्ष A से BC पर लम्ब GK तथा AL खींचे तो



$$GK = \tfrac{1}{3} AL = \tfrac{1}{3} c \sin B$$

यदि परिणामी G से होकर जाता है तो G के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$P.\tfrac{1}{3} c \sin B + Q.\tfrac{1}{3} a \sin C + R.\tfrac{1}{3} b \sin A = 0$$

$$\because \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$

$$\therefore \quad P.k \sin C. \sin B + Q.k \sin A. \sin C + R.k \sin B. \sin A = 0$$

या $P \operatorname{cosec} A + Q \operatorname{cosec} B + R \operatorname{cosec} C = 0$ ....(i)

यदि बलोंका परिणामी लम्बसे होकर जाता है तो

$P \operatorname{Sec} A + Q \operatorname{Sec} B + R \operatorname{Sec} C = 0$ ......(ii) (प्रश्न ३ से)

अत: (i) तथा (ii) को हल करनेसे

$$\frac{P}{\operatorname{Sec} B. \operatorname{cosec} C - \operatorname{cosec} B. \operatorname{Sec} C} = \frac{Q}{\operatorname{Sec} C. \operatorname{cosec} A - \operatorname{cosec} C. \operatorname{Sec} A} = \frac{R}{\operatorname{Sec} A. \operatorname{cosec} B - \operatorname{Sec} B. \operatorname{cosec} A}$$

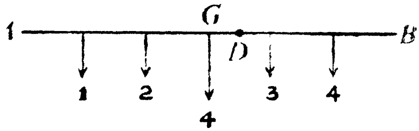
या $P : Q : R = \sin 2A. \sin (B - C) : \sin 2B. \sin (C - A) : \sin 2C. \sin (A - B)$.

प्रश्नावली १२. (पृष्ठ ८७)

१ तथा २. यह प्रश्न बहुत आसान है, अत: इनका हल नहीं दिया

गया है, अपितु प्रश्न ३ का हल दिया गया है (जो कि इन प्रश्नोंकी अपेक्षा कठिन है)। अतः इन प्रश्नोंको प्रश्न ३ की सहायतासे हल कीजिए।

३. मान लिया छड़ AB के सिरे A से, बिन्दु D की स्थिति, जिसके सापेक्ष छड़ सन्तुलनमें रहेगी x फ़ीट है।



$\therefore$ D के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$4(x-2\tfrac{1}{2})+2(x-2)+1(x-1)=3(3-x)+4(4-x)$$

$$\therefore \quad x=2\tfrac{6}{7} \text{ फ़ीट}$$

४. पृष्ठ ८६ में दिये हुए उदाहरणकी तरह हल कीजिए।

प्रश्नावली १३. (पृष्ठ ६१)

१ तथा २. पृष्ठ ६० में दिये हुए उदाहरणकी तरह हल कीजिए।

प्रश्न. (पृष्ठ ६२)

अनुच्छेद ६.६ की तरह हल कीजिए।

प्रश्नावली १४. (पृष्ठ ६३)

१. बल 6 पौंड तथा युग्म (4, 3) का परिणामी एक बल होगा जो 6 पौंडके बराबर है (क्योंकि युग्मके बलोंका परिणामी शून्य है) और उसके समानान्तर है।

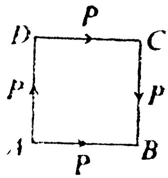
इस परिणामीकी स्थिति ज्ञात करनेके लिए युग्म (4, 3) को हटाकर उसके बदले समान घर्णका एक दूसरा युग्म लगाया, जिसके बलोंमें से प्रत्येक का परिमाण 6 पौंड है। उनमें से एक विपरीत दिशामें, उस बिन्दु पर

लगा है, जिस पर कि 6 पौंडका बल लगा है तथा मान लिया दूसरा इससे x फ़ीट दूर है।

$$\therefore\ 4\times3=6\times x,\quad \therefore\ x=2 \text{ फ़ीट}$$

२. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

३. AB तथा DC के अनुगत लगे बलोंका परिणामी 2P बल होगा जो कि DC के समानान्तर होगा तथा AD के मध्य बिन्दुसे होकर



जायगा। अब इस परिणामी बल 2P तथा युग्म (P, AB) का अन्तिम परिणामी, प्रश्न १ की तरह निकाल सकते हैं।

प्रश्नावली १५. (पृष्ठ ९४)

१. दिये हुए त्रिभुजका क्षेत्रफल $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=\sqrt{9\times4\times4\times1}=12$$

अनुच्छेद 6.8 से दिये हुए बलोंका परिणामी $2\times12=24$ इकाई पूर्णका युग्म है।

२. अनुच्छेद 6.8 की मददसे हल कीजिए।

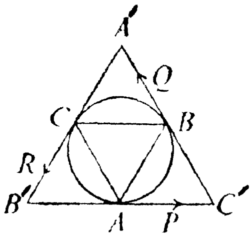
प्रश्न. (पृष्ठ ९६)

अनुच्छेद 6.9 की मददसे हल कीजिए।

प्रश्नावली १६. (पृष्ठ ९८)

१. यदि त्रिभुज ABC के परिगत वृत्त ABC के स्पर्शज्याओं B′C′, C′A′ तथा A′B′ के अनुगत P, Q तथा R बल लगे हों और एक युग्म बनाते हों तो

$$P:Q:R = B'C' . C'A' : A'B'$$
$$= \sin A' : \sin B' : \sin C'$$

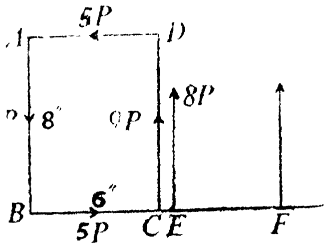


$$= \sin(180° - 2A) : \sin(180° - 2B) : \sin(180° - 2C)$$
$$= \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C.$$

२. क्योंकि समानान्तर चतुर्भुजकी भुजाओंके अनुगत लगे चारों बल एक युग्मके बराबर हैं, इसलिए ये भुजाओंसे क्रमानुसार निरूपित किये जा सकते है।

चूंकि समानान्तर चतुर्भुजकी सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं, इसलिए इन पर लगे बलोंका परिमाण बराबर होगा और चूंकि ये एक युग्म बनाते हैं इसलिए इनकी दिशाएं विपरीत होंगी।

३. BC के अनुगत बल 5P और DA के अनुगत बल 5P एक युग्म बनाते है, जिसका घूर्ण 5P × 8 इकाइयां वामावृत्त दिशामें है। AB के अनुगत P और CD के अनुगत 9P दो मवदिश समानान्तर बल हैं, जिनका परिणामी बल 8P, CD के समानान्तर है और BC के बाहरी बिन्दु E से होकर जाता है, जहां



$$P.BE = 9P.CE \quad \text{या} \quad (BC+CE) = 9.CE$$
$$\text{या} \quad CE = \tfrac{1}{8}BC = \tfrac{3}{4}''$$

चूंकि इस परिणामी बलकी तथा पहले वाले युग्मकी दिशा एक ही ओर है, इसलिए अन्तिम परिणामी 8P का एक बल है, जो कि BC के समानान्तर है। इसकी स्थिति ज्ञात करनेके लिए युग्म (5P, 8) को हटाकर उसके बदले समान घूर्णका एक दूसरा युग्म लगाया, जिसके बलोंमें से प्रत्येककी मात्रा 8P है। उनमें से एक को दिशा E बिन्दु पर लगे बल 8P के विपरीत है और दूसरा मान लिया, BC के F बिन्दुसे होकर जाता है। इस प्रकार EF नवीन युग्मकी भुजा हुई।

$$\text{अब} \quad 5P \times 8 = 8P.EF \quad \text{या} \quad EF = 5'', \;\therefore\; CF = 5\tfrac{3}{4}''.$$

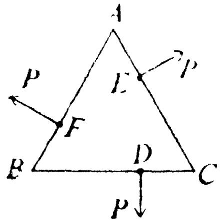
४. उपर्युक्त प्रश्नकी तरह हल कीजिए।

५. यदि $BC = a$ तो $BD = CE = AF = \frac{2}{3}a$

तथा $DC = AE = BF = \frac{1}{3}a$

BC दिशामें बलोंके अवयव

$$= P\sin 60^\circ - P\sin 60^\circ = 0$$



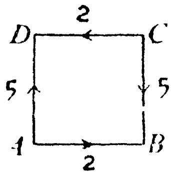
तथा BC के लम्ब दिशामें बलोंके अवयव

$$= P\cos 60^\circ + P\cos 60^\circ - P = 0$$

$\therefore$ इन बलोंका परिणामी $= 0$, अतः ये तीनों बल एक युग्म बनायेंगे।

युग्मका घूर्ण = किसी बिन्दु (मान लीजिए A) के सापेक्ष दिये बलों का घूर्ण $= P.\frac{2}{3}a + P.\frac{1}{3}a\cos 60^\circ - P.\frac{1}{3}a = \frac{1}{2}P.a.$

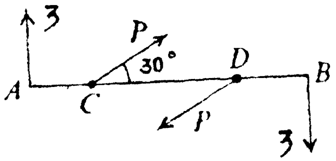
६. AD तथा CB के अनुगत लगे 5, 5 पौंडके बल एक युग्म बनाते हैं, जिसका घूर्ण $= 5 \times 3 = 15$ पौंड फ़ुट



इसी प्रकार AB तथा CD के अनुगत लगे 2, 2 पौंडके बल एक युग्म बनाते हैं, जिसका घूर्ण $= -2 \times 3 = -6$ पौंड फ़ुट

$\therefore$ बलोंके परिणामी युग्मका घूर्ण $= 15 - 6 = 9$ पौंड फ़ुट

७. यदि C तथा D बिन्दुओं पर विरोधी दिशा में P बल लगे हों तो इन बलोंके द्वारा बने युग्मका घूर्ण $= P.CD \sin 30^\circ$

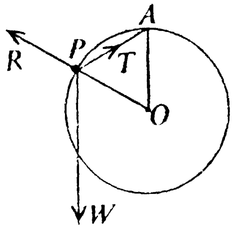


A तथा B बिन्दुओं पर विरोधी दिशामें लगे 3 पौंडके बल द्वारा बने युग्मका घूर्ण $= 3 \times 12 = 36$ पौंड फ़ुट

छड़के सन्तुलनके लिए $P.CD \sin 30^\circ = 36$ या $CD = \frac{72}{P}$.

प्रश्नावली १७. (पृष्ठ १०५-१०७)

१. मान लिया कि पिंडका भार W है, जो कि बिन्दु P पर डोरी PA($=$OA) की सहायता से स्थित है। यदि पिंडकी प्रतिक्रिया R तथा डोरीका तनाव T हो तो लामीके प्रमेयसे



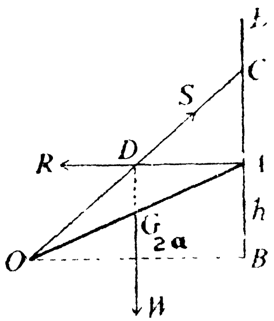
$$\frac{R}{\sin 120^\circ}=\frac{T}{\sin 120^\circ}=\frac{W}{\sin 120^\circ}, \quad \therefore \quad R=T=W.$$

२. अनुच्छेद 7.4 के उदाहरण १ की तरह हल कीजिए।

३. यदि बिन्दु A पर दीवारकी प्रतिक्रिया R तथा बिन्दु G पर छड़ के भार W की क्रिया रेखाएं D पर मिलें तो बिन्दु O की प्रतिक्रिया S भी D से होकर जायगी।

समान त्रिभुज CAD तथा CBO से

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BO}{AD} \quad \text{या} \quad \frac{AC+h}{AC}=\frac{2a}{a} \quad \text{या} \quad AC=h$$

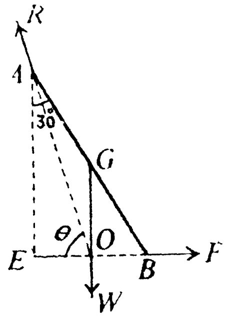


चूंकि बल R, S, W त्रिभुज CAD की AD, DC, CA भुजाओं द्वारा दिशा तथा परिमाणमें निरूपित हो सकते हैं, इसलिए यह बलोंका त्रिभुज है।

$$\therefore \quad \frac{R}{AD}=\frac{S}{DC}=\frac{W}{CA}, \quad \therefore \quad S=W.\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}$$

तथा　$R=W.\frac{a}{h}.$

४. यदि छड़के भार W तथा क्षैतिज बल F की क्रिया रेखाएं एक दूसरेको O पर काटें तो कब्जे A की प्रतिक्रिया R भी O से जायगी।



यदि　$AOE=\theta$ तथा $\angle BAE=30°$ तो

$$\tan\theta=\frac{AE}{EO}=\frac{2AE}{EB}=2\cot 30°=2\sqrt{3}$$

चूंकि $\triangle AEO$ बलोंका त्रिभुज है, $\therefore \frac{R}{AO}=\frac{W}{AE}=\frac{F}{EO}$

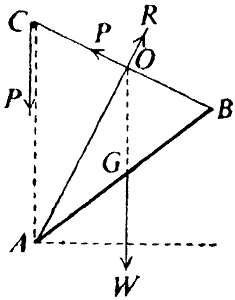
$$\therefore \quad R=\frac{W}{\sin\theta}=\sqrt{\tfrac{13}{12}}\,W \text{ तथा } F=\frac{W}{\tan\theta}=\tfrac{1}{6}\sqrt{3}W.$$

५. चूंकि डोरीमें P भार बंधा है, इसलिए इसमें तनाव P होगा।

यदि छड़के भार W तथा डोरीके तनाव P की क्रिया रेखाएं एक दूसरे को O पर काटें तो कब्जे A की प्रतिक्रिया R भी O से होकर जायगी।

चूंकि त्रिभुज AOC बलोंका त्रिभुज है तथा $\angle AOC$ समकोण है

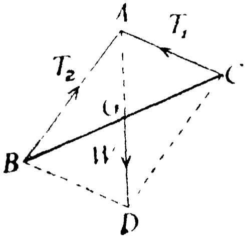
$$\therefore \quad \frac{P}{CO}=\frac{W}{CA} \quad \text{या} \quad P=W\cos ACB.$$



६. अनुच्छेद 7.4 के उदाहरण २ की तरह हल कीजिए।

७. मान लिया कि डोरी CA तथा BA का तनाव T_1 तथा T_2 और छड़का भार W है।

चूंकि छड़ सन्तुलनमें है, इसलिए CA तथा BA, G से खींची गयी उर्ध्वाधर रेखाको एक बिन्दु पर काटेंगी।



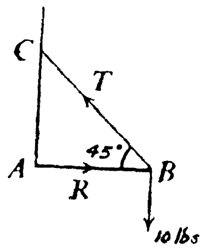
समान्तर चतुर्भुज ABDC पूरा किया। प्रकट है कि $\triangle ADC$ बलोंका त्रिभुज है।

$\triangle ABC$ में $2(AG^2+BG^2)=AB^2+AC^2$ या $2(AG^2+4)=9+4$

या $\quad 2AG^2=5, \therefore AD^2=4AG^2=10$ या $AD=\sqrt{10}$

$\therefore \quad T_1 : T_2 : T_3 = AC : DC : AD = 2 : 3 : \sqrt{10}$

८. चूंकि बिन्दु B से 10 पौंडके भार तथा डोरीके तनावकी क्रिया रेखाएं जाती हैं, इसलिए कब्जे A की प्रतिक्रिया R भी B से होकर जायगी।



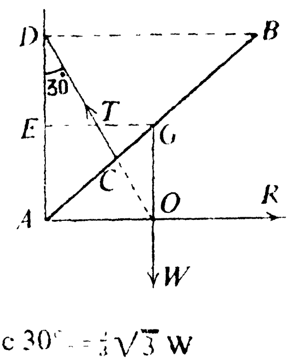
बलोका क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशाओंमें विश्लेषण करनेसे

$$T\cos 45° = R \text{ तथा } T\sin 45° = 10$$

$$\therefore \quad T = 10\sqrt{2} \text{ पौंड तथा } R = 10 \text{ पौंड}$$

९. यदि छड़के भार W तथा स्पर्श बिन्दु A की प्रतिक्रिया R की क्रिया रेखाएं एक दूसरेको O पर काटें तो डोरीका तनाव T भी O से होकर जायगा।

चूंकि $\triangle DAO$ बलोंका त्रिभुज है, इसलिए $\dfrac{T}{OD} = \dfrac{W}{AD}$



या $T = W\sec 30° = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,W$

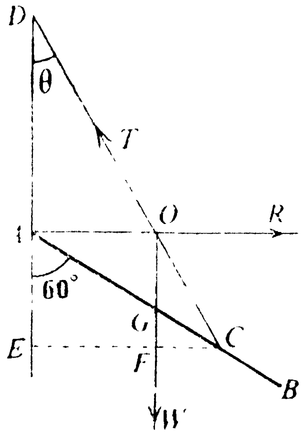
यदि AB के मध्य बिन्दु G से GE, DB के समानान्तर क्षैतिज दिशामें खींचे तो

$$AO = GE = \tfrac{1}{2}DB$$

अब समान त्रिभुज CAO तथा CDB से

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AO}{BD}=\frac{1}{2}, \quad \therefore \quad AC=\frac{1}{3}AB.$$

१०. यदि G से उर्ध्वाधर दिशामें W भार तथा A से क्षैतिज दिशा में प्रतिक्रिया R एक दूसरेको O पर काटें तो तनाव T भी O से होकर जायगा।



यदि $\angle ADC=\theta$, तो

$$\tan\theta=\tan COF=\frac{CF}{OF}=\frac{CG\sin 60^\circ}{AE}$$

$$=\frac{2\sin 60^\circ}{6\cos 60^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \therefore \quad \theta=30^\circ$$

$\because \quad \angle ACD=60^\circ-\theta=30^\circ, \quad \therefore \quad AD=AC=6$ फीट

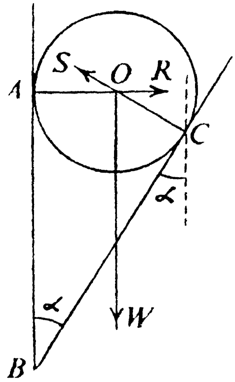
बलोंके $\triangle DAO$ से

$$\frac{T}{OD}=\frac{W}{AD} \text{ या } T=W\sec 30^\circ=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,W.$$

११. यदि धरातलोंकी प्रतिक्रियाएं क्रमशः R तथा S हों तो चूंकि गोला सन्तुलनमें है, इसलिए

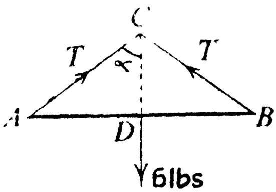
उर्ध्वाधर दिशामें बलोंके अवयव $= W-S\sin\alpha=0$ ....(i)

तथा क्षैतिज दिशामें बलोंके अवयव $= R - S \cos \alpha = 0$ ....(ii



$\therefore$ (i) तथा (ii) से $S = W \operatorname{cosec} \alpha$ तथा $R = W \cot \alpha$

१२. यदि AC तथा BC के तनाव T तथा 6 पौंडके भारकी रेखाए एक दूसरेको O पर काटें और AC तथा BC का उर्ध्वाधरसे झुकाव α हो तो बलोंका उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे

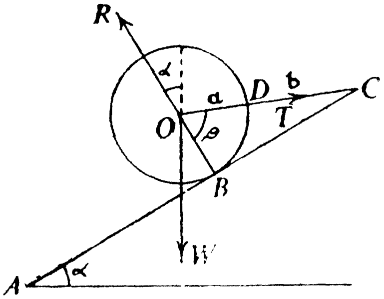


$2T \cos \alpha = 6$ या $T = 3 \sec \alpha = 3 . \frac{AC}{DC} = 3 . \frac{5}{2} / \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 2^2} = 5$ पौं

१३. मान लिया $\angle COB = \beta$

चूंकि गोला सन्तुलनमें है, इसलिए लामी के प्रमेयसे

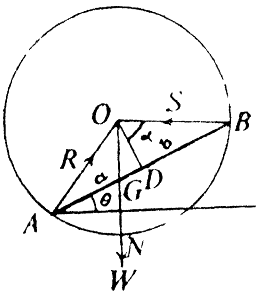
$$\frac{T}{\sin ROW} = \frac{W}{\sin ROC},$$ जहां T डोरीका तनाव है।



$$\therefore \quad T=\frac{W\sin\alpha}{\sin\beta}=W\sin\alpha.\frac{a+l}{\sqrt{(a+l)^2-a^2}}=\frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}.$$

प्रश्नावली १८. (पृष्ठ ११७-१२०)

१. A तथा B की प्रतिक्रियाएं R और S, O से होकर जांयगी, इसलिए बल्लीके गुरुत्व केन्द्रसे खींचा गया उर्ध्वाधर भी O से होकर जायगा।



$\because \quad \angle BOD=\alpha$ और

अब $\dfrac{a}{b}=\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{AD-GD}{BD+GD}=\dfrac{OD.\tan AOD-OD.\tan GOD}{OD.\tan BOD+OD.\tan GOD}$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{\tan\alpha+\tan\theta}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha.$$

२. प्रश्नावली १७ के प्रश्न ४ के चित्रमें यदि $W = 12$ पौंड तथा $F = 9$ तो चूकि $\triangle AEO$ बलोंका त्रिभुज है

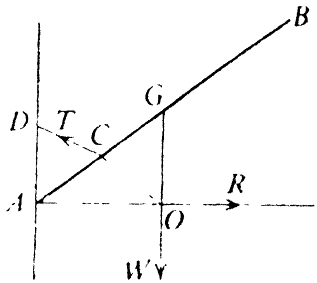
$$\therefore \quad \frac{12}{AE} = \frac{9}{EO} \quad \text{या} \quad \frac{EO}{AE} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \tan BAE = \frac{BE}{AE} = \frac{2EO}{AE} = 2.\frac{3}{4} = \frac{3}{2}, \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right).$$

३. प्रश्न २ की तरह हल कीजिए।

४. प्रश्नावली १७ के प्रश्न ६ के दूसरे भागकी यह विपरीत स्थिति है।

५. यदि छड़के भार W तथा दीवारकी प्रतिक्रिया R एक दूसरेसे O पर मिलें तो डोरीका तनाव T भी O से होकर जायगा।



$\because \quad AC = \frac{1}{4}AB, \quad \therefore \quad AC = CG$

$\because \quad \triangle ACG$ में $\angle AOG$ समकोण है

$\therefore \quad AC = CO$ या $\angle CAO = \angle COA$

$\therefore \quad DAO$ तथा GAO समरूप त्रिभुज है।

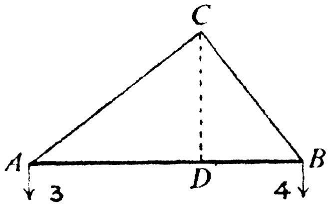
$\therefore \quad DO = AG = \frac{1}{2}AB$

अत: डोरीकी लम्बाई

$$CD = OD - CO = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}AB$$

६. A तथा B पर लगे भारोंका परिणामी AB के बिन्दु D से इस प्रकार कार्य करेगा कि $AD : BD = 4 : 3$.

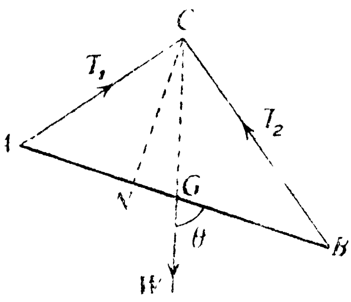
∵ खूंटी C चिकनी है तथा डोरी एक ही है, इसलिए AC तथा BC में तनाव एक ही होगा और DC, $\angle ACB$ को समद्विभाजित करेगा।



$\triangle ACD$ तथा $\triangle BCD$ से $AC : BC = AD : BD = 4 : 3$

$\therefore$ $AC : BC : AB = 4 : 3 : 5$ अतः $\angle ACB = 90°$.

७. ∵ $AB = 15''$, $AC = 9''$ तथा $BC = 12''$



$\therefore$ $ACB = 90°$ और $CG = AG = GB = \frac{15}{2}''$

त्रिकोणमिति से

$$\sin \theta = 2 \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta$$

$$= 2 \sin GBC \cos GBC = 2 \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AB} = 2 \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{12}{15}$$

$\therefore$ $25 \sin \theta = 24$.

८. माना प्रश्न ७ के चित्रमें $AC=10''$, $BC=14''$ तथा $AB=16''$. सन्तुलनकी स्थितिमें AB के मध्य बिन्दु G से खींचा गया उर्ध्वाधर C से होकर जायगा। C से AB पर CN लम्ब खींचा।

यदि $NA=x$ तो $NB=10-x$

और $CN^2=(14)^2-(16-x)^2=(10)^2-x^2$, $\therefore\ x=5''$

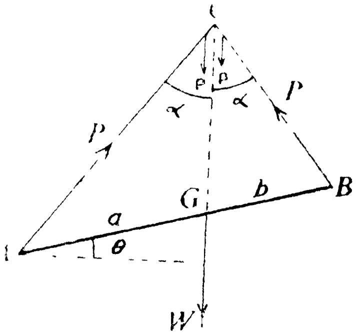
अब $CN=\sqrt{(10)^2-5^2}=\sqrt{75}$ और $GN=8-5=3''$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{CN}{GN}=\frac{\sqrt{75}}{3},\quad \therefore\quad \theta=\tan^{-1}(\tfrac{5}{3}\sqrt{3}).$$

९. चूंकि दोनों डोरियोंसे भार P लटकाया जाता है, इसलिए दोनों डोरियोंमें तनाव P होगा।

क्योंकि भार W, दो बराबर के बल P, P को स्थिर करता है, इसलिए CG, $\angle ACB$ को दो बराबर भागोंमें विभाजित करेगा।

मान लिया $\angle ACG=\angle BCG=\alpha$



उर्ध्वाधर दिशामें बलोंको विश्लेषित करनेसे

$$2P\cos\alpha=W,\quad \therefore\quad \cos\alpha=\frac{W}{2P}$$

त्रिकोणमितिके प्रमेयसे $(a+b)\cot BGC=a\cot\alpha-b\cot\alpha$

किन्तु $\angle BGC=90°-\theta$

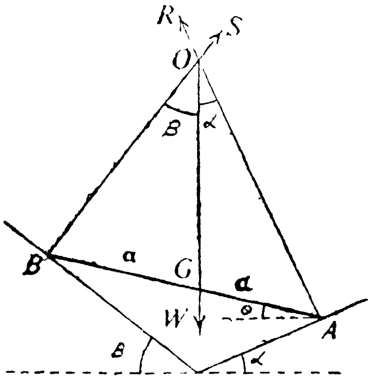
$\therefore\quad (a+b)\tan\theta=(a-b)\cot\alpha=(a-b)\tan(90°-\alpha)$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right).$$

१०. यदि तलोंकी प्रतिक्रियाएं R तथा S एक दूसरेको O पर काटती हों तो छड़के भार W की क्रियारेखा भी O से होकर जायगी। यदि बल्लीका क्षितिजसे झुकाव θ हो तो त्रिकोणमितिके प्रमेयसे

$$2a \cot OGB = a \cot\beta - a \cot\alpha$$

या $2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$, $\therefore\ \theta = \tan^{-1}\{\frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha)\}$



तथा लामीके प्रमेयसे $\dfrac{R}{\sin\beta} = \dfrac{S}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\therefore \quad R = W.\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ तथा } S = W.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

११. अनुच्छेद 7.6 के उदाहरण ३ के चित्रमें, यदि $AB=4''$, $CL=\sqrt{3}''$ तथा छड़ क्षितिजसे θ कोण बनाये तो इस उदाहरणमें सिद्ध की हुई प्रमेय, $2r\cos 2\theta = a\cos\theta$, से

$$2\sqrt{3}\cos 2\theta = 2\cos\theta \text{ या } \theta = 30^\circ$$

$$\therefore \quad AL = 2AC\cos\theta = 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}/2 = 3''$$

$$\therefore \quad BL = 4-3 = 1''.$$

१२. अनुच्छेद 7.6 के उदाहरण ३ के चित्रमें, यदि $CL=2\sqrt{3}$ तथा $\theta=30°$ हो तो AB आवश्यक छड़की लम्बाई होगी।

$\because \angle GAD=\angle GLC=\angle CAG=30°, \therefore \angle CAD=60°$

$\triangle OAD$ से $AD=AO\cos 60°=2\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

$\triangle GAD$ से $AG=AD\sec 30°=2\sqrt{3}\times2/\sqrt{3}=4$

$\therefore AB=8.$

१३. अनुच्छेद 7.6 के उदाहरण ३ के चित्रमें, यदि $\theta=30°$ तो

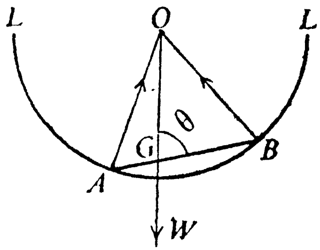
$\triangle OAD$ से $AD=OA\cos 60°=2CA.\frac{1}{2}=CA$

तथा $\triangle GAD$ से $AD=AG\cos 30°=\frac{1}{2}AB.\sqrt{3}/2=\frac{1}{4}\sqrt{3}AB$

$\therefore CA=\frac{1}{4}\sqrt{3}\,AB$ या $AB:CA=4:\sqrt{3}.$

१४. यदि प्यालेकी त्रिज्या 3a हो तो

$AG=a, GB=2a$ तथा $\angle OAG=\angle OBG=60°$



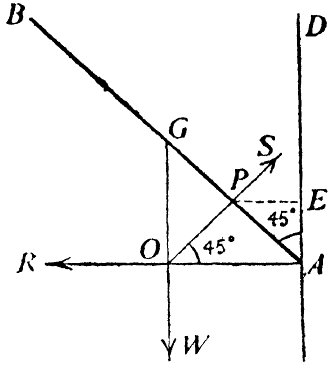
यदि छड़ उर्ध्वाधरसे θ कोण बनाती हो तो त्रिकोणमितिके प्रमेयसे

$(AG+GB)\cot\theta=GB.\cot OAG-AG.\cot OBG$

या $3a\cot\theta=2a\cot 60°-a\cot 60°$

$\therefore \tan\theta=3\tan 60°$ या $\theta=\tan^{-1}(3\sqrt{3}).$

१५. यदि दीवारकी प्रतिक्रिया R तथा छड़के भार W की क्रिया-रेखाएं एक दूसरेको O पर काटें तो पटरी P की प्रतिक्रिया, जो कि छड़के लम्ब दिशामें है, भी O से होकर जायगी।



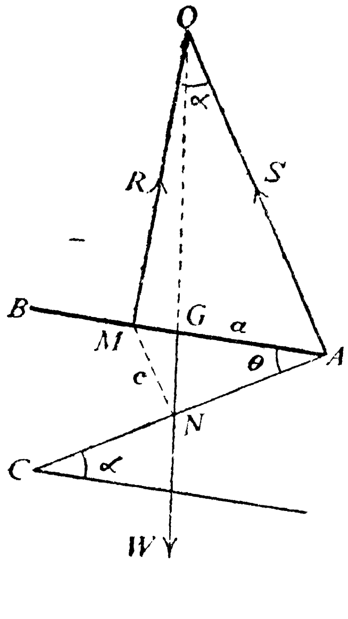
लामीके प्रमेयसे $\dfrac{W}{\sin 45^\circ}=\dfrac{R}{\sin 45^\circ}=\dfrac{S}{\sin 90^\circ}$

$\therefore$ R=W तथा $S=W\sqrt{2}$

$\because$ $AP=AO\sin 45^\circ=AG\sin 45^\circ.\sin 45^\circ=h.\frac{1}{2}$

$\therefore$ $PE=AP\sin 45^\circ=h/2\sqrt{2}$.

१६. यदि पटरी तथा तलकी प्रतिक्रियाएं R और S एक दूसरेको O



पर काटें तो छड़के भारकी क्रियारेखा भी O से होकर जायगी।

त्रिकोणमिति के प्रमेयसे

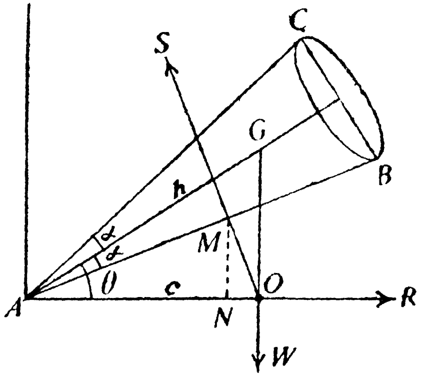
$$AM \cot OGM = MG \cot OAG - AG \cot OMG$$

या $c \operatorname{cosec} \theta . \cot (90^\circ - \overline{\theta - \alpha}) = (c \operatorname{cosec} \theta - a) \cot (90^\circ - \theta) - a \cot 90^\circ$

या $c \operatorname{cosec} \theta . \tan (\theta - \alpha) = (c \operatorname{cosec} \theta - a) \tan \theta$

या $c \sin \alpha = a \sin^2 \theta \cos (\theta - \alpha)$.

१७. यदि दीवारकी प्रतिक्रिया R तथा भार W की क्रियारेखाएं एक दूसरेको O पर काटें तो पटरी M की प्रतिक्रिया, जो कि AB पर लम्ब है, भी O से होकर जायगी।



$\triangle GAO$ से $AO = AG \cos \theta = \frac{3}{4} h \cos \theta$

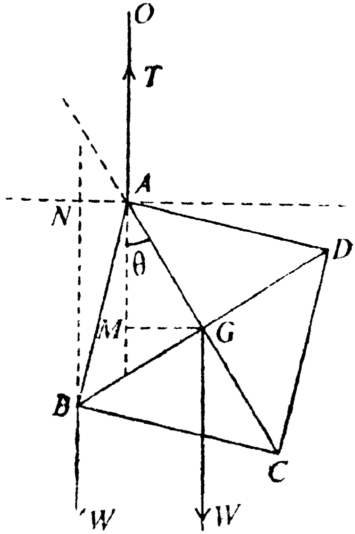
तथा $\triangle MAO$ से $AO = AM \sec (\theta - \alpha) = AN \sec^2 (\theta - \alpha) = c \sec^2 (\theta - \alpha)$

$\therefore \ \frac{3}{4} h \cos \theta = c \sec^2 (\theta - \alpha)$ या $3h = 4c \sec^2 (\theta - \alpha) \sec \theta$.

प्रश्नावली १६. (पृष्ठ १२१)

१. मान लिया कि वर्गीय तख्तेका भार W है तथा AC उर्ध्वाधरसे θ कोण बनाती है। A तथा G से क्षैतिज रेखाएं खींचा जो कि B तथा A से खींची गईउर्ध्वाधिर रेखाओंको N तथा M पर काटती है। क्योकि

जिस डोरीसे तख्ता लटकाया गया है, उसका तनाव T, तख्तेका भार W तथा लटकाया गया भार W सन्तुलनमें हैं,



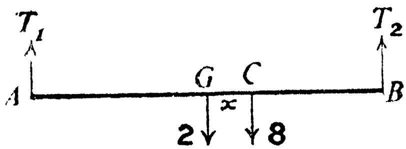
∴ A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

W.AN=W.GM

या $AB \sin(45°-\theta)=AG \sin\theta = AB \cos 45°. \sin\theta$

∴ $\sqrt{2}. \sin(45°-\theta)=\sin\theta$, ∴ $\theta=\tan^{-1}(\frac{1}{2})$.

२. मान लिया कि 8 पौंडके भारको छड़के मध्य बिन्दु G से x फ़ुट की दूरी पर (B की ओर) लटकानेसे T_2 तनाव महत्तम हो जाता है, अर्थात् $T_2=6$ पौंड



A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$2\times 1+8(1+x)=6+2, \quad \therefore \quad x=\tfrac{1}{4} \text{ फ़ुट}$$

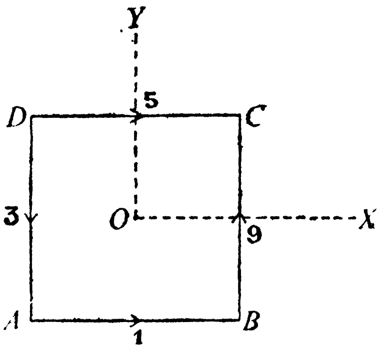
इसी प्रकार जब $T_1=6$ पौंड हो तो C की स्थिति A की ओर G से $\frac{1}{4}$ फ़ुट होगी।

अतः मध्य बिन्दुके दोनों ओर $\frac{1}{4}$ फ़ुटके अन्दर 8 पौंडके भारको लटकाया जा सकता है।

प्रश्नावली २०. (पृष्ठ १२४-१२५)

१. अनुच्छेद 8·2 के उदाहरणकी तरह हल कीजिए।

२. मान लिया कि वर्गका केन्द्र O है तथा O से जाती हुई OX तथा OY रेखाएं क्रमशः AB तथा AD के समानान्तर हैं। यदि वर्गकी भुजा 2a है तो 9 पौंडका बल OY की दिशामें एक 9 पौंडके बल तथा एक युग्मके बराबर है जिसका कि घूर्ण 9.a है।



इसी प्रकार 3 पौंडका बल OY की दिशामें −3 पौंडके बल तथा 3.a घूर्णवाले युग्मके बराबर, 5 पौंडका बल OX की दिशामें 5 पौंडके बल −5.a घूर्णवाले युग्मके बराबर तथा 1 पौंडका बल OX की दिशामें 1 पौंडके बल तथा 1.a घूर्णवाले युग्मके बराबर होंगे।

सभी युग्मोंका घूर्ण$=9a+3a-5a+a=8a$

OX तथा OY दिशामें बलोंके अवयव 6 पौंड तथा 6 पौंड हैं, इसलिए परिणामी बल $6\sqrt{2}$ पौंड, AB से $45°$ की दिशामें।

३. प्रश्नावली ८ के प्रश्न २ के चित्रमे यदि AB, BC, CD, DE, EF तथा FA के अनुगत P, 2P, 3P, 4P, 5P तथा 6P बल लगे हों तो

AB के अनुगत बलोंके अवयव

$=P+2P\cos 60°-3P\cos 60°-4P-5P\cos 60°-6P\cos 60°$

$=-3P$

AB के लम्ब दिशामें बलोंके अवयव

$=2P\sin 60°+3P\sin 60°-5P\sin 60°-6P\sin 60°=-3\sqrt{3}P$

$\therefore$ P परिणामी बल $=\sqrt{(-3P)^2+(-3\sqrt{3}P)^2}=6P$

तथा परिणामी बलका AB से कोण $\tan^{-1}(\sqrt{3})=60°$

परिणामी युग्मका घूर्ण = A के सापेक्ष बलोंका घूर्ण

$=2P.\,a\sin 60°+3P.\,2a\sin 60°+4P.\,2a\sin 60°+5P.\,a\sin 60°$

$=\frac{21}{2}\sqrt{3}\,a.P.$, (जहां a समषट्भुजकी भुजा है।)

प्रश्नावली २१. (पृष्ठ १३५-१३९)

१. मान लिया A पर प्रतिक्रिया R के क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर अवयव X तथा Y हैं।

चूंकि AB = 10″, AC = 8″ तथा BC = 6″, $\therefore \angle ACB=90°$

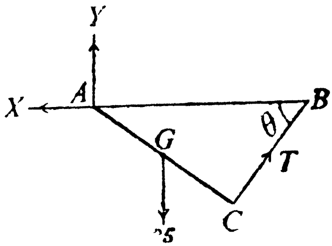
चूंकि छड़ सन्तुलनमें है, इसलिए बलोंको AX तथा AY दिशामें विश्लेषित करनेसे

$$X=T\cos\theta \quad \text{तथा} \quad Y=25-T\sin\theta$$

तथा A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$25\times 4\cos(90°-\theta)=T.8$, $\therefore$ T = 10 पौंड

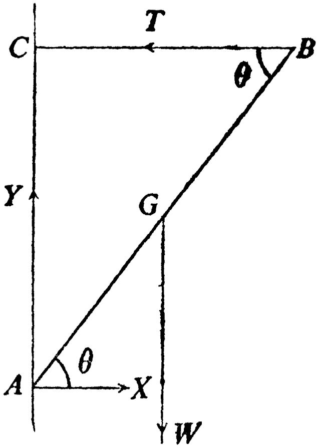
अब $X=10\times\frac{6}{10}=6$ तथा $Y=25-10.\frac{8}{10}=17$



∴ $R=\sqrt{6^2+(17)^2}=5\sqrt{13}$ पौंड

प्रतिक्रियाकी AB से दिशा $=\tan^{-1}(\frac{17}{6})$.

२. यदि A पर प्रतिक्रिया R के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर दिशामें अवयव X तथा Y हों तो चूंकि छड़ सन्तुलनमें है,



$$\therefore \quad X=T \quad \text{तथा} \quad Y=W$$

A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $W.AG\cos\theta=T\,8$, (जहां θ, छड़का क्षैतिजसे झुकाव है।)

$$\therefore \quad X=\tfrac{1}{8}W.\,5\times\tfrac{6}{10}=\tfrac{3}{8}W$$

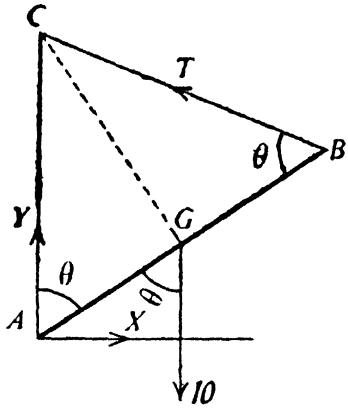
अतः $R=\sqrt{(\tfrac{3}{8}W)^2+W^2}=\tfrac{1}{8}\sqrt{73}\,W$

श्रौर ऊर्ध्वाधरसे प्रतिक्रियाकी दिशा

$$=\tan^{-1}(\tfrac{3}{8}W/W)=\tan^{-1}(\tfrac{3}{8}).$$

३. मान लिया डोरीका तनाव T तथा A पर प्रतिक्रिया R के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर दिशामें अवयव X तथा Y हैं।

यदि $\angle CAG=\theta$ तो $\cos\theta=\frac{4}{5}$ तथा $\sin\theta=\frac{3}{5}$



चूंकि छड़ सन्तुलनमें है, इसलिए AB के अनुगत तथा लम्ब दिशामें बलोंको विश्लेषित करनेसे

$$Y\cos\theta+X\sin\theta=10\cos\theta+T\cos\theta$$

तथा $$Y\sin\theta+T\sin\theta=X\cos\theta+10\sin\theta$$

इन दोनों समीकरणोंसे

$$X=\tfrac{24}{25}T \quad \text{श्रौर} \quad Y=10+\tfrac{7}{25}T$$

A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$10\times4\sin\theta=T\sin\theta.8, \quad \therefore \quad T=5 \text{ पौंड}$$

$$\therefore \quad X=\tfrac{24}{5} \quad \text{श्रौर} \quad Y=10+\tfrac{7}{5}=\tfrac{57}{5}$$

अतः $$R=\sqrt{(\tfrac{24}{5})^2+(\tfrac{57}{5})^2}=3\sqrt{17} \text{ पौंड}$$

श्रौर ऊर्ध्वाधरसे प्रतिक्रियाकी दिशा $=\tan^{-1}(\frac{24}{57})$.

४. प्रश्नावली १७ के प्रश्न १० की तरह हल कीजिए।

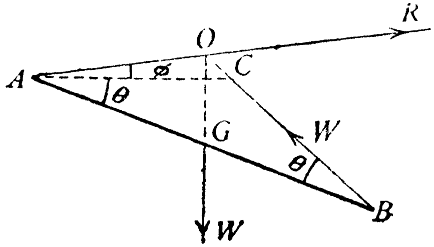
५. प्रश्नावली १७ के प्रश्न ४ की तरह हल कीजिए।

६. यदि प्रश्न २ के चित्रमें B से 40 पौंडका भार और लटका हुं तथा W=10 पौंड और $\angle CAB=60°$ तो A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$10.AG\cos 30°+40.AB\cos 30°=T.AB\cos 60°$$

या $5\sqrt{3}+40\sqrt{3}=T, \quad \therefore \quad T=45\sqrt{3}$ पौंड

७. मान लिया कि भार W तथा तनाव W की क्रियारेखाएं O पर मिलती हैं, अतः प्रतिक्रिया R की भी क्रियारेखा O से होकर जायगी।



A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$W.AG\cos\theta=W.AB\sin\theta, \quad \therefore \quad \tan\theta=\tfrac{1}{2}$$

यदि R क्षैतिजसे ϕ कोण बनाता हो तो बलोंका कब्जेके क्षैतिज ए‹ उर्ध्वाधर तलमें विघटन करनेसे

$$R\cos\phi=W\cos 2\theta=\tfrac{3}{5}W$$

तथा $R\sin\phi=W-W\sin 2\theta=\tfrac{1}{5}W$

$\therefore \quad R=\sqrt{\tfrac{9}{25}W^2+\tfrac{1}{25}W^2}=\tfrac{1}{5}\sqrt{10}W$

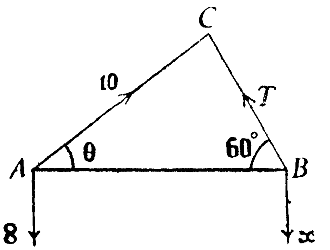
तथा $\tan\phi=\tfrac{1}{3}$.

८. मान लिया डोरी BC का तनाव T तथा कोण BAC का मा‹ θ है। चूंकि बल सन्तुलनमें हैं, इसलिए क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशा‹ बलोंका विश्लेषण करनेसे

$$10\cos\theta=T\cos 60° \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

तथा $10\sin\theta+T\sin 60°=8+x \quad \ldots\ldots(ii)$

और B के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $8.AB=10.AB \sin\theta$

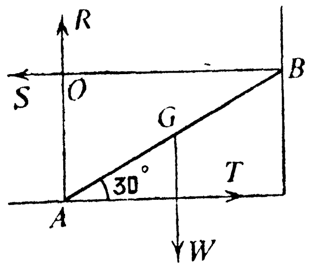


$\therefore \quad \sin\theta=\frac{4}{5}$ या $\theta=\sin^{-1}(\frac{4}{5})$

(i) से $T=10\times\frac{3}{5}\times2=12$ पौंड

तथा (ii) से $x=10\times\frac{4}{5}+12\times\sqrt{3}/2-8=6\sqrt{3}$ पौंड

९. मान लिया डोरीका तनाव T है। यदि A तथा B की प्रतिक्रियाएं O पर मिलती हों तो O के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$$W.AG\cos30°=T.AB\sin30°$$

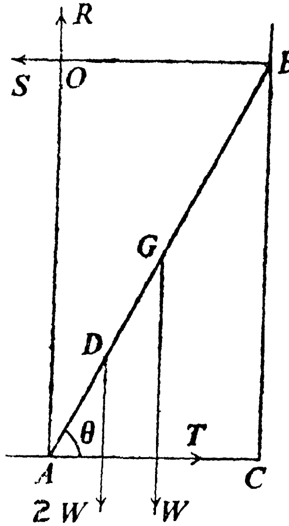
$$\therefore \quad T=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}W.$$

१०. मान लिया A तथा B की प्रतिक्रियाएं R तथा S और डोरी का तनाव T है।

यदि $AB=2a$, $AD=\frac{1}{2}a$ तथा $AC=l$ तो चूंकि सीढ़ी सन्तुलनमें है, इसलिए बलोंको क्षैतिज तथा उध्र्वाधर दिशामें विश्लेषित करनेसे

$$S=T \quad \text{तथा} \quad R=3W$$

तथा O के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$$2W.\tfrac{1}{2}a\cos\theta+W.a\cos\theta=T.2a\sin\theta$$

$$\therefore \quad T=W\cot\theta=W\cdot\frac{l}{\sqrt{4a^2-l^2}}=S.$$

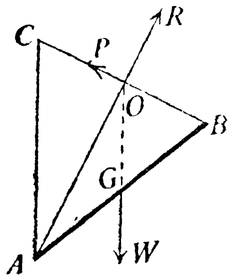
११. प्रश्न ६ की तरह हल कीजिए।

१२. यदि डोरीके तनाव P तथा छड़के भार W की क्रियारेखाएं एक दूसरेको O पर काटती हों तो कब्जे A की प्रतिक्रिया भी O से होकर जायगी। यदि छड़ उर्ध्वाधरसे α कोण बनाये तो हमें यह सिद्ध करना है कि

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{P}{W}$$

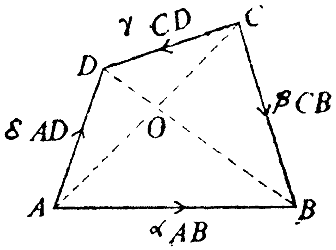
चूंकि $\triangle$ CAO बलोंका त्रिभुज है, इसलिए $\dfrac{W}{AC}=\dfrac{P}{CO}$

परन्तु $\because AC=AB$ तथा $CO=OB$, $\therefore$ AO, CB पर लम्ब है और $\angle CAO=\frac{\alpha}{2}$



$$\therefore \quad \frac{CO}{AC} = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{W}.$$

१३. चूंकि चारों बल सन्तुलनमें हैं, इसलिए $\alpha.AB$ और $\delta.AD$ का परिणामी $(\alpha+\delta)\ AO$ है, जबकि



$$\delta.DO = \alpha.BO \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

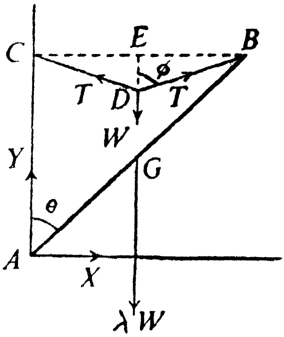
इसी प्रकार $\beta.CB$ तथा $\gamma.CD$ का परिणामी $(\beta+\gamma)\ CO$ है, जबकि

$$\beta.BO = \gamma.DO \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\delta}{\gamma}$, $\quad \therefore \quad \alpha.\gamma = \beta.\delta.$

१४. मान लिया कि A पर प्रतिक्रिया R के अवयव X तथा Y हैं। यदि $AC = 2b$, $AB = 2a$, $BD = l$, छड़का उध्र्वाधरसे झुकाव θ तथा $\angle BDE = \phi$ हो तो

$$BC = BD\sin\phi + CD\sin\phi = 2l\sin\phi$$
$$= AB\sin\theta = 2a\sin\theta$$
$$\therefore\quad l\sin\phi = a\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$



तथा $AC = AB\cos\theta$ अर्थात् $2b = 2a\cos\theta$

या $b = a\cos\theta$

चूंकि छल्ला, दो बराबरके तनाव T तथा भार W के कारण सन्तुलनमें है, इसलिए $2T\cos\phi = W$.

छड़के सन्तुलनको ध्यानमें रखकर, A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$\lambda.W.a\sin\theta = 2a.T\sin DBA = 2a.T\sin\{(90^\circ-\theta)-(90^\circ-\phi)\}$$
$$= 2a.T\sin(\phi-\theta) = \frac{aW}{\cos\phi}\sin(\phi-\theta)$$

$$\therefore\quad \lambda\cos\phi\sin\theta = \sin(\phi-\theta) = \sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta$$

या $(\lambda+1)\cos\phi\sin\theta = \sin\phi\cos\theta = \frac{a}{l}\sin\theta\cos\theta$

................{(i) से}

या $(\lambda+1)\cos\phi = \frac{a}{l}\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{l}$

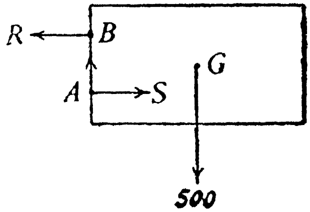
$$\therefore\quad (\lambda+1)^2(1-\sin^2\phi) = b^2/l^2$$

या $l^2(\lambda+1)^2\left(1-\frac{a^2}{l^2}\sin^2\theta\right) = b^2$

या $l^2(\lambda+1)^2\left[1-\frac{a^2}{l^2}(1-\frac{b^2}{a^2})\right]=b^2$

$\therefore \quad l^2=a^2-b^2 \cdot \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2}$.

१५. चूंकि सम्पूर्ण भार को निचले कब्जेकी प्रतिक्रिया साधती है, इसलिए इसका उर्ध्वाधर भाग, फाटकके भारके बराबर होगा और ऊपरी कब्जेकी प्रतिक्रिया केवल क्षैतिज दिशामें होगी जो कि निचले कब्जेकी प्रतिक्रियाके क्षैतिज भागके बराबर होगी। मान लिया यह R है। निचले कब्जे A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

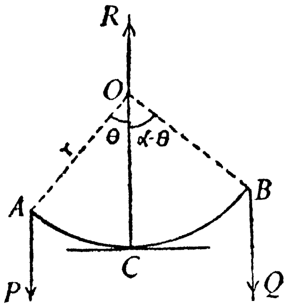


$R\times 4=500\times 5, \quad \therefore \quad R=625$ पौंड

१६ तथा १७. प्रश्न १५ की मददसे हल कीजिए।

१८. अनुच्छेद 8.4 में दिये उदाहरणकी तरह हल कीजिए।

१९. मान लिया कि तार ACB धरातलके बिन्दु C पर टिका है

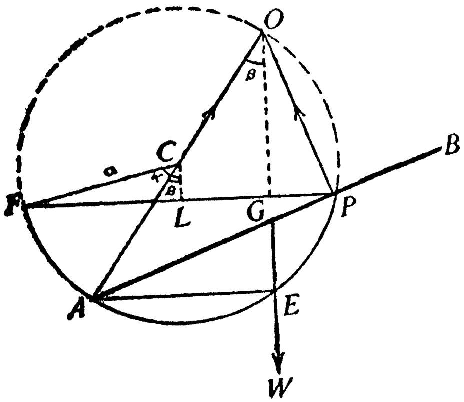


तथा इसकी प्रतिक्रिया R है। चूंकि तार सन्तुलनमें है, इसलिए C के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$P.r \sin\theta = Q.r \sin(\alpha-\theta)$, (जहां r उस चापका अर्द्धव्यास है।)

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{Q \sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}.$$

२०. यदि छड़ AB, P बिन्दु पर प्यालेकी परिधिको स्पर्श करता हो तो A तथा P पर की प्रतिक्रियाएं एक दूसरेको, गोले पर स्थित O बिन्दु पर एक दूसरेको काटेंगी। सन्तुलनके लिए यह आवश्यक है कि छड़का गुरुत्व केन्द्र O से खींचे गये उर्ध्वाधर पर हो। यदि यह उर्ध्वाधर प्यालेको E पर काटे तो चूंकि $\angle AEO = 90°$, इसलिए AE क्षैतिज होगी।



$\because \quad \angle PAE = \angle APF = \frac{1}{2}\angle ACF = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\therefore \quad \triangle GAE$ से $AE = AG \cos GAE = AG \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

तथा $\triangle OAE$ से $AE = 2a \sin\beta$

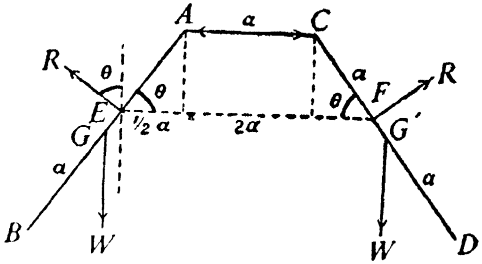
$\therefore \quad AB = 2AG = 4a \sin\beta \sec\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

२१. दंड AB के सन्तुलनको ध्यानमें रखकर A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$R.\tfrac{1}{2}a \sec\theta = W.a\cos\theta$$

$$\therefore \quad R = 2W\cos^2\theta \quad \text{.......................(i)}$$

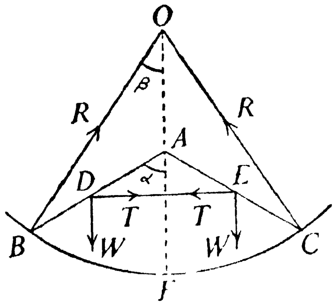
दोनों दंडोंका सन्तुलन ध्यानमें रखकर, बलोंका उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे



$$2W = 2R\cos\theta, \quad \therefore \quad R = \frac{W}{\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $2\cos^3\theta = 1$.

२२. यदि R प्रत्येक दंडकी प्रतिक्रिया हो तो बलोंका उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे



$$W = R\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

यदि दंडकी लम्बाई $2l$ हो तो एक दंडके लिए A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$R.2l\sin(\alpha-\beta) = W.l\sin\alpha + T.l\cos\alpha$$

$$\therefore \quad T = \frac{2R\sin(\alpha-\beta) - W\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{2W\sin(\alpha-\beta)-W\sin\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta},$$

{(i) का प्रयोग करनेसे}

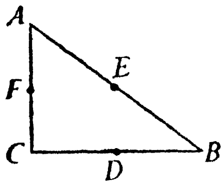
$$=W(\tan\alpha-2\tan\beta).$$

प्रश्नावली २२. (पृष्ठ १४४-१४५)

१. अनुच्छेद 9.11 में दिये हुए उदाहरणकी तरह हल कीजिए।

२ तथा ३. अनुच्छेद 9.12 में दिये हुए उदाहरणकी तरह हल कीजिए।

४. मान लिया CB तथा CA क्रमशः x तथा y अक्ष हैं। CB, BA, AC के मध्य बिन्दु D, E, F के नियामक क्रमशः (4,0); (4,3); (0,3) हैं तथा शीर्ष C, B, A के नियामक क्रमशः (0,0); (8,0); (0,6) हैं। यदि बलोंके केन्द्रके नियामक $(\bar{x}, \bar{y})$ हों तो अनुच्छेद 9.12 से



$$\bar{x}=\frac{P\times0+2P\times4+P\times8+2P\times4+P\times0+2P\times0}{P+2P+P+2P+P+2P}=\frac{8}{3}''$$

$$\text{तथा } \bar{y}=\frac{P\times0+2P\times0+P\times0+2P\times3+P\times6+2P\times3}{P+2P+P+2P+P+2P}=2''$$

अतः बलोंके केन्द्रकी C से दूरी $=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=3\frac{1}{3}$ इंच

५. (क) यदि प्रश्न ४ के चित्रमें A, B, C बिन्दुओं पर समान बल P लगे हों तो B, C पर लगे बलोंका परिणामी 2P होगा जो कि BC के मध्य बिन्दु D पर कार्य करेगा। अब A पर लगे बल P तथा D पर

लगे बल 2P का परिणामी 3P होगा जो कि AD के ऐसे बिन्दुसे होकर जायगा जो कि इसे 2 : 1 के अनुपातमें विभाजित करेगा। अतः बलोंका केन्द्र मध्यगत रेखाओंका छेदन बिन्दु है।

(ख) प्रथम भागकी तरह हल कीजिए।

६. यदि प्रश्न ४ के चित्रमें A, B, C शीर्षों पर ka, kb, kc बल कार्य करते हों तो kb, kc का परिणामी BC के बिन्दु D पर इस प्रकार कार्य करेगा कि BD : DC = c : b.

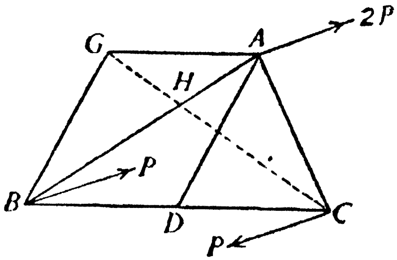
रेखागणितसे शीर्ष A तथा बिन्दु D को मिलाने वाली रेखा कोण A को समद्विभाजित करेगी।

इसी प्रकार बल ka तथा kb के परिणामीके क्रिया बिन्दुको शीर्ष C से मिलाने वाली रेखा कोण C को समद्विभाजित करेगी।

अतः ka, kb, kc बलोंका कोण A तथा C के समद्विभाजकके कटान बिन्दु अर्थात् अन्तः केन्द्र पर स्थित होगा।

७. चूंकि $\triangle HGA$ तथा $\triangle HBC$ समान हैं।

$$\therefore \quad \frac{AH}{HB}=\frac{GH}{HC}=\frac{AG}{BC}=\frac{1}{2}$$



अतः A तथा B पर लगे समानान्तर बल 2P तथा P का परिणामी 3P, H से होकर जायगा।

परन्तु चूंकि CG = 3GH, इसलिए H पर लगे 3P तथा C पर लगे —P समानान्तर बलोंका परिणामी G से होकर जायगा।

८. प्रश्न ५ (क) में ज्ञात किये हुए उत्तर की यह विपरीत स्थिति है, अतः इस प्रश्नको प्रश्न ५ (क) की मददसे हल कीजिए।

प्रश्नावली २३. (पृष्ठ १४९)

१. चूंकि छड़का भार, छड़के मध्य बिन्दुसे कार्य करेगा, अतः यह सिरेसे 2 फ़ीटकी दूरी पर होगा। यदि गुरुत्व केन्द्रकी सिरेसे दूरी $\bar{x}$ हो तो अनुच्छेद 9.4 से

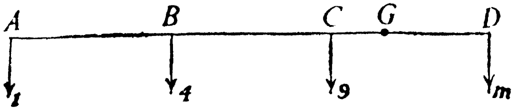
$$\bar{x}=\frac{1\times0+2\times1+3\times2+3\times2+4\times3+5\times4}{1+2+3+3+4+5}=2\tfrac{5}{9} \text{ फ़ीट}$$

२ तथा ३. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

४. यदि $AB=BC=CD=x$ तथा गुरुत्व केन्द्र G पर है तो

चूंकि $\dfrac{AG}{GD}=\dfrac{7}{2}$, $\therefore$ $AG=\frac{7}{9}AD=\frac{7}{9}.3x=\frac{7}{3}x$

चूंकि अनुच्छेद 9.4 से



$$AG=\frac{1\times0+4.x+9\times2x+m.3x}{1+4+9+m}$$

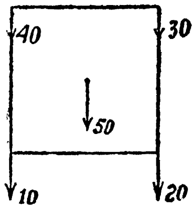
$$\therefore\quad (14+m).\tfrac{7}{3}x=x(22+3m),\quad \therefore\quad m=16 \text{ पौंड}$$

प्रश्नावली २४. (पृष्ठ १५३-१५४)

१. यदि x तथा y अक्ष उन रेखाओंको लें जिन पर 10—20 तथा 10—40 सेरके भार लगे हों तथा गुरुत्व केन्द्रके नियामक $(\bar{x}, \bar{y})$ मान लें तो

$$\bar{x}=\frac{10\times0+20\times20+30\times20+40\times0+50\times10}{10+20+30+40+50}=10''$$

तथा $\bar{y}=\dfrac{10\times0+20\times0+30\times20+40\times20+50\times10}{10+20+30+40+50}=\dfrac{38''}{3}$



$\therefore$ गुरुत्व केन्द्रके नियामक $(10, \frac{38}{3})$ हैं।

२. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

३. यदि वर्गाकार मेज पर रख भारोंके गुरुत्व केन्द्रकी दूरी दिये हुए किनारोंसे क्रमशः $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ हो तो

$$\bar{x}=\frac{1\times2+2\times4+3\times6+4\times8+5\times10}{1+2+3+4+5}=7\tfrac{1}{3}''$$

तथा $\bar{y}=\dfrac{1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times10}{1+2+3+4+5}=8''$

४ तथा ५. अनुच्छेद 9.41 के उदाहरण १ की तरह हल कीजिए।

६. मान लिया अनुच्छेद 9.41 के उदाहरण १ के चित्रमें A, B, C, D, E तथा F पर क्रमशः 1, 2, 1, 4, 10 तथा 4 के भार रखे हैं। यदि षट्भुजके केन्द्रसे जानेवाली OX तथा OY रेखाओंको नियामक अक्ष लें, षट्भुजकी भुजा $=2a$ और गुरुत्व केन्द्रके नियामक $(\bar{x}, \bar{y})$ लें तो

$$\bar{x}=\frac{1.-a+2.a+1.2a+4.a+10.-a+4.-2a}{1+2+1+4+10+4}=-\tfrac{1}{2}a$$

तथा $\bar{y}=\dfrac{1.-a\sqrt{3}+2.-a\sqrt{3}+1.0+4.a\sqrt{3}+10.a\sqrt{3}+4.0}{1+2+1+4+10+4}$

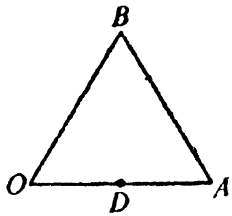
$=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$

$\because$ षट्भुजके केन्द्रके नियामक $(0, 0)$ तथा पांचवें भारके नियामक $(-a, a\sqrt{3})$ हैं

∴ केन्द्र और पांचवें भारको मिलाने वाली रेखाके मध्य बिन्दुके नियामक $\{\frac{1}{2}(-a+0), \frac{1}{2}(a\sqrt{3}+0)\}$

अर्थात् $(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{3})$ हैं। अत: प्रमेय।

७. मान लिया कि प्रत्येक शीर्ष पर 10 पौंड तथा OA के मध्य बिन्दु D पर 5 पौंडका भार रखा है। O तथा A पर रखे भारोंका परिणामी D से होकर जायगा, जिसका परिमाण 20 पौंड होगा और इस प्रकार D पर 25 पौंड बल कार्य करेगा।



B पर रखे 10 पौंड तथा D पर 25 पौंडके बलका परिणामी 35 पौंड होगा, जिसकी D से दूरी $\frac{10}{35}.BD=\frac{10}{35}\times 5 \sin 60^\circ=\frac{5}{7}\sqrt{3}$ फ़ीट होगी।

८. प्रश्न ७ के चित्रमें मान लिया O, A, B पर क्रमश: 1, 2, 3 पौंड के भार रखे हैं। यदि OA तथा OA पर लम्बको x तथा y अक्ष लें और गुरुत्व केन्द्र $(\bar{x}, \bar{y})$ हो तो

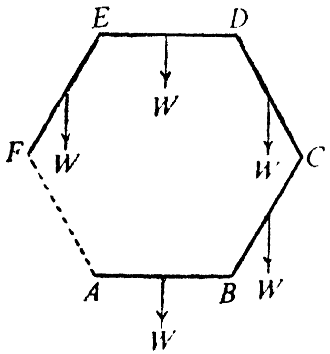
$$\bar{x}=\frac{1\times 0+2\times 6+3\times 3}{1+2+3}=3\tfrac{1}{2}''$$

$$\text{तथा } \bar{y}=\frac{1\times 0+2\times 0+3\times 4}{1+2+3}=2''$$

९. प्रश्नावली २२ के प्रश्न ५ (ख) की तरह हल कीजिए।

१०. मान लिया प्रत्येक भुजाका भार W है। यदि प्रत्येक भुजा

2 फ़ीट हो तथा गुरुत्व केन्द्रके नियामक, AB तथा AB पर लम्बको नियामक अक्ष मानने पर $(\bar{x}, \bar{y})$ हो तो



$$\bar{x}=\frac{w\times 1+w(2+1\cos 60^\circ)+w(2+1\cos 60^\circ)+w\times 1+w(-1\cos 60^\circ)}{w+w+w+w+w}$$

$$=\tfrac{13}{10}$$

$$\text{तथा } \bar{y}=\frac{w\times 0+w\times 1\sin 60^\circ+w\times 3\sin 60^\circ+w\times 4\sin 60^\circ+w\times 3\sin 60^\circ}{w+w+w+w+w}$$

$$=\tfrac{11}{10}\sqrt{3}$$

अतः A से गुरुत्व केन्द्रकी दूरी $=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=\frac{1}{5}\sqrt{133}$ फ़ीट

११. अनुच्छेद 9.41 के उदाहरण २ के चित्रमें मान लिया शीर्ष A, B, C पर ka, kb, kc भार रखे हैं और AB तथा AB पर लम्ब रेखाएं नियामक अक्ष हैं। यदि कणोंका गुरुत्व केन्द्र $(\bar{x}, \bar{y})$ हो तो

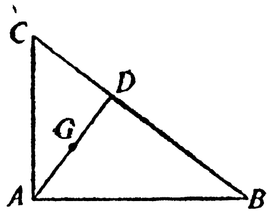
$$\bar{x}=\frac{ka.0+kb.c+kc.b\cos A}{k(a+b+c)}=\frac{bc(1+\cos A)}{a+b+c}$$

$$\text{तथा } \bar{y}=\frac{ka.0+kb.0+kc.b\sin A}{k(a+b+c)}=\frac{bc\sin A}{a+b+c}$$

अतः गुरुत्व केन्द्रकी A से दूरी $=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}$

$$=\frac{bc}{a+b+c}\sqrt{2+2\cos A}=\frac{2bc\cos A/2}{a+b+c}.$$

१२. मान लिया शीर्ष A, B, C पर P, Q, R भार रखे हैं। चूंकि इन भारोंका परिणामी A से BC पर लम्ब AD के मध्य बिन्दु G से होकर जाता है, इसलिए B तथा C पर रखे भार Q तथा R का परिणामी D से होकर जायगा।



अतः $Q:R=CD:BD=AC\cos C:AB\cos B$

$$=3\times\tfrac{3}{5}:4\times\tfrac{4}{5}=9:16$$

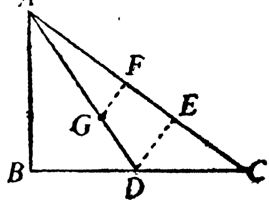
यदि Q+R तथा P का परिणामी G से होकर जाय तो

$$P=Q+R$$

$$\therefore\quad P:Q:R=25:9:16.$$

प्रश्नावली २५. (पृष्ठ १६१-१६३)

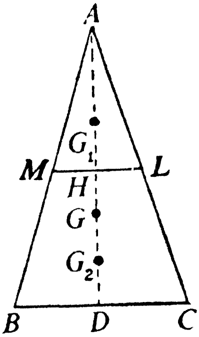
१. अनुच्छेद 9.52 से इस पटलका गुरुत्व केन्द्र मध्यिकाओंका कटाव बिन्दु G होगा। BC के मध्य बिन्दु D तथा G से AC पर DE, GF लम्ब खींचा।



समान $\triangle AGF$ तथा $\triangle ADE$ से $\frac{AG}{AD}=\frac{GF}{DE}$

$\therefore \quad GF=\frac{2}{3}.DC \sin C=\frac{2}{3}\times 2\times \frac{3}{5}=\frac{4}{5}$ फ़ुट

२. अनुच्छेद 9.52 से इस त्रिभुजका गुरुत्व केन्द्र मध्यिकाओंके कटान बिन्दु G पर होगा।



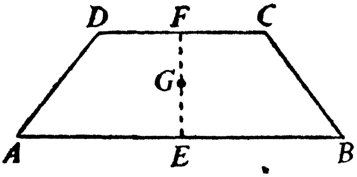
$\because \quad AD=\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5},$

$\therefore \quad AG=\frac{2}{3}AD=2\sqrt{5}''$ तथा $GD=\frac{1}{3}AD=\sqrt{5}''$

और $BG=\sqrt{2^2+5}=3''$ तथा $GC=\sqrt{2^2+5}=3''$

३. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

४. मान लिया G समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज ABCD का गुरुत्व केन्द्र है। यदि $AB=2b=3''$ तथा $CD=2a=6''$ तो अनुच्छेद 9.54 के उदाहरण १ से



$\frac{EG}{FG}=\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{3+3}{6+\frac{3}{2}}=\frac{4}{5}, \quad \therefore \quad EG=\frac{4}{9}EF=\frac{8}{9}$ इंच

मान लिया कि तारका गुरुत्व केन्द्र CD से y दूरी पर है। चूंकि भार भुजाओंके मध्य बिन्दुसे कार्य करेंगे और अपनी लम्बाई के अनुपातमें होंगे तथा $AD=BC=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$

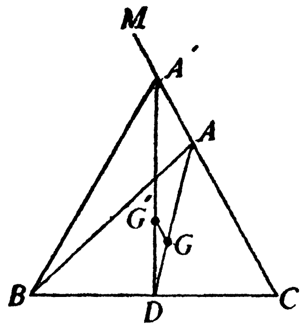
$$\therefore\ y=\frac{DC\,0+AD.1+BC.1+AB.2}{AB+BC+CD+DA}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+3+2}{3+\frac{5}{2}+6+\frac{5}{2}}=1\frac{1}{4} \text{ इंच}$$

५. प्रश्न ४ के चित्रमें यदि $AB=a$ तो $CD=2a$. यदि पटलका गुरुत्व केन्द्र G हो तो

$$\frac{GF}{GE}=\frac{2a+\frac{1}{2}a}{a+a}=\frac{5}{4},\quad \therefore\quad GF:GE=5:4$$

६. यदि BC दिये हुए त्रिभुजका आधार A तथा A′ दी हुई सरल रेखा CM पर शीर्षकी दो स्थितियां हैं। यदि D, BC का मध्य बिन्दु तथा G और G′ दोनों स्थितियोंमें त्रिभुजोंके गुरुत्व केन्द्र हों तो



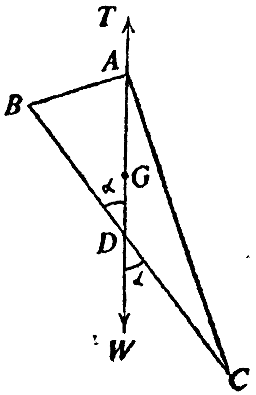
$$DG=\tfrac{1}{3}DA \quad \text{तथा} \quad DG'=\tfrac{1}{3}DA'$$

इसलिए GG′, AA′ के समान्तर है।

अतः गुरुत्व केन्द्रकी निधि दी हुई सरल रेखाके समानान्तर गुरुत्व केन्द्रसे जाती हुई एक सरल रेखा है।

७. प्रश्न ६ की मददसे हल कीजिए।

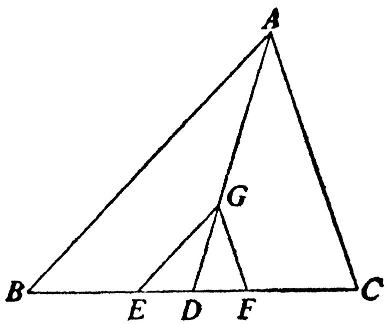
८. यदि समकोण त्रिभुज CAB को A बिन्दुसे लटकाया जाय तो त्रिभुजका गुरुत्व केन्द्र G, A से ठीक नीचे होगा और रेखा AGD, BC रेखाको समद्विभाजित करेगी। यदि कर्ण उर्ध्वाधरसे α कोण बनाये तो त्रिकोणमितिके प्रमेयसे



$$\sqrt{10} \cot \alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} (\cot C - \cot B) = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} (3 - \tfrac{1}{3})$$

या $\cot \alpha = \frac{4}{3}$, $\therefore$ $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

९. प्रश्न ४ की तरह हल कीजिए।



१०. यदि $\triangle ABC$ के आधार BC का मध्य बिन्दु D हो तथा बिन्दु A शीर्षकी एक स्थिति है, जबकि $\angle BAC$ का मान स्थायी है।

गुरुत्व केन्द्र G से AB और AC के समानान्तर GE तथा GF रेखाएं खींचो।

अब $\dfrac{DE}{DB}=\dfrac{DG}{DA}$ या $DE=\frac{1}{3}DB$, $\therefore$ E एक नियत बिन्दु है, इसी प्रकार F भी एक नियत बिन्दु है।

चूंकि $\angle EGF=\angle BAC=$स्थायी, इसलिए G की विधि एक वृत्तका चाप है जो कि E तथा F से होकर जायगा।

११. यदि प्रश्न २ के चित्रमें $AB=AC=a$ तथा $BC=b$ तो AB, AC, BC भुजाओंके भार ka, ka, kb भुजाओंके मध्य बिन्दु M, L, D से कार्य करेंगे।

M तथा L पर लगे ka तथा ka भारोंका परिणामी 2ka होगा जोकि AD के मध्य बिन्दु H पर कार्य करेगा।

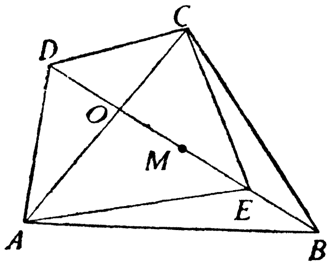
$$\therefore \quad AH=DH=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-\tfrac{1}{4}b^2}$$

2ka तथा kb भारोंका परिणामी $k(2a+b)$ होगा, जिसका क्रिया बिन्दु आधार BC से

$$\frac{2ka}{k(2a+b)}.DH=\frac{a\sqrt{a^2-\frac{1}{4}b^2}}{2a+b}$$ दूरी पर होगा।

१२. मान लिया M, BD का मध्य बिन्दु है।

$$\because \quad BE=OD, \quad \therefore \quad OM=ME$$



चतुर्भुज ABCD का गुरुत्व केन्द्र A, B, C, D तथा O पर

स्थित w, w, w, w तथा $-w$ भारोंका गुरुत्व केन्द्र होगा। B, D पर स्थित w, w भारोंका परिणामी 2w, M से होकर जायगा तथा अब M पर स्थित 2w और O पर स्थित $-w$ का परिणामी w, E से होकर जायगा, क्योंकि

$$2W.ME-W.OE=W(2ME-OE)=0$$

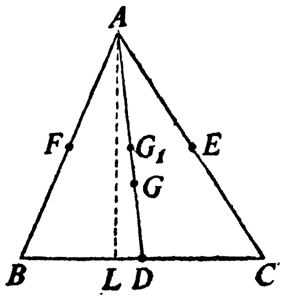
अर्थात् E के सापेक्ष दोनों भारोंका घूर्ण शून्य है।

अतः A, B, C, D तथा O पर स्थित w, w, w, w तथा $-w$ भार A, E, C पर स्थित w, w, w भारके समान हैं। परन्तु चूंकि $\triangle AEC$ का गुरुत्व केन्द्र A, E, C पर स्थित w, w, w के भारके गुरुत्व केन्द्र पर है। अतः प्रमेय।

१३. यदि $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ तो भुजाओंके भार ka, kb, kc मध्य बिन्दु D, E, F से कार्य करेंगे। A से AL, BC पर लम्ब खींचा।

यदि BC से गुरुत्व केन्द्रकी दूरी y_1 हो तो

$$y_1=\frac{ka.0+kb.\frac{1}{2}AL+kc.\frac{1}{2}AL}{k(a+b+c)}=\frac{\frac{1}{2}(b+c)}{a+b+c}\cdot AL$$



$$=\frac{\frac{1}{2}(b+c)}{a+b+c}\cdot\frac{2\triangle}{a}=\frac{\triangle}{2s}\cdot\frac{b+c}{a}$$

इसी प्रकार यदि CA तथा AB से गुरुत्व केन्द्रकी दूरी y_2 तथा y_3 हो तो

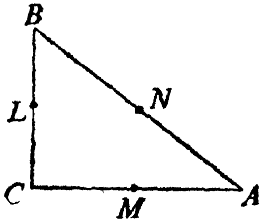
$$y_2=\frac{\Delta}{2s}\cdot\frac{a+c}{b} \quad \text{तथा} \quad y_3=\frac{\Delta}{2s}\cdot\frac{a+b}{c}$$

$$\therefore \quad y_1:y_2:y_3=\frac{b+c}{a}:\frac{c+a}{b}:\frac{a+b}{c}.$$

१४. चूंकि A, B, C पर p, q, r भार रखनेसे गुरुत्व केन्द्र नहीं बदलता, इसलिए यदि A, B, C पर रखे p, q, r भारोंको भुजाओंके मध्य बिन्दु L, M, N पर भुजाओंके अनुपातीय रखे x, y, z भारोंसे बदल दिया जाय तो

$$\tfrac{1}{2}(y+z)=p, \quad \tfrac{1}{2}(z+x)=q, \quad \tfrac{1}{2}(x+y)=r$$

तथा $x+y+z=p+q+r$



$$\therefore \quad x=q+r-p, \quad y=p+r-q \quad \text{तथा} \quad z=p+q-r$$

परन्तु $\because \quad x:y:z=3k:4k:5k$

$$\therefore \quad q+r-p=3k, \quad p+r-q=4k \quad \text{तथा} \quad p+q-r=5k$$

$$\therefore \quad p:q:r=9:8:7.$$

१५. यदि अनुच्छेद 9.54 के उदाहरण 1 के चित्रमें मान लीजिए

$$AB=a, CD=b \text{ तथा } EF=h$$

यदि EF रेखा पर गुरुत्व G हो तो

$$\frac{EG}{GF}=\frac{\frac{1}{2}a+b}{a+\frac{1}{2}b}=\frac{a+2b}{2a+b}$$

$$\therefore \quad EG = x = \frac{a+2b}{3(a+b)}.h = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$$

इसी प्रकार $y = \frac{b}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$.

प्रश्नावली २६. (पृष्ठ १६७-१६८)

१. चूंकि गोले एक ही पदार्थके बने हैं, इसलिए इनके भार इनके आयतनके अनुपातमें होंगे। यदि बड़े गोलेके केन्द्रसे गुरुत्व केन्द्रकी दूरी $\bar{x}$ हो तो

$$\bar{x} = \frac{\frac{4}{3}\pi 6^3 \times 0 + \frac{4}{3}\pi 3^3 \times 9}{\frac{4}{3}\pi 6^3 + \frac{4}{3}\pi 3^3} = 1 \text{ इंच}$$

२. प्रश्नावली २५ के प्रश्न १३ के चित्रको देखिए।

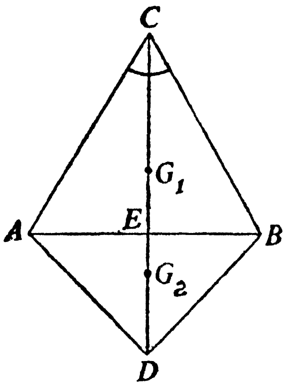
मान लिया कि A पर x औंस भार लटकानेसे गुरुत्व केन्द्र AD के मध्य बिन्दु G_1 पर आ जाता है।

यदि त्रिभुजका गुरुत्व केन्द्र G हो तो

$GD = \frac{1}{3}AD$ तथा $G_1D = \frac{1}{2}AD$, $\therefore \quad GG_1 = \frac{1}{6}AD$

G_1 के सापेक्ष भारोंका घूर्ण लेनेसे

$x.AG_1 = 6.GG_1$ या $x.\frac{1}{2}AD = 6 \times \frac{1}{6}AD$, $\therefore$ $x = 2$ औंस



३. मान लिया ACB तथा ADB दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं, जिनमें

$\angle ACB = 60°$ तथा $\angle ADB = 90°$

यदि $AB = 2a$ तो $CE = a\sqrt{3}$ तथा $DE = a$

यदि दोनों त्रिभुजोंका गुरुत्व केन्द्र आधार AB से $\triangle ACB$ की ओर x दूरी पर हो तो

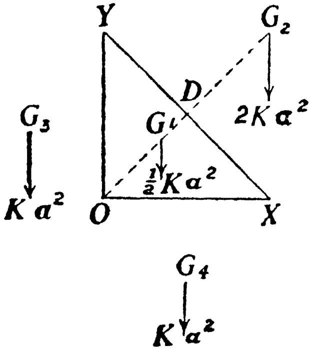
$$x = \frac{\sqrt{3}a^2 . \frac{1}{3}a\sqrt{3} - a^2 . \frac{1}{3}a}{\sqrt{3}a^2 + a^2} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{3} - 1)a.$$

४ तथा ५. अनुच्छेद 9.6 के उदाहरण १ की तरह हल कीजिए।

६ तथा ७. प्रश्न ३ की तरह हल कीजिए।

८. मान लिया XOY, O पर समकोण त्रिभुज है तथा $OX = a$.

यदि $\triangle XOY$ तथा भुजा XY, OY, OX पर बने वर्गोंके गुरुत्व केन्द्र क्रमश: G_1, G_2, G_3, G_4 हों तथा OX, OY को नियामक अक्ष लें तो इनके नियामक क्रमश:



$(\frac{1}{3}\sqrt{2}a \cos 45°, \frac{1}{3}\sqrt{2}a \sin 45°)$; $(\sqrt{2}a \cos 45°, \sqrt{2}a \sin 45°)$;

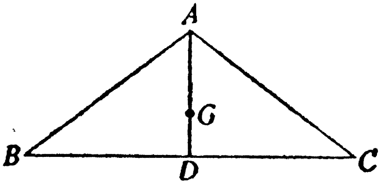
$$\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right); \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) \text{ हैं।}$$

यदि सम्पूर्ण चित्रके गुरुत्व केन्द्रके नियामक $(\bar{x}, \bar{y})$ हों तो

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}ka^2 \, \frac{1}{3}a + 2ka^2 . a + ka^2 . -\frac{1}{2}a + ka^2 . \frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}ka^2 + 2ka^2 + ka^2 + ka^2} = \tfrac{13}{27}a$$

तथा $\bar{y}=\dfrac{\frac{1}{2}ka^2\,\frac{1}{3}a+2ka^2.a+ka^2.\frac{1}{2}a+ka^2.-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}ka^2+2ka^2+ka^2+ka^2}=\frac{13}{27}a.$

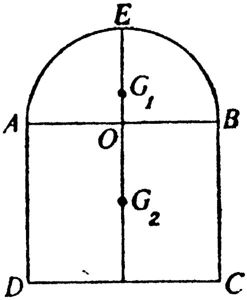
९. यदि $\triangle ABC$ में $AB=AC=5$ फ़ीट तथा $BC=8$ फ़ीट तो $AD=3$ फ़ीट तथा $AG=\frac{2}{3}\,AD=2$ फ़ीट



यदि A से 10 पौंडका भार लटकानेसे गुरुत्व केन्द्रकी दूरी A से x फ़ुट हो तो

$$x=\frac{10\times 0+5\times 2}{10+5}=\frac{2}{3}\text{ फ़ुट}$$

१०. मान लिया अर्द्धवृत्तकी त्रिज्या a है इसलिए वर्गकी भुजा 2a होगी।



यदि अर्द्धवृत्त तथा वर्गके गुरुत्व केन्द्र G_1 तथा G_2 हों तो

$$OG_1=\frac{4a}{3\pi}\quad\text{तथा}\quad OG_2=a$$

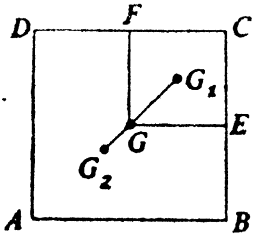
यदि सम्पूर्ण दफ़्तीके टुकड़ेके गुरुत्व केन्द्रकी उभयविष्ट आधार AB से दूरी x हो तो

$$x = \frac{\frac{1}{2}\pi a^2 . \frac{4a}{3\pi} + 4a^2.(-a)}{\frac{1}{2}\pi a^2 + 4a^2} = \frac{-20a}{3(\pi+8)}$$

अतः गुरुत्व केन्द्र उभयनिष्ट आधारके मध्य बिन्दु से वर्गकी ओर $\frac{20a}{3(\pi+8)}$ की दूरी पर होगा।

प्रश्नावली २७. (पृष्ठ १७२-१७४)

१. मान लिया G_1, G तथा G_2 क्रमशः कटे हुए वर्ग EGFC, वर्ग ABCD तथा शेष भाग ABEGFD के गुरुत्व केन्द्र हैं।



यदि AB तथा AD को नियामक अक्ष लें तो G_1, G तथा G_2 के नियामक $(7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$; $(5, 5)$ तथा (x, y) होंगे।

$\therefore$ अनुच्छेद 9.71 से $x = \frac{(10)^2 \times 5 - 5^2 \times 7\frac{1}{2}}{10^2 - 5^2} = \frac{25''}{6}$

तथा $y = \frac{(10)^2 \times 5 - 5^2 \times 7\frac{1}{2}}{10^2 - 5^2} = \frac{25''}{6}$

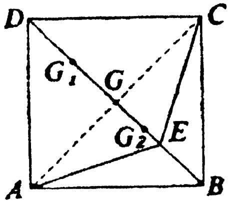
$\therefore$ A से G_2 की दूरी $= \sqrt{(\frac{25}{6})^2 + (\frac{25}{6})^2} = \frac{25}{6}\sqrt{2}$ इंच

२. प्रश्नावली २५ के प्रश्न २ के चित्रमें यदि $BC = a, AD = 8''$, कटे हुए $\triangle AML$ का गुरुत्व केन्द्र G_1, $\triangle ABC$ का G तथा शेष भाग BCLM का G_2 हो तो

$$DG=\tfrac{1}{3}AD=\tfrac{8}{3}'' \text{ तथा } DG_1=DH+HG_1=4+\tfrac{1}{3}\times 4=\tfrac{16}{3}''$$

अनुच्छेद 9.71 से $DG_2=\dfrac{\frac{1}{2}a.8.\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}a.4.\frac{16}{3}}{\frac{1}{2}a.8-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}a.4}=1\tfrac{7}{9}$ इंच

३. कटे हुए चतुर्भुज ADCE का गुरुत्व केन्द्र अनुच्छेद 9.55 से उसी बिन्दु पर होगा, जहां पर A, E, C, D, G पर w, w, w, w, −w रखे भारोंका होगा। A तथा C के भारोंका परिणामी 2w, G से होकर जायगा। परन्तु चूंकि G पर −w भार रखा है, इसलिए G पर w भार ही होगा। अब D, G, E पर w, w, w भारोंका गुरुत्व केन्द्र G_1, यदि D से DG_1 दूरी पर हो तो



$$DG_1=\frac{w.0+w\,\frac{1}{2}DB+w.\frac{3}{4}DB}{w+w+w}=\frac{5}{12}\,DB$$

यदि शेष भाग ABCE का गुरुत्व केन्द्र G_2, D से DG_2 दूरी पर हो तथा AB = a तो अनुच्छेद 9.71 से

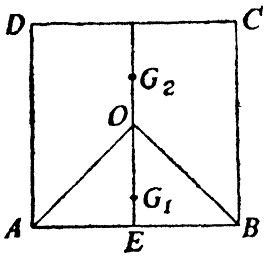
$$DG_2=\frac{(\text{क्षेत्र } ABCD).DG-(\text{क्षेत्र } ADCE).DG_1}{\text{क्षेत्र } ABCD-\text{क्षेत्र } ADCE}$$

$$=\frac{a^2.\frac{1}{2}DB-\frac{3}{4}a^2.\frac{5}{12}DB}{a^2-\frac{3}{4}a^2}=\tfrac{3}{4}DB$$

अत: G_2, E पर स्थित है।

४. यदि G_1, $\triangle OAB$ का तथा G_2 शेष भागका गुरुत्व केन्द्र हो तो

$$EO=\tfrac{1}{2}a \quad \text{तथा} \quad EG_1=\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{6}a$$



अनुच्छेद 9.71 से $EG_2=\dfrac{a^2.\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a^2.\frac{1}{6}a}{a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{11}{18}a$

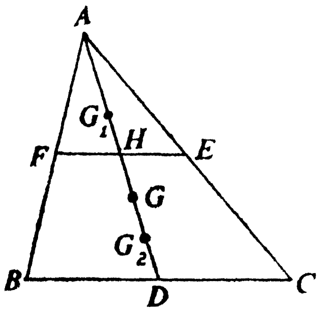
$$\therefore \quad OG_2=\tfrac{11}{18}a-\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{9}a.$$

५. प्रश्न ४ की तरह हल कीजिए।

६. अनुच्छेद 9.7 के उदाहरण १ की तरह हल कीजिए।

७. अनुच्छेद 9.7 के उदाहरण २ की मददसे हल कीजिए।

८. यदि G_1, G तथा G_2 कटे हुए $\triangle AEF$, $\triangle ABC$ तथा शेष भाग BCFE के गुरुत्व केन्द्र हों तथा W_1, W क्रमशः $\triangle AEF$ तथा $\triangle ABC$ के भार हों तो



$W_1=\frac{1}{9}W$, $DG=\frac{1}{3}h$ तथा $DG_1=DH+\frac{1}{3}AH=\frac{2}{3}h+\frac{1}{9}h=\frac{7}{9}h$,

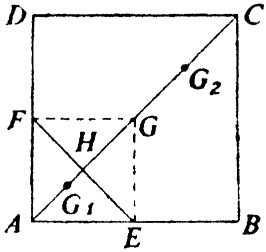
(यदि h मध्यगत रेखाकी लम्बाई हो।)

अनुच्छेद 9.71 से

$$DG_2=\frac{W.DG-W_1.DG_1}{W-W_1}=\frac{W.\frac{1}{3}h-\frac{1}{9}W.\frac{7}{9}h}{W-\frac{1}{9}W}=\frac{5}{18}h.$$

९. यदि a वर्गकी भुजा हो तथा G_1, G तथा G_2 काट लिए गये $\triangle AEF$, वर्ग $ABCD$ तथा शेष भाग $EBCDF$ के गुरुत्व केन्द्र हों तो

$$AG_1 = \tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{2}a\sin 45^\circ = \tfrac{1}{6}a\sqrt{2}$$

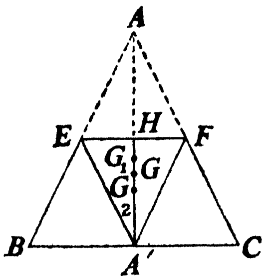


अनुच्छेद 9.71 से

$$AG_2 = \frac{a^2.\frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{8}a^2.\frac{1}{6}a\sqrt{2}}{a^2 - \frac{1}{8}a^2} = \tfrac{23}{42}a\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad GG_2 = \tfrac{23}{42}a\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = \tfrac{1}{21}a\sqrt{2}.$$

१०. आसानीके लिए हमने मान लिया कि दिया हुआ त्रिभुज ABC समद्विबाहु त्रिभुज है। इसका गुरुत्व केन्द्र आधार BC से $\frac{1}{3}.2h = \frac{2}{3}h$ दूरी पर होगा, यदि $2h$, मध्यिका AA' की लम्बाई हो।



यदि कागजको मोड़कर शीर्ष A को आधार पर ले आवें तो $\triangle AEF$ का गुरुत्व केन्द्र G_1, आधार BC से $\frac{2}{3}h$ दूरी पर होगा। समलम्ब चतुर्भुज $BCFE$ का गुरुत्व केन्द्र G_2 आधार BC से $\frac{4}{9}h$ दूरी पर होगा।

यदि इस स्थितिमें गुरुत्व केन्द्र BC से x दूरी पर हो तथा BC = a तो

$$x=\frac{(\text{चतुर्भुज } BCFE).A'G_1+(\triangle A'EF)AG_1}{\text{चतुर्भुज } BCFE+\triangle A'EF}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}ah.\frac{4}{9}h+\frac{1}{4}ah.\frac{2}{3}h}{\frac{3}{4}ah+\frac{1}{4}ah}=\frac{1}{2}h$$

जो कि स्पष्टतया पहले गुरुत्व केन्द्रकी दूरी $\frac{2}{3}h$ का तीन चौथाई है।

११. प्रश्न ६ के चित्रको देखिए।

प्रश्न ६ में हमने ज्ञात किया है कि यदि वर्गकी भुजा a हो तो वर्गके केन्द्र G से भाग EBCDF का केन्द्र $\frac{1}{21}a\sqrt{2}$ दूरी पर है।

यदि A को G पर रख दिया जाय तो $\triangle AFE$, $\triangle GFE$ की स्थिति ग्रहण कर लेगा और अब इसके गुरुत्व केन्द्र G_1 की G से दूरी $\frac{2}{3}.\frac{1}{4}a\sqrt{2}=\frac{1}{6}a\sqrt{2}$ होगी।

यदि इस स्थितिमें टुकड़ेके गुरुत्व केन्द्रकी दूरी G से x हो तो

$$x=\frac{(\text{क्षेत्र } EBCDF).\frac{1}{21}a\sqrt{2}+(\triangle GFE).(-\frac{1}{6}a\sqrt{2})}{\text{क्षेत्र } EBCDF+\triangle GFE}$$

$$=\frac{\frac{7}{8}a^2.\frac{1}{21}a\sqrt{2}-\frac{1}{8}a^2\,\frac{1}{6}\,a\sqrt{2}}{a^2}=\frac{1}{48}a\sqrt{2}=\frac{1}{48}\times \text{ विकर्ण।}$$

अतः प्रमेय।

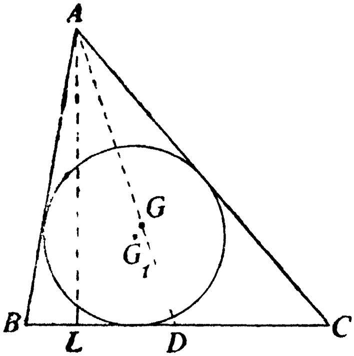
१२. मान लिया कि $\triangle ABC$ तथा अन्तर्गत वृत्तके गुरुत्व केन्द्र G तथा G_1 हैं।

$$\because \quad \text{अन्तर्गत वृत्तकी त्रिज्या} = \frac{S}{s}$$

$$\therefore \quad \text{अन्तर्गत वृत्तका क्षेत्रफल} = \pi.\frac{S^2}{s^2}$$

$$\text{तथा शेष भागका क्षेत्रफल} = S-\frac{\pi S^2}{s^2}$$

यदि शेष भागके गुरुत्व केन्द्रकी दूरी BC से y_2 हो तो



$$y_2 = \frac{S.\frac{1}{3}(\text{लम्ब } AL) - \pi.\frac{S^2}{s^2}\cdot\frac{S}{s}}{S - \pi.\frac{S^2}{s^2}}$$

$$= \frac{S\cdot\frac{1}{3}.\frac{2S}{a} - \pi.\frac{S^3}{s^3}}{S - \pi\frac{S^2}{s^2}} = \frac{S}{3as}\cdot\frac{2s^2 - 3\pi aS}{s^2 - \pi S}.$$

१३. प्रश्न १२ की मददसे हल कीजिए।

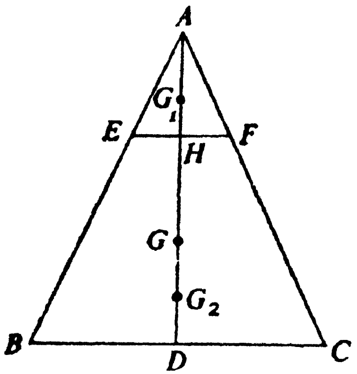
१४. यदि $\triangle AEF$ तथा $\triangle ABC$ के भार W_1 तथा W_2 हों तो

$$W_1 : W_2 = AF^2 : AB^2 = \tfrac{1}{4} : 1$$

यदि चतुर्भुज EFBC का गुरुत्व केन्द्र G_2 हो तथा $AD = h$ तो

$$DG_2 = \frac{W_2.DG - W_1.DG_1}{W_2 - W_1} = \frac{4W_1.\frac{1}{3}h - W_1.\frac{2}{3}h}{4W_1 - W_1} = \tfrac{2}{9}h$$

$$\therefore\quad HG_2 = \tfrac{1}{2}h - \tfrac{2}{9}h = \tfrac{5}{18}h,\quad \therefore\quad HG_2 : DG_2 = 5 : 4.$$

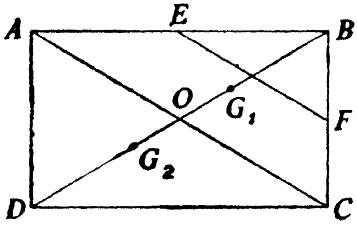


१५. यदि तश्तरीके केन्द्रसे शेष भागके गुरुत्व केन्द्रकी दूरी x हो तो

$$x = \frac{25\times 0 - 9\times 18}{25-9} = -10\tfrac{1}{8} \text{ इंच}$$

अर्थात् वृत्तके दूसरी ओर तश्तरीके केन्द्रसे $10\frac{1}{8}$ इंचकी दूरी पर।

१६. प्रथम भाग प्रश्न १४ की तरह हल कीजिए।



यदि $\triangle$ADC तथा चतुर्भुज CFEA के गुरुत्व केन्द्र G_2 तथा G_1 हों तो $OG_2 = \frac{1}{3}OD = \frac{1}{3}OB$ तथा प्रश्नके प्रथम भाग से

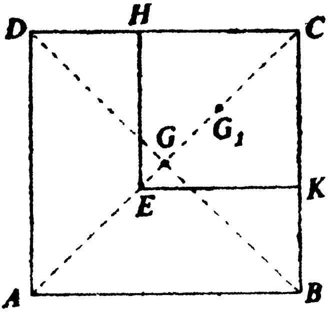
$$OG_1 = \tfrac{2}{9}\,OB$$

यदि ADCFE का गुरुत्व केन्द्र O हो तो O के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$\tfrac{1}{2}W_1 \cdot \tfrac{1}{3}OB = \tfrac{3}{4}W \cdot \tfrac{2}{9}OB, \quad \therefore \quad W = 2W_1.$$

१७. माना कि G तथा G_1 वर्ग ABCD तथा CHEK के गुरुत्व

केन्द्र हैं, यदि ABKEHD का गुरुत्व केन्द्र E हो तो G के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$$(a^2-x^2)EG=x^2(\tfrac{1}{2}x\sqrt{2}-EG), \quad \therefore \ EG=\frac{x^3\sqrt{2}}{2a^2}$$

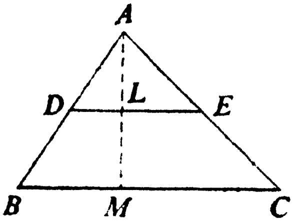
$$\because \quad EG=AG-AE=\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}-(a-x)\sqrt{2}=2\sqrt{2}(2x-a)$$

$$\therefore \quad x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a.$$

१८. यदि छेदके केन्द्रकी दूरी तश्तरीके केन्द्रसे x इंच हो तो

$$2=\frac{\pi.3^2.0-\pi.1^2.x}{\pi.3^2-\pi.1^2}=\frac{x}{8}, \quad \therefore \quad x=16 \text{ इंच}$$

१९. समान $\triangle$ADE तथा $\triangle$ABC से



$$\frac{DE}{BC}=\frac{AL}{AM}=\frac{b}{a}, \quad \therefore \ DE=\frac{b}{a}.BC$$

$\triangle$ABC का क्षेत्रफल $=\tfrac{1}{2}$BC.a

तथा BC से इसके गुरुत्व केन्द्रकी दूरी $=\frac{1}{3}a$

$\triangle ADE$ का क्षेत्रफल

$$=\tfrac{1}{2}DE.b=\tfrac{1}{2}.\frac{b}{a}.BC.b=\tfrac{1}{2}.\frac{b^2}{a}.BC$$

तथा BC से इसके गुरुत्व केन्द्रकी दूरी $=(a-b)+\frac{1}{3}b=a-\frac{2}{3}b$

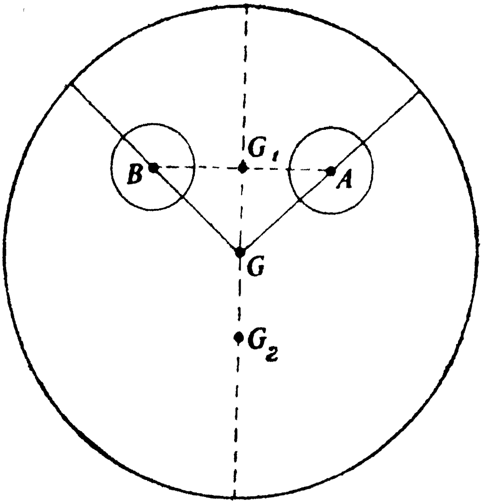
यदि क्षेत्र BCED के गुरुत्व केन्द्रकी दूरी BC से x हो तो

$$x=\frac{\tfrac{1}{2}BC.a.\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}.\frac{b^2}{a}.BC(a-\tfrac{2}{3}b)}{\tfrac{1}{2}BC.a-\tfrac{1}{2}.\frac{b^2}{a}.BC}=\frac{a^2+ab-2b^2}{3(a+b)}.$$

२०. तश्तरीका क्षेत्रफल $=\pi(12)^2=144\pi$

कटे हुए वृत्तोंका क्षेत्रफल $=2\pi(2)^2=8\pi$

$\therefore$ शेष भागका क्षेत्रफल $=144\pi-8\pi=136\pi$



8π के अनुपातीय भार AB के मध्य बिन्दु G से कार्य करेगा तथा यदि 136π के अनुपातीय भार G_2 पर कार्य करे तो G के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$-136\pi GG_2=8\pi GG_1$$

$$\therefore \quad GG_2=\frac{8}{136}\times6\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\cdot25 \text{ इञ्च}$$

प्रश्नावली २८. (पृष्ठ १७७)

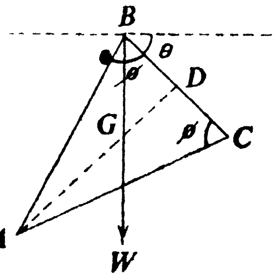
१. प्रश्नावली २६ के प्रश्न ६ के चित्रको देखिए।

अनुच्छेद 9.8 से त्रिभुज ABC का गुरुत्व केन्द्र A से खींचे गये उर्ध्वाधर पर होगा, अतः यदि आधार BC क्षैतिज है तो

$$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ \quad \text{तथा} \quad BD=CD$$

$$\therefore \quad AB=AC, \text{ अतः प्रमेय।}$$

२. सन्तुलनकी अवस्थामें B से खींचा गया उर्ध्वाधर G से होकर आयगा



$\triangle GBD$ से $GD=BD\cot\theta$ ....(1)

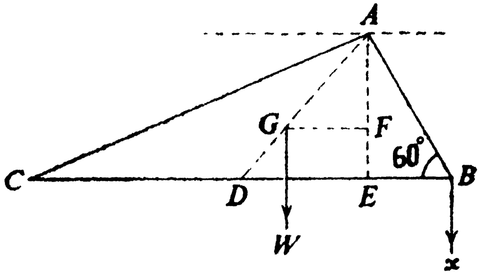
$\triangle ABD$ से $AD=BD\tan\phi$

परन्तु $GD=\frac{1}{3}AD$, $\therefore$ $GD=\frac{1}{3}BD\tan\phi$ ......(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\theta=\cot^{-1}(\frac{1}{3}\tan\phi)$.

३. मान लिया B पर X भार रखनेसे BC क्षैतिज रहती है। समान $\triangle AGF$ तथा $\triangle ADE$ से

$$\frac{GF}{DE}=\frac{AG}{AD}=\frac{2}{3}, \quad \therefore \quad GF=\frac{2}{3}DE$$

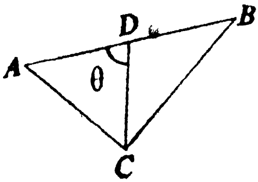


परन्तु $DE = DB - EB = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$, $\therefore \quad GF = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$

A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे $W.GF = x.EB$, $\therefore \quad x = W$.

अतः B पर W भार और रखना चाहिए।

४. मान लिया बड़ी भुजा AB उर्ध्वाधरसे θ कोण बनाती है। त्रिकोणमितिके प्रमेयसे

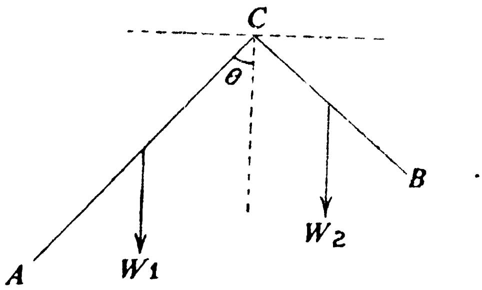


$$AB \cot \theta = AD \cot B - BD \cot A = \tfrac{1}{2} AB\left(\tfrac{4}{3} - \tfrac{3}{4}\right)$$
$$\therefore \quad \theta = \cot^{-1}\left(\tfrac{7}{24}\right).$$

५. मान लिया बड़ी भुजा AC उर्ध्वाधरसे θ कोण बनाती है। भुजाओंके भार अपने लम्बाइयोंके अनुपातमें होंगे,

अतः $\dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$

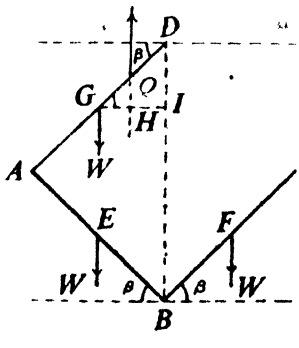
चूंकि तार AB, C के सापेक्ष सन्तुलित होता है, अतः C के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$W_1 . 3 \sin\theta = W_2 . 2 \cos\theta$, $\therefore \tan\theta = \frac{W_2}{W_1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

अतः बड़ी भुजा उर्ध्वाधरसे $\tan^{-1}(\frac{4}{9})$ का कोण बनाएगी।

६. मान लिया कि DA के बिन्दु Q से छड़को लटकानेसे तीनों भुजाएं क्षैतिजसे समान कोण β बनाती हैं।



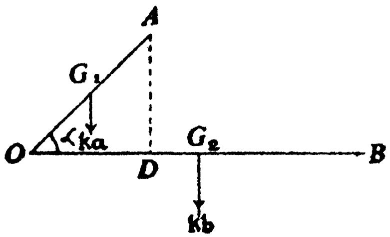
E तथा F पर लगे भारोंका परिणामी 2w होगा, जो कि DB की दिशामें कार्य करेगा। अब G पर लगे w तथा DB की दिशामें लगे 2w का परिणामी बिन्दु H पर कार्य करेगा, जहां $HI = \frac{1}{3}GI$.

समान त्रिभुजों GDI और GBH से $\frac{HI}{GI} = \frac{1}{3} = \frac{QD}{GD}$

अतः $QD = \frac{1}{3}GD = \frac{1}{6}a$, यदि a वर्गकी भुजा हो।

इसी प्रकार C से CB पर $\frac{1}{6}$a की दूरी पर के बिन्दुसे वर्गको लटकानेसे सभी भुजाए क्षैतिजसे समान कोण बनावेंगी।

७ सन्तुलनके लिए OA तथा OB के भारोंके परिणामीको D से होकर जाना चाहिए, जहां AD, रेखा OB पर A से खीचा गया लम्ब है। चूंकि OB क्षैतिज है, अतः D के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$$kb.DG_2 = ka.AG\cos\alpha$$

$$kb.(\tfrac{1}{2}b - a\cos\alpha) = ka.\tfrac{1}{2}a\cos\alpha, \quad \therefore \quad \cos\alpha = \frac{b^2}{a(a+2b)}.$$

प्रश्नावली २९. (पृष्ठ १८६)

१. यदि केन्द्रसे गुरुत्व केन्द्रकी दूरी $\bar{x}$ हो तो

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3}\pi b^3.\frac{3}{8}b - \frac{2}{3}a^3.\frac{3}{8}a}{\frac{2}{3}\pi b^3 - \frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8}\,\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}.$$

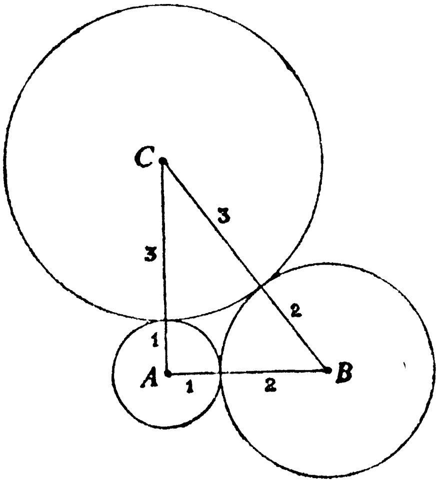
२. यदि A, B, C क्रमशः दिये हुए गोलोंके केन्द्र हों तो

$$AB : BC : CA = 3 : 5 : 4, \text{ अर्थात् } \angle CAB = 90^\circ.$$

यदि सम्पूर्ण संघके गुरुत्व केन्द्रके नियामक AB तथा AC को नियामक अक्ष मानकर ($\bar{x}$ $\bar{y}$) हों तो

$$\bar{x} = \frac{\frac{4}{3}\pi.1^3.0 + \frac{4}{3}\pi.2^3.3 + \frac{4}{3}\pi.3^3.0}{\frac{4}{3}\pi(1^3+2^3+3^3)} = \frac{2}{3}$$

तथा $\bar{y}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi.1^3.0+\frac{4}{3}\pi.2^3.0+\frac{4}{3}\pi.3^3\,4}{\frac{4}{3}\pi(1^3+2^3+3^3)}=3$



अतः A से गुरुत्व केन्द्रकी दूरी $=\sqrt{3^2+(\frac{2}{3})^2}=\frac{1}{3}\sqrt{85}$ इंच

३. यदि अनुच्छेद 9.93 के उदाहरण 2 के चित्रमें DE = 30 फ़ीट, AB = 16 फ़ीट तथा CD = 20 फ़ीट हो तो शंकुकी ऊंचाई

$$BC=\sqrt{CD^2-DB^2}=\sqrt{(20)^2-(15)^2}=5\sqrt{7}\text{ फ़ीट}$$

यदि सम्पूर्णका गुरुत्व केन्द्र आधारसे x फ़ीट हो तो

$$\bar{x}=\frac{\pi.15^2\times16\times8+\frac{1}{3}\pi.15^2\times5\sqrt{7}\times(16+\frac{1}{4}\times5\sqrt{7})}{\pi.15^2\times16+\frac{1}{3}\pi.15^2\times5\sqrt{7}}$$

$=10.46$ फ़ीट

४. सम्पूर्ण शंकुका आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi h^3\tan^2\alpha$

कटे हुए शंकुका आयतन $=\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h\tan\alpha)^2.\frac{1}{2}h=\frac{1}{24}\pi h^3\tan^2\alpha$

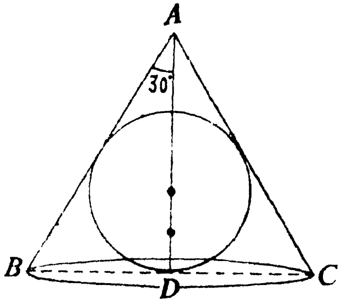
यदि शेष भागके गुरुत्व केन्द्रकी दूरी सम्पूर्ण शंकुके आधारसे $\bar{x}$ हो तो

$$\bar{x}=\frac{\frac{1}{3}\pi h^3\tan^2\alpha.\frac{1}{4}h-\frac{1}{24}\pi h^3\tan^2\alpha.(\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}.\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{3}\pi h^3\tan^2\alpha-\frac{1}{24}\pi h^3\tan^2\alpha}=\frac{11}{56}h.$$

५. गोलेकी त्रिज्या $=\dfrac{\Delta}{s}=\dfrac{BD.AD}{\frac{1}{2}(AB+AC+BC)}$

$$=\frac{r.h}{\frac{1}{2}(h\sec 30^\circ+h\sec 30^\circ+2h\tan 30^\circ)}$$

$$=\frac{h^2\tan 30^\circ}{h(\sec 30^\circ+\tan 30^\circ)}=\frac{1}{3}h$$



यदि गोलेको निकालनेके बाद आधारसे शेष शंकुका गुरुत्व केन्द्र $\bar{x}$ दूर हो तो

$$\bar{x}=\frac{\frac{1}{3}\pi h^3\tan^2 30^\circ.\frac{1}{4}h-\frac{4}{3}\pi.\frac{1}{27}h^3.\frac{1}{3}h}{\frac{1}{3}\pi h^3\tan^2 30^\circ-\frac{4}{3}\pi.\frac{1}{27}h^3}=\frac{11}{60}h$$

$\therefore$ शंकुके शीर्षसे गुरुत्व केन्द्रकी दूरी $=h-\frac{11}{60}h=\frac{49}{60}h$

अतः गुरुत्व केन्द्र अक्षको 11 : 49 के अनुपातमें विभाजित करेगा।

प्रश्नावली ३०. (पृष्ठ १९२)

१. अनुच्छेद 10.5 से न्यूनतम बलका मान

$=W\sin\lambda=100\sin 30^\circ=50$ पौंड

२. सन्तुलनके लिए घर्षण बलका मान क्षैतिज बलके मान 12 पौंड के बराबर होगा तथा यह क्षैतिज बलके विपरीत दिशामें होगा।

सम्पूर्ण निरोध $=\sqrt{F^2+R^2}=\sqrt{(12)^2+(30)^2}=6\sqrt{29}$ पौंड तथा उर्ध्वाधरसे $\tan^{-1}(\frac{12}{30})$ अर्थात् $\tan^{-1}(\frac{2}{5})$ के कोणमें।

३. सन्तुलनके लिए घर्षण बल = लगाये हुए बलका क्षैतिज अवयव

$= 30 \cos 60° = 15$ पौंड

प्रश्नावली ३१. (पृष्ठ १९३)

१. अनुच्छेद 10.6 से घर्षण गुणक $\mu = \tan \alpha = \tan 30° = 1/\sqrt{3}$
तथा प्रतिक्रिया $R = W \cos \alpha = 4 \cos 30° = 2\sqrt{3}$ पौंड

२. अनुच्छेद 10.6 से धरातलकी प्रतिक्रिया

$R = W \cos \alpha = 20 \cos 60° = 10$ पौंड

तथा घर्षण बल $\mu R = W \sin \alpha = 20 \sin 60° = 10\sqrt{3}$ पौंड

प्रश्नावली ३२. (पृष्ठ १९६)

१. अनुच्छेद 10.7 की द्वितीय स्थितिसे न्यूनतम बल

$= 10 \sin(\lambda - \alpha) = 10 \sin(45° - 15°) = 5$ पौंड

२. अनुच्छेद 10.7 की द्वितीय स्थितिसे न्यूनतम बल

$= 60 \sin(\lambda - \alpha) = 60 \sin(\lambda - 30°)$

$= 60(\sin \lambda \cos 30° - \cos \lambda \sin 30°)$

$= 60\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\right),$

[$\because$ $\mu = \tan \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\therefore$ $\sin \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$ और $\cos \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}$]

$= 10(3 - \sqrt{6})$ पौंड

३. अनुच्छेद 10.7 की प्रथम स्थितिसे न्यूनतम बल

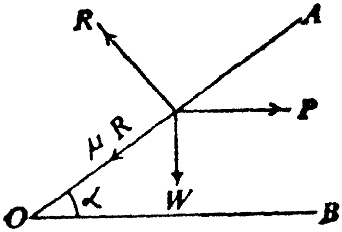
$= 60 \sin(\alpha + \lambda) = 60 \sin(45° + 30°),$

[$\because$ $\mu = \tan \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore$ $\lambda = 30°$]

$= 15\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$ पौंड

प्रश्नावली ३३. (पृष्ठ १९९-२०१)

१. मान लिया कि तलका झुकाव α है।
चूंकि भार W सीमान्त सन्तुलनमें है, इसलिए



$$\mu = \tan \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

बलोंको OA तथा OA के लम्बके अनुगत विश्लेषित करनेसे

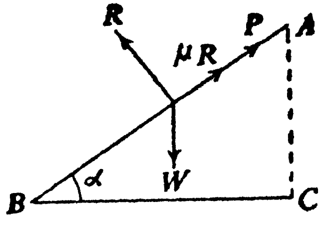
$$\mu R + W \sin \alpha = P \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

तथा $R = W \cos \alpha + P \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$

अत: (i), (ii) तथा (iii) से $P = W \tan 2\alpha$.

२. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

३. चूंकि पिंड आनत तल पर $30°$ के झुकावकी स्थितिमें सी सन्तुलनमें है,



$$\therefore \quad \mu = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

यदि तलका झुकाव $\alpha = 60°$, पिंडका भार $W = 4$ पौंड तथा

समानान्तर आवश्यक बल P हो तो सन्तुलनकी स्थितिमें तलके अनुगत तथा लम्ब दिशामें बलोंका विश्लेषण करनेसे

$$P+\mu R=4 \sin 60^\circ \quad \text{तथा} \quad R=4 \cos 60^\circ$$

इन दोनों समीकरणोंसे $P=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ पौंड

४. प्रश्न ३ के चित्रमें यदि तलका आधार BC=4 फ़ीट, ऊंचाई AC=3 फ़ीट, पिंडका भार W=20 पौंड तथा बल P=8 पौंड हो तो चूंकि पिंड सन्तुलनमें है, इसलिए

$$\mu R+8=20 \sin \alpha \quad \text{.......................(i)}$$

तथा $R=20 \cos \alpha$ ....(ii)

R, sin α तथा cos α का मान (i) में रखनेसे $\mu=\frac{1}{2}$.

५. अनुच्छेद 10 8 के उदाहरण १ की मददसे हल कीजिए।

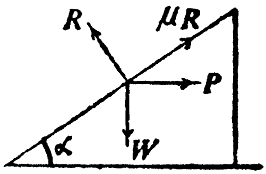
६. 14 पौंडके पिंडकी प्रवृत्ति नीचेकी ओर फिसलनेकी है, अतः घर्षण बल ऊपरकी ओर कार्य करेगा।

प्रश्न ३ के चित्रमें यदि W=14 पौंड, P=7 पौंड तथा α=60° हो तो चूंकि पिंड सन्तुलनमें है, इसलिए

$$7+\mu R=14 \sin 60^\circ \quad \text{तथा} \quad R=14 \cos 60^\circ$$

इन दोनों समीकरणोंसे $\mu=(\sqrt{3}-1)$.

७. मान लिया तलका झुकाव α है, इसलिए



$$\tan \alpha=\frac{3}{4} \quad \text{.........................(i)}$$

चूंकि पिंड (जिसका भार W है), क्षैतिज बल $P=\frac{1}{2}W$ से सधा हुआ है, इसलिए घर्षण बल ऊपरकी ओर कार्य करेगा। यदि पिंड सन्तुलन में हो तो

$$\mu R + \tfrac{1}{2}W\cos\alpha = W\sin\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

तथा $R = W\cos\alpha + \tfrac{1}{2}W\sin\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(iii)$

अतः (i), (ii) तथा (iii) से $\mu = \frac{2}{11}$.

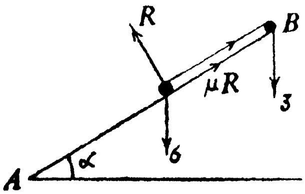
८. यदि तलकी लम्बकीय प्रतिक्रिया R हो तो घर्षण बल $= \mu R$, जहां μ घर्षण गुणक है।

अतः सम्पूर्ण प्रतिरोधी क्रिया $= \sqrt{R^2 + \mu^2 R^2} = R\sqrt{1+\mu^2}$

$$= R\sqrt{1+\tan^2\lambda} = R\sec\lambda,$$

(चूंकि पिंड सीमान्त सन्तुलनमें है, इसलिए $\mu = \tan\lambda$).

९. जब तख्ता क्षैतिज है तब भार पर लगे बलोंका दो लम्ब दिशाओं में विश्लेषण करनेसे



$\mu R = 3$ तथा $R = 6$, $\therefore \mu = \frac{1}{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$

मान लिया कि तख्तेका क्षैतिजके साथ α झुकाव करनेसे पिंड नीचे की ओर फिसलनेकी स्थितिमें हो जाता है अतः घर्षण बल μR ऊपरकी ओर कार्य करेगा। चूंकि पिंड सन्तुलनमें है, इसलिए

$$\mu R + 3 = 6\sin\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

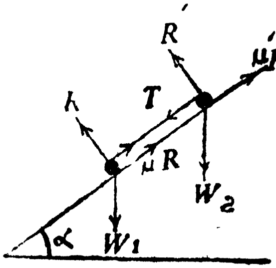
तथा $R = 6\cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$

अतः (i), (ii) तथा (iii) से $\alpha = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$.

१०. मान लिया तल पर स्थित रुक्ष पिंडोंके भार W_1 तथा W_2 हैं। यदि उस समय तलका झुकाव α हो जब कि दोनों पिंड सीमान्त सन्तुलनमें हों तो तलके अनुगत तथा लम्ब दिशाओंमें बलोंका विश्लेषण करनेसे

$T + \mu R = W_1\sin\alpha$ तथा $R = W_1\cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$

और $\mu' R' = W_2 \sin \alpha + T$ तथा $R' = W_2 \cos \alpha$ ....(ii)

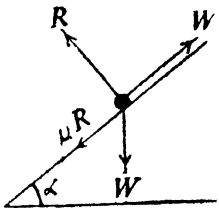


$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{\mu W_1 + \mu' W_2}{W_1 + W_2}\right)$.

११. प्रथम स्थितिमें भार सीमान्त सन्तुलनमें ग्रावत तल पर स्थित है, इसलिए

$$\mu = \tan \alpha \text{ ....(i)}$$

द्वितीय स्थितिमें भार W, बल W के लगानेसे ऊपरकी ओर फिसलने की स्थितिमें हो जाता है, अतः घर्षण बल μR नीचेकी ओर कार्य करेगा। चूंकि भार तल पर सन्तुलनमें है, इसलिए



$\mu R + W \sin \alpha = W$ ....(ii)

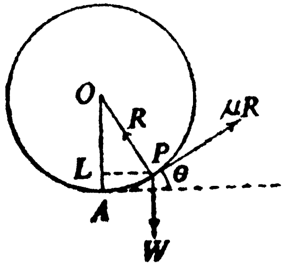
तथा $R = W \cos \alpha$ ....(iii)

अतः (i), (ii) तथा (iii) से $\alpha = 30^\circ$ तथा $\mu = 1/\sqrt{3}$.

१२. मान लिया कि कण गोलेके पृष्ठ पर बिन्दु P पर स्थित है। बिन्दु P की प्रतिक्रिया R केन्द्र O से होकर जायगी।

कणकी ऊंचाई अधिकतम तब होगी, जब कि यह सीमान्त सन्तुलनमें

होगा तथा घर्षण बल μR के बराबर होगा। घर्षण बल, P पर खींची गई स्पर्श रेखाके अनुगत ऊपरकी ओर कार्य करेगा।



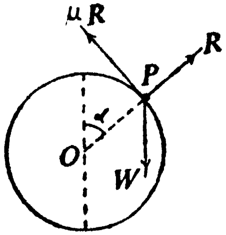
यदि स्पर्श रेखा क्षैतिजसे θ कोण बनाती हो तो स्पर्श रेखा और उसके लम्बकी दिशामें बलोंका विश्लेषण करनेसे

$$\mu R = W \sin\theta \quad \text{तथा} \quad R = W\cos\theta$$

$$\therefore \quad \mu = \tan\theta = 1/\sqrt{3} \quad \text{या} \quad \theta = 30^\circ$$

कणकी ऊंचाई $= AL = AO - OL = a - a\cos\theta = \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})a.$

१३. मान लिया कि पिंडका भार W है। चूंकि कण सीमान्त सन्तुलनमें है, इसलिए घर्षण बल μR के बराबर होगा तथा यह P पर खींची गई स्पर्श रेखाके अनुगत ऊपरकी ओर कार्य करेगा।

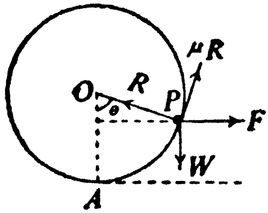


स्पर्श रेखाके अनुगत तथा लम्ब दिशामें बलोंका विश्लेषण करनेसे

$$\mu R = W\sin\alpha \quad \text{तथा} \quad R = W\cos\alpha \quad \text{अत:} \ \tan\alpha = \mu.$$

१४. प्रश्न १२ की मददसे हल कीजिए।

१५. मान लिया कि छल्लको P पर स्थिर रखनेके लिए न्यूनतम क्षैतिज बल F आवश्यक है। चूंकि बल न्यूनतम है, इसलिए छल्लेकी प्रवृत्ति नीचेकी ओर फिसलनेको होगी, अत: घर्षण बल μR, P पर खीची गई स्पर्श रेखाके अनुगत ऊपरकी ओर होगा। बलोंका क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे



$F+\mu R \cos\theta = R \sin\theta$ ....(i)

तथा $\mu R \sin\theta + R \cos\theta = W$ ....(ii)

परन्तु चूंकि घर्षण कोण λ है, इसलिए

$\mu = \tan\lambda$ ....(iii)

अत: (i), (ii) तथा (iii) से $F = W \tan(\theta - \lambda)$.

प्रश्नावली ३४. (पृष्ठ २०७-२११)

१, २ तथा ३. अनुच्छेद 10.9 के उदाहरण १ की मददसे हल कीजिए।

४. मान लिया कि सीढ़ीको दीवारकी ओर खींचनेके लिए न्यूनतम क्षैतिज बल P है।

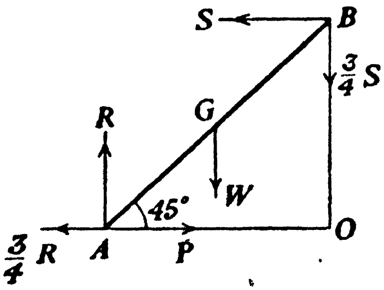
बलोंका उर्ध्वाधर तथा क्षैतिज दिशाओंमें विश्लेषण करनेसे

$W + \frac{1}{2}S = R$ ....(i)

तथा $S + \frac{1}{2}R = P$ ....(ii)

A के सापेक्ष घूर्ण लनेसे

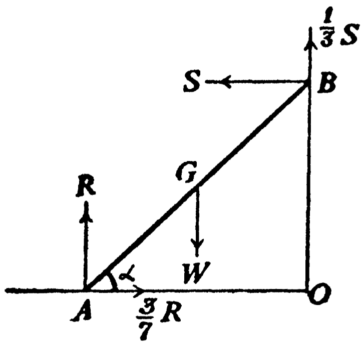
$$W.AG \cos 45° + \tfrac{3}{4}S.2AG \cos 45° = S.2AG \sin 45°$$



या $S = 2W$ ....(iii)

$\therefore$ (i), (ii) तथा (iii) से $P = \frac{31}{8}W$.

५. मान लिया सीढ़ीका क्षितिजसे झुकाव α है।
बलोंका क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे



$\frac{3}{7}R = S$ ....(i)

तथा $R + \frac{1}{3}S = W$ ....(ii)

A के सापेक्ष घूर्ण लेनसे

$W.AG \cos \alpha = \frac{1}{3}S.2AG \cos \alpha + S.2AG \sin \alpha$ ......(iii)

$\therefore$ (i), (ii) तथा (iii) से $\alpha = 45°$.

६ तथा ७. प्रश्न ५ की तरह हल कीजिए।

८. प्रश्न ७ के अनुसार $\tan\theta = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}$

परन्तु यहां पर $\mu_1 = \tan\lambda'$ तथा $\mu_2 = \tan\lambda$

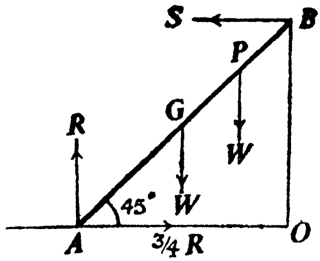
$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{1-\tan\lambda'.\tan\lambda}{2\tan\lambda'} = \frac{\cos(\lambda+\lambda')}{2\sin\lambda'\cos\lambda}.$$

९. प्रश्न ५ की तरह हल कीजिए।

१०. प्रश्न ४ की तरह हल कीजिए।

११. मान लिया कि आदमीके P तक पहुंचनेसे सीढ़ी सीमान्त सन्तुलनमें आ जाती है।

बलोंका क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे



$$\tfrac{3}{4}R = S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

$$\text{तथा} \quad 2W = R \quad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

यदि $AP = x$ हो तो A के सापेक्ष घूर्ण लेनसे

$$W.\tfrac{1}{2}AB\cos 45° + W.x\cos 45° = S.AB\sin 45° \quad \ldots\ldots\text{(iii)}$$

$\therefore$ (i), (ii) तथा (iii) से $x = AB$,

अर्थात् आदमी सीढ़ीके ऊपरी सिरे पर पहुंच सकता है।

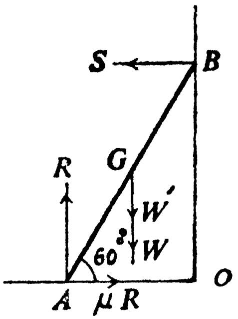
१२. मान लिया कि घर्षण गुणक μ, सीढ़ीका भार W तथा आदमी का भार W' है।

क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें बलोंका विश्लेषण करनेसे

$$S = \mu R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

तथा $R = W + W'$ ....(ii)

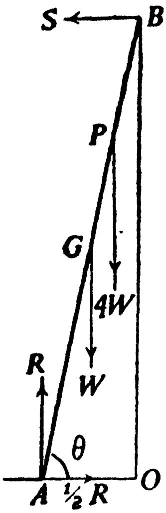
A के सापेक्ष घूर्णं लेनेसे



$(W + W')AG\cos 60° = S.2AG\sin 60°$ ....(iii)

$\therefore$ (i), (ii) तथा (iii) से $\mu = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

१३. मान लिया कि आदमीके x फ़ीट चढ़नेसे सीढ़ी सीमान्त सन्तुलनमें हो जाती है।



बलोंका ऊर्ध्वाधर तथा क्षैतिज दिशामें विश्लेषण करनेसे

$$R = 4W + W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

तथा $S = \frac{1}{2}R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$

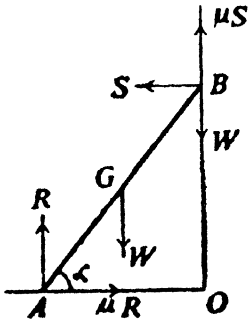
A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$W.30\cos\theta + 4W.x\cos\theta = S.60\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

और $\cos\theta = \frac{AO}{AB} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$, $\therefore \sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \ldots\ldots\text{(iv)}$

$\therefore$ (i), (ii), (iii) तथा (iv) से $x = \frac{15}{2}(10\sqrt{6} - 1)$ फ़ीट

१४. मान लिया कि घर्षण गुणक μ तथा सीढ़ीकी लम्बाई 2a है। बलोंका क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे



$$\mu R = S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

तथा $R + \mu S = 2W \quad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$

B के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$W.a\cos\alpha + \mu R.2a\sin\alpha = R.2a\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

$\therefore$ (i), (ii) तथा (iii) से $\mu = \frac{-2\sin\alpha \pm \sqrt{3+\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$

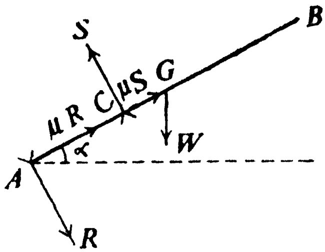
परन्तु चूंकि μ ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए

$$\mu = \frac{-2\sin\alpha + \sqrt{3+\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

१५. मान लिया खूंटी A दंडके ऊपर तथा C दंडके नीचे है। दंडकी

लम्बाई कमसे कम तब होगी जब कि दंडका एक सिरा A के नीचे होगा तथा फिसलने वाला होगा।

यदि A तथा C पर प्रतिक्रियाएं R तथा S हों और μ घर्षण गुणक हो तो बलोंका दंडके अनुगत तथा लम्ब दिशामें विश्लेषण करनेसे



$$\mu R+\mu S=W\sin\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

तथा $S=R+W\cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$S.a=W.AG\cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$

अब (i) तथा (ii) से $2\mu S=W(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)$

अतः (iii) से $AG=\dfrac{a}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{S}{W}=\dfrac{a}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}{2\mu}$

$$=\tfrac{1}{2}a(1+\tan\alpha.\cot\lambda),\quad[\because\ \mu=\tan\lambda]$$

अतः दंडकी कमसे कम लम्बाई $=2AG=a(1+\tan\alpha.\cot\lambda)$.

१६. मान लिया कि आदमीके B पर पहुंचनेसे सीढ़ी सीमान्त सन्तुलनमें आ जाती है।

बलोंका क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे

$$R=w+W \;\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

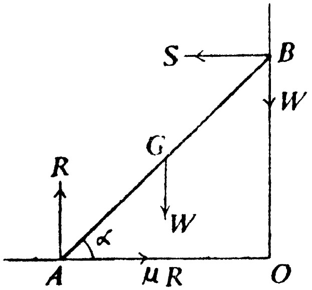
तथा $\mu R=S \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$w.AG\cos\alpha+W.2AG\cos\alpha=S.2AG\sin\alpha$

या $S=\tfrac{1}{2}(w+2W)\cot\alpha \;\ldots\ldots\ldots(iii)$

सीढ़ीके बिना फिसले आदमीको ऊपर तक जानेके लिए आवश्यक है कि घर्षण बल दीवारकी प्रतिक्रियासे बड़ा हो अर्थात्

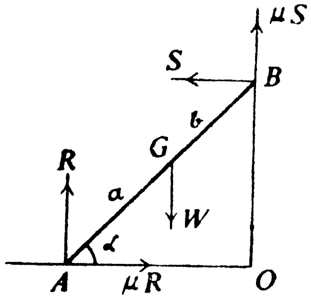


$\mu R > S$ या (i) तथा (iii) से $\mu(w+W) > \frac{1}{2}(w+2W)\cot\alpha$

या $\dfrac{w}{W} > \dfrac{2(1-\mu\tan\alpha)}{2\mu\tan\alpha - 1}$.

१७. मान लिया कि सीमान्त सन्तुलनकी अवस्थामें सीढ़ी धरातलसे α कोण बनाती है।

बलोंका क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे



$\mu R = S$ ..... (i) तथा $R + \mu' S = W$ .. .. (ii)

A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$W.a\cos\alpha = S.(a+b)\sin\alpha + \mu' S.(a+b)\cos\alpha$

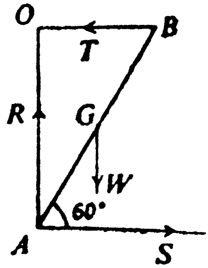
$\therefore$ (i), (ii) तथा (iii) से $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right)$.

१८. मान लिया कि धागेका तनाव T तथा दंडके निचले सिरेपर लगे बलके क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें अवयव R तथा S हैं।

चूंकि दंड सन्तुलनमें है, इसलिए

$$R = W \;\ldots\ldots\; \text{(i)} \quad \text{तथा} \quad S = T \;\ldots\ldots\ldots\; \text{(ii)}$$

A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



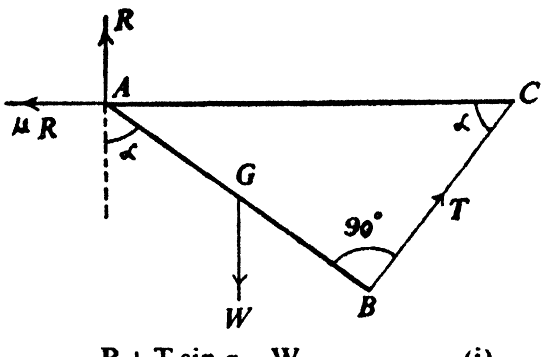
$W.AG \cos 60^\circ = T.2AG \sin 60^\circ$ या $T = \frac{1}{6}\sqrt{3}W$

A पर लगे बलका परिमाण

$$= \sqrt{R^2+S^2} = \sqrt{W^2+\tfrac{1}{12}W^2} = \sqrt{\tfrac{13}{12}}\,W$$

तथा इसका क्षैतिजके साथ झुकाव $= \tan^{-1}(2\sqrt{3})$.

१९. चूंकि छड़ सन्तुलनमें है, इसलिए बलोंको क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषित करनेसे



$$R + T \sin \alpha = W \;\ldots\ldots\ldots\; \ldots\; \text{(i)}$$

तथा $\mu R = T\cos\alpha$ .... (ii)

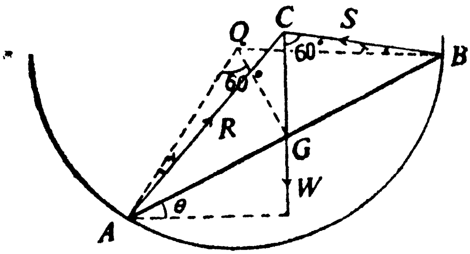
A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$W.AG \sin\alpha = T.2AG$ ....(iii)

$\therefore$ (i), (ii) तथा (iii) से $\mu = \dfrac{\tan\alpha}{2+\tan^2\alpha}$.

२०. मान लिया कि AB छड़ है, जिसकी लम्बाई 2a और गुरुत्व केन्द्र G है तथा O वलयका केन्द्र है।

यदि A तथा B से AC तथा BC रेखाएं खींचे जो कि OA तथा OB से λ कोण बनाएं तो यह A तथा B पर की R तथा S प्रतिक्रियाएं होंगी।



सन्तुलनके नियमके अनुसार भार W की G से उर्ध्वाधर रेखा C से होकर जायगी।

त्रिकोणमितिके प्रमेयसे

$$(a+a)\cot CGB = a\cot CAB - a\cot CBA$$

या $$2\tan\theta = \cot(\angle OAG-\lambda) - \cot(\angle OBG+\lambda)$$

$$= \cot(30^\circ-\lambda) - \cot(30^\circ+\lambda)$$

$$= \frac{1+\tan 30^\circ \tan\lambda}{\tan 30^\circ - \tan\lambda} - \frac{1-\tan 30^\circ \tan\lambda}{\tan 30^\circ + \tan\lambda}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{3+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} - \frac{3-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right\}, \left[\begin{array}{l}\because \sqrt{3}\mu = \tan\alpha \\ \therefore \sqrt{3}\tan\lambda = \tan\alpha\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}}\tan 2\alpha$$

$\therefore$ $\tan\theta : \tan 2\alpha = 2 : \sqrt{3}$.

प्रश्नावली ३५. (पृष्ठ २१२)

१. अनुच्छेद 10.10 के उदाहरणसे हमें ज्ञात है कि यदि शंकु आनत तल पर फिसलने वाला है तो

$\mu=4\tan\alpha$, (जहां 2α शंकुका शीर्ष कोण है।)

$\therefore\quad 1/\sqrt{3}=4\tan\alpha$ या $2\alpha=2\tan^{-1}(\frac{1}{12}\sqrt{3})$.

२. यदि शंकुका शीर्ष कोण 2α हो तो

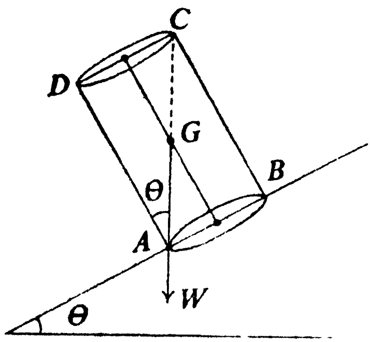
$$\tan 2\alpha=\tfrac{16}{63},\quad\therefore\quad \tan\alpha=\tfrac{1}{8}$$

चूंकि शंकु उलटने तथा फिसलनेकी स्थितिको एक साथ तब प्राप्त होगा, जब कि

$$\mu=4\tan\alpha \text{ या } \tfrac{1}{2}=4\tan\alpha \text{ या } \tan\alpha=\tfrac{1}{8},$$

परन्तु यह दिया है। अतः प्रमेय।

३. जब बेलन A के सापेक्ष उलटनेकी स्थितिमें होगा तब G से खींचा गया उर्ध्वाधर A से होकर जायगा।



बेलनके आनत तल पर उलटनेके लिए यह आवश्यक है कि

$$\tan\theta<\mu \text{ या } \frac{2r}{h}<\mu,$$

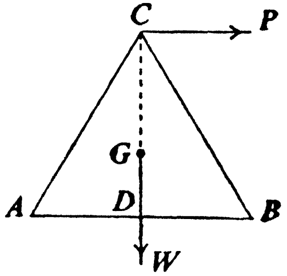
(जहां r बेलनका अर्द्धव्यास और h ऊंचाई है।)

परन्तु यह दिया है। अतः प्रमेय।

४. यदि त्रिभुज ABC बल P द्वारा B के सापेक्ष उलटनेकी स्थिति होगा तो B पर P तथा W के घूर्ण बराबर होंगे।

अत: $P.2a \sin 60° = W.a$ या $P = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,W$

त्रिभुजके फिसलनेकी स्थितिमें यह आवश्यक है कि C पर लगाया गया बल P_1 घर्षण बलके बराबर हो



अत: $P_1 = \mu R = \mu W.$

त्रिभुज उलटनेसे पहले फिसलेगा, यदि $P_1 < P$

अर्थात् $\mu W < \frac{1}{3}\sqrt{3}\,W$ या $\mu < \frac{1}{3}\sqrt{3}$,

परन्तु यह दिया है। अत: प्रमेय।

५. अनुच्छेद 10.10 में दिये हुए उदाहरणके चित्रको देखिए।

मान लिया कि VAB समद्विबाहु त्रिभुज है, जो कि OAB आनत तल पर स्थित है।

जब त्रिभुज उलटनेकी स्थितिमें होगा तो G से खींचा गया उर्ध्वाधर A से होकर जायगा।

अत: $\tan\theta = \frac{AC}{GC} = \frac{AC}{\frac{1}{3}VC} = 3\,\frac{AC}{VC}$

$$= 3\tan\alpha = 3 \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = 1/\sqrt{3}$$

यदि त्रिभुज फिसलनेकी स्थितिमें हो तो

$$\tan\theta = \mu = 1\sqrt{3}$$

अत: त्रिभुज एक साथ फिसलने तथा उलटनेकी स्थितिको प्राप्त होगा।

प्रश्नावली ३६. (पृष्ठ २१८-२२०)

१. कृत कर्म $= 20 \times 25 = 500$ फ़ुट पौंड

२. कृत कर्म $= 124 \times 1000 = 124000$ फ़ुट पौंड

३. कृत कर्म $= 11 \times 112 \times 420 = 517440$ फ़ुट पौंड

४. मान लिया कि आनत तलकी ऊंचाई h, लम्बाई l तथा पिंडका भार w है।

w भारको तलमें l दूरी तक ले जानेमें किया हुआ कर्म

$$= w \sin \alpha . l = w . l \sin \alpha = wh$$

w भारको h ऊंचाई तक उठानेमें किया हुआ कर्म $= wh$,

अतः प्रमेय।

५. अनुच्छेद 10.7 के उदाहरण १ की तरह हल कीजिए।

६. मान लिया कि x घन फ़ीट पानी निकालेगा।

अतः $x \times 62{\cdot}5 \times 150 = 100 \times 33000$ या $x = 352$ घन फ़ीट

७. अनुच्छेद 10.7 के उदाहरण २ की तरह हल कीजिए।

८. यदि इंजिनकी अश्वशक्ति x हो तो इंजिन द्वारा किया गया कर्म

$$= \tfrac{24}{60} \times 33000 \times x \text{ फ़ुट पौंड}$$
$$= 24 \times 550 \times x \text{ फ़ुट पौंड}$$

भारको उठानेके लिए आवश्यक कार्य $= 517440$ फ़ुट पौंड

अतः $24 \times 550 \times x = 517440$ या $x = 39\tfrac{1}{5}$.

९. यदि जंजीरकी लम्बाई x फ़ीट हो तो इसका गुरुत्व केन्द्र $\frac{1}{2}x$ फ़ीट ऊपर उठेगा तथा इसका भार 8x पौंड होगा।

अतएव कृत कर्म $= 8x . \frac{1}{2}x = 4000000$, $\therefore x = 1000$ फ़ीट

१०. चूंकि पानीका गुरुत्व केन्द्र $45 + 14 = 59$ फ़ीट ऊपर उठ जाता है,

अतः कृत कर्म $= 120 \times 90 \times 62{\cdot}5 \times 59$ फ़ुट पौंड

यदि इंजिनकी अश्वशक्ति x हो तो इंजिन द्वारा 15 मिनटमें किया गया कार्य $= x \times 33000 \times 15$ फ़ुट पौंड

अतएव $x \times 33000 \times 15 = 120 \times 90 \times 62{\cdot}5 \times 59$

या $x = 80\frac{5}{11}$.

११. 6 मील प्रति घंटा $= 6 \times \frac{22}{15} = \frac{44}{5}$ फ़ीट प्रति सेकंड

1 सेकंडमें आदमी द्वारा किया कार्य $= (200 \sin \theta) \times \frac{44}{5}$ फ़ुट पौंड,

(यदि θ चढ़ावका कोण हो।)

$= 200 \times \frac{1}{20} \times \frac{44}{5} = 88$ फ़ुट पौंड

यदि आदमीकी अश्वशक्ति x हो तो

$x \times 550 = 88, \quad \therefore \quad x = 0{\cdot}16.$

१२. १ सेकंडमें आदमी द्वारा किया गया कार्य

$= 140 \times \frac{18}{12} = 210$ फ़ुट पौंड

यदि आदमीकी अश्वशक्ति x हो तो

$x \times 550 = 210, \quad \therefore \quad x = \frac{21}{55} = \frac{2}{5}$ (लगभग)

१३. दूसरी ईंटको पहली ईंटके ऊपर रखनेके लिए दूसरी ईंटके गुरुत्व केन्द्रको 3 इंच अर्थात् $\frac{1}{4}$ फ़ुट उठाना पड़ेगा।

अत: कृत कर्म $= 10 \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$ फ़ुट पौंड

तीसरी ईंटको दूसरी ईंटके ऊपर रखनेके लिए गुरुत्व केन्द्रको $\frac{2}{4}$ फ़ुट उठाना पड़ेगा।

अत: कृत कर्म $= 10 \times \frac{2}{4} = 5$ फ़ुट पौंड

इसी प्रकार चौथी ईंटको तीसरी ईंटके ऊपर रखनेसे कृत कर्म

$= 10 \times \frac{3}{4} = 7\frac{1}{2}$ फ़ुट पौंड

अत: कुल कृत कर्म $= 2\frac{1}{2} + 5 + 7\frac{1}{2} = 15$ फ़ुट पौंड

१४. मीनारके आधार पर लगे ईंटोंका क्षेत्रफल

$= 22 \times 9 - 18 \times 5 = 108$ वर्ग फ़ीट

इसलिए ईंटोंका आयतन $= 108 \times 66$ घन फ़ीट

और ईंटोंका भार $= 108 \times 66 \times 112$ पौंड

मीनारके उठानेमें इसका गुरुत्व केन्द्र $\frac{1}{2} \times 66 = 33$ फ़ीट ऊपर उठेगा,

इसलिए कृत कर्म $= 108 \times 66 \times 112 \times 33$ फ़ुट पौंड

यदि इंजिन मीनारको x घंटेमे उठाले तो

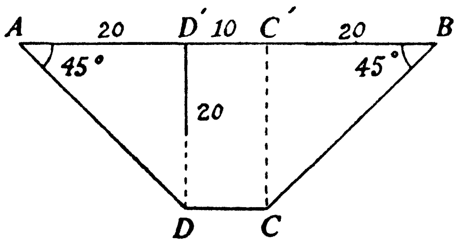
$$3 \times x \times 60 \times 33000 = 108 \times 66 \times 112 \times 33$$

$$\therefore \quad x = 4{\cdot}4352.$$

१५. यहां पर खोदी गई मिट्टीकी आकृति, एक समपार्श्व (right prism) की भांति है, जिसके सिरे उर्ध्वाधरमें समलम्ब चतुर्भुज ABCD की आकृतिके है।

चूंकि AB=50 फ़ीट, DD′=20 फ़ीट तथा $\angle DAD' = 45°$, इसलिए CD=10 फ़ीट

निकाली गई मिट्टीका आयतन



$= ($चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल$) \times 200$

$= \frac{1}{2}(10+50) \times 20 \times 200$ घन फ़ीट

$\therefore$ इसका भार $= \dfrac{30 \times 20 \times 200 \times 150}{2240}$ टन

सड़ककी सतह AB से मिट्टीके गुरुत्व केन्द्रकी दूरी = समलम्ब चतुर्भुज ABCD के गुरुत्व केन्द्रकी AB से दूरी

$$= \frac{25+10}{3(25+5)} \times 20 = \tfrac{70}{9} \text{ फ़ीट}$$

$\therefore$ मिट्टीके खोदनेमें किया गया कार्य

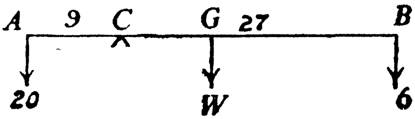
$$=\frac{30\times20\times200\times150}{2240}\times\frac{70}{9}=62500 \text{ फ़ुट टन}$$

प्रश्नावली ३७. (पृष्ठ २२९-२३०)

१. यदि लीवरकी लम्बाई x हो तो

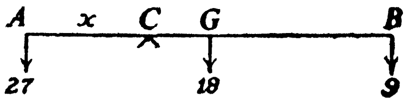
$5(x-3)=7\times3, \quad \therefore\ x=7.2$ फ़ीट

२. यदि लीवरका भार w हो तो आलम्बके सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$20\times9=w\times9+6\times27, \quad \therefore\ w=2$ पौंड

३. सन्तुलनके लिए, यदि आलम्ब 27 पौंसके भारसे x इंच दूर हो तो आलम्बके सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



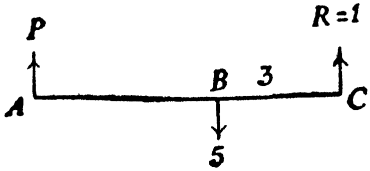
$27x=18(9-x)+9(18-x), \quad \therefore\ x=6$ इंच

४. यदि लीवरकी लम्बाई x इंच हो तो 8 पौंडके भारसे आलम्बकी दूरी$=\frac{4}{12}x=\frac{1}{3}x$ इंच

यदि 8 पौडके भारमें 2 पौण्डका भार जोड़ दिया जाय तो इससे आलम्बकी दूरी$=\frac{4}{14}x=\frac{2}{7}x$ इंच

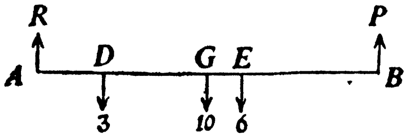
प्रश्नके अनुसार $\frac{1}{3}x-\frac{2}{7}x=\frac{4}{7}, \quad \therefore\ x=12$ इंच

५. यदि शक्ति P, आलम्बसे x फ़ीटकी दूरी पर लगाई जाय तो A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$5(x-3)=1.x$, $\therefore$ $x=3\frac{3}{4}$ फ़ीट

६. यदि आलम्बकी प्रतिक्रिया R तथा सिरे B पर बल P हो तो B के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



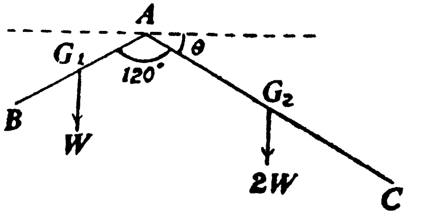
$6\times2+10\times2\frac{1}{2}+3\times4=R\times5$, $\therefore$ $R=9\frac{4}{5}$ पौंड

७. यदि नावमें x पौंड बल लगता हो तो बटनके सापेक्ष बलोंका घूर्ण लेनेसे

$20\times3=x\times6$, $\therefore$ $x=10$ पौंड

८. मान लिया बड़ी भुजा क्षैतिजसे θ कोण बनाएगी।

चूंकि भुजाओंके भार उनकी लम्बाइयोंके अनुपातीय होंगे, इसलिए A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

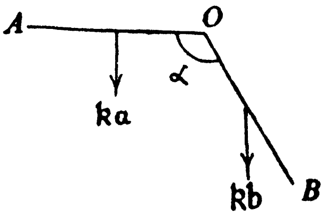


$2w.a\cos\theta=w.\frac{1}{2}a\cos\{180°-(120°+\theta)\}$,

(यदि $AC=2a$ तथा $AB=a$)

$\therefore$ $\theta=\tan^{-1}(\frac{7}{3}\sqrt{3})$.

९. यदि AO छोटी तथा BO बड़ी भुजा हो और उनकी लम्बाइयां क्रमशः a तथा b हों तो AO क्षैतिज होगी। अतः O के सापेक्ष घूर्ण ले से

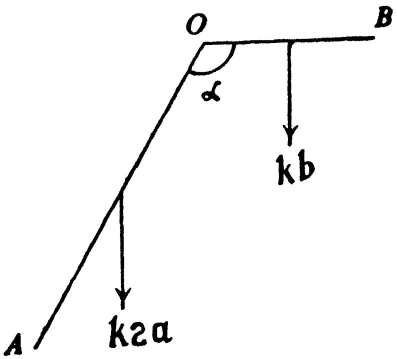


$$k.a.\tfrac{1}{2}a = k.b.\tfrac{1}{2}b\cos\alpha \quad \text{या} \quad \cos\alpha = a^2/b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

यदि $AO = 2a$ तो BO क्षैतिज होगी। अतः O के सापेक्ष घूर्ण लेने से

$$k.b.\tfrac{1}{2}b = k.2a.a\cos\alpha \quad \text{या} \quad \cos\alpha = b^2/4a^2 \quad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$, $\therefore \alpha = 60°$ तथा $120°$



परन्तु $\alpha = 60°$ अग्राह्य है, क्योंकि इस दशामें दोनों भुजाओंके भारों की क्रिया रेखाएं बिन्दु O के एक ही ओर होंगी। इसलिए $\alpha = 120°$.

१०. किसी सुपारीके ठीक ऊपर बल लगाकर इसे तोड़नेके लिए उतने ही बलकी आवश्यकता होगी, जितना कि सुपारीकी प्रतिक्रिया होगी।

यदि यह प्रतिक्रिया R हो तो कब्जेके सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$\tfrac{7}{2}\times 5=R\times\tfrac{7}{8},\quad \therefore\ R=20 \text{ पौंड}$$

अतः सुपारीको तोड़नेके लिए आवश्यक बल = 20 पौंड

प्रश्नावली ३८. (पृष्ठ २४०-२४१)

१. अनुच्छेद 12.33 के कारण १ से वास्तविक भार

$$=\sqrt{60\times 72}=65{\cdot}72 \text{ पौंड}$$

२. यदि पहली तथा दूसरी अवस्थामें बिस्कुटोंके वास्तविक भार w_1 तथा w_2 हों तो

$$w_1.8=1\times 10 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

$$\text{तथा}\quad w_2.10=1\times 8 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

चूंकि ग्राहकको w_1+w_2 बिस्कुट मिला, इसलिए

$$w_1+w_2=\tfrac{5}{4}+\tfrac{4}{5}=2\tfrac{1}{20} \text{ पौंड}$$

३. यदि वस्तुका वास्तविक भार w हो तो

$$w.9=27\times 8\tfrac{3}{4},\quad \therefore\ w=26\tfrac{1}{4} \text{ पौंड}$$

४. अनुच्छेद 12·33 के कारण २ से वास्तविक भार

$$=\tfrac{1}{2}(16+20)=18 \text{ पौंड}$$

अनुच्छेद 12·33 के कारण २ के समीकरण (1) से पलड़ोंके भारोंका अन्तर = 18 − 16 = 2 पौंड

५. यदि सामानका वास्तविक भार w तथा दोनों भुजाओंसे तुलित अप्रमाणिक भार क्रमशः w_1, w_2 हों तो

$$w_1.18=w.17 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

$$\text{तथा}\quad w_2.17=w.18 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

चूंकि ग्राहकको w के स्थान पर $\frac{1}{2}(w_1+w_2)$ सामान मिलता है।

$\therefore$ विक्रेताको w भार पर हानि $=\frac{1}{2}(w_1+w_2)-w$

$$=\tfrac{1}{2}(\tfrac{17}{18}+\tfrac{18}{17})\,w-w=\frac{1}{2\times17\times18}w$$

अतः प्रतिशत हानि $=\dfrac{100}{2\times17\times18}=\frac{25}{153}\%$.

६. प्रश्न ५ की तरह हल कीजिए।

७. यदि तुलाकी भुजाएं a तथा b हों तो

$$P.a=Q.b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

तथा $(Q+\frac{1}{100}Q)a=P.b \quad \ldots\ldots\ldots (ii)$

अतः समीकरण (i) तथा (ii) से

$a:b=10:\sqrt{101}$ तथा $P:Q=\sqrt{101}:10$.

८. यदि भुजाओंकी लम्बाइयां a तथा b और पलड़ेमें पहलेसे रखा हुआ भार w हो तो

$$P.a=(W+w)b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

तथा $W'.a=(P+w)b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

अतः (i) तथा (ii) से $a:b=(W-P):(P-W')$

और $w=(WW'-P^2)/((P-W')$.

९. अनुच्छेद 12.33 के उदाहरण २ के चित्रमें यदि $AC=a$, $BC=b$, $CG=x$ तथा R पौंड भार X पौंड भारसे तुलित होता हो तो

$$P.a=W'.x+Q.b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$Q.a=W'.x+R.b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

तथा $R.a=W'.x+X.b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

अतः (i), (ii) तथा (iii) से $X=R-\dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$.

१०. प्रश्नानुसार पहली अवस्थामें $W.a=P.b$

तथा दूसरी अवस्थामें $Q.a=W.b$

इन दोनों समीकरणोंको घटानेसे $a:b=(P-W):(W-Q)$.

११. भुजाओंकी लम्बाइयां a तथा b मानकर प्रश्न ५ की तरह हल कीजिए। प्रश्न हल करने पर ज्ञात होगा कि विक्रेताको हानि होगी।

१२. अनुच्छेद 12.33 के उदाहरण १ की तरह हल कीजिए।

१३. यदि भुजाओंकी लम्बाइयां a तथा b हों तो

पहली अवस्थामें $51{\cdot}075a = 51{\cdot}362b$ ....(i)

तथा दूसरी अवस्थामें $25{\cdot}592a = 25{\cdot}879b$.........(ii)

दोनों समीकरणोंको घटानेसे $25{\cdot}483a = 25{\cdot}483b$ या $a = b$

प्रश्न यदि $a = b$ होगा तो पलड़ोंके भारोंमें अन्तर

$$= 51{\cdot}362 - 51{\cdot}075 = {\cdot}287 \text{ ग्राम}$$

१४. चूंकि व्यक्तिकी पगड़ी आलम्बके उसी ओर है जिस ओर व्यक्ति है। अतः आलम्बके सापेक्ष व्यक्ति और उसकी पगड़ीके भारोंके घूर्णोंका योग केवल व्यक्तिके भारके घूर्णसे अधिक होगा। अतएव आलम्बके दूसरी ओर स्थित भार जिससे कि व्यक्तिको तोला जाता है, व्यक्तिके वास्तविक भारसे अधिक होगा।

प्रश्नावली ३९. (पृष्ठ २४६-२४७)

१. अनुच्छेद 12.41 के समीकरण (1) से आलम्ब C से शून्य चिह्न

की दूरी $= \dfrac{Q.GC}{P} = \dfrac{10 \times 3}{12} = 2\frac{1}{2}$ इंच

अनुच्छेद 12.41 के समीकरण (२) से

$$56 \times 4 + 10 \times 3 = 12 \times CN$$

अतः CN, आलम्बसे गतिमान बिन्दुकी स्थिति $= 21\frac{1}{6}$ इंच

२. अनुच्छेद 12.41 के समीकरण (1) से आलम्बसे शून्यांककी दूरी

$$= \frac{2 \times 2}{\frac{1}{4}} = 16 \text{ इंच}$$

अत: गुरुत्व केन्द्रसे शून्यांककी दूरी $=16+2=18$ इंच

३. अनुच्छेद 12.42 से $BC=\frac{P}{W+P}BG$, जहां B पलड़ेकी स्थिति, C आलम्ब, G गुरुत्व केन्द्र, P तुलाका भार तथा W पलड़े पर के भार हैं। प्रश्नानुसार $P=6$ पौंड तथा $BG=3$ फ़ीट

$\therefore$ पलड़े पर 1 पौंड, 2 पौंड, 3 पौंड......आदिके भार रखनेसे

$$BC_1=\frac{6}{1+6}\times 3=2\tfrac{4}{7} \text{ फ़ीट}, \quad BC_2=2\tfrac{1}{4} \text{ फ़ीट}, \; 2 \text{ फ़ीट}$$

......................आदि

४. यदि C_1 तथा C_2 क्रमश: प्रथम तथा द्वितीय मापांक हों तथा C, C_1 तथा C_2 का मध्य बिन्दु हो तो

अनुच्छेद 12.42 से

$$BC=\frac{P}{W+P}BG, \quad BC_1=\tfrac{1}{2}BG \quad \text{तथा} \quad BC_2=\tfrac{1}{3}BG$$

परन्तु $BG=\frac{1}{2}(BC_1+BC_2)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})BG$

अत: $\frac{P}{W+P}\cdot BG=\frac{5}{12}BG$, $\therefore \frac{W}{P}=\frac{7}{5}$.

५. अनुच्छेद 12.42 से $^{a}n=\frac{P}{n+P}\cdot BG$

$$^{a}n+1=\frac{P}{n+1+P}\cdot BG$$

$$^{a}n+2=\frac{P}{n+2+P}\cdot BG$$

$$\therefore \frac{1}{^{a}n+2}-\frac{2}{^{a}n+1}+\frac{1}{^{a}n}$$

$$=\frac{n+2+P-2(n+1+P)+n+P}{P.BG}=0.$$

प्रश्नावली ४०. (पृष्ठ २५५-२५६)

१. अनुच्छेद 12.54 की द्वितीय दशासे

$$2^nP = W + w(2^n - 1)$$

$\therefore \quad 2^4 \times 20 = W + 2(2^4 - 1)$ या $W = 290$ पौंड

२. अनुच्छेद 12.54 की द्वितीय दशासे

$2^4 \times 4 = 56 + w(2^4 - 1)$, $\therefore \; w = \frac{8}{15}$ पौंड

३. अनुच्छेद 12.54 की प्रथम दशासे

$W = 2^nP$, $\therefore \; 16 \times 112 = 2^n \times 28$ या $n = 6$.

४. अनुच्छेद 12.54 की द्वितीय दशासे

$2^3P = 0 + w(2^3 - 1)$, $\therefore \; P = \frac{7}{8}w$.

५. यदि लगाया बल P हो तो अनुच्छेद 12.54 की द्वितीय दशासे

$2^3P = 105 + 1(2^3 - 1)$, $\therefore \; P = 14$ पौंड

यदि 1 घिरनी और लगाने पर W भार इसी बलसे उठाया जा सके तो

$2^4 \times 14 = W + 1(2^4 - 1)$, $\therefore \; W = 209$ पौंड

६. चूंकि प्रत्येक घिरनी एक पृथक डोरीसे लटकाई गई है, अतः यह घिरनियोंकी प्रथम संस्था है।

यदि बोझ तथा प्रत्येक घिरनीके भार क्रमशः W तथा w हों तो अनुच्छेद 12.54 की द्वितीय दशासे

$$2^3 \times 7 = W + w(2^3 - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

तथा $2^4 \times 4 = W + w(2^4 - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$

अतः (i) तथा (ii) से $W = 49$ पौंड तथा $w = 1$ पौंड

७. मान लिया कि डोरीमें नीचेकी ओर तनाव P है, इसलिए आदमी पर ऊपरकी ओर P के बराबर खिंचाव होना चाहिए, अतः बल द्वारा उठाये जाने वाला भार P के बराबर कम हो जायगा।

12.54 की प्रथम दशासे

$168-P=2^4P$, $\therefore$ $P=9\frac{15}{17}$ पौंड

८. यदि लगाया गया बल P हो तो अनुच्छेद 12.54 की द्वितीय दशासे

$$2^3P=W+w(2^3-1)$$

चूंकि घिरनियोंमें P तथा W के द्वारा किये गये कार्य बराबर होते हैं। अतः अनुच्छेद 12.13 से

$$\text{वेग अनुपात}=\text{यांत्रिक लाभ}=\frac{W}{P}=\frac{W.2^3}{W+7w}=\frac{2^3W}{W+7w}.$$

९. मान लिया कि घिरनियोंके भार क्रमशः w, w+d, w+2d, ..., w+(n−1)d है।

$$\therefore \quad W'=\tfrac{1}{2}n\{2w+(n-1)d\} \text{ ....(i)}$$

§ 12.54 की द्वितीय दशासे

$$2^nP=W+w+2(w+d)+2^2(w+2d)+\dots\dots+2^{n-1}\{w+(n-1)d\}$$

यदि $S=w+2(w+d)+2^2(w+2d)+\dots\dots+2^{n-1}\{w+(n-1)d\}$

तो $2S=\quad 2w+2^2(w+d)+\dots\dots+2^{n-1}\{w+(n-2)d\}+2^n\{w+(n-1)d\}$

$$\therefore \quad S=2^n\{w+(n-1)d\}-w-2d-2^2d-\dots\dots-2^{n-1}d$$

$$=w(2^n-1)+(n-1)2^nd-2d(1+2+\dots\dots+2^{n-2})$$

$$=w(2^n-1)+(n-1)2^nd-2d(2^{n-1}-1)$$

$$\therefore 2^nP=W+w(2^n-1)+(n-1)2^nd-2d(2^{n-1}-1) \text{ ...(ii)}$$

दूसरी अवस्थामें

$$2^nW=P+\{w+(n-1)d\}+2\{w+(n-2)d\}+\dots\dots+2^{n-1}.w$$

$$=P+w(2^n-1)-(n-1)d+2d(2^{n-1}-1) \text{ ....(iii)}$$

(ii) तथा (iii) को जोड़नेसे

$$2^n(W+P)=W+P+2w(2^n-1)+(n-1)d(2^n-1)$$

या $W+P=2w+(n-1)d=\dfrac{2W'}{n}$ {(i) से}

$$\therefore \quad n(W+P)=2W'.$$

१०. यदि घिरनियोंके भार नीचेसे w_1, w_2, w_3 तथा w_4 हों तो

$W+w_1=2T_1$ .... (i)

$T_1+w_2=2T_2$ ....(ii)

$T_2+w_3=2T_3$ ....(iii)

तथा $T_3+w_4=2T_4$ ....(iv)

$\because$ $T_4=P$, $\therefore$ (iv) से $T_3<2P$, (iii) से $T_2<4P$ तथा (ii) से $T_1<8P$

$\therefore$ बल्लीका दबाव $=T_1+T_2+T_3+T_4$, $15P$ से कम है।

(i) से $2T_1>W$, (ii) से $T_2>\frac{1}{2}T_1>\frac{1}{4}W$, $T_3>\frac{1}{2}T_2>\frac{1}{8}W$ तथा $T_4>\frac{1}{2}T_3>\frac{1}{16}W$

$\therefore$ बल्लीका दबाव $=T_1+T_2+T_3+T_4$, $\frac{15}{16}W$ से अधिक है।

प्रश्नावली ४१. (पृष्ठ २५९-२६०)

१. यदि नीचेके चौखटेका भार w तथा घिरनियोंकी संख्या n हो तो अनुच्छेद 12.55 की द्वितीय दशासे

$34+w=19n$ ....(i)

तथा $16+w=10n$ ....(ii)

अत: (i) तथा (ii) से $n=2$ तथा $w=4$ पौंड

यदि आवश्यक बल P तथा भार $51\frac{1}{2}$ पौंड हो तो

$51\frac{1}{2}+4=2P$, अत: $P=27\frac{3}{4}$ पौंड

२. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

३. अनुच्छेद 12.55 के उदाहरण १ की तरह हल कीजिए, (यहां १२ घिरनियोंकी संख्या होगी, क्योंकि प्रत्येक चौखटेमें ६ घिरनियां हैं)।

४. प्रश्न १ की तरह हल कीजिए।

५. मान लिया आदमी P बल लगाता है। इसलिए डोरीमें नीचेकी ओर तनाव P तथा आदमी पर ऊपरकी ओर खिचाव भी P होगा। अतः P बलके द्वारा उठाये जाने वाला भार P के बराबर कम हो जायगा।

अनुच्छेद 12.55 का प्रथम स्थितिसे

$$W+w-P=3P, \quad \therefore \; P=\tfrac{1}{4}(W+w)$$

यदि पिंजड़े पर आदमी न खड़ा हो तथा इसे रोकनेके लिए आवश्यक बल P' हो तो

$$W=3P' \quad \text{या} \quad P'=\tfrac{1}{3}W$$

अतः P बल जो कि W तथा w के रोकनेके लिए आवश्यक है, अवश्य ही P' से बड़ा होगा।

$$\therefore \quad P>P' \quad \text{या} \quad \tfrac{1}{4}(W+w)>\tfrac{1}{3}W$$

$$\text{या} \quad \tfrac{1}{4}w>\tfrac{1}{12}W \quad \text{या} \quad w>\tfrac{1}{3}W.$$

प्रश्नावली ४२. (पृष्ठ २६४-२६५)

१. § 12.56 की द्वितीय दशासे

$$W=(2^4-1).2w+(2^4-1-4)w=41w.$$

२. यदि भार W उठ सके तो § 12.56 की द्वितीय दशासे

$$W=(2^4-1)\times 20+(2^4-1-4)\times 2=322 \text{ पौंड}$$

३. यदि P बलकी आवश्यकता हो तो § 12.56 की द्वितीय दशासे

$$6\times 112=(2^5-1)P+(2^5-1-5)\times 1$$

$$\therefore \quad P=20\tfrac{26}{31} \text{ पौंड}$$

४. यदि उठाया गया भार W, एक घिरनीका भार w हो तो बलका परिमाण भी w होगा।

अतः § 12.56 की द्वितीय दशासे

$$W=(2^5-1)w+(2^5-1-5)w=57w.$$

५. § 12.56 की द्वितीय दशासे उठाया जाने वाला भार

$$W=(2^4-1)\times 0+(2^4-1-4)w=11w.$$

६. यदि W भार साधा जा सके तो § 12.56 की द्वितीय दशासे

$$W=(2^7-1)\times 0+(2^7-1-7)\times 1\tfrac{1}{2}=180 \text{ पौंड}$$

७. यदि घिरनियोंकी संख्या n तथा बोझका भार W हो तो § 12.56 की प्रथम दशासे

$$W=(2^n-1)\times 70 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

एक डोरीके टूट जाने पर डोरियोंकी संख्या $n-1$ हो जाती है, अतः

$$W=(2^{n-1}-1)\times 150 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

अतः (i) तथा (ii) से $n=4$ तथा $W=1050$ पौंड

८. यदि आवश्यक बल P हो तो § 12.56 की द्वितीय दशासे

$$112=P(2^4-1)+4(2^3-1)+5(2^2-1)+6(2-1)+7(1-1)$$

$$\therefore \quad P=4\tfrac{1}{5} \text{ पौंड}$$

९. यदि आदमी भारको साधनेके लिए P बल लगाता हो तो § 12.56 की द्वितीय दशासे

$$106=P(2^4-1)+1(2^3-1)+2(2^2-1)+3(2-1)$$

$$\therefore \quad P=6 \text{ पौंड}$$

$\therefore$ आदमीका भूमि पर दबाव$=120-6=114$ पौंड

१०. यदि संस्थामें n घिरनियां हों तो § 12.56 की द्वितीय दशासे

$$\begin{aligned} W&=(2^n-1)P+(2^n-1-n)w \\ &=(2^n-1)P+(2^n-1)w-nw \\ &=(2^n-1)(P+w)-W', \quad (\because \quad nw=W') \end{aligned}$$

$\therefore\ W+W'=(2^n-1)(P+w)$

अतः § 12.56 की प्रथम दशासे प्रकट है कि $W+W'$ भारको $(P+w)$ परिमाणका भार तभी उठा सकता है जब कि घिरनियां भार हीन हों।

प्रश्नावली ४३. (पृष्ठ २६९-२७०)

१. यदि आवश्यक बल P हो तो § 12.62 से

$$P=\frac{9}{64}\times 6=\frac{27}{32} \text{ हंडरवेट}$$

२. यदि धुरीकी त्रिज्या a इंच हो तो § 12.62 से

$$a=b.\frac{P}{W}=2\times 36\times\frac{10}{555}=1\frac{11}{37} \text{ इंच}$$

३. यदि आवश्यक बल P हो तो § 12.62 से

$$P=\frac{2\frac{1}{2}}{6}\times 30=12\tfrac{1}{2} \text{ पौंड}$$

तथा यांत्रिक लाभ $=\dfrac{W}{P}=\dfrac{30}{12\frac{1}{2}}=2\tfrac{2}{5}.$

४. यदि बल P हो तो भार $W=(48-P)$ पौंड

§ 12.62 से $P=\frac{1}{3}w=\frac{1}{3}(48-P)$

$\therefore\ P=12$ पौंड तथा $W=36$ पौंड

५. तलकी दिशामें बलका अवयव $=2240\sin 30^\circ=1120$ पौंड

यदि आवश्यक बल P हो तो § 12.62 से

$$P=\frac{a}{b}.W=\frac{9}{48}\times 1120=210 \text{ पौंड}$$

६. मान लिया आदमीका भार W, धुरीकी त्रिज्या a तथा चक्रकी त्रिज्या b है।

पहली अवस्थामें $W.b=980.a$ ....(i)

दूसरी अवस्थामें $W.a=10.b$ .... (il)

अत: (i) तथा (ii) से $W=70\sqrt{2}$ पौंड

और यांत्रिक लाभ $=\frac{W}{P}=\frac{70\sqrt{2}}{10}=7\sqrt{2}.$

७. यदि आवश्यक बल P हो तो § 12.62 से

$$P=\frac{a+x}{b+x}\cdot W=\frac{5+\frac{3}{8}}{24+\frac{3}{8}}\times 130=28\frac{2}{3} \text{ पौंड}$$

८. यदि धुरी पर W भार सध सके तो बलोंका धुरीके सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$48\times\tfrac{5}{2}+50\times 2=W\cdot\tfrac{20}{24},\quad \therefore\ W=264 \text{ पौंड}$$

९. § 12.63 के उदाहरण २ की तरह हल कीजिए।

१०. यदि आवश्यक बल P हो तो चूंकि यंत्रकी निपुणता 60% है,

$$\therefore\ \text{यांत्रिक लाभ}=\frac{W}{P}=\frac{2b}{c-a}\times\frac{60}{100}=\frac{2\times 10}{2-\frac{3}{2}}\times\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad P=\frac{200}{24}=8\frac{1}{3} \text{ पौंड}$$

प्रश्नावली ४४. (पृष्ठ २७५-२७६)

१. यदि क्षैतिज बलका मान P तथा भार W हो तो § 12.7 की द्वितीय दशासे

$$P=W\tan\alpha=W\tan 60^\circ=W\sqrt{3}.$$

२. यदि तलका झुकाव α, प्रतिक्रिया R तथा पिंडका भार W हो तो § 12.7 की प्रथम दशासे

$P=W\sin\alpha$ या $\frac{1}{2}W=W\sin\alpha$ या $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\therefore\ \alpha=30^\circ$;

तथा $R=W\cos\alpha=W\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}W.$

३. यदि पिंडका भार W, प्रतिक्रिया R तथा तलका झुकाव α हो तो § 12.7 की प्रथम दशासे

$$18 = W \sin \alpha = W \times \tfrac{3}{5},$$

$$\left[\because \tan \alpha = \frac{\text{ऊंचाई}}{\text{आधार}} = \tfrac{3}{4}, \quad \therefore \sin \alpha = \tfrac{3}{5} \text{ और } \cos \alpha = \tfrac{4}{5}\right]$$

$$\therefore W = 30 \text{ पौंड तथा } R = W \cos \alpha = 30 \times \tfrac{4}{5} = 24 \text{ पौंड}$$

४. यदि डोरीका तनाव T हो तो § 12.7 की प्रथम स्थितिसे

$$P = W \sin \alpha \text{ या } T = W \sin 30° = \tfrac{1}{2} W$$

पहली दशामें § 12.7 की प्रथम दशासे

$$R = W \cos 30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} W$$

दूसरी दशामें § 12.7 से

$$R' = W \cos \alpha - P \sin \theta \text{ तथा } P \cos \theta = W \sin \alpha$$

$$\therefore R' = W \cos 30° - P \sin 30° \text{ तथा } P \cos 30° = W \sin 30°$$

इन दोनों समीकरणोसे $R' = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} W$

$$\therefore R : R' = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} W : \tfrac{1}{3}\sqrt{3} W, \quad \therefore 2R = 3R'.$$

५. पहली अवस्थामें § 12.7 की प्रथम दशासे

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha} = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

दूसरी अवस्थामें यदि हम मान लें कि क्षैतिजमें P शक्ति तल पर W′ भारको साधता है तथा तलकी प्रतिक्रिया R′ है तो § 12.7 की द्वितीय दशासे

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{R'}{1} = \frac{W'}{\cos \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से $R' = Q$ तथा $W' = R$, अत: प्रमेय।

६. यदि W पिंडका भार, P शक्ति तथा P प्रतिक्रिया हो तो § 12.7 से

$$P + P \sin \theta - W \cos \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$\text{तथा } P \cos \theta = W \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

P का मान समीकरण (ii) से i) में रखने पर

$$(1+\sin\theta)\frac{W\sin\alpha}{\cos\theta}-W\cos\alpha=0$$

$$\therefore\quad \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\cot\alpha \quad \text{या} \quad \frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=\operatorname{cosec}^2\alpha-1$$

$$\text{या}\quad \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

या $\sin\theta=1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha=\sin(90°-2\alpha)$

$$\therefore\quad \theta=(90°-2\alpha).$$

७. मान लिया कि तलकी लम्बाई l तथा दूसरी अवस्थामें तलकी ऊंचाई h है।

यदि पहली अवस्थामें तलका झुकाव α हो तो § 12.7 की प्रथम दशासे

$$P=W\sin\alpha=W.\frac{4}{l}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

तथा यदि दूसरी अवस्थामें तलका झुकाव β हो तो § 12.7 की प्रथम दशासे

$$3P=W\sin\beta=W.\frac{h}{l}\quad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

अत: (i) तथा (ii) से $h=12$ फ़ीट

८. प्रथम अवस्थामें § 12.7 के समीकरण (2) से

$$W\sin\alpha=P\cos 30°\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

द्वितीय अवस्थामें यदि आवश्यक बल P' हो तो

$$W\sin\alpha=P'\cos 60°\quad \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

अत: (i) तथा (ii) से

$$P'\cos 60°=P\cos 30°,\quad \therefore\ P'=P\sqrt{3}$$

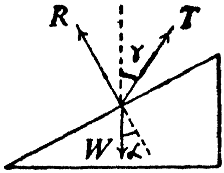
अत: भारको रोकनेके लिए P से अधिक लगाया गया बल

$$=P\sqrt{3}-P=(\sqrt{3}-1)P.$$

९. मान लिया कि भार W है तथा पहली और दूसरी अवस्थामें तनाव क्रमश: T_1 और T_2 हैं।

पहली अवस्थामें लामीके प्रमेयसे

$$\frac{T_1}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{W}{\sin(\alpha+\gamma)} \quad \text{अर्थात्} \quad T_1=\frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$



इसी प्रकार दूसरी अवस्थामें $T_2=\dfrac{W\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$

$$\because \quad T_2=2T_1, \quad \therefore \frac{W\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}=2\frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

या $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}=2\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$

या $\cos\gamma+\cot\alpha\sin\gamma=2(\cos\gamma+\cot\beta\sin\gamma)$

या $\cot\alpha-2\cot\beta=\cot\gamma.$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ २७७-२८१)

१. यदि बल P तथा Q का परिणामी, बल P से समकोण बनाता हो तो

$$\tfrac{1}{9}Q^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha \quad \text{.........(i)}$$

तथा $\tan 90^\circ=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ या $P+Q\cos\alpha=0$

या $\cos\alpha=-P/Q$ ....(ii)

समीकरण (ii) से $\cos\alpha$ का मान (i) में रखने पर

$$\tfrac{1}{9}Q^2=P^2+Q^2+2PQ(-P/Q)$$

या $P^2=\frac{8}{9}Q^2$, $\therefore P:Q=2\sqrt{2}:3.$

२. यदि α बलोंके बीचका कोण हो तो

$$F^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha \quad \text{.............(i)}$$

$$F^2 = P^2 + R^2 + 2PR\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

तथा $$G^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\quad Q^2 - R^2 + 2P(Q-R)\cos\alpha = 0,$

$$\therefore \quad \cos\alpha = -\frac{Q+R}{2P}$$

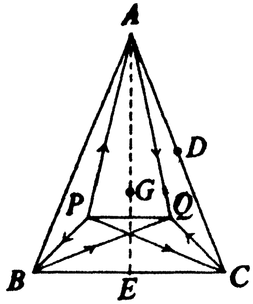
यदि $P+Q+R=0$ तो $Q+R=-P$ अतः $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

अब (ii) तथा (iii) में $\cos\alpha$ का मान रखकर घटानेसे

$$F^2 - G^2 = P^2 - Q^2 + R(P-Q) = (P-Q)(P+Q+R) = 0$$

अतः $\quad F = G.$

३. अनुच्छेद 2.10 से PA तथा PC बलोंका परिणामी 2PD होगा, जहां D, AC का मध्य बिन्दु है। PB तथा 2PD बलोंका परिणामी 3PG होगा, जहां $BG : GD = 2 : 1$ अर्थात् जहां G,



$\triangle ABC$ का गुरुत्व केन्द्र है। इसी प्रकार AQ, BQ तथा CQ बलोंका परिणामी 3GQ होगा। अतः सभी बलोंका परिणामी, बलोंके त्रिभुजसे, एक ऐसा बल होगा जो कि PQ के समानान्तर तथा 3PQ के बराबर होगा।

४. यदि P तथा Q बलोंके क्रिया बिन्दु A तथा B हों तो

$$P.OA = Q.OB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

दूसरी अवस्थामें

$$(P+R)\,OA = (Q+S)\,OB \;\ldots.(ii)$$

तीसरी अवस्थामें

$$Q.OA = R.OB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

समीकरण (iii) तथा (i) से

$$\frac{Q}{P} = \frac{R}{Q} = \frac{Q-R}{P-Q} \quad \ldots\ldots\ldots(iv)$$

समीकरण (ii) तथा (i) से

$$R.OA = S.OB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(v)$$

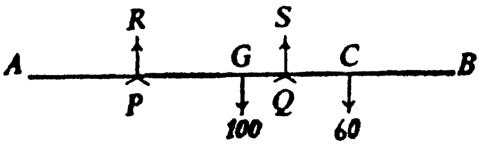
समीकरण (v) तथा (iii) से

$$\frac{R}{Q} = \frac{S}{R} = \frac{R-S}{Q-R} \quad \ldots\ldots\ldots(vi)$$

समीकरण (iv) तथा (vi) से

$$\frac{Q-R}{P-Q} = \frac{R-S}{Q-R}, \quad \therefore \; S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}.$$

५. मान लिया AB तख्ता P तथा Q खूटियों पर टिका है। मान लिया कि जब लड़का Q से x फ़ीट दूर C पर है तो तख्ता Q के सापेक्ष उलटनेकी अवस्थामें है। अतः उस समय P पर प्रतिक्रिया शून्य होगी अर्थात्



$$R = 0 \text{ तथा } S = 100 + 60 = 160 \text{ पौंड}$$

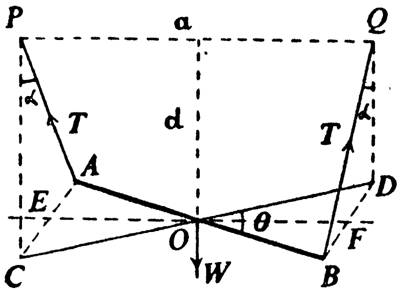
Q के सापेक्ष बलोंका घूर्ण लेनेसे

$$60 \times CQ = 100 \times GQ$$

$$\text{या} \quad 60.x = 100 \times 2, \quad \therefore \; x = 3\tfrac{1}{3} \text{ फ़ीट}$$

६. मान लिया तागे उर्ध्वाधरसे α कोण बनाते हैं तथा उनमें तनाव T है। यदि युग्म लगनेके पहले पिंडकी स्थिति AB हो तो मान लीजिए

बादमें CD है, अतः $\angle BOD = \theta$। सन्तुलनकी अवस्थामें बलोंका उर्ध्वाधर दिशामें विश्लेषण करनेसे



$$W = 2T \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$\because$ BD तथा AC दिशाओंमें T के विश्लिष्ट भाग कार्य करते हैं, जो कि समान्तर तथा विपरीत दिशाओंमें लगे हैं। अतः यह एक युग्म बनाते हैं, जिसका घूर्ण $T \sin \alpha \times EF$ है, जहां EF, BD पर लम्ब है। सन्तुलनके लिए

$$G = T \sin \alpha \times EF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$\triangle BOD$ का क्षेत्रफल

$$= \tfrac{1}{2}BD.OF = \tfrac{1}{2}OF.QD \tan \alpha = \tfrac{1}{2}d.OF \tan \alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}OB.OD \tan \theta = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}b.\tfrac{1}{2}a \sin \theta = \tfrac{1}{8}ab \sin \theta$$

$$\therefore \quad OF = \frac{ab \sin \theta}{4d \tan \alpha} = \tfrac{1}{2}EF$$

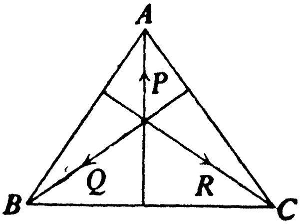
(ii) से $G = T \sin \alpha \times EF = T \sin \alpha \times \dfrac{2ab \sin \theta}{4d \tan \alpha}$

$$= T \cos \alpha \,.\, \frac{ab \sin \theta}{2d}$$

(i) से $T \cos \alpha = \tfrac{1}{2}W$ अतः $G = \tfrac{1}{4}W \,.\, \dfrac{ab}{d} \sin \theta$.

७. P, Q तथा R बलोंको त्रिभुजकी भुजाओंके अनुगत विश्लेषित करनेसे AB, BC तथा CA के अनुगत क्रमशः $(Q \sin A - P \sin B)$, (R sin B − Q sin C) तथा (P sin C − R sin A) बल होंगे।

चूंकि परिणामी त्रिभुजके परिवृत्त केन्द्रसे होकर जाता है, इसलिए यदि R′ वृत्तकी त्रिज्या हो तो केन्द्रके सापेक्ष बलोंका घूर्ण लेनेसे



$$(Q \sin A - P \sin B)\, R' \cos C + (R \sin B - Q \sin C)\, R' \cos A + (P \sin C - R \sin A)\, R' \cos B = 0$$

या $P(\sin C \cos B - \sin B \cos C) + Q(\sin A \cos C - \sin C \cos A) + R(\sin B \cos A - \sin A \cos B) = 0$

या $P(ck \cos B - bk \cos C) + Q(ak \cos C - ck \cos A) + R(bk \cos A - ak \cos B) = 0$

$$\left(\because \ \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k\right)$$

या $P(b \cos C - c \cos B) + Q(c \cos A - a \cos C) + R(a \cos B - b \cos A) = 0.$

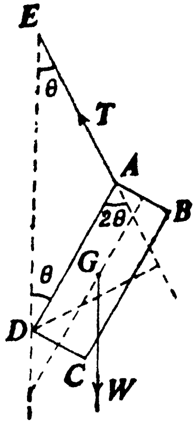
८. यदि आयताकार चौखटेके सामने न खड़े होकर, बगलसे खड़े होकर चौखटेका चित्र बनाएं तो दो डोरियोंके स्थान पर एक डोरी दिखाई देगी तथा चौखटा बिन्दु D पर स्थित होगा। यदि मान लें कि चित्रका झुकाव दीवारके साथ θ है तो डोरीका झुकाव भी θ होगा, क्योंकि डोरी EA = चौखटेकी ऊंचाई AD = a। चूंकि चौखटा सन्तुलनमें है, इसलिए उर्ध्वाधर दिशामें बलोंको विश्लेषित करनेसे

$$W = 2T \cos \theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

यदि DC = b तो D के सापेक्ष बलोंका घूर्ण लेनेसे

$$W.(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b\cot\theta)\sin\theta=2T.(a+a\cos 2\theta)\tan\theta$$
$$=\frac{W}{\cos\theta}a(1+\cos 2\theta)\tan\theta$$

{ i) से}

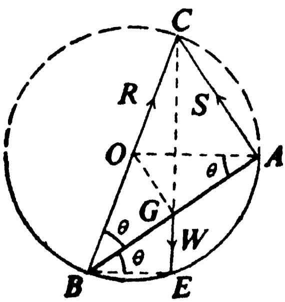


या $\tfrac{1}{2}(a+b\cot\theta)\sin\theta=a.2\cos\theta.\tan\theta$

या $\tfrac{1}{2}(a+b\cot\theta)\tan\theta=2a\tan\theta$

$$\therefore\quad \theta=\tan^{-1}(b/3a).$$

६. यदि हम यह मान लें कि छड़ AB का एक सिरा, सीमान्त अवस्थामें, चिकने क्षैतिज गोलार्ध प्यालेके अन्दर तथा दूसरा प्यालेकी बारी पर है तथा छड़ AB क्षैतिजसे θ कोण बनाती है तो



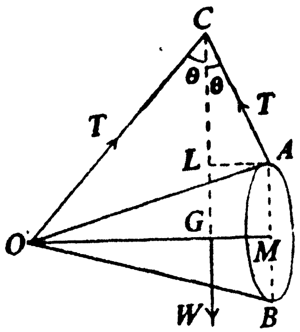
$$BE = BG\cos\theta = BO\cos\theta.\cos\theta = \tfrac{1}{2}BC\cos^2\theta$$
$$= BC\cos 2\theta$$

$\therefore\ \cos^2\theta = 2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)$

या $\cos^2\theta = \frac{2}{3}$ या $\sin^2\theta = \frac{1}{3}$, $\therefore\ \sin\theta = 1/\sqrt{3}$

अतः प्रमेय।

१०. चूंकि डोरी एक चिकनी खूंटीसे होकर जाती है, इसलिए डोरीके दोनों भागोंमें तनाव समान होगा तथा सन्तुलनकी अवस्थामें G से खींचा गया उर्ध्वाधर $\angle ACO$ को समद्विभाजित करेगा।



अब $CG = OG\cot\theta = \frac{3}{4}h\cot\theta$
$$= CL + LG = AL\cot\theta + r = \tfrac{1}{4}h\cot\theta + r$$

$\therefore\ \frac{3}{4}h\cot\theta = \frac{1}{4}h\cot\theta + r$ या $\cot\theta = \dfrac{2r}{h}$

अब डोरीकी लम्बाई
$$= OC + CA = OG\operatorname{cosec}\theta + AL\operatorname{cosec}\theta$$
$$= OG\operatorname{cosec}\theta + GM\operatorname{cosec}\theta = OM\operatorname{cosec}\theta$$
$$= h\operatorname{cosec}\theta = h\sqrt{1+\cot^2\theta} = \sqrt{h^2+4r^2}\ .$$

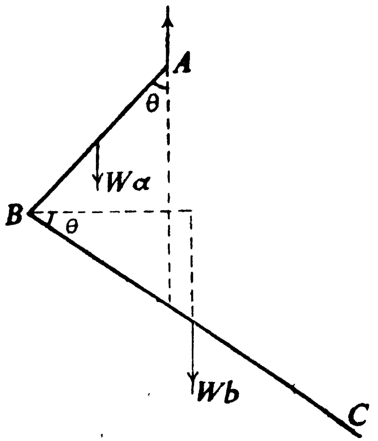
११. मान लिया कि प्रत्येक रुपया अपने नीचे वाले रुपयेसे x दूरीसे बाहर निकला है। x का मान अधिकतम तभी होगा, जब कि ऊपरके पांच रुपयोंके गुरुत्व केन्द्रसे खींचा गया उर्ध्वाधर, नीचे वाले रुपयेके सिरेसे मिलेगा।

अतः $\frac{1}{2}a = \frac{w.x+w.2x+w.3x+w.4x+w.5x}{5w} = 3x$,

$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{6}a$$

अतः सबसे ऊपर तथा सबसे नीचेके रुपयोंके केन्द्रोंके बीचकी क्षैतिज दूरी $= 5x = \frac{5}{6}a$.

१२. चूंकि दंडोंको A पर लटकानेसे व्यवस्था सन्तुलनमें है, इसलिए A के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे



$$Wa.\tfrac{1}{2}a \sin\theta = Wb(\tfrac{1}{2}b\cos\theta - a\sin\theta)$$

या $(a^2+2ab)\sin\theta = b^2\cos\theta$, $\therefore \tan\theta = \frac{b^2}{a^2+2ab}$.

१३. मान लिया कि प्रत्येक ताशकी लम्बाई 2a तथा भार w है। यदि x_1, x_2, x_3, x_4 .... क्रमशः ऊपरसे पहले, दूसरे, तीसरे, चौथे .... ताशोंकी सिरोंसे निकली हुई अधिकतम दूरियां हों तो पहले (सबसे ऊपर वाले) ताशके सन्तुलनके लिए उसके गुरुत्व केन्द्रको दूसरे ताशके किनारे पर होना चाहिए। अतः $x_1 = a$;

दूसरे ताशके सन्तुलनके लिए

$$wx_2 = w(a - x_2), \quad \therefore x_2 = \tfrac{1}{2}a;$$

तीसरे ताशके सन्तुलनके लिए

$$w(\tfrac{1}{2}a+x_3)=w(a-x_3)+w(\tfrac{1}{2}a-x_3),\ \therefore\ x_3=\tfrac{1}{3}a;$$

इसी प्रकार $x_4=\frac{1}{4}a.$

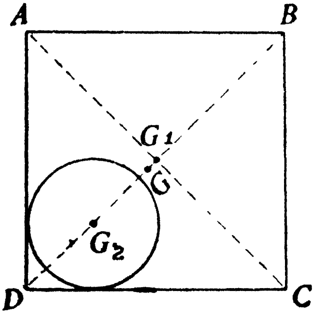
. ...

....

....

जो कि स्पष्टतया व्युत्क्रम समानान्तर श्रेणीमें है।

१४. मान लिया G_1 तथा G_2 वर्ग तथा वृत्तके गुरुत्व केन्द्र है। यदि G सम्पूर्ण संस्थाका गुरुत्व केन्द्र हो तथा यह G_1 से $\bar{x}$ दूरी पर हो तो



$$\bar{x}=\frac{16a^2.0+\pi a^2(2\sqrt{2}a-\sqrt{2}a)}{16a^2+\pi a^2}=\frac{\pi a\sqrt{2}}{16+\pi}.$$

१५. यदि शेष भागका गुरुत्व केन्द्र वृत्तके केन्द्र O से $\bar{x}$ दूरी पर हो तो

$$\bar{x}=\frac{9\pi a^2.0-a^2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}a\sqrt{3}}{9\pi a^2-a^2\sqrt{3}}=\frac{-2a}{9\pi-\sqrt{3}}$$

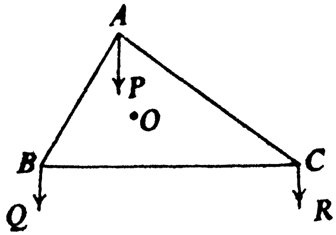
अतः गुरुत्व केन्द्र त्रिभुजके दूसरी ओर केन्द्रसे $2a/(9\pi-\sqrt{3})$ की दूरी पर होगा।

१६. जैसा कि हमें ज्ञात है कि खोखले शंकुका गुरुत्व केन्द्र, आधारसे शंकुकी ऊंचाईकी तिहाई दूरी पर तथा भार शंकुके क्षेत्रफलके अनुपातमें होता है।

अतः यदि आधारसे बन्द शंकुका गुरुत्व केन्द्र $\bar{x}$ दूरी पर हो तो

$$\bar{x}=\frac{\pi a^2.0+\pi a\sqrt{h^2+a^2}.\frac{1}{3}h}{\pi a^2+\pi a\sqrt{h^2+a^2}}=\frac{1}{3}\frac{h\sqrt{h^2+a^2}}{a+\sqrt{h^2+a^2}}.$$

१७. यदि BC तथा B पर खींचे गये लम्बको नियामक अक्ष लें तो A, B, C के नियामक क्रमशः (c cos B, c sin B); (0, 0); (a, 0) तथा परिवृत्त केन्द्रके नियामक ($\frac{1}{2}$a, $\frac{1}{2}$a cot A) होंगे।



अतः $\frac{1}{2}a=\dfrac{P.c\cos B+Q\,0+R.a}{P+Q+R}$

तथा $\frac{1}{2}a\cot A=\dfrac{P.c\sin B+Q.0+R.0}{P+Q+R}$

$\therefore\quad \dfrac{1}{\cot A}=\dfrac{P.c\cos B+R.a}{P.c\sin B}$

अर्थात् $\tan A-\cot B=\dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C\sin B}$

या $\dfrac{-\cos(A+B)}{\cos A}=\dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C}$

या $\dfrac{\cos C}{\cos A}=\dfrac{R}{P}\quad\dfrac{\sin A}{\sin C}$

या $\dfrac{R}{2\sin C\cos C}=\dfrac{P}{2\sin A\cos A}$

$\therefore\quad \dfrac{R}{\sin 2C}=\dfrac{P}{\sin 2A}$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

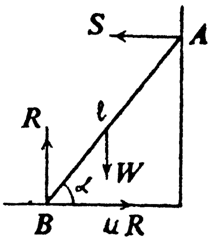
$$\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}$$

अतः $\dfrac{P}{\sin 2A}=\dfrac{Q}{\sin 2B}=\dfrac{R}{\sin 2C}$.

१८. यदि सीढ़ी सीमान्त सन्तुलनमें हो तो

$$R=W \quad \text{तथा} \quad \mu R=S$$

B के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

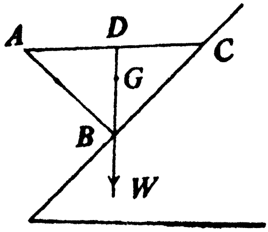


$$W.c \cos \alpha = S.l \sin \alpha = \mu W.l \sin \alpha$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{c \cot \alpha}{l}.$$

१९. अनुच्छेद 12.72 की मददसे हल कीजिए।

२०. यदि हम मान लें कि तल θ कोण तक उठाया गया है तथा फिसलने वाला है तो $\tan \theta = \mu$. तथा यदि तल ϕ कोण पर झुका हो तथा उलटने ही वाला हो तो त्रिभुजके गुरुत्व केन्द्र G को B के उर्ध्वाधर ऊपर होना चाहिए और चूंकि G मध्यिका पर होता है इसलिए BG उर्ध्वाधर AC को D पर समद्विभाजित करेगा।



$$\because \quad BD=DC=DA, \quad \therefore \angle DBA = \angle BAC$$

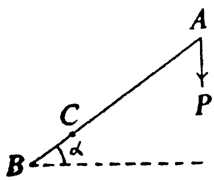
अतः तलका झुकाव $\phi = \angle A$

अतः समपटल ABC फिसलेगा या उलटेगा,

$$\text{यदि} \quad \theta \angle \quad \text{या} \quad > \phi$$

$$\text{या} \quad \mu \angle \quad \text{या} \quad > \tan A.$$

२१. मान लिया कि सन्तुलनकी अवस्थामें B पर प्रतिक्रियाके BA तथा BA के लम्बके अनुगत अवयव X तथा Y हैं। यदि लीवर बिन्दु C के सापेक्ष सन्तुलनमें हो, जहां C, BA में स्थित ऐसा बिन्दु है कि



$$BC = \frac{1}{n} AB,$$

तो C की प्रतिक्रिया BA के लम्ब दिशामें होगी।

$$\text{अतः} \quad X = P \sin \alpha$$

तथा B के सापेक्ष घूर्ण लेनेसे

$$Y.\frac{1}{n} AB = P \cos \alpha \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) AB$$

$$\text{या} \quad Y = (n-1) P \cos \alpha$$

अतः B की प्रतिक्रिया

$$= \sqrt{X^2 + Y^2} = P\sqrt{(n-1)^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}.$$

२२. चूंकि तुलामें कोई अन्य दोष नहीं है, इसलिए ठीक भार ज्ञात करनेके लिए तुलाकी भुजाएं समान होनी चाहिए, परन्तु एक वस्तुको क्रमशः दोनों पलड़ोंसे तोलने पर भार W_1 तथा W_2 आता है। इसलिए तुलाकी भुजाएं अवश्य ही असमान हैं। यदि हम मान लें कि भुजाके मध्य बिन्दुसे आलम्ब पहले पलडेकी ओर x दूरी पर है तो हमें इसे ठीक करनेके

लिए अवश्य x से हटाना पड़ेगा।

§ 12.33 के कारण १ से

$$W_1(a-x)=W(a+x) \quad ....(i)$$

तथा $$W_2(a+x)=W(a-x) \quad ....(ii)$$

अतः (i) तथा (ii) से $x=\dfrac{\sqrt{W_1}-\sqrt{W_2}}{\sqrt{W_1}+\sqrt{W_2}}\cdot a$, अतः प्रमेय।

२३. अनुच्छेद 12.33 के कारण ४ से यदि W वास्तविक भार हो तो

$$W=\frac{W_1.a_2+W_2.a_1}{a_1+a_2}=\frac{95\times 22+105\times 18}{18+22}=\tfrac{199}{2} \text{ सेर}$$

इसलिए आदमी 199 सेर चावल पाएगा। अतः उसे 105+95−199=1 सेरकी हानि होगी।

२४. यदि आदमीका नीचेकी ओर खिचाव P हो तो स्वयं आदमी पर ऊपरकी ओर P के बराबर खिचाव होगा अतः उसका भार, P से कम हो जायगा।

अतः अनुच्छेद 12.55 से

$$nP=W-P, \quad \therefore \ P=\frac{W}{n+1}$$

दूसरी अवस्थामे आदमीका भार P से बढ जायगा, अतः

$$nP=W+P, \quad \therefore \ P=\frac{W}{n-1}.$$

२५. अनुच्छेद 12.56 के चित्रमें मान लिया P की क्रिया दंडसे O पर मिलती है।

अब अभीष्ट बिन्दु, समानान्तर बलों T_1, T_2, T_3 ....T_n का गुरुत्व केन्द्र है। यदि G अभीष्ट बिन्दु हो तो

$$OG=\frac{T_1.2a+T_2.3a+T_3.4a+\ \ldots}{T_1+T_2+T_3+\ldots\ldots}$$

परन्तु $T_1=P,\ T_2=2P,\ T_3=2^2P$ ....

अतः $\quad OG=\dfrac{1\times 2+2\times 3+4\times 4+\ldots\ldots\ldots\ldots n \text{ तक}}{1+2+4+\ \ldots\ldots\ldots\ldots n \text{ तक}}$

यदि $\quad S=2.1+3.2+4.2^2+\ldots\ldots\ldots+(n+1)2^{n-1}$

$\therefore \quad 2S= \qquad 2.2+3.2^2+\ldots\ldots\ldots+n.2^{n-1}+(n+1)2^n$

अतः $\quad -S=2.1+1.2+1.\ ^2+\ .\ \ldots\ldots+1.2^{n-1}-(n+1)2^n$

या $\quad S=(n+1)2^n-2-(2+2^2+2^3+\ldots\ldots\ldots(n-1)\text{तक})$

$\quad =(n+1)2^n-2-2(2^{n-1}-1)=n.2^n$

$\therefore \quad OG=\dfrac{n.2^n}{2^n-1}\ a=\dfrac{2^n}{2^n-1}\ .na.$