M. A.

Dynamics of a Particle and Rigid Bodies.

by

S. L. LONEY.

علم حرکت (ذرہ اجسام استوار)

ترجمہ

مولوی شیخ برکت علی ، ایم - اے -

بارہ | چار
دس | آٹھ

سلسلۂ نصابیات علوم جامعۂ عثمانیہ

ذرہ اور استوار اجسام کا علم حرکت

مصنفۂ

ایس۔ ایل۔ لونی۔ ایم۔ اے

ترجمۂ

مولوی شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے
ریڈر شعبۂ ریاضی کلیہ جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۵۷ھ م سنہ ۱۳۴۷ف م سنہ ۱۹۳۸ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

کیمبرج یونیورسٹی پریس کے ایجنٹس میسرز میکملن اینڈ کمپنی کی
اجازت سے اس کتاب کا ۱۹۲۳ء کا اڈیشن اُردو میں
ترجمہ کرکے طبع و شایع کیا گیا۔

دیباچہ

اِس کتاب میں مَیں نے ذرّہ اور اُستوار اجسام کے علمِ حرکت کے اُن حصوں کے متعلق ایک ابتدائی درسی کتاب لکھنے کی کوشش کی ہے جن کو سائنس یا انجینیرنگ ڈگری کے لیے اطلاقی ریاضی کے طلبہ پڑھنے کی ضرورت محسوس کرتے ہیں۔ اُن امور پر بحث وتمحیص کے لحاظ سے جو اس کتاب کی حدود کے اندر ہیں میرا خیال ہے کہ یہ کتاب کافی حد تک مکمل ہے۔

مَیں نے فرض کر لیا ہے کہ طالبِ علم نے اس سے قبل میری ابتدائی علمِ حرکت کی قسم کا کوئی کورس پڑھ لیا ہے۔ نیز یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ تفرقی احصا اور تکملی احصا کے متعلق معتدبہ معلومات رکھتا ہے۔ وہ تفرقی مساواتیں جن سے طالب علم کو سابقہ پڑتا ہے متنِ کتاب میں حل کر دی گئی ہیں، نیز ضمیمہ میں اس قسم کی مساواتوں کے حل کے طریقوں کے متعلق بھی خلاصہ درج کر دیا گیا ہے۔

اُستوار علمِ حرکت میں مَیں نے اپنی بحث کو دو ابعادی حرکت تک محدود رکھا ہے۔ اور مَیں نے متحرک محوروں کے متعلق تمام حوالوں کو ترک کر دیا ہے۔

اِس کتاب میں مَیں نے بہت سی مثالیں بھی شامل کر دی ہیں جو

بیشتر جامعات اور کالج کے امتحانی پرچوں سے منتخب کی گئی ہیں۔ مَیں نے ہر ایک سوال کی تصدیق کر لی ہے اور امید ہے کہ کتاب ہٰذا اہم خطاؤں کی زیادہ تعداد سے معرّا پائی جائیگی۔

اصلاح کے متعلق کوئی تصحیح یا تجویز باعثِ شکریہ متصور ہوگی۔

رائل ہالووے کالج
انگل فیلڈ گرین سرے
۲۳ر اکتوبر ۱۹۰۹ء

ایس۔ ایل۔ لونی

فہرستِ مضامین

ذرّہ کا علمِ حرکت

اُستوار جسم کا علمِ حرکت

صفحات	مضمون
	مضمون
۳۰۸	جمودی ناقص نما
۳۱۳	مساوی المعیار نظام
۳۱۷	صدر محور
۳۲۴	**بارھواں باب** - ڈی المبرٹ کا اصول
۳۲۶	حرکت کی عام مساواتیں
۳۳۰	انتصابی اور گردشی حرکات کی بے تعلّق
۳۳۴	دھکے کی قوتیں
۳۳۷	**تیرھواں باب** - ایک ثابت محور کے گرد حرکت
۳۴۷	مرکب رقاص
۳۶۳	مرکز زد
۳۷۴	**چودھواں باب** - دو ابعاد میں حرکت - محدود قوتیں
۳۷۷	دو ابعاد میں توانائی بالحرکت
۳۷۹	دو ابعاد میں زاویئی معیارِ حرکت
۴۱۲	متغیر کمّیت
۴۲۴	**پندرھواں باب** - دو ابعاد میں حرکت - دھکے کی قوتیں
۴۳۳	کسی گھومنے والے کُرہ کا تصادم زمین پر
۴۴۷	**سولھواں باب** - فوری مرکز
۴۵۷	زاویئی رفتاروں کی ترکیب
۴۶۷	محدود گھماؤ
۴۷۱	تین ابعاد میں معیارِ حرکت کا معیارِ اثر اور توانائی بالحرکت
۴۷۷	جسم کی حرکت کی عام مساواتیں تین ابعاد میں
۴۷۹	بلیئرڈ کی گیند کی حرکت
۴۸۵	**سترھواں باب** - خطی اور زاویئی معیارِ حرکت کا تحفظ
۴۹۷	توانائی کا تحفظ

بسم اللہ الرحمٰن الرحیمؕ

پہلا باب

اساسی تعریفیں اور اصول

۱ - کسی نقطہ کی رفتار سے اُس کے ہٹاؤ کی شرح مراد ہوتی ہے - اگر کسی نقطہ کا مقام وقت ت پر نقطہ ن ہو اور ت + مف ت کے بعد اس کا مقام ق ہو تو مقدار $\frac{\text{ن ق}}{\text{مف ت}}$ کی انتہائی قیمت کو جب کہ مف ت کو بہت چھوٹا لیا جائے نقطہ کی رفتار کہتے ہیں مقام ن پر یا وقت ت پر۔

چونکہ ہٹاؤ کے مفہوم میں مقدار اور سمت دونوں مضمر ہیں اس لیے رفتار کے تخیل میں بھی یہ دونوں مفہوم شامل ہیں۔ پس ہم رفتار کو مقداراً اور سمتاً ایک خطِ مستقیم سے تعبیر کرسکتے ہیں۔ اس لیے اسے سمتی (vector) مقدار کہتے ہیں۔

۲ - ایک ذرّہ وقتِ واحد میں دو مختلف سمتوں میں دو رفتاریں رکھ سکتا ہے۔ ہم ان دونوں رفتاروں کو ذیل کے مسئلہ کی مدد سے جس کو " رفتاروں کا متوازی الاضلاع " کہتے ہیں ترکیب دے کر ایک واحد رفتار میں تحویل کرسکتے ہیں۔

اگر ایک ذرّہ ایک ساتھ دو رفتاریں رکھتا ہو جو ایک متوازی الاضلاع کے ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے والے دو اضلاع

سے مقداراً اور سمتاً تعبیر ہو سکیں تو یہ رفتاریں ایک ایسی رفتار کے معادل ہونگی جو اسی نقطہ میں سے گزرنے والے متوازی الاضلاع کے قطر سے مقداراً اور سمتاً تعبیر ہو۔

مثلاً دو ترکیبی رفتاریں اب اور اج ایک حاصل رفتار اد کے معادل ہیں جہاں اد قطر ہے اُس متوازی الاضلاع کا جس کے متصل اضلاع اب اور اج ہیں۔

اگر ب اج زاویہ قائمہ ہو اور ب اد = ط، تو اب = اد جم ط اج = اد جیب ط، اور رفتار ع، اد کی سمت میں معادل ہے دو ترکیبی رفتاروں ع جم ط اور ع جیب ط کے بالترتیب اب اور اج کی سمتوں میں۔

رفتاروں کا مثلث ——— اگر ایک ذرّہ دو رفتاریں رکھے جو مقدار، سمت، رُخ تینوں کے لحاظ سے خطوط اب اور ب ج سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل بلحاظ مقدار اور سمت اور رُخ کے اج سے تعبیر ہوگا۔ کیونکہ متوازی الاضلاع اب ج د کی تکمیل کرنے سے رفتاریں اب اور ب ج معادل ہیں رفتاروں اب اور اد کے جن کا حاصل اج ہے۔

رفتاروں کا متوازی السطوح ——— اگر ایک ذرّہ تین رفتاریں رکھے جو کُل طور پر وا، وب، وج سے تعبیر ہوں تو رفتاروں کے متوازی الاضلاع کے مسئلہ کو دوبارہ استعمال کرنے سے آسانی سے ظاہر ہوتا ہے کہ اُن کا حاصل اس متوازی السطوح کے قطر و د سے تعبیر ہوگا جس کے متراکز کنارے وا، وب اور وج ہیں۔ نیز حسبِ سابق و د کی ترکیبی رفتاریں وا، وب، وج ہیں۔

اگر وا، وب، وج باہم علی القوائم ہوں اور ی، و، ہ ایک متحرک نقطہ کی رفتاریں ہوں ایک ہی آن میں اِن خطوط کی سمتوں میں تو

حاصل رفتار $\sqrt{\text{ء}^2 + \text{و}^2 + \text{ھ}^2}$ ہوگی اور اِس کے خطِ عمل کی سمت کی سمتی جیوب التمام ء، و، ھ کے تناسب ہونگی یعنی یہ ہونگی

$$\frac{\text{ء}}{\sqrt{\text{ء}^2 + \text{و}^2 + \text{ھ}^2}} ، \quad \frac{\text{و}}{\sqrt{\text{ء}^2 + \text{و}^2 + \text{ھ}^2}} ، \quad \frac{\text{ھ}}{\sqrt{\text{ء}^2 + \text{و}^2 + \text{ھ}^2}}$$

اسی طرح سے اگر و د ایک خط ہو جس کی سمتی جیوب التمام تین باہم علی القوائم خطوط و ا، و ب، و ج کے لحاظ سے ل، م، ن ہوں تو و د کی سمت میں رفتار ر معادل ہوگی ان رفتاروں کے :—

و ا کی سمت میں ل ر

و ب " م ر

و ج " ن ر

۳ - رفتار کی تبدیلی - اسراع

—— اگر کسی آن میں ایک متحرک ذرہ کی رفتار ء ہو جسے مقداراً اور سمتاً خط و ا سے تعبیر کیا جائے اور کسی اَور وقت پر اُس کی رفتار و ہو جسے بلحاظ سمت اور مقدار کے خط و ب سے تعبیر کیا جائے، تو ظاہر ہے کہ وقفہ مذکور میں ذرہ کی رفتار میں جو تبدیلی ہوئی ہے وہ مقداراً اور سمتاً ا ب سے تعبیر ہوگی جہاں و ب قطر ہے اُس متوازی الاضلاع کا جس کے اضلاع و ا اور ا ب ہیں گویا ا ب سے جو رفتار تعبیر ہوتی ہے اِس کو ترکیب دینا چاہیے و ا کے ساتھ کہ رفتار و ب حاصل ہو۔

اسراع سے مراد ہے رفتار کا تغیر بلحاظ وقت کے یعنی اگر و ا رفتار ہو وقت ت پر اور و ب رفتار ہو وقت ت + مف ت پر، تو رفتار کی تبدیلی ا ب واقع ہوئی، وقت مف ت کے دوران میں۔ پس اسراع ہے $\frac{\text{ا ب}}{\text{مف ت}}$ جب کہ مف ت کو بہت چھوٹا لیا جائے۔ اسراع میں بھی ا ب کی سمت کو ملحوظ رکھنا لازمی ہوگا اور دو اسراع مساوی نہیں ہونگے اگر رفتار کے اضافہ کی سمتیں یکساں نہ ہوں خواہ اُن کی مقداریں اور وقت کے

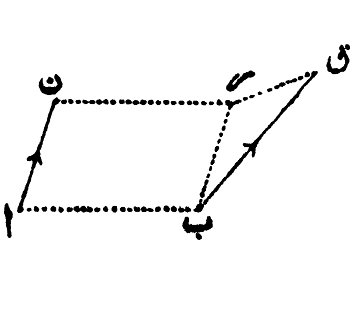
زیرِ بحث وقفے مساوی ہی کیوں نہ ہوں۔ حسبِ سابق ممکن ہے کہ ذرّہ آنِ واحد میں مختلف سمتوں میں دو یا زیادہ اسراع رکھتا ہو۔ اِن اسراعوں کو متوازی الاضلاع کے اصول کے مطابق ایک واحد اسراع میں تحویل کیا جاسکتا ہے جو مندرجہ بالا اسراعوں کے معادل ہو۔

نیز رفتاروں کی مانند ایک اسراع کو بھی مختلف سمتوں میں ترکیبی اسراعوں میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

دفعہ ۲ کے نتائج اسراعوں پر بھی صادق آتے ہیں۔

۴۔ اضافی رفتار ـــــ جب دو متحرک نقطوں کا درمیانی فاصلہ بدل رہا ہو بلحاظ سمت کے یا مقدار کے یا بلحاظ دونوں کے تو ہر ایک نقطہ بلحاظ دوسرے کے کچھ رفتار رکھتا ہے جسے اضافی رفتار کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ دو متحرک نقطے ا اور ب ہیں جن کی کچھ رفتاریں ہیں اور یہ رفتاریں خطوط ا ن اور ب ق سے تعبیر ہوتی ہیں یہ ضروری نہیں کہ خطوط ا ن اور ب ق ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوں۔ پس اکائی وقت میں اِن نقطوں کے محل ا اور ب سے بدل کر ن اور ق ہو جائینگے۔ ب س ا ن کے مساوی اور متوازی کھینچو۔ تب رفتاروں کے مثلث کی رُو سے رفتار ب ق رفتاروں ب س اور س ق کے معادل ہے یعنی ب کی رفتار معادل ہے ا کی رفتار اور معہ، رفتار س ق کے۔



پس ب کی رفتار بلحاظ ا کے س ق سے تعبیر ہوتی ہے۔

اب رفتار س ق، رفتاروں کے مثلث کی رُو سے رفتاروں س ب اور ب ق کے معادل ہے یعنی رفتاروں ب ق اور ن ا کے معادل ہے۔ اس لیے

ب کی اضافی رفتار بلحاظ ا کے اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ ب کی اصلی رفتار میں، ا کی رفتار کے مساوی اور مخالف رفتار کو ترکیب دے دیتے ہیں۔

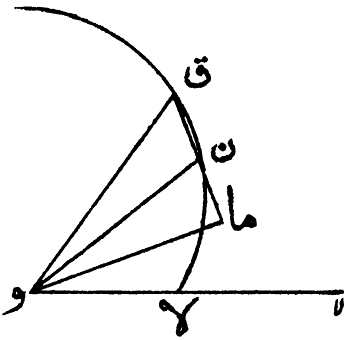
برعکس اس کے چونکہ رفتار ب ق، رفتاروں ب س اور س ق کے معادل ہے یعنی معادل ہے ا کی اصلی رفتار کے اور معہ، ب کی اضافی رفتار بلحاظ ا کے، اس لیے ب کی اصلی رفتار، ا کی اصلی رفتار کو ب کی اضافی رفتار بلحاظ ا کے ساتھ ترکیب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

یہی نتائج اسراعوں کے لیے بھی درست ہیں کیونکہ اسراع بھی سمتی مقداریں ہیں اور اس لیے متوازی الاضلاع کے کلیہ کے ماتحت ہیں۔

۵۔ ایک نقطہ کی زاویئی رفتار جس کی حرکت ایک سطح مستوی میں وقوع پذیر ہو۔

اگر ایک نقطہ ن ایک سطح مستوی میں حرکت کرے اور و کوئی ثابت نقطہ اور و لا کوئی ثابت خط اس سطح مستوی میں ہو، تو زاویہ لا و ن کے اضافہ (بلحاظ وقت) کی شرح کو و کے گرد ن کی زاویئی رفتار سے موسوم کرتے ہیں۔

اس لیے اگر وقت ت پر زاویہ لا و ن = ط ہو، تو زاویئی رفتار و کے گرد $\frac{\text{د ط}}{\text{د ت}}$ ہوگی۔



اگر وقت ت + مف ت پر
ن کا مقام ق ہو جائے جہاں مف ت
بہت چھوٹا ہو اور وقت ت پر نقطہ
کی رفتار ء ہو

$$\text{تو ء} = \text{نہا} \frac{\text{ن ق}}{\text{مف ت}}$$

∠ ن و ق = مف طہ اور و ن = ر، اور و ق = ر + مف ر

تو ر (ر + مف ر) جب مف طہ = ۲ ∆ ن و ق = ن ق × و ما

جہاں و ما عمود ہے ن ق پر

اس لیے مف ت پر تقسیم کرنے اور انتہا میں مف ت کو بہت چھوٹا کرنے سے

$$\text{ر}^{2} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{ء} \times \text{ع}$$

جہاں ع عمود و ما کا طول ہے

اس لے اگر سہ زاویئی رفتار ہو تو $\text{ر}^{2}\,\text{سہ} = \text{ء} \times \text{ع}$

زاویئی اسراع سے مراد فی اکائی وقت زاویئی رفتار کے بڑھنے کی شرح ہے

$$\therefore \text{زاویئی اسراع} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\text{سہ}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{ء ع}}{\text{ر}^{2}}\right)$$

رقبئی رفتار ——— اسی طرح سے رقبہ ل و ن کے اضافہ (فی اکائی وقت) کی شرح کو رقبئی رفتار کہتے ہیں جہاں ل وہ نقطہ ہے جہاں متحرک نقطہ کا طریق محور و لا کو قطع کرتا ہے۔

$$\text{پس رقبئی رفتار} = \text{نہا} \frac{\triangle\ \text{ن و ق}}{\text{مف ت}} = \frac{1}{2}\,\text{ر}^{2}\,\text{سہ}$$

۶ - کمیت اور قوت ـــــ مادّہ کی تعریف یوں کرتے ہیں "مادّہ وہ ہے جس کا احساس حواس خمسہ کے ذریعہ ہو سکتا ہے" یا یوں کرتے ہیں "مادّہ وہ ہے جس پر قوت عمل کر سکے یا جو خود قوت لگا سکے"۔ یہ وقت اور فضا کی مانند ابتدائی تخیل ہے اور اس لیے اس کو ٹھیک طور پر تعریف کے الفاظ کے ماتحت لانا ممکن نہیں۔ جسم مادّہ کا ایک جزو ہے جو سطوح سے محیط ہو۔

ذرہ سے مراد مادّہ کا ایک ایسا جزو ہے جس کے ابعاد نہایت چھوٹے ہوں۔ طبیعیات میں اس کی حیثیت ویسی ہی ہے جیسی کہ علم ہندسہ میں نقطہ کی۔ ایک جسم جو گھومنے کے ناقابل ہو یا جو گھماؤ کے بغیر حرکت کرے، علم حرکت کے اغراض کے طور پر ایک ذرّہ تصور ہو سکتا ہے۔

کسی جسم کی کمیّت سے وہ مقدارِ مادّہ مراد ہوتی ہے جو جسم کے اندر ہو۔

قوت وہ ہے جو جسم کی حالت میں خواہ یہ حالت سکون کی ہو یا یکساں حرکت کی ہو تبدیلی پیدا کر دے۔

۷ - اگر ہم ایک ہی جسم پر یکے بعد دیگرے قوتیں لگائیں اور یہ قوتیں ایک ہی وقت میں ایک ہی رفتار پیدا کریں تو ایسی قوتوں کو مساوی قوتیں کہتے ہیں۔

اگر ایک ہی قوت دو مختلف جسموں پر لگائی جائے اور اگر اس سے دونوں جسموں میں ایک ہی وقت میں مساوی رفتاریں پیدا ہوں تو ان جسموں کی کمیتیں مساوی کہلاتی ہیں۔

یہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ مختلف حالات میں ایک ہی اشتداد کی قوتیں پیدا کرنا ممکن ہے مثلاً ایک چکردار کمانی کو ایک ہی فاصلہ میں سے کھینچنے کے لیے ہمیشہ ایک ہی قوت کی ضرورت ہوتی ہے جب کہ دوسرے حالات وہی رہیں۔

اس لیے ایک ہی قوت کے متواتر استعمال سے ہمیں بہت سی کمیتیں ایسی مل سکتی ہیں جن میں سے ہر ایک، کمیّت کی ایک معیاری اکائی کے مساوی ہو۔

۸ - عملی طور پر مختلف ممالک میں اور مختلف حالات کے ماتحت کمیّت کی مختلف اکائیاں استعمال کی جاتی ہیں۔

کمیّت کی انگریزی اکائی شاہی پونڈ ہے جو اکسچکر آفس میں پلاٹینم کے ایک ڈھیلے کی شکل میں محفوظ ہے۔

فرانسیسی یا سائنس کی اکائی کمیت کو گرام کہتے ہیں اور یہ پلاٹینم کی ایک خاص مقدار کا جس کو کلوگرام کہتے ہیں اور جو سرکاری محافظ خانہ (Archives) میں محفوظ ہے ایک ہزارواں حصہ ہوتا ہے۔

ایک گرام = ۱۵٫۴۳۲ گرین تقریباً

= ۰٫۰۰۲۲۰۴۶ پونڈ

ایک پونڈ = ۴۵۳٫۵۹ گرام

۹ - طول کے پیمانے جو عام طور پر استعمال ہوتے ہیں وہ فٹ یا سنٹی میٹر ہیں۔

ایک سنٹی میٹر، ایک میٹر کا سوواں حصہ ہوتا ہے اور ایک میٹر

= ۳۹٫۳۷ انچ

= ۳٫۲۸۰۹ فٹ تقریباً

وقت کی اکائی ایک سکنڈ ہے۔ ۸۶۴۰۰ سکنڈ ایک اوسط شمسی دن کے مساوی ہوتے ہیں اور یہ عرصہ وہ ہے جو زمین کو اپنے محور کے گرد سورج کے لحاظ سے ایک پورا چکر لگانے میں صرف ہوتا ہے۔

اکائیوں کا وہ نظام جن میں طول، کمیّت اور وقت کی اکائیاں سنٹی میٹر گرام اور سکنڈ ہوں اکائیوں کا س، گ، ث (C. G. S.) نظام کہلاتا ہے۔

۱۰ - کسی جسم کی کثافت سے، جب کہ یہ یکساں ہو جسم کے اکائی حجم کی کمیت مراد ہوتی ہے پس اگر ایک جسم کے حجم ح کی کمیّت م گرام ہو تو اس کی

کثافت ک = $\frac{م}{ح}$ اگر کثافت متغیر ہو تو اس کی قیمت جسم کے کسی نقطہ پر وہ نسبت ہوتی ہے جو نقطہ مذکور کے گرد جسم کے ایک نہایت چھوٹے سے حصہ کی کمیّت کو حصّہ مذکور کے حجم کے ساتھ ہو - لہٰذا

ک = نہا $\frac{م}{ح}$ جب کہ ح نہایت چھوٹا اور بنائے علیہ م بھی نہایت چھوٹا ہو۔

کسی مقام پر ایک جسم کے وزن سے وہ قوت مراد ہوتی ہے جس سے جاذبۂ ارض جسم کو اپنی طرف کھینچتی ہے ۔جسم کو ایسا محدود الجسامت فرض کیا گیا ہے کہ اس کے ذرّات کے وزن خطوطِ متوازی میں عمل کرتے ہوئے متصوّر ہو سکتے ہیں ۔

اگر ایک ذرّہ کی کمیّت م اور رفتار ر ہو تو اس کے معیارِ حرکت سے مراد م × ر ہوتی ہے اور $\frac{1}{2}$ م ر^2 کو جسم کی توانائی بالفعل کہتے ہیں ۔اول الذکر شئے سمتی مقدار ہوتی ہے ۔جو جسم کی رفتار پر منحصر ہوتی ہے ۔ مؤخر الذکر مقدار سمت پر منحصر نہیں ہوتی ۔ اس قسم کی مقدار دں کو جو سمت پر منحصر نہ ہوں سکیلر (میزانی) مقداریں کہتے ہیں۔

۱۱ - نیوٹن کے کلیّاتِ حرکت۔

کلیہ ۱ - ہر ایک جسم اپنی حالتِ سکون کو یا یکساں رفتار کے ساتھ خطِ مستقیم میں اپنی حرکت کو جاری رکھتا ہے تاوقتیکہ بیرونی قوت کے عمل سے اس کی حالت میں تغیر پیدا نہ کیا جائے۔

کلیہ ۲ - معیارِ حرکت کی تبدیلی کی شرح بیرونی قوت کے متناسب ہوتی ہے اور اس کی سمت وہ ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے ۔

کلیہ ۳ - ہر عمل کے جواب میں مساوی اور مخالف ردِّ عمل ہوتا ہے ۔

یہ کلیے پہلے پہل نیوٹن نے اپنی کتاب پرنسی پیا (Principia) میں جو ۱۶۸۶ء میں طبع ہوئی تھی باضابطہ طور پر پیش کیے تھے ۔

۱۲ ۔ اگر ایک قوت ق کمیت م کے ایک ذرہ میں اسراع ف پیدا کرے تو کلیہ ۲ یہ بیان کرتا ہے کہ

$$ق = لہ \frac{ف}{فرت}(م و) \quad \text{جہاں } لہ \text{ کوئی مستقل ہے}$$

$$= لہ\, م\, ف$$

اگر قوت کی اکائی ایسی منتخب کی جائے کہ یہ اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرے تو یہ کلیہ ہو جاتا ہے :

$$ق = \frac{ف}{فرت}(م و) = م ف$$

قوت کی اس اکائی کو فٹ پونڈ سکنڈ نظام میں پونڈل (Poundal) کہتے ہیں اور س گ ث (C. G. S.) نظام میں یہ قوت ایک ڈائن (Dyne) کہلاتی ہے ۔

۱۳ ۔ ایک آزادانہ گرنے والے جسم کا جو اسراع زمین پر ہوتا ہے اُس کو ج سے تعبیر کرتے ہیں ۔ اِس کی قیمتیں زمین کے مختلف مقامات پر قدرے مختلف ہوتی ہیں ۔ فٹ سکنڈ نظام میں ج کی قیمت ۳۲٫۰۹ سے ۳۲٫۲۵ تک بدلتی ہے اور س گ ث نظام میں ۹۷۸٫۱ سے ۹۸۳٫۱۱ تک بدلتی ہے ۔ لندن کے عرض بلد پر یہ قیمتیں تقریباً ۳۲٫۲ اور ۹۸۱ ہیں ، عددی حسابات میں یہی قیمتیں عموماً اختیار کی جاتی ہیں ۔

اگر ایک پونڈ کی کمیت کا وزن و ہو تو دفعہ ماقبل سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$و = ۱ \times ج \text{ پونڈل}$$

پس ایک پونڈ کا وزن تقریباً ۳۲٫۲ پونڈلوں کے مساوی ہوتا ہے۔ اسی طرح ایک گرام کا وزن تقریباً ۹۸۱ ڈائن کے مساوی ہوتا ہے ۔ پونڈل اور ڈائن مطلق اکائیاں ہیں کیونکہ اِن کی قیمتیں ہر جگہ وہی ہیں ۔

۱۴ ۔ چونکہ دوسرے کلیہ کی رُو سے، قوت سے حرکت میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے وہ اُس سمت میں واقع ہوتی ہے جس میں کہ قوت عمل کر رہی ہو

اس لیے جب ایک ذرہ پر وقتِ واحد میں بہت سی قوتیں عمل کرتی ہیں ہم جداگانہ قوتوں کے اثر معلوم کر لیتے ہیں اور پھر اِن اثروں کا حاصل لے لیتے ہیں - اس اصول کو قوتوں کی عدم متابعت کا اصول کہتے ہیں -

اس اصول سے اور اسراعوں کے متوازی الاضلاع کی مدد سے ہم قوتوں کے متوازی الاضلاع کا مسئلہ حاصل کر سکتے ہیں۔

۱۵ - قوت کا دھکا ——— فرض کرو کہ وقت ت پر ایک قوت کی مقدار جس کی سمت نہیں بدلتی ق ہے۔ تب وقت تہ میں اس قوت کے دھکے سے تکملہ $\int_{\cdot}^{ت_ہ}$ ق فرت کی قیمت مراد ہوتی ہے۔

دفعہ ۱۲ سے ظاہر ہے کہ دھکا

$$= \int_{\cdot}^{ت_ہ} م \frac{فرو}{فرت} فرت = [م و]_{\cdot}^{ت_ہ}$$

= معیارِ حرکت جو وقت تہ میں قوت اپنی سمت میں پیدا کرتی ہے۔

بعض اوقات مثلاً صدمہ اور تصادم میں ہمیں ایسی قوتوں سے واسطہ پڑتا ہے جو مقداریں بہت بڑی ہوتی ہیں لیکن نہایت چھوٹے عرصہ کے لیے عمل کرتی ہیں اور ہم اِن قوتوں کی مقدار کو نہیں ناپ سکتے۔ ہم اِن قوتوں کے اثر کو معیارِ حرکت سے جو یہ قوتیں پیدا کرتی ہیں یعنی دورانِ عمل میں اس کے دھکے سے ناپتے ہیں -

۱۶ - کام ——— کسی قوت کے کام سے جو یہ انجام دے قوت مذکور اور قوت کی سمت میں اس کے نقطۂ عمل کے طے کردہ فاصلہ کا حاصل ضرب مراد ہوتا ہے یا یوں کہو کہ نقطۂ عمل کے طے کردہ فاصلہ اور قوت کے جزوِ ترکیبی (حرکت کی سمت میں) کے حاصل ضرب کو کام کہتے ہیں - پس کام = $\int$ ق فرس جہاں فرس قوت کے نقطۂ عمل کی حرکت کے راستہ کا ایک جزو ہے اور اس کے طے کرنے کے دَوران میں قوت کی مقدار فرس سمت میں ق ہے۔

اگر قوت کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما، نما ہوں

جب کہ اس کا نقطۂ عمل (لا، ما، ی) ہو یعنی لا = ق فرلا/فرس، ما = ق فرما/فرس

اور ے = ق فری/فرس تو

∫(لا فرلا + ما فرما + ے فری) = ∫(ق (فرلا/فرس) فرلا + ... + ...)

= ∫ ق {(فرلا/فرس)² + (فرما/فرس)² + (فری/فرس)²} فرس

= ∫ ق فرس

= کام جو قوت ق نے کیا ہے۔

کام کی نظری اکائیاں فٹ پونڈل اور ارگ (Erg) ہیں۔ اول الذکر سے کام کی وہ مقدار مراد ہوتی ہے جو ایک پونڈل اپنے خطِ عمل کی سمت میں ایک فٹ فاصلہ طے کرنے سے سرانجام دیتی ہے۔ مؤخر الذکر یعنی ارگ سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو ایک ڈائن قوت اپنی سمت میں ایک سنٹی میٹر فاصلہ طے کرنے سے سرانجام دیتی ہے۔

ایک فٹ پونڈل = ۴۲۱۳۹۰ ارگ تقریباً۔ ایک فٹ پونڈ کام سے اس قدر کام مراد ہوتا ہے جو ایک پونڈ کو جاذبہ عرض کے خلاف ایک فٹ انتصاباً اوپر اٹھانے میں انجام پاتا ہے۔

۱۷۔ طاقت ـــــ کسی ایجنٹ کے کام کی شرح یا طاقت سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو یہ اکائی وقت میں سرانجام دیتا ہے۔

انجنیروں کے ہاں طاقت کی جو اکائی مستعمل ہے اُسے اسپی طاقت (Horse Power) کہتے ہیں۔ جب کوئی ایجنٹ اس شرح سے کام کر رہا ہو کہ یہ ۳۳۰۰۰ پونڈ وزن ایک منٹ میں ایک فٹ فاصلہ میں سے اوپر اٹھا سکے تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ ایجنٹ مذکور ایک اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے۔

۱۸۔ جب ایک جسم پر قوتیں عمل کر رہی ہوں تو کسی مقام پر اس کی توانائی بالقوہ سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو قوتوں کا نظام جسم مذکورہ پر اس کے موجودہ مقام سے کسی معیاری مقام پر پہنچنے میں سرانجام دے سکتا ہے۔ معیاری محل کو صفر قوہ کا محل کہتے ہیں۔

مثلاً چونکہ زمین کی کشش (جب کہ اس کو نصف قطر و کا ایک کرہ فرض کیا جائے اور اس کی کثافت یکساں اور ک کے مساوی مانی جائے) اس کے مرکز سے فاصلہ لا پر ج $\frac{4\pi \text{و}^3}{3}$ ک $\times \frac{1}{\text{لا}^2}$ ہوتی ہے۔ اس لیے فاصلہ ما پر (ما > و) اکائی کمیت کے ذرہ کی توانائی بالقوہ

$$= \int_{\text{ما}}^{\text{و}} \left(-\frac{4\pi\,\text{ج}\,\text{ک}\,\text{و}^3}{3\,\text{لا}^2}\right) \text{فرلا} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ج}\,\text{ک}\,\text{و}^3 \left(\frac{1}{\text{و}} - \frac{1}{\text{ما}}\right)$$

ہوتی ہے۔ اس میں زمین کی سطح کو صفر قوہ کا محل مانا گیا ہے۔

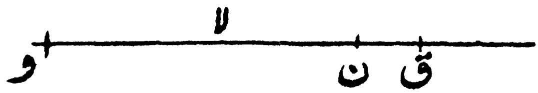
۱۹۔ مندرجۂ ذیل مقادیرِ طبعی کی جو تعریفیں کمیت، طول، وقت کی اکائیوں کی رقوم میں کی گئی ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ مقادیرِ مذکور کے ابعاد حسبِ ذیل ہیں۔

مقدار	کمیت	طول کے ابعاد	وقت
حجمی کثافت	۱	-۳	
سطحی کثافت	۱	-۲	
رفتار		۱	-۱
اسراع		۱	-۲
قوت	۱	۱	-۲
معیارِ حرکت	۱	۱	-۱
دھکا	۱	۱	-۱
توانائی بالحرکت	۱	۲	-۲
طاقت یا کام کی شرح	۱	۲	-۳
زاویئی رفتار			-۱

دوسرا باب

خطِ مستقیم میں حرکت

۲۰ - فرض کرو کہ وقت ت پر ایک متحرک نقطہ ن کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ و سے لا ہے - نیز فرض کرو کہ اس کا فاصلہ اسی نقطہ سے وقت ت + مف ت پر لا + مف لا یعنی و ق ہے۔



تب ن ق = مف لا

وقت ت پر ن کی رفتار

$$= \text{نہا} \frac{\text{ن ق}}{\text{مف ت}} \quad \text{جب کہ مف ت} \to 0 .$$

$$\text{پس رفتار و} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$$

فرض کرو کہ متحرک نقطہ کی رفتار وقت ت + مف ت پر

و + مف و

ہے، تب ن کا اسراع وقت ت پر

$$= \text{نہا} \frac{\text{مف و}}{\text{مف ت}}$$ جب کہ مف ت ← ۰

$$= \frac{\text{فر و}}{\text{فر ت}}$$

$$= \frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}}$$

۲۱ ۔ حرکت خطِ مستقیم میں ۔ اسراع مستقل = ف

فرض کرو کہ خطِ مستقیم پر کے ایک ثابت نقطہ سے ایک متحرک نقطہ کا فاصلہ وقت ت پر لا ہے ۔

تب $$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} = \text{ف} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\therefore \ \text{و} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \text{ف ت} + \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں ا کوئی اختیاری مستقل ہے ۔

اور $$\text{لا} = \text{ف} \frac{\text{ت}^{2}}{۲} + \text{ا ت} + \text{ب} \quad \ldots\ldots (۳)$$

جہاں ب کوئی اختیاری مستقل ہے ۔

نیز (۱) کو $۲ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$ سے ضرب دے کر بلحاظ ت کے تکمل کرنے سے

$$\text{و}^{2} = \left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)^{2} = ۲\,\text{ف لا} + \text{ج} \quad \ldots\ldots (۴)$$

جہاں ج کوئی اختیاری مستقل ہے ۔

اِن تین مساواتوں سے ہمیں یکساں اسراع کے ساتھ ایک ذرّہ کے خطِ مستقیم میں حرکت کرنے کے متعلق تمام سوالات کا حل دستیاب ہوسکتا ہے ۔ اختیاری مستقل ا، ب، ج کا تعیّن ابتدائی شرائط کی بناء پر کیا جاتا ہے ۔

مثلاً فرض کرو کہ ایک ذرّہ خطِ مستقیم پر کے ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ و سے ل ہے مبداء و سے پرے کی جانب رفتار ى کے ساتھ روانہ ہوا اور فرض کرو کہ وقت ت ابتدائے حرکت کی آن سے شروع ہوتا ہے ۔

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے جب کہ ت = ۰ تو رفتار و = ى اور لا = ل

اس لیے (۲)، (۳) اور (۴) مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ى} = \text{ا}\text{، } \text{ل} = \text{ب} \text{ اور } \text{ى}^{۲} = \text{ج} + \text{۲ف ل}$$

لہذا

$$\text{و} = \text{ى} + \text{ف ت}$$

$$\text{لا} - \text{ل} = \text{ى ت} + \tfrac{۱}{۲}\,\text{ف ت}^{۲}$$

اور

$$\text{و}^{۲} = \text{ى}^{۲} + \text{۲ف} \left(\text{لا} - \text{ل}\right)$$

جو ابتدائی علم حرکت کی تین بنیادی مساواتیں ہیں ۔

۲۲ ۔ ایک ذرّہ ایک خطِ مستقیم و ا پر حرکت کرتا ہے ۔ وہ مقام ا سے روانہ ہوتا ہے اور ایسے اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے جو و کی طرف عمل کرتا ہے اور و سے نقطہ مذکور کے فاصلہ کے متناسب بدلتا ہے ۔ حرکت معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ کسی آن میں و سے ذرّہ کا فاصلہ و ن = لا نیز فرض کرو کہ اس فاصلہ پر اسراع مہ لا ہے ۔

تب حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ذ}^{۲}\text{لا}}{\text{ذ ت}^{۲}} = -\,\text{مہ لا} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

[ہم بائیں طرف منفی علامت اس لیے لگاتے ہیں کہ $\frac{\text{ذ}^{۲}\text{لا}}{\text{ذ ت}^{۲}}$ اسراع ہے لا کے بڑھنے کی سمت میں یعنی و ن کی سمت میں اور مہ لا اسراع ہے و کی طرف یعنی

ن و کی سمت میں]

$2\dfrac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ سے ضرب دے کر تکمل کرنے سے

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = -\text{مہ}\,\text{لا}^2 + \text{ج}$$

اگر وا = و تو $\left(\dfrac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right) = ٠$ جب کہ لا = و

پس
$$٠ = -\text{مہ}\,\text{و}^2 + \text{ج}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{مہ}\,(\text{و}^2 - \text{لا}^2)$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -\sqrt{\text{مہ}}\sqrt{(\text{و}^2 - \text{لا}^2)} \quad \text{......(٢)}$$

[بائیں طرف منفی علامت اس لیے رکھی گئی ہے کہ رفتار صریحاً منفی رہتی ہے تاوقتیکہ ون مثبت رہے اور ن ، و کی طرف حرکت کرے -]

پس تکمل کرنے سے

$$\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت} = -\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{و}^2 - \text{لا}^2}} = \text{جم}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{و}} + \text{ج}_{\text{ا}}$$

جہاں $٠ = \text{جم}^{-1}\dfrac{\text{و}}{\text{و}} + \text{ج}_{\text{ا}}$ یعنی $\text{ج}_{\text{ا}} = ٠$

اگر وقت اُس لمحہ سے ناپا جائے جب کہ ذرہ ا پر ہو

∴ لا = ا جم √م ت

جب ذرہ و پر پہنچتا ہے، تو لا صفر ہوتا ہے اور اس وقت (۲) کی رُو سے

رفتار = − ا √م

اس طرح ذرہ مقام و سے گذر جاتا ہے اور فوراً ہی اسراع اپنی سمت کو بدل دیتا ہے اور رفتار کو گھٹانا شروع کرتا ہے، نیز رفتار و کے بائیں جانب اُسی سرعت کے ساتھ کم ہوجاتی ہے جس کے ساتھ دائیں طرف پیدا ہوئی تھی۔ لہذا ذرہ مقام و کے بائیں جانب ایک ایسے نقطہ اَ پر ساکن ہوجاتا ہے جس کا فاصلہ و سے وا' وا کے مساوی ہے۔ اب یہ پھر اپنے راستہ پر عود کرتا ہے اور و میں سے گزر کر پھر ایک لمحہ کے لیے ا پر ساکن ہوجاتا ہے۔ پس ذرہ کی کل حرکت اہتزازی ہے اور ذرہ ا اور اَ کے اندر اہتزاز کرتا رہتا ہے۔

ا سے و تک پہنچنے کا وقت (۳) میں لا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے جم (√م ت) = ۰ یعنی √م ت = π/۲

∴ ت = π/(۲√م)

وقت ا سے اَ تک اور پھر اَ سے ا تک یعنی کل اہتزاز کی مدت اس کا چار گنا ہے اور اس لیے = ۲π/√م

یہ جواب فاصلہ ا پر منحصر نہیں: اس لیے دَور کی مدات اس فاصلہ پر منحصر نہیں ہوتی جس سے کہ جسم روانہ ہوا۔ یہ صرف مقدار م پر منحصر ہے جو مرکز سے اکائی فاصلہ پر اسراع کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے۔

۳۲۔ اس قسم کی حرکت جس پر دفعہ ماقبل میں بحث ہوئی **سادہ موسیقی حرکت** کہلاتی ہے۔

وقت ۲π/√م یعنی ایک کل اہتزاز کے وقت کو حرکت کی دَوری مدت

کہتے ہیں اور فاصلہ و ا یا و اَ کو یعنی جہاں تک جسم حرکت کے مرکز کے دونوں جانب حرکت کرتا ہے اس کو حرکت کا **حیطۂ اہتزاز** کہتے ہیں۔

تعدد سے یہ مراد ہوتی ہے کہ ایک جسم ایک لمحہ میں کتنے مکمل اہتزاز کرتا ہے اور اس لیے تعدد = $\frac{۱}{\text{دوری مدت}} = \frac{\text{ماھمہ}}{۲\pi}$

۲۴ - جب ذرہ و کے بائیں جانب ہو تو حرکت کی مساوات ہوتی ہے

$$\frac{\text{ف}^۲\text{لا}}{\text{فت}^۲} = \text{اسراع نَ ا کی سمت میں}$$

$$= \text{مہ} \times \text{نَ و} = \text{مہ} (-\text{لا}) = -\text{مہلا}$$

اس لیے وہ مساوات جو و کے دائیں جانب ہو وہ بائیں جانب بھی ہوسکتی ہے۔

دفعہ ۲۲ کی مانند آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ مساوات بالا کا عام سے عام حل　لا = لہ جم [ماھمہ ت + صہ] .... (۱)

جس میں دو اختیاری مستقل لہ اور صہ شامل ہیں۔

اس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{فلا}}{\text{فت}} = -$ لہ ماھمہ جب (ماھمہ ت + صہ) .... (۲)

(۱) اور (۲) پھر وہی ہو جاتی ہیں جب کہ ت میں $\frac{۲\pi}{\text{ماھمہ}}$ کا اضافہ کر دیا جائے کیونکہ جب اور جم کی قیمتوں میں کوئی تغیر نہیں ہوتا ہے جب کہ زاویہ میں ۲π کا اضافہ کر دیا جائے۔

اگر سادہ موسیقی حرکت میں ہٹاؤ کے لیے معیاری جملہ (۱) استعمال کیا جائے تو مقدار صہ کو وقت ابتداء زاویہ ماھمہ ت + صہ کو **وجہ** کہتے ہیں، کسی خاص آن پر **ہیئت** سے وہ مدت مراد ہوتی ہے جو اُس وقت سے جب کہ ذرۂ مذکور مثبت سمت میں بڑے سے بڑے فاصلہ پر تھا

آن زیرِ غور تک گذری ہو ۔ صریحاً لا بڑے سے بڑا وقت ت. پر ہوتا ہے جب کہ
$\sqrt{م}\,ت_{\circ} + ص = ۰$

اس لیے وقت ت پر ہیئیت

$$ت - ت_{\circ} = ت + \frac{ص}{\sqrt{م}} = \frac{\sqrt{م}\,ت + ص}{\sqrt{م}}$$

اگر حرکت ایسی ہو کہ کسی دیے ہوئے نقطہ تک جسم کے گرنے کی مدت ہمیشہ وہی رہے خواہ جسم کتنے ہی فاصلہ میں سے گرتا ہو اسے مساوی الزمان (Tautochronous) حرکت کہتے ہیں ۔

۲۵ ۔ دفعہ ۲۲ میں اگر ابتداءً ذرہ حالتِ سکون سے چلنے کی بجائے **مقام** ا سے ابتدائی رفتار و سے پھینکا جاتا تو

$$و^۲ = - م\,لا^۲ + ج$$

$$\left(\frac{فر\,لا}{فر\,ت}\right)^۲ = و^۲ + م\,(ا^۲ - لا^۲)$$

$$= م\,(ب^۲ - لا^۲) \quad \text{جہاں} \quad ب^۲ = ا^۲ + \frac{و^۲}{م} \quad \ldots\ldots\ldots(۱)$$

$$\therefore \frac{فر\,لا}{فر\,ت} = \sqrt{م}\,\sqrt{ب^۲ - لا^۲}$$

اور $ت\sqrt{م} = -جم^{-۱}\frac{لا}{ب} + ج$ جہاں $۰ = -جم^{-۱}\frac{ا}{ب} + ج$

$$\therefore ت\sqrt{م} = جم^{-۱}\frac{ا}{ب} - جم^{-۱}\frac{لا}{ب} \quad \ldots\ldots\ldots(۲)$$

(۱) سے ظاہر ہے کہ رفتار معدوم ہو جاتی ہے جب کہ

$$لا = ب = \sqrt{ا^۲ + \frac{و^۲}{م}}$$

اور پھر (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ت}\ \text{مہ} = \text{جم}^{-1}\,\frac{\text{ل}}{\text{ب}}\quad \text{یعنی}\quad \text{ت} = \frac{1}{\text{مہ}}\,\text{جم}^{-1}\,\frac{\text{ل}}{\sqrt{\text{ل}^{2} + \frac{\text{و}^{2}}{\text{مہ}^{2}}}}$$

بعد ازاں جسم اپنے راستہ پر عود کرتا ہے اور حرکت ویسی ہی ہوتی ہے جیسی کہ دفعہ ۲۲ میں مذکور ہوئی جب کہ ل کی بجائے ب لکھا جائے۔

۲۶ - ایک ہی دَور والی اور ایک ہی خطِ مستقیم میں وقوع پذیر ہونے والی دو سادہ موسیقی حرکتوں کی ترکیب ۔

اس قسم کے عام سے عام ہٹاؤ ا جم (ن ت + صہ) اور ب جم (ن ت + صہَ) سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{لا} = \text{ا جم}\,(\text{ن ت} + \text{صہ}) + \text{ب جم}\,(\text{ن ت} + \text{صہَ})$$

$$= \text{جم ن ت}\,(\text{ا جم صہ} + \text{ب جم صہَ}) - \text{جب ن ت}\,(\text{ا جب صہ} + \text{ب جب صہَ})$$

فرض کرو کہ

$$\left.\begin{aligned} \text{ا جم صہ} + \text{ب جم صہَ} &= \text{م جم صـہ} \\ \text{ا جب صہ} + \text{ب جب صہَ} &= \text{م جب صـہ} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

اور

اور بنائے علیہ $\text{م} = \sqrt{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} + 2\,\text{ا ب جم}\,(\text{صہ} - \text{صہَ})}$

اور $\text{مس صـہ} = \dfrac{\text{ا جب صہ} + \text{ب جب صہَ}}{\text{ا جم صہ} + \text{ب جم صہَ}}$

تب $\quad \text{لا} = \text{م جم}\,(\text{ن ت} + \text{صـہ})$

پس دو موسیقی حرکتوں کی ترکیب سے اُسی دَور والی متشابہ موسیقی حرکت حاصل ہوتی ہے جس کے سعت اور وقت ابتداء معلوم ہیں۔

اگر خط و م (= ل) ایک ثابت خطِ مستقیم کے ساتھ زاویہ صہ بناتا ہوا کھینچیں اور و ب (= ب) زاویہ صہَ بناتا ہوا کھینچیں اور

متوازی الاضلاع و ا ج ب کی تکمیل کریں تو مساواتوں (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ و ج ، ا کو تعبیر کرتا ہے اور یہ ثابت خط کے ساتھ زاویہ صہ بناتا ہے ۔ اس لیے وہ خط جو دو معلومہ حرکتوں کے حاصل کو تعبیر کرتا ہے وہ ہندسی حاصل ہے اُن خطوں کا جو جداگانہ دو ترکیبی موسیقی حرکتوں کو تعبیر کرتے ہیں ۔

یہی کیفیت ایک ہی دَور کی دو سے زیادہ حرکتوں کی ترکیب کی ہے۔

۲۷ ۔ ہم مختلف دَوروں کی دو سادہ موسیقی حرکتوں کو ترکیب نہیں دے سکتے ۔

جس صورت میں دَور بالکل مساوی نہ ہوں بلکہ تقریباً مساوی ہوں تو حرکتوں کی ترکیب خاص اہمیت رکھتی ہے ۔

اس صورت میں

لا = ا جم (ن ت + صہ) + ب جم (نَ ت + صہَ)

جہاں نَ - ن چھوٹا ہے = لہ (فرض کرو)

تب لا = ا جم (ن ت + صہ) + ب جم (ن ت + صہَ١)

جہاں صہَ١ = لہ ت + صہَ

دفعہ گزشتہ کی رُو سے

لا = ا١ جم (ن ت + صہ١) .... (۱)

جہاں ا١^۲ = ا^۲ + ب^۲ + ۲ ا ب جم (صہ - صہَ١)

= ا^۲ + ب^۲ + ۲ ا ب جم [صہ - صہَ - (نَ - ن) ت] ... (۲)

اور مس صہ١ = (ا جب صہ + ب جب صہَ١) / (ا جم صہ + ب جم صہَ١)

= (ا جب صہ + ب جب [صہَ + (نَ - ن) ت]) / (ا جم صہ + ب جم [صہَ + (نَ - ن) ت]) .... (۳)

اب مقداریں ا١ اور صہ١ مستقل نہیں بلکہ یہ وقت کے ساتھ آہستہ آہستہ بدلتی ہیں کیونکہ نَ - ن بہت چھوٹا ہے ۔

ا کی بڑی سے بڑی قیمت اُس وقت ہوتی ہے جب کہ صہ ۔ صَہ ۔ (نَ ۔ ن) ت = ۲ ٪ کا کوئی جفت ضعف، اور اس وقت اس کی قیمت و + ب ہوتی ہے ۔

ا کی کم سے کم قیمت اس وقت ہوتی ہے جب کہ صہ ۔ صَہ ۔ (نَ ۔ ن) ت = ٪ کا کوئی طاق ضعف اس صورت میں اس کی قیمت و ۔ ب ہوتی ہے ۔

پس کسی معلومہ وقت میں حرکت کو ایک سادہ موسیقی حرکت تصور کیا جاسکتا ہے جس کا دَور تقریباً وہی ہو جو کسی ایک دی ہوئی ترکیبی حرکت کا ہے لیکن اس کی سعت ا اور وقتِ ابتدا، صہ بتدریج ایک معین کم سے کم قیمت سے ایک معین بڑی سے بڑی قیمت تک بدلتے رہتے ہیں اور ان تبدیلیوں کی دَوری مدت $\frac{۲ ٪}{نَ - ن}$ ہوتی ہے ۔

[جو طالب علم آواز کے نظریہ سے واقفیت رکھتا ہے وہ زیر و بم کے مظہر کے ساتھ اس کی مشابہت دیکھ سکتا ہے ۔]

۲۸ ۔ مشق ۱ ۔ ثابت کرو کہ ایک ہی سمت میں دو ایسی سادہ موسیقی حرکتوں کا حاصل جن کی دَوری مدتیں مساوی ہوں لیکن ایک کی سعت دوسری کی سعت کا دوچند ہو اور اس کی ہئیت دَوری مدت کی ایک چوتھائی آگے ہو ایک سادہ موسیقی حرکت ہوتی ہے جس کی سعت حرکت اول کی سعت کا $\sqrt{۵}$ گنا ہوتی ہے اور جس کی ہئیت پہلی حرکت کی ہئیت سے دَور کا $\frac{مس^{-۱} ۲}{۲ ٪}$ گنا آگے ہوتی ہے ۔

مشق ۲ ۔ ایک ذرہ ایک خطِ مستقیم میں ایک قوت کے مرکز و کے گرد اہتزاز کرتا ہے اور فاصلہ ر پر قوت مرکز کی طرف بمقدار م × ن۲ ر عمل کرتی ہے اور لا اہتزاز کی سعت ہے ۔ و سے فاصلہ $\frac{لا \sqrt{۳}}{۲}$ پر ذرہ کو حرکت کی سمت میں ایک دھکا لگتا ہے جو ن لا رفتار پیدا کرتا ہے ۔ اگر رفتار و سے پرے کی جانب ہو تو ثابت کرو کہ نئی سعت لا $\sqrt{۳}$ ہوگی ۔

مشق ۳ ۔ ایک ذرہ ن جس کی کمیّت م ہے ایک خطِ مستقیم و لا میں

ایک ایسی قوت کے زیرِ عمل جو ایک نقطہ ا کی طرف عمل کرتی ہے اور جس کی مقدار م × مہ (فاصلہ) ہوتی ہے حرکت کرتا ہے جب کہ نقطہ ا خود خطِ مستقیم و لا میں مستقل اسراع ع کے ساتھ حرکت کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہے جس کی دَوری مدت $\frac{\pi ۲}{مہ}$ ہے اور حرکت ایسے متحرک مرکز کے گرد ہے جو ہمیشہ ا سے فاصلہ $\frac{ع}{مہ^۲}$ پیچھے رہتا ہے ۔

مشق ۴ ۔ ایک بے وزن لچکدار رسّی ہے جس کا طول بغیر کھنچاؤ کے ل ہے اور جس کی لچک کی قدر ن اونس وزن کے مساوی ہے ۔ رسی کو ایک سرے سے لٹکایا گیا ہے اور دوسرے سرے کے ساتھ وزن م اونس باندھا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ انتصابی اہتزاز کی مدت $۲\pi \sqrt{\frac{م ل}{ن ج}}$ ہے ۔

مشق ۵ ۔ ایک لچکدار رسّی ہے جس کا قدرتی طول و ہے اور جس کی لچک کی قدر لہ ہے ۔ اس کے ایک سرے کو ایک چکنے افقی میز پر باندھ دیا گیا ہے اور دُوسرے سرے کو کمیّت م کے ایک ذرّہ کے ساتھ جو میز پر پڑا ہے باندھا گیا ہے ۔ ذرّہ کو کچھ فاصلہ تک کھینچا گیا ہے جہاں رسّی کا کھنچاؤ ب ہے اور پھر چھوڑ دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ایک مکمل اہتزاز کی مدت $۲ \left(\pi + \frac{۲ لہ}{ب}\right) \sqrt{\frac{و م}{لہ}}$ ہے ۔

مشق ۶ ۔ ایک رسّی کا حلقہ دو حصوں پر مشتمل ہے جن کے طول ۲ل اور ۲لَ ہیں اور جن کی کمیتیں فی اکائی طول بالترتیب م اور مَ ہیں ۔ اس کو ایک چھوٹی سی چکنی میخ پر قائم تعادل کی حالت میں رکھ دیا گیا ہے اور پھر ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ایک پورے اہتزاز کی دَوری مدت $۲\pi \sqrt{\frac{م ل + مَ لَ}{(م - مَ) ج}}$ ہے ۔

مشق ۷ ۔ یہ تسلیم کرکے کہ زمین کی قوتِ جاذبہ، اندر کے کسی نقطہ پر، مرکز سے نقطۂ مذکور کے فاصلہ کے متناسب ہوتی ہے، ثابت کرو کہ اگر زمین کی سطح کے کسی نقطہ سے اس کے کسی اور نقطہ تک ایک سیدھی بے رگڑ بے ہوا سرنگ کھودی

جائے تو ایک ریل گاڑی اس سرنگ کو $\frac{۳}{۴}$ گھنٹہ سے کچھ کم عرصہ میں عبور کریگی۔

۲۹ ـ ایک ذرّہ کی حرکت معلوم کرو جب کہ ذرہ ایک خطِ مستقیم میں حرکت کرے اور اسراع ایک ثابت نقطہ ط سے ذرّہ کے فاصلہ کے متناسب ہو اور ہمیشہ ط سے پرے کی جانب میں عمل کرے۔

یہاں حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} = \text{مہ}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

فرض کرو کہ ذرہ کی رفتار ط سے فاصلہ و پر، وقت صفر پر، صفر ہے۔

(۱) کا تکملہ ہے
$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \text{مہ}\,\text{لا}^{۲} + \text{ا}$$

جہاں
$$\cdot = \text{مہ}\,\text{و}^{۲} + \text{ا}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \sqrt{\text{مہ}\left(\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

بائیں طرف کے جملہ کی علامت مثبت لی گئی ہے کیونکہ اس صورت میں رفتار مثبت ہے۔

$$\therefore \text{ت}\sqrt{\text{مہ}} = \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}}} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}}\right\} + \text{ب}$$

جہاں
$$\cdot = \text{لوک}\,[\,\text{و}\,] + \text{ب}$$

$$\therefore \text{ت}\sqrt{\text{مہ}} = \text{لوک}\,\frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}}}{\text{و}}$$

$$\therefore \text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}} = \text{و}\,\text{و}^{\text{ت}\sqrt{\text{مہ}}}$$

$$\therefore \text{لا} - \sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}} = \frac{\text{و}^{۲}}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}}} = \text{و}\,\text{و}^{-\text{ت}\sqrt{\text{مہ}}}$$

اس لیے جمع کرنے سے

$$لا = \frac{ا}{۲} و^{ہامہ ت} + \frac{ا}{۲} و^{-ہامہ ت} \quad ....(۳)$$

جیسے ت بڑھتا ہے تو (۳) کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ لا بھی مسلسل طور پر بڑھتا ہے اور (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ رفتار بھی مسلسل بڑھتی جاتی ہے۔اس لیے ذرہ ہمیشہ لا کی مثبت سمت میں مسلسل بڑھنے والی رفتار کے ساتھ چلتا رہیگا۔

مساوات (۳) کو حسب ذیل شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے :

$$لا = ا \text{ جمز} (ہامہ ت)$$

اور پھر (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ رفتار $و = ا\, ہامہ \text{ جبز} (ہامہ ت)$

۳۰۔ دفعۂ ماقبل میں فرض کرو کہ ذرّہ ابتداءً مبداء ط کی طرف ابتدائی رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا۔ تب ہمیں حاصل ہوگا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -و$، جب کہ $لا = ا$ اور مساوات (۲) زیادہ پیچیدہ ہوگی۔تاہم ہم (۱) کا عام سے عام حل

$$لا = ج\, و^{ہامہ ت} + د\, و^{-ہامہ ت} \quad ....(۴)$$

کی شکل میں لے سکتے ہیں جہاں ج اور د کوئی مستقل ہیں۔

چونکہ جس وقت ت = ۰ تو $لا = ا$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -و$

اس لیے $ا = ج + د$ اور $-و = ہامہ\, ج - ہامہ\, د$

اس لیے $ج = \frac{۱}{۲}\left(ا - \frac{و}{ہامہ}\right)$ اور $د = \frac{۱}{۲}\left(ا + \frac{و}{ہامہ}\right)$

∴ (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \tfrac{1}{2}\left(\text{ا} - \frac{\text{و}}{\sqrt{\text{مہ}}}\right)\text{و}^{\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}} + \tfrac{1}{2}\left(\text{ا} + \frac{\text{و}}{\sqrt{\text{مہ}}}\right)\text{و}^{-\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}} \quad \ldots\ldots(۵)$$

$$= \text{ا}\,\text{جمز}\left(\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}\right) - \frac{\text{و}}{\sqrt{\text{مہ}}}\,\text{جبز}\left(\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}\right) \quad \ldots\ldots(۶)$$

اس صورت میں ذرّہ مبدا ط پر پہنچیگا جب کہ

$$۰ = \tfrac{1}{2}\left(\text{ا} - \frac{\text{و}}{\sqrt{\text{مہ}}}\right)\text{و}^{\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}} + \tfrac{1}{2}\left(\text{ا} + \frac{\text{و}}{\sqrt{\text{مہ}}}\right)\text{و}^{-\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}}$$

یعنی جب کہ $\text{و}^{۲\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}} = \dfrac{\text{و} + \text{ا}\sqrt{\text{مہ}}}{\text{و} - \text{ا}\sqrt{\text{مہ}}}$

یعنی جب کہ $\text{ت} = \dfrac{1}{۲\sqrt{\text{مہ}}}\,\text{لوک}\,\dfrac{\text{و} + \text{ا}\sqrt{\text{مہ}}}{\text{و} - \text{ا}\sqrt{\text{مہ}}}$

اُس خاص صورت میں جب کہ $\text{و} = \text{ا}\sqrt{\text{مہ}}$، ت کی یہ قیمت لامتناہی ہوجائیگی۔

پس اگر جسم فاصلہ ا سے مبداء کی جانب رفتار $\text{ا}\sqrt{\text{مہ}}$ سے پھینکا جائے تو یہ مرکز پر لامتناہی وقت سے قبل نہیں پہنچیگا۔

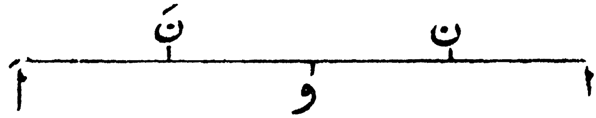
نیز (۵) میں $\text{و} = \text{ا}\sqrt{\text{مہ}}$ رکھنے سے

$$\text{لا} = \text{ا}\,\text{و}^{-\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}} \quad \text{اور} \quad \text{و} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -\text{ا}\sqrt{\text{مہ}}\,\text{و}^{-\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}}$$

پس ذرّہ ہمیشہ مبداء ط کی طرف مسلسل طور پر کم ہوتی ہوئی رفتار کے ساتھ چلتا رہیگا لیکن وہاں پہنچنے کے لیے لا انتہا وقت کی ضرورت ہوگی۔

۳۱ - ایک ذرّہ ایک خطِ مستقیم و ا میں ایسے اسراع کے ساتھ جو ہمیشہ و کی طرف عمل کرتا ہے اور و سے ذرّہ کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتا ہے حرکت کرتا ہے۔ اگر ابتداءً

ذرّہ ا پر ساکن ہو تو حرکت معلوم کرو۔



فرض کرو کہ و ن = لا ، اور ذرّہ کا اسراع جب کہ یہ ن پر ہو ن و کی سمت میں $\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^2}$ ہے۔ پس حرکت کی مساوات ہے :

$$\frac{\text{ف}^2\text{لا}}{\text{فت}^2} = \text{و ن کی سمت میں اسراع} = -\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

دونوں طرف ۲ $\frac{\text{فلا}}{\text{فت}}$ سے ضرب دے کر تکمل کرنے سے

$$\left(\frac{\text{فلا}}{\text{فت}}\right)^2 = \frac{2\,\text{مہ}}{\text{لا}} + \text{ج}$$

جہاں $0 = \frac{2\,\text{مہ}}{\text{ا}} + \text{ج}$ ابتدائی شرائط کی رُو سے

تفریق کرنے سے $\left(\frac{\text{فلا}}{\text{فت}}\right)^2 = 2\,\text{مہ}\left(\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{ا}}\right)$

$$\therefore \frac{\text{فلا}}{\text{فت}} = -\sqrt{2\,\text{مہ}}\sqrt{\frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{ا لا}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

منفی علامت اس لیے لگائی گئی ہے کیونکہ ن کی حرکت و کی طرف ہے یعنی لا کی گھٹنے والی سمت میں

لہذا $\int \sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{ا} - \text{لا}}}\,\text{فلا} = -\sqrt{\frac{2\,\text{مہ}}{\text{ا}}}\,.\,\text{ت}$

بائیں طرف کے جملہ کو تکمل کرنے کے لیے $\text{لا} = \text{اجم}^2\,\text{طہ}$ رکھو

$$\sqrt{\frac{\text{٢مہ}}{\text{و}}}\;\text{ت} = \int \frac{\text{جم ط}}{\text{جب ط}} \times \text{٢ و جم ط جب ط فر ط}$$

$$= \text{و} \int (\text{١} + \text{جم ٢ط})\,\text{فرط} = \text{و}(\text{ط} + \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جب ٢ط}) + \text{ج}_{\text{١}}$$

$$= \text{و جم}^{-\text{١}} \sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{و}}} + \sqrt{\text{و لا} - \text{لا}^{\text{٢}}} + \text{ج}_{\text{١}}$$

جہاں $\text{٠} = \text{و جم}^{-\text{١}}(\text{١}) + \text{٠} + \text{ج}_{\text{١}}$ یعنی $\text{ج}_{\text{١}} = \text{٠}$

$$\therefore \text{ت} = \sqrt{\frac{\text{و}}{\text{٢مہ}}}\left[\sqrt{\text{و لا} - \text{لا}^{\text{٢}}} + \text{و جم}^{-\text{١}}\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{و}}}\right] \cdots\cdots (\text{٣})$$

مساوات (۲) سے راستہ کے کسی نقطہ ن پر رفتار حاصل ہوتی ہے اور (۳) سے حرکت کی ابتدا سے وقت معلوم ہوتا ہے۔

و پر پہنچنے کے وقت رفتار (۲) میں لا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے اور یہ لا متناہی ہے

نیز (۳) سے اس کا متناظر وقت ت

$$= \sqrt{\frac{\text{و}}{\text{٢مہ}}}\left[\text{و جم}^{-\text{١}}\,\text{٠}\right] = \frac{\pi}{\text{٢}}\;\frac{\text{و}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\sqrt{\text{٢}}\;\text{مہ}}$$

حرکت کی یہ مساوات (۱) قائم نہ رہیگی جب کہ ذرّہ و سے گزر جائے۔ لیکن یہ ظاہر ہے کہ چونکہ اس صورت میں اسراع رفتار کی سمت کے مخالف ہوگا اس لیے رفتار بتدریج کم ہوتی جائیگی اور اسی شرح سے کم ہوگی جس شرح سے کہ یہ پیدا ہوئی تھی جب کہ ذرّہ و کی مثبت سمت میں تھا۔ پس تشاکل سے ظاہر ہے کہ ذرّہ ایسے مقام اَ پر ساکن ہوجائیگا جہاں ا و اور و اَ مساوی ہونگے۔ اس کے بعد یہ پھر واپس آئیگا، و مرکز میں سے گزر کر ا پر ساکن ہو جائیگا۔

اہتزاز کی کُل مدّت جو ا سے و تک پہنچنے کی مدت کی چارگنی

ہے $= 2\pi \dfrac{\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}}$

۳۲ ـ صرف ابعاد کو ملحوظ رکھتے ہوئے ہم دکھا سکتے ہیں کہ مدت $\propto \dfrac{\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}}$ کیونکہ وہ مقداریں جو جواب میں آسکتی ہیں مہ اور ا ہیں، پس فرض کرو کہ

دَوری مدت $= \text{ا}^{\text{ف}}\ \text{مہ}^{\text{ق}}$ ـ

نیز چونکہ $\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^2}$ اسراع ہے جس کے ابعاد $[\text{ل}][\text{ت}]^{-2}$ ہوتے ہیں اس لیے

مہ کے ابعاد $[\text{ل}]^3[\text{ت}]^{-2}$ ہیں، اس لیے مدت جس کے ابعاد $[\text{ت}]^1$ ہیں

$$= [\text{ل}]^{\text{ف}+3\text{ق}}[\text{ت}]^{-2\text{ق}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ ا $= -2$ق یعنی ق $= -\frac{1}{2}$ اور ف $+ 3$ق $= 0$

یعنی ف $= -3$ق یعنی $\frac{3}{2}$

$$\text{پس مدت} \propto \text{ا}^{\frac{3}{2}}\ \text{مہ}^{-\frac{1}{2}} \text{ گویا } \frac{\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}}$$

۳۳ ـ دفعہ ۳۱ کی مثال کے طور پر ایک ایسے ذرّہ کی حرکت پر غور کرو جو زمین کی طرف (جس کو ساکن تصور کیا جائے) باہر کے کسی نقطہ سے گر رہا ہے۔ کششوں کے ضمن میں یہ بات ثابت کی جا چکی ہے کہ کسی بیرونی نقطہ پر زمین کی کشش ایسے بدلتی ہے جیسے بالعکس نقطہ کے فاصلہ کا مربع زمین کے مرکز سے (جب کہ زمین کو متجانس کرہ مانا جائے) پس زمین کے باہر اس کے مرکز سے فاصلہ لا پر کے کسی نقطہ پر زمین کی کشش کو $\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^2}$ کے مساوی تصور کیا جا سکتا ہے ـ

اگر زمین کا نصف قطر ا ہو تو چونکہ $\frac{\text{مہ}}{\text{ا}^2} =$ ج جو سطح زمین پر زمین کی کشش ہے $\therefore$ مہ $= \text{ا}^2$ج

پس زمین کے باہر کے کسی نقطہ ن پر زمین کی کشش کا اسراع

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\frac{\text{ج ر}^{2}}{\text{لا}^{2}} \quad \text{..................(۱)}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \frac{\text{۲ ج ر}^{2}}{\text{لا}} + \text{ج}$$

اگر ذرّہ زمین کے مرکز سے فاصلہ ب سے رفتار صفر سے چلا ہو تو

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \text{۲ ج ر}^{2}\left(\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{ب}}\right) \quad \text{..........(۲)}$$

اور اس لیے زمین پر پہنچنے کے وقت رفتار کا مربع = $\text{۲ ج ر}^{2} \times$

$$\left(\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ب}}\right) = \text{۲ج ر}\left(1 - \frac{\text{ر}}{\text{ب}}\right) \quad \text{..................(۳)}$$

اب فرض کرو کہ ایک سوراخ زمین کے مرکز میں آر پار کھدا ہوا ہے اور ذرّہ اس میں سے اپنی حرکت کو جاری رکھتا ہے۔

یہ بات ثابت کی جاسکتی ہے کہ زمین کے اندر مرکز سے فاصلہ لا پر، زمین کی کشش لا کے متناسب ہوتی ہے۔ پس مرکز سے فاصلہ لا پر اسراع ہے مہ لا جہاں مہ ر = اس کی قیمت زمین کی سطح پر = ج اس لیے ذرّہ جب زمین کے اندر ہے تو اس کی حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{مہ لا} = -\frac{\text{ج}}{\text{ر}}\,\text{لا}$$

اس لیے

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{2} = -\frac{\text{ج}}{\text{ر}}\,\text{لا}^{2} + \text{ج}'$$

اب جب کہ لا = ر، رفتار کا مربع (۳) سے حاصل ہوتا ہے کیونکہ رفتار کی کوئی فوری تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لیے

$$۲ج ا \left(۱ - \frac{ا}{ب}\right) = -\frac{ج}{ا} \times ا^{۲} + ج_{ا}$$

$$\therefore \left(\frac{فرلا}{فرت}\right)^{۲} = -\frac{ج\, لا^{۲}}{ا} + ج ا \left\{۳ - \frac{۲ ا}{ب}\right\}$$

زمین کے مرکز پر پہنچنے کے وقت، رفتار کا مربع

$$ج ا \left\{۳ - \frac{۲ ا}{ب}\right\}$$ ہوگا۔

۴۳۔ مشق ۱۔ ایک ذرّہ زمین کے مرکز کی طرف لاتناہی سے گرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی رفتار زمین پر پہنچنے کے وقت وہی ہوگی جو یہ ذرّہ زمین کے نصف قطر کے مساوی فاصلہ میں سے مستقل اسراع ج کے ساتھ گرنے سے حاصل کرتا۔

مشق ۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک جسم لاتناہی سے گر کر زمین کی سطح پر آئے تو اس کی رفتار تقریباً ۷ میل فی سکنڈ ہوگی جہاں زمین کو ۴۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک متجانس کرہ فرض کیا گیا ہے۔

سورج کے لیے ثابت کرو کہ یہ رفتار تقریباً ۳۶۰ میل فی سکنڈ ہوگی۔ سورج کے نصف قطر کو ۴۴۰۰۰۰ میل اور زمین کا فاصلہ سورج سے ۹۲۵۰۰۰۰۰ میل فرض کرو۔

مشق ۳۔ اگر زمین کی کشش کسی نقطہ پر مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہو اور سطح زمین پر اس کشش کی قیمت ج ہو تو ثابت کرو کہ سطح سے فاصلہ ھ پر سے گر کر سطح تک پہنچنے کا وقت

$$\sqrt{\frac{ا+ھ}{۲ج}} \left[\frac{ا+ھ}{ا} \text{جب}^{-۱} \sqrt{\frac{ھ}{ا+ھ}} + \sqrt{\frac{ھ}{ا}} \right]$$

ہوگا جہاں ا زمین کا نصف قطر ہے اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

اگر ھ چھوٹا ہو بمقابلہ ا کے تو جواب بالا تقریباً

$$= \sqrt{\frac{۲ھ}{ج}}\left[۱ + \frac{ھ}{۶}\,\frac{ھ}{و}\right]$$

۴۵ ۔ یہ ظاہر ہے کہ دفعہ ۴۱ کی مساواتیں (۲) اور (۳) ذرّہ کے و سے گزر جانے کے بعد صحیح نہیں رہ سکتیں کیونکہ لا کو کوئی منفی قیمت دینے سے، اِن مساواتوں سے رفتار اور ت کی ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ۔

جب ذرّہ و کے بائیں طرف نَ پر ہو تو اسراع $\frac{مہ}{\overline{ون}^۲}$ یعنی $\frac{مہ}{لا^۲}$ ہوگا دائیں جانب، نیز $\frac{فر^۲لا}{فرت^۲}$ سے اسراع لا کی مثبت جانب میں مراد ہوتا ہے ۔ اس لیے جب نَ، و کے بائیں طرف ہو تو حرکت کی مساوات ہوتی ہے

$$\frac{فر^۲لا}{فرت^۲} = \frac{مہ}{لا^۲}$$

جس کے حل (۲) اور (۳) سے مختلف ہیں ۔

عام صورت پر آسانی سے غور کیا جاسکتا ہے ۔ فرض کرو کہ اسراع و کی طرف مہ (فاصلہ)^{ن} ہے ۔ جب ذرّہ و کے دائیں جانب ہو تو حرکت کی مساوات صریحاً ہے :

$$\frac{فر^۲لا}{فرت^۲} = -\,مہ\,لا^{ن}$$

جب نَ، و کے بائیں جانب ہو تو مساوات ہے ۔

$$\frac{فر^۲لا}{فرت^۲} = مہ\,(-\,لا)^{ن}$$

یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہونگی اگر

$$-\,مہ\,لا^{ن} = مہ\,(-\,لا^{ن}) \text{ یعنی اگر } (-\,۱)^{ن} = -\,۱$$

یعنی اگر ن کوئی طاق عدد ہو یا اس شکل $\frac{۲ ف + ۱}{۲ ق + ۱}$ کا ہو جہاں ف اور ق کوئی صحیح عدد ہیں ۔ ایسی صورتوں میں دونوں طرف کے لیے ایک ہی مساوات کام دیتی ہے ورنہ نہیں ۔

۳۶ ۔ مثال ۔ ایک چھوٹا منکا جس کی کمیت م ہے ایک کھُرد رے تار پر ایسی قوتِ جاذبہ کے زیرِ عمل جس کا مرکز ا تار کے باہر تار سے عمودی فاصلہ ا پر واقع ہے اور جو ذرّہ کے فاصلہ کے م مہ گنا کے مساوی ہے حرکت کرتا ہے ۔ حرکت معلوم کرو جبکہ ذرّہ اس عمود کے پائیں و سے جو ا میں سے تار پر کھینچا جائے فاصلہ ج سے ابتداءً سکون سے روانہ ہو ۔

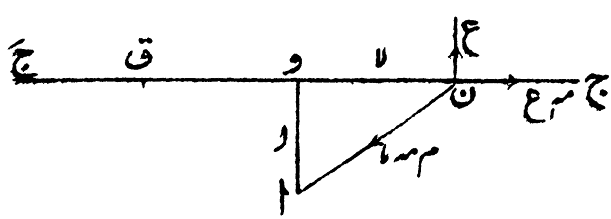
فرض کرو کہ کسی وقت ت پر منکے کا مقام ن ہے جہاں

و ن = لا اور ان = ما

نیز فرض کرو کہ ع تار کا عادی تعامل ہے اور رگڑ کی قدر مہ ہے ۔

قوتوں کو تار پر عمود وار تحلیل کرنے سے

ع = م مہ ما جب و ن ا = م مہ ا



پس رگڑ　　مہ ع = م مہ مہ ا

قوت م مہ ما کا جزوِ تحلیلی تار کی سمت میں

= م مہ ما جم و ن ا = م مہ لا

پس کل اسراع = مہ مہ ا ۔ مہ لا

لہٰذا حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ مہ}_{\text{ا}}\ \text{و} - \text{مہ لا} = -\text{مہ}\ (\text{لا} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و}) \ldots\ldots\ldots\ (\text{۱})$$

جب تک ن ، و سے دائیں جانب رہتا ہے ۔

[اگر ن ، و کے بائیں جانب ہو اور بائیں طرف حرکت کر رہا ہو تو حرکت کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{اسراع و ج کی سمت میں}$$

$$= \text{مہ مہ}_{\text{ا}}\ \text{ا} + \text{مہ}\ (-\ \text{لا})\ \text{دفعہ ماقبل کی مانند}$$

اور یہ وہی ہے جو مساوات (۱) ہے جو و کے دائیں جانب درست رہتی ہے]

تکمل کرنے سے

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = -\text{مہ}\ (\text{لا} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و})^2 + \text{ج}$$

جہاں $$\cdot = -\text{مہ}\ (\text{ج} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و})^2 + \text{ج}$$

$$\therefore\ (\text{رفتار})^2 = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{مہ}\ \left[(\text{ج} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و})^2 - (\text{لا} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و})^2\right] \ldots\ldots\ (\text{۲})$$

اور اس لیے دفعہ ۲۲ کی مانند $\text{مہ}^{\frac{1}{2}}\ \text{ت} = \text{جم}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و}}{\text{ج} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و}} + \text{ج}_{\text{ا}}$

جہاں $$\cdot = \text{جم}^{-1}\frac{\text{ج} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و}}{\text{ج} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و}} + \text{ج}_{\text{ا}}\ \text{یعنی}\ \text{ج}_{\text{ا}} = \cdot$$

$$\therefore\ \text{مہ}^{\frac{1}{2}}\ \text{ت} = \text{جم}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و}}{\text{ج} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{۳})$$

(۲) اور (۳) سے کسی محل میں رفتار اور وقت حاصل ہوتے ہیں ۔

(۲) سے ظاہر ہے کہ رفتار صفر ہوگی جب کہ $\text{لا} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و} = \pm(\text{ج} - \text{مہ}_{\text{ا}}\ \text{و})$

یعنی جب کہ $\text{لا} = \text{ج} = \text{و ج}$ اور جب کہ $\text{لا} = -(\text{ج} - \text{۲ و مہ}_{\text{ا}})$

یعنی نقطہ جَ پر جہاں وجَ = ج − ۲ ل مٓ

اور تب (۳) سے اس کا متناظر وقت

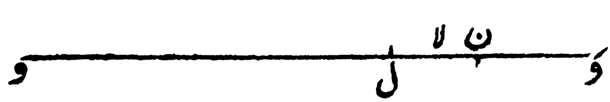
$$= \frac{1}{\text{مٓ}}\,\text{جم}^{-1}\,\frac{\text{ج} - \text{مٓ ل}}{-\text{ج} + \text{مٓ ل}} = \frac{1}{\text{مٓ}}\,\text{جم}^{-1}(-1) = \frac{\pi}{\text{مٓ}}$$

اب حرکت کی سمت بدل جاتی ہے اور ذرہ و کے دائیں جانب نقطہ جً پر ساکن ہوجاتا ہے جہاں وجً = وجَ − ۲ مٓ ل = وج − ۴ مٓ ل

بالآخر جب فوری سکون کے محلوں میں سے ایک محل کا فاصلہ و سے مٓ ل کے مساوی یا اس سے کم ہو تو ذرہ ساکن رہیگا ۔ کیونکہ اس نقطہ پر قوت جو مرکز کی طرف عمل کرتی ہے وہ انتہائی رگڑ سے کم ہے اور اس لیے صرف اسی قدر رگڑ معرضِ عمل میں آئیگی جو ذرہ کو سکون میں رکھنے کے لیے عین کافی ہے ۔

واضح رہے کہ مدتِ دوران $\frac{2\pi}{\text{مٓ}}$ پر رگڑ کا اثر نہیں پڑتا لیکن حرکت کا حیطہ اس کی وجہ سے بدل جاتا ہے ۔

۲۷ - ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے ایک نقطہ ل پر بحالتِ تعادل ساکن ہے اور اس پر دو جاذب قوتیں دو مرکزوں و اور وَ کی طرف عمل کرتی ہیں جو بالترتیب م مٓ (فاصلہ)ن اور م مٓ (فاصلہ)ن کے مساوی ہیں ۔ اگر ذرّہ کو ل سے ذرا سا ہٹا دیا جائے اور ن مثبت ہو تو ثابت کرو کہ یہ اہتزاز کرتا ہے، اس اہتزازی حرکت کا دَور معلوم کرو۔



فرض کرو کہ و وَ = ا ، ول = د اور ل وَ = دَ پس

$$\text{مہ}^{\text{ن}} \cdot \text{د}^{\text{ن}} = \text{مہَ}^{\text{ن}}\ \text{دَ}^{\text{ن}} \qquad \ldots\ldots (۱)$$

چونکہ ل پر تعادل ہے

$$\therefore \frac{\text{د}}{\text{مہَ}} = \frac{\text{دَ}}{\text{مہ}} = \frac{\text{ا}}{\text{مہ} + \text{مہَ}} \qquad \ldots\ldots (۲)$$

فرض کرو کہ ذرہ ل سے دَ کی طرف فاصلہ لا پر ہے۔
تب حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} = -\text{مہ}^{\text{ن}} \cdot \text{و ن}^{\text{ن}} + \text{مہَ}^{\text{ن}} (\text{ن وَ})^{\text{ن}}$$

$$= -\text{مہ}^{\text{ن}} (\text{د} + \text{لا})^{\text{ن}} + \text{مہَ}^{\text{ن}} (\text{دَ} - \text{لا})^{\text{ن}} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

اگر لا مثبت ہو، تو بائیں جانب کا جملہ منفی ہوگا۔ اگر لا منفی ہو تو یہ مثبت ہوگا۔ ہر دو صورتوں میں اسراع ل کی طرف ہوگا۔
مسئلہ ثنائی سے پھیلانے سے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} = -\text{مہ}^{\text{ن}} (\text{د}^{\text{ن}} + \text{ن د}^{\text{ن}-۱}\text{لا} + \ldots) + \text{مہَ}^{\text{ن}} (\text{دَ}^{\text{ن}} - \text{ن دَ}^{\text{ن}-۱}\text{لا} + \ldots)$$

$$= -\text{ن لا} \left[\text{مہ}^{\text{ن}}\ \text{د}^{\text{ن}-۱} + \text{مہَ}^{\text{ن}}\ \text{دَ}^{\text{ن}-۱}\right]$$

+ لا کی بڑی قوتوں والی رقمیں

$$= -\text{ن لا ا}^{\text{ن}-۱} \frac{(\text{مہ مہَ})^{\text{ن}-۱}}{(\text{مہ} + \text{مہَ})^{\text{ن}-۲}} + \ldots \quad (۲)\ \text{سے}$$

اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اِس کے مربعے اور بڑی قوتیں نظر انداز ہوسکیں تو اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} = -\text{ن} \frac{(\text{مہ مہَ ا})^{\text{ن}-۱}}{(\text{مہ} + \text{مہَ})^{\text{ن}-۲}}\ \text{لا} \qquad \ldots\ldots (۴)$$

پس حسب دفعہ ۲۲ اہتزاز کی مدت ہے

$$۲\pi \div \sqrt{\text{ن} \frac{(\text{ا مہ مہَ})^{\text{ن}-۱}}{(\text{مہ} + \text{مہَ})^{\text{ن}-۲}}} = ۲\pi \sqrt{\frac{(\text{مہ} + \text{مہَ})^{\text{ن}-۲}}{\text{ن} (\text{مہ مہَ ا})^{\text{ن}-۱}}}$$

اگر ن منفی ہو تو (۴) کا بائیں طرف کا رُکن مثبت ہوگا اور حرکت اہتزازی نہیں ہوگی ۔

دُوسرے باب پر مشقیں

۱ ۔ ایک ذرّہ ایک کشش کے مرکز کی طرف حرکت کرتا ہے اور حالتِ سکون سے مرکز سے فاصلہ ا سے روانہ ہوتا ہے ۔ اگر اُس وقت جب اِس کا فاصلہ مرکز سے لا ہو رفتار ایسے بدلے جیسے $\sqrt{\frac{ا^2 - لا^2}{لا^2}}$ تو قوت کا قانون معلوم کرو۔

۲ ۔ ایک ذرہ حالت سکون سے مقام ا سے روانہ ہوتا ہے اور قوت کے مرکز و کی طرف حرکت کرتا ہے ۔ اگر کسی محل ن پر پہنچنے کا وقت ایسے بدلے جیسے فاصلہ طے شدہ ا ن تو ثابت کرو کہ و کی طرف کشش ا ن کے مکعب کے متناسب بدلتی ہے ۔

۳ ۔ ثابت کرو کہ ایک ذرّہ کے لیے حالتِ سکون سے چل کر اس طرح حرکت کرنا ناممکن ہے کہ اس کی رفتار ایسے بدلے جیسے ابتدائے حرکت سے فاصلہ طے شدہ ۔

اگر رفتار ایسے بدلے جیسے $(\text{فاصلہ})^{ن}$ تو ثابت کرو کہ ن ، $\frac{1}{2}$ سے بڑا نہیں ہو سکتا ۔

۴ ۔ ایک ذرّہ خطِ مستقیم میں قوت $\left\{\frac{م}{(\text{فاصلہ})^2}\right\}$ کے مرکز کی طرف حرکت کرتا ہے اور قوت کے مرکز سے فاصلہ ا سے حالتِ سکون سے روانہ ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ مرکز سے فاصلہ ب پر پہنچنے کا وقت $\frac{ا\sqrt{ا^2 - ب^2}}{\sqrt{۲م}}$ ہے اور اِس وقت اُس کی رفتار $\sqrt{\frac{۲م}{ا ب}}\sqrt{ا^2 - ب^2}$ ہے ۔

۵ ۔ ایک ساکن ذرّہ ، ایک قوت کے مرکز کے تابع ، مرکز سے فاصلہ ا

سے نیچے گرتا ہے ۔ فاصلہ لا پر اسراع مہ $\text{لا}^{-\frac{۵}{۳}}$ ہے ۔ ثابت کرو کہ جب یہ مرکز پر پہنچتا ہے تو اس کی رفتار لاتناہی ہوتی ہے اور وقت $\frac{۲\text{ا}^{\frac{۴}{۳}}}{\sqrt{۳\text{مہ}}}$ لگتا ہے ۔

۶ ۔ ایک ذرّہ خطِ مستقیم میں اس پر کے ایک قوت کے مرکز کی طرف ایسی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو ∝ (فاصلہ)$^{-\frac{۴}{۳}}$ ثابت کرو کہ لاتناہی پر سے سکون سے گر کر فاصلہ ا تک آنے میں یہ جو رفتار حاصل کرتا ہے وہ مساوی ہے اُس رفتار کے جو فاصلہ ا سے فاصلہ $\frac{\text{ا}}{۸}$ تک گرنے میں حاصل کرتا ہے ۔

۷ ۔ ایک ذرّہ ہے جس کی کمیت م ہے ، اس پر مبدا کی طرف ایک قوت م مہ $\left(\text{لا} + \frac{\text{ا}^{۴}}{\text{لا}^{۳}}\right)$ عمل کرتی ہے ۔ اگر یہ مبدا سے فاصلہ ا سے روانہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ مبدا پر وقت $\frac{\pi}{۴\sqrt{\text{مہ}}}$ میں پہنچیگا ۔

۸ ۔ ایک خطِ مستقیم میں ایک ثابت نقطہ ہے اور اس کی طرف اسی خطِ مستقیم میں ایک ذرہ اسراع $\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^{۲}} - \frac{\text{لہ}}{\text{لا}^{۳}}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے جہاں لا کسی آن میں ذرّہ کا فاصلہ ہے مبدا سے ۔ یہ بحالتِ سکون فاصلہ ا سے روانہ ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ اس فاصلہ اور فاصلہ $\frac{\text{لہ ا}}{۲\text{مہ ا} - \text{لہ}}$ کے درمیان اہتزاز کرتا ہے ۔ اور اس کی دوری مدت $\frac{۲\pi\,\text{مہ}\,\text{ا}^{۳}}{(۲\text{ا مہ} - \text{لہ})^{\frac{۳}{۲}}}$ ہے ۔

۹ ۔ ایک ثابت نقطہ و ہے اور ایک نقطہ اس کی طرف اس طرح حرکت کرتا ہے کہ فاصلہ لا پر اسراع $\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^{۲}}$ ہوتا ہے ۔ اگر یہ و سے

فاصلہ و سے روانہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ و پر وقت

و $\sqrt{\frac{\pi}{2\,\text{مہ}}}$ میں پہنچیگا۔ [فرض کرو کہ $\int^{\infty}$ ب و$^{-\text{لا}^2}$ فرلا = $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$]

۱۰۔ ایک ذرّہ ایک ثابت مرکز کی طرف ایک ایسی قوت کے زیرِ عمل جو فاصلہ کی ن ویں قوت کے بالعکس متناسب ہے کھنچ رہا ہے ۔ اگر یہ ذرّہ لاتناہی سے اُس نقطہ تک گر کر جس کا فاصلہ مبدا سے و ہے وہی رفتار حاصل کرے جو فاصلہ و سے $\frac{\text{و}}{4}$ تک آنے میں کرتا ہے، تو ثابت کرو کہ ن = $\frac{3}{2}$

۱۱۔ ایک ذرہ قوت کے دو مرکزوں کے زیرِ عمل حالتِ تعادل میں ساکن ہے جو فاصلہ کے متناسب طور پر پر کشش کرتے ہیں اور اُن کی کشش اکائی کمیت پر اکائی فاصلہ پر مہ اور مہَ ہیں، ثابت کرو کہ اگر ذرّہ کو ایک مرکز کی طرف ذرا سا ہٹا دیا جائے تو چھوٹے اہتزاز کی مدت $\frac{2\pi}{\sqrt{\text{مہ}+\text{مہَ}}}$ ہوگی۔

۱۲۔ ۱۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک رسّی کے سرے سے آزادانہ لٹک رہا ہے اور اس وزن کو حالتِ سکون میں رسّی کو لپیٹنے سے انتصاباً اوپر اٹھایا گیا ہے ۔ اوپر کھینچنے کی قوت ۱۵۰ پونڈ وزن سے شروع ہوتی ہے اور اسی کے ایک فٹ لپیٹنے پر ایک پونڈ کے حساب سے مسلسل طور پر کم ہوتی جاتی ہے۔ رسّی کے وزن کو نظر انداز کرکے ثابت کرو کہ کمیت مذکور $\frac{5\pi\sqrt{2}}{8}$ سکنڈ میں فاصلہ ۵۰ فٹ طے کرتی ہے اور اِس کی رفتار تب $20\sqrt{2}$ فٹ فی سکنڈ ہے ۔

۱۳۔ ایک ذرّہ ایک خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے اور اس کا اسراع ہے مہ ÷ اُس خطِ مستقیم میں ایک ثابت نقطہ و سے اس کے فاصلہ کی ن ویں قوت ۔ اگر اسے و کی طرف ایسے نقطے سے جس کا فاصلہ و سے ا ہو اُس

رفتار کے ساتھ جو یہ لا تناہی سے گرنے سے حاصل کرتا ہے پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ یہ و پر وقت $\frac{۲}{ن+۱}\sqrt{\frac{ن-۱}{۲\text{مہ}}}\,\text{و}^{\frac{ن+۱}{۲}}$ میں پہنچیگا -

۱۴ - سوال ماقبل میں اگر ذرّہ سکون سے فاصلہ و سے روانہ ہوتا تو ثابت کرو کہ یہ و پر وقت

$$\sqrt{\frac{ن-۱}{۲\text{مہ}}}\,\pi\,\text{و}^{\frac{ن+۱}{۲}}\frac{\text{جا}\left(\frac{۱}{ن-۱}+\frac{۱}{۲}\right)}{\text{جا}\left(\frac{۱}{ن-۱}\right)} \quad \text{یا} \quad \sqrt{\frac{\pi}{۲\text{مہ}(۱-ن)}}\,\text{و}^{\frac{ن+۱}{۲}}\frac{\text{جا}\left(\frac{۱}{۱-ن}\right)}{\text{جا}\left(\frac{۱}{۱-ن}+\frac{۱}{۲}\right)}$$

میں پہنچیگا بالترتیب اگر ن $>$ یا $<$ ۱

۱۵ - ایک گولا جس کی کمیّت ۵۰ پونڈ ہے ایک توپ سے چلایا گیا ہے جس کا قطر ۴ انچ اور طول ۸ فٹ ہے - پوڈر کی گیس کا دباؤ گولے کے پیچھے کی گیس کے حجم کے بالعکس متناسب ہے اور ابتداءً ۱۰ ٹن وزن فی مربع انچ سے کم ہوتے ہوتے ایک ٹن وزن فی مربع انچ ہوجاتا ہے جس وقت گولا توپ سے نکلتا ہے - ثابت کرو کہ گولے کے خروج کی رفتار تقریباً ۸۱۵ فٹ فی سکنڈ ہے - معلوم ہے لوک$_{\text{و}}$ ۱۰ = ۲٬۳۰۲۶

۱۶ - اگر زمین اور چاند ساکن ہوتے تو ثابت کرو کہ کم سے کم رفتار جس کے ساتھ چاند کی سطح پر سے کسی ذرہ کو پھینک سکیں تاکہ یہ زمین کی سطح پر آسکے تقریباً $۱\frac{۱}{۲}$ میل فی سکنڈ ہوتی - فرض کرلیا جائے کہ اِن کے نصف قطر بالترتیب ۱۱۰۰ میل اور ۴۰۰۰ میل ہیں - اِن کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ۲۴۰۰۰۰ میل ہے اور چاند کی کمیّت زمین کی کمیّت کا $\frac{۱}{۸۱}$ ہے -

۱۷ - ایک چھوٹا منکا ایک چکنے تار ا ب پر پھسل سکتا ہے - اور اس پر ایک قوت جس کا مرکز و تار سے باہر ہے اور جو منکے پر فی اکائی کمیت $\frac{\text{مہ}}{(\text{منکا کا فاصلہ})^{۲}}$ کے مساوی ہے عمل کرتی ہے - ثابت کرو کہ

تعادل کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت $\frac{2\pi}{\sqrt{\text{م}}}\,\text{ب}^{\frac{3}{2}}$ ہے جہاں ب عمود ہے و سے اب پر۔

۱۸ - ایک وزنی کشش والا کرہ ہے جس کا نصف قطر و اور کمیت م ہے۔ اس کے مرکز میں سے آر پار ایک باریک سوراخ چھید اگیا ہے۔ ایک ذرہ سوراخ کی ممدودہ سمت پر سے مرکز سے فاصلہ ب سے روانہ ہوکر سوراخ میں داخل ہوتا ہے اور کرہ کی کشش کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے اور کرہ میں سے گذرتا ہوا مرکز کی دوسری طرف جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ پورے اہتزاز کی مدت

$$\frac{4}{\sqrt{2\,\text{ج}\,\text{م}}}\left[\sqrt{2}\,\text{و}^{\frac{3}{2}}\,\text{جب}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ب}}{3\text{ب}-2\text{و}}}+\text{ب}^{\frac{3}{2}}\,\text{جم}^{-1}\sqrt{\frac{\text{و}}{\text{ب}}}\right.$$

$$\left.+\sqrt{\text{و}\,\text{ب}\,(\text{ب}-\text{و})}\right]$$

جہاں ج تجاذب کا مستقل ہے۔

۱۹ - ایک مستدیر تار جس کا نصف قطر و اور کثافت ک ہے ایک ذرہ کو نیوٹن کے کلیہ کے مطابق یعنی قوت ج $\frac{\text{م}_1\,\text{م}_2}{(\text{فاصلہ})^2}$ سے کھینچتا ہے۔ اگر ذرہ کو تار کے محور پر مرکز سے فاصلہ ب پر رکھا جائے تو اس کی رفتار معلوم کرو جب کہ یہ مرکز سے کسی فاصلہ لا پر ہو۔ اگر اسے محور پر مرکز کے قریب رکھا جائے تو ثابت کرو کہ مکمل اہتزاز کی مدت $\text{و}\sqrt{\frac{2\pi}{\text{ج}\,\text{ک}}}$ ہوگی۔

۲۰ - اگر سوال ماقبل میں تار بجائے تجاذبی قوت کے اندفاعی قوت لگائے اور ذرہ کو تار کی سطح مستوی میں تار کے مرکز سے تھوڑے فاصلہ پر رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ایک اہتزاز کی مدت $2\,\text{و}\sqrt{\frac{\pi}{\text{ج}\,\text{ک}}}$ ہوگی۔ جہاں ک تار کی کثافت ہے۔

۲۱ ۔ ایک ذرہ ایک خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے ، اسراع خطِ مذکور پر کے ایک معلومہ نقطہ کی طرف عمل کرتا ہے اور اس نقطہ سے ذرّہ کے فاصلہ کے مہ گنا کے مساوی ہوتا ہے، نیز ذرّہ پر ایک اور مستقل اسراع ف ذرہ کی ابتدائی حرکت کی مخالف سمت میں عمل کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ذرہ کے اہتزاز کی مدت وہی ہوگی گویا کہ ف موجود نہیں ہے۔

۲۲ ۔ ایک ذرّہ ن خطِ مستقیم و ج ن میں حرکت کرتا ہے اور اس پر ایک قوت م مہ × ن ج ہمیشہ ج کی طرف عمل کرتی ہے اور ج خود و ج کی سمت میں مستقل اسراع ف کے ساتھ حرکت کرتا ہے ۔ اگر ابتداءً ج مبدا و پر ساکن ہو اور ن ، نقطہ و سے فاصلہ ج پر ہو اور رفتار س سے ساتھ حرکت کر رہا ہو تو ثابت کرو کہ کسی وقت ت کے بعد ن کا فاصلہ و سے یہ ہوگا

$$\left(\frac{ف}{مہ}+ج\right) جم\ \sqrt{مہ}\ ت + \frac{س}{\sqrt{مہ}} جب\ \sqrt{مہ}\ ت - \frac{ف}{مہ} + \frac{ف}{۲}\ ت^{۲}$$

۲۳ ۔ ایک لچکدار رسّی کا اوپر کا سرا ثابت ہے اور اس کے نچلے سرے کے ساتھ دو کمیتیں م اور مَ بندھی ہوئی بحالتِ سکون لٹک رہی ہیں۔ اگر مَ گر جائے تو ثابت کرو کہ وقت ت کے بعد م کا فاصلہ اوپر کے سرے سے $ا + ب + ج\ جم\left(\sqrt{\frac{ج}{ب}}\ ت\right)$ ہوگا جہاں ا کھنچاؤ سے پہلے رسّی کا طول ہے اور ب اور ج وہ فاصلے ہیں جن میں سے رسّی م اور مَ کے لٹکانے سے بالترتیب کھنچ جاتی ہے۔

۲۴ ۔ ایک نقطہ سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے ۔ اس نقطہ کو ایک مزید اسراع دیا جاتا ہے جو بہت چھوٹا ہے اور مبدا سے اس کے فاصلہ کے مکعب کے متناسب ہے ثابت کرو کہ ارتعاش کی سعت کا اضافہ ابتدائی سعت کے مکعب کے متناسب ہوگا اگر دونوں حرکتوں میں مبدا پر رفتار وہی ہو۔

۲۵ ۔ ایک ہلکی لچکدار رسّی کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ کے ساتھ

بندھا ہے اور دوسرے سرے کے ساتھ ایک وزندار ذرّہ بندھا ہے کھنچاؤ سے پہلے رسّی کا طول ل ہے اور اس کی لچک کا مقیاس ذرّہ کے وزن کا ن گنا ہے ۔ ذرہ کو اس قدر نیچے کھینچا گیا ہے کہ اس کا فاصلہ ثابت نقطہ سے ب ہو جاتا ہے ثابت کرو کہ ذرہ اس محل پر پھر

وقت $2\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ن ج}}}\left[\frac{\pi}{2} + \text{قم}^{-1}\text{ع} + \sqrt{\text{ع}^2 - 1}\right]$ کے بعد آئیگا جہاں

$\text{ع} = \frac{\text{ن ب}}{\text{ل}} - (\text{ن} + 1)$ بشرطیکہ $\text{ن} \ngtr \sqrt{1 + 4\text{ن}}$

اگر $\text{ع} > \sqrt{1 + 4\text{ن}}$ تو بتاؤ کہ متناظر مدت کس طرح معلوم کی جائیگی ۔

۲۶ ـ ایک رسّی کے حلقہ کو جس کی لچک کا مقیاس لہ اور طبعی طول 2π ج ہے دائرہ کی شکل میں ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر رکھا گیا ہے ۔ اس پر مرکز سے باہر کی طرف ایسی قوت عمل کرتی ہے جو رسّی کی ہر اکائی کمیت کے لیے فاصلہ کے مہ گُنا کے مساوی ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کا نصف قطر اوسط طول $\frac{2\pi\,\text{لہ ج}}{2\pi\,\text{لہ} - \text{م مہ ج}}$ کے گرد موسیقی طور پر بدلیگا جہاں م رسّی کی کمیّت ہے جب کہ یہ فرض کر لیا جائے کہ $2\pi\,\text{لہ} > \text{م مہ ج}$

اس صورت پر غور کرو جب کہ $2\pi\,\text{لہ} = \text{م مہ ج}$

۲۷ ـ کمیّت م اور لچک کے مقیاس لہ کی ایک رسّی، بغیر کھنچاؤ کے نصف قطر و کے ایک دائرہ کی شکل میں ساکن ہے ۔ اب اس پر ایک اندفاعی قوت جو اس کے مرکز پر واقع ہے اور جس کی مقدار رسّی کی ہر اکائی کمیت کے لیے $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^2}$ ہے عمل کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ جب دائرہ پھر ساکن ہوگا اُس کا نصف قطر ذیل کی مساوات درجہ دوم $\text{ر}^2 - \text{و ر} = \frac{\text{م مہ}}{2\pi\,\text{لہ}}$ کی ایک اصل ہوگی۔

۲۸ ۔ ایک چکنا ٹکڑا (بلاک) جس کی کمیت **م** ہے اور جس کے اوپر کے اور نیچے کے رُخ اُفقی مستوی سطحیں ہیں ایک متوازی سطح مستوی پر ایک نالی میں آزادانہ حرکت کر سکتا ہے ۔ اس کے اوپر کے رُخ پر کے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ کمیت م کا ایک ذرہ ایک لچکدار رسّی کے ذریعہ جس کا قدرتی طول ل اور جس کی لچک کا مقیاس ق ہے بندھا ہے ۔ اگر یہ نظام اُس وقت جب کہ ذرہ اس کی اوپر کی سطح پر ہو اور رسّی کھینچ کر نالی کے متوازی اپنے قدرتی طول کا (ن + ۱) گنا ہو گئی ہو حالتِ سکون سے حرکت کرنا شروع کرے تو ثابت کرو کہ بلاک سعت $\dfrac{\text{(ن + ۱) ل م}}{\text{م + م}}$ کے اہتزاز کرنا شروع کریگا جن کی دَوری مدت $\text{۲}\left(\pi + \dfrac{\text{۲}}{\text{ن}}\right)\sqrt{\dfrac{\text{ل م م}}{\text{ق (م + م)}}}$ ہوگی۔

۲۹ ۔ ایک ذرہ ایک کھردری سطح مائل کے ایک نقطہ کے ساتھ جو اُفق کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے بندھا ہے ۔ ابتدائً رسّی کھچی ہوئی نہیں ہے اور میلانِ اعظم کے خط پر پڑی ہے ۔ ثابت کرو کہ ذرّہ صرف اُسی صورت میں اہتزاز کریگا جب کہ رگڑ کی قدر $<$ $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ مس ع

۳۰ ۔ م پونڈ کی ایک کمیت ابتدائً رفتار د فٹ فی سکنڈ سے حرکت کر رہی ہے ۔ ھ اسپی طاقت کی ایک مستقل طاقت اس کی رفتار کو بڑھانے کے لیے لگائی گئی ہے ۔ ثابت کرو کہ اسراع اپنی ابتدائی قیمت کا $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ وقت $\dfrac{\text{م (ن}^{\text{۲}}\text{ − ۱) د}^{\text{۲}}}{\text{۱۱۰۰ ج ھ}}$ میں ہو جاتا ہے۔

۳۱ ۔ ثابت کرو کہ صاف سوراخ والی ایک بندوق سے م کمیت والی گولی کو جو بڑی سے بڑی رفتار دی جا سکتی ہے وہ $\sqrt{\dfrac{\text{۲}\pi\text{ ح}}{\text{م}}\left\{\text{م لوک م + ۱ − م}\right\}}$ ہے جہاں تپش کی تبدیلیوں کو نظر انداز کیا گیا ہے اور گولی کے سامنے ہوا کے دباؤ π کو مستقل فرض کیا گیا ہے اور کارتوس کا پوڈر آگ لگنے کے بعد دفعۃً

م π دباؤ پر ح حجم والی گیس میں تبدیل ہو جاتا ہے۔

۳۲ ۔ دو کمیتوں م_1 اور م_2 کو ایک کمانی کے ذریعہ ملایا گیا ہے جس کی طاقت ایسی ہے کہ اگر م_1 کو ثابت رکھا جائے تو م_2 فی سکنڈ ن مکمل اہتزاز کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر م_2 کو ثابت رکھا جائے تو م_1 $\text{ن}\sqrt{\frac{\text{م}_2}{\text{م}_1}}$ اہتزاز کریگا اگر دونوں آزاد ہوں تو وہ فی سکنڈ $\text{ن}\sqrt{\frac{\text{م}_1+\text{م}_2}{\text{م}_1}}$ اہتزاز کرینگے جہاں اہتزاز ہر صورت میں کمانی کے طول کی سمت میں ہیں۔

۳۳ ۔ ایک جسم ایک ناقابلِ کھنچاؤ رسّی کے ایک سرے کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا سرا انتصابی سمت میں سادہ موسیقی حرکت کرتا ہے جس کی سعت ا ہے۔ نیز فی سکنڈ مکمل اہتزازوں کی تعداد ن ہے۔ ثابت کرو کہ دورانِ حرکت میں رسّی تنی ہوئی نہیں رہیگی جب تک کہ ن^2 چھوٹا نہ ہو $\frac{\text{ج}}{۴\pi^2\,\text{ا}}$ سے۔

۳۴ ۔ ایک ہلکی کمانی کو ایک معلومہ قوت کے عمل سے دبا کر رکھا گیا ہے۔ بعد ازاں قوت دفعتہً مخالف سمت میں عمل کرنے لگتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے بعد کمانی کا بڑے سے بڑا کھنچاؤ ابتدائی سکڑاؤ کا تین گنا ہوگا۔

۳۵ ۔ دو کمیتوں م اور م کو ایک ہلکی کمانی کے ذریعہ ملایا گیا ہے اور یہ ایک انتصابی خط میں گرتے ہیں اور کمانی کھچنے نہیں پاتی۔ اب م ایک بے لچک میز کے ساتھ متصادم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وہ بلندی جس میں سے م گرتا ہے $\frac{\text{م}+۲\text{م}}{۲\text{م}}$ ل سے زیادہ ہو تو کچھ مدت کے بعد کمیت م میز سے اُٹھ آئیگی جہاں ل وہ طول ہے جس میں سے کمانی مذکور م کے وزن سے کھنچ جاتی ہے۔

۳۶ ۔ دو یکساں کُرے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب $ل_1$ اور $ل_2$ ہیں اور جن کی کمیتیں بالترتیب $م_1$ اور $م_2$ ہیں ۔ ان کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اِن کے مرکزوں کا فاصلہ $ل$ ہے اُن کی باہمی کششیں اُن پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ وقت

$$\sqrt{\frac{2\pi\, ک\, ر}{3\, ج\,(م_1+م_2)}}\left[ل\, جم^{-1}\sqrt{\frac{ل_1+ل_2}{ل}}+\sqrt{(ل_1+ل_2)(ل-ل_1-ل_2)}\right]$$

کے بعد ایک دوسرے کو مل جائینگے ۔ جہاں $ر$ زمین کا نصف قطر ہے اور $ک$ زمین کی اوسط کثافت ۔

اگر $م_1 = م_2 =$ ۴ پونڈ ، $ل_1 = ل_2 =$ ۰٫۵ انچ اور $ل =$ ۱ فٹ تو ثابت کرو کہ وقت $=$ ۳ گھنٹے تقریباً جب کہ $ر =$ ۴۰۰۰ میل اور $ک =$ ۳۵۰ پونڈ فی مکعب فٹ ۔

[جب کُروں کا درمیانی فاصلہ $لا$ ہو تو $م_2$ کی کشش کی وجہ سے $م_1$ کا اسراع $ج\frac{م_2}{لا^2}$ ہوتا ہے اور $م_2$ کا اسراع $م_1$ کی وجہ سے $ج\frac{م_1}{لا^2}$ ہوتا ہے ۔ پس $م_2$ کا اسراع $م_1$ کے لحاظ سے $ج\frac{م_1+م_2}{لا^2}$ ہے اور اضافی حرکت کی مساوات ہے $\ddot{لا} = -ج\frac{م_1+م_2}{لا^2}$]

۳۷ ۔ یہ فرض کرکے کہ چاند کی کمیت زمین کی کمیت کا $\frac{1}{81}$ ہے اور اُن کے نصف قطر بالترتیب ۱۱۰۰ میل اور ۴۰۰۰ میل ہیں اور اُن کے مرکزوں کا فاصلہ ۲۴۰۰۰۰ میل ہے ، ثابت کرو کہ اگر وہ دفعۃً ساکن ہوجائیں اور اپنی باہمی کششوں کے زیرِ عمل ایک دوسرے کی طرف آئیں تو وہ تقریباً $4\frac{1}{2}$ روز میں آ ملینگے ۔

۳۸ ۔ ایک ذرّہ نصف قطر $ل$ کے ایک پتلے کشش کرنے والے اسطوانے (جس کا طول لا انتہا ہے) کے ایک سرے پر رکھ دیا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اس کی توانائی بالحرکت جب کہ یہ فاصلہ لا طے کرے ایسے بدلتی ہے جیسے لوک $\left\{ \frac{لا + \sqrt{لا^2 + ل^2}}{ل} \right\}$ ۔

۳۹ - ایک یکساں رسّی ا ب کی کمیت م اور طول ۲ و ہے۔ اس کا ہرایک جزو ایک ایسی قوتِ دافعہ م × فاصلہ کے زیرِ عمل ہے جو ایک نقطہ و سے ا ب ممدودہ کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ رسّی کا اسراع وہی ہے جو اُس ذرہ کا ہوگا جو اس کے وسطی نقطہ پر رکھ دیا جائے اور رسّی کے کسی نقطہ ن پر کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے ا ن × ن ب

۴۰ - ایک منحنی ایسا ہے کہ ایک ذرّہ اس کے ہر ایک مماس پر اس کے اُفقی محور تک پھسلنے کے لیے ایک ہی وقت لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی خط تدویر ہے جس کا محور انتصابی ہے۔

۴۱ - دو ذرّوں کو جن کی کمیتیں م اور مَ ہیں ایک لچکدار رسّی کے ذریعہ جس کی لچک کی قدر ل ہے ملایا گیا ہے۔ اُن کو ایک چکنے میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اُن کے درمیان فاصلہ ل ہے جو رسّی کے طبعی طول کے مساوی ہے۔ ذرّہ م کو رسّی کے ممدودہ طول کی سمت میں رفتار ر سے پھینکا گیا ہے۔ ہر ایک ذرہ کی حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ حرکت مابعد میں رسّی کا بڑے سے بڑا طول ل + ر ع ہوگا اور رسّی پھر اپنے قدرتی طول پر وقت π ع کے بعد آئیگی جہاں

$$ع^2 = \frac{م مَ}{م + مَ} \times \frac{ل}{ل}$$

۴۲ - دو ذرّے جن میں سے ہر ایک کی کمیت م ہے ایک ناقابلِ کھنچاؤ رسّی کے سروں کے ساتھ بندھے ہیں اور رسّی ایک چکنی چرخی پر لٹک رہی ہے۔ اِن میں سے ایک ذرّہ ا کے ساتھ ۲ م کمیت کا ایک ذرّہ ایک لچکدار رسّی کے ذریعہ جس کا قدرتی طول ل ہے اور

لچک کا مقیاس ۲م ج ہے باندھ دیا گیا ہے ۔ اگر نظام کو اس طرح ساکن رکھا جائے کہ لچکدار رسّی اپنے قدرتی طول پر ہو اور پھر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ ا اسراع ج جب^{۲} $\left[\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{۲ا}}}\ \text{ت}\right]$ کے ساتھ نیچے اترے گا ۔

۴۳ ۔ ایک بے وزن لچکدار رسّی کا قدرتی طول ل اور لچک کا مقیاس لہ ہے ۔ اس کے سروں کے ساتھ مساوی کمیّت م کے دو ذرے بندھے ہیں ۔ رسّی ایک چکنے میز پر اس طرح پڑی ہے کہ اس کا طول ایک کنارہ پر عمود دار ہے اور ایک ذرہ عین لٹک رہا ہے ۔ ثابت کرو کہ دوسرا ذرہ بھی وقت ت کے اختتام پر کنارہ پر سے گذر جائیگا جہاں ت مساوات ذیل سے حاصل ہوگا ۔

$$\text{۲ل} + \frac{\text{م ج ل}}{\text{لہ}}\ \text{جب}^{۲}\ \sqrt{\frac{\text{لہ}}{\text{۲م ل}}}\ \text{ت} = \frac{۱}{۲}\text{ج ت}^{۲}$$

تیسرا باب

یک مستوی حرکت جب کہ ثابت محوروں کے متوازی اسراع معلوم ہوں

۳۸ ۔ فرض کرو کہ وقت ت پر ذرہ کے محدد بلحاظ محوروں و لا، و ما کے لا اور ما ہیں اور اُس وقت اس کے اسراع محوروں کے متوازی لا اور ما ہیں۔
تب حرکت کی مساواتیں ہیں :۔

$$\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرت}^2} = \text{ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ان میں سے ہر مساوات کو دو دفعہ تکمل کرنے سے ہمیں چار مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ جن میں یہ چار اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔ یہ چار اختیاری مستقل ابتدائی شرائط سے یعنی لا، ما، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ کی ابتدائی قیمتوں سے متعین ہوتے ہیں۔

آخر کی دو محصلہ مساواتوں سے ہم ت کو ساقط کر دیتے ہیں اور اس طرح ہمیں لا، ما میں ایک ربط ملتا ہے جو راستہ کی مساوات ہے۔

۳۹ - مکافی حرکت جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل جب کہ جاذبہ کو مستقل فرض کیا جائے اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کیا جائے۔

فرض کرو کہ ما کے محور کو انتصاباً اوپر کی طرف کھینچا گیا ہے اور لا کے محور کو افقاً۔ تب اُفقی اسراع صفر ہے اور انتصابی اسراع - ج پس حرکت کی مساواتیں ہیں :-

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = -\text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

بلحاظ ت کے تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ا} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = -\text{ج ت} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

دوسری مرتبہ تکمل کرنے سے

$$\text{لا} = \text{ا ت} + \text{ب} \quad \text{اور ما} = -\text{ج}\frac{\text{ت}^2}{۲} + \text{ج ت} + \text{د} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اگر ذرّہ کو مبدا سے اُفق کے ساتھ زاویہ عہ پر ابتدائی رفتار ء کے ساتھ پھینکا جائے تو جب ت = ۰ تو لا = ۰، ما = ۰، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ = ء جم عہ،

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{ء جب عہ}$$

اس لیے (۲) اور (۳) سے ابتداءً ء جم عہ = ا اور ء جب عہ = ج اور ۰ = ب اور ۰ = د

∴ (۳) سے حاصل ہوتا ہے لا = ء جم عہ ت اور

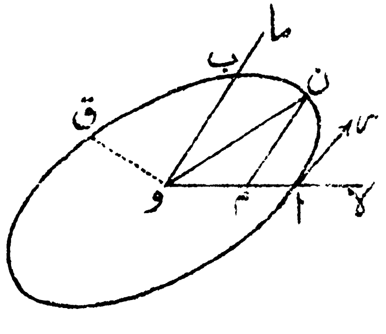
$$ما = د \text{ جب } ع \text{ ت} - \tfrac{1}{2} \text{ ج ت}^2$$

ت کو ساقط کرنے سے

$$ما = لا \text{ مس } ع - \frac{ج}{2} \cdot \frac{لا^2}{د^2 \text{ جم}^2 ع}$$

جو مکافی کی مساوات ہے۔

۴۰۔ ایک ذرہ ایسے اسراع کے زیرِ عمل جو ہمیشہ ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتا ہے اور ایسے بدلتا ہے جیسے ذرہ کا فاصلہ مرکز سے ایک راستہ مرتسم کرتا ہے۔ راستہ کی مساوات معلوم کرو۔



فرض کرو کہ اسراع کا مرکز و ہے اور ا نقطہ تطلیل ہے۔ و ا کو لا کا محور لو اور و ما کو ذرہ کی ابتدائی رفتار س کے متوازی کھینچو۔

فرض کرو کہ راستہ پر کوئی نقطہ ن ہے اور ن م' اور ن کا معین ہے۔

اسراع مہ × ن و جو ن و کی سمت میں عمل کرتا ہے قوتوں کے مثلث کے اصول سے مساوی ہے دو اسراعوں کے مہ . م و' م و کے ساتھ اور مہ . ن م' ن م کے ساتھ

پس حرکت کی مساواتیں ہیں:-

$$\frac{\text{فر}^2 لا}{\text{فر ت}^2} = - \text{ مہ لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\text{فر}^2 ما}{\text{فر ت}^2} = - \text{ مہ ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

دفعہ ۲۲ کے مطابق ان مساواتوں کے حل ہیں

$$\text{لا} = \text{ا} \ \text{جم} \left[\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} + \text{ب} \right] \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور

$$\text{ما} = \text{ج} \ \text{جم} \left[\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} + \text{د} \right] \quad \ldots\ldots (۴)$$

ابتدائی شرائط یہ ہیں جب کہ ت = ۰ تو

$$\text{لا} = \text{و ا} = \text{ا}،\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۰،\ \text{ما} = ۰،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{س}$$

اس لیے (۳) سے ا = ا جم ب اور ۰ = − ا جب ب

ان سے حاصل ہوتا ہے ب = ۰ اور ا = ا

اسی طرح (۴) سے ۰ = ج جم د اور س = − ج $\sqrt{\text{مہ}}$ جب د

$$\therefore \text{د} = \frac{\pi}{۲} \ \text{اور} \ \text{ج} = -\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{مہ}}}$$

$\therefore$ (۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے لا = ا جم ($\sqrt{\text{مہ}}$ ت) ......(۵)

اور

$$\text{ما} = -\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{مہ}}} \text{جم} \left[\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} + \frac{\pi}{۲} \right] = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{مہ}}} \text{جب} \left(\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} \right) \quad \ldots\ldots (۶)$$

$$\therefore \frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\frac{\text{س}^۲}{\text{مہ}}} = ۱$$

پس ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کے و لا اور و ما مزدوج محور ہیں۔

نیز اگر قطع ناقص، و ما سے ب پر ملے تو و ب = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{مہ}}}$

یعنی س = $\sqrt{\text{مہ}}$ × و ا کا مزدوج نصف قطر۔ چونکہ راستہ پر کے

ہر نقطہ سے ذرہ پھینکا جا سکتا ہے اس لیے یہ نتیجہ ہمیشہ درست رہیگا یعنی کسی نقطہ پر رفتار

= √مہ × نصف مزدوج قطر

[اسے براہِ راست (۵) اور (۶) سے بھی حاصل کر سکتے تھے کیونکہ

(ن پر کی رفتار)^۲ = لاَ^۲ + ماَ^۲ + ۲ لاَ ماَ جم سہ

= و^۲ مہ جب^۲ (√مہ ت) + ہ^۲ جم^۲ (√مہ ت) - ۲ و ہ √مہ جب (√مہ ت) جم (√مہ ت) جم سہ

= مہ [و^۲ + ہ^۲/مہ - و^۲ جم^۲ (√مہ ت) - ہ^۲/مہ جب^۲ √مہ ت - ۲ و ہ/√مہ جب (√مہ ت) جم (√مہ ت) جم سہ]

= مہ [و^۲ + ہ^۲/مہ - لا^۲ - ما^۲ - ۲ لا ما جم سہ] = مہ (و^۲ + ہ^۲/مہ - و ن^۲)

= مہ × و ن کے مزدوج نصف قطر کا مربع]

مساواتوں (۵) اور (۶) سے ظاہر ہے کہ وقت ت + ۲π/√مہ پر لا، ما کی قیمتیں وہی ہوتی ہیں جو ت پر ہوں۔

پس ناقص کو مرتسم کرنے کا وقت ۲π/√مہ ہے۔

۴۱ - اگر ایک ذرہ دو علی القوائم سمتوں میں ایک ساتھ دو موسیقی حرکتیں رکھتا ہو جن کا دَور وہی ہو تو یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ ذرہ کا راستہ قطع ناقص ہوگا۔

اگر ہم وقت کو اُس آن سے ناپیں جب کہ لا اہتزاز بڑے سے بڑا ہو تو

لا = ا جم ن ت ....(۱)

اور ما = ب جم (ن ت + د) ....(۲)

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

(۲) سے $\frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \text{جم ن ت جم د} - \text{جب ن ت جب د} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\text{جم د} - \text{جب د}\sqrt{۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲}}$

$$\therefore \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}} - \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\text{جم د}\right)^۲ = \text{جب}^۲\text{د}\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲}\right)$$

یعنی $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} - \frac{۲\,\text{لا ما}}{\text{ا ب}}\text{جم د} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = \text{جب}^۲\text{د}$ ....(۳)

اس سے ہمیشہ ایک ناقص تعبیر ہوتا ہے جس کے صدر محور بالعموم حوالہ کے محوروں پر منطبق نہیں ہوتے لیکن جو ہمیشہ مستطیل $\text{لا} = \pm \text{ا}$، $\text{ما} = \pm \text{ب}$ کے اندر بنتا ہے۔

ذیل میں جو شکل کھینچی گئی ہے اس میں اس ناقص کی شکل دکھائی گئی ہے جس کے لیے د تقریباً $\frac{\pi}{۳}$ ہے۔

اگر $\text{د} = ۰$ تو مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۰$

یعنی خطِ مستقیم ا ج،

اگر $\text{د} = \pi$ تو (۳) سے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۰$ یعنی خطِ مستقیم ب د

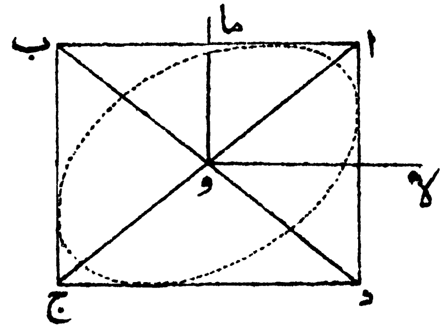
خاص صورت میں جب کہ $\text{د} = \frac{\pi}{۲}$ یعنی جب، ما اہتزاز کی ہیئت، صفر وقت پر دَوری مدت کا ایک چوتھائی ہو تو (۳) ہوجاتی ہے۔

$$\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱$$

یعنی راستہ ایک ناقص ہوتا ہے جس کے صدر محور حوالہ کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں اور ان سمتوں میں ترکیبی اہتزازوں کی سمتوں کے

مساوی ہوتے ہیں ۔

اگر مزید برآں ا = ب یعنی اگر ترکیبی اہتزازوں کی سعتیں ایک ہی ہوں تو راستہ دائرہ بن جاتا ہے ۔



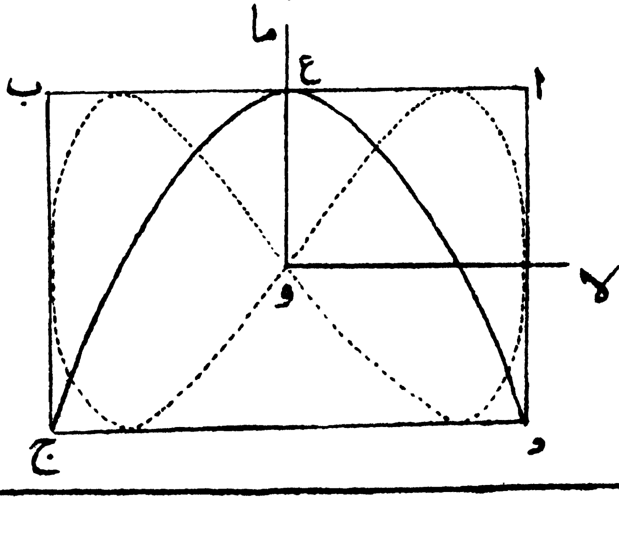
۴۴ ۔ اگر ما اہتزاز کی دَوری مدت لا اہتزاز کی دَوری مدت کا نصف ہو تو مساواتیں ہونگی

لا = ا جم ن ت ، ما = ب جم (۲ ن ت + د)

اس لیے ت کو ساقط کرنے سے راستہ کی مساوات ملتی ہے :

$$\frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \text{جم د}\left[\frac{\text{۲لا}^2}{\text{ا}^2} - \text{۱}\right] - \text{جب د}\ \frac{\text{۲لا}}{\text{ا}}\sqrt{\text{۱} - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}$$

منطق بنانے سے یہ مساوات چوتھے درجہ کی بن جاتی ہے ۔



نقطہ دار منحنی راستہ کو تعبیر کرتا ہے جب کہ د = $-\frac{\pi}{۲}$ یعنی جب کہ وقت ت = ۰ پر ما اہتزاز کی ہئیت منفی ہے اور ما اہتزاز کے دور کے ایک چوتھائی کے مساوی ہے۔

جب، د = π یعنی جب ما اہتزاز کی ہئیت، صفر وقت پر، ما دور کے نصف کے مساوی ہو تو راستہ ہو جاتا ہے

$$لا^{۲} = -\frac{و^{۲}}{۲ب}(ما - ب)$$

یعنی مکافی ج ع د

جب، د = ۰ تو بھی راستہ مکافی

$$لا^{۲} = \frac{و^{۲}}{۲ب}(ما + ب)$$

ہوگا

د کی کسی اور قیمت کے لیے راستہ زیادہ پیچیدہ ہوتا ہے۔

اس قسم کے منحنیوں کو جن کا اوپر ذکر ہوا اور جو دو مختلف سمتوں میں سادہ موسیقی حرکتوں کو ترکیب دینے سے حاصل ہوتے ہیں لیسا جوس کی شکلیں (Lissajou s'figures) کہتے ہیں۔

جو طالب علم دوروں کی مختلف نسبتوں اور صفر وقت پر ہئیتوں کی مختلف قیمتوں کے لیے مزید مثالیں دیکھنا چاہے اُسے چاہیے کہ طبیعیات کی کسی مستند کتاب کا مطالعہ کرے۔

یہ منحنی خود بخود ایک رقاص کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ یا انھیں ہندسی طور پر مرتسم کیا جا سکتا ہے۔

۴۴۔ مشق ۱۔ ایک نقطہ ایک سطح مستوی میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا ظل محور لا پر ایک سکنڈ کی دوری مدت اور ایک فٹ کے اہتزاز والی موسیقی حرکت رکھتا ہے اور محور ما پر اس کا ظل دو سکنڈ کے دور اور ایک فٹ کے اہتزاز والی موسیقی حرکت رکھتا ہے۔ یہ معلوم ہے کہ

اہتزازوں کا مرکز مبدا ہے اور نقطہ (۱، ۰) راستہ پر ہے راستہ کی مساوات معلوم کرو اور اِسے مرتسم کرو۔

مشق ۲ ۔ ایک نقطہ دو علی القوائم سمتوں میں دو موسیقی حرکتوں کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے، ترکیبی حرکتوں کے دَوروں کی نسبت ۲ : ۳ ہے ۔ راستے معلوم کرو جب کہ (۱) ایک ہی آن میں دونوں اہتزازوں کی ہیئتیں صفر ہوں، (۲) اگر بڑی دَوری مدت والے اہتزاز کی ہیئت اس کے دَور کی ایک چوتھائی ہو جب کہ دوسرا اہتزاز صفر ہیئت رکھتا ہو ۔ راستے مرتسم کرو اور اُن کی مساواتیں معلوم کرو۔

۴۴ ۔ اگر دفعہ ۴۰ میں اسراع ایک ثابت نقطہ سے باہر کی طرف عمل کرے اور مقداراً اس نقطہ سے ذرہ کے فاصلہ کے متناسب ہو تو حسب سابق

$$\text{لا} = \text{و جمز ہامہ ت}، \qquad \text{ما} = \frac{\text{و}}{\text{ہامہ}}\,\text{جبز ہامہ ت}$$

$$\therefore \frac{\text{لا}^{2}}{\text{و}^{2}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\frac{\text{و}^{2}}{\text{مہ}}} = 1 \quad \text{یعنی راستہ قطع زائد ہے ۔}$$

۴۵ ۔ ایک ذرہ، ایک زنجیرہ (catenary) ایسی قوت کے زیرِ عمل مرتسم کرتا ہے جو اُس کے محور کے متوازی عمل کرتی ہے ۔ قوت کا قانون، اور اس کے راستہ کے کسی نقطہ پر رفتار معلوم کرو۔

زنجیرہ کے مرتب اور محور کو لا اور ما کے محاور لو، تب زنجیرہ کی مساوات ہوگی ۔

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\right) \quad \text{............} \quad (1)$$

چونکہ مرتب کے متوازی اسراع صفر ہے

$$\therefore \frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{۰}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{مستقل} = \text{ی} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(۲)}$$

(۱) کو دو دفعہ تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\right) \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\right)\text{ی} \quad \ldots \text{(۳)}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ج}}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\right)\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \times \text{ی} = \frac{\text{ی}^{2}}{\text{ج}^{2}}\,\text{ما}$$

$$\text{نیز}\ (\text{رفتار})^{2} = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \text{ی}^{2} + \frac{\text{ی}^{2}}{\text{۴}}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\right)^{2}$$

$$= \frac{\text{ی}^{2}}{\text{۴}}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\right)^{2} = \frac{\text{ی}^{2}}{\text{ج}^{2}}\,\text{ما}^{2}$$

$$\text{پس رفتار} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}}\,\text{ما}$$

پس کسی نقطہ پر رفتار اور اسراع دونوں مرتب سے اس کے فاصلہ کے متناسب ہوتے ہیں۔

۴۶ ۔ ایک ذرہ ایک سطح مستوی میں ایسے اسراع کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو ہمیشہ ایک ثابت خط کی طرف اور اس پر علی القوائم سمت میں عمل کرتا ہے اور ایسے بدلتا ہے جیسے خطِ مذکور سے ذرہ کے فاصلہ کا مکعبِ معکوس۔ ذرہ کے پھینکے جانے کے حالات معلوم ہیں۔ راستہ معلوم کرو۔

ثابت خط کو لا کا محور مانو، تب حرکت کی مساواتیں حسبِ ذیل ہونگی۔

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(۱)}$$

اور
$$\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ا}^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) سے
$$\text{لا} = \text{ا ت} + \text{ب} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

(۲) کو $\left(\frac{۲\,\text{فرا}}{\text{فرت}}\right)$ سے ضرب دے کر تکمل کرنے سے

$$\left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\right)^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{ا}^2} + \text{ج}$$

$$\therefore \text{ت} = \int \frac{\text{ا فرا}}{\sqrt{\text{مہ} + \text{ج ا}^2}} = \frac{1}{\text{ج}}\sqrt{\text{مہ} + \text{ج ا}^2} + \text{د} \quad \ldots\ldots (۴)$$

فرض کرو کہ ذرہ محور ما پر کے اُس نقطہ سے پھینکا گیا ہے جس کا فاصلہ مبدا ء سے ب ہے اور ابتدائی رفتاروں کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی ء اور و ہیں -

تب، جب ت = ۰ تو

$$\text{لا} = ۰،\ \text{ا} = \text{ب}،\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ء} \text{ اور } \frac{\text{فرا}}{\text{فرت}} = \text{و}$$

$$\therefore \text{ا} = \text{ء}،\ \text{ب} = ۰،\ \text{ج} = \text{و}^2 - \frac{\text{مہ}}{\text{ب}^2} \text{ اور } \text{د} = -\frac{\text{ب}^3\,\text{و}}{\text{ب}^2\text{و}^2 - \text{مہ}}$$

∴ (۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ء ت} \text{ اور } \left(\text{ت} + \frac{\text{ب}^3\,\text{و}}{\text{ب}^2\text{و}^2 - \text{مہ}}\right)^2 = \frac{\text{مہ ب}^4}{(\text{ب}^2\text{و}^2 - \text{مہ})^2} + \frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ب}^2\text{و}^2 - \text{مہ}}$$

ت کو ساقط کر دینے سے ہمیں راستہ کی مساوات ملتی ہے

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ء}} - \frac{\text{ب}^3\,\text{و}}{\text{مہ} - \text{ب}^2\text{و}^2}\right)^2 + \frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{مہ} - \text{ب}^2\text{و}^2} = \frac{\text{مہ ب}^4}{(\text{مہ} - \text{ب}^2\text{و}^2)^2}$$

یہ ایک ناقص یا قطع زائد ہے اگر مہ $\lesseqgtr$ ب۲ و۲

اگر مہ = ب۲ و۲ تو ج = ۰ اور مساوات (۴) ہوجاتی ہے:-

$$ت = \int \frac{ما\ فرما}{ا\ مہ} = \frac{ما^{۲}}{۲\ ا\ مہ} + د = \frac{ما^{۲} - ب^{۲}}{۲\ ا\ مہ}$$

پس اس صورت میں راستہ ہوگا ما۲ - ب۲ = ۲ ا مہ $\frac{لا}{ب}$ یعنی مکافی ہوگا۔

پس راستہ ناقص، مکافی، قطع زائد ہوگا اگر بالترتیب و $\lesseqgtr$ $\sqrt{\frac{۲ مہ}{ب}}$ یعنی اگر معلومہ خطِ مستقیم پر ابتدائی علی القوائم رفتار کم ہو، مساوی ہو یا بڑی ہو اُس رفتار سے جو لاتناہی سے گر کر اس اسراع کے ساتھ نقطۂ مذکور تک آنے میں ذرہ مذکور حاصل کرتا ہے کیونکہ موخر الذکر رفتار کا مربع

$$= - \int_{\infty}^{ب} ۲ \frac{مہ}{ما^{۲}} فرما = \left[\frac{۲ مہ}{ما}\right]_{\infty}^{ب} = \frac{۲ مہ}{ب}$$

نتیجۂ صریح۔ اگر ذرہ ناقص مرتسم کرے اور محور لا سے ملے تو یہ پھر باقی ماندہ ناقص مرتسم نہیں کریگا کیونکہ محور لا کے متوازی رفتار ہمیشہ مستقل رہتی ہے اور ایک ہی سمت میں ہوتی ہے اس لیے ایک اور ناقص کا حصہ مرتسم کرتا ہے۔

۷۴۔ ایک خطِ مستقیم فضا میں ثابت ہے اور اس کے متوازی کسی خاص آن میں ذروں م۱، م۲، ... کی رفتاریں اور اسراع بالترتیب و۱، و۲، ... اور ف۱، ف۲، ... ہیں۔ اِن کے مرکزِ کمیت کی رفتار اور اسراع اسی آن میں معلوم کرو۔

اگر کسی آن میں ایک ثابت نقطہ سے ذروں کے فاصلے ثابت خط کے متوازی لا۱، لا۲، ... ہوں تو

$$\bar{لا} = \frac{م_1 لا_1 + م_2 لا_2 + \cdots}{م_1 + م_2 + \cdots}$$

بلحاظ ت کے اس کو تفرق کرنے سے

$$\bar{و} = \frac{فر\bar{لا}}{فرت} = \frac{م_1 و_1 + م_2 و_2 + \cdots}{م_1 + م_2 + \cdots} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\bar{ف} = \frac{فر^2\bar{لا}}{فرت^2} = \frac{م_1 ف_1 + م_2 ف_2 + \cdots}{م_1 + م_2 + \cdots} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

جہاں $\bar{و}$ اور $\bar{ف}$ مطلوبہ رفتار اور اسراع ہیں۔

نظام کے کسی دو ذروں $م_1$ اور $م_2$ اور اُن کے درمیانی تعاملوں پر غور کرو۔ یہ تعامل نیوٹن کے تیسرے کلیہ کی رُو سے مساوی اور مختلف ہیں، اس لیے اِن کے دھکے جب اِن کو ایک ہی سمت میں تحلیل کیا جائے مساوی اور مختلف ہیں۔ پس ذروں کے معیارِ حرکت کی تبدیلیاں بموجب دفعہ ۵۱ مساوی اور مختلف ہیں یعنی اُن کے جو معیارِ حرکت کسی سمت میں ہیں۔ اُن کے مجموعہ میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ یہی کیفیت نظام کے باقی ذرّات میں سے ہر ایک زوج کی ہے۔

پس نظام کے معیارِ حرکتوں کا مجموعہ کسی خط کے متوازی اور اس لیے (۱) کی رُو سے کمیّت کے مرکز کا معیارِ اثر نظام کے باہمی تعاملوں کی وجہ سے نہیں بدلتا۔

اگر $ق_1$، $ق_2$، .... بیرونی قوتیں ہوں جو ذرّوں $م_1$، $م_2$، .... پر ایک ثابت خط کے متوازی عمل کریں تو

$م_1 ف_1 + م_2 ف_2 + \ldots\ldots = (ق_1 + ق_2 + \ldots) +$ (ذرّات کے اندرونی تعاملوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ)

$$= ق_1 + ق_2 + \ldots\ldots$$

کیونکہ اندرونی قوتیں باہم متعادل ہیں۔
پس مساوات (۲) ہوجاتی ہے۔

$$(م_1 + م_2 + \dots)\,\bar{ف} = ق_1 + ق_2 + \dots$$

یعنی کسی معلومہ سمت میں مرکزِ کمیّت کی حرکت ایسی ہوتی ہے گویا کہ نظام کے کُل ذرات کی کمیّت کو مرکز پر مکثف کر دیا گیا ہے اور سب بیرونی قوتیں اپنی اصلی سمتوں کے متوازی اس پر عمل کرتی ہیں۔

پس اگر ایک خاص سمت میں بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا حاصل صفر ہو تو اس سمت میں مرکزِ ثقل کی حرکت میں کوئی فرق نہیں آتا اور اس سمت میں کل نظام کا معیارِ اثر دورانِ حرکت میں مستقل رہتا ہے۔

اس مسئلہ کو خطی معیارِ حرکت کے بقا کا اصول کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر ایک زنجیر آزادانہ گر رہی ہو تو اس کے مرکزِ کمیّت کی حرکت آزادانہ گرنے والے ذرہ کی سی ہوتی ہے۔

تیسرے باب پر مثالیں

۱۔ ایک ذرّہ ایک ناقص مرتسم کرتا ہے ایسے اسراع کے زیرِ عمل جو مرکز کی طرف عمل کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ماسکہ کے گرد زاویئی رفتار ماسکہ سے اس کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے۔

۲۔ ایک ذرہ مرکز کی طرف عمل کرنے والی قوت کے زیرِ عمل ناقص مرتسم کرتا ہے۔ اگر و، $و_1$، $و_2$ وترِ خاص کے سروں پر اور محورِ اعظم و اصغر کے سروں پر کی رفتاریں ہوں تو ثابت کرو کہ $و^2 و_2^2 = و_1^2 (2 و_2^2 - و_1^2)$

۳۔ ایک نقطہ کی رفتاریں لا اور ما کے محوروں کے متوازی ع + سہ ما

اور و + سہ لا ہیں جہاں ی، د، سہ، سہ مستقل ہیں ۔ ثابت کرو کہ اس کا راستہ مخروطی تراش ہے ۔

۴ ۔ ایک ذرہ ایک مستقل قوت کے زیرِ عمل ایک سطح مستوی میں حرکت کرتا ہے ۔ قوت کی سمت یکساں زاویئی رفتار سے گردش کرتی ہے ۔ وقت ت پر ذرّہ کے محوروں کو معلوم کرنے کی مساواتیں معلوم کرو ۔

۵ ۔ ایک چھوٹے گیند کو ہوا میں پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ ایک شخص کو جو نقطہ زمیں پر کھڑا ہے ایک معلومہ انتصابی سطح مستوی پر سے مستقل رفتار سے گرتا ہوا دکھائی دیتا ہے ۔

۶ ۔ ایک شخص ایک نقطہ و سے روانہ ہوتا ہے اور ایک خطِ مستقیم ولا پر مستقل رفتار ی سے چلتا ہے، اُس کا کتا و ما پر کے (جو ولا پر علی القوائم ہے) ایک نقطہ ا سے اپنے مالک کی طرف مستقل رفتار $\frac{\text{ی}}{\text{له}}$ سے بھاگتا ہے اور اُس کا رُخ مالک کی طرف رہتا ہے ۔ ثابت کرو کہ کتے کے راستہ کی مساوات

$$۲\left[\text{لا} - \frac{\text{ل له}}{۱-\text{له}^۲}\right] = \text{ما}\left[\frac{۱}{۱+\text{له}}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ل}}\right)^{\text{له}} - \frac{۱}{۱-\text{له}}\left(\frac{\text{ل}}{\text{ما}}\right)^{\text{له}}\right]$$

جہاں ل = و ا

اگر له = ا تو ثابت کرو کہ راستہ کا منحنی $۲\left(\text{لا} + \frac{\text{ل}}{۴}\right) = \frac{\text{ما}^۲}{۲\text{ل}} - \text{ل لوک}\frac{\text{ما}}{\text{ل}}$ ہے۔

[کتے کے راستہ پر کے کسی نقطہ ن پر کا مماس محور ولا سے اُس جگہ ملتا ہے جہاں مالک ہے لہذا

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{ما}}{\text{ی ت} - \text{لا}}\text{، نیز } \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{ی}}{\text{له}}$$

$$\therefore\ -\text{ما}\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{ی ت} - \text{لا} = \text{له س} - \text{لا}$$

$\therefore\ -\frac{\text{فر}}{\text{فر ما}}\left[\text{ما}\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right] = \text{له}\frac{\text{فر س}}{\text{ما}} - \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$ جس سے حاصل ہوتا ہے ۔ $\text{ما}\frac{\text{فر}^۲\text{لا}}{\text{فر ما}^۲} = -\text{له}\sqrt{۱+\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^۲}$ وغیرہ]

۷ ۔ ایک ذرّہ کو ایک ہلکے تاگے کے ایک سرے ب کے ساتھ باندھا گیا

ہے، ذرہ ایک اُفقی سطح پر ساکن ہے ۔ تاگے کے دوسرے سرے ا کو ایک سطح مستوی پر معلومہ مستقل رفتار کے ساتھ ایک خطِ مستقیم میں حرکت دی گئی ہے، ثابت کرو کہ ذرّہ کا راستہ فضا میں ایک استواری خط (Trochoid) ہے ۔

[ثابت کرو کہ ا ب مستقل زاویئی رفتار کے ساتھ ا کے گرد گھومتا ہے]

۸ ۔ ایک دریا جس کی چوڑائی ل ہے یکساں رفتار و کے ساتھ بہ رہا ہے ۔ دو کشتیاں بہ یک وقت پانی کے لحاظ سے اضافی رفتار وَ کے ساتھ روانہ ہو کر دریا کو اس طرح عبور کرتی ہیں کہ ایک کشتی کم سے کم وقت کا راستہ اختیار کرتی ہے اور دوسری کم سے کم فاصلہ کا ۔ ثابت کرو کہ ساحل تک پہنچنے میں ان کی مدّتوں کا فرق

$$\frac{ل}{وَ}\left\{\frac{و}{(و^{2}-وَ^{2})^{\frac{1}{2}}}-1\right\} \quad \text{یا} \quad \frac{ل}{و}\left\{\frac{وَ}{(وَ^{2}-و^{2})^{\frac{1}{2}}}-1\right\}$$

ہے اگر بالترتیب و $\gtrless$ وَ

[اگر وہ زاویہ جو وَ، و کے ساتھ بناتا ہے طہ ہو تو راستہ کا طول $= ل\,\frac{\sqrt{وَ^{2}+و^{2}+2\,و\,وَ\,\text{جم}\,طہ}}{وَ\,\text{جب}\,طہ}$ اور متناظر وقت $\frac{ل}{وَ\,\text{جب}\,طہ}$ ہے ۔ کم سے کم راستہ کی شرط سے حاصل ہوتا ہے

$$(وَ\,\text{جم}\,طہ + و)(و\,\text{جم}\,طہ + وَ) = 0]$$

۹ ۔ ایک ذرّہ ایک سطح مستوی میں ایسے اسراع کے زیرِ عمل جو ہمیشہ ایک ثابت خط پر عمودوار سمت میں خط کی جانب عمل کرتا ہے اور $\frac{\text{مہ}}{(\text{خطِ مذکور سے فاصلہ})^{2}}$ کے مساوی ہوتا ہے، حرکت کرتا ہے ۔ مختلف ابتدائی رفتاروں کے لیے راستہ معلوم کرو ۔

اگر اسے ثابت خط سے فاصلہ ۲ ا سے خط کے متوازی ابتدائی رفتار $\sqrt{\frac{\text{مہ}}{ا}}$ کے ساتھ پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ راستہ خطِ تدویر ہوگا ۔

۱۰ - اگر ایک ذرّہ اُفقی رفتار ء کے ساتھ حرکت کرے اور اتنی دُور اوپر چلا جائے کہ جاذبۂ ارض کی تبدیلی کو پہلی مرتبہ کی چھوٹی مقدار تک ملحوظ رکھا جائے تو ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہوگی

$$(\text{ھ} - \text{لا})^{۲} = \frac{۲\,\text{ء}^{۲}}{\text{ج}}(\text{ک} - \text{ما})\left(۱ + \frac{\text{ھ ک} + \text{ما}}{۲\,\text{ر}}\right)$$

جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے۔ لا اور ما کے محور بالترتیب اُفقی اور انتصابی ہیں اور (ھ، ک) راستہ کے راُس کے محدد ہیں۔

۱۱ - ایک ذرّہ ایک سطح مستوی میں ایسے اسراع کے زیرِعمل حرکت کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہے اور ایسے بدلتا ہے جیسے ذرہ کا فاصلہ محور لا سے۔ ثابت کرو کہ ذرہ کے راستے کی مساوات اس شکل کی ہے $\text{ما} = \text{ا}\,\text{ر}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{ر}^{-\text{لا}}$ جہاں اسراع اندفاعی ہے۔

اگر اسراع جاذب ہو تو مساوات کی شکل ہوگی

$$\text{ما} = \text{ا}\;\text{جم}\left[\,\text{ر لا} + \text{ب}\,\right]$$

۱۲ - ایک ذرّہ ایک اندفاعی قوت کے زیرِعمل حرکت کرتا ہے جس کی سمت ایک ثابت سطح مستوی پر عمود وار ہے اور یہ قوت ایسے بدلتی ہے جیسے ذرّہ کا فاصلہ سطح مستوی سے۔ اس کے راستہ کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ابتدائی رفتار سطح مستوی کے متوازی ہو اور بلحاظ مقدار مساوی ہو اُس رفتار کے جو ذرہ سطح مستوی پر سے سکون کی حالت سے نقطہ رمی تک جانے میں حاصل کرسکتا ہے تو راستہ زنجیرہ ہوگا۔

۱۳ - ایک ذرہ قائم زائد مرتسم کرتا ہے جب کہ اسراع اندفاعی ہو اور مرکز سے باہر کی طرف عمل کرے ثابت کرو کہ ذرّہ راُس سے گذرنے کے بعد وقت ت میں مرکز کے گرد جو زاویہ طہ بناتا ہے وہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مس طہ} = \text{منز}\left[\sqrt{\text{مہ}}\;\text{ت}\right]$$

جہاں مہ اسراع ہے اکائی فاصلہ پر۔

۱۴ ۔ ایک ذرہ ایک نصف دائرہ پر ایک ایسی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو نصف دائرہ کے احاطہ کرنے والے قطر پر عمود وار ہے ۔ ثابت کروکہ قوت بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے قطر پر کے معین کا مکعب ۔

۱۵ ۔ ثابت کروکہ ایک ذرہ قائم زائد ایک ایسی قوت کے زیرِ عمل مرتسم کرسکتا ہے جو ایک متقارب کے متوازی ہو اور جو بلحاظ مقدار دوسرے متقارب سے ذرہ کے فاصلہ کے مکعب کے متناسب ہو۔

۱۶ ۔ ایک ذرہ ایک قوتِ جاذب م $\frac{مہ}{لا^3}$ کے زیرِ عمل جو محور لا کی طرف عمل کرتی ہے، حرکت کرتا ہے ۔ ثابت کروکہ اگر ذرہ کو نقطہ (۰، ک) سے محور لا اور محور ما کے متوازی ابتدائی رفتاروں ع اور و سے پھینکا جائے تو یہ پھر محور لا سے نہیں ٹکرائیگا جب تک کہ مہ بڑا نہ ہو $و^2 ک^2$ سے، اور اس صورت میں تصادم کا نقطہ مبداء سے فاصلہ $\frac{ع ک^2}{مہ^{\frac{1}{2}} + و ک}$ ہوگا۔

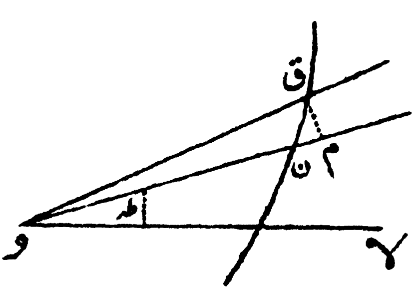
۱۷ ۔ ایک سطح مستوی کے اندر دو عمود وار نالیاں کھدی ہوئی ہیں اور دو مساوی ذرّے جو ایک دوسرے کو مقلوب مربع کے کلیہ کے مطابق کھینچتے ہیں جداگانہ ان نالیوں میں حرکت کرتے ہیں ۔ ثابت کروکہ ذروں کا مرکزِ ثقل اس طرح حرکت کرتا ہے گویا اس پر ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جس کا مرکز نالیوں کے نقطۂ تقاطع پر واقع ہے اور جس کی کشش کا قانون مقلوب مربع کا قانون ہے۔

چوتھا باب

یک مستوی حرکت - قطبی محدد - مرکزی قوتیں

۴۸ - اس باب میں ہم حرکت کی ایسی صورتوں پر غور کرینگے جو قطبی محددوں کی مدد سے آسانی سے حل ہوسکتی ہیں - ہمیں پہلے ایک متحرک نقطہ کی رفتاریں اور اسراع ایک ثابت نقطہ سے نیم قطر کی سمت میں اور اِس پر علی القوائم سمت میں معلوم کرنے چاہییں -

۴۹ - ایک ثابت مبدا و سے نیم قطر کی سمت میں اور اِس پر علی القوائم سمت میں رفتاریں اور اسراع -



فرض کرو کہ ن ذرہ کا مقام ہے وقت ت پر اور ق اس کا مقام ہے وقت ت + مف ت پر -

فرض کرو کہ لا و ن = طہ اور لا و ق = طہ + مف طہ

و ن = ر اور و ق = ر + مف ر

جہاں و لا ایک ثابت خط ہے -

ق م عمود کھینچو و ن پر -

فرض کرو کہ ء اور و رفتاریں ہیں و ن کی سمت میں اور اس پر علی القوائم، تب

ء = نہا (مف ت = ۰) [(وقت ت + مف ت پر و ن کی سمت میں ذرّہ کا فاصلہ − وقت ت پر و ن کی سمت میں ذرّہ کا فاصلہ) / مف ت]

= نہا (مف ت = ۰) (و م − و ن) / مف ت = نہا (مف ت = ۰) ((ر + مف ر) جم مف طہ − ر) / مف ت

= نہا (مف ت = ۰) ((ر + مف ر) ۱ − ر) / مف ت　پہلے مرتبہ سے زیادہ کی چھوٹی مقداریں نظر انداز کرنے سے

= فر ر / فر ت .... (۱)

نیز

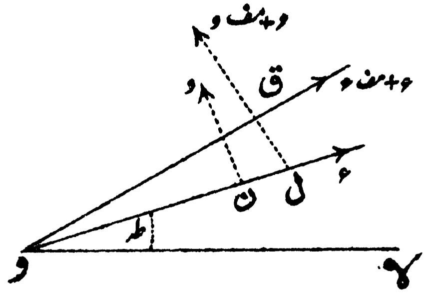
و = نہا (مف ت = ۰) [(ذرّہ کا فاصلہ خط و ن پر عمودوار وقت ت + مف ت پر − اسی قسم کا فاصلہ وقت ت پر) / مف ت]

= نہا (مف ت = ۰) (ق م − ۰) / مف ت = نہا (مف ت = ۰) ((ر + مف ر) جب مف طہ) / مف ت

= نہا (مف ت = ۰) ((ر + مف ر) مف طہ) / مف ت　دوسرے درجہ کی مقداروں کو نظر انداز کرنے سے

= ر فر طہ / فر ت انتہا میں .... (۲)

اب فرض کرو کہ آن ت پر ون کے ساتھ اور اس پر عمود وار رفتاریں ء اور و ہیں اور وق کے ساتھ اور اس پر علی القوائم رفتاریں ء + مف ء اور و + مف و ہیں۔



ق میں سے وق پر عمود کھینچو جو ون سے ل پر ملے۔

تب متحرک نقطہ کا اسراع ون کی سمت میں

$$= \lim_{\text{مف ت}=0}\left[\frac{\text{اس کی رفتار ون کی سمت میں وقت ت + مف ت پر} - \text{اس کی رفتار ون کی سمت میں وقت ت پر}}{\text{مف ت}}\right]$$

$$= \lim_{\text{مف ت}=0}\left[\frac{(\text{ء} + \text{مف ء})\,\text{جم مف طہ} - (\text{و} + \text{مف و})\,\text{جب مف طہ} - \text{ء}}{\text{مف ت}}\right]$$

$$= \lim_{\text{مف ت}=0}\left[\frac{(\text{ء} + \text{مف ء})\,۱ - (\text{و} + \text{مف و})\,\text{مف طہ} - \text{ء}}{\text{مف ت}}\right]$$

دوسرے درجہ کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کرنے سے

$$= \lim_{\text{مف ت}=0}\frac{\text{مف ء} - \text{و مف طہ}}{\text{مف ت}} = \frac{\text{فر ء}}{\text{فر ت}} - \text{و}\,\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}} \ \text{انتہا میں}$$

$$= \frac{\text{فر}^2\,\text{ر}}{\text{فر ت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (۳)$$

(۱) اور (۲) کی مدد سے

نیز متحرک نقطہ کا اسراع و ن پر عمود وار طہ کے بڑھنے والی سمت میں

$$= \underset{\text{مف ت} \to 0}{\text{نہا}} \left[\frac{\text{و ن پر علی القوائم رفتار وقت ت + مف ت پر - و ن پر علی القوائم رفتار وقت ت پر}}{\text{مف ت}} \right]$$

$$= \underset{\text{مف ت} \to 0}{\text{نہا}} \left[\frac{(\text{ی + مف ی})\ \text{جب مف طہ} + (\text{و + مف و})\ \text{جم مف طہ} - \text{و}}{\text{مف ت}} \right]$$

$$= \underset{\text{مف ت} \to 0}{\text{نہا}} \left[\frac{(\text{ی + مف ی})\ \text{مف طہ} + (\text{و + مف و})\ \text{ا} - \text{و}}{\text{مف ت}} \right]$$

(مف طہ) کے مربعوں وغیرہ کو نظر انداز کرنے سے

$$= \text{ی} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} \ \text{انتہا میں} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} \cdot \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\text{ر} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \right)$$

(۱) اور (۲) کی مدد سے

$$= 2 \frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \text{ر} \frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2} = \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left[\text{ر}^2 \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

نتیجہ صریح - اگر ر = ا یعنی ایک مستقل مقدار کے، یعنی ذرہ ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہو جس کا مرکز و اور نصف قطر ا ہو تو مقدار (۳) $= -\text{ا} \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \right)^2 = -\text{ا}\ \dot{\text{طہ}}^2$ اور (۴) $= \text{ا} \frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}} = \text{ا}\ \ddot{\text{طہ}}$ یعنی ن کے اسراع مماس ن ق اور نصف قطر ن و کی سمت میں $\text{ا}\ \ddot{\text{طہ}}$ اور $\text{ا}\ \dot{\text{طہ}}^2$ ہیں۔

۵۰ - دفعۂ ماقبل کے نتائج محوروں لا اور ما کی سمت میں جو رفتاریں

اور اسراع ہیں اُن کو نیم قطر کی سمت میں اور اس پر علی القوائم تحلیل کرنے سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں ۔

$$\text{لا} = \text{ر جم ط} ،\ \text{ما} = \text{ر جب ط}$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\ \text{جم ط} - \text{ر جب ط}\ \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\ \text{جب ط} + \text{ر جم ط}\ \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}} \qquad \text{(۱)}$$

نیز

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ر}}{\text{فر ت}^{2}}\ \text{جم ط} - 2\ \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\ \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}}\ \text{جب ط} - \text{ر جم ط}\left(\frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}}\right)^{2} - \text{ر جب ط}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{ط}}{\text{فر ت}^{2}}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر ت}^{2}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ر}}{\text{فر ت}^{2}}\ \text{جب ط} + 2\ \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\ \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}}\ \text{جم ط} - \text{ر جب ط}\left(\frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}}\right)^{2} + \text{ر جم ط}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{ط}}{\text{فر ت}^{2}} \qquad \text{(۲)}$$

و ن کی سمت میں رفتار کا جزوِ ترکیبی

$$= \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\ \text{جم ط} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\ \text{جب ط} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} \quad \text{(۱) سے}$$

اور و ن پر علی القوائم ط کے بڑھنے والی سمت میں رفتار کا جزو ترکیبی

$$= \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\ \text{جم ط} - \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\ \text{جب ط} = \text{ر}\ \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}} \quad \text{(۱) سے}$$

و ن کی سمت میں اسراع کا جزوِ ترکیبی

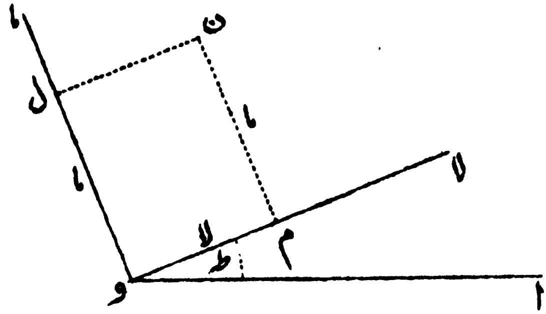
$$= \frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}}\ \text{جم ط} + \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر ت}^{2}}\ \text{جب ط} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ر}}{\text{فر ت}^{2}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}}\right)^{2} \quad \text{(۲) سے}$$

اور و ن پر علی القوائم اسراع

$$= \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر ت}^{2}}\ \text{جم ط} - \frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}}\ \text{جب ط} = 2\ \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} \times \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}} + \text{ر}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{ط}}{\text{فر ت}^{2}} \quad \text{(۲) سے}$$

$$= \frac{1}{\text{ر}}\ \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\left[\text{ر}^{2}\ \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}}\right]$$

۵۱ ۔ دفعات ۴۸ اور ۴۹ کی مدد سے ہم کسی متحرک نقطہ کے اسراع ایسے قائم محوروں ولا ، وما کے لحاظ سے معلوم کر سکتے ہیں جو فضا میں ثابت نہ ہوں بلکہ سطح مستوی میں و کے گرد کسی طرح گھوم رہے ہوں ۔



فرض کرو کہ خط و ا فضا میں ثابت ہے اور وقت ت پر فرض کرو طہ ، و ا پر و لا کا میلان ہے اور ن کوئی متحرک نقطہ ہے ن م اور ن ل بالترتیب و لا اور و ما پر عمود کھینچو ۔

دفعہ ۴۹ کی رُو سے نقطہ م کی رفتاریں و م کی سمت میں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ اور

م ن کی سمت میں لا $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ہیں اور ل کی رفتاریں و ل کی سمت میں

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ اور ن ل ممدودہ کی سمت میں ما $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ہیں ۔

[کیونکہ $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ (ل ا و ل) = $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ (ل ا و م) = $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$]

اس لیے ن کی رفتار و لا کے متوازی

= ل کی رفتار و لا کے متوازی + ن کی رفتار بلحاظ ل کے
= ل کی رفتار و لا کے متوازی + م کی رفتار و م کے متوازی

$$= -\text{ما}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(۱)$$

نیز ن کی رفتار و ما کے متوازی
= م کی رفتار و ما کے متوازی + ن کی رفتار بلحاظ م کے
= م کی رفتار و ما کے متوازی + ل کی رفتار و ل کی سمت میں

$$= \text{لا}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(۲)$$

نیز، م کے اسراع دفعہ ۴۹ کی رُو سے

و م کی سمت میں $\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{لا}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲}$

اور م ن کی سمت میں $\frac{۱}{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{لا}^{۲}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)$

اور ل کے اسراع ہیں

و ل کی سمت میں $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{ما}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲}$

اور ن ل ممدودہ کی سمت میں $\frac{۱}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ما}^{۲}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)$

پس ن کا اسراع و لا کے متوازی
= ل کا اسراع و لا کے متوازی + ن کا اسراع بلحاظ ل کے
= ل کا اسراع و لا کے متوازی + م کا اسراع و م کی سمت میں

$$= -\frac{۱}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ما}^{۲}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right) + \frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{لا}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} \quad \ldots\ldots(۳)$$

نیز ن کا اسراع و ما کے متوازی

= م کا اسراع و ما کے متوازی + ن کا اسراع بلحاظ م کے
= م کا اسراع و ما کے متوازی + ل کا اسراع ول کی سمت میں

$$= \frac{۱}{لا} \frac{فر}{فرت}\left(لا^۲ \frac{فرطہ}{فرت}\right) + \frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} - ما\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)^۲ \dots\dots\dots\dots (۴)$$

نتیجہ صریح ــ خاص صورت میں جب کہ محور مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہے ہوں $\frac{فرطہ}{فرت}$ = سہ اس لیے ترکیبی رفتاریں ہونگی

$$\frac{فرلا}{فرت} - ماسہ' \text{ و لا کے ساتھ}$$

اور

$$\frac{فرما}{فرت} + لاسہ' \text{ و ما کے ساتھ}$$

نیز ترکیبی اسراع ہونگے

$$\frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} - لاسہ^۲ - ۲سہ \frac{فرما}{فرت}' \text{ ولا کے متوازی۔}$$

اور

$$\frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} - ماسہ^۲ + ۲سہ \frac{فرلا}{فرت}' \text{ وما کے متوازی۔}$$

۵۲ ــ مشق ۱ ــ ایک ذرہ ن دو مستقل رفتاریں ء اور و رکھتا ہے ۔ ء ایک ثابت سمت میں ہے اور و ایک ثابت نقطہ و سے نصف قطر و ن پر علی القوائم سمت میں ۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا راستہ مخروطی ہے جس کا ماسکہ و ہے اور جس کا خروج المرکز $\frac{ء}{و}$ ہے ۔

دفعہ ۹ ۲ کی پہلی شکل سے و ۷ کے متوازی مستقل رفتار ء فرض کرو

اور و ن پر عمود وار مستقل رفتار و فرض کرو۔

ذر / ذت = د جم طہ اور ر ذطہ / ذت = و - د جب طہ

∴ (۱ / ر) (ذر / ذطہ) = د جم طہ / (و - د جب طہ)

∴ لوک ر = - لوک (و - د جب طہ) + مستقل

یعنی ر (و - د جب طہ) = مستقل = ل و

جبکہ راستہ محور لا کو فاصلہ ل پر کاٹے، پس راستہ ہے

ر = ل / (۱ - (د / و) جب طہ)

یعنی مخروطی تراش جس کا خروج المرکز د / و ہے۔

مشق ۲ - ایک چکنی سیدھی پتلی نلی یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ انتصابی سطح مستوی میں، اپنے ایک سرے کے گرد جو ثابت ہے گھوم رہی ہے۔ اگر صفر وقت پر نلی افق کے متوازی ہو اور اس کے اندر ذرّہ اس کے ثابت سرے سے فاصلہ ا پر ہو اور نلی کی سمت میں رفتار و کے ساتھ جا رہا ہو تو ثابت کرو کہ وقت ت پر اس کا فاصلہ

ا جمز (سہ ت) + (و / سہ - ج / ۲سہ²) جمز سہ ت + (ج / ۲سہ²) جب سہ ت ہوگا۔

کسی وقت ت پر فرض کرو کہ نلی اپنے ثابت سرے و کے گرد زاویہ سہ ت میں سے ایک ثابت خط و لا سے اوپر کی طرف گھومی ہے اور فرض

فرض کرو کہ اس وقت ذرہ کا مقام ن ہے جہاں و ن = ر

دفعہ ۹۴ کی رُو سے

$$\frac{\text{د}^2\text{ر}}{\text{دت}^2} - \text{ر}\,\text{س}^2 = \text{ن کا اسراع و ن کی سمت میں}$$

$$= -\text{ج جب س ت} \quad \text{کیونکہ نلی چکنی ہے۔}$$

اس مساوات کا حل ہے

$$\text{ر} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{س ت}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{س ت}} + \frac{1}{\text{عض}^2 - \text{س}^2}(-\text{ج جب س ت})$$

$$= \text{ل جمز(س ت)} + \text{م جمز(س ت)} + \frac{\text{ج}}{2\,\text{س}^2}\,\text{جب س ت}$$

جہاں ا، ب، ل اور م اختیاری مستقل ہیں۔

ابتدائی شرائط یہ ہیں ر = ا اور ر̇ = و جب کہ ت = ۰

$$\therefore\ \text{ا} = \text{ل} \quad \text{اور} \quad \text{و} = \text{م س} + \frac{\text{ج}}{2\,\text{س}}$$

$$\therefore\ \text{ر} = \text{ا جمز س ت} + \left[\frac{\text{و}}{\text{س}} - \frac{\text{ج}}{2\,\text{س}^2}\right]\text{جمز(س ت)} + \frac{\text{ج}}{2\,\text{س}^2}\,\text{جب س ت}$$

اگر س = نلی کا عمادی تعامل تو

$$\frac{\text{س}}{\text{م}} - \text{ج جم س ت} = \text{و ن پر عمود وار اسراع}$$

$$= \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{د}}{\text{دت}}(\text{ر}^2\text{س}) \quad \text{دفعہ ۹۴ کی رُو سے} = 2\,\frac{\text{در}}{\text{دت}}\,\text{س}$$

$$= 2\,\text{ا}\,\text{س}^2\,\text{جمز(س ت)} + (2\,\text{و س} - \text{ج})\,\text{جمز(س ت)} + \text{ج جم س ت}$$

مثالیں

۱۔ ایک کشتی مستقل رفتار و کے ساتھ ایک خطِ مستقیم میں جا رہی ہے

اور ایک اَور کشتی جو مستقل رفتار و سے جا رہی ہے ہمیشہ پہلی کشتی کو عموداً اپنے بازو رکھتی ہے ۔ بتاؤ کہ ہر ایک کشتی کا راستہ بلحاظ دوسری کے مخروطی تراش ہے جس کا خروج المرکز $\frac{\text{وَ}}{\text{و}}$ ہے ۔

۲ ۔ ایک کشتی جسے مستقل رفتار و کے ساتھ چلایا جا رہا ہے کسی دریا کے کنارے پر کے ایک نقطہ ا سے جو ن ؛ رفتار کے ساتھ بہ رہا ہے ؛ روانہ ہوتی ہے اور اس کا رُخ ہمیشہ مقابل کے کنارہ پر ا کے عین مقابل کے نقطہ ب کی طرف رہتا ہے ۔ کشتی کے راستہ کی مساوات معلوم کرو ۔

اگر ن = ا تو ثابت کرو کہ راستہ مکافی ہے جس کا ماسکہ ب پر ہے ۔

۳ ۔ ایک کیڑا مستقل رفتار ء کے ساتھ ایک گاڑی کے پہیہ کے آرے پر چل رہا ہے پہیہ کا نصف قطر و ہے ، اور گاڑی رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہے ۔ آرے کے ساتھ اور اس پر علی القوائم اسراع معلوم کرو ۔

۴ ۔ ایک ذرّہ کی رفتاریں ایک ثابت مبداء سے سمتی نیم قطر کے ساتھ اور اس پر علی القوائم لہ ر اور مہ طہ ہیں ۔ راستہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر کے ساتھ اور اس پر علی القوائم اسراع

$$\text{لہ}^2\text{ر} - \frac{\text{مہ}^2\text{طہ}^2}{\text{ر}} \quad \text{اور} \quad \text{مہ طہ}\left[\text{لہ} + \frac{\text{مہ}}{\text{ر}}\right] \quad \text{ہیں ۔}$$

۵ ۔ ایک نقطہ مبدا سے روانہ ہو کر ابتدائی خط کی سمت میں رفتار $\frac{\text{ف}}{\text{سہ}}$ کے ساتھ روانہ ہوتا ہے اور مبدا کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھومتا ہے اور مستقل منفی نیم قطری اسراع ۔ ف رکھتا ہے ۔ ثابت کرو کہ نیم قطری رفتار کے اضافہ کی شرح کبھی مثبت نہیں ہوتی بلکہ مائل بہ صفر ہوتی ہے ، نیز ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہے $\text{سہ}^2\text{ر} = \text{ف}\,(1 - \text{و}^{-\text{طہ}})$

۶ ۔ ایک نقطہ ن مستقل رفتار کے ساتھ ایک منحنی مرتسم کرتا ہے اور اس کی زاویئی رفتار ایک معلومہ ثابت نقطہ و کے گرد ایسے بدلتی ہے جیسے و سے اس کے فاصلہ کا مقلوب ۔ ثابت کرو کہ منحنی ایک مساوی الزاویہ لولبی ہے جس کا

قطب و ہے اور نقطہ کا اسراع ن پر کے عماد کی سمت میں ہے اور بالعکس و ن کے تناسب ہے۔

۷ - ایک نقطہ ن ایک قطب و کے گرد مستقل زاویئی رفتار کے ساتھ مساوی الزاویہ لولبی مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا اسراع ایسے بدلتا ہے جیسے و ن اور اُس سمت میں عمل کرتا ہے جو ن پر کے ماس کے ساتھ وہی مستقل زاویہ بناتی ہے جو و ن بناتا ہے۔

۸ - ایک نقطہ ایک سطح مستوی پر ایک معلومہ خطِ مستقیم میں مستقل رفتار و کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور سطح مستوی اپنے ایک عماد کے گرد جو اسے ق پر ملتا ہے مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے اگر ق کا فاصلہ معلومہ خطِ مستقیم سے ا ہو تو ثابت کرو کہ فضا میں نقطہ کے راستہ کی مساوات بلحاظ قطب ق کے یہ ہے

$$\frac{و\,ط}{سہ} = \sqrt{ر^{۲} - ا^{۲}} + \frac{و}{سہ}\,جم^{-۱}\frac{ا}{ر}$$

[اگر ط کو اُس خط سے ناپا جائے جس پر معلومہ خطِ مستقیم صفر وقت پر عمود ہے تو $ر^{۲} = ا^{۲} + و^{۲}ت^{۲}$ اور $ط = سہ\,ت + جم^{-۱}\frac{ا}{ر}$]

۹ - ایک سیدھی چکنی نلی زاویئی رفتار سہ کے ساتھ اُفقی سطح مستوی میں اپنے ایک سرے کے گرد جو ثابت ہے گھوم رہی ہے۔ اگر صفر وقت پر اس کے اندر ایک ذرّہ ثابت سرے سے فاصلہ ا پر ہو اور نلی کے اندر رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہو تو ثابت کرو کہ اِس کا فاصلہ وقت ت پر $ا\,جمز\,سہ\,ت + \frac{و}{سہ}\,جبز\,سہ\,ت$ ہوگا۔

۱۰ - ایک پتلی سیدھی چکنی نلی اوپر کی طرف یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ انتصابی سطح مستوی میں اپنے ایک سرے و کے گرد گھوم رہی ہے۔ جب یہ افقی محل میں ہے تو ثابت سرے و سے فاصلہ ا پر ایک ذرّہ اس کے اندر ساکن ہے۔ اگر سہ بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ یہ و پر تقریباً وقت $\left(\frac{۶ ا}{ج\,سہ}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ میں پہنچیگا۔

۱۱۔ ایک ذرّہ ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر ساکن ہے اور سطح ایک خط کے گرد جو خود سطح میں واقع ہے زاویئی رفتار سہ کے ساتھ نیچے کی طرف گھومنا شروع کرتی ہے ۔ اگر وقت صفر پر گردش کے محور سے ذرہ کا فاصلہ ا ہو تو ثابت کرو کہ جسم سطح مستوی کو وقت ت پر چھوڑ دیگا جہاں ت مساوات

ا جبز سہ ت + ج/۲سہ۲ جمز سہ ت = ج/سہ۲ جم سہ ت

سے حاصل ہوتا ہے ۔

۱۲۔ ایک ذرّہ ایک سیدھی چکنی نلی کے اندر جو اپنے طول کے ایک نقطہ و کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے سکون سے گرتا ہے اور ذرّہ پر ایک قوت م مہ (فاصلہ) و کی طرف عمل کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ فضا میں نقطہ کے راستہ کی مساوات

ر = ا جبز [√(سہ۲ ـ مہ)/سہ۲ طہ] یا ر = ا جم { √(مہ ـ سہ۲)/سہ۲ طہ } ہے اگر بالترتیب مہ ≶ سہ۲

اگر مہ = سہ۲ تو ثابت کرو کہ راستہ دائرہ ہے ۔

۱۳۔ ایک کھُردری نلی کے اندر ایک ذرّہ ایک سرے سے فاصلہ ا پر پڑا ہے اور نلی اُفقی طور پر اپنے اس سرے کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ سے گھومنا شروع کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ وقت ت پر ذرّہ کا فاصلہ

ا قو^(سہ ت مس د) [جمز (سہ ت × قط د) + جب د جبز (سہ ت قط د)]

ہے جہاں مس د رگڑ کی قدر ہے ۔

۱۴۔ ایک سلاخ کا ایک سرا ا نصف قطر ا کے دائرہ کے محیط میں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے اور سلاخ مقابل سمت میں اس سرے کے گرد اسی زاویئی رفتار کے ساتھ گھوم رہی ہے ۔ ابتداءً سلاخ ایک قطر پر منطبق ہے اور ایک چکنے حلقہ کو جو سلاخ پر آزادانہ پھسل سکتا ہے دائرہ کے مرکز پر رکھا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ وقت ت پر حلقہ کا فاصلہ ا سے ہوگا

$\frac{ا}{ه}$ [۴ جمز (سہ ت) + جم ۲ سہ ت]

[اگر دائرہ کا مرکز و ہو اور ن جہاں ا ن = ر حلقہ کا مقام ہو وقت ت پر جب کہ و ا ، ا ن دونوں زاویہ طہ (= سہ ت) میں سے مقابل سمتوں میں گھومیں تو ا کا اسراع ا و کی سمت میں وسہ^۲ اور ن کا اسراع بلحاظ و کے رً ۔ رطہَ^{۲} یعنی رً ۔ رسہ^۲ بموجب دفعہ ۹۴ ہوگا ۔ اس لیے ن کا کل اسراع ا ن کی سمت میں رً ۔ رسہ^۲ + وسہ^۲ جم ۲سہ ت ہوگا اور یہ صفر ہے کیونکہ حلقہ چکنا ہے]

۱۵ ۔ ن ق نصف قطر ا کے دائرہ کا مماس ہے ق پر، ن ق = ر اور دائرہ کے ایک ثابت مماس کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن کا اسراع ق ن کی سمت میں اور ق ن پر عمود وار

$$ رً ۔ ر طہَ^۲ + ا طہً \text{ اور } \frac{۱}{ر} \frac{ف}{فت} (ر^۲ طہَ) + ا طہَ^۲ \text{ ہیں} $$

[ق کے اسراع ق ن کی سمت میں اور اس پر علی القوائم ا طہً اور ا طہَ^{۲} ہیں، ان کے اسراع بلحاظ ق کے ان ہی سمتوں میں

$$ [رً ۔ ر طہَ^۲ \text{ اور } \frac{۱}{ر} \frac{ف}{فت} (ر^۲ طہَ) \text{ہیں}] $$

۱۶ ۔ دو ذرے ہیں جن کی کمیتیں م اور مَ ہیں ۔ ان کو ایک لچکدار رسّی کے ذریعہ جس کا قدرتی طول ا ہے ملا دیا گیا ہے ۔ ان کو ایک باریک سوراخ والی چکنی نلی کے اندر رکھ کر نلی کو اس کے طول پر کے ایک ثابت نقطہ کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھمایا گیا ہے ۔ رسی کی لچک کی قدر ۲ م مَ ا سہ^۲ ÷ (م + مَ) ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ابتداءً ذرے بلحاظ نلی کے عین ساکن ہوں اور رسّی عین تنی ہوئی ہو تو ان کا درمیانی فاصلہ وقت ت پر ۲ ا ۔ ا جم سہ ت ہوگا ۔

۱۷ ۔ ایک لچکدار رسی کو نصف قطر ا کے ایک کھُردرے پہیہ کے گرد عین تنا گیا ہے اور پہیہ کو یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھمایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ رسّی پہیہ کو چھوڑ دیگی اور اس کا بڑے سے بڑا نصف قطر ر اس مساوات

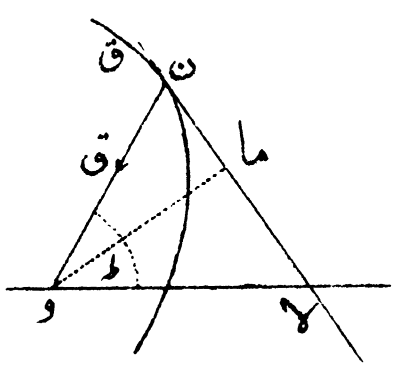
سے حاصل ہوگا

$$\frac{ر^{۲} (ر - ا)}{ر + و} = \frac{ھ ا^{۳} س^{۲}}{۳۲ ل}$$

جہاں ھ اور ل بالترتیب کمیت اور لچک کا معیار ہیں۔

۱۸ - ایک یکساں زنجیر ا ب کو ایک سیدھی نلی و ا ب کے اندر رکھا گیا ہے اور نلی ایک افقی سطح مستوی میں ایک ثابت نقطہ و کے گرد یکساں زاویئی رفتار س کے ساتھ گھومتی ہے۔ ثابت کرو کہ زنجیر کے وسطی نقطہ کی حرکت وہی ہوگی جو ایک ذرّہ کی ہوگی جسے زنجیر کے وسطی نقطہ پر رکھا جائے اور کسی نقطہ ن پر زنجیر کا تناؤ $\frac{۱}{۲}$ م $س^{۲}$ × ا ن × ن ب ہوگا جہاں م زنجیر کے اکائی طول کی کمیت ہے۔

۵۳ - ایک ذرّہ ایک سطح مستوی میں ایسے اسراع کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و کی طرف عمل کرتا ہے۔ راستہ کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔



فرض کرو کہ مبدا و اور ایک ثابت خطِ مستقیم و ل (ابتدائی خط) کے حوالے سے نقطہ ن کے قطبی محدد (ر، ط) ہیں، اگر ذرّہ کا اسراع و کی جانب ق

ہو تو دفعہ ۴۹ کی رُو سے

$$\frac{\text{ف}^2\text{ر}}{\text{فت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فط}}{\text{فت}}\right)^2 = -\text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

نیز چونکہ و ن پر علی القوائم سمت میں کوئی اسراع نہیں ہے اس لیے اُسی دفعہ کی رُو سے

$$\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{فط}}{\text{فت}}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(۲) سے حاصل ہوتا ہے　$\text{ر}^2\,\frac{\text{فط}}{\text{فت}} =$ مستقل $= \text{ھ}$ (فرض کرو) .... (۳)

$$\therefore \frac{\text{فط}}{\text{فت}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ر}^2} = \text{ھ}\,\text{ء}^2$$ جہاں $\text{ء} = \frac{1}{\text{ر}}$

تب $\frac{\text{فر}}{\text{فت}} = \frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{1}{\text{ء}}\right) = -\frac{1}{\text{ء}^2}\,\frac{\text{فء}}{\text{فت}} = -\frac{1}{\text{ء}^2}\,\frac{\text{فء}}{\text{فط}}\cdot\frac{\text{فط}}{\text{فت}} = -\text{ھ}\,\frac{\text{فء}}{\text{فط}}$

اور $\frac{\text{ف}^2\text{ر}}{\text{فت}^2} = \frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(-\text{ھ}\,\frac{\text{فء}}{\text{فط}}\right) = -\text{ھ}\,\frac{\text{ف}}{\text{فط}}\left(\frac{\text{فء}}{\text{فط}}\right)\frac{\text{فط}}{\text{فت}} = -\text{ھ}^2\text{ء}^2\,\frac{\text{ف}^2\text{ء}}{\text{فط}^2}$

پس مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$-\text{ھ}^2\text{ء}^2\,\frac{\text{ف}^2\text{ء}}{\text{فط}^2} - \frac{1}{\text{ء}}\cdot\text{ھ}^2\text{ء}^4 = -\text{ق}$$

یعنی

$$\frac{\text{ف}^2\text{ء}}{\text{فط}^2} + \text{ء} = \frac{\text{ق}}{\text{ھ}^2\text{ء}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

نیز اگر مبداء و سے ن پر کے مماس پر عمود کا طول ع ہو تو

$$\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^4}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فط}}\right)^2 = \text{ء}^2 + \left(\frac{\text{فء}}{\text{فط}}\right)^2$$

اس لیے بلحاظ ط کے تفرق کرنے سے

$$-\frac{2}{\text{ع}^3}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}} = 2\text{ء}\frac{\text{فرء}}{\text{فرطہ}} + 2\frac{\text{فرء}}{\text{فرطہ}}\cdot\frac{\text{فر}^2\text{ء}}{\text{فرطہ}^2}$$

$$\therefore -\frac{1}{\text{ع}^3}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرر}} = \left[\text{ء} + \frac{\text{فر}^2\text{ء}}{\text{فرطہ}^2}\right]\frac{\text{فرء}}{\text{فرر}} = \left(\text{ء} + \frac{\text{فر}^2\text{ء}}{\text{فرطہ}^2}\right)\left(-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ء}^2\text{ع}^3}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرر}} = \text{ء} + \frac{\text{فر}^2\text{ء}}{\text{فرطہ}^2}$$

(۴) سے حاصل ہوتا ہے $\text{ق} = \frac{\text{ھ}^2}{\text{ع}^3}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرر}}$ .... (۵)

(۴) سے راستہ کی مساوات ر اور طہ کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اور (۵) سے راستہ کی مساوات (ع، ر) میں حاصل ہوتی ہے۔

۴۵۔ ہر مرکزی مدار میں قطاعی رقبہ جو کوئی سمتی نیم قطر مرتسم کرتا ہے فی اکائی وقت یکساں طور پر بڑھتا ہے اور خطی رفتار بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے مرکز سے راستے پر کے مماس پر عمود۔

فرض کرو کہ وقت ت + مف ت پر متحرک نقطہ کا مقام ق ہے یعنی ∠ ن و ق = مف طہ اور و ق = ر + مف ر

رقبہ ن و ق $= \frac{1}{2}$ و ن . و ق . جب ن و ق

$= \frac{1}{2}$ ر (ر + مف ر) جب مف طہ

اس لیے قطاعی رقبہ کے مرتسم ہونے کی شرح

$$= \underset{\text{مف ت}=0}{\text{نہا}}\ \frac{\frac{1}{2}\text{ر}(\text{ر}+\text{مف ر})\ \text{جب مف طہ}}{\text{مف ت}}$$

$$= \underset{\text{مف ت}=0}{\text{نہا}}\left[\frac{1}{2}\text{ر}(\text{ر}+\text{مف ر})\,\frac{\text{جب مف طہ}}{\text{مف طہ}}\cdot\frac{\text{مف طہ}}{\text{مف ت}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ر}^2 \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \text{ انتہا میں}$$

$=$ مستقل $\frac{1}{2}$ ھ بموجب مساوات (۲) دفعہ ماقبل

لہذا مستقل ھ اُس قطاعی رقبہ کا دوچند ہے جو اکائی وقت میں مرتسم ہوتا ہے۔

نیز قطاعی رقبہ ن و ق $= \frac{1}{2}$ ن ق × و سے ن ق پر عمود، اور اس کے مرتسم ہونے کی شرح

$$= \text{نہا}_{\text{مف ت} = ۰} \frac{1}{2} \frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}} \times \text{و سے ن ق پر عمود}$$

اب انتہا میں جبکہ ق، ن کے بہت قریب ہو تو

$$\frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}} = \text{رفتار و}$$

اور و سے ن ق پر عمود

$=$ و سے ن پر کے مماس پر عمود $=$ ع

$$\therefore \text{ھ} = \text{و} \times \text{ع} \quad \therefore \text{و} = \frac{\text{ھ}}{\text{ع}}$$

اس لیے جب کوئی ذرّہ مرکزی تجاذبی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرے تو راستہ کے کسی نقطہ ن پر کی رفتار بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے مرکز سے ن پر راستہ کے مماس پر کا عمود۔

چونکہ و $= \frac{\text{ھ}}{\text{ع}}$ اور کسی منحنی میں

$$\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^4}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرط}}\right)^2 = \text{ء}^2 + \left(\frac{\text{فر ء}}{\text{فرط}}\right)^2$$

$$\therefore \text{و}^2 = \text{ھ}^2 \left[\text{ی}^2 + \left(\frac{\text{فی}}{\text{فط}}\right)^2 \right]$$

۵۵ - ایک ذرہ ایک ناقص میں ایسی قوت کے زیر عمل حرکت کرتا ہے جو ہمیشہ ناقص کے ماسکہ کی طرف عمل کرتی ہے - قوت کا قانون معلوم کرو اور اس کے راستہ پر کے کسی نقطہ پر رفتار معلوم کرو -

ناقص کی مساوات اس کے ماسکہ کے لحاظ سے ہے

$$\text{ر} = \frac{\text{ل}}{1 + \text{ز جم ط}} \quad \text{یعنی} \quad \text{ی} = \frac{1}{\text{ل}} + \frac{\text{ز}}{\text{ل}}\,\text{جم ط} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\therefore \frac{\text{ف}^2\text{ی}}{\text{فط}^2} = -\frac{\text{ز}}{\text{ل}}\,\text{جم ط}$$

پس دفعہ ۵۴ کی مساوات (۴) ہو جاتی ہے

$$\text{ق} = \text{ھ}^2\,\text{ی}^2 \left[\frac{\text{ف}^2\text{ی}}{\text{فط}^2} + \text{ی} \right] = \frac{\text{ھ}^2}{\text{ل}}\,\text{ی}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اس لیے اسراع، ماسکہ سے متحرک نقطہ کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتا ہے اور اگر یہ $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^2}$ ہو تو (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ھ} = \sqrt{\text{مہ ل}} = \sqrt{\text{مہ} \times \text{نصف وتر خاص}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

نیز

$$\text{و}^2 = \text{ھ}^2 \left[\text{ی}^2 + \left(\frac{\text{فی}}{\text{فط}}\right)^2 \right] = \text{ھ}^2 \left[\left(\frac{1}{\text{ل}} + \frac{\text{ز}}{\text{ل}}\,\text{جم ط}\right)^2 + \left(\frac{\text{ز}}{\text{ل}}\,\text{جب ط}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{\text{مہ}}{\text{ل}}\left[\text{۱} + \text{۲ ز جم طہ} + \text{ز}^{\text{۲}}\right] = \text{مہ}\left[\text{۲}\,\frac{\text{۱} + \text{ز جم طہ}}{\text{ل}} - \frac{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}}{\text{ل}}\right]$$

$$= \text{مہ}\left[\frac{\text{۲}}{\text{ر}} - \frac{\text{۱}}{\text{و}}\right] \text{(۱)' کی رو سے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(۴)}$$

جہاں ۲ و ناقص کا محورِ اعظم ہے۔

چونکہ (۴) صرف فاصلہ ر پر منحصر ہے اس لیے صریحاً راستہ کے کسی نقطہ پر رفتار، ماسکہ سے اُس کے فاصلہ پر منحصر ہے اور حرکت کی سمت پر منحصر نہیں۔

اس سے یہ بھی نتیجہ نکلتا ہے کہ ابتدائی رفتار و کسی نقطہ سے جس کا فاصلہ ماسکہ سے ر. ہو کم ہونی چاہیے $\frac{\text{۲مہ}}{\text{ر.}}$ سے اور جو ناقص مرتسم ہوگا اُس کا نیم محورِ اعظم ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا

$$\text{و}^{\text{۲}} = \text{مہ}\left(\frac{\text{۲}}{\text{ر.}} - \frac{\text{۱}}{\text{و}}\right)$$

مدتِ دوران۔ چونکہ ھ = اُس رقبہ کا دوچند جو اکائی وقت میں مرتسم ہوتا ہے، اس لیے اگر ذرہ کے ناقص کی کل قوس کو مرتسم کرنے کا وقت ت ہو تو

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ھ ت} = \text{ناقص کا رقبہ} = \pi\,\text{و ب}$$

$$\text{نیز ھ} = \sqrt{\text{مہ} \times \text{نیم وترِ خاص}} = \sqrt{\text{مہ}\,\frac{\text{ب}^{\text{۲}}}{\text{و}}}$$

$$\text{اس لیے ت} = \frac{\text{۲}\pi\,\text{و ب}}{\text{ھ}} = \frac{\text{۲}\pi}{\sqrt{\text{مہ}}}\,\text{و}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$$

۵۶۔ مثال۔ قطب کی جانب قوت کا قانون معلوم کرو جس کے ماتحت منحنی $\text{ر}^{\text{ن}} = \text{و}^{\text{ن}}\,\text{جم ن طہ}$ مرتسم ہو۔

یہاں $ی^{ن} ا^{ن} جم ن طہ = ۱$

اس لیے لوکارثمی تفرق لینے سے

$$\frac{فی}{فطہ} = ی مس ن طہ$$

$$\therefore \frac{ف^{۲}ی}{فطہ^{۲}} = \frac{فی}{فطہ} مس ن طہ + ن ی قط^{۲} ن طہ$$

$$= ی \left[مس^{۲} ن طہ + ن قط^{۲} ن طہ \right]$$

$$\therefore \frac{ف^{۲}ی}{فطہ^{۲}} + ی = ی (ن + ۱) قط^{۲} ن طہ$$

$$= (ن + ۱) ا^{۲ن} ی^{۲ن+۱}$$

اس لیے دفعہ ۵۳ کی مساوات (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$ق = (ن + ۱) ھ^{۲} ا^{۲ن} ی^{۲ن+۳}$$

یعنی منحنی ایسی تجاذبی قوت کے زیرِ عمل مرتسم ہوتا ہے جو قطب سے فاصلہ کی (۲ن+۳) قوت کے بالعکس متناسب ہو۔

خاص صورتیں۔ ۱۔ اگر $ن = -\frac{۱}{۲}$ تو منحنی کی مساوات ہے

$$ر = \frac{ا}{جم^{۲} \frac{طہ}{۲}} = \frac{۲ا}{۱ + جم طہ}$$

یعنی منحنی مکافی ہے جس کا ماسکہ قطب ہے

اس لیے $ق \propto \frac{۱}{ر^{۲}}$

۲ ۔ فرض کرو کہ $ن = \frac{۱}{۲}$ گویا منحنی کی مساوات ہے $ر = \frac{ا}{۲} (۱ + جم طہ)$ جو قلب نما (Cardiod) ہے۔

اس لیے $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۲}}$

۳ - فرض کرو کہ ن = ۱ یعنی منحنی کی مساوات ہے ر = ۲ا جم طہ یعنی دائرہ جب کہ قطب اس کے محیط پر ہو ۔

یہاں $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۵}}$

۴ - اگر ن = ۲ یعنی منحنی $\text{ر}^{۲} = \text{ا}^{۲}$ جم ۲طہ یعنی برنولی کا اٹیرن[لہ] ہو تو

$$\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۷}}$$

۵ - اگر ن = -۲ تو منحنی قائم زائد $\text{ا}^{۲} = \text{ر}^{۲}$ جم ۲طہ حاصل ہوگا جس کا مرکز قطب ہوگا اور $\text{ق} \propto \text{ر}$ ۔ کیونکہ اس صورت میں ن + ۱ منفی ہے ۔ اس لیے قوت مرکز سے اندفاعی ہوگی ۔

مثالیں

ایک ذرّہ قطب کی طرف عمل کرنے والی تجاذبی قوت ق کے زیرِ عمل ذیل کے منحنی مرتسم کرتا ہے ثابت کرو کہ قوت حسبِ ذیل ہے :-

۱ - مساوی الزاویہ لولبی $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۳}}$

۲ - برنولی کا اٹیرن $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۷}}$

۳ - دائرہ قطب محیط پر $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۵}}$

۴ - $\frac{\text{ا}}{\text{ر}}$ = ون طہ ، ن طہ، جمز ن طہ یا جب ن طہ $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۳}}$

۵ - $\text{ر}^{\text{ن}}$ جم ن طہ = $\text{ا}^{\text{ن}}$ $\text{ق} \propto \text{ر}^{۲\text{ن}-۳}$

۶ - $\text{ر}^{\text{ن}}$ = ا جم ن طہ + ب جب ن طہ $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۲\text{ن}+۳}}$

۷ - ر = ا جب ن طہ $\text{ق} \propto \frac{۲\text{ن}^{۲}\text{ا}^{۲}}{\text{ر}^{۵}} - \frac{\text{ن}^{۲}-۱}{\text{ر}^{۳}}$

۸ - $\frac{\text{ا}}{\text{ر}}$ = مسز $\left(\frac{\text{طہ}}{۲\text{ن}}\right)$ یا ممز $\left(\frac{\text{طہ}}{۲\text{ن}}\right)$ $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۵}}$

۹ - $\frac{\text{ا}}{\text{ر}} = \frac{\text{جمز طہ} - ۲}{\text{جمز طہ} + ۱}$ یا $\frac{\text{جمز طہ} + ۲}{\text{جمز طہ} - ۱}$ $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۴}}$

۱۰ - $\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ر}^{۲}} = \frac{\text{جمز ۲طہ} - ۱}{\text{جمز ۲طہ} + ۲}$ یا $\frac{\text{جمز ۲طہ} + ۱}{\text{جمز ۲طہ} - ۲}$ $\text{ق} \propto \frac{1}{\text{ر}^{۷}}$

لہ Lemniscate

۱۱۔ ایک ذرّہ ایک اندرونی نقطہ کی جانب تجاذبی مرکزی قوت کے زیرِ عمل دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ قوت کا قانون معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ایسی حرکت کا رسم الطریق یا ہاڈوگراف قطع ناقص ہوگا۔

[دفعہ ۵۳ کے ضابطہ ۵ کو استعمال کرو۔ ایک متحرک نقطہ ن کے راستہ کا رسم الطریق اس طرح معلوم کیا جاتا ہے: ایک ثابت نقطہ و سے ایک خط وق کھینچو جو متوازی اور متناسب ہو ن پر کی رفتار کے، نقطہ ق کا طریق ن کے مختلف محلّوں کے لیے ن کے راستہ کا رسم الطریق ہوگا۔]

۱۲۔ اکائی کمیّت کا ایک ذرّہ ایک مساوی الزاویہ لولبی جس کا مستقل زاویہ ع ہے ایسی قوت کے زیرِ عمل مرتسم کرتا ہے جو ہمیشہ متحرک نقطہ کو لولبی کے قطب سے ملانے والے خط پر عمود وار ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ قوت $\text{مہ}\,\text{ر}^{۲}\,\text{قط}^{۲}\text{ع}^{-۳}$ ہے اور قطب کے گرد قطاعی رقبہ کے مرتسم ہونے کی شرح $\frac{۱}{۲}\sqrt{\text{مہ جب ع جم ع}\,.\,\text{ر قط}^{۲}\text{ع}}$ ہے۔

۱۳۔ ایک ذرّہ ایک مرکزی قوت کے زیرِ عمل اس طرح حرکت کرتا ہے کہ کسی نقطہ پر رفتارِ قوت کے مرکز سے نقطہ کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ مساوی الزاویہ لولبی ہے۔

۱۴۔ ایک مرکزی مدار کے کسی نقطہ پر رفتار اُس رفتار کا $\frac{۱}{\text{ن}}$ ہے جو اُسی فاصلہ پر دائری مدار پر ہوتی۔ ثابت کرو کہ مرکزی قوت ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{۱}{\text{ر}^{۲\text{ن}^{۲}+۱}}$ اور مدار کی مساوات ہے

$$\text{ر}^{\text{ن}^{۲}-۱} = \text{و}^{\text{ن}^{۲}-۱}\,\text{جم}\left\{(\text{ن}^{۲}-۱)\,\text{ط}\right\}$$

۵۷۔ **اوجین**۔ اوج مرکزی مدار پر کا وہ نقطہ ہوتا ہے جس پر وہ سمتی نیم قطر جو قوت کے مرکز سے متحرک ذرّہ تک کھینچا جائے بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا ہو۔

احصائے تفرقی کے اصولوں سے ی بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر $\frac{\text{فری}}{\text{فرط}} = ۰$ اور ی کا پہلا تفرقی سر جو صفر نہ ہو جفت رُتبہ کا ہو۔

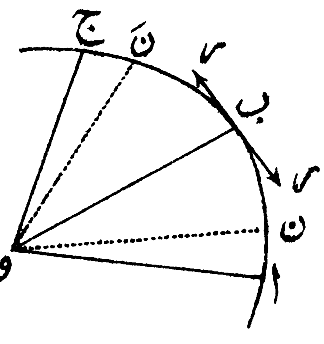
قوت کے مرکز سے راستہ کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مبداء سے ر ہو مماس پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ اِس کا طول ع ہے ، تب

$$\frac{1}{ع^{2}} = ء^{2} + \left(\frac{فرء}{فرطہ}\right)^{2}$$

جب $\frac{فرء}{فرطہ}$ صفر ہو تو $\frac{1}{ع^{2}} = ء^{2} = \frac{1}{ر^{2}}$ پس اوج کی صورت میں عمود سمتی نیم قطر کے مساوی ہوتا ہے ۔ اس لیے اوج پر ذرّہ ، سمتی نیم قطر پر علی القوائم سمت میں حرکت کرتا ہے۔

۵۸ - جب مرکزی اسراع فاصلہ کا وحید القیمت تفاعل ہو (یعنی جب اسراع صرف فاصلہ کا تفاعل ہو اور مساوی فاصلوں پر ہر جگہ اس کی قیمت وہی ہو) تو ہر ایک خطِ اوجین مدار کو دو مساوی اور متشابہ حصوں میں تقسیم کرتا ہے لہذا صرف دو اوج ہوسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب ج ایک مدار کا کوئی حصہ ہے جس کے تین متصل اوج ا ، ب ، ج ہیں اور فرض کرو کہ قوت کا مرکز و ہے۔



فرض کرو کہ ب پر ذرّہ کی رفتار ر ہے ، تب اگر ب پر ذرّہ کی رفتار کو اُلٹ دیا جائے تو یہ راستہ ب ن ا مرتسم کریگا۔ کیونکہ اسراع کے صرف فاصلہ کا تفاعل ہونے کی وجہ سے رفتار بموجب معادلات (۱) اور (۳) دفعہ ۵۳ ، صرف فاصلہ کا تفاعل ہوگی اور حرکت کی سمت پر منحصر نہیں ہوگی۔

اس لیے اصلی ذرّہ ب سے اور مقلوب رفتار والا ذرّہ ب سے دونوں ایک ہی رفتار ر سے متقابل سمتوں میں روانہ ہوکر ایک ہی قسم کا راستہ مرتسم کرینگے - کیونکہ دفعہ ۵۳ کی مساواتیں (۱) اور (۳) جو حرکت کی سمت پر موقوف نہیں اس امر پر دال ہیں کہ کسی وقت ت پر پہلے ذرّہ کے ر اور طہ کی قیمتیں (یعنی و نَ اور ∠ ب و نَ) اُسی وقت ت پر دوسرے ذرّہ کے ر اور طہ کی قیمتوں (یعنی و ن اور ∠ ب و ن) کے بالترتیب مساوی ہیں -

اس لیے منحنی ب نَ ج اور ب ن ا بعینہٖ ایک دوسرے کا عکس ہیں اور کسی ایک کو خط و ب کے گرد گھمانے سے دوسرے منحنی میں منتقل کرسکتے ہیں - اس لیے چونکہ ا اور ج ایسے نقطے ہیں جن پر سمتی نیم قطر مماس پر عمود ہے اس لیے و ا = و ج -

اسی طرح اگر ج کے بعد کا اوج د ہو تو و ب اور و د مساوی ہونگے اور علیٰ ہٰذا القیاس -

پس صرف دو مختلف اوجی فاصلے ہیں - دو متصل اوجی فاصلوں کے درمیانی زاویہ کو **اوجی زاویہ** کہتے ہیں -

۵۹ - جب مرکزی اسراع ایسے بدلے جیسے فاصلہ کی کوئی صحیح قوت مثلاً مہ ءن تو یہ تحلیلی طور پر آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ دو اوجی فاصلے ہوسکتے ہیں -

حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ء}}{\text{فرط}^2} + \text{ء} = \frac{\text{ق}}{\text{ھ}^2\text{ء}^2} = \frac{\text{مہ}}{\text{ھ}^2}\,\text{ء}^{\text{ن}-2}$$

$$\therefore \frac{\text{ھ}^2}{2}\left[\left(\frac{\text{فرء}}{\text{فرط}}\right)^2 + \text{ء}^2\right] = \frac{\text{مہ}}{\text{ن}-1}\,\text{ء}^{\text{ن}-1} + \text{مستقل}$$

ذرّہ اوج پر ہوگا جب کہ $\frac{\text{فرء}}{\text{فرط}} = 0$ اور تب اس مساوات سے

حاصل ہوگا

$$ء^{ن-۱} - \frac{ن-۱}{۲}\,\frac{ھ^{۲}}{مہ}\,ء^{۲} + ج = ۰$$

ن یا ج کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں اس مساوات میں دو سے زیادہ علامتوں کی تبدیلیاں نہیں ہوسکتیں اور اس لیے ڈی کارٹ[لہ] کے کلیہ سے اس کی دو سے زیادہ مثبت اصلیں نہیں ہوسکتیں۔

۶۰- ایک ذرہ مرکزی اسراع $\frac{مہ}{(فاصلہ)^{۳}}$ کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے، راستہ معلوم کرو اور مختلف صورتوں میں تمیز کرو۔

دفعہ ۵۳ کی مساوات (۴) ہوجاتی ہے

$$\frac{فر^{۲}ء}{فرط^{۲}} + ء = \frac{مہ}{ھ^{۲}}ء \quad یعنی \quad \frac{فر^{۲}ء}{فرط^{۲}} = \left(\frac{مہ}{ھ^{۲}} - ۱\right)ء \quad \cdots\cdots (۱)$$

صورت اول - فرض کرو کہ $ھ^{۲} < مہ$ یعنی $\frac{مہ}{ھ^{۲}} - ۱$ مثبت ہے اور مساوی ہے فرض کرو $ن^{۲}$ کے۔

مساوات (۱) ہے $\frac{فر^{۲}ء}{فرط^{۲}} = ن^{۲}ء$ جس کا عام حل بموجب دفعہ ۲۹ ہے

$$ء = ا\,و^{ن ط} + ب\,و^{-ن ط} = ل\ جمزن\,ط + ھ\ جبزن\,ط$$

جہاں ا، ب اور ل، ھ اختیاری مستقل ہیں۔

یہ ایک قسم کا لولبی ہے اور قطب کے گرد اس کے لا انتہا حلقے ہیں۔ بصورت خاص جب کہ ا یا ب میں سے کوئی معدوم ہو جائے تو یہ مساوی الزاویہ لولبی بن جاتا ہے۔

لہ Descartes' Rule

صورت دوم - فرض کرو کہ $ھ^۲ =$ مہ جس سے مساوات (۱) ہوجاتی ہے

$$\frac{ف^۲ ء}{ف ط^۲} = ۰$$

$$∴ ء = ا ط + ب = ا (ط - عہ)$$

جہاں ا اور عہ اختیاری مستقل ہیں۔

اس سے بالعموم ایک متکافی لولبی تعبیر ہوتا ہے۔ جب خاص صورت میں ا صفر ہو تو یہ دائرہ ہوجاتا ہے۔

صورت سوم - فرض کرو کہ $ھ^۲ >$ مہ یعنی $\frac{مہ}{ھ^۲} - ۱$ منفی ہے اور مساوی ہے فرض کرو - $ن^۲$ کے۔

پس مساوات (۱) ہوجاتی ہے $\frac{ف^۲ ء}{ف ط^۲} = - ن^۲ ء$ جس کا حل ہے

$$ء = ا جم (ن ط + ب) = ا جم ن (ط - ء)$$

جہاں ا اور عہ اختیاری مستقل ہیں۔

اوج کے لیے ط = عہ اور ء = ا

۶۱- دفعہ ۵۲ کی مساواتوں (۴) اور (۵) سے راستہ حاصل ہوتا ہے جب کہ ق معلوم ہو اور نیز پھینکنے کے ابتدائی حالات معلوم ہوں۔

مشق ۱- ایک ذرہ مرکزی اسراع کے زیرِ عمل جو بالعکس فاصلہ کے مکعب کے متناسب بدلتا ہے حرکت کرتا ہے۔ اگر اسے اوج سے جس کا فاصلہ مبدا سے ا ہے ایسی رفتار کے ساتھ پھینکا جائے جو "نصف قطر ا والے دائرہ کے لیے رفتار" کا $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ گنا ہو تو ثابت کرو کہ اس کے راستہ کی مساوات ہے

$$ر جم \frac{ط}{\sqrt{۲}} = ا$$

نوٹ ۔ "نصف قطر ا والے دائرہ کے لیے رفتار" سے ایسی یکساں رفتار $و_ا$ مراد ہے کہ جس کے ساتھ ذرّہ نصف قطر ا والے دائرہ میں حرکت کرے گا جب کہ

اسراع $\frac{مہ}{ا^۲} = \frac{و_ا^۲}{ا} = \frac{مہ}{ا^۲}$ یعنی $و_ا^۲ = \frac{مہ}{ا}$

پس اگر ابتدائی رفتار و ہو تو

$$و = \sqrt{۲}\, و_ا = \sqrt{\frac{۲مہ}{ا}}$$

راستہ کی تفرقی مساوات دفعہ ۵۳ کی مساوات (۴) کی رُو سے

$$\frac{ف^۲ ی}{فط^۲} + ی = \frac{مہ ی^۲}{ھ^۲ ی^۲} = \frac{مہ}{ھ^۲}\, ی$$

اس لیے $\frac{فی}{فط}$ سے ضرب دینے اور تکمل کرنے سے

$$\frac{۱}{۲} و^۲ = \frac{۱}{۲} ھ^۲ \left[\left(\frac{فی}{فط}\right)^۲ + ی^۲\right] = \frac{مہ}{۲} ی^۲ + ج \quad \cdots\cdots(۱)$$

ابتدائی شرائط سے جب کہ $ی = \frac{۱}{ا}$ تو $\frac{فی}{فط} = ۰$ اور $و = \sqrt{\frac{۲مہ}{ا}}$

اس لیے (۱) سے حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۲مہ}{ا^۲} = \frac{۱}{۲} ھ^۲ \left[\frac{۱}{ا^۲}\right] = \frac{مہ}{۲ا^۲} + ج$$

$$\therefore ھ^۲ = ۲مہ \text{ اور } ج = \frac{مہ}{۲ا^۲}$$

∴ مساوات (۱) سے

$$\left(\frac{فی}{فط}\right)^۲ + ی^۲ = \frac{ی^۲}{۲} + \frac{۱}{۲ا^۲}$$

$$\therefore \frac{\text{فری}}{\text{فرطہ}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{و}^2} - \text{ی}^2\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\therefore \frac{\text{طہ}}{\sqrt{2}} = \int \frac{\text{و}\ \text{فری}}{\sqrt{1-\text{و}^2\text{ی}^2}} = \text{جب}^{-1}(\text{وی}) + \text{جہ}$$

اگر طہ کو ابتدائی سمتی نیم قطر سے ناپا جائے تب طہ = ۰ جب کہ ی = $\frac{1}{\text{و}}$ اور

اس لیے　　$\text{جہ} = -\ \text{جب}^{-1}(1) = -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \text{وی} = \text{جب}\left[\frac{\text{طہ}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right] = \text{جم}\ \frac{\text{طہ}}{\sqrt{2}}$$

پس راستہ ر جم $\frac{\text{طہ}}{\sqrt{2}}$ = و ہے

اگر ہم مساوات (۲) کی بائیں جانب منفی علامت لیں تو بھی ہمیں وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مشق ۲ - ایک ذرہ ایسی قوت کے زیر عمل جو اسراع مہ × $\frac{\text{ر} + 2\text{و}}{\text{ر}^5}$ پیدا کرتی ہے مبدا کی طرف نقطہ (و، ۰) سے ایسی رفتار کے ساتھ جو "لاتناہی سے رفتار" کے مساوی ہے ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ مم⁻¹ ۲ بناتا ہوا پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہے

$$\text{ر} = \text{و}\ (1 + 2\ \text{جب طہ})$$

نیز اوجی زاویہ اور فاصلے معلوم کرو۔

"لاتناہی سے رفتار" سے مراد وہ رفتار ہے جو ایک ذرہ لاتناہی سے روانہ ہو کر معلومہ اسراع کے زیر عمل حرکت کرتے ہوئے نقطۂ مذکور پر پہنچنے میں حاصل کرتا ہے۔ اس لیے اگر یہ رفتار ق ہو تو دفعہ ۲۲ کے مطابق

$$\frac{1}{2}و^2 = -\int_{\infty}^{و} مہ\left[\frac{لا+2و}{لا^5}\right]فرلا = مہ\left[\frac{1}{3}\frac{1}{لا^3}+\frac{1}{2}\frac{و}{لا^4}\right]_{\infty}^{و}$$

$$= مہ\left[\frac{1}{3و^3}+\frac{1}{2و^3}\right]$$

اس لیے $و^2 = \frac{5مہ}{3و^3}$ .... (۱)

اس لیے ذرّہ کی حرکت کی مساوات ہے :-

$$\frac{فر^2ی}{فرط^2}+ی = \frac{مہ}{ھ^2ی^2}\left[ی^4+2وی^5\right] = \frac{مہ}{ھ^2}\left[ی^2+2وی^3\right]$$

$$\therefore \frac{1}{2}و^2 = \frac{ھ^2}{2}\left[ی^2+\left(\frac{فری}{فرط}\right)^2\right] = مہ\left[\frac{ی^3}{3}+\frac{1}{2}وی^4\right]+ج \quad .... (۲)$$

اگر مبداء سے حرکت کی ابتدائی سمت پر عمود ع ہو تو ع = و جب ھ

جہاں مم ھ = ۲ یعنی $ع = \frac{و}{\sqrt{5}}$

اس لیے ابتداء میں

$$ی^2+\left(\frac{فری}{فرط}\right)^2 = \frac{1}{ع^2} = \frac{5}{و^2} \quad .... (۳)$$

اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے (۱) اور (۳) کی رُو سے، ابتداء میں

$$\frac{5مہ}{6و^3} = \frac{ھ^2}{2}\times\frac{5}{و^2} = مہ\left[\frac{1}{3و^3}+\frac{1}{2و^3}\right]+ج$$

اس لیے ج = ۰ اور $ھ^2 = \frac{مہ}{3و}$

تب (۲) سے ہمیں ملتا ہے

$$\frac{مہ}{6و}\left[ی^2+\left(\frac{فری}{فرط}\right)^2\right] = مہ\left[\frac{ی^3}{3}+\frac{1}{2}وی^4\right]$$

یعنی $\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرط}}\right)^{\text{۲}} = \text{ی}^{\text{۲}}\left[\text{۲ ای} + \text{۳ا}^{\text{۲}}\text{ی}^{\text{۲}} - \text{۱}\right] = \text{ی}^{\text{۲}}\left[\text{ای} + \text{۱}\right]\left[\text{۳ ای} - \text{۱}\right]$

$\text{ی} = \frac{\text{۱}}{\text{ر}}$ رکھنے سے، اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرط}}\right)^{\text{۲}} = (\text{ا} + \text{ر})(\text{۳ ا} - \text{ر})$$

اور اس لیے

$$\text{ط} = \int \frac{\text{فرر}}{\sqrt{(\text{ا} + \text{ر})(\text{۳ ا} - \text{ر})}}$$

$\text{ر} = \text{ا} + \text{ما}$ رکھنے سے، حاصل ہوتا ہے

$$\text{ط} = \int \frac{\text{فرما}}{\sqrt{\text{۴ ا}^{\text{۲}} - \text{ما}^{\text{۲}}}} = \text{جب}^{-\text{۱}}\frac{\text{ما}}{\text{۲ ا}} + \text{جہ}$$

$$\therefore \text{جب}(\text{ط} - \text{جہ}) = \frac{\text{ما}}{\text{۲ ا}} = \frac{\text{ر} - \text{ا}}{\text{۲ ا}}$$

اگر ہم ط کو ابتدائی نیم قطرِ سمتی سے ناپیں تو ط = ۰ جب کہ ر = ا اور اس لیے جہ = ۰

لہٰذا راستہ ہے $\text{ر} = \text{ا}(\text{۱} + \text{۲ جب ط})$

صریحاً $\frac{\text{فرر}}{\text{فرط}} = \text{۰}$ یعنی ہمیں اوج ملیگا جب کہ

$$\text{ط} = \frac{\pi}{\text{۲}}، \frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}، \frac{\text{۵}\pi}{\text{۲}}، \ldots\ldots$$

پس اوجی زاویہ π ہے اور اوجی فاصلے ۳ ا اور ا ہیں، اور اوج دونوں محور ما کی مثبت سمت میں ہیں جن کے فاصلے مبداء سے ۳ ا اور ا ہیں۔ راستہ گھونگا منحنی ہے اور اِس کی مساوات سے بآسانی مرتسم ہوسکتا ہے۔

مثالیں

۱ ۔ ایک ذرّہ ایک مرکزی اندفاعی قوت $\left\{ = \frac{\text{۲مہ}}{(\text{فاصلہ})^{۳}} \right\}$ کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے اور اوج سے جو فاصلہ ا پر واقع ہے رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات رجم ف طہ = و ہے اور زاویہ طہ جو وقت ت میں مرتسم ہوتا ہے حسب ذیل ہے

$$\frac{۱}{\text{ف}}\,\text{مس}^{-۱}\left[\frac{\text{ف}\,\text{و}}{\text{ا}}\,\text{ت}\right] \quad \text{جہاں} \quad \text{ف}^{۲} = \frac{\text{مہ} + \text{ا}^{۲}\text{و}^{۲}}{\text{ا}^{۲}\text{و}^{۲}}$$

۲ ۔ ایک ذرّہ مرکزی اسراع $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^{۵}}$ کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے اور اوج سے جو فاصلہ ا پر ہے پھینکا گیا ہے ۔ ابتدائی رفتار لا تناہی سے گرنے سے جو رفتار حاصل ہوتی ہے اس کا ن گنا ہے ۔ ثابت کرو کہ دوسرا اوجی فاصلہ $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ن}^{۲}-۱}}$ ہے ۔

اگر ن = ۱ اور ذرّہ کو کسی سمت میں پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ راستہ دائرہ ہوگا جو قوت کے مرکز میں سے گزریگا ۔

۳ ۔ ایک ذرہ مرکزی اسراع $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^{۳}}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے ، اسے ایک اوج سے جو فاصلہ ا پر واقع ہے رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کرو کہ راستہ

$$\text{رجمز}\left[\frac{\sqrt{\text{مہ} - \text{ا}^{۲}\text{و}^{۲}}}{\text{ا}\,\text{و}}\,\text{طہ}\right] = \text{ا} \quad \text{یا} \quad \text{ر}\,\text{جم}\left[\frac{\sqrt{\text{ا}^{۲}\text{و}^{۲} - \text{مہ}}}{\text{ا}\,\text{و}}\,\text{طہ}\right] = \text{ا}$$

ہوگا بموجب اس کے کہ و $\gtrless$ لا تناہی سے گرنے کی رفتار سے ۔

۴ - ایک ذرہ ایک مرکزی اندفاعی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے قوت کی مقدار مستقل ہے، اور ابتداءً سمتی نیم قطر پر علی القوائم سمت میں پھینکا گیا ہے۔ ابتدائی رفتار مرکز سے نقطہ مذکور تک گرنے کی رفتار کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کا راستہ ہے

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{ر}}\right)^{3} = \text{جم}^{2}\,\frac{3}{2}\,\text{ط}$$

اور ذرہ بالآخر مبداء میں سے گزرنے والے ایک خط پر اسی طرح حرکت کرےگا گویا اِس کا راستہ ابتداء سے یہی خط تھا۔

اگر پھینکنے کی رفتار مثال ماقبل کی رفتار سے دوچند ہو تو ثابت کرو کہ راستہ ہوگا

$$\frac{\text{ط}}{2} = \text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ر}-\text{ا}}{\text{ا}}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ر}-\text{ا}}{3\text{ا}}}$$

۵ - ایک ذرہ مرکزی اسراع $\text{مہ}\left(\text{ر} + \frac{2\text{ا}^{3}}{\text{ر}^{2}}\right)$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے ابتداءً اسے اوج سے جو فاصلہ ا پر واقع ہے ایسی رفتار کے ساتھ جو نصف قطر ا والے دائرہ کے لیے جو رفتار ہو اُس سے دوچند ہے پھینکا گیا ہے۔ دوسرا اوجی فاصلہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ط}}{2} = \text{مس}^{-1}\left(\text{ت}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{مس}^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{ت}\right)$$

جہاں

$$\text{ت}^{2} = \frac{\text{ر}-\text{ا}}{3\text{ا}-\text{ر}}$$

۶ - ایک ذرہ مرکزی اسراع $\text{مہ}\left(\text{ر} + \frac{\text{ا}^{4}}{\text{ر}^{3}}\right)$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ابتداءً اوج سے جو فاصلہ ا پر ہے رفتار $2\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ا}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ منحنی $\text{ر}^{2}\left[2 + \text{جم}\,\sqrt{3}\,\text{ط}\right] = 3\text{ا}^{2}$ مرتسم کرتا ہے۔

۷ - ایک ذرہ مرکزی اسراع مہ ($ر^{۵}$ - $ج^{۴}$ ر) کے ساتھ حرکت کرتا ہے - اسے ابتداءً فاصلہ ج پر کے اوج سے رفتار $\sqrt{\frac{۲مہ}{۳}}$ $ج^{۳}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے - ثابت کرو کہ اِس کا راستہ منحنی $لا^{۴}$ + $ما^{۴}$ = $ج^{۴}$ ہے -

۸ - ایک ذرہ مرکزی قوت م لہ [۳ $ا^{۲}$ $د^{۴}$ + ۸ ا $د^{۵}$] کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے - یہ فاصلہ ا پر کے ایک اوج سے رفتار $\sqrt{۱۰ \, لہ}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے - ثابت کرو کہ دوسرا اوجی فاصلہ پہلے کا نصف ہے اور راستہ کی مساوات ہے

$$۲ر = ا\left[۱ + قطر \frac{ط}{\sqrt{۵}}\right]$$

۹ - ایک ذرہ مرکزی اسراع مہ $د^{۳}$ - لہ $د^{۵}$ کے زیرِ عمل ایک مدار مرتسم کرتا ہے ابتداءً اسے اوج سے جو فاصلہ ا پر واقع ہے لاتناہی سے رفتار کے مساوی رفتار سے پھینکا گیا ہے - ثابت کرو کہ اِس کا راستہ ہے

$$ر = ا \, جمبز \frac{ط}{ن} \text{ ، } جہاں \; ن^{۲} + ۱ = \frac{۲مہ ا^{۲}}{لہ}$$

نیز ثابت کرو کہ یہ فاصلہ ر پر وقت

$$\sqrt{\frac{ا^{۲}}{۲لہ}}\left[ا^{۲} لوک \frac{ر + \sqrt{ر^{۲} - ا^{۲}}}{ا} + ر\sqrt{ر^{۲} - ا^{۲}}\right]$$ کے بعد ہوگا۔

۱۰ - ایک مرکزی مدار میں قوت مہ $د^{۳}$ (۳ + ۲ $ا^{۲}$ $د^{۲}$) ہے - اگر ذرہ کو فاصلہ ا پر سے رفتار $\sqrt{\frac{۵مہ}{ا^{۲}}}$ کے ساتھ ابتدائی نیم قطر کے ساتھ زاویہ $مس^{-۱}$ $\frac{۱}{۲}$ بنانے والی سمت میں پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہوگی ر = ا مس ط -

۱۱ - ایک ذرہ قوت م مہ {۳ ا $د^{۴}$ - ۲ ($ا^{۲}$ - $ب^{۲}$) $د^{۵}$} کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے (ا > ب) اور اوج سے جو فاصلہ ا + ب پر ہے رفتار $\sqrt{مہ}$ ÷ (ا+ب) سے پھینکا گیا ہے - ثابت کرو کہ مدار ر = ا + ب جم ط ہے -

۱۲ ۔ ایک ذرہ مرکزی اسراع $\text{لہ}^{۲}\left(۸\,\text{ا}\,\text{ء}^{۲}+\text{ا}^{۴}\,\text{ء}^{۵}\right)$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے اِسے رفتار ۹ لہ کے ساتھ اوج سے جو مبدا سے فاصلہ $\frac{\text{ا}}{۲}$ پر ہے پھینکا گیا ہے ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہے

$$\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}\sqrt{\frac{\text{ا}\,\text{ء}+۵}{\text{ا}\,\text{ء}-۳}}=\text{مم}\,\frac{\text{ط}}{۶\sqrt{۶}}$$

۱۳ ۔ ایک ذرہ ایک مرکزی قوت کے زیرِ عمل جو فی اکائی کمیت

$$\text{مہ}\left\{۲\left(\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}\right)\text{ء}^{۵}-۳\,\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}\,\text{ء}^{۷}\right\}$$

کے مساوی ہے حرکت کرتا ہے اور فاصلہ ا پر سے رفتار $\frac{\sqrt{\text{مہ}}}{\text{ا}}$ کے ساتھ ابتدائی فاصلہ کی علی القوائم سمت میں پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہے

$$\text{ر}^{۲}=\text{ا}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\,\text{ط}+\text{ب}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط}$$

۱۴ ۔ ایک ذرہ ایک مرکزی اسراع $\text{مہ}\left(\text{ء}^{۵}-\frac{\text{ا}^{۲}}{۸}\,\text{ء}^{۷}\right)$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے اسے فاصلہ ا پر سے سمتی نیم قطر کے ساتھ زاویہ $\text{مس}^{-۱}\frac{۴}{۳}$ بنانے والی سمت میں ایسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو اُس فاصلہ پر کے دائرہ کے لیے جو رفتار ہے اُس کا $\sqrt{\frac{۲۵}{۷}}$ گنا ہے ۔ ثابت کرو کہ راستہ کا منحنی ہے

$$۴\,\text{ر}^{۲}-\text{ا}^{۲}=\frac{۳\,\text{ا}^{۲}}{\left(۱-\text{ط}\right)^{۲}}$$

۱۵ ۔ ایک ذرہ پر مرکزی اندفاعی قوت عمل کرتی ہے جو فاصلہ کی ن ویں قوت کے متناسب ہے ۔ اگر کسی نقطہ پر کی رفتار مساوی ہو اُس رفتار کے جو ذرہ مرکز سے نقطہ مذکور تک گرنے میں حاصل کرتا ہے تو ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$\text{ر}^{\frac{\text{ن}+۳}{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}+۳}{۲}\,\text{ط}=\text{مستقل}$$

۱۶ ۔ ایک لچکدار رسّی کا طبعی طول ل ہے ۔ اس کے ایک سرے کو ایک ذرّہ کے ساتھ باندھا گیا ہے اور اس کے دوسرے سرے کو ایک چکنے افقی میز پر ثابت کردیا گیا ہے ۔ ذرّہ میز پر حرکت کرسکتا ہے اور ابتداءً میز پر اس طرح ساکن ہے کہ رسی بن کھچے سیدھی ہے ۔ ایک دھکہ (جو اگر رسّی کی سمت میں دیا جاتا تو اس سے رسی اپنے ثابت سرے سے فاصلہ ۲ل تک اہتزاز کرتی) رسّی کے ساتھ زاویہ عہ بنانے والی سمت میں دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ جو حرکت پیدا ہوگی اس کے دوران میں رسّی کا بڑے سے بڑا طول مساوات لا^۴ ۔ ۲ ل لا^۳ + ل^۴ جب^۲ عہ = ۰ کی بڑی سے بڑی اصل سے تعبیر ہوتا ہے ۔

۱۷ ۔ ایک ذرہ کو جس کی کمیّت م ہے ایک لچکدار رسی کے ذریعہ جس کا طبعی طول ا ہے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے ۔ لچک کی قدر ن م ج ہے، اسے ایک اوج سے جس کا فاصلہ ا ہے رفتار √(۲ ع ج ھ) سے پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ دوسرا اوجی فاصلہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

ن ر^۲ (ر ۔ ا) ۔ ۲ ع ھ ا (ر + ا) = ۰

۱۸ ۔ ایک ذرہ اندفاعی مرکزی قوت مہ ر ÷ (ر^۲ ۔ ۹ ج^۲)^۲ کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے اور اسے ایک اوج سے جو فاصلہ ج پر واقع ہے رفتار √(مہ / ۸ ج^۲) کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ سہ قرنی درتدویر مرتسم کرتا ہے اور قرن تک پہنچنے کا وقت

۴/۳ π ج^۲ √(۲/مہ) ہے ۔

[دفعہ ۵۲ کی مساوات (۵) کو استعمال کرنے سے ۸ ع^۲ = ۹ ج^۲ ۔ ر^۲

نیز مہ فرت = ع فرس = ع فرر / √(ر^۲ ۔ ع^۲) جس سے مہ ت

= ∫ از ج تا ۳ج (رفرر / ۳) √((۹ ج^۲ ۔ ر^۲) / (ر^۲ ۔ ج^۲))

تکمل کرنے کے لیے رکھو ر^۲ = ج^۲ + ۸ ج^۲ جم^۲ فہ]

۱۹ - ایک ذرہ مرکزی اسراع کے زیرِ عمل جس کی شکل $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{۳}} + \frac{\text{نہ}}{\text{ر}^{۲}}$ ہے حرکت کرتا ہے راستہ کی مساوات اوج (جس کا فاصلہ مبدا سے و ہے) پر کی ابتدائی رفتار و کی رقوم میں معلوم کرو۔

۲۰ - ثابت کرو کہ اگر کسی فاصلہ پر دائرہ کے لیے جو رفتار ہے وہ اس فاصلہ تک لا تناہی سے گرنے کی رفتار کے مساوی ہو تو مرکزی کشش کا قانون سوائے معکوس مکعب کے اور کوئی نہیں ہو سکتا۔

۲۱ - ایک ذرہ مرکزی کشش کے زیرِ عمل اس طرح حرکت کرتا ہے کہ کسی نقطہ پر اِس کی رفتار اسی فاصلہ پر کے دائرہ کے لیے جو رفتار ہے اُس کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ قوت کا قانون معکوس مکعب کا قانون ہے اور راستہ مساوی الزاویہ ولبی ہے۔

۲۲ - ایک ذرہ مرکزی قوت $\frac{\text{م مہ}}{(\text{فاصلہ})^{\text{ن}}}$ کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے (جہاں ن > ۱ لیکن ۳ کے برابر نہیں ہے) اگر اسے فاصلہ س سے ابتدائی سمتی نیم قطر کے ساتھ زاویہ ب بناتی ہوئی سمت میں ایسی رفتار کے ساتھ جو لا تناہی سے گرنے کی رفتار کے مساوی ہے پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہے

$$\text{ر}^{\frac{\text{ن}-۳}{۲}} \text{جب ب} = \text{س}^{\frac{\text{ن}-۳}{۲}} \text{جب}\left(\frac{\text{ن}-۳}{۲}\text{ط} + \text{ب}\right)$$

اگر ن > ۳ تو ثابت کرو کہ مرکز سے بڑے سے بڑا فاصلہ ہے

$$\text{س قم}^{\frac{۲}{\text{ن}-۳}} \text{ب}$$

اور اگر ن $\leqq$ ۳ تو ذرہ لا تناہی تک جاتا ہے۔

۲۳ - ایک ذرہ مرکزی اسراع $\text{مہ ر}^{-۲} + \text{نہ ر}^{-۳}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور پھینکنے کی رفتار فاصلہ س پر و ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ بالآخر لا تناہی تک چلا جائیگا اگر

$$\text{و}^{۲} > \frac{۲\,\text{مہ}}{\text{س}} + \frac{\text{نہ}}{\text{س}^{۲}}$$

۲۴ - ایک ذرہ اوج سے جو فاصلہ ا پر ہے رفتار $\sqrt{\frac{مہ + لہ}{ا}}$ سے پھینکا گیا ہے اور مرکزی کشش فی اکائی کمیت $\frac{مہ}{۴}$ (ن - ۱) $ا^{ن-۳}\, ر^{-ن}$ + لہ $ر^{-۳}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے جہاں ن > ۳، ثابت کرو کہ یہ قوت کے مرکز پر وقت

$$\frac{ا^{۲}}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{مہ}}\ \text{جا}\left(\frac{ن+۱}{۲ن-۶}\right) \Big/ \text{جا}\left(\frac{۲}{ن-۳}\right)$$

کے بعد پہنچ جائیگا۔ جہاں جا گاما تفاعل ہے

۲۵ - ایک مرکزی مدار میں اگر ق = مہ $ی^{۲}$ (ج ی + جم طہ)$^{-۳}$ تو ثابت کرو کہ راستہ مخروطیوں

$$(ج\, ی + جم\, طہ)^{۲} = ا + ب\ جم\ (۲طہ + عہ)$$

میں سے ایک مخروطی ہوگا۔

۲۶ - ایک ذرہ قوتِ جاذبہ $\frac{م\, مہ}{ر^{۲}}$ جب^{۲} طہ کے زیرِعمل جو قطب کی طرف عمل کرتی ہے حرکت کرتا ہے۔ اسے فاصلہ ا پر کے اوج سے رفتار $\sqrt{\frac{۲مہ}{۳ا}}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مدار کی مساوات ر (۱ + جم^{۲} طہ) = ۲ا ہے اور پوری گردش کے دَور کی مدت $(۳ا)^{\frac{۳}{۲}} \times \frac{\pi}{\sqrt{مہ}}$ ہے۔ جہاں م ذرہ کی کمیت ہے۔

۲۷ - اگر ایک ذرہ مرکزی اسراع $\frac{مہ}{ر^{۲}}$(۱+ک^{۲} جب^{۲} طہ)$^{-\frac{۳}{۲}}$ کے زیرِعمل حرکت کرے تو راستہ معلوم کرو اور اِس کی ہندسی تشریح کرو۔

[حرکت کی مساوات $ھ^{۲}$ ($\ddot{ی}$ + ی) = مہ (۱ + ک^{۲} جب^{۲} طہ)$^{-\frac{۳}{۲}}$ کو جم طہ اور جب طہ سے بالترتیب ضرب دیکر تکمل کرنے سے

$$ھ^{۲}\,(\dot{ی}\ جم\ طہ + ی\ جب\ طہ) = مہ\ جب\ طہ\ (۱ + ک^{۲}\ جب^{۲}\ طہ)^{-\frac{۱}{۲}} + ا$$

اور $$ھ^{۲}\,(\dot{ی}\ جب\ طہ - ی\ جم\ طہ) = -\ مہ\ جم\ طہ\ (۱ + ک^{۲}\ جب^{۲}\ طہ)^{-\frac{۱}{۲}} \div (۱+ک^{۲}) + ب$$

ۮَ کو ساقط کرنے سے

ھ٢ ۮ = مہ (١ + ک٢ جب٢ طہ)^١/٢ ÷ (١ + ک٢) + ا جب طہ ۔ ب جم طہ]

٢٨ ۔ ایک ذرہ قوت کے میدان میں حرکت کرتا ہے جس کا قوہ مہ رٓ٢ جم طہ ہے اور اسے فاصلہ ا پر سے ابتدائی خط پر علی القوائم سمت میں رفتار ٢/ۮ √مہ کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ راستہ جو مرتسم ہوگا اس کی مساوات ہے

ر = ا قط [√٢ لوک مس (π + طہ)/٤]

٢٩ ۔ ایک ذرہ مستقل مرکزی قوت لہ کے زیر عمل دائرہ (نصف قطر ا) مرتسم کرتا ہے جب کہ دفعۃً قوت لہ + مہ جب ن ت ہوجاتی ہے جہاں مہ بمقابلہ لہ کے چھوٹا ہے اور ت کو تبدیلی کی آن سے محسوب کیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ کسی بعد کے وقت ت پر قوت کے مرکز سے ذرہ کا فاصلہ

ا + مہ ا / (٣ لہ ۔ ا ن٢) [ن √(ا / ٣ لہ) جب (ت √(٣ لہ / ا)) ۔ جب ن ت]

ہوگا ۔ اگر ٣ لہ = ا ن٢ تو حرکت کی نوعیت کیا ہوگی ؟

[دفعہ ٥٣ کی مساواتوں (١) اور (٢) کو استعمال کرو، دوسری سے حاصل ہوتا ہے ر٢ طہَ = √لہ ا٣ اور تب پہلی مساوات ہو جاتی ہے

رً ۔ لہ ا٣ / ر٣ = ۔ لہ ۔ مہ جب ن ت

ر = ا + ضا رکھو جہاں ضا بہت چھوٹا ہے اور ضا کی دوسری قوتوں کو نظر انداز کرو]

٦٣ ۔ ایک ذرہ قوت (= مہ ۍ^ن) کے مرکز کے گرد ایک راستہ

مرتسم کرتا ہے جو تقریباً دائرہ ہے۔ وہ شرط معلوم کرو کہ یہ قائم حرکت ہو۔

حرکت کی مساوات ہے:

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ء}}{\text{فرط}^2} + \text{ء} = \frac{\text{مہ}}{\text{ہ}^2} \text{ء}^{\text{ن}-۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اگر راستہ نصف قطر $\frac{۱}{\text{ج}}$ کا ایک دائرہ ہو تو $\text{ہ}^2 = \text{مہ}\,\text{ج}^{\text{ن}-۳}$ ....(۲)

فرض کرو کہ ذرہ کو مستدیر راستہ سے ذرا سا اس طرح ہٹا دیا گیا ہے کہ ہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوئی (مثلاً فرض کرو کہ ذرّہ کو ایک اور چھوٹی مزید رفتار قوت کے مرکز سے مخالف سمت میں دھکے کے ذریعہ دی گئی ہے اور عمودی رفتار میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا)۔

(۱) میں ء = ج + لا رکھو جہاں لا بہت چھوٹا ہے، تب اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرط}^2} + \text{ج} + \text{لا} = \frac{(\text{ج} + \text{لا})^{\text{ن}-۲}}{\text{ج}^{\text{ن}-۳}} = \text{ج} + (\text{ن}-۲)\,\text{لا} + \ldots\ldots (۳)$$

لا کے مربعوں اور بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنے یعنی یہ فرض کرنے سے کہ لا ہمیشہ چھوٹا رہتا ہے

$$\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرط}^2} = -(۳-\text{ن})\,\text{لا}$$

اگر ن > ۳ تو ۳ - ن مثبت ہوگا اس لیے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{لا} = \text{ا}\,\text{جم}\left[\sqrt{۳-\text{ن}}\;\text{ط} + \text{ب}\right]$$

اگر ن > ۳ تو ن - ۳ مثبت ہوگا اور حل یہ ہوگا

$$\text{لا} = \text{ا}_1\,\text{و}^{\sqrt{\text{ن}-۳}\;\text{ط}} + \text{ب}_1\,\text{و}^{-\sqrt{\text{ن}-۳}\;\text{ط}}$$

یعنی لا مسلسل طور پر بڑھتا جاتا ہے جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے - گویا لا ہمیشہ چھوٹا نہیں رہتا اور مدار ہمیشہ تقریباً مستدیر نہیں رہتا۔

اگر ن < ۳ تو راستہ تقریباً

$$\text{ء} = \text{ج} + \text{ا}\ \text{جم}\left[\sqrt{\text{۳} - \text{ن}}\ \text{طہ} + \text{ب}\right]$$ ہوگا ....(۴)

اوجی فاصلے مساوات $\frac{\text{فرء}}{\text{فرطہ}} = \text{۰}$ سے حاصل ہوتے ہیں

یعنی $\text{۰} = \text{جب}\left[\sqrt{\text{۳} - \text{ن}}\ \text{طہ} + \text{ب}\right]$ سے،

اس مساوات کا حل زاویوں کا ایک سلسلہ ہے جن میں مسلسل قیمتوں کا فرق $\frac{\pi}{\sqrt{\text{۳} - \text{ن}}}$ ہے، پس یہ راستہ کا اوجی زاویہ ہے۔

اگر ن = ۳ تو اوجی زاویہ لامتناہی ہوگا - اس صورت میں ہم دیکھینگے کہ حرکت غیر قائم ہوگی اور ذرّہ مستدیر راستہ سے ہٹ کر لولبی منحنی مرتسم کریگا۔

ء کی اعظم اور اقل قیمتیں ن < ۳ ہونے کی صورت میں ج + ا اور ج - ا ہیں یعنی حرکت اِن قیمتوں کے اندر رہتی ہے۔

۶۳ - عام صورت بھی اِسی طرح حاصل ہوسکتی ہے۔ فرض کرو کہ مرکزی اسراع فہ (ء) ہے۔

تب مساواتیں (۱) اور (۲) ہوجاتی ہیں

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ء}}{\text{فرطہ}^{2}} + \text{ء} = \frac{\text{مہ}}{\text{ھ}^{2}} \cdot \frac{\text{فہ (ء)}}{\text{ء}^{2}}$$ ....(۵)

اور $\text{ھ}^{2}\,\text{ج}^{3} = \text{مہ فہ (ج)}$ ....(۶)

نیز اب (۳) سے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرط}^2} + \text{ج} + \text{لا} = \frac{\text{ج}^3}{\text{فہ}(\text{ج})} \cdot \frac{\text{فہ}(\text{ج}+\text{لا})}{(\text{ج}+\text{لا})^2}$$

$$= \frac{\text{ج}}{\text{فہ}(\text{ج})}\left[\text{فہ}(\text{ج}) + \text{لا}\,\text{فہ}'(\text{ج}) + \cdots\right]\left[1 - \frac{2\,\text{لا}}{\text{ج}} + \cdots\right]$$

$$= \text{ج} - 2\,\text{لا} + \text{لا}\frac{\text{ج}\,\text{فہ}'(\text{ج})}{\text{فہ}(\text{ج})}$$ لا کے مربعوں وغیرہ کو نظر انداز کرنے سے

$$\therefore \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرط}^2} = -\left\{3 - \frac{\text{ج}\,\text{فہ}'(\text{ج})}{\text{فہ}(\text{ج})}\right\}\text{لا}$$

اور حرکت قائم صرف اُسی صورت میں ہوگی جب کہ

$$\frac{\text{ج}\,\text{فہ}'(\text{ج})}{\text{فہ}(\text{ج})} < 3$$

اس صورت میں اوجی زاویہ ہوگا

$$\pi \div \left\{3 - \frac{\text{ج}\,\text{فہ}'(\text{ج})}{\text{فہ}(\text{ج})}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

۶۴۔ اگر مرکزی اسراع ق کے علاوہ نیم قطر کے علی القوائم اسراع ت بھی موجود ہو تو حرکت کی مساواتیں ہونگی

$$\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فت}}\right)^2 = -\text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اور $$\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{فر}}{\text{فت}}\left(\text{ر}^2\frac{\text{فرط}}{\text{فت}}\right) = \text{ت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

فرض کرو کہ $\text{ر}^2\frac{\text{فرط}}{\text{فت}} = \text{ھ}$ اس صورت میں ھ مستقل نہیں ہے۔

تب (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت}\,\text{ر} = \frac{\text{فرھ}}{\text{فت}} = \frac{\text{فرھ}}{\text{فرط}} \cdot \frac{\text{فرط}}{\text{فت}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ر}^2}\frac{\text{فرھ}}{\text{فرط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\therefore \frac{\text{فر}}{\text{فت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فط}}\,\frac{\text{فط}}{\text{فت}} = -\frac{1}{\text{ی}^2}\,\frac{\text{فی}}{\text{فط}}\cdot\text{ھ}\,\text{ی}^2 = -\text{ھ}\,\frac{\text{فی}}{\text{فط}}$$

اور
$$\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فت}^2} = -\frac{\text{فر}}{\text{فط}}\left(\text{ھ}\,\frac{\text{فی}}{\text{فط}}\right)\frac{\text{فط}}{\text{فت}}$$

$$= -\text{ھ}\,\text{ی}^2\left[\text{ھ}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فط}^2} + \frac{\text{فھ}}{\text{فط}}\,\frac{\text{فی}}{\text{فط}}\right]$$

$$= -\text{ھ}^2\text{ی}^2\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فط}^2} - \frac{\text{ت}}{\text{ی}}\,\frac{\text{فی}}{\text{فط}}$$

مساوات (۳) سے۔

اس لیے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$-\text{ھ}^2\text{ی}^2\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فط}^2} - \frac{\text{ت}}{\text{ی}}\,\frac{\text{فی}}{\text{فط}} - \text{ھ}^2\text{ی}^3 = -\text{ق}$$

یعنی
$$\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فط}^2} + \text{ی} = \frac{\text{ق} - \frac{\text{ت}}{\text{ی}}\,\frac{\text{فی}}{\text{فط}}}{\text{ھ}^2\text{ی}^2} \qquad \text{(۴)}$$

اسے اس شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فط}}\left[\frac{\frac{\text{ق}}{\text{ی}^2} - \frac{\text{ت}}{\text{ی}^3}\,\frac{\text{فی}}{\text{فط}}}{\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فط}^2} + \text{ی}}\right] = \frac{\text{فر}}{\text{فط}}\left(\text{ھ}^2\right) = 2\,\text{ھ}\,\frac{\text{فھ}}{\text{فط}} = \frac{2\,\text{ت}}{\text{ی}^2}$$

مساوات (۳) سے۔

مثالیں

۱ - ایک لچکدار رسی کا طبعی طول ا ہے۔ اس کے ایک سرے کو ایک چکنے

میز کی سطح پر کے ایک نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے اور ایک دوسرا ذرّہ دوسرے سرے کے ساتھ بندھا ہے اور یہ میز پر آزادانہ حرکت کرسکتا ہے ۔ اگر راستہ تقریباً نصف قطر ب کا ایک دائرہ ہو تو ثابت کرو کہ اوجی زاویہ تقریباً $\pi\sqrt{\frac{ب - ل}{۴ب - ۳ل}}$ ہوگا۔

۲ ۔ اگر ایک ذرّہ کا تقریباً مستدیر مدار $ع^۲ (ا^{-۲} - ر^{-۲}) = ب^۴$ ہو تو ثابت کرو کہ اوجی زاویہ تقریباً $\frac{\pi}{\sqrt{م}}$ ہوگا۔

[دفعہ ۴۵ کی مساوات (۵) کو استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ق ایسے بدلتا ہے جیسے $ر^{م-۳}$، تب نتیجہ دفعہ ۶۲ کی رُو سے فوراً ظاہر ہوجاتا ہے]

۳ ۔ ایک ذرہ مرکزی اسراع $\frac{مہ}{ر^۲} - \frac{لہ}{ر^۳}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ اوجی زاویہ $\pi \div \sqrt{۱ + \frac{لہ}{ھ^۲}}$ ہے جہاں $\frac{ھ}{۲}$ مستقل رقبئی رفتار ہے۔

۴ ۔ مرکزی قوت $ا ر^م + ب ر^ن$ کے ماتحت جو تقریباً مستدیر مدار مرتسم ہوتا ہے اُس کا اوجی زاویہ معلوم کرو ۔

۵ ۔ یہ فرض کرکے کہ چاند پر زمین کی طرف قوتِ جاذبہ $\frac{مہ}{(فاصلہ)^۲}$ عمل کرتی ہے اور سورج کی مخل قوت کا اثر "$م^۲$ × زمین کا فاصلہ چاند سے" کے مساوی قوت زمین سے چاند کی طرف پیدا کرتا ہے، ثابت کرو کہ اگر مدار تقریباً مستدیر ہو تو اوجی زاویہ تقریباً $\pi\left(۱ + \frac{۳}{۲}\frac{م^۲}{ن^۲}\right)$ ہوگا جہاں $\frac{۲\pi}{ن}$ اوسط قمری مہینہ ہے اور م کے مکعبوں کو نظر انداز کردیا گیا ہے۔

۶ ۔ ایک ذرّہ مرکزی قوت $\frac{مہ}{ر^۲}$ اور ایک چھوٹے مستقل ماسی الطاف کے زیر عمل تقریباً مستدیر مدار میں حرکت کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر اوسط فاصلہ ل ہو تو

$\text{ط} = \text{ن}\,\text{ت} + \frac{۳}{۲}\,\frac{\text{ف}}{\text{و}}\,\text{ت}^{۲}$ جہاں $\text{مہ} = \text{و}^{۳}\,\text{ن}^{۲}$ اور ف کے مربعوں کو نظرانداز کر دیا گیا ہے ۔

۷۔ ایک ناقابلِ کھنچاؤ رسّی ایک چکنے ثابت حلقہ میں سے گزرتی ہے اور اس کے سروں کے ساتھ دو ذرّے جن کی کمیتیں ھ اور م ہیں بندھے ہیں ۔ یہ پورا نظام ایک افقی میز پر ساکن ہے ۔ ذرہ م کو رسّی کے علی القوائم پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِس کا راستہ ہے

$$\text{و} = \text{ر}\,\text{جم}\left[\sqrt{\frac{\text{م}}{\text{م}+\text{ھ}}}\;\text{ط}\right]$$

اگر رسّی کا تناؤ ت ہو تو حرکت کی مساواتیں یہ ہونگی

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ر}}{\text{فت}^{۲}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فت}}\right)^{۲} = -\frac{\text{ت}}{\text{م}} \qquad \text{(۱)}$$

$$\frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فت}}\left(\text{ر}^{۲}\,\frac{\text{فرط}}{\text{فت}}\right) = ۰ \qquad \text{(۲)}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فت}^{۲}}\,(\text{ل} - \text{ر}) = -\frac{\text{ت}}{\text{ھ}} \qquad \text{(۳)}$$

(۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر}^{۲}\,\dot{\text{ط}} = \text{ھ} \qquad \text{(۴)}$$

اور تب (۱) اور (۳) سے ملتا ہے

$$\left(۱ + \frac{\text{ھ}}{\text{م}}\right)\ddot{\text{ر}} = \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ر}^{۳}}$$

$$\therefore \left(۱ + \frac{\text{ھ}}{\text{م}}\right)\dot{\text{ر}}^{۲} = -\frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ر}^{۲}} + \text{ا} = \text{ھ}^{۲}\left(\frac{۱}{\text{و}^{۲}} - \frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\right)$$

کیونکہ $\dot{\text{ر}}$ صفر ہے ابتدا میں جب کہ ر = و

اس مساوات اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\left(1+\frac{ھ}{م}\right)\left(\frac{فر}{فط}\right)^2 = \left(1+\frac{ھ}{م}\right) ر^2 \div ط^2 = \frac{ر^2 - و^2}{و^2}\, ر^2$$

$$\therefore\ ط \times \sqrt{\frac{م}{م+ھ}} = \int \frac{و\, فر}{ر\sqrt{ر^2 - و^2}} = جم^{-1}\frac{و}{ر} + ج$$

اور ج صفر ہوگا اگر ط کو ابتدائی نیم قطر سے ناپا جائے۔

$$\therefore\ و = ر\, جم\left[\sqrt{\frac{م}{م+ھ}}\ ط\right]$$ راستہ کی مساوات ہے۔

۸۔ ایک بے لچک رسّی ایک اُفقی سطح مستوی میں ایک سوراخ میں سے گزرتی ہے اور رسی کے سروں کے ساتھ دو کمیتیں ھ اور م بندھی ہیں۔ کمیت م انتصاباً لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ ھ سطح مستوی مذکور پر جو راستہ مرتسم کرتا ہے اس کی تفرقی مساوات یہ ہے:

$$\left(1+\frac{م}{ھ}\right)\frac{فر^2 د}{فط^2} + د = \frac{م\, ج}{ھ}\ \frac{1}{ھ^2 د^2}$$

نیز ثابت کرو کہ رسّی کا تناؤ ہے

$$\frac{ھ\, م}{ھ+م}\left(ج + ھ^2 د^3\right)$$

۹۔ سوال ماقبل میں اگر م = ھ اور مؤخر الذکر کو سطح مستوی کے اندر رفتار $\sqrt{\frac{8\, ا\, ج}{3}}$ کے ساتھ ایک اوج سے جو فاصلہ ا پر ہے پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ اول الذکر فاصلہ $\frac{ا}{2}$ اوپر اٹھ آئیگا۔

۱۰۔ دو ذروں کو جن کی کمیتیں ھ اور م ہیں ایک ہلکی رسّی کے ذریعہ مربوط کیا گیا ہے رسّی میز پر کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گزرتی ہے۔ م نیچے لٹک رہا ہے اور ھ میز پر ایسا منحنی مرتسم کرتا ہے جو تقریباً دائرہ ہے جس کا مرکز سوراخ مذکور ہے۔ ثابت کرو کہ ھ کے مدار کا اوجی زاویہ $\pi\sqrt{\frac{ھ+م}{3ھ}}$ ہے۔

۱۱ ۔ کمیت م کا ایک ذرّہ ایک چکنے اُفقی میز پر حرکت کر سکتا ہے ۔ اسے ایک رسّی کے ساتھ باندھا گیا ہے جو میز پر کے ایک چکنے سُوراخ میں سے گزرتی ہے اور نیز کمیت ھ کی ایک چھوٹی چکنی چرخی کے نیچے سے گزرتی ہے اور اس کا دوسرا سرا میز کے نیچے کے رُخ پر ایک ثابت نقطہ سے باندھا گیا ہے ۔ رسّی کے حصے انتصاباً لٹکتے ہیں، اگر حرکت میں ذرا سا ایسا اضطراب پیدا کر دیا جائے جب کہ ذرّہ م یکساں طور پر ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہو کہ زاویۂ معیارِ حرکت میں تغیر واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ اوجی زاویہ ہوگا

$$\pi\sqrt{\frac{\text{ھ} + \text{۴م}}{\text{۱۲م}}}$$

۱۲ ۔ ایک چکنے اُفقی میز پر دو ذرّے ہیں جن کو ایک لچکدار رسّی کے ذریعہ ملایا گیا ہے رسّی کا طبعی طول و ہے اور ابتداءً ذرّے ایک دوسرے سے فاصلہ و پر واقع ہیں ۔ ایک ذرہ کو رسّی پر علی القوائم سمت میں پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر حرکتِ مابعد میں رسّی کا بڑے سے بڑا طول ۲ و ہو تو پھینکنے کی رفتار $\sqrt{\frac{\text{۸ ول}}{\text{۳ م}}}$ ہوگی جہاں م ذروں کی کمیتوں کے درمیان موسیقی اوسط ہے اور ل رسّی کی لچک کی قدر ہے ۔

[فرض کرو کہ دو ذرّے ا اور ب ہیں جن کی کمیتیں ھ اور ھَ ہیں، جن میں ب کو پھینکا گیا ہے ۔ جب ملانے والی رسی کا طول ر ہو اور بناءً علیہ تناؤ ت ہو جہاں $\text{ت} = \text{ل}\,\frac{\text{ر} - \text{و}}{\text{و}}$ تو ا کا اسراع $\frac{\text{ت}}{\text{ھ}}$ ہوگا ا ب کی سمت میں اور ب کا تناؤ $\frac{\text{ت}}{\text{ھَ}}$ ہوگا ب ا کی سمت میں، اضافی حرکت حاصل کرنے کے لیے ہم ب اور ا دونوں کو ا کے مساوی اور مخالف اسراع دیتے ہیں ۔ موخرالذکر تب "ساکن" ہو جاتا ہے اور ب کا اسراع بلحاظ ا کے ب ا کی سمت میں حاصل ہوتا ہے

$$= \frac{\text{ت}}{\text{ھ}} + \frac{\text{ت}}{\text{ھَ}} = \frac{\text{۲}}{\text{م}}\,\text{ل}\,\frac{\text{ر} - \text{و}}{\text{و}} = \frac{\text{۲ل}}{\text{م و}} \times \frac{\text{ا} - \text{وی}}{\text{ی}}$$

اب ب کے اضافی راستہ کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ی}}{\text{فرط}^{۲}} + \text{ی} = \frac{۲\,\text{مہ}}{\text{م}\,\text{ا}\,\text{ھ}^{۲}} \cdot \frac{۱ - \text{ا ی}}{\text{ی}^{۳}}$$

اس کو تکمل کرو اور ابتدائی شرائط داخل کرو یعنی یہ کہ ذرہ کو فاصلہ ا پر کے اوج سے رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے، اس امر سے کہ فاصلہ ۲ا پر ایک اور اوج ہے رفتار و حاصل ہوتی ہے]

۱۳ـ ایک ذرہ نصف قطر ا والے مستدیر مدار پر ایک مرکزی قوت کے زیر عمل جس کا اشتداد مہ $\text{ی}^{۳}$ (۲ ا $\text{ی}^{۲}$ - ۱) ہے حرکت کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ مدار غیر قائم ہے اور اگر اندر کی طرف یا باہر کی طرف ذرا سا اضطراب واقع ہو تو مدار ر = ا مسرطہ یا ر = ا مسرطہ ہوگا۔

۱۴ـ آئن شٹان کے نظریہ متعلقہ حرکتِ سیارگان سے فیل کا سوال پیش نظر آتا ہے۔

ایک ذرہ ایک ثابت مرکز کی طرف مقدار مہ $\left(\frac{۱}{\text{ر}^{۲}} + \frac{۳\,\text{ھ}^{۲}}{\text{ج}^{۲}\,\text{ر}^{۴}}\right)$ کے اسراع کے ساتھ ایک سطح مستوی میں حرکت کرتا ہے جہاں ھ، اسراع کے مرکز کے گرد رفتار کا معیارِ اثر ہے اور ج نور کی رفتار ہے۔ ثابت کرو کہ متصل اوجی خطوں کا درمیانی زاویہ

$$\pi \left(۱ + \frac{۳\,\text{ھ}^{۲}}{\text{ج}^{۲}\,\text{ل}^{۲}}\right) \text{ ہے}$$

جہاں $\frac{\text{ھ}}{\text{ج ل}}$ چھوٹا ہے اور ل اس ناقص کا وترِ خاص ہے جو ذرہ اسی معیارِ حرکت کے معیارِ اثر کے ساتھ مرتسم کریگا بشرطیکہ قانون $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{۲}}$ ہو۔

یہ فرض کرکے کہ سیارہ عطارد اسی قسم کے اسراع (بجانب شمس) کے تابع ہے ثابت کرو کہ اوجی خط ۹٫۲۳۴″ فی صدی کی شرح سے بڑھتا ہے۔ معلوم ہے کہ ل = ۵۵٫۵ × $۱۰^{۹}$، کلومیٹر، $\frac{\text{مہ}}{\text{ج}^{۲}}$ = ۱٫۴۷ کلومیٹر اور عطارد کی دوری مدت = ۸۷٫۹۷ دن۔

پانچواں باب

ایک سطح مستوی میں حرکت جب کہ اسراع مرکزی ہو اور بالعکس فاصلہ کے مربع کے متناسب ہو

۶۵ — اس باب میں ہم اُس حرکت پر بحث کرینگے جب کہ مرکزی اسراع نیوٹن کے کلیۂ تجاذب کے ماتحت ہو۔

اس کلیہ کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے: کسی دو ذرّوں کے درمیان جن کی کمیتیں $م_۱$ اور $م_۲$ ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ر ہے باہمی کشش

$$ج \frac{م_۱ م_۲}{ر^۲}$$

قوت کی اکائیاں ہوتی ہے جہاں ج مستقل ہے اور اُس کی قیمت کمیت اور طول کی اکائی پر منحصر ہے۔ اسے تجاذب کا مستقل کہتے ہیں۔

اگر کمیتوں کو پونڈوں میں اور طول کو فٹوں میں ناپا جائے تو ج کی قیمت تقریباً $۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۹}$ ہوتی ہے اور کشش پونڈلوں میں بیان ہوتی ہے۔

اگر کمیتوں کو گراموں میں اور طولوں کو سنتی میتروں میں ناپا جائے تو ج کی قیمت تقریباً $۶٫۶۶ \times ۱۰^{-۸}$ ہوتی ہے اور قوت ڈائنوں (Dynes) میں بیان ہوتی ہے۔

۶۶ - ایک ذرّہ ایک مدار میں اس طرح حرکت کرتا ہے

کہ اس کا اسراع ہمیشہ مدار کی سطح مستوی میں ایک ثابت نقطہ کی طرف مرکوز ہوتا ہے اور $\frac{\text{م}}{(\text{فاصلہ})^2}$ کے مساوی رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا راستہ ایک مخروطی تراش ہے نیز ان مختلف صورتوں میں جو پیدا ہوتی ہیں تمیز کرو۔

جب، ق $= \frac{\text{م}}{\text{ر}^2}$ تو دفعہ ۴۳ کی مساوات (۵) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{ھ}^2}{\text{ع}^3}\,\frac{\text{فع}}{\text{فر}} = \frac{\text{م}}{\text{ر}^2} \quad \cdots\cdots (۱)$$

تکمل کرنے سے دفعہ ۴۵ کی رو سے

$$\text{و}^2 = \frac{\text{ھ}^2}{\text{ع}^2} = \frac{2\text{م}}{\text{ر}} + \text{ج} \quad \cdots\cdots (۲)$$

اب ناقص اور زائد کی (ع، ر) مساواتیں بلحاظ ماسکہ کے یہ ہیں:

$$\frac{\text{ب}^2}{\text{ع}^2} = \frac{2\text{ا}}{\text{ر}} - 1 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ب}^2}{\text{ع}^2} = \frac{2\text{ا}}{\text{ر}} + 1 \quad \cdots\cdots (۳)$$

جہاں ۲ا اور ۲ب بالترتیب متقاطع (عرضی) اور مزدوج محوروں کے طول ہیں۔

پس اگر ج منفی ہو تو (۲) سے ایک ناقص تعبیر ہوگا، اور اگر ج مثبت ہو تو زائد۔

نیز اگر ج = ۰ تو (۲) ہو جاتی ہے: $\frac{\text{ع}^2}{\text{ر}}$ = مستقل، اور یہ مکافی کی (ع، ر) مساوات ہے بلحاظ ماسکہ کے۔

پس (۲) سے ہمیشہ ایک مخروطی تراش تعبیر ہوتی ہے جس کا ماسکہ قوت کا مرکز ہے اور جو ہے

ناقص / مکافی / زائد } اگر بالترتیب ج { منفی / صفر / مثبت } ہو

یعنی اگر بالترتیب $و^2 \lesseqgtr \frac{2\text{مہ}}{\text{ر}}$ یعنی اگر بالترتیب کسی نقطہ ن پر ذرہ کی رفتار کا مربع $\lesseqgtr \frac{2\text{مہ}}{\text{س ن}}$ جہاں س ماسکہ ہے۔

نیز مساوات (۲) اور (۳) کا مقابلہ کرنے سے ہمیں ناقص کی صورت میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ج}}{-1} = \frac{\text{مہ}}{\text{ا}} = \frac{\text{ھ}^2}{\text{ب}^2}$$

$$\therefore \text{ھ} = \sqrt{\text{مہ}\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}} = \sqrt{\text{مہ} \times \text{نیم وتر خاص}} \text{ اور ج} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ا}}$$

پس ناقص کی صورت میں $و^2 = \text{مہ}\left(\frac{2}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ا}}\right)$ ....(۴)

اسی طرح زائد کے لیے $و^2 = \text{مہ}\left(\frac{2}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ا}}\right)$

اور مکافی کے لیے $و^2 = \frac{2\text{مہ}}{\text{ر}}$

یہ بات قابلِ توجہ ہے کہ ہر صورت میں کسی نقطہ پر کی رفتار اپنی سمت پر منحصر نہیں ہے۔

چونکہ ھ دوچند ہے اُس رقبہ کا جو اکائی وقت میں مرتسم ہوتا ہے (دفعہ ۵۴) اس لیے اگر ت وقت ہو پورے ناقص کو مرتسم کرنے کا تو

$$\text{ت} = \frac{\text{ناقص کا رقبہ}}{\frac{1}{2}\,\text{ھ}} = \frac{\pi\,\text{ا}\,\text{ب}}{\frac{1}{2}\sqrt{\text{مہ}\,\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{مہ}}}\,\text{ا}^{\frac{3}{2}} \quad \text{......(5)}$$

پس دَوری مدت کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے محورِ اعظم کا مکعب ۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر ذرہ کو فاصلہ ر سے رفتار و کے ساتھ کسی سمت میں پھینکا جائے تو ناقص، مکافی یا زائد مرتسم ہوگا اگر بالترتیب

$$\text{و}^2 <=> \frac{2\,\text{مہ}}{\text{ر}} \text{ سے ۔}$$

اب جو رفتار لاتناہی سے فاصلہ ر تک گرنے میں ذرہ حاصل کرتا ہے اس کا مربع دفعہ ۱۳ کی رُو سے

$$= 2\int_{\infty}^{\text{ر}} \left(-\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2}\right) \text{فر} = \left[\frac{2\,\text{مہ}}{\text{ر}}\right]_{\infty}^{\text{ر}} = \frac{2\,\text{مہ}}{\text{ر}}$$

پس راستہ ناقص، مکافی یا زاید ہوگا اگر بالترتیب کسی نقطہ پر کی رفتار <=> اُس رفتار سے جو لاتناہی سے نقطہ مذکور تک گرنے میں حاصل ہوتی ہے ۔

نتیجہ صریح ۲۔ نصف قطر ر والا دائرہ مرتسم کرنے کی رفتار و_1 اس طرح حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{و}_1^2}{\text{ر}} = \text{عمادی اسراع} = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2} \quad \text{یعنی} \quad \text{و}_1^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}}$$

اس لیے

$$\text{و}_1 = \frac{\text{لاتناہی سے رفتار}}{\sqrt{2}}$$

۶۷۔ دفعہ ماقبل میں زائد کی جو شاخ مرتسم ہوتی ہے وہ مرکزِ قوت کے قریب کی شاخ ہے ۔

اگر مرکزی اسراع مرکز سے باہر کی طرف ہو اور اگر یہ ایسے بدلے جیسے فاصلہ کے مربع کا عکس تو دوسری شاخ مرتسم ہوگی کیونکہ اس صورت میں حرکت کی مساوات ہوگی

$$\frac{ھ^2}{ع^3}\,\frac{فرع}{فر} = -\frac{مہ}{ر^2} \text{ اس لیے } \frac{ھ^2}{ع^2} = -\frac{2مہ}{ر} + ج \text{ ......(۱)}$$

اب زائد کی دُور کی شاخ کی (ع، ر) مساوات ہے

$$\frac{ب^2}{ع^2} = 1 - \frac{2ا}{ر}$$

اور یہ ہمیشہ (۱) کے ساتھ مطابقت رکھتی ہے بشرطیکہ $\frac{ھ^2}{ب^2} = \frac{مہ}{ا} = ج$

یعنی $ھ = \sqrt{مہ \times \text{نیم وترِ خاص}}$ اور $و^2 = \frac{ھ^2}{ع^2} = مہ\left(\frac{1}{ا} - \frac{2}{ر}\right)$

۶۸- نقطہ رمی اور رمی کی سمت، مقدار اور رفتار معلوم ہیں مدار بناؤ۔

فرض کرو کہ کشش کا مرکز س ہے اور ن نقطۂ رمی ہے، ت ن تَ پھینکنے کی سمت ہے اور و پھینکنے کی رفتار ہے۔

صورت ۱- فرض کرو کہ $و^2 < \frac{2مہ}{س ن}$ تب دفعہ ۶۶ کی رُو سے مدار ناقص ہوگا جس کا محورِ اعظم ۲ا ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا

$$و^2 = مہ\left(\frac{2}{ر} - \frac{1}{ا}\right) \text{ جہاں } ر = س ن \text{ یعنی } 2ا = \frac{2رمہ}{2مہ - و^2ر}$$

ن سَ اس طرح کھینچو کہ ن سَ اور ن س، خط ت ن تَ کی ایک ہی طرف واقع ہوں اور $\angle$ تَ ن سَ = $\angle$ ت ن س اور

$$ن سَ = 2ا - س ن = 2ا - ر = \frac{و^2ر^2}{2مہ - و^2ر} \text{ لو}$$

تب سَ دوسرا ماسکہ ہوگا پس ناقصی مدار معلوم ہوگیا۔

صورت ۲ — فرض کرو کہ $و^2 = \frac{2مہ}{س ن}$ اس لیے راستہ مکافی ہے ۔ صورت اول کی طرح سمت ن سَ معلوم کرو۔ اس صورت میں یہ مکافی کے محور کی سمت ہوگی ۔ س ع ، ن سَ کے متوازی کھینچو جو ت ن تَ سے ع پر ملے ، س ما عمود کھینچو ت ن تَ پر اور ما ا عمود کھینچو س ع پر، تب ا مطلوبہ مکافی کا راس ہوگا اور اس کا ماسکہ س ہوگا ، لہٰذا منحنی مرتسم ہوسکتا ہے ۔

نیم وترِ خاص $= 2\,س\,ا = 2\cdot\frac{س\,ما^2}{س\,ن} = \frac{2ع^2}{ر}$ جہاں ع عمود ہے س سے پھینکنے کی سمت پر ۔

صورت ۳ — فرض کرو کہ $و^2 > \frac{2مہ}{س ن}$ اور بنائً علیہ مدار قطع زائد ہے جس کا قاطع محور ۲ ا مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$و^2 = مہ\left(\frac{2}{ر}+\frac{1}{ا}\right) \text{ اور اس لیے } 2ا = \frac{2مہ ر}{و^2ر - 2مہ}$$

اس صورت میں ن سَ ، ن س سے ت ن تَ کی مخالف سمت میں واقع ہوتا ہے اور $\angle$ ت ن س $= \angle$ ت ن سَ ، اور سَ ن ۔ س ن = ۲ ا

$$\text{پس } سَ\,ن = ر + 2ا = \frac{و^2ر^2}{و^2ر - 2مہ}$$

اب سَ یعنی دوسرا ماسکہ معلوم ہوگیا اس لیے مدار مرتسم ہوسکتا ہے ۔

۶۹ ۔ **کیپلر کے قانون** — ہئیت دان کیپلر نے سالہاسال کی محنت ومشقت کے بعد سورج کے گرد مختلف سیّاروں کی حرکت کے

متعلق تین قوانین دریافت کیے جو حسبِ ذیل ہیں:

(۱) ہر ایک سیارہ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا ماسکہ سورج ہوتا ہے۔

(۲) کسی ایک سیارہ کا نیم قطر جو سیارہ سے سورج تک کھینچا جائے مختلف مدتوں میں جو رقبے مرتسم کرتا ہے وہ رقبے متناظر مدتوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

(۳) مختلف سیاروں کی دَوری مدتوں کے مربعے اُن کے مداروں کے اعظم محوروں کے مکعبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

۷۰۔ دوسرے کلیہ سے ہم دفعہ ۴۵ کی مدد سے اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ہر سیارہ کا اسراع اور اس لیے اِس پر عمل کرنے والی قوت سورج کی طرف مرکوز ہوتی ہے۔

پہلے کلیہ سے دفعات ۵۵ و ۶۵ کی رُو سے ظاہر ہے کہ ہر ایک سیارہ کا اسراع سورج سے اِس کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتا ہے۔

تیسرے کلیہ سے ظاہر ہے کہ چونکہ دفعہ ۶۶ سے

$$ت^۲ = \frac{۴\pi^۲}{م} \cdot ل^۳$$

اس لیے مطلق اسراع م (یعنی سورج سے اکائی فاصلہ پر اسراع) سب سیاروں کے لیے وہی ہے۔

کیپلر کے قوانین بالا کے مشابہ قوانین سیاروں اور اُن کے توابع کے متعلق بھی درست ہیں۔

امور مندرجۂ بالا سے واضح ہے کہ نیوٹن کا قانونِ تجاذب تمام نظام شمسی کے اندر درست ہے۔

۷۱۔ کیپلر نے یہ قوانین مسلسل کئی مختلف مفروضات تسلیم کرکے حاصل کیے تھے حتیٰ کہ یہ مفروضات اسے اوروں کے مقابلہ میں نتائج محصلہ کے ساتھ

زیادہ مطابقت رکھنے والے معلوم ہوئے ۔ اس نے اپنے مشاہدات کا سلسلہ ایک مشہور و معروف ہئیت دان ٹائی کو براھی (Tycho Brahé) کے نتائج سے جو ملک ڈنمارک میں (۱۵۴۶ء تا ۱۶۰۱ء) گذرا ہے شروع کیا۔

کیپلر نے اپنا پہلا اور دوسرا کلیہ ۱۶۰۹ء میں اپنی ایک کتاب میں جو اُس نے سیارہ مریخ کے متعلق لکھی تھی شائع کیا ۔ تیسرا کلیہ اُس نے دس سال بعد اپنی ایک کتاب موسومہ "ہارمنیز آف دی ورلڈ" (On the Harmonies of the World) میں قلمبند کیا ۔ ان قوانین کی تفصیل و تشریح نیوٹن نے اپنی کتاب "پرنسیپیا" (Principia) میں کی جو ۱۶۸۷ء میں طبع ہوئی ۔

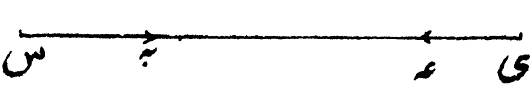
۷۲ ۔ کیپلر کا تیسرا کلیہ جس شکل میں کہ یہ دفعہ ۶۹ میں مرقوم ہوا صرف اِسی صورت میں درست متصور ہوسکتا ہے جب کہ سورج کو ثابت مانا جائے یا سیّارہ کی کمیّت کو سورج کی کمیّت کے مقابلہ میں اس قدر کم مانا جائے کہ اول الذکر نظر انداز ہوسکے ۔

اس کی زیادہ صحیح شکل حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہوسکتی ہے ۔

فرض کرو کہ سورج کی کمیّت س ہے اور کسی سیارہ کی کمیّت ی ہے اور جہ اسراع کا مستقل ہے ۔ پس دونوں کے درمیان کششِ جاذبہ $\text{جہ}\,\frac{\text{س} \times \text{ی}}{\text{ر}^2}$ ہے جہاں ر فاصلہ ہے کسی آن میں سورج اور سیارۂ مذکور کے درمیان ۔

تب سیارہ کا اسراع سورج کی طرف عہ $\left(= \frac{\text{جہ س}}{\text{ر}^2}\right)$ ہے اور

سورج کا سیارہ کی طرف بہ $\left(= \frac{\text{جہ ی}}{\text{ر}^2}\right)$ ہے ۔



سیارہ کا اسراع بلحاظ سورج کے معلوم کرنے کے لیے زمیں دونوں کو ی س کی سمت میں اسراع بہ دینا چاہیے - تب سورج کا اسراع صفر ہوگا اور سیارہ کا ی س کی سمت میں عہ + بہ ہوگا - اگر مزید برآں ہم ہر ایک کو سورج کی رفتار کے مساوی اور مقابل رفتار بھی دیدیں تو ہمیں سورج کی اضافت سے سیارہ کی حرکت حاصل ہوگی -

تب سیارہ کا اضافی اسراع بلحاظ سورج کے ہوگا

$$\text{عہ} + \text{بہ} = \frac{\text{جہ}\,(\text{س} + \text{ی})}{\text{ر}^2}$$

پس دفعہ ۶۶ کا مہ = جہ (س + ی) اور حسب دفعہ مذکور

$$\text{ت} = \frac{۲\pi}{\sqrt{\text{جہ}\,(\text{س} + \text{ی})}}\,\text{ا}^{\frac{3}{2}}$$

اگر گردش کی مدت ت_1 ہو اور کسی اور سیارہ ی_1 کے اضافی راستہ کا نیم محورِ اعظم ا_1 ہو تو اسی طرح سے

$$\text{ت}_1 = \frac{۲\pi}{\sqrt{\text{جہ}\,(\text{س} + \text{ی}_1)}}\,\text{ا}_1^{\frac{3}{2}} \quad \therefore \quad \frac{\text{س} + \text{ی}}{\text{س} + \text{ی}_1} \cdot \frac{\text{ت}^2}{\text{ت}_1^2} = \frac{\text{ا}^3}{\text{ا}_1^3}$$

چونکہ کیپلر کا کُلیہ یعنی $\frac{\text{ت}^2}{\text{ت}_1^2}$ متناسب ہے $\frac{\text{ا}^3}{\text{ا}_1^3}$ کے، بڑی حد تک درست ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\frac{\text{س} + \text{ی}_1}{\text{س} + \text{ی}}$ بہت قریب ہے اکے، اور بناءً علیہ یا تو ی اور ی_1 ایک دوسرے کے تقریباً مساوی ہیں یا بلحاظ س کے دونوں بہت چھوٹے ہیں - لیکن یہ معلوم ہے کہ سیاروں کی کمیتیں بہت مختلف ہیں اس لیے لازماً یہ بلحاظ سورج کی کمیت کے بہت کم ہونگی -

۴۲ - دفعہ ماقبل کے تصحیح یافتہ ضابطہ کی مدد سے ہم کسی سیارہ کی کمیت کی نسبت سورج کی کمیت کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں بشرطیکہ سیارہ کا کوئی چھوٹا تابع ہو جس کا فاصلہ سیارہ سے اور جس کا دَور دونوں معلوم ہوں۔

تابع کی صورت میں وہ قوت جو تابع کے راستہ کو متعین کرتی ہے محض سیارہ کی کشش پر مشتمل ہوتی ہے۔

اگر ی سیارہ کی کمیت ہو اور اِس کا اوسط فاصلہ سورج سے د ہو تو دفعۂ ماقبل کی مانند

$$ت = \frac{2\pi}{\sqrt{ج(س+ی)}}\, د^{\frac{3}{2}}$$

اسی طرح سے اگر تابع کی کمیت ی ہو، اس کا اوسط فاصلہ سیارہ سے دَ، اور اس کی دَوری مدت تَ تو

$$ت' = \frac{2\pi}{\sqrt{ج(ی+ی')}}\, د'^{\frac{3}{2}} \quad \therefore \quad \frac{س+ی}{ی+ی'} = \frac{ت'^2}{ت^2}\,\frac{د^3}{د'^3}$$

چونکہ مقداریں ت، تَ، د، دَ معلوم ہیں اس لیے اس سے $\frac{س+ی}{ی+ی'}$ کی قیمت نکل سکتی ہے۔

عددی مثال کے طور پر زمین ز اور چاند چ کی صورت پر غور کرو۔

$$\frac{س+ز}{ز+چ} = \frac{ت'^2}{ت^2}\,\frac{د^3}{د'^3}$$

اب ت = $۳۶۵\frac{1}{4}$ دن اور تَ = $۲۷\frac{1}{3}$ دن، د = ۹۳۰۰۰۰۰۰ میل اور دَ = ۲۴۰۰۰۰ میل جہاں سب قیمتیں تقریبی ہیں۔

$$\therefore \frac{س+ز}{ز+چ} = \left(\frac{۲۷\frac{1}{3}}{۳۶۵\frac{1}{4}}\right)^2 \times \left(\frac{۹۳۰۰۰}{۲۴}\right)^3 = ۳۲۵۹۰۰ \text{ تقریباً}$$

اس لیے س + ز = ۳۲۵۹۰۰ گنا زمین اور چاند کی کمیتوں کے مجموعہ کا۔
نیز چ = $\frac{\text{۱}}{\text{۸۱}}$ ز تقریباً

∴ س = ۳۳۰۰۰۰ ز تقریباً

یہ جواب صحیح کمیت کے کافی قریب ہے۔

اگر سورج کو ۴۴۰۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک کرہ فرض کیا جائے اور اس کی اوسط کثافت زمین کی کثافت کی ن گنا ہو جب کہ زمین کو ۴۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک کرہ تسلیم کیا جائے تو ہمیں حاصل ہوگا:

$$\text{ن} \times (\text{۴۴۰۰۰۰})^{\text{۳}} = \text{۳۳۰۰۰۰} \times (\text{۴۰۰۰})^{\text{۳}}$$

$$\therefore \text{ن} = \frac{\text{۳۳۰۰۰۰}}{\text{۱۱۰}^{\text{۳}}} = \frac{\text{۳۳۰}}{\text{۱۳۳۱}} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}} \ \text{تقریباً}$$

پس سورج کی اوسط کثافت

= زمین کی کثافت کا $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ × ۵٫۵۲۷ = ۱٫۴ گرام فی مکعب سنتی میٹر تقریباً

پس سورج کی اوسط کثافت پانی کی کثافت کی تقریباً ڈیوڑھی ہے۔

۴۷ ۔ سیارہ ی کی کمیت یا زیادہ صحیح طور پر اس کی اور اس کے تابع کی کمیتوں کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے اس کے اوسط فاصلہ اور دوری مدت معلوم ہونے کی کوئی ضرورت نہیں۔

کیونکہ اگر زمین اور چاند کی کمیتیں بالترتیب ز اور چ ہوں اور زمین کا فاصلہ سورج سے س ہو اور چاند کا فاصلہ زمین سے ر ہو نیز اگر ما ایک سال کو تعبیر کرے اور ما اوسط قمری مہینہ ہو تو

$$\text{ما} = \frac{\text{۲}\pi}{\sqrt{\text{جـ}(\text{س}+\text{ز})}}\,\text{س}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} \quad \text{..........(۱)}$$

$$\text{ما} = \frac{\text{۲}\pi}{\sqrt{\text{جـ}(\text{ز}+\text{چ})}}\,\text{ر}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} \quad \text{..........(۲)}$$

نیز دفعۂ ماقبل کی مانند

$$\text{ت} = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{بہ}(\text{ی} + \text{ی})}}\,\text{د}^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(۱) اور (۳) سے

$$(\text{ی} + \text{ی})\,\frac{\text{ت}^2}{\text{د}^3} = (\text{س} + \text{ز})\,\frac{\text{ما}^2}{\text{ر}^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(۲) اور (۳) سے

$$(\text{ی} + \text{ی})\,\frac{\text{ت}^2}{\text{د}^3} = (\text{ز} + \text{چ})\,\frac{\text{ما}^2}{\text{ر}^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

مساوات (۴) سے ی + ی کی نسبت س + ز کے ساتھ معلوم ہوتی ہے۔

مساوات (۵) سے ی + ی کی نسبت ز + چ کے ساتھ معلوم ہوتی ہے۔

مثالیں

۱ ۔ ایک ذرہ ایک ناقص کی شکل میں حرکت کر رہا ہے اور قوت کا مرکز ناقص کے ماسکہ پر ہے ۔ ثابت کرو کہ اِس کی رفتار اِن دو مستقل رفتاروں سے مرکب ہے $\frac{\text{مہ}}{\text{حہ}}$ قطر پر علی القوائم سمت میں اور $\frac{\text{مہ ز}}{\text{حہ}}$ محورِ اعظم پر علی القوائم ۔

۲ ۔ ایک ذرہ ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا ماسکہ قوت کا مرکز ہے ۔ ثابت کرو کہ مدار کے کسی نقطہ پر دوسرے ماسکہ کے گرد زاویئی رفتار بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے نقطۂ مذکور پر عماد کے مربع کا مقلوب ۔

۳ ۔ ایک ذرہ مرکزی اسراع $\left[= \frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^2} \right]$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ اِسے فاصلہ ر پر سے رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر زاویہ رمی

$\text{جیب}^{-1} \dfrac{\text{مہ}}{\text{و ر} \left(\text{و}^{2} - \dfrac{2\,\text{مہ}}{\text{ر}}\right)^{\frac{1}{2}}}$ ہوتو ذرہ کا راستہ قائم زائد ہوگا۔

۴ ۔ ایک ذرہ ایسی قوت $\dfrac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^{2}}$ کے زیرِ عمل ناقص مرتسم کرتا ہے جو ماسکہ کی طرف عمل کرتی ہے ۔ اگر اسے قوت کے مرکز سے فاصلہ ر پر سے رفتار و کے ساتھ پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ دوری مدت ہوگی

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\text{مہ}}} \left[\frac{2}{\text{ر}} - \frac{\text{و}^{2}}{\text{مہ}}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

۵ ۔ اگر زمین کی رفتار اس کے مدار (جسے مستدیر فرض کیا گیا ہے) پر کے کسی نقطہ پر ڈیڑھ گنا ہو جائے تو ثابت کرو کہ یہ سورج کے گرد مکافی مرتسم کریگی جس کے ماسکہ پر سورج ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ اگر کسی جسم کو زمین سے ، میل فی سکنڈ کی رفتار سے زیادہ رفتار کے ساتھ پھینکا جائے تو یہ زمین پر واپس نہ آئیگا اور ممکن ہے کہ نظام شمسی سے ہی باہر چلا جائے۔

۶ ۔ سطح زمین سے ایک جسم کو رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ اگر جاذبۂ ارض کی تخفیف کو ملحوظ رکھا جائے لیکن ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کیا جائے تو راستہ ناقص ہوگا جس کا محورِ اعظم $\dfrac{2\,\text{ج}\,\text{ا}^{2}}{2\,\text{ج}\,\text{ا} - \text{و}^{2}}$ ہوگا جہاں ا زمین کا نصف قطر ہے۔

۷ ۔ اگر کوئی جسم بلامزاحمت لا انتہا فاصلہ سے زمین پر گرے تو زمین پر اس کی رفتار $\sqrt{2\,\text{ج}\,\text{ا}}$ ہوگی جہاں ا زمین کا نصف قطر ہے۔

ثابت کرو کہ اگر کوئی ذرہ اسی طرح سورج پر گرے تو اس کی رفتار کو زمین کی رفتار کے ساتھ نسبت $\sqrt{\dfrac{\text{مدار ارض کا قطر}}{\text{سورج کا نصف قطر}}}$ ہوگی۔

۸ ۔ اگر ایک سیارہ کو اس کے مدار پر (جسے مستدیر فرض کیا گیا ہے) یکا یک روک دیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ سورج میں اپنی دوری مدت کے $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ گنی

مدت میں جا گریگا۔

۹ - سورج کے گرد زمین کے مدار کا خروجِ المرکز $\frac{۱}{۶۰}$ ہے، ثابت کرو کہ زمین کا فاصلہ سورج سے، مدار کے نصف محورِ اعظم سے چھ مہینے اور تقریباً دو دن تک زیادہ رہتا ہے۔

۱۰ - مریخ کا اوسط فاصلہ سورج سے، زمین کے فاصلہ کا تقریباً ۱٫۵۲۴ گنا ہے سورج کے گرد مریخ کی گردش کی مدت معلوم کرو۔

۱۱ - سورج کے گرد مریخ کی گردش کا دَور ۶۸۷ دن ہے اور اُس کا اوسط فاصلہ تقریباً ۱۴ کروڑ ۱۵ لاکھ میل ہے۔ مریخ سے اِس کے تابع ڈیموس کا فاصلہ ۱۴۶۰۰ میل ہے اور اُس کی گردش کا دَور ۳۰ گھنٹے ۱۸ منٹ، ثابت کرو کہ سورج کی کمیّت مریخ کی کمیّت کے ۳۰ لاکھ گنا سے کچھ زیادہ ہے۔

۱۲ - مشتری کا دَور ۱۱٫۸۶ سال کا ہے اور اُس کا اوسط فاصلہ ۴۸ کروڑ ۳۰ لاکھ میل۔ اِس کے پہلے تابع کا فاصلہ ۲ لاکھ ۶۱ ہزار میل ہے اور اس کی گردش کی مدت ۱ دن $۱۸\frac{۱}{۲}$ گھنٹے ہے، ثابت کرو کہ مشتری کی کمیّت سورج کی کمیّت کے ہزارویں حصہ سے قدرے کم ہے۔

۱۳ - مشتری کا بیرونی تابع تقریباً $۱۶\frac{۳}{۴}$ دن میں پورا چکر لگاتا ہے اور اس کا فاصلہ سیارہ کے مرکز سے سیارۂ مذکور کے نصف قطر کا $۲۶\frac{۱}{۲}$ گنا ہے۔ سب سے آخر میں جو تابع منکشف ہوا اُس کا دور تقریباً ۱۲ گھنٹے کا ہے۔ مؤخر الذکر کا فاصلہ سیارہ کے مرکز سے محسوب کرو۔

یہ فرض کر کے کہ چاند کا فاصلہ زمین سے زمین کے ۶۰ نصف قطروں کے مساوی ہے مشتری کی اوسط کثافت کی نسبت زمین کی اوسط کثافت کے ساتھ معلوم کرو۔ جب کہ چاند کے کوکبی دَور کی مدت تقریباً $۲۷\frac{۱}{۳}$ دن لی جائے۔

[دفعہ ۴، کی مساواتوں (۲) اور (۳) کو استعمال کرو اور ج کو بمقابلہ ز کے نظر انداز کر دو اور ی، کو بمقابلہ ی کے نظر انداز کر دو]

۱۴ - ایک سیارہ سورج کے گرد ناقص مرتسم کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اِس کا سمتی نیم قطر مدار کے محورِ اعظم پر علی القوائم ہو تو اس کی رفتار سورج سے پرے کی سمت

میں بڑی سے بڑی ہوگی اور اس وقت اِس کی قیمت $\frac{۲\pi\,\text{لا}\,\text{ز}}{\text{ت}\sqrt{۱-\text{ز}^{۲}}}$ ہوگی جہاں ۲ لا محورِ اعظم ہے ز خروج المرکز ہے اور ت اس کے دَور کی مدت ہے ۔

۷۵۔ ایک ناقصی مدار کی محور اعظم کے ایک سرے سے کسی معلومہ قوس کے طے کرنے کی مدت معلوم کرو۔

دفعہ ۵۳ کی مساوات $\text{ر}^{۲}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}=\text{ھ}$ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ھ ت}=\int_{0}^{\text{طہ}}\text{ر}^{۲}\,\text{فرطہ}=\int_{0}^{\text{طہ}}\frac{\text{ل}^{۲}}{(۱+\text{ز جم طہ})^{۲}}\,\text{فرطہ}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(۱)$$

اگر ز < ۱ تو احصائے تکملی کے ایک مشہور نتیجہ کی بنا پر

$$\int_{0}^{\text{طہ}}\frac{\text{فرطہ}}{۱+\text{ز جم طہ}}=\frac{۲}{\sqrt{۱-\text{ز}^{۲}}}\,\text{مس}^{-۱}\left[\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}\,\text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\right]\qquad\ldots\ldots(۲)$$

مستقل ز کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$\int_{0}^{\text{طہ}}\frac{-\text{جم طہ}}{(۱+\text{ز جم طہ})^{۲}}\,\text{فرطہ}=\frac{۲\,\text{ز}}{(۱-\text{ز}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\,\text{مس}^{-۱}\left[\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}\,\text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\right]$$

$$-\frac{۱}{۱-\text{ز}^{۲}}\,\frac{\text{جب طہ}}{۱+\text{ز جم طہ}}\qquad\ldots\ldots\ldots(۳)$$

$$\therefore\int_{0}^{\text{طہ}}\frac{۱}{(۱+\text{ز جم طہ})^{۲}}\,\text{فرطہ}=\int_{0}^{\text{طہ}}\left[\frac{۱}{۱+\text{ز جم طہ}}-\frac{\text{ز جم طہ}}{(۱+\text{ز جم طہ})^{۲}}\right]\text{فرطہ}$$

$$=\frac{۲}{(۱-\text{ز}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\,\text{مس}^{-۱}\left[\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}\,\text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\right]-\frac{\text{ز}}{۱-\text{ز}^{۲}}\,\frac{\text{جب طہ}}{۱+\text{ز جم طہ}}\qquad\ldots\ldots(۴)$$

اب چونکہ $\frac{\text{ل}^2}{\text{ھ}} = \frac{\text{ل}^2}{\sqrt{\text{مہ}\,\text{ل}}} = \frac{\text{ا}^{\frac{3}{2}}(1-\text{ز}^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}}$ اس لیے (۱) کی رُو سے

$$\text{ت} = \frac{\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}}\left[2\,\text{مس}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}}}\ \text{مس}\frac{\text{ط}}{2}\right) - \text{ز}\sqrt{1-\text{ز}^2}\ \frac{\text{جب ط}}{1+\text{ز جم ط}}\right] \quad \ldots\ldots(5)$$

متبادلاً ۔ اگر ہم متغیر ط کو ایک اور متغیر فہ میں اس ربط کی مدد سے تبدیل کریں $(1+\text{ز جم ط})(1-\text{ز جم فہ}) = 1-\text{ز}^2$ اور بناءً علیہ

$$\text{جم ط} = \frac{\text{جم فہ} - \text{ز}}{1-\text{ز جم فہ}}\text{،}\quad \text{جب}^2\text{ط} = \frac{(1-\text{ز}^2)\,\text{جب}^2\text{فہ}}{(1-\text{ز جم فہ})^2}$$

$$\text{اور جب ط فرط} = \frac{\text{جب فہ}\,(1-\text{ز}^2)}{(1-\text{ز جم فہ})^2}\ \text{فرفہ}\text{،}\quad \text{نیز فرط} = \frac{\sqrt{1-\text{ز}^2}}{1-\text{ز جم فہ}}\ \text{فرفہ}$$

اس لیے

$$\int_0^{\text{ط}} \frac{\text{فرط}}{(1+\text{ز جم ط})^2} = \int_0^{\text{فہ}} \frac{1-\text{ز جم فہ}}{(1-\text{ز}^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{فرفہ} = \frac{1}{(1-\text{ز}^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\text{فہ} - \text{ز جب فہ}\right]$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$

$$\text{اب مس}^2\frac{\text{فہ}}{2} = \frac{1-\text{جم فہ}}{1+\text{جم فہ}} = \frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}} \times \frac{1-\text{جم ط}}{1+\text{جم ط}} = \frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}}\ \text{مس}^2\frac{\text{ط}}{2}$$

$$\text{اور}\qquad \text{جب فہ} = \frac{\sqrt{1-\text{ز}^2}}{1+\text{ز جم ط}}\ \text{جب ط}$$

(۶) میں مندرج کرنے سے نتیجہ (۴) حاصل ہوگا اور بعد ازاں حسبِ سابق عمل کرو۔

۷۶ ۔ زائدی مدار کی قوس کے طے کرنے کی مدت

اگر ز > ۱ تو

$$\int_{0}^{\text{ط}} \frac{\text{فط}}{1+\text{ز جم ط}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ز}^2-1}}\,\text{لو}\,\frac{\sqrt{\text{ز}+1}+\sqrt{\text{ز}-1}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}}{\sqrt{\text{ز}+1}-\sqrt{\text{ز}-1}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}}$$

بلحاظ ز کے تفرق کرنے سے

$$\int_{0}^{\text{ط}} \frac{-\text{جم ط}}{(1+\text{ز جم ط})^2}\,\text{فط} = \frac{-\text{ز}}{(\text{ز}^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,\text{لو}\left[\frac{\sqrt{\text{ز}+1}+\sqrt{\text{ز}-1}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}}{\sqrt{\text{ز}+1}-\sqrt{\text{ز}-1}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}}\right] + \frac{1}{\text{ز}^2-1}\,\frac{\text{جب ط}}{1+\text{ز جم ط}}$$

اس لیے

$$\int \frac{\text{فط}}{(1+\text{ز جم ط})^2} = \int_{0}^{\text{ط}}\left[\frac{1}{(1+\text{ز جم ط})} - \frac{\text{ز جم ط}}{(1+\text{ز جم ط})^2}\right]\text{فط}$$

$$= -\frac{1}{(\text{ز}^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,\text{لو}\left[\frac{\sqrt{\text{ز}+1}+\sqrt{\text{ز}-1}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}}{\sqrt{\text{ز}+1}-\sqrt{\text{ز}-1}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}}\right] + \frac{\text{ز}}{\text{ز}^2-1}\,\frac{\text{جب ط}}{1+\text{ز جم ط}}$$

اب چونکہ ایسی صورت میں $\frac{\text{ل}^2}{\text{ح}} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}} = \frac{\text{لا}^{\frac{3}{2}}(\text{ز}^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}}$

اس لیے دفعہ ماقبل کی مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = \frac{\text{لا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}}\Bigg]\,\text{ز}\sqrt{\text{ز}^2-1}\,\frac{\text{جب ط}}{1+\text{ز جم ط}} - \text{لو}\,\frac{\sqrt{\text{ز}+1}+\sqrt{\text{ز}-1}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}}{\sqrt{\text{ز}+1}-\sqrt{\text{ز}-1}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}}$$

متبادلاً - متغیر ط کو ایک نئے متغیر فہ میں اس ربط

$$(1+\text{ز جم ط})(\text{ز جمز فہ}-1) = \text{ز}^2-1$$

سے تبدیل کرو تب

$$\text{جم ط} = \frac{\text{ز} - \text{جمز فہ}}{\text{ز جمز فہ} - ۱} \quad \text{اور جب}^۲\,\text{ط} = \frac{(\text{ز}^۲ - ۱)\,\text{جمز}^۲\,\text{فہ}}{(\text{ز جمز فہ} - ۱)^۲}$$

اور

$$\text{فر ط} = \frac{\sqrt{\text{ز}^۲ - ۱}}{\text{ز جمز فہ} - ۱}\,\text{فر فہ}$$

تب

$$\int_0^{\text{ط}} \frac{\text{فر ط}}{(۱ + \text{ز جم ط})^۲} = \frac{۱}{(\text{ز}^۲ - ۱)^{\frac{۳}{۲}}} \int_0^{\text{فہ}} (\text{ز جمز فہ} - ۱)\ \text{فر فہ}$$

$$= \frac{۱}{(\text{ز}^۲ - ۱)^{\frac{۳}{۲}}} \left[\ \text{ز جبز فہ} - \text{فہ}\right]$$

اب

$$\text{مسز}^۲\,\frac{\text{فہ}}{۲} = \frac{\text{جمز فہ} - ۱}{\text{جمز فہ} + ۱} = \frac{\text{ز} - ۱}{\text{ز} + ۱}\,\text{مس}^۲\,\frac{\text{ط}}{۲}$$

اور

$$\text{جبز فہ} = ۲\,\text{مسز}\,\frac{\text{فہ}}{۲} \Big/ \left(۱ - \text{مسز}^۲\,\frac{\text{فہ}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{\text{ز}^۲ - ۱}\ \text{جب ط}}{۱ + \text{ز جم ط}}$$

$\therefore$

$$\int_0^{\text{ط}} \frac{\text{فر ط}}{(۱ + \text{ز جم ط})^۲} = \frac{\text{ز}}{\text{ز}^۲ - ۱}\ \frac{\text{جب ط}}{۱ + \text{ز جم ط}}$$

$$- \frac{۲}{(\text{ز}^۲ - ۱)^{\frac{۳}{۲}}}\,\text{مسز}^{-۱}\left[\sqrt{\frac{\text{ز} - ۱}{\text{ز} + ۱}}\ \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{۲}\right]$$

اور یہ وہی ہے جو پہلے محسوب ہوا کیونکہ $\text{مسز}^{-۱}\,\text{لا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}}$

۷۷ - مکافی مدار کی صورت میں کسی قوس کے طے کرنے کی مدت محسوب کرو۔

مکافی کی مساوات ہے $ر = \frac{د}{1 + \text{جم}\, طہ}$ جہاں ۲د وترِ خاص کا طول ہے اور د طہ اس کے محور سے ناپا گیا ہے پس دفعہ ۵۲ کی مساوات (۳) سے

$$ح\, ت = \int ر^2\, \text{فر}طہ = \int \frac{د^2}{(1+\text{جم}\, طہ)^2}\, \text{فر}طہ$$

$$\therefore \frac{ح\, ت}{د^2} = \int_0^{طہ} \frac{\text{فر}طہ}{4\, \text{جم}^4 \frac{طہ}{2}} = \frac{1}{4}\int_0^{طہ} \text{قط}^2\frac{طہ}{2}\, \text{قط}^2\frac{طہ}{2}\, \text{فر}طہ$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{طہ} \left(1+\text{مس}^2\frac{طہ}{2}\right) \text{فر}\left(\text{مس}\frac{طہ}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\text{مس}\frac{طہ}{2} + \frac{1}{3}\text{مس}^3\frac{طہ}{2}\right]$$

لیکن $\frac{ح}{د^2} = \frac{\sqrt{2\, مہ\, د}}{د^2} = \frac{\sqrt{2\, مہ}}{د^{\frac{3}{2}}}$

$$\therefore ت = \frac{د^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2\, مہ}}\left[\text{مس}\frac{طہ}{2} + \frac{1}{3}\text{مس}^3\frac{طہ}{2}\right] = \sqrt{\frac{ا^3}{مہ}}\left[\text{مس}\frac{طہ}{2} + \frac{1}{3}\text{مس}^3\frac{طہ}{2}\right]$$

جہاں ا اوجی فاصلہ ہے۔

۷۸- ایک ذرہ کو ہوا میں پھینکا گیا ہے۔ ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرکے لیکن جاذبۂ ارض کی تبدیلیوں کو ملحوظ رکھتے ہوئے حرکت معلوم کرو۔

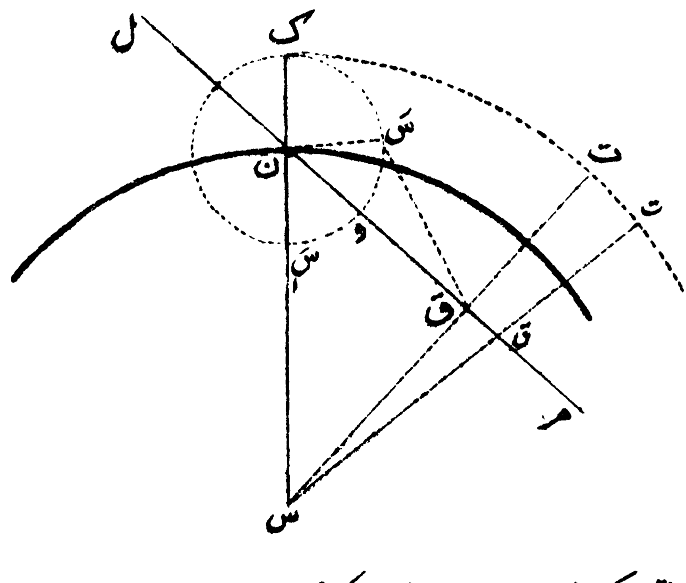
زمین کی کشش کسی بیرونی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے ر ہو $\frac{مہ}{ر^2}$ ہے۔ پس خلا میں دفعہ ۶۶ کی صورتوں میں سے ایک صورت پیدا ہوگی جس کا ایک ماسکہ زمین کے مرکز پر ہوگا۔

اگر زمین کا نصف قطر ر ہو تو $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2}$ = سطح زمین پر جاذبہ کی قیمت = ج یعنی مہ = ج ر^2

پس اگر ایک ذرہ سطح زمین سے پھینکا جائے تو اِس کا راستہ ناقص، مکافی یا زائد ہوگا اگر بالترتیب $\text{و}^2 \gtreqless \frac{2\,\text{مہ}}{\text{ر}}$ یعنی $\text{و}^2 \gtreqless 2\,\text{ج ر}$

۷۹۔ ایک ذرہ ایک معلومہ رفتار کے ساتھ سطح زمین سے پھینکا گیا ہے اِس کا بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ زمین کا مرکز س ہے اور پھینکنے کا مقام ن ہے۔ فرض کرو کہ ن کے عین اوپر ایک نقطہ ک ایسا ہے کہ ک سے گزرنے سے رفتار محصلہ و



پھینکنے کی رفتار کے مساوی ہے یعنی دفعہ ۳۱ کی رُو سے

$$\text{و}^2 = 2\,\text{مہ}\left[\frac{1}{\text{س ن}} - \frac{1}{\text{س ک}}\right] = 2\,\text{ج ر}^2\left[\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}+\text{ھ}}\right] \quad\text{......(۱)}$$

جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے اور ن ک = ھ

اگر دوسرا ماسکہ سَ ہو تو نیم محور اعظم ہوگا $\frac{1}{2}$ (سر + ن سَ)
اس لیے دفعہ ۶۶ کی مساوات (۴) کی رُو سے

$$\text{وَ}^2 = \text{م}\left[\frac{2}{\text{س ن}} - \frac{2}{\text{سر} + \text{ن سَ}}\right] = 2\,\text{ج سر}^2\left[\frac{1}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر} + \text{ن سَ}}\right]$$

اِس کا مساوات (۱) کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ن سَ = ہ یعنی پھینکنے کی مستقل رفتار کے جواب میں دوسرے ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ن اور نصف قطر ہ ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ مدار کا محورِ اعظم س ن + ن سَ یعنی س ک ہے۔

وہ ناقص جن کے ماسکے س اور سَ ہیں ایک سطح مستوی ل ن م سے جو نقطہ رمی میں سے گزرتی ہے ایک ایسے نقطہ ق پر ملتا ہے کہ س ق + ق سَ = س ک اس لیے اگر س ق اُس دائرہ سے جس کا مرکز س ہے اور نصف قطر س ک ہے نقطہ ت پر ملے تو ق ت = ق سَ۔ چونکہ بالعموم ماسکوں کے دائرہ پر ایک اَور نقطہ سَ$_1$ مل سکتا ہے ایسا کہ ق سَ = ق سَ$_1$ اس لیے ہمیں کسی معلومہ ٹپہ کے لیے بالعموم دو راستے دستیاب ہو سکتے ہیں۔

سطح مستوی ل ن م پر بڑے سے بڑا ٹپہ صریحاً ن ق ہے جہاں ق ت = ق و

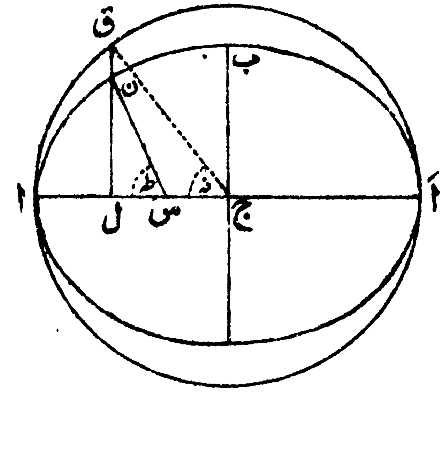
اس لیے س ق + ق ن = س ق + ق و + و ن = س ق + ق ت + ن ک = س ک + ن ک

اس لیے ق ایک ناقص پر واقع ہے جس کے ماسکے پھینکنے کا نقطہ اور زمین کا مرکز ہیں اور جو ک میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے ہمیں بڑے سے بڑا ٹپہ ملتا ہے۔

۸۰- فرض کرو کہ سیارہ ن سورج س کے گرد جو راستہ مرتسم کرتا ہے وہ شکل ذیل میں دکھایا گیا ہے۔ محورِ اعظم پر عمود ن ل کھینچو اور اور اس کو خارج کرو حتےٰ کہ یہ معاون دائرہ سے ق پر ملے۔ فرض کرو

کہ ج اس کا مرکز ہے۔



نقطوں ا، اَ کو بالترتیب سیارہ کے مدار کا حضیض اور اوج کہتے ہیں۔

زاویہ ا س ن کو اصلی بے قاعدگی اور زاویہ ا ج ق کو خارج المرکز بے قاعدگی سے موسوم کرتے ہیں۔ سیاروں کی صورت میں ہر سیارہ کے مدار کا خروج المرکز نہایت چھوٹا ہے اور سوائے عطارد کے (جس کا خروج المرکز ۲، ہے) باقی سب سیاروں کا خروج المرکز ۱، سے کم ہے۔ پس مدار کے ماسکے ج کے نہایت قریب ہیں اور ناقص کا معاون دائرہ سے اختلاف شکل میں دراصل نہایت قلیل ہے اور بناءً علیہ اصلی بے قاعدگی اور خارج المرکز بے قاعدگی کا تفاوت بھی نہایت چھوٹی مقدار ہے۔

اگر سیارہ کا دور $\frac{2\pi}{ن}$ ہو یعنی ن اس کی اوسط زاویئی رفتار ہو تو مقدار ن ت کو اوسط بے قاعدگی اور ن کو اوسط حرکت کہا جاسکتا ہے۔ پس ظاہر ہے کہ اگر ایک فرضی سیارہ اس طرح حرکت کرے کہ اس کی زاویئی رفتار ن کی اوسط زاویئی رفتار کے مساوی ہو تو ن ت فرضی سیارہ کی

بے قاعدگی ہوگی۔

چونکہ $\frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}} = \frac{\text{۲}\pi}{\sqrt{\mu}}\,\text{ا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$ (دفعہ ۶۶) $\therefore \text{ن} = \frac{\sqrt{\mu}}{\text{ا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}$

فرض کرو کہ ط اصلی بے قاعدگی ا س ن ہے اور فہ خارج المرکز بے قاعدگی ا ج ق ہے

اگر ھ دوچند ہو اُس رقبہ کا جو اکائی وقت میں مرتسم ہوتا ہے تو

$\frac{\text{ھ}}{\text{۲}}\,\text{ت} =$ قطاع ا س ن کا رقبہ

$=$ منحنی رقبہ ا ل ن + مثلث س ل ن

$= \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \times$ منحنی رقبہ ا ل ق + مثلث س ل ن

$= \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,(\text{قطاع ا ج ق} - \text{مثلث ج ل ق}) + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{س ل} \times \text{ل ن}$

$= \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ا}^{\text{۲}}\,\text{فہ} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ا}^{\text{۲}}\,\text{جب فہ جم فہ}\right) + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,(\text{ا جم فہ} - \text{ا ز})\,\text{ب جب فہ}$

$= \frac{\text{اب}}{\text{۲}}\,(\text{فہ} - \text{ز جب فہ})$

$\therefore \text{ن ت} = \frac{\text{ن اب}}{\text{ھ}}\,(\text{فہ} - \text{ز جب فہ}) = \text{فہ} - \text{ز جب فہ}$ .... (۱)

مخروطی تراش کی قطبی مساوات سے

$\text{س ن} = \frac{\text{ل}}{\text{۱} + \text{ز جم ط}} = \frac{\text{ا}(\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}})}{\text{۱} + \text{ز جم ط}}$

اور $\text{س ن} = \text{ا} - \text{ز} \times \text{ج ل} = \text{ا}(\text{۱} - \text{ز جم فہ})$

∴ (ا - ز جم فہ) (ا + ز جم طہ) = ا - ز^{۲}

اور ∴ جم طہ = (جم فہ - ز) / (ا - ز جم فہ) ....(۲)

۸۱ ۔ اگر ز بہت چھوٹا ہو تو مساوات (ا) سے فہ کی قیمت کا پہلا تقرب ن ت ہے اور دوسرا تقرب ن ت + ز جب ن ت (۲) سے طہ کی قیمت کا پہلا تقرب فہ ہے اور دوسرا تقرب فہ + لہ ہے جہاں

جم فہ - لہ جب فہ = (جم فہ - ز) / (ا - ز جم فہ)

اور اس لیے لہ = (ز جب فہ) / (ا - ز جم فہ) = ز جب فہ تقریباً

پس ز کی پہلی قوت تک

طہ = فہ + ز جب فہ = ن ت + ز جب ن ت + ز جب (ن ت + ز جب ن ت)

= ن ت + ۲ ز جب ن ت

نیز س ن = (ا (ا - ز^{۲})) / (ا + ز جم طہ) = ا (ا - ز جم طہ)

اسی درجہ تقرب تک

= ا - ا ز جم (ن ت + ۲ ز جب ن ت) = ا - ا ز جم ن ت

اگر تقرب ز^{۲} تک لیا جائے تو

$$\text{فہ} = \text{ن ت} + \text{ز جب ن ت} + \frac{\text{ز}^2}{2}\,\text{جب ۲ ن ت}$$

$$\text{ط} = \text{ن ت} + \text{۲ ز جب ن ت} + \frac{\text{۵ ز}^2}{4}\,\text{جب ۲ ن ت}$$

اور $$\text{ر} = \text{ا}\left\{1 - \text{ز جم ن ت} + \frac{\text{ز}^2}{2}\left(1 - \text{جم ۲ ن ت}\right)\right\}$$

۸۲ - دفعہ ۸۰ کی مساوات (۲) سے

$$\text{مس}^2\frac{\text{ط}}{2} = \frac{1-\text{جم ط}}{1+\text{جم ط}} = \frac{(1+\text{ز})(1-\text{جم فہ})}{(1-\text{ز})(1+\text{جم فہ})} = \frac{1+\text{ز}}{1-\text{ز}}\,\text{مس}^2\frac{\text{فہ}}{2}$$

پس $$\text{فہ} = 2\,\text{مس}^{-1}\left[\sqrt{\frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}}}\;\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}\right]$$

اور

$$\text{جب فہ} = \frac{2\,\text{مس}\frac{\text{فہ}}{2}}{1+\text{مس}^2\frac{\text{فہ}}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}}}\;\text{مس}\frac{\text{ط}}{2}}{1+\frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}}\,\text{مس}^2\frac{\text{ط}}{2}} = \sqrt{1-\text{ز}^2}\;\frac{\text{جب ط}}{1+\text{ز جم ط}}$$

اس لیے اُسی دفعہ کی مساوات (۱) سے چونکہ $\text{ن} = \sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{ا}^3}}$

$$\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{ا}^3}{\text{مہ}}}\left[2\,\text{مس}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}}}\;\text{مس}\frac{\text{ط}}{2}\right\} - \text{ز}\sqrt{1-\text{ز}^2}\;\frac{\text{جب ط}}{1+\text{ز جم ط}}\right]$$

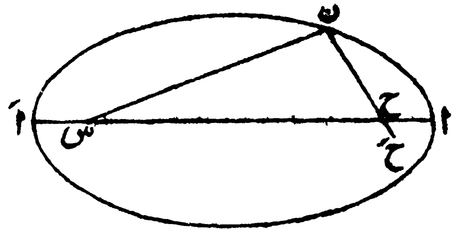
یہ دفعہ ۸۰ کے نتیجہ کے عین مطابق ہے اور حضیض سے کسی ناقصی قوس کو طے کرنے کا وقت اِس سے حاصل ہوتا ہے۔

۸۳ - جب کوئی ذرہ ناقص مدار مرتسم کر رہا ہو تو ممکن ہے کہ مدار کے کسی نقطہ پر اِسے کوئی ایسا دھکا لگے جس سے یہ کوئی نیا مدار

مرتسم کرنے لگے یا مرکز قوت کی طاقت میں تبدیلی واقع ہوجائے جس سے مدار بھی بدل جائے - نیا مدار حاصل کرنے کے لیے ہمیں یہ معلوم کرنا ہوگا کہ محور اعظم میں بلحاظ سمت اور طول کے کیا تغیر واقع ہوا ہے اور نیا خروج المرکز کیا ہے وغیرہ وغیرہ۔

۸۴ — مماسی خلل انداز قوت

فرض کرو کہ ذرہ کا راستہ ا ن اَ ہے جو قوت کے مرکز س کے گرد حرکت کر رہا ہے - نیز فرض کرو کہ دوسرا ماسکہ ح ہے -



جب ذرہ ن پر پہنچ جاتا ہے تو فرض کرو کہ اس کی رفتار بدل کر وسے و+ء ہو جاتی ہے لیکن سمتِ حرکت میں فرق نہیں آتا۔ نیز فرض کرو کہ ۲ وَ نیا محورِ اعظم ہے -

تب

$$\text{و}^2 = \text{مـ}\left[\frac{2}{\text{سن}} - \frac{1}{\text{و}}\right] \qquad (\text{و}+\text{ء})^2 = \text{مـ}\left[\frac{2}{\text{سن}} - \frac{1}{\text{وَ}}\right] \quad \ldots\ldots (1)$$

اس لیے تفریق کرنے سے $\frac{1}{\text{اَ}}$ کی قیمت نکل آتی ہے۔

چونکہ ن پر سمتِ حرکت میں کوئی فرق نہیں آتا۔ اس لیے نیا مرکز ن ح

پر واقع ہے۔ اگر اس کا مقام حَ ہو تو

ح حَ = (حَ ن + س ن) - (ح ن + س ن) = ۲اَ - ۲ا

اگر رفتار کا تغیر و بہت چھوٹا ہو اور (فرض کرو) مف و کے مساوی ہو تو مساواتوں (۱) میں سے پہلی مساوات کو تفرق کرنے سے

۲ و مف و = مہ/ا² مف ا

[کیونکہ اِن فوری تبدیلیوں سے س ن مستقل رہتا ہے]

اس لیے مف ا یعنی نصف محورِ اعظم کا اضافہ

= (۲ و × مف و × ا²)/مہ .... (۲)

نیز چونکہ ح حَ اب چھوٹا ہے اس لیے

س ح س حَ = (ح حَ جب ح)/(۲ ا ز + ح حَ جم ح) = (۲ مف ا × جب ح)/(۲ ا ز)

اس لیے مف سا یعنی وہ زاویہ جس میں سے محورِ اعظم گھوم جاتا ہے

= ح س حَ = (مف ا جب ح)/(ا ز) = (۲ و ا)/(ز مہ) جب ح مف و .... (۳)

چونکہ دھکے سے ن پر حرکت کی سمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوئی

اس لیے ھ کی قیمت اس نسبت (و + مف و)/و سے بدل جاتی ہے جس سے

مف ھ = (مف و)/و ھ

لیکن   ھ² = مہ ا (۱ - ز²)

∴ ۲ ھ مف ھ = مہ مف ا (۱ - ز۲) - مہ ا × ۲ ز مف ز

∴ مہ ا × ۲ ز مف ز = ۲ و مف و ۔ ا۲ (۱ - ز۲) - ۲ $\frac{\text{مف و}}{\text{و}}$ ھ۲

اس لیے مف ز = $\frac{\text{مف و}}{\text{و}}$ ۔ $\frac{(۱ - ز۲)}{\text{ز}}$ ۔ $\frac{\text{ا و۲ - مہ}}{\text{مہ}}$ .... (۴)

اس سے خروج المرکز کا اضافہ معلوم ہوتا ہے

چونکہ دَوری مدت ت = $\frac{۲\pi}{\sqrt{\text{مہ}}}$ ا$^{\frac{۳}{۲}}$

∴ $\frac{\text{مف ت}}{\text{ت}}$ = $\frac{۳}{۲}$ $\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}}$ = $\frac{\text{۳ و ا مف و}}{\text{مہ}}$ .... (۵)

۸۵ ۔ اگر خلل انداز قوت مماسی نہ ہو تو اس سے جو رفتار پیدا ہوتی ہے اُسے مدار کے نقطہ ن پر جو پہلے رفتار تھی اُس کے ساتھ ترکیب دینے سے نئی رفتار اور نقطہ ن پر نئے مدار کی سمت حاصل ہوگی ۔ اب دفعہ ماقبل کی مساواتوں (۱) یا (۲) سے نئے محورِ اعظم کا طول ۲ اَ معلوم ہوجاتا ہے نیز چونکہ نقطہ ن کی رفتار کا معیارِ اثر ماسکہ س کے گرد

= $\sqrt{\text{مہ} \times \text{نیم وترِ خاص}}$ یعنی مہ $\sqrt{\text{اَ (۱ - زَ۲)}}$

اس لیے ہمیں نیا خروج المرکز زَ بھی معلوم ہوجاتا ہے ۔

بالآخر اگر ہم ن سے ایک خط کھینچیں جو ن پر کے نئے مماس کی سمت کے ساتھ اُتنا ہی زاویہ بنائے جو اسی مماس کے ساتھ ن س بناتا ہے اور اِس خط پر ایک نقطہ حَ ایسا لیں کہ س ن + حَ ن نئے محورِ اعظم کے مساوی ہو تو ہمیں نیا دوسرا ماسکہ حاصل ہوتا ہے اور بناءً علیہ نئے محورِ اعظم کا محل معلوم ہوجاتا ہے ۔

۸۶ ۔ اسراع مطلق یعنی مہ میں یک لخت تبدیلی ہوجانے

کا اثر مدار پر۔

جب ذرہ مرکزِ قوت سے فاصلہ ر پر ہو تو فرض کرو کہ مہ یک لخت بدل کر مہَ ہو جاتا ہے اور نیا محورِ اعظم اور نیا خروج المرکز بالترتیب ۲ اَ اور زَ ہیں۔

چونکہ رفتار میں بلحاظ مقدار کے دفعۃً کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اس لیے

$$\text{مہ}\left(\frac{\text{۲}}{\text{ر}}-\frac{\text{۱}}{\text{ا}}\right)=\text{و}^{2}=\text{مہَ}\left(\frac{\text{۲}}{\text{ر}}-\frac{\text{۱}}{\text{اَ}}\right)\quad\ldots\ldots\ldots(\text{۱})$$

یہ ایک مساوات ہے جس سے اَ حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ مں کے گرد رفتار کے معیارِ اثر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اس لیے ھ وہی رہتا ہے پس

$$\sqrt{\text{مہ ا}\,(\text{۱}-\text{ز}^{2})}=\text{ھ}=\sqrt{\text{مہَ اَ}\,(\text{۱}-\text{زَ}^{2})}\quad\ldots\ldots\ldots(\text{۲})$$

جس سے زَ معلوم ہوتا ہے۔

چونکہ فاصلہ ر پر رفتار کی سمت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لیے ہمیں حسب دفعۂ ماقبل دوسرے ماسکہ کا نیا مقام اور نیا محورِ اعظم دونوں معلوم ہو جاتے ہیں۔

اگر مہ کی تبدیلی مف مہ بہت چھوٹی ہو تو ا کی تبدیلی مف ا مساواتوں (۱) کی پہلی مساوات کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے جب کہ و اور ر دونوں کو مستقل فرض کیا جائے اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}^{2}}=-\text{و}^{2}\,\frac{\text{مف مہ}}{\text{مہ}^{2}}$$

اسی طرح (۲) سے، لوکارتم لینے اور تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{مف مہ}}{\text{مہ}}+\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}}-\frac{\text{۲ ز مف ز}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}=\text{۰}$$

$$\therefore\ \frac{\text{۲ز مف ز}}{\text{۱}-\text{ز}^{2}}=\frac{\text{مف مہ}}{\text{مہ}}-\frac{\text{و}^{2}\text{ا}}{\text{مہ}^{2}}\,\text{مف مہ}=\frac{\text{مف مہ}}{\text{مہ}}\left(\text{۱}-\frac{\text{و}^{2}\text{ا}}{\text{مہ}}\right)$$

نیز چونکہ دَوری مدت $\text{ت} = \frac{۲\pi}{\sqrt{\text{مہ}}}\,\text{ا}^{\frac{۳}{۲}}$

$$\therefore \frac{\text{فرت}}{\text{ت}} = \frac{۳}{۲}\,\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} - \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{مف مہ}}{\text{مہ}} = -\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{مف مہ}}{\text{مہ}}\left(۱+\frac{۳\,\text{ا و}^{۲}}{\text{مہ}}\right)$$

مثالیں

۱ - ایک سیارہ کا دَور ۳۶۵ دن کا ہے اور اس کا خروج المرکز $\frac{۱}{۴}$ ہے ۔
ثابت کرو کہ قوت کے مرکز میں سے گزرنے والے وترِ خاص سے مدار کے جو دو حصے ہوجاتے ہیں اُن کو طے کرنے کی مدتیں بالترتیب تقریباً

$$\frac{۳۶۵}{۲}\left[۱ \pm \frac{۱}{۳\pi}\right] \text{ ہیں ۔}$$

۲ - ایک دُمدار تارہ مکافی مدار مرتسم کرتا ہے اور اس کا فاصلہ حضیض پر سورج سے، سورج کے گرد زمین کے راستہ (جس کو مستدیر فرض کیا جائے) کے نصف قطر کا $\frac{۱}{\text{ن}}$ ہے، ثابت کرو کہ تارہ مدارِ ارض کے اندر جس مدت تک رہیگا وہ ایک سال کا

$$\frac{۲}{۳\pi}\cdot\frac{\text{ن}+۲}{\text{ن}}\sqrt{\frac{\text{ن}-۱}{۲\text{ن}}} \text{ ہے ۔}$$

[اگر سورج س ہو اور زمین کے مدار کا نصف قطر ا ہو اور دُمدار تارہ کے راستہ کا حضیض ۱ ہو اور زمین اور تارہ کے مداروں کا تقاطع ن ہو تو

$$\text{ا} = \text{س ن} = \frac{\frac{۲\,\text{ا}}{\text{ن}}}{۱+\text{جم طہ}} \text{ یعنی جم طہ} = \frac{۲}{\text{ن}} - ۱ \text{ اور اس سے}$$

$$\text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{۲} = \sqrt{\text{ن}-۱}$$

اب دفعہ ،، کا ضابطہ استعمال کرو اور ملحوظ رکھو کہ $\frac{۲\pi}{\sqrt{\text{مہ}}}\,\text{ا}^{\frac{۳}{۲}}$ = ایک سال]

۳ ۔ سورج کے گرد زمین کے مدار کو مستدیر فرض کر کے ثابت کرو کہ کوئی دُمدار تارہ جو مکافی مرتسم کرتا ہے زیادہ سے زیادہ مدارِ ارض کے اندر $\frac{۲}{۳\pi}$ سال تک رہ سکتا ہے ۔

۴ ۔ ایک سیارہ جس کی کمیّت ھ اور دَوری مدت ت ہے حضیض کے مقام پر کمیّت م کے ایک شہابی پتھر کے ساتھ ٹکرا جاتا ہے جو اسی مدار میں مخالف سمت میں رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہے ۔ اگر $\frac{\text{م}}{\text{ھ}}$ بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ سیارہ کے راستہ کا محورِ اعظم بقدر $\frac{۴\,\text{م}}{\text{ھ}} \cdot \frac{\text{و ت}}{\pi}\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}$ کے کم ہو جاتا ہے ۔

۵ ۔ جب ایک دَوری دمدار تارہ حضیض پر ہے تو اُس کی رفتار و میں بقدر ایک چھوٹی مقدار مف و کے اضافہ ہو جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ دمدار تارہ کا چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ سورج سے بقدر $۴\,\text{مف و}\left\{\frac{\text{ل}^۳(۱-\text{ز})}{\text{ھ}(۱+\text{ز})}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$ کے بڑھ جاتا ہے ۔

۶ ۔ جب زمین اپنے مدار کے محورِ اصغر کے سرے پر ہے تو چھوٹی کمیّت م کا ایک شہابی پتھر سورج میں گر پڑتا ہے ۔ اگر سورج کی کمیّت ھ ہو تو ثابت کرو کہ مدارِ ارض کا محورِ اعظم بقدر $۲\,\text{ل}\cdot\frac{\text{م}}{\text{ھ}}$ کے کم ہو جاتا ہے اور دَوری مدت بقدر ایک سال کے $\frac{۲\,\text{م}}{\text{ھ}}$ کے کم ہو جاتی ہے اور اِس کے مدار کا محورِ اعظم زاویہ $\frac{\text{ب}}{\text{ل ز}}\cdot\frac{\text{م}}{\text{ھ}}$ میں سے گھوم جاتا ہے ۔

۷ ۔ فرض کرو کہ زمین کا مدار دائرہ ہے ، اگر سورج کی کمیّت اس کی موجودہ کمیّت کا $\frac{۱}{\text{ن}}$ ہو جائے تو بتاؤ کہ نیا مدار کیا ہوگا ۔

۸ ۔ ایک دمدار تارہ مکافی مدار پر حرکت کر رہا ہے جس کا ماسکہ سورج ہے ۔

وترِ خاص کے سرے پر اِس کی رفتار میں دفعتہً نسبت ن : ۱ میں تبدیلی ہو جاتی ہے جہاں ن < ۱، ثابت کرو کہ تارہ اب ایک ناقص مرتسم کریگا جس کا خروج المرکز $\sqrt{۱ - ۲ن^{۲} + ۲ن^{۴}}$ ہوگا اور جس کا محورِ اعظم $\frac{ل}{۱ - ن^{۲}}$ ہوگا جہاں ۲ ل مکافی مدار کا وترِ خاص تھا۔

۹- ایک جسم ماسکہ پر کے ایک مرکزِ قوت کے گرد ناقص مدار پر حرکت کر رہا ہے جب یہ ن پر پہنچتا ہے تو حرکت کی سمت ایک زاویہ قائمہ میں سے پھر جاتی ہے لیکن رفتار نہیں بدلتی - ثابت کرو کہ جسم ایک ناقص مرتسم کریگا جس کا خروج المرکز مرکز سے ن کے فاصلہ کے متناسب ہوگا۔

۱۰- دو ذرّے جن کی کمیتیں $م_{۱}$ اور $م_{۲}$ ہیں، سورج کے گرد دو ہم سطح مکافیوں میں حرکت کر رہے ہیں یہ ایک دوسرے سے ایک ایسے نقطہ پر جس کا فاصلہ سورج سے س ہے ایک دوسرے سے علی القوائم سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے متصادم ہوتے ہیں اور دونوں مل کر ایک جسم بن جاتے ہیں ثابت کرو کہ بعد کا راستہ ناقص ہوگا جس کا محورِ اعظم $\frac{(م_{۱} + م_{۲})^{۲}}{۲ م_{۱} م_{۲}}$ س ہوگا۔

۱۱- ایک ذرہ ایک ماسکی قوت کے زیرِ عمل ناقص مرتسم کر رہا ہے۔ جب ذرّہ محورِ اصغر کے سرے پر ہے تو اِسے ایک دھکا لگتا ہے اور بعد کا راستہ دائرہ بن جاتا ہے۔ دھکے کی سمت اور مقدار معلوم کرو۔

۱۲- ایک ذرہ م ماسکی قوت کے زیرِ عمل ناقص مرتسم کر رہا ہے - اِس کا زاویئی معیارِ اثر م ھ ہے۔ جب یہ محورِ اصغر کے سرے پر پہنچتا ہے تو اِسے ایک دھکا م ء مقام مذکور کو ماسکہ سے ملانے والے نصف قطر کی سمت میں لگتا ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ کا محورِ اعظم بقدر $\frac{۴ ا ب ز ء}{ھ}$ کے کم ہو جاتا ہے اور خروج المرکز بقدر $\frac{ب ء}{ھ} (۱ - ز^{۲})^{\frac{۳}{۲}}$ کے بڑھ جاتا ہے اور محورِ اعظم زاویہ $\frac{ا ء (۱ - ز^{۲})}{ھ}$ میں سے گھوم جاتا ہے جہاں ا، ب نیم محور ہیں اور ز ناقص کا خروج المرکز ہے۔

۱۳- ایک ذرہ مہ قوت کے مرکز کے گرد (جو ماسکہ پر ہے) ایک مکافی مرتسم

کررہا ہے جس کا وترِ خاص ۴ و ہے - جب یہ راُس کی طرف آتے ہوئے ماسکہ سے فاصلہ ر پر پہنچتا ہے تو قوت کا اثر دفعۃً ۃ کے لیے معدوم ہوجاتا ہے - جب قوت دوبارہ عمل کرنے لگتی ہے تو ثابت کرو کہ نیا مدار ناقص، مکافی یا زائد ہوگا اگر بالترتیب

$$ر \;<=>\; ۲ر\,ہ \sqrt{\frac{ر-و}{۴م}}$$

۱۴- ثابت کرو کہ نقطہ رم میں سے اُفقی سطح مستوی پر ایک ذرہ کا جسے ہوا میں پھینکا گیا ہے بڑے سے بڑا ٹپہ ۲ ھ $\frac{س+ھ}{س+۲ھ}$ ہوتا ہے جہاں س زمین کا نصف قطر ہے اور ھ بڑی سے بڑی بلندی ہے جہاں تک ذرہ پہنچ سکتا ہے -

[دفعہ ۹۸ کے نتیجہ کو استعمال کرو]

۱۵- جاذبۂ ارضی سے تغیرات اور زمین کی کرویت کا لحاظ کرتے ہوئے ثابت کرو کہ سطح سمندر پر ایک توپ کا بڑے سے بڑا ٹپہ ۲ س جب$^{-1}$ $\left(\frac{ھ}{س}\right)$ ہے اور اس کے متناظر ارتفاع کا زاویہ $\frac{1}{2}$ جم$^{-1}$ $\left(\frac{ھ}{س}\right)$ ہے جہاں س زمین کا نصف قطر ہے اور ھ وہ بڑی سے بڑی بلندی ہے جہاں تک توپ گولے کو پہنچا سکتی ہے -

۱۶- ثابت کرو کہ اگر خطِ استوا سے توپ چلا کر گولے کو قطب شمالی پر پہنچانا مقصود ہو تو رفتارِ رمی تقریباً $\frac{1}{2}$ ۴ میل فی سکنڈ ہونی چاہیے اور رمی کی سمت کو نقطۂ رمی پر کی انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ $\frac{1}{2}$ ۶۷° بنانا چاہیے -

چھٹا باب

مماسی اور عمادی اسراع - سطح مستوی میں مقید حرکت

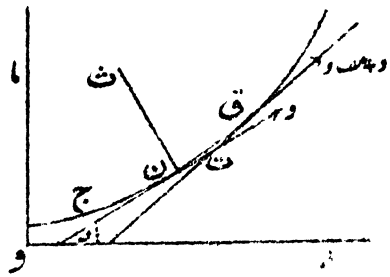
۸۷- باب ہذا میں ہم اُن مسائل پر غور کرینگے جن میں کوئی ذرہ اپنی حرکت کو کسی مخصوص منحنی پر مقید رکھے - ایسی صورتوں میں بہتر ہوتا ہے کہ اسراعوں کو منحنی کے مماس اور عماد کی سمت میں ناپا جائے - اس لیے ضروری ہے کہ ہم پہلے کسی مستوی منحنی کی صورت میں مماسی اور عمادی اسراعوں کے لیے جملے معلوم کریں -

۸۸- ثابت کرو کہ ایک ذرہ کے مدار کے مماس اور عماد کی سمت میں اِس کے اسراع بالترتیب $\frac{\text{ف}^2\text{س}}{\text{فت}^2}$ $\left(= \text{و}\frac{\text{فو}}{\text{فس}}\right)$ اور $\frac{\text{و}^2}{\text{ر}}$ ہوتے ہیں جہاں ر منحنی کا نصف قطرِ انحنا ہے نقطۂ مذکور پر -

فرض کرو کہ کسی نقطہ ن پر کسی آن ت پر مماسی رفتار و ہے جہاں ن کا قوسی فاصلہ منحنی پر کے ایک ثابت نقطہ ج سے س ہے، نیز ایک اور نقطہ ق پر جس کا قوسی فاصلہ اُسی نقطہ ج سے س + مف س ہے آن ت + مف ت پر رفتار و + مف و ہے -

نیز فرض کرو کہ فہ اور فہ + مف فہ وہ زاویے ہیں جو ن اور ق پر کے مماس ایک ثابت خط و لا کے ساتھ بناتے ہیں، پس مف ذ،

ن اور ق پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ ہے۔



تب تعریف کی رُو سے ن پر کے مماس کی سمت میں اسراع،

$$= \text{نہا}_{\text{مف ت}\to 0} \frac{\left[\text{وقت ت + مف ت پر مماس کی سمت میں رفتار} - \text{وقت ت پر مماس کی سمت میں رفتار}\right]}{\text{مف ت}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{مف ت}\to 0} \frac{(\text{و + مف و})\ \text{جم مف فہ} - \text{و}}{\text{مف ت}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{مف ت}\to 0} \frac{\text{و + مف و} - \text{و}}{\text{مف ت}}$$

اگر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کر دیا جائے

$$= \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}$$

یا

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرس}}\ \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{و}\ \frac{\text{فرو}}{\text{فرس}}$$

نیز ن پر عماد کی سمت میں اسراع

$$= \lim_{\text{مف ت} = 0} \frac{\left[\begin{array}{l}\text{ت + مف ت پر عماد کی سمت میں رفتار} \\ \text{− ت پر عماد کی سمت میں رفتار}\end{array}\right]}{\text{مف ت}}$$

$$= \lim_{\text{مف ت} = 0} \frac{(\text{و} + \text{مف و})\,\text{جب مف فہ}}{\text{مف ت}}$$

$$= \lim_{\text{مف ت} = 0} (\text{و} + \text{مف و}) \frac{\text{جب مف فہ}}{\text{مف فہ}} \cdot \frac{\text{مف فہ}}{\text{مف س}} \cdot \frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}} = \text{و} \times 1 \times \frac{1}{\text{ر}} \times \text{و} = \frac{\text{و}^2}{\text{ر}}$$

نتیجہ صریح ۔ دائرہ کی صورت میں $\text{ر} = \text{ا}$، $\text{س} = \text{ا طہ}'$، $\text{و} = \text{ا طہ}$

اور اسراع ہیں ا طہً اور $\text{ا طہ}'^2$ ۔

۸۹ ۔ مماسی اور عمادی اسراع محوروں کے متوازی اسراعوں سے بھی بطریق ذیل حاصل ہو سکتے ہیں ۔

کیونکہ
$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \cdot \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2 + \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}$$

اسی طرح
$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2 + \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}$$

لیکن احصائے تفرقات سے

$$\frac{1}{\text{ر}} = \frac{-\dfrac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}}{\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرس}}} = \frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}}{\dfrac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} \cdot \frac{1}{\text{ر}} \cdot \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2 + \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{جب فہ}}{\text{ر}}\,\text{و}^2 + \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}\,\text{جم فہ}$$

اور فر²ما/فرت² = فر²لا/فرس² . ۱/ر . (فرس/فرت)² + فرما/فرس . فر²س/فرت² = جم فہ/ر . و² + فر²س/فرت² جب فہ

پس مماس کی سمت میں اسراع

= فر²لا/فرت² جم فہ + فر²ما/فرت² جب فہ = فر²س/فرت² = فرو/فرت = فرو/فرس . فرس/فرت = و فرو/فرس

اور عماد کی سمت میں اسراع = - فر²لا/فرت² جب فہ + فر²ما/فرت² جم فہ = و²/ر

۹۰- مشق ——— ایک ذرّہ ایک مدار اس طرح مرتسم کرتا ہے کہ اس کا اسراع ہمیشہ مستقل رہتا ہے اور اسراع کی سمت مماس کے ساتھ ہمیشہ مستقل زاویہ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ مدار مساوی الزاویہ لولبی ہے۔

یہاں و فرو/فرس = ف جم عہ اور و²/ر = ف جب عہ جہاں عہ اور ف مستقل ہیں

∴ ۲ف جم عہ س + مستقل = و² = ف جب عہ ر = ف جب عہ فرس/فرسا

∴ ۱/۲ فرس/فرسا = س مم عہ + ا جہاں ا مستقل ہے۔

∴ لوک (س مم عہ + ا) = ۲ سا مم عہ + مستقل

∴ س = - ا مس عہ + ب و^۲سامم عہ

جو مساوی الزاویہ لولبی کی ذاتی مساوات ہے۔

مثالیں

۱- ایک ذرہ ایک ایسے منحنی پر حرکت کرتا ہے کہ جب اس کا مماسی اسراع مستقل رہے تو مماسی رفتار اور عمادی اسراع کی مقداروں کی نسبت مستقل رہتی ہے۔ منحنی کی

ذاتی مساوات معلوم کرو ۔

۲ ۔ ایک ذرہ ایک تدویر کی قوس پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس پر کا ماس مستقل زاویئی رفتار کے ساتھ گھومتا ہے ۔ ثابت کرو کہ متحرک نقطہ کا اسراع مقدار میں مستقل رہتا ہے ۔

۳ ۔ ایک ذرہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ماسی اور عمادی اسراع مساوی رہتے ہیں اور ماس مستقل زاویئی رفتار کے ساتھ گھومتا ہے ۔ راستہ معلوم کرو ۔

۴ ۔ اگر ایک ذرہ کی رفتار اور طے شدہ قوس کا ربط

$$۲\,\text{ارس} = \text{لوک}\,\frac{\text{ب} + \text{اج}^{۲}}{\text{ب} + \text{اد}^{۲}}$$

ہو تو ذرہ پر عمل کرنے والی ماسی قوت معلوم کرو اور بتاؤ کہ رفتار و ابتدائے حرکت سے کتنے وقت کے گزرنے کے بعد حاصل ہوگی ۔

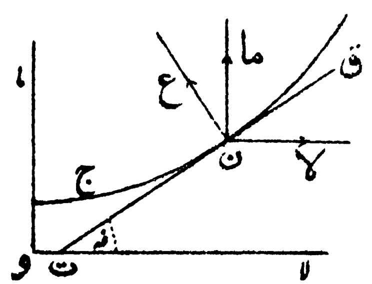
۵ ۔ ثابت کرو کہ تدویر ایک ذرہ کا آزاد راستہ ہو سکتا ہے جس کے ہر نقطہ پر ایک مستقل قوت مکون دائرہ کے متناظر نصف قطر کے متوازی عمل کرے جب کہ دائرہ مذکور کو راس پر رکھا جائے ۔

۶ ۔ ایک وزنی ذرہ ایک کھردری سطح مستوی پر جو افق کے ساتھ میلان ع رکھتی ہے انتہائی تعادل کی حالت میں پڑا ہے ۔ اسے افق کے متوازی سطح مستوی کے ساتھ ساتھ رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ انتہائی رفتار $\frac{۱}{۲}$ و ہوگی ۔ نیز مدار کی ذاتی مساوات معلوم کرو ۔

۷ ۔ ایک دائرہ ایک خطِ مستقیم پر لڑھکتا ہے ۔ کسی آن میں اس کے مرکز کی رفتار و اور اسراع ف ہے ۔ دائرہ کے کنارہ پر کے اُس نقطہ کے ماسی اور عمادی اسراع معلوم کرو جس کا زاویئی فاصلہ نقطۂ تماس سے ط ہے ۔

۹۱ ۔ ایک ذرہ کی حرکت ایک معلومہ چکنے مستوی منحنی پر مقید ہے اور قوتیں بھی اسی سطح مستوی میں عمل کرتی ہیں ۔ حرکت معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ منحنی پر کے کسی متغیر نقطہ ن کا فاصلہ منحنی پر کے ایک ثابت نقطہ ج سے س ہے اور ذرہ کی رفتار ن پر و ہے۔



نیز فرض کرو کہ ن پر ذرہ پر عمل کرنے والی قائم محوروں و لا، و ما کے متوازی قوتیں لا اور ما ہیں۔ چونکہ منحنی صاف ہے اس سے ن پر تعامل صرف عماد کی سمت میں کسی قوت ع کے مساوی ہوگا۔

مماس اور عماد کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$\text{م}\,\frac{\text{د و}}{\text{د س}} = \text{ت ن کی سمت میں قوت} = \text{لا جم فہ} + \text{ما جب فہ}$$

$$= \text{لا}\,\frac{\text{د لا}}{\text{د س}} + \text{ما}\,\frac{\text{د ما}}{\text{د س}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\text{م}\,\frac{\text{و}^2}{\text{ر}} = -\text{لا جب فہ} + \text{ما جم فہ} + \text{ع}$$

$$= -\text{لا}\,\frac{\text{د ما}}{\text{د س}} + \text{ما}\,\frac{\text{د لا}}{\text{د س}} + \text{ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جب و معلوم ہو تو مساوات (۲) سے کسی نقطہ پر کا ع معلوم ہو جاتا ہے۔

تب مساوات (۱) سے

$$\frac{1}{2}\,\text{م و}^2 = \int (\text{لا د لا} + \text{ما د ما}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

فرض کرو کہ لا د لا + ما د ما کسی تفاعل فہ (لا، ما) کا کامل تفرقی ہے

تب $لا = \frac{فرفہ}{فرلا}$ اور $ما = \frac{فرفہ}{فرما}$

$$\text{تب}\quad \tfrac{1}{2}\,م\,و^2 = \int\left(\frac{فرفہ}{فرلا}\,فرلا + \frac{فرفہ}{فرما}\,فرما\right) = فہ\,(لا،\,ما) + ج \quad\ldots\ldots(۴)$$

فرض کرو کہ ذرہ رفتار و₀ کے ساتھ ایک نقطہ سے جس کے محدد لا٫، ما٫ ہیں روانہ ہوا تھا، تب

$$\tfrac{1}{2}\,م\,و_0^2 = فہ\,(لا_0،\,ما_0) + ج$$

اس لیے تفریق کرنے سے

$$\tfrac{1}{2}\,م\,و^2 - \tfrac{1}{2}\,م\,و_0^2 = فہ\,(لا،\,ما) - فہ\,(لا_0،\,ما_0) \quad\ldots\ldots(۵)$$

یہ جواب ابتدائی نقطہ اور نقطہ ن کے درمیانی راستہ پر کسی طرح موقوف نہیں اور اس لیے یہ وہی رہیگا خواہ ج اور ن کے درمیان منحنی کی شکل کیسی بھی ہو۔

کام کی تعریف سے ظاہر ہے کہ لا فرلا + ما فرما اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو قوتیں لا اور ما منحنی پر ایک چھوٹے ہٹاؤ فرس میں انجام دیتی ہیں۔ اس لیے (۳) اور (۴) کے بائیں جانب کے رکن اُس کام کو تعبیر کرتے ہیں جو بیرونی قوتیں ذرہ پر ابتدائی حرکت سے نقطہ ن تک آنے میں سرانجام دیتی ہیں جب کہ کام میں ایک اختیاری مستقل کا اضافہ کیا جائے۔

اس لیے جب قوتوں کے اجزائے ترکیبی کسی تفاعل فہ (لا، ما) کے تفرقی سرہوں بلحاظ لا، ما کے تو (۵) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

ذرہ کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی

= بیرونی قوتوں کا کام

اس قسم کی قوتوں کو بقائی قوتیں کہتے ہیں۔

مقدار فہ (لا ، ما) کو قوتوں کے نظام کا کام تفاعل کہتے ہیں۔ قوہ تفاعل کی معمولی تعریف کی رُو سے ظاہر ہے کہ فہ (لا ، ما) قوتوں کے کسی معلومہ نظام کا "قوہ جمع کوئی مستقل" ہے۔

اگر حرکت تین ابعاد میں ہو تو ہم اسی طرح سے حاصل کر سکتے ہیں کہ قوتیں بقائی ہونگی اگر ر (لا فرلا + ما فرما + ے فری) کامل تفرقی ہو مساوات (۵) کے مماثل مساوات اِس صورت میں بھی درست ہوگی۔ [دیکھو دفعہ ۱۳۱]

۹۲ ۔ معلومہ قوتوں کے نظام کی وجہ سے ذرہ کی توانائی بالقوہ جبکہ ذرہ ن پر ہو

= وہ کام جو قوتیں ذرہ کو کسی معیاری مقام تک لانے میں انجام دیتی ہیں۔

فرض کرو کہ مؤخرالذکر مقام (لا۱ ، ما۱) ہے تب نقطہ ن پر ذرہ کی توانائی بالقوہ

$$= \int_{(لا، ما)}^{(لا_1، ما_1)} (لا \,فرلا + ما \,فرما) = \int_{(لا، ما)}^{(لا_1، ما_1)} \left(\frac{جف\, فہ}{جف\, لا} فرلا + \frac{جف\, فہ}{جف\, ما} فرما\right)$$

$$= \Big[فہ(لا، ما) \Big]_{(لا، ما)}^{(لا_1، ما_1)} = فہ\,(لا_1، ما_1) - فہ\,(لا، ما)$$

پس دفعہ ماقبل کی مساوات (۴) سے

ن پر ذرہ کی (توانائی بالحرکت + توانائی بالقوہ)

$$= فہ\,(لا، ما) + ج + فہ\,(لا_1، ما_1) - فہ\,(لا، ما)$$

$$= ج + فہ\,(لا_1، ما_1) = \text{ایک مستقل}$$

پس جب کوئی ذرہ بقائی قوتوں کے زیرِ عمل حرکت کرے تو اِس کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ دورانِ حرکت میں ہمیشہ مستقل

رہتا ہے۔

۹۳ - بصورت خاص اگر قوتِ عامل صرف جاذبۂ ارض ہو اور محور ما کو انتصاباً لیا جائے تو لا = ۰، ما = - م ج

اس لیے مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{2}$ م و۲ = - م ج ما + ج

پس اگر ق، راستہ پر کا کوئی نقطہ ہو تو اس سے حاصل ہوتا ہے

ن پر توانائی بالحرکت - ق پر توانائی بالحرکت

= م ج × ن اور ق پر کے معینوں کا فرق

= جاذبۂ ارض کا کام جب کہ ذرّہ ق سے ن تک جائے۔

یہ نتیجہ نہایت اہم ہے اور اگر ہمیں منحنی کے کسی معلومہ نقطہ پر توانائی بالحرکت معلوم ہو تو ہم اس سے کسی اور نقطہ پر توانائی بالحرکت معلوم کر سکتے ہیں بشرطیکہ منحنی چکنا ہو۔

۹۴ - اگر ذرّہ پر صرف ایسی قوتیں عمل کریں جو سمتِ حرکت پر علی القوائم ہوں (جیسا کہ ایک ذرّہ کی صورت میں جسے ایک بے لچک رسی کے ذریعہ ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھا جائے یا کوئی ذرّہ چکنی سطح مستوی پر حرکت کرے) تو اس کی رفتار مستقل رہیگی کیونکہ رسّی یا تعامل کا کام صفر ہوگا۔

۹۵ - اگر ایک ذرّہ پر عمل کرنے والی قوتیں ثابت نقطوں سے ذرّہ کے فاصلوں کے وحید القیمت تفاعل ہوں تو یہ قوتیں بقائی قوتیں ہونگی۔

فرض کرو کہ جب ذرّہ (لا، ما) پر ہے تو اس پر عمل کرنے والی قوت سا(ر) ہے جہاں ر فاصلہ ہے ایک ثابت نقطہ (ا، ب) اور (لا، ما) کے درمیان

پس ر۲ = (لا - ا)۲ + (ما - ب)۲

نیز فرض کرو کہ قوت (ا ، ب) کی جانب عمل کرتی ہے

تب ر (فر ر / فر لا) = (لا − ا) اور ر (فر ر / فر ما) = ما − ب

اس قوت کا جزوِ ترکیبی لا محور لا کے متوازی

= − سا (ر) × (لا − ا) / ر

اور محور ما کے متوازی جزوِ ترکیبی ما

= − سا (ر) × (ما − ب) / ر

پس لا فر لا + ما فر ما = − سا (ر) × [(لا − ا) فر لا + (ما − ب) فر ما] / ر

= − سا (ر) (ر فر ر) / ر = − سا (ر) فر ر

اس لیے اگر ف (ر) ایسا تفاعل ہو کہ (فر / فر ر) ف (ر) = − سا (ر) ......(۱)

تو

∫(لا فر لا + ما فر ما) = ∫ (فر / فر ر) ف (ر) فر ر = ف (ر) + مستقل

پس ایسی قوت بقائی ہونے کی شرطوں کو پورا کرتی ہے۔

اگر قوت مرکزی ہو اور مقلوب مربع کے کلیہ کے ماتحت عمل کرے یعنی

سا (ر) = مے / ر² تو ف (ر) = − ∫ سا (ر) فر ر = مے / ر اور اس لیے

∫(لا فر لا + ما فر ما) = مے / ر + مستقل

۹۶۔ ایک لچکدار رسی کو کھینچنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

پہلے اور آخری تناؤں کے اوسط اور کھنچاؤ جو پیدا ہو اُن کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ رسّی کا طول بن کھچے و ہے اور لہ اس کی لچک کی قدر ہے پس جب رسّی کا طول لا ہو تو اس کا تناؤ ہک کے کلیہ کی رو سے

$$= لہ \times \frac{لا - و}{و}$$

کام جو تناؤ کی قوت رسی کو طول ب سے کھینچ کر طول ج تک لانے میں انجام دیتی ہے

$$= \int_{ب}^{ج} ت \, فرلا = \int_{ب}^{ج} لہ \, \frac{لا - و}{و} \, فرلا = \frac{لہ}{۲و} \left[(لا - و)^{۲} \right]_{ب}^{ج}$$

$$= \frac{لہ}{۲و} \left[(ج - و)^{۲} - (ب - و)^{۲} \right] = (ج - ب) \left[لہ \frac{ب - و}{و} + لہ \frac{ج - و}{و} \right] \times \frac{1}{2}$$

= (ج - ب) × پہلے اور آخری تناؤں کا اوسط۔

مشق ۔ ایک ہی سطح مستوی میں ۲ و کے فاصلہ پر دو نقطے ا اور ب ہیں، اب ایک لچکدار رسّی ہے جس کا طبعی طول ۲ ا ہے۔ اب کے وسطی نقطہ و کے ساتھ ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے باندھا گیا ہے اور ذرہ جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل نیچے گرتا ہے۔ جب یہ فاصلہ لا نیچے اترتا ہے تو اِس کی رفتار معلوم کرو۔ نیز بڑے سے بڑا انتصابی فاصلہ معلوم کرو جس میں یہ حرکت کرتا ہے۔

جب ذرہ ن پر ہو جہاں و ن = لا تو فرض کرو کہ اس کی رفتار وِ ہے پس اس وقت اس کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ م وِ^{۲} ہے۔

جاذبۂ ارض نے جو کام کیا وہ = م ج ۔ لا

تناؤ کے خلاف جو کام ہوا وہ

= ۲ × (ب ن - ب و) × ½ ل (ب ن - ب و)/ا = ل/۲ (ب ن - ا)² = ل/ا [√(لا² + ا²) - ا]²

پس توانائی کے اصول سے

½ م و² = م ج لا - ل/۲ا [√(لا² + ا²) - ا]²

ذرہ ساکن ہوجائیگا جب کہ و = ۔ اور اس وقت لا کی قیمت مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

م ج لا ا = ل [√(لا² + ا²) - ا]²

مثالیں

۱ ۔ ایک لچکدار رسّی کو جس کا طبعی طول ایک سلاخ کے مساوی ہے، سلاخ کے دونوں سروں پر باندھ دیا گیا ہے اور وسطی نقطہ سے اسے لٹکا دیا گیا ہے ۔ توانائی کے اصول کی مدد سے ثابت کرو کہ سلاخ اتنا نیچے اتر جائیگی کہ رسّی کا میلان ط افق کے ساتھ مساوات ذیل سے حاصل ہوگا:

م³ ط/۲ - م ط/۲ = ۲ن

یہ معلوم ہے کہ رسّی کی لچک کی قدر سلاخ کے وزن کی ن گنی ہے ۔

۲ ۔ کمیت م کا ایک وزنی حلقہ ایک چکنی انتصابی سلاخ پر پھسلتا ہے ۔ حلقہ کے ساتھ ایک ہلکی رسّی بندھی ہے جو سلاخ سے فاصلہ ا پر ایک چھوٹی چرخی پر سے گزرتی ہوئی کمیت ھ (> م) کو سہارے ہوئے ہے۔ اگر حلقہ کو چرخی کی ہمواری پر سے چھوڑا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ساکن ہو جانے سے پہلے فاصلہ ۲ ھ م ا/(ھ² - م²) میں سے نیچے گرگی ۔

م کی رفتار معلوم کرو جب کہ یہ فاصلہ لا نیچے گرا ہو۔

۳- کمیت م کا ایک گولا رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ اندرونی دھماکا توانائی ت پیدا کرتا ہے اور گولے کو دو ٹکڑوں میں توڑ دیتا ہے جن کی کمیتیں نسبت $\text{م}_۱ : \text{م}_۲$ میں ہیں۔ ٹکڑے گولے کے ابتدائی خطِ حرکت میں حرکت کرتے رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ان کی رفتاریں ہیں $\text{و} + \sqrt{\frac{۲\,\text{م}_۲\,\text{ت}}{\text{م}_۱\,\text{م}}}$ اور $\text{و} - \sqrt{\frac{۲\,\text{م}_۱\,\text{ت}}{\text{م}_۲\,\text{م}}}$

۴- ایک لچکدار رسّی کا حلقہ جس کا طبعی طول $۲\pi\,\text{ا}$ ہے ایک چکنے افقی میز پر و نصف قطر والے دائرہ کی شکل میں پڑا ہے۔ رسّی کو دفعۃً اپنے مرکز کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ متحرک کیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رسّی کو اپنے آپ پر چھوڑ دیا جائے تو رسّی پھیل جائیگی اور جب اس کا نصف قطر ر ہو تو اِس کی زاویئی رفتار $\frac{\text{و}^۲}{\text{ر}^۲}\,\text{سہ}$ ہوگی اور مرکز سے پرے اِس کی نیم قطری رفتار کا مربع

$$\frac{\text{و}^۲\,\text{سہ}^۲}{\text{ر}^۲}\left(\text{ر}^۲ - \text{و}^۲\right) - \frac{۲\pi\,\text{لہ}\,(\text{ر} - \text{ا})^۲}{\text{م}\,\text{ا}}$$

ہوگا جہاں م رسّی کی کمیت ہے اور لہ اس کی لچک کی قدر ہے۔

۵- چار ذرّوں کو جو ایک مربع کے کونوں پر پڑے ہیں رسیوں سے باہم ملایا گیا ہے۔ ذرّے ایک دوسرے کو قوت م مہ × فاصلہ سے دھکیل رہے ہیں۔ اگر ایک رسّی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب کوئی رسّی اپنے ابتدائی محل سے زاویہ طہ بنائیگی تو

اس کی زاویئی رفتار $\sqrt{\frac{۴\,\text{مہ}\,\text{جب}\,\text{طہ}\,(۲ + \text{جب}\,\text{طہ})}{۲ - \text{جب}^۲\,\text{طہ}}}$ ہوگی۔

[دفعہ ۴۴ کی مانند کل نظام کا مرکزِ کمیت ساکن رہتا ہے نیز ہر ذرّہ پر کا اندفاع مشہور خاصیت کی بناء پر وہی ہو جبکہ چاروں ذرّوں کو مرکز پر مجتمع خیال کیا جائے اور = ۴ مہ × کمیت کے ثابت مرکز سے فاصلہ۔ کل توانائی بالحرکت کو اندفاع کے کل کام کے مساوی رکھو۔]

۶- ایک یکساں رسّی جس کی کمیت ھ اور طول ۲ و ہے ایک چکنی میخ پر متشاکلاً پڑی ہے اور اس کے سروں کے ساتھ کمیتیں م اور مَ بندھی ہیں۔ ثابت کرو کہ

جب رسّی بیخ پر سے اُتر جانے کو ہو تو اِس کی رفتار ہوگی

$$\sqrt{\frac{\text{مر} + ۲ (\text{م} - \text{مَ}) \text{ل ج}}{\text{مر} + \text{م} + \text{مَ}}}$$

۷- ایک وزنی یکساں زنجیر جس کا طول ۲ل ہے ایک ثابت چھوٹی چکنی چرخی پر لٹک رہی ہے اس کا طول ل + ج ایک طرف ہے اور ل - ج دوسری طرف - اگر چھوٹے طول والے سرے کو ذرا تھام لیا جائے اور پھر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ زنجیر چرخی پر سے وقت $\left(\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right)^{\frac{1}{2}}$ لوک $\frac{\text{ل} + \sqrt{\text{ل}^2 - \text{ج}^2}}{\text{ج}}$ میں اتر جائیگی۔

۸- ایک چکنی سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے اور اس کے میلانِ اعظم کے خط پر ایک یکساں زنجیر پڑی ہے جس کا طول ل اور وزن و ہے۔ زنجیر عین سطح مائل کے خط زیریں تک پہنچتی ہے جہاں یہ ایک چکنی چرخی پر سے پھسل سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ جب طول لا اُتر چکے تو سطح مائل کے خطِ زیریں پر تناؤ و (۱ - جب عہ) $\frac{\text{لا} (\text{ل} - \text{لا})}{\text{ل}^2}$ ہوگا۔

۹- ایک چھوٹی چکنی چرخی پر ایک ملائم رسّی پڑی ہے۔ رسّی ابتداءً ساکن ہے اور مختلف جانب اِس کے طول ل - د، ل + د لٹک رہے ہیں۔ اب چرخی کو مستقل اسراع ف کے ساتھ اوپر کی طرف حرکت دی جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ چرخی پر سے رسّی وقت $\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ف} + \text{ج}}}$ جمز$^{-1}$ $\frac{\text{ل}}{\text{د}}$ میں اتر جائیگی۔

۹۷ - سادہ رقاص کا اہتزاز۔

ایک ذرّہ کی کمیت م ہے، اسے ایک ہلکی رسی کے ذریعہ جس کا طول ل ہے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے اور ذرّہ جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل چھوٹے زاویہ میں سے اہتزاز کر رہا ہے۔

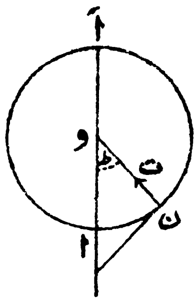
اِس کی حرکت کا دَور معلوم کرو۔

جب رسّی خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو حرکت کی مساوات ہے

$$م \frac{ف^۲ س}{ف ت^۲} = - م ج جب طہ \ldots\ldots (۱)$$

لیکن س = ل طہ

∴ طہً = − $\frac{ج}{ل}$ جب طہ = − $\frac{ج}{ل}$ طہ، پہلے تقرب تک۔



اگر رقاص سمتِ انتصابی کے دونوں طرف چھوٹے زاویہ عہ میں سے گھومے تو جب، طہ = عہ، طہً = ۰ اور ت = ۰،
یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$طہ = عہ جم \left[\sqrt{\frac{ج}{ل}}\, ت\right]$$

پس حرکت سادہ موسیقی حرکت ہے اور ایک نہایت چھوٹے اہتزاز کا

دَور ت، = ۲ π $\sqrt{\frac{ل}{ج}}$ حسب دفعہ ۲۲

اس سے زیادہ بڑے تقرب کے لیے مساوات (۱) سے

$$ل طہً^۲ = ۲ ج (جم طہ - جم عہ) \ldots\ldots (۲)$$

چونکہ طہً صفر ہے جب، طہ = عہ

[یہ مساوات توانائی کے اصول سے فوراً نکل آتی ہے]

$$\therefore \sqrt{\frac{۲ج}{ل}}\cdot ت = \int_0^{عہ} \frac{فط}{\sqrt{جم\, ط - جم\, عہ}}$$

جہاں ت پورے دَور کا ایک چوتھائی ہے ۔

$$\therefore ۲\sqrt{\frac{ج}{ل}}\, ت = \int_0^{عہ} \frac{فط}{\sqrt{جب^۲\frac{عہ}{۲} - جب^۲\frac{ط}{۲}}}$$

رکھو $جب\frac{ط}{۲} = جب\frac{عہ}{۲}\, جب\, فہ$

$$\therefore ۲\sqrt{\frac{ج}{ل}}\cdot ت = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۲\, جب\frac{عہ}{۲}\, جم\, فہ\, فرفہ}{جم\frac{ط}{۲}\times جب\frac{عہ}{۲}\, جم\, فہ}$$

$$\therefore ت = \sqrt{\frac{ل}{ج}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \frac{فرفہ}{\left(۱ - جب^۲\frac{عہ}{۲}\, جب^۲ فہ\right)^{\frac{۱}{۲}}} \quad \text{................} \quad (۳)$$

$$= \sqrt{\frac{ل}{ج}}\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \left[۱ + \frac{۱}{۲} جب^۲\frac{عہ}{۲}\, جب^۲ فہ + \frac{۳\times۱}{۴\times۲} جب^۴\frac{عہ}{۲}\, جب^۴ فہ + \cdots\right] فرفہ$$

$$= \sqrt{\frac{ل}{ج}}\cdot\frac{\pi}{۲}\left[۱ + \frac{۱}{۴} جب^۲\frac{عہ}{۲} + \left(\frac{۳\times۱}{۴\times۲}\right)^۲ جب^۴\frac{عہ}{۲}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{۵\times۳\times۱}{۶\times۴\times۲}\right)^۲ جب^۶\frac{عہ}{۲} + \cdots\right] \quad \text{......} \quad (۴)$$

پس مطلوبہ دَور کا دوسرا تقرب $ت_۲$

$$= ت_۱\left[۱ + \frac{۱}{۴} جب^۲\frac{عہ}{۲}\right] = ت_۱\left[۱ + \frac{عہ^۲}{۱۶}\right]$$

جب کہ عہ کی ۲ سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کیا جائے ۔

اگر عہ بہت چھوٹا نہ ہو تو بھی (۴) میں خطوطِ وحدانی کے اندر کی رقم کافی حد تک تقریبی قیمت کو ظاہر کرتی ہے - مثلاً فرض کرو کہ عہ = ۳۰° یعنی رقاص ۶۰° کے زاویہ میں اہتزاز کرتا ہے، تب $\text{جب}^2\frac{\text{عہ}}{2} = ۰٫۰۶۷$ اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left[1 + ۰٫۰۱۷ + ۰٫۰۰۰۶۳ + \cdots\right]$$

[جو طالب علم ناقصی تفاعلوں سے واقف ہے اُس سے مخفی نہیں کہ (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب فہ} = \text{جن}^{[1]}\left(\text{ت}\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\right)\left(\text{مق جب}\ \frac{\text{عہ}}{2}\right)$$

یعنی
$$\text{جب}\ \frac{\text{طہ}}{2} = \text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{2}\ \text{جن}\left(\text{ت}\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\right)\left(\text{مق جب}\ \frac{\text{عہ}}{2}\right)$$

پورے اہتزاز کی مدت (۳) کی رُو سے $= \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ مضروب جیب $\frac{\text{عہ}}{2}$ مقیاس والے ناقصی تفاعل کا حقیقی دَور -]

۹۸ - دفعۂ ماقبل کی مساواتیں (۱) اور (۲) ہر صورت میں دائرہ میں کی حرکت کو تعبیر کرتی ہیں - اگر ذرّہ کی زاویئی رفتار جب کہ یہ سب سے نچلے نقطہ ا میں سے گزر رہا ہو سہ ہو تو

$$\text{ل}\ \dot{\text{ط}}^2 = 2\ \text{ج جم طہ} + \text{مستقل} = \text{ل سہ}^2 - 2\text{ج}\left(1 - \text{جم طہ}\right) \quad \cdots\cdots(5)$$

یہ مساوات بالعموم ناقصی تفاعلوں کو استعمال کیے بغیر تکمل نہیں ہو سکتی، جو کتاب ہذا کی حدود سے باہر ہیں -

اگر رسّی کا تناؤ ت ہو تو

$$\text{ت} - \text{م ج جم طہ} = \text{عاد ن و کی سمت میں قوت}$$

[1] $\text{جن}\left(\text{ت}\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\right) = \mathrm{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$

$$= \text{م ل طہ}^{\text{۲}} = \text{م ل سہ}^{\text{۲}} - \text{۲م ج} \left(\text{۱} - \text{جم طہ}\right)$$

$$\therefore \text{ت} = \text{م}\left\{\text{ل سہ}^{\text{۲}} - \text{ج}\left(\text{۲} - \text{۳ جم طہ}\right)\right\} \quad \ldots\ldots \; (\text{۶})$$

پس تناؤ ت معدوم ہو جاتا ہے اور منفی ہو جاتا ہے یعنی مستدیر حرکت بند ہو جاتی ہے جب کہ $\text{جم طہ} = \dfrac{\text{۲ ج} - \text{ل سہ}^{\text{۲}}}{\text{۳ ج}}$

خاص صورت ۔ فرض کرو کہ ا پر کی زاویئی رفتار سہ مساوی ہے اُس رفتار کے جو سب سے اونچے نقطہ اُسے گرنے سے پیدا ہوتی ہے

یعنی $\text{ل}^{\text{۲}}\text{سہ}^{\text{۲}} = \text{۲ج} \times \text{۲ل}$ یعنی $\text{سہ}^{\text{۲}} = \dfrac{\text{۴ ج}}{\text{ل}}$

تب (۵) سے $\text{طہ}^{\text{۲}} = \dfrac{\text{۲ج}}{\text{ل}}\left(\text{۱} + \text{جم طہ}\right)$

$$\therefore \text{ت}\sqrt{\frac{\text{۲ج}}{\text{ل}}} = \int \frac{\text{فطہ}}{\left(\text{۱} + \text{جم طہ}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}\int \frac{\text{فطہ}}{\text{جم}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}}$$

$$\therefore \text{ت} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left[\text{۲ لوک مس}\left(\frac{\pi}{\text{۴}} + \frac{\text{طہ}}{\text{۴}}\right)\right]_{\text{۰}}^{\text{طہ}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{جم}\frac{\text{طہ}}{\text{۴}} + \text{جب}\frac{\text{طہ}}{\text{۴}}}{\text{جم}\frac{\text{طہ}}{\text{۴}} - \text{جب}\frac{\text{طہ}}{\text{۴}}} = \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{۱} + \text{جب}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}}{\text{جم}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}} = \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\,\text{لوک}\left(\text{قط}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}} + \text{مس}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}\right)\Big]$$

اس مساوات سے سب سے نچلے نقطہ سے کسی زاویہ طہ کو مرتسم کرنے کی مدت معلوم ہوتی ہے

نیز اس صورت میں

$$\text{تناؤ ت} = \text{م}\left\{\text{۴ج} - \text{۲ج} + \text{۳ج جم طہ}\right\} = \text{م ج}\left[\text{۲} + \text{۳ جم طہ}\right]$$

پس مستدیر حرکت بند ہو جاتی ہے جب کہ جم ط = $-\frac{۲}{۳}$ اور اُس وقت قط $\frac{ط}{۲} = \sqrt{٦}$

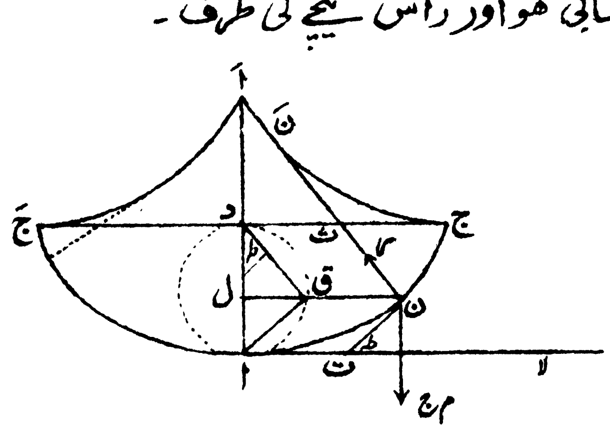
اور سِس $\frac{ط}{۲} = \sqrt{۵}$ ، پس مستدیر حرکت $\sqrt{\frac{ل}{ج}}$ لوگو $(\sqrt{۵} + \sqrt{٦})$ وقت تک جاری رہتی ہے۔

۹۹ - مشق ۱- ایک رقاص ثانیے ضرب کرتا ہے اور دونوں طرف ۴° کے زاویہ میں سے اہتزاز کرتا ہے، ثابت کرو کہ اگر ۴° میں دونوں طرف اہتزاز کرے تو تقریباً ۱۲ ثانیے اور اگر ۵° میں سے اہتزاز کرے تو تقریباً ۴ ثانیے ہر روز پیچھے رہ جائیگا۔

مشق ۲- ایک وزنی منکا ایک چکنے ثابت گول تار پر جس کا نصف قطر ا ہے پھسلتا ہے۔ اگر اسے سب سے نچلے نقطہ سے اُس رفتار کے ساتھ پھینکا جائے جو اس کو عین بالاترین نقطہ تک لے جا سکے تو ثابت کرو کہ وقت ت پر منکے کا نصف قطر خطِ انتصابی کے ساتھ حسب ذیل میلان رکھتا ہوگا اور منکے کو بالاترین نقطہ تک پہنچنے کے لیے لا انتہا وقت درکار ہوگا

$$۲\ سِس^{-۱}\left[جبز \sqrt{\frac{ج}{ا}}\ ت\right]$$

۱۰۰ - ایک چکنے تدویر پر حرکت جب کہ تدویر کا محور انتصابی ہو اور راس نیچے کی طرف۔



فرض کرو کہ اق د تدویر ج ن اجَ کا مکون دائرہ ہے اور ن تدویر پر کا کوئی نقطہ ہے۔ ن پر مماس ن ت کھینچو اور ن ق ل عمود کھینچو محور پر جو مکون دائرہ سے ق پر ملے۔ تدویر کی دو مشہور خاصیتیں یہ ہیں کہ مماس ت ان متوازی ہے اق کے اور قوس ان مساوی ہے دوچند خطِ مستقیم اق کے۔

پس اگر ن ت لا زاویہ طہ ہو تو

طہ = ⦣ق ا لا = ا د ق

اور س = قوس ان = ۲ اق = ۴ ﻻ جب طہ .... (۱)

جہاں ﻻ مکون دائرہ کا نصف قطر ہے۔

اگر منحنی کا تعامل عماد وار ر ہو اور ن پر کے ذرّہ کی کمیّت م ہو تو حرکت کی مساواتیں ہیں

م $\frac{\text{فر}^2 \text{س}}{\text{فرت}^2}$ = ن ت کی سمت میں قوت = ـ م ج جب طہ .... (۲)

اور م $\frac{\text{و}^2}{\text{ر}}$ = عاداً عمل کرنے والی قوت = ر ـ م ج جم طہ .... (۳)

تب (۱) اور (۲) سے ہمیں ملتا ہے

$\frac{\text{فر}^2 \text{س}}{\text{فرت}^2}$ = ـ $\frac{\text{ج}}{\text{۴ ﻻ}}$. س .... (۴)

پس حرکت سادہ موسیقی ہے اور اس لیے حسب دفعہ ۲۲ سب سے نچلے نقطہ تک پہنچنے کا وقت

$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{۴ ﻻ}}}} = \pi \sqrt{\frac{\text{ﻻ}}{\text{ج}}}$$

اور اس لیے یہ وہی رہتا ہے خواہ ذرّہ حالتِ سکون سے منحنی پر کے کسی نقطہ سے چلے

مساوات (۴) کو تکمل کرنے سے

$$\text{و}^2 = \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2 = -\frac{\text{ج}}{\text{۴ل}}\,\text{س}^2 + \text{ج} = -\text{ج}\times\text{۴ا جب}^2\text{طہ} + \text{ج}$$

$$= \text{۴ اج}\left(\text{جب}^2\text{طہ}_{\cdot} - \text{جب}^2\text{طہ}\right)$$

اگر ذرّہ طہ = طہ. سے سکون سے روانہ ہو۔

[یہ مساوات توانائی کے اصول سے فوراً لکھی جاسکتی ہے]

نیز $\text{ر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \text{۴ اجم طہ}$

اس لیے (۳) سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ر} = \text{م ج جم طہ} + \text{م ج}\,\frac{\text{جب}^2\text{طہ}_{\cdot} - \text{جب}^2\text{طہ}}{\text{جم طہ}} = \text{م ج}\,\frac{\text{جم ۲طہ} + \text{جب}^2\text{طہ}_{\cdot}}{\text{جم طہ}}$$

جس سے راستہ کے کسی نقطہ پر منحنی کا تعامل معلوم ہوتا ہے۔

سب سے نچلے نقطہ میں سے گزرنے پر ذرّہ دوسری طرف صعود کرنا شروع کرتا ہے اور دوسری طرف اسی بلندی پر پہنچ جاتا ہے جس سے روانہ ہوا تھا اور اس طرح آگے پیچھے اہتزاز کرتا رہتا ہے۔

۱۰۱ ۔ دفعہ ماقبل میں جو خاصیت ثابت کی جاچکی ہے وہ اُس صورت میں بھی درست رہیگی جب کہ مادی منحنی پر حرکت کرنے کی بجائے ذرّہ ایک رسّی سے منسلک ہو اور کسی حیلی انتظام کے ذریعہ خطِ تدویر مرتسم کرے جب کہ رسّی ہر مقام پر خطِ تدویر پر عماد وار رہے۔ اس مقصد کے حصول کے لیے یوں کرتے ہیں کہ رسّی تدویر کے بر پیچہ پر کھُلتی اور لپٹتی ہے۔ بہ آسانی سے

معلوم ہو سکتا ہے کہ تدویر کا بر بیچہ مساوی تدویر کے دو نصف حصوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

کیونکہ س = ۴ ل جم طہ اس لیے ا اور ج کے جواب میں بر بیچہ پر کے نقطے اَ (جہاں ا د = د اَ) اور خود ج ہیں۔ نیز اگر عاد ن ث بر بیچہ سے نَ پر سلے اور قوس ج نَ ، سہ ہو تو بر بیچہ کی خاصیت کی بنا پر

س = قوس نَ ج = نَ ن ، ن پر انحنا کا نصف قطر

= ۴ ا جم طہ = ۴ ا جب نَ ث د

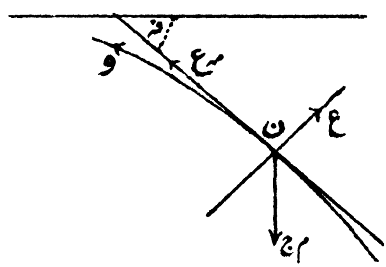
پس دفعہ ماقبل کی مساوات (۱) کی رُو سے بر بیچہ تشابہ تدویر ہے جس کا راس ج پر ہے اور جس کا محور انتصابی ہے۔ یہ کل قوس ج ا کے لیے درست ہے۔ ج اَ کے لیے بھی ایسا ہی بر بیچہ ہوگا۔

پس اگر ایک رسّی لی جائے جس کا طول قوس ج اَ یعنی ۴ ا کے مساوی ہو اور اس کے ایک سرے کو ثابت نقطہ ۴ کے ساتھ باندھ کر رسّی کو اس طرح حرکت دی جائے کہ یہ دو ثابت تدویروں سے بنے ہوئے منحنی ج اَ جَ پر بالتواتر کھلے اور لپیٹے تو ذرّہ ن جو رسّی کے دوسرے سرے کے ساتھ بندھا ہو تدویر ج ا جَ مرتسم کریگا اور رسّی ہمیشہ تدویر ج ا جَ پر عاد ہوگی ، پس خواہ رسّی کسی زاویہ میں سے حرکت کرے اہتزازی مدتیں ہمیشہ برابر رہینگی۔ عملاً رقاص کے لیے ایک چھوٹے زاویہ میں سے گھومنا کافی ہوتا ہے اس لیے اَ کے قرب میں قوسوں کے صرف دو چھوٹے چھوٹے حصوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ چھوٹی گھڑیاں کے رقاصوں میں عام طور پر یہی انتظام کیا جاتا ہے اور سہارنے والے تار (جو ایک پتلی چپٹی کمانی پر مشتمل ہوتا ہے) کا اوپر کا سرا اَ کے قرب میں دو دھات کے بنے ہوئے تدویری پتروں پر کھلتا اور لپٹتا ہے۔

۱۰۲ - جاذبہ ارض کے زیرِ عمل کھُردُرے منحنی پر حرکت۔

اگر حرکت جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل ہو اور رگڑ کو ملحوظ رکھا جائے تو

خواہ منحنی کسی قسم کا ہو بشرطیکہ فہ وہ زاویہ ہو جو مماس افق کے ساتھ بناتا ہے اور س، فہ کے ساتھ بڑھے،



و $\frac{\text{فر و}}{\text{فر س}}$ = ج جب فہ - مہ $\frac{\text{ع}}{\text{م}}$ ....(۱)

اور $\frac{\text{و}^2}{\text{ر}}$ = ج جم فہ - $\frac{\text{ع}}{\text{م}}$ ....(۲)

∴ $\frac{1}{2}$ $\frac{\text{فر و}^2}{\text{فر س}}$ - مہ $\frac{\text{و}^2}{\text{ر}}$ = ج (جب فہ - مہ جم فہ)

∴ $\frac{\text{فر و}^2}{\text{فر فہ}}$ - ۲ مہ و^2 = ۲ ج ر (جب فہ - مہ جم فہ)

تو$^{-2\text{مہ فہ}}$ سے ضرب دینے اور تکمل کرنے سے

و^2 تو$^{-2\text{مہ فہ}}$ = ۲ ج $\int$ ر تو$^{-2\text{مہ فہ}}$ (جب فہ - مہ جم فہ) + مستقل

جب منحنی کی مساوات معلوم ہو تو ر کی قیمت فہ کی رقوم میں نکل سکتی ہے اس لیے مساوات بالا سے و^2 اور بنا ءً علیہ $\left(\frac{\text{فر س}}{\text{فر فہ}}\right)^2 \left(\frac{\text{فر فہ}}{\text{فر ت}}\right)^2$ معلوم ہو سکتا ہے۔

پس $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ معلوم ہے اور اس لیے نظری طور پر ت، فہ کی رقوم میں محسوب ہو سکتا ہے۔

۱۰۳ – اگر دفعہ ۱۰۰ کا تدویر کھردرا ہو اور رگڑ کی قدر مہ ہو تو حرکت معلوم کرو جب کہ ذرہ نیچے کی طرف پھسل رہا ہو۔

اس صورت میں رگڑ مہ ع سمت ت ن ممدودہ میں عمل کرتی ہے پس حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\text{م و}\frac{\text{فرو}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ ع} - \text{م ج جب طہ} \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\text{م و}^2}{\text{ر}} = \text{م} \times \text{۴ ا جم طہ} \times \dot{\text{طہ}}^2 = \text{ع} - \text{م ج جم طہ} \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\therefore \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\dot{\text{طہ}}\ \text{جم طہ}\right) - \text{مہ جم طہ} \times \dot{\text{طہ}}^2 = -\frac{\text{ج}}{\text{۴ا}}\left(\text{جب طہ} - \text{مہ جم طہ}\right)$$

$$\text{یعنی}\ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\dot{\text{طہ}}\ \text{جم طہ}\ \text{قو}^{\text{مہ طہ}}\right] = -\frac{\text{ج}}{\text{۴ا}}\left(\text{جب طہ} - \text{مہ جم طہ}\right) \times \text{قو}^{\text{مہ طہ}} \quad \ldots\ldots(3)$$

$$\text{اب}\ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\text{قو}^{\text{مہ طہ}}\left(\text{جب طہ} - \text{مہ جم طہ}\right)\right] = \left(1 + \text{مہ}^2\right)\text{قو}^{\text{مہ طہ}}\ \text{جم طہ} \times \dot{\text{طہ}}$$

اس لیے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}\left[\text{قو}^{\text{مہ طہ}}\left(\text{جب طہ} - \text{مہ جم طہ}\right)\right]$$

$$= -\left(1 + \text{مہ}^2\right)\frac{\text{ج}}{\text{۴ا}}\left[\text{قو}^{\text{مہ طہ}}\left(\text{جب طہ} - \text{مہ جم طہ}\right)\right]$$

$$\therefore \text{قو}^{\text{مہ طہ}}\left(\text{جب طہ} - \text{مہ جم طہ}\right) = \text{ا جم}\left[\sqrt{\frac{\text{ج}\left(1 + \text{مہ}^2\right)}{\text{۴ا}}}\ \text{ت} + \text{ب}\right]$$

جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں جو ابتدائی شرائط پر منحصر ہیں (۴) کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^2 = ۱۶\,\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ} \times \text{طہ}'^2 = \frac{۴\,\text{اج}}{۱+\text{مہ}^2}\left[\text{ا}^2\,\text{و}^{۲\,\text{مہ طہ}} - (\text{جب طہ} - \text{مہ جم طہ})^2\right]$$

چھٹے باب پر مثالیں

۱ - ایک ذرّہ چکنے منحنی $\text{ما} = \text{ا جسر}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ پر نیچے کی طرف پھسل رہا ہے، لا کا محور افقی ہے اور مقامِ روانگی پر کا مماس افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے - ثابت کرو کہ یہ منحنی سے الگ ہو جائیگا جب کہ یہ انتصابی فاصلہ ا قطا عہ نیچے اترے -

۲ - ایک ذرّہ ایک چکنے منحنی پر جاذبہ کے زیرِ اثر نیچے اترتا ہے اور مقامِ روانگی سے انتصاباً نیچے کی طرف روانہ ہوتا ہے اور مساوی وقفوں میں مساوی انتصابی فاصلے طے کرتا ہے، ثابت کرو کہ منحنی نیم کعبی مکافی ہے جس کے قرن پر کا مماس انتصابی ہے -

۳ - ایک ذرّہ کو ایک چکنی اُلٹی تدویر کے قرن سے رفتار و کے ساتھ قوس کے نیچے کی جانب پھینکا گیا ہے - ثابت کرو کہ راس تک پہنچنے کا وقت

$$۲\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}\ \text{مس}^{-۱}\left[\frac{\sqrt{۴\,\text{اج}}}{\text{و}}\right] \text{ ہے -}$$

۴ - ایک چکنی تدویر پر جس کا راس نیچے کی طرف ہے اور محور انتصابی ہے ایک ذرہ نیچے کی طرف پھسلتا ہے - ثابت کرو کہ انتصابی بلندی کے پہلے نصف میں سے گرنے کی مدت باقی نصف میں سے گرنے کی مدت کے مساوی ہے -

۵ - ایک چکنی تدویر کا راس اوپر کی طرف ہے اور محور انتصابی ہے اس کے راس کے قریب سے ایک ذرّہ نیچے کی طرف پھسلنا شروع کرتا ہے - ثابت کرو کہ یہ منحنی سے علیحدہ ہو جائیگا جب کہ اِس کی حرکت کی سمت افق کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے -

۶ ۔ ایک چھلا ایک چکنے تار میں پرویا گیا ہے ۔ تار کی شکل دو مساوی تدویروں کی ہے جن کے قرنوں کو اس طرح جوڑا گیا ہے کہ قرنوں کا خط افقی ہے ، تار کی سطح انتصابی اور تدویر بلحاظ قرنوں کے خط کے متشاکل ہیں ۔ مکون دائرہ کا نصف قطر ا ہے ، چھلا بالا ترین نقطہ سے رفتار و کے ساتھ روانہ ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اوپر کے راس سے قرن تک پہنچنے کا وقت اور پھر قرن سے نچلے رأس تک پہنچنے کا وقت بالترتیب

$$2\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}\ \text{جبتر}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\ \text{4 ا ج}}{\text{و}}\right) \text{ اور } 2\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}\ \text{جب}^{-1}\sqrt{\frac{\text{4 ا ج}}{\text{و}^2+\text{8 ا ج}}}$$ ہیں ۔

۷ ۔ ایک ذرّہ ایک چکنی نلی کے اندر حرکت کرتا ہے جس کی شکل زنجیرہ (Catenary) کی ہے ، ذرّہ پر جو قوتِ جاذبہ عمل کرتی ہے وہ مرتب سے اِس کے فاصلہ کے متناسب ہے ثابت کرو کہ حرکت سادہ موسیقی ہے ۔

۸ ۔ ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے ایک چکنی مستدیر نلی کے اندر جس کا نصف قطر ا ہے قوت م مہ × فاصلہ کے زیرِ عمل جو نلی کے اندر مرکز سے فاصلہ ج پر کے ایک نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے حرکت کرتا ہے ۔ اگر ذرّہ کو مرکز قوت سے بڑے سے بڑے فاصلہ کے قریب رکھا جائے تو ثابت کرو کہ یہ کم سے کم فاصلہ پر ختم ہونے والا رُبع وقت $\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{مہ ج}}}$ لوک $(\sqrt{2}+1)$ میں مرتسم کریگا ۔

۹ ۔ ایک ذرّہ کی حرکت ایک مساوی الزاویہ لولبی پر مقید ہے ، ذرّہ پر لولبی کے قطب کی طرف قوتِ کشش م مہ $(\text{فاصلہ})^{-2}$ عمل کرتی ہے اور یہ قطب سے فاصلہ ب پر سے روانہ ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر لولبی کی مساوات $\text{ر} = \text{ا و}^{\text{طہ مم عہ}}$ ہو تو قطب پر پہنچنے کا وقت $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\text{ب}^3}{\text{2 مہ}}}$ قطعہ ہوگا ۔

نیز کسی آن میں منحنی کا تعامل دریافت کرو ۔

۱۰ ۔ ایک چکنی مکافی نلی کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اِس کا رأس نیچے کی طرف ہے اور اس کی سطح انتصابی ہے ۔ ایک ذرّہ اس پر جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل نیچے

کی طرف پھسل رہا ہے ۔ ثابت کرو کہ کسی محل میں نلی کا تعامل $۲\,و\,\frac{ھ+ر}{ر}$ ہوگا، جہاں و ذرّہ کا وزن ہے اور ر نصف قطر انحنا ہے، ۴ و نیم وترِ خاص ہے اور ھ ذرّہ کی ابتدائی انتصابی بلندی ہے راس کے اوپر ۔

۱۱ ۔ ایک چکنا کھوکھلا اسطوانہ ہے جس کی عمودی تراش قطع ناقص ہے اور تراش کے محورِ اعظم اور اصغر بالترتیب ا اور ب ہیں ۔ اسطوانہ اس طرح پڑا ہے کہ اِس کا محورِ اصغر انتصابی ہے ۔ اس کے سب سے نچلے نقطہ سے ایک ذرّہ کو اُسی انتصابی سطح مستوی میں جو اسطوانہ کے محور کو علی القوائم قطع کرتی ہے پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ اسطوانہ سے علیحدہ ہو جائیگا اگر پھینکنے کی رفتار

$$\sqrt{۲\,ج\,ب} \quad \text{اور} \quad \sqrt{ج \cdot \frac{ا^{۲} + ۴\,ب^{۲}}{ب}}$$

کے درمیان ہو ۔

۱۲ ۔ ایک چھوٹا منکا جس کی کمیت م ہے ایک چکنے مستدیر تار پر ایک ایسی مرکزی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو $\frac{م\,مہ}{(\text{فاصلہ})^{۲}}$ کے مساوی ہے اور دائرہ کے مرکز سے فاصلہ ب پر کے ایک نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ذرّہ دائرہ کے گرد پورا چکر لگائے تو اُس کی رفتار مرکزِ قوت کے قریب ترین نقطہ پر

$$\sqrt{\frac{۴\,مہ\,ب}{ا^{۲} - ب^{۲}}}$$

سے کم نہیں ہونی چاہیے ۔

۱۳ ۔ قطع ناقص کی شکل کا ایک تار ہے جس کے ماسکہ کی طرف ایک قوت $\frac{مہ}{ر^{۲}} + \frac{ل}{ر^{۳}}$ عمل کرتی ہے اور اس کے زیرِ عمل ایک منکا تار پر حرکت کرتا ہے ۔ منکے کو ابتداءً ماسکہ سے فاصلہ ف پر کے ایک نقطہ سے ایسی رفتار کے ساتھ پھینکا گیا ہے جس سے قوت $\frac{مہ}{ر^{۲}}$ کے زیرِ عمل منکا پورے ناقص کے گرد آزادانہ گھوم سکے ۔

ثابت کرو کہ تار کا تعامل

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}}\left[\frac{1}{\text{ر}^{2}}-\frac{1}{\text{ور}}+\frac{1}{\text{ف}^{2}}\right]$$

ہے جہاں ر نصف قطرِ انحنا ہے۔

۱۴- ایک ذرّہ چار قرنی درتدویر (hypocycloid) $\text{لا}^{\frac{2}{3}}+\text{ما}^{\frac{2}{3}}=\text{ا}^{\frac{2}{3}}$ پر ایسی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو محور پر عمود وار عمل کرتی ہے اور ذرّہ کے فاصلہ کے جذر الکعب کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ سے محور لا تک اترنے کا وقت ہر نقطہ کے لیے وہی ہے۔ قوت کے اس قانون کے لیے منحنی کو Tautochrone کہتے ہیں۔

۱۵- ایک چھوٹا منکا برتدویر کی شکل کے ایک چکنے تار پر ایسی مرکزی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو برتدویر کے مرکز کی طرف عمل کرتی ہے اور فاصلہ کے متناسب ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے سب اہتزاز مساوی الزمان ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر منحنی درتدویر ہو اور قوت بجائے مرکز کی طرف عمل کرنے کے مرکز سے باہر کی طرف عمل کرے تو بھی اہتزاز ہم مدت ہونگے۔

۱۶- انتصابی سطح میں ایک منحنی ایسا ہے کہ اس کی کسی قوس کو مرتسم کرنے کا وقت جب کہ اسے ایک ثابت نقطہ و سے ناپا جائے قوس مذکور کے وتر پر نیچے کی طرف پھسلنے کے وقت کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی برنولی کا لیمنسکیٹ ہے جس کا عقدہ و پر ہے اور جس کا محور سمتِ انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔

۱۷- ایک ذرّہ ایک کھردرے کرہ کی اندرونی سطح کے ساتھ ساتھ پھینکا گیا ہے اور قوتیں اس پر عمل نہیں کرتیں۔ ثابت کرو کہ یہ نقطہ رمی پر پھر وقت $\frac{\text{ل}}{\text{مہو}}\left(\text{و}^{2\text{مہ}\pi}-1\right)$ کے بعد آجائیگا جہاں ل نصف قطر ہے کرہ کا، و پھینکنے کی رفتار ہے اور مہ رگڑ کی قدر ہے۔

۱۸- ایک منکا کھردرے مستدیر تار پر جس کی سطح انتصابی ہے اس کے افقی قطر

کے ایک سرے سے روانہ ہوکر نیچے کی طرف پھسلتا ہے - جب یہ مرکز کے گرد زاویہ طہ مرتسم کرے تو ثابت کرو کہ اس کی زاویئی رفتار کا مربع

$$\frac{٢ج}{ل(١+٤مہ^{٢})}\left[(١-٢مہ^{٢})\,\text{جب}\,طہ+٣مہ\left(\text{جم}\,طہ-و^{-٢مہطہ}\right)\right]$$

ہوگا جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے اور ل تار کا نصف قطر-

١٩ - ایک ذرّہ ، تقریباً چکنے شیشے کے ایک کرہ کی چوٹی کے قریب سے انتہائی تعادل کی حالت سے گرتا ہے - ثابت کرو کہ یہ کرہ سے اُس مقام پر علٰحدہ ہو جائیگا جس پر نصف قطر سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ

$$عہ+مہ\left\{٢-\frac{٤}{٣}\,\frac{عہ}{\text{جب}\,عہ}\right\}$$

بنائے جہاں جم عہ $=\frac{٢}{٣}$ اور مہ رگڑ کی قدر ایک چھوٹی مقدار ہے -

٢٠ - ایک کھردرے کرہ کا نصف قطر ل ہے اور اس کے سب سے نچلے نقطہ سے ایک ذرّہ کو اُفقاً پھینکا گیا ہے - ایک رُبع سے کم قوس طے کرنے کے بعد یہ پھر لوٹ کر اپنے پہلے مقام پر آکر ساکن ہو جاتا ہے - ثابت کرو کہ ابتدائی رفتار

$$\text{جب}\,عہ\sqrt{٢ج\,ل\,\frac{١+مہ^{٢}}{١-٢مہ^{٢}}}$$

ہونی چاہیے جہاں مہ رگڑ کی قدر اور ٢عہ وہ قوس ہے جس پر ذرّہ حرکت کرتا ہے -

٢١ - ایک کھردری تدویری قوس کا قاعدہ متوازی الافق ہے اور اس کا راس نیچے کی طرف ہے - اس پر اس کے قرن سے سکون سے روانہ ہوکر ایک ذرّہ اس طرح پھسلتا ہے کہ راس پر پہنچ کر ساکن ہو جاتا ہے - ثابت کرو کہ $مہ^{٢}و^{مہ\pi}=١$

٢٢ - ایک کھردری تدویر ہے جس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف - اس پر ایک ذرّہ اس مقام سے روانہ ہوکر جہاں پر کا ماس افق کے ساتھ $\angle$ طہ بناتا ہے پھسلنا شروع کرتا ہے اور راس پر آکر ساکن ہو جاتا ہے - ثابت کرو کہ مہ $و^{مہ طہ}$ = جب طہ - مہ جم طہ

۲۳ - ایک کھردری تدویر ہے جس کا محور انتصابی ہے اور اس کے قرنوں کو ملانے والا خط افقی ہے ایک وزنی ذرّہ جو قرن پر ساکن تھا حالتِ سکون سے پھسلنا شروع کرتا ہے اور راس کی دوسری جانب ایک نقطہ پر ساکن ہوجاتا ہے جس پر کا ماس سمتِ انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑ کی قدر مساوات

$$۳\,مہ^{۳} + ۴\,لوک_{و}\,(۱ + مہ) = ۲\,لوک_{و}\,۲$$

کو پورا کرتی ہے۔

۲۴ - ایک ذرّہ ایک کھردرے منحنی تار پر حرکت کرتا ہے جو ایسا ہے کہ ذرّہ اپنی حرکت کی سمت مستقل زاویئی رفتار سے بدلتا ہے۔ ثابت کرو کہ تار کی ممکن شکل مساوی الزاویہ لولبی ہے۔

۲۵ - ایک ذرّہ کو زنجیرہ کے (جس کا محور انتصابی ہے) سب سے نچلے نقطہ پر رکھا گیا ہے اور اسے ایک رسّی کے ساتھ باندھا گیا ہے جو زنجیرہ پر پڑی ہے لیکن جو زنجیرہ پر سے کھل سکتی ہے۔ اگر ذرہ کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ فہ بنانے والی سمت کے ساتھ ذرہ حرکت کر رہا ہوگا جب کہ ابتدائے حرکت سے وقت

$$\sqrt{\frac{جہ}{۲ج}}\,لوک\left(\frac{۱ + \sqrt{۲}\,جب\,\frac{فہ}{۲}}{۱ - \sqrt{۲}\,جب\,\frac{فہ}{۲}}\right)$$

گزر چکیگا اور اُس وقت اس کی رفتار $۲\sqrt{جہ\,ج}\,جب\,\frac{فہ}{۲}$ ہوگی جہاں جہ زنجیرہ کا مُتبدل ہے، نیز رسّی کا تناؤ فہ کی رقوم میں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ وقت ت پر رسی ن ق افق کے ساتھ زاویہ فہ بناتی ہے جہاں ن ذرّہ ہے اور ق وہ نقطہ ہے جہاں رسّی زنجیرہ سے مس کرتی ہے، نیز اگر ا سب سے نچلا نقطہ ہو تو فرض کرو کہ

$$س = قوس\ اق = خط\ ن ق$$

ن کی رفتار ق ن کی سمت میں = ق کی رفتار مماس کی سمت میں + ن کی رفتار بلحاظ ق کے

= (-سَ) + سَ = ۰ ....(۱)

اسی طرح ن کی رفتار ق ن پر علی القوائم

= س . فرفہ/فرت ....(۲)

ن کا اسراع ق ن کی سمت میں (دفعات ۴ اور ۹۴ کی رُو سے)

= ق کا اسراع مماس ق ن کی سمت میں + ن کا اسراع بلحاظ ق کے

= (- سً) + (سً - س فہَ^۲) = - س فہَ^۲ ....(۳)

ن کا اسراع ق ن پر علی القوائم

= ق کا اسراع اِس سمت میں + ن کا اسراع بلحاظ ق کے

= - سَ^۲/ہر + ۱/س . فر/فرت (س^۲ فہَ) = - سَ فہَ + [س فہً + ۲سَ فہَ]

= س فہً + سَ فہَ ....(۴)

یہ کسی منحنی کے لیے ترکیبی رفتاریں اور اسراع ہیں خواہ منحنی زنجیرہ ہو یا کچھ اَور ۔ زنجیرہ کے لیے توانائی کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

½ م (جہ مس فہ فہَ)^۲ = م ج (جہ - جہ جم فہ) ....(۵)

ن ق کی سمت میں تحلیل کرنے سے

م جہ مس فہ . فہَ^۲ = ت - م ج جب فہ جہاں ت تناؤ ہے ......(۶)

(۵) اور (۶) سے مطلوبہ نتیجے حاصل ہوتے ہیں ۔

۲۶ ـ ایک ذرّہ ایک ہلکی رسّی کے ساتھ بندھا ہے اور رسّی ایک مستدیر حلقہ کے گرد اس طرح لپٹی ہوئی ہے کہ ذرّہ حلقہ کے باہر اس کے نچلے نقطہ پر ساکن ہے۔ جب رسّی کا طول ا طہ کھل جائے تو ثابت کرو کہ تب ذرہ کی رفتار و ہوگی

$$\sqrt{۲ ا ج (طہ\ جب\ طہ + جم\ طہ - ۱)}$$

اور رسّی کا تناؤ ہوگا $\left(۳\ جب\ طہ + \frac{۲\ جم\ طہ}{طہ} - \frac{۲}{طہ}\right)$ × ذرّہ کا وزن۔

۲۷ ـ ایک ذرّہ کو ایک باریک تاگے کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ تاگا ایک دائرہ کے گرد عین ایک دفعہ پورا لپٹا ہوا ہے اور دائرہ کے مرکز سے ایک اندفاعی قوت م مہ (فاصلہ) کے مساوی عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ کھلنے کا وقت $\frac{۲\pi}{\sqrt{مہ}}$ اور تاگے کا تناؤ کسی وقت ت پر ۲م $مہ^{\frac{۳}{۲}}$ ا ت ہے جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۲۸ ـ ایک ذرّہ کو اسطوانہ کے محیط پر کے ایک نقطہ سے ایک ہلکی رسّی کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے اسطوانہ کا نصف قطر ا ہے اور محور اُفقی ہے۔ رسّی اسطوانہ پر مماس وار ہے اور اس کا کھلا ہوا طول ا بہ ہے۔ ذرّہ کو اُفقاً ایک ایسی سطح مستوی میں جو اسطوانہ کے محور پر عمود وار ہے پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کم از کم رفتار $ر_۱$ جس سے رسّی پوری پلٹی جا سکے $\sqrt{۲ ج ا (بہ - جب\ بہ)}$ ہے۔

۲۹ ـ ایک چکنا کھوکھلا اسطوانہ ہے جس کی تراش دو چشمی[ے] $ر^۲ = ا^۲ جم\ ۲\ طہ$ کے نصف حصہ کی شکل کی ہے، جس کا محور انتصابی ہے اور عقدہ نیچے کی طرف ہے اس کے سب سے نچلے نقطہ سے ایک ذرّہ کو رفتار و کے ساتھ تراش کی سطح مستوی میں اندر کی طرف پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ پورا چکر لگائیگا اگر $۳ و^۲ > ۷ ا ج$۔

۳۰ ـ اگر قوتوں کے ایک نظام کے ماتحت ایک ذرّہ آزادانہ ایک مستوی منحنی مرتسم کر سکے اور ایک دوسرے نظام کے زیرِ عمل بھی آزادانہ یہی منحنی مرتسم کر سکے تو یہ دونوں نظاموں کے زیرِ عمل بھی آزادانہ

[ے] lemniscate

یہی منحنی مرتسم کر سکیگا، بشرطیکہ آخری صورت میں ابتدائی توانائی بالحرکت پہلی دو صورتوں میں کی ابتدائی توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہو۔

فرض کرو کہ قوس س کو پھینکنے کے نقطہ سے ناپا گیا ہے نیز فرض کرو کہ پہلی دونوں صورتوں میں پھینکنے کی ابتدائی رفتاریں ع_1 اور ع_2 ہیں۔

نیز فرض کرو کہ پہلی صورت میں مماسی اور عادی قوتیں ت_1 اور ع_1 ہیں جب کہ قوس س_1 مرتسم ہو چکے۔ نیز اسی طرح سے دوسری صورت میں مماسی اور عادی قوتیں ت_2 اور ع_2 ہیں۔ اگر اس وقت رفتاریں و_1 اور و_2 ہوں تو

$$\text{م}\,\text{و}_1\frac{\text{فر}\,\text{و}_1}{\text{فر}\,\text{س}}=\text{ت}_1 \quad \text{اور} \quad \text{م}\frac{\text{و}_1^2}{\text{ر}}=\text{ع}_1$$

$$\text{م}\,\text{و}_2\frac{\text{فر}\,\text{و}_2}{\text{فر}\,\text{س}}=\text{ت}_2 \quad \text{اور} \quad \text{م}\frac{\text{و}_2^2}{\text{ر}}=\text{ع}_2$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{و}_1^2=\int_0^{\text{س}}\text{ت}_1\,\text{فرس}+\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_1^2$$

$$\text{اور} \quad \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{و}_2^2=\int_0^{\text{س}}\text{ت}_2\,\text{فرس}+\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_2^2$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\,\text{م}\left(\text{و}_1^2+\text{و}_2^2\right)=\int_0^{\text{س}}\text{ت}_1\,\text{فرس}+\int_0^{\text{س}}\text{ت}_2\,\text{فرس}+\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_1^2+\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_2^2 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\text{اور} \quad \text{م}\frac{\left(\text{و}_1^2+\text{و}_2^2\right)}{\text{ر}}=\text{ع}_1+\text{ع}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

اگر دو نظاموں کے زیرِ عمل بھی یہی منحنی مرتسم ہو اور قوسی فاصلہ س پر رفتار و ہو اور ابتدائی رفتار ع ہو تو حسب سابق

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{و}^2=\int_0^{\text{س}}\left(\text{ت}_1+\text{ت}_2\right)\text{فرس}+\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}^2 \quad \ldots\ldots(3)$$

اور $م \frac{و^2}{ر} = ع_1 + ع_2$ .... (۴)

اگر $\frac{1}{2} م ع^2 = \frac{1}{2} م ع_1^2 + \frac{1}{2} م ع_2^2$ تو مساواتوں (۱) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$و^2 = و_1^2 + و_2^2$$

اور تب (۴) وہی ہو جاتی ہے جو (۲) ہے۔

پس آخری صورت کے لیے بھی حرکت کی شرطیں پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ اس کے لیے ابتدائی توانائی بالحرکت، پہلی صورت کی ابتدائی توانائی بالحرکت اور دوسری صورت کی ابتدائی توانائی بالحرکت دونوں کے مجموعہ کے مساوی ہو۔

اگر دو سے زیادہ نظام عمل کریں تو بھی یہی ثبوت درست رہتا ہے۔

نتیجہ صریح —— اس مسئلہ کو اس طور پر زیادہ وسیع بنایا جا سکتا ہے۔

اگر کمیتوں $م_1$، $م_2$، $م_3$ ... کے ذرّے قوتوں $ق_1$، $ق_2$، $ق_3$ ... کے ماتحت ایک ہی منحنی مرتسم کریں تب کمیت م کا ایک ذرہ وہی راستہ مرتسم کر سکتا ہے جب کہ سب قوتیں ایک ساتھ عمل کریں بشرطیکہ اس کی توانائی بالحرکت ابتدائیہ ذرّوں $م_1$، $م_2$، $م_3$ کی ابتدائی توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہو۔

۳۱ - ایک ذرہ دو قوتوں $\frac{م}{ر^5}$ اور $\frac{م'}{ر'^5}$ کے زیرِ عمل جو دو مختلف نقطوں کی طرف عمل کرتی ہیں حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرّہ ایک دائرہ مرتسم کر سکتا ہے، اس دائرہ کو معلوم کرو۔

۳۲ - ثابت کرو کہ ایک ذرّہ آزادانہ قطع ناقص مرتسم کریگا جب کہ اس پر عمل کرنے والی قوتیں $لہ ر + \frac{م}{ر^3}$ اور $لہ ر' + \frac{م'}{ر'^3}$ جُداگانہ دو ماسکوں کی طرف عمل کریں۔

۳۳ - ایک ذرّہ ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر ا ہے ایک ایسی قوت کے زیرِ عمل حرکت کر رہا ہے جس کا مرکز دائرہ کے محیط پر ہے اور جس کا قانون $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^5}$ ہے۔ اور قوت اس مرکز کی طرف عمل کرتی ہے۔ اگر علاوہ ازیں اس پر ایک مستقل عمادی اندفاعی قوت $\frac{\text{مہَ}}{\text{ا}^5}$ عمل کرے تو ثابت کرو کہ اس صورت میں بھی دائرہ آزادانہ مرتسم ہوگا اگر ذرّہ سکون سے ایک ایسے نقطہ سے روانہ ہو جس کے لیے

$$\text{ر} = \text{ا}\sqrt[4]{\frac{\text{مہ}}{2\,\text{مہَ}}}$$

۳۴ - دو قوتیں $\frac{\text{مہ ف}^2}{\text{ر}_1^5}$ اور $\frac{\text{مہ فَ}^2}{\text{ر}_2^5}$ قوت کے دو مرکزوں کی طرف عمل کرتی ہیں یہ مرکز ایک دائرہ کے دو مقلوب نقطے ہیں جس کے فاصلے مرکز سے ف اور فَ ہیں، ثابت کرو کہ اِن قوتوں کے زیرِ عمل ایک ذرّہ دائرہ مذکور مرتسم کرسکتا ہے اور کسی نقطہ پر اس کی رفتار

$$\frac{\sqrt{\text{مہ ف}}}{\text{ر}_1^2}\left(\text{یا } \frac{\sqrt{\text{مہ فَ}}}{\text{ر}_2^2}\right) \text{ ہوگی۔}$$

۳۵ - کمیّت م کے ایک ذرّے کو ایک مستدیر تار میں پرویا گیا ہے، تار کی کمیّت ھ اور نصف قطر ا ہے۔ اگر نظام ایک چکنے میز پر ساکن ہو اور ذرّہ تار کے مماس کی سمت میں رفتار و کے ساتھ چلایا جائے تو ثابت کرو کہ تار کا تعامل ہمیشہ $\frac{\text{ھ م}}{\text{ھ} + \text{م}}\,\frac{\text{و}^2}{\text{ا}}$ ہوگا۔

۳۶ - ایک چکنے میز پر تین ہم خط نقطے ج، ا اور ب ایسے ہیں کہ ج ا = ا اور ا ب = ب، ایک رسّی ا ب پر رکھی گئی ہے اور ب کے ساتھ ایک ذرّہ باندھا گیا ہے۔ اگر سرا ا یکساں رفتار و سے ایک دائرہ مرتسم کرے

جس کا مرکز ج ہو تو ثابت کرو کہ بلحاظ گھومنے والے نصف قطر ج ا کے رسّی کی حرکت وہی ہوگی جو طول $\frac{ج ا ب}{۲ا}$ والے ایک رقاص کی ہوگی اور رسّی تنی ہوئی نہیں رہیگی تاوقتیکہ ا بڑا نہ ہو ۴ ب سے۔

۳۷ - ایک ذرّہ ایسے کھردرے تدویر پر جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل پھسلتا ہے جس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف۔ حرکت قرن سے سکون کی حالت سے شروع ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ ذرّہ سب سے نچلے نقطہ پر پہنچنے سے پہلے ساکن ہوجائیگا بشرطیکہ مہ و مہ$^{\frac{\pi}{2}}$ > ا جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے۔

ثابت کرو کہ اگر مہ = ½ تو یہ لامساوی پوری ہوتی ہے۔

۳۸ - ایک چکنی مکافی نلی کو انتصابی سطحِ مستوی میں اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ ایک ذرّہ وترِ خاص کے ایک سرے سے نیچے پھسلنا شروع کرتا ہے۔ محدود تکملی کی شکل میں وہ مدت محسوب کرو جو ذرّہ کو سب سے نچلے نقطہ تک پہنچنے کے لیے درکار ہے۔ نیز بتاؤ کہ اگر نصف وترِ خاص ۴ ا ہو تو یہ مدت تقریباً

۲٫۷ × $\sqrt{\frac{ا}{ج}}$ سکنڈ ہوگی۔

ساتواں باب

مزاحم واسطہ میں حرکت متغیر کمیت کے ذرّہ کی حرکت

۱۰۴۔ جب کوئی شئے ہوا میں یا کسی اور واسطہ میں حرکت کرے تو اس کی حرکت میں ایک قسم کی مزاحمت محسوس ہوتی ہے اور اگر رفتار بڑھتی جائے تو اس مزاحمت میں بھی اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ پس ہم مزاحمت کو رفتار کا کوئی تفاعل فرض کر سکتے ہیں مثلاً ک×ث×ف (و) جہاں ث واسطہ کی کثافت ہے اور ک کوئی مستقل ہے جو جسم کی شکل پر منحصر ہوتا ہے۔

مزاحمت کا کلّیہ معلوم کرنے کے لیے بہت سی کوششیں عمل میں لائی گئی ہیں مگر کوئی نمایاں کامیابی حاصل نہیں ہوئی۔ تاہم یہ کہنا اصلیت سے زیادہ بعید نہیں ہے کہ تقریباً ۸۰۰ فٹ فی سکنڈ سے کم رفتاروں کے لیے مزاحمت تقریباً رفتار کے مربع کے متناسب بدلتی ہے اور اگر رفتار تقریباً ۸۰۰ فٹ فی سکنڈ سے ۱۳۵۰ فٹ فی سکنڈ کے اندر ہو تو کہا جاسکتا ہے کہ مزاحمت رفتار کے مکعب یا اس سے بھی بڑی قوت کے متناسب بدلتی ہے۔

اس سے بھی بڑی رفتاروں کے لیے مزاحمت پھر مربع کے کلیہ کے تحت بدلتی معلوم ہوتی ہے۔

دیگر حرکتوں کے لیے دیکھا گیا ہے کہ مزاحمت کے اَور کلیے زیادہ صحیح ہیں۔ مثلاً رقاص کی حرکت کے لیے مزاحمت کو رفتار کے تناسب فرض کرنا بہترین تقرب ہوتا ہے۔

کم وبیش ہرصورت میں مفروضہ کلیہ علی الحساب فرض کرلیا جاتا ہے اور اس کی صداقت کی جانچ کا بہترین معیار اس کے سوا اَور کچھ نہیں کہ مشہودہ محصلہ نتائج ایک خاص مفروضہ کی بنا پر محسوب کردہ نتائج سے کس قدر مطابقت رکھتے ہیں۔

خواہ مزاحمت کا کلیہ کچھ ہی ہو قوتیں ہمیشہ غیر تحفظی ہونگی اور توانائی کے تحفظ کے اصول کا اطلاق نہیں ہوسکتا۔

۱۰۵۔ جب کوئی ذرّہ جاذبۂ ارض کے زیرِعمل مزاحم واسطہ میں نیچے گرے تو رفتار ایک خاص محدود مقدار سے کبھی متجاوز نہیں ہوسکتی۔

فرض کرو کہ مزاحمت کا قانون ک $و^{ن}$.م ہے، تب نیچے کی طرف اسراع ہے ج ـ ک $و^{ن}$ اور یہ معدوم ہوجاتا ہے جب کہ ک $و^{ن}$ = ج یعنی $و = \left(\frac{ج}{ک}\right)^{\frac{1}{ن}}$، پس یہ رفتار بڑی سے بڑی ہوگی جو ذرّہ حاصل کرسکتا ہے۔ اس رفتار کو انتہائی رفتار سے موسوم کرتے ہیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں یہ معلوم ہوجائے کہ بارش کی بوندوں کی رفتار زمین پر پہنچنے کے وقت کیا ہے تو ہم اس سے یہ نہیں بتاسکتے کہ بوندیں کس بلندی سے گررہی ہیں کیونکہ روانگی کے تھوڑے ہی عرصہ کے بعد وہ تقریباً اپنی انتہائی رفتار حاصل کرلیتی ہیں اور بعدازاں ایسی رفتار سے حرکت کرتی رہتی ہیں جو تقریباً مستقل رہتی ہے اور انتہائی رفتار کے تقریباً مساوی ہوتی ہے۔

اسی طرح جب ایک دخانی جہاز جارہا ہو تو بھی اس کی رفتار ایک خاص حد سے زیادہ نہیں ہوسکتی۔ یہ انتہائی رفتار جہاز کی جسامت اور وضع پر اور اس کے انجنوں کی طاقت پر منحصر ہوتی ہے۔ لیکن انجنوں کی طاقت

خواہ کچھ ہی ہو اس کے جواب میں کوئی نہ کوئی رفتار ایسی ہوگی جس پر وہ کام جو پانی کی مزاحمت پر (جو رفتار کا تفاعل ہوتی ہے) غالب آنے میں کرنا پڑتا ہے وہ اُس کام کی زیادہ سے زیادہ مقدار کے مساوی ہوجاتا ہے جو کہ جہاز کے انجن وغیرہ انجام دے سکتے ہیں۔ اس منزل پر مزید رفتار کا اضافہ ناممکن ہوجاتا ہے۔

۱۰۶۔ ایک ذرّہ جاذبۂ ارض کے زیرِ اثر نیچے گرتا ہے۔ اگر جاذبۂ ارض کو مستقل فرض کیا جائے اور واسطہ کی مزاحمت ایسے بدلے جیسے رفتار کا مربع تو حرکت معلوم کرو جب کہ ذرّہ سکون سے روانہ ہو۔

فرض کرو کہ سکون کے بعد وقت ت پر جب ذرّہ فاصلہ لا میں سے نیچے گرتا ہے تو اِس کی رفتار و ہے، حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ج} - \text{مہ}\,\text{و}^2$$

فرض کرو کہ $\text{مہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ک}^2}$ پس $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ج}\left(1 - \frac{\text{و}^2}{\text{ک}^2}\right)$ ...... (۱)

(۱) سے ظاہر ہے کہ اگر و = ک تو اسراع صفر ہو جائیگا۔ بعدازیں حرکت میں مزاحمت واقع نہ ہوگی اور ذرّہ کی رفتار ک رہیگی۔ اس وجہ سے ک کو "انتہائی رفتار" کہتے ہیں۔

(۱) سے $\text{و}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{ج}\left(1 - \frac{\text{و}^2}{\text{ک}^2}\right)$

جس سے $\frac{2\text{ج}}{\text{ک}^2}\,\text{لا} = \int \frac{2\,\text{و}\,\text{فرو}}{\text{ک}^2 - \text{و}^2} = -\text{لوک}\left(\text{ک}^2 - \text{و}^2\right) + \text{ا}$

چونکہ د اور لا دونوں ابتداءً صفر ہیں ∴ $\text{ا} = \text{لوک ک}^{2}$

$$\therefore \text{ک}^{2} - \text{د}^{2} = \text{ک}^{2}\,\text{و}^{-\frac{2\,\text{ج لا}}{\text{ک}^{2}}}$$

$$\therefore \text{د}^{2} = \text{ک}^{2}\left[1 - \text{و}^{-\frac{2\,\text{ج لا}}{\text{ک}^{2}}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اس سے ظاہر ہے کہ لا = ∞ جب کہ د = ک، پس ذرّہ فی الواقع انتہائی رفتار کو حاصل نہیں کریگا تاوقتیکہ یہ لا انتہا فاصلہ سے نہ گرے۔

نیز (۱) کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فر د}}{\text{فر ت}} = \text{ج}\left(1 - \frac{\text{د}^{2}}{\text{ک}^{2}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ج ت}}{\text{ک}^{2}} = \int \frac{\text{فر د}}{\text{ک}^{2} - \text{د}^{2}} = \frac{1}{2\,\text{ک}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ک} + \text{د}}{\text{ک} - \text{د}} + \text{ب}$$

چونکہ د اور ت دونوں ابتداءً صفر ہیں ∴ ب = ۰

اس لیے $\frac{\text{ک} + \text{د}}{\text{ک} - \text{د}} = \text{و}^{\frac{2\,\text{ج ت}}{\text{ک}}}$

$$\therefore \text{د} = \text{ک}\,\frac{\text{و}^{\frac{2\,\text{ج ت}}{\text{ک}}} - 1}{\text{و}^{\frac{2\,\text{ج ت}}{\text{ک}}} + 1} = \text{ک مسز}\left(\frac{\text{ج ت}}{\text{ک}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(۲) اور (۳) سے

$$\text{و}^{-\frac{2\,\text{ج لا}}{\text{ک}^{2}}} = 1 - \frac{\text{د}^{2}}{\text{ک}^{2}} = 1 - \text{مسز}^{2}\frac{\text{ج ت}}{\text{ک}} = \frac{1}{\text{جمز}^{2}\frac{\text{ج ت}}{\text{ک}}}$$

اس لیے $\frac{\text{ج لا}}{\text{و ک}^2} = \text{جمز} \frac{\text{ج ت}}{\text{ک}}$ اور $\text{لا} = \frac{\text{ک}^2}{\text{ج}} \text{ لوک جمز} \frac{\text{ج ت}}{\text{ک}}$ .... (۴)

۱۰۷۔ اگر ذرّہ کو نیچے کی طرف پھینکنے کی بجائے اوپر کی طرف پھینکا جائے تو حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ پھینکنے کی رفتار و ہے

اب حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ج} - \text{مہ و}^2 = -\text{ج}\left(1 + \frac{\text{و}^2}{\text{ک}^2}\right) \quad \text{............ (۵)}$$

جہاں لا کو اوپر کی طرف ناپا گیا ہے۔

اس لیے $\quad \text{و} \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = -\text{ج}\left(1 + \frac{\text{و}^2}{\text{ک}^2}\right)$

$$\therefore \frac{2\text{ج}}{\text{ک}^2}\text{لا} = -\int \frac{2\text{و فرو}}{\text{و}^2 + \text{ک}^2} = -\text{لوک}\left(\text{و}^2 + \text{ک}^2\right) + \text{ا}$$

جہاں $\quad 0 = -\text{لوک}\left(\text{و}^2 + \text{ک}^2\right) + \text{ا}$

$$\therefore \frac{2\text{ج لا}}{\text{ک}^2} = \text{لوک} \frac{\text{و}^2 + \text{ک}^2}{\text{و}^2 + \text{ک}^2} \quad \text{............ (۶)}$$

نیز (۵) سے ہمیں ملتا ہے:

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = -\text{ج}\left(1 + \frac{\text{و}^2}{\text{ک}^2}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\text{ج}\,\text{ت}}{\text{ک}^{2}} = \int \frac{\text{فرو}}{\text{ک}^{2}+\text{و}^{2}} = \frac{1}{\text{ک}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ک}} + \text{ب}$$

جہاں

$$0 = \frac{1}{\text{ک}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{و}_{\circ}}{\text{ک}} + \text{ب}$$

$$\therefore\ \frac{\text{ج}\,\text{ت}}{\text{ک}} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{و}_{\circ}}{\text{ک}} - \text{مس}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ک}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

مساوات (۶) سے ایک خاص فاصلہ طے کرنے کے بعد رفتار معلوم ہوتی ہے اور مساوات (۷) سے کسی خاص وقت کے بعد رفتار معلوم ہوتی ہے۔

۱۰۸ - ایک شخص روک چھتری کی مدد سے ۸۰۰ گز کی بلندی سے ۲½ منٹ میں گرتا ہے - اگر مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہے تو ثابت کرو کہ ۱۰½ سکنڈ کے بعد محصلہ رفتار زمین پر پہنچنے کی رفتار سے مؤخر الذکر کے ایک فی صدی سے بھی کم تفاوت رکھتی ہے - نیز انتہائی رفتار کی تقریبی قیمت معلوم کرو -

جب روک چھتری ت وقت میں فاصلہ لا گرتی ہے تو دفعہ ۱۰۶ کی رُو سے

اگر

$$\text{م} = \frac{\text{ج}}{\text{ک}^{2}}$$

تو

$$\text{و}^{2} = \text{ک}^{2}\left[1 - \text{و}^{-\frac{2\,\text{ج}\,\text{لا}}{\text{ک}^{2}}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{و} = \text{ک}\ \text{مسز}\left(\frac{\text{ج}\,\text{ت}}{\text{ک}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اور

$$\text{لا} = \frac{\text{ک}^{2}}{\text{ج}}\ \text{لوک جمنز}\left(\frac{\text{ج}\,\text{ت}}{\text{ک}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

یہاں

$$۲۴۰۰ = \frac{\text{ک}^{2}}{\text{ج}}\ \text{لوک جمنز}\left(\frac{۱۵۰\,\text{ج}}{\text{ک}}\right)$$

$$\therefore\ و^{-2400\frac{ج}{ک^2}} = \frac{و^{\frac{150ج}{ک}} + و^{-150\frac{ج}{ک}}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

بائیں طرف کی دوسری رقم بہت چھوٹی ہے کیونکہ ک مثبت ہے۔

$\therefore$ (4) تقریباً معادل ہے اس کے: $و^{-2400\frac{ج}{ک^2}} = \frac{1}{2} و^{150\frac{ج}{ک}}$

$$\therefore\ 2400\frac{ج}{ک^2} = \frac{150ج}{ک} - لوک\,2 = \frac{150ج}{ک}\ تقریباً$$

$\therefore$ ک = 16 پہلا تقریب ہے۔

ک = 16 (1 + ما) رکھنے سے (4) سے دوسرا تقریب ملتا ہے

$$و^{300(1-2ما)} = \frac{و^{300(1-ما)} + و^{-300(1-ما)}}{2} = \frac{و^{300(1-ما)}}{2}\ تقریباً$$

$$\therefore\ و^{-300ما} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ ما = \frac{1}{300} لوک_و\,2 = \frac{.693}{300} = .0023$$

اس لیے دوسرا تقریب ہے ک = 16 (1 + .0023) جس سے انتہائی رفتار ملتی ہے۔

نیز رفتار $و_1$ یعنی زمین پر پہنچنے کی رفتار (1) کی رو سے مساوات ذیل سے معلوم ہوتی ہے

$$و_1^2 = ک^2\left[1 - و^{-\frac{2400\times32\times2}{16^2}}\right] = ک^2\left[1 - و^{-600}\right]$$
$$= ک^2\ تقریباً$$

جب، و انتہائی رفتار کا ۹۹ فی صد ہو تو (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس ز}\,\frac{ج ت}{ک} = \frac{۹۹}{۱۰۰} = ۰٫۹۹$$

$$\therefore\ و^{\frac{۲ ج ت}{ک}} = ۱۹۹ = و^{۵٫۳}\quad \text{جدولوں سے}$$

$$\therefore\ ت = \frac{ک}{۲ ج} \times ۵٫۳ = \frac{۱۶}{۶۴} \times ۵٫۳ = ۱٫۳۲۵\ \text{تقریباً}$$

یعنی ت کم ہے $۱\frac{۱}{۲}$ اسکنڈ سے ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک ذرّہ جس کی کمیت م ہے جاذبہ ارض کے زیر عمل ایک ایسے واسطہ میں گر رہا ہے جس کی مزاحمت رفتار کی مہ گنی ہے ۔
اگر ذرّہ سکون سے روانہ ہو تو ثابت کرو کہ وقت ت میں فاصلہ

$$ج\,\frac{م^۲}{مہ^۲}\left\{ و^{-\frac{مہ ت}{م}} - ۱ + \frac{مہ ت}{م} \right\}\ \text{طے کریگا۔}$$

۲ ۔ ایک ذرہ کو جس کی کمیّت م ہے جاذبہ ارض کے زیر عمل انتصاباً اُوپر کی طرف پھینکا گیا ہے ۔ ہوا کی مزاحمت رفتار کی م ک گنی ہے ۔ ثابت کرو کہ ذرّہ زیادہ سے زیادہ بلندی $\frac{و^۲}{ج}\left[ل - لوک\,(۱ + ل) \right]$ تک پہنچ سکتا ہے جہاں و انتہائی رفتار ہے اور ل و ابتدائی انتصابی رفتار ہے ۔

۳ ۔ ایک وزنی ذرّہ کو انتصاباً اوپر کی طرف رفتار د کے ساتھ ایک ایسے واسطہ کے اندر پھینکا گیا ہے جس کی مزاحمت رفتار کے مربع کی $ج\,ی^{-۲}$ مس^{۲} ع گنی

ہوتی ہے جہاں ع کوئی مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ذرّہ نقطۂ رمی پر رفتار ء جم ع کے ساتھ وقت

$$\text{ء}\,\text{ج}^{-1}\,\text{م ع}\left(\text{ع} + \text{لوک}\,\frac{\text{جم ع}}{1 - \text{جب ع}}\right)$$

کے بعد پہنچیگا۔

۴ - ایک ذرّہ سکون سے جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل فاصلہ لا ایک ایسے واسطہ میں گرتا ہے جس کی مزاحمت کا قانون رفتار کا مربع ہے۔ اگر و رفتار ہو جو یہ فی الواقع اختیار کرے اور $\underset{.}{\text{و}}$ وہ رفتار ہو جو یہ غیر مزاحم واسطہ میں حاصل کرتا اور و انتہائی رفتار ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{و}^2}{\underset{.}{\text{و}}^2} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\underset{.}{\text{و}}^2}{\text{و}^2} + \frac{1}{2\times 3}\,\frac{\underset{.}{\text{و}}^4}{\text{و}^4} - \frac{1}{2\times 3\times 4}\,\frac{\underset{.}{\text{و}}^6}{\text{و}^6} + \dots$$

۵ - ایک ذرّہ کو ایک چکنی افقی سطح مستوی پر رفتار و سے ایسے واسطہ میں پھینکا گیا ہے جس کی مزاحمت فی اکائی کمیت رفتار کے مکعب کا مہ گنا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ وقت ت میں فاصلہ

$$\frac{1}{\text{مہ و}}\left[\sqrt{1 + 2\,\text{مہ}\,\text{و}^2\,\text{ت}} - 1\right]$$

طے کریگا اور اُس وقت اِس کی رفتار $\dfrac{\text{و}}{\sqrt{1 + 2\,\text{مہ}\,\text{و}^2\,\text{ت}}}$ ہوگی۔

۶ - ایک وزنی ذرّہ کو رفتار ء کے ساتھ انتصاباً اوپر پھینکا گیا ہے۔ واسطہ کی مزاحمت ایسے بدلتی ہے جیسے ذرہ کی رفتار کا مکعب۔ بتاؤ کہ ذرّہ کس بلندی تک صعود کریگا۔

۷ - اگر مزاحمت ایسے بدلے جیسے رفتار کی چوتھی قوت تو م پونڈ کمیت کے ایک ذرّہ کی توانائی جو بالاترین نقطہ سے گہرائی لا پر جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل انتصابی خط پر حرکت کر رہا ہو ت مسز $\dfrac{\text{م ج لا}}{\text{ت}}$ ہوگی جب کہ ذرّہ اوپر جا رہا ہو اور ت مسز $\dfrac{\text{م ج لا}}{\text{ت}}$ ہوگی

جب کہ گر رہا ہو جہاں ت انتہائی توانائی ہے واسطہ مذکور میں۔

۸۔ ایک ذرہ ایک مزاحم واسطہ میں پھینکا گیا ہے جس کی مزاحمت کا کلیّہ (رفتار)^ن ہے، اور وقت ت میں فاصلہ س طے کرنے کے بعد یہ ساکن ہوجاتا ہے۔ س اور ت کی قیمتیں معلوم کرو اور دکھاؤ کہ س محدود ہوگا اگر ن < ۲، لیکن لامتناہی ہوگا اگر ن = یا > ۲، نیز ت محدود ہوگا اگر ن < ۱ اور لامتناہی ہوگا اگر ن = یا > ۱

۹۔ سوال ماقبل میں اگر مزاحمت = ک (رفتار) اور ابتدائی رفتار و ہو تو ثابت کرو کہ و = و و^{-ک ت} اور س = (و/ک) (۱ - و^{-ک ت})

۱۰۔ ایک وزنی ذرّہ کو مزاحم واسطہ میں جس کی مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہے انتصاباً اوپر پھینکا گیا ہے۔ ایک معلومہ نقطہ پر اوپر وار حرکت کے اثنا میں اسکی توانائی بالحرکت ت ہے، جب یہ نیچے اُترتے ہوئے اُسی نقطہ میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ توانائی ضائع شدہ ت^۲/(ت + تَ) ہے جہاں تَ وہ انتہائی توانائی ہے جو ذرّہ نیچے اُترنے کے دوران میں اختیار کرتا ہے۔

۱۱۔ اگر ایک ریل گاڑی کی حرکت میں مزاحمت ایسے بدلے جیسے اس کی کمیت اور اِس کی رفتار کا مربع، اور انجن مستقل ایسی طاقت پر کام کرتا رہے تو ثابت کرو کہ پوری رفتار کبھی حاصل نہ ہوگی اور سکون سے روانہ ہوکر نصف رفتار کے حصول تک فاصلہ (۱/۳م) لوک (۸/۷) طے ہوگا جہاں م مزاحمت ہے فی اکائی کمیت فی اکائی رفتار۔
اس فاصلہ کو طے کرنے کا وقت بھی دریافت کرو۔

۱۲۔ ایک جہاز کے انجنوں کو بند کردیا گیا ہے اور جہاز کو صرف پانی کی مزاحمت کے ذریعے حالتِ سکون میں لایا گیا ہے۔ کسی ایک آن میں رفتار ۱۰ فٹ فی سکنڈ ہے اور ایک منٹ کے بعد ۲ فٹ فی سکنڈ ہے، ۲ فٹ فی سکنڈ سے کم رفتاروں کے لیے مزاحمت کو رفتار کے متناسب اور اس سے بڑی رفتاروں کے لیے

مزاحمت کو رفتار کے مربع کے متناسب خیال کیا جا سکتا ہے ۔ ثابت کرو کہ سکون سے قبل جہاز پہلی رفتار کے مشاہدہ کے نقطہ سے لے کر فاصلہ $۹۰۰\,[۱ + لوک_و ۵]$ طے کرے گا ۔

۱۳ ۔ ایک ذرّہ ایک ثابت نقطہ و سے فاصلہ ا پر کے نقطہ سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے قوت متحرکہ و کی طرف عمل کرتی ہے اور فی اکائی کمیت فاصلہ کے مہ گُنا کے مساوی ہے ۔ اگر واسطہ کی مزاحمت فی اکائی کمیت رفتار کے مربع کا ک گُنا ہو تو ثابت کرو کہ جب ذرّہ و سے فاصلہ لا پر ہو تو رفتار کا مربع $\frac{\text{مہ لا}}{\text{ک}} - \frac{\text{مہ ا}}{\text{ک}}\, و^{۲ک\,(لا - ا)}$

$$+ \frac{\text{مہ}}{۲\text{ک}^۲}\left[۱ - و^{۲ک\,(لا - ا)}\right]$$ ہوگا ۔

نیز ثابت کرو کہ جب یہ اول مرتبہ سکون میں آئیگا تو اسے اس کا فاصلہ ب مساوات $(۱ - ۲\text{ک}\,ب)\, و^{۲ک\,ب} = (۱ + ۲\text{ک}\,ا)\, و^{-۲ک\,ا}$ سے حاصل ہوگا ۔

۱۴ ۔ ایک ذرہ مرکزِ زمین سے فاصلہ ا سے زمین کی طرف گرنا شروع کرتا ہے حرکت میں خفیف مزاحمت جو رفتار و کے مربع کے متناسب ہے اور ابتدا فی اکائی رفتار مہ ہے واقع ہوتی ہے ۔ ثابت کرو کہ مرکز سے فاصلہ لا پر توانائی بالحرکت

$$\text{م ج ر}^۲ \left\{ \frac{۱}{لا} - \frac{۱}{ا} + ۲\,\text{مہ}\left(۱ - \frac{لا}{ا}\right) - ۲\,\text{مہ}\, لوک_و \frac{ا}{لا} \right\}$$ ہوگی جہاں مہ کے مربع کو نظر انداز کر دیا گیا ہے اور ر زمین کا نصف قطر ہے ۔

۱۵ ۔ ایک ذرّہ ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ ا پر ساکن ہے اور اس پر قوتِ جاذبہ جو فاصلہ کے متناسب بدلتی ہے عمل کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر اس وقت جب کہ ذرّہ فاصلہ لا پر ہو رفتار و ہو اور وَ رفتار ہو جب کہ ہوا کی مزاحمت کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو ثابت کرو کہ

$$وَ = و\left[۱ - \frac{۱}{۳}\text{ک}\,\frac{(۲ا + لا)(ا - لا)}{ا + لا}\right]$$

جہاں ہوا کی مزاحمت فی اکائی کمیت رفتار کے مربع کا ک گنا ہے اور ک بہت چھوٹا ہے۔

۱۰۹ - ایک ذرہ کو ابتداءً افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہوئی سمت میں رفتار ع کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ ذرہ جاذبہ ارض کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے اور ہوا کی مزاحمت رفتار کی م ک گنی ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

لا کے محور کو متوازی الافق اور ما کے محور کو انتصابی لو اور مبداء کو نقطۂ رمی پر لو۔ تب حرکت کی مساواتیں ہونگی

$$\ddot{\text{لا}} = -\text{ک}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = -\text{ک}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$$

اور

$$\ddot{\text{ما}} = -\text{ک}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} - \text{ج} = -\text{ک}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - \text{ج}$$

تکمل کرنے سے

$$\text{لو}\,\dot{\text{لا}} = -\text{ک ت} + \text{مستقل} = -\text{ک ت} + \text{لو}(\text{ع جم عہ})$$

اور

$$\text{لو}(\text{ک}\,\dot{\text{ما}} + \text{ج}) = -\text{ک ت} + \text{مستقل} = -\text{ک ت} + \text{لو}(\text{ک ع جب عہ} + \text{ج})$$

$$\therefore\ \dot{\text{لا}} = \text{ع جم عہ و}^{-\text{ک ت}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\text{ک}\,\dot{\text{ما}} + \text{ج} = (\text{ک ع جب عہ} + \text{ج})\,\text{و}^{-\text{ک ت}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\therefore\ \text{لا} = -\frac{\text{ع جم عہ}}{\text{ک}}\,\text{و}^{-\text{ک ت}} + \text{مستقل} = \frac{\text{ع جم عہ}}{\text{ک}}\left(۱ - \text{و}^{-\text{ک ت}}\right) \ldots\ldots (۳)$$

اور
$$\text{ک ما} + \text{ج ت} = -\frac{\text{ک ء جب عہ} + \text{ج}}{\text{ک}}\,\text{و}^{-\text{ک ت}} + \text{مستقل}$$

$$= \frac{\text{ک ء جب عہ} + \text{ج}}{\text{ک}}\left(1 - \text{و}^{-\text{ک ت}}\right) \cdots\cdots\cdots (4)$$

ت کو ساقط کرنے سے

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}}{\text{ک}^2}\,\text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ک لا}}{\text{ء جم عہ}}\right) + \frac{\text{لا}}{\text{ء جم عہ}}\left(\text{ء جب عہ} + \frac{\text{ج}}{\text{ک}}\right) \cdots\cdots (5)$$

جو راستہ کی مساوات ہے۔

بڑی سے بڑی بلندی حاصل ہوتی ہے جب کہ مَا = ۰ یعنی جب کہ
$\text{و}^{-\text{ک ت}} = \frac{\text{ج}}{\text{ک ء جب عہ} + \text{ج}}$ یعنی وقت $\frac{1}{\text{ک}}\,\text{لوک}\left(1 + \frac{\text{ک ء جب عہ}}{\text{ج}}\right)$ گزرنے پر۔

اور اس وقت $\text{ما} = \frac{\text{ء جب عہ}}{\text{ک}} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}^2}\,\text{لوک}\left(1 + \frac{\text{ک ء جب عہ}}{\text{ج}}\right)$

مساواتوں (۳) اور (۴) سے ظاہر ہے کہ جب ت = ∞ تو
$\text{لا} = \frac{\text{ء جم عہ}}{\text{ک}}$ اور ما = -∞ پس راستہ کا ایک انتصابی متقارب نقطۂ رمی سے افقی فاصلہ $\frac{\text{ء جم عہ}}{\text{ک}}$ پر واقع ہے، نیز اُس وقت لَا = ۰ اور مَا = $-\frac{\text{ج}}{\text{ک}}$ یعنی ذرہ عین انتہائی رفتار اختیار کر چکیگا۔

نتیجہ صریح ۔ اگر (۵) کے بائیں جانب کے رکن کو ک کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو یہ ہو جاتا ہے:

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}}{\text{ک}^2}\left[-\frac{\text{ک لا}}{\text{ء جم عہ}} - \frac{1}{2}\,\frac{\text{ک}^2\,\text{لا}^2}{\text{ء}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}} - \frac{1}{3}\,\frac{\text{ک}^3\,\text{لا}^3}{\text{ء}^3\,\text{جم}^3\,\text{عہ}} - \cdots\right]$$

$$+\frac{\text{لا}}{\text{د جم عہ}}\left(\text{د جب عہ} + \frac{\text{ج}}{\text{ک}}\right)$$

یعنی $\text{ما} = \text{لا مس عہ} - \frac{\text{ج لا}^{2}}{\text{۲ د}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}} - \frac{1}{3}\,\frac{\text{ج ک لا}^{3}}{\text{د}^{3}\,\text{جم}^{3}\,\text{عہ}} - \frac{1}{4}\,\frac{\text{ج ک}^{2}\,\text{لا}^{4}}{\text{د}^{4}\,\text{جم}^{4}\,\text{عہ}} - \ldots$

ک = ۰ رکھنے سے ہمیں غیر مزاحم واسطہ میں معمولی حرکت کی مساوات حاصل ہوتی ہے -

۱۱۰ - ایک ذرّہ جاذبہ ارض کے زیرِ عمل ایک ایسے واسطہ میں حرکت کر رہا ہے جس کی مزاحمت = م مہ (رفتار)^{2} - حرکت معلوم کرو -

جب ذرّہ فاصلہ س طے کر چکے تو فرض کرو کہ اس کا مماس اوپر کی طرف کھینچے ہوئے انتصابی خط کے ساتھ زاویہ فہ بناتا ہے اور و اس کی رفتار ہے -

تب حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\text{و}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر س}} = -\,\text{ج جم فہ} - \text{مہ و}^{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور
$$\frac{\text{و}^{2}}{\text{ر}} = \text{ج جب فہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\frac{\text{فر}(\text{و}^{2})}{\text{فر فہ}}\;\frac{\text{فر فہ}}{\text{فر س}} = -\,\text{۲ ج جم فہ} - \text{۲ مہ و}^{2}$$

یعنی (۲) کی مدد سے $\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر فہ}}\left(\text{ر جب فہ}\right) = -\,\text{۲ جم فہ} - \text{۲ مہ ر جب فہ}$

$$\therefore \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}\,\text{ر}}{\text{فر فہ}}\ \text{جب فہ} + ۳\,\text{جم فہ} = -۲\,\text{مہ ر جب فہ}$$

$$\therefore \frac{\text{فر}}{\text{فر فہ}}\left(\frac{1}{\text{ر}}\right)\cdot\frac{1}{\text{جب}^{۳}\,\text{فہ}} - \frac{۳\,\text{جم فہ}}{\text{جب}^{۴}\,\text{فہ}}\times\frac{1}{\text{ر}} = \frac{۲\,\text{مہ}}{\text{جب}^{۳}\,\text{فہ}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ر}\,\text{جب}^{۳}\,\text{فہ}} = ۲\,\text{مہ}\int\frac{1}{\text{جب}^{۳}\,\text{فہ}}\,\text{فر فہ}$$

$$= -\text{مہ}\,\frac{\text{جم فہ}}{\text{جب}^{۲}\,\text{فہ}} - \text{مہ لوک}\,\frac{۱+\text{جم فہ}}{\text{جب فہ}} + \text{ا} \quad\ldots\ldots(۳)$$

تب (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{۲}\left[\text{ا} - \text{مہ}\,\frac{\text{جم فہ}}{\text{جب}^{۲}\,\text{فہ}} - \text{مہ لوک}\,\frac{۱+\text{جم فہ}}{\text{جب فہ}}\right] = \frac{\text{ج}}{\text{جب}^{۲}\,\text{فہ}}$$

مساوات (۳) راست کی ذاتی مساوات ہے لیکن آگے متکمل نہیں ہوسکتی۔

۱۱۱ - ایک منکا ایک چکنے تار پر انتصابی سطح مستوی میں حرکت کرتا ہے واسطہ کی مزاحمت {= ک (رفتار)²} حرکت معلوم کرو۔

جب منکا کوئی قوسی فاصلہ س طے کر چکے تو فرض کرو کہ رفتار و ہے اور حرکت کی سمت افق کے ساتھ زاویہ فہ بناتی ہے (دیکھو شکل دفعہ ۱۰۲) نیز فرض کرو کہ رفتار کا تعامل ع ہے

حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{و فر و}}{\text{فر س}} = \text{ج جب فہ} - \text{ک و}^{۲} \quad\ldots\ldots(۱)$$

اور   و^۲ / س = ج جم فہ ۔ ع .... (۲)

فرض کرو کہ منحنی ہے س = ف (فہ)

تب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

فر / فرفہ (و^۲ / ۲) = فَ (فہ) [ج جب فہ ۔ ک و^۲]

یعنی   فر / فرفہ (و^۲) + ۲ک فَ (فہ) × و^۲ = ۲ ج جب فہ فَ (فہ)

جو خطی تفرقی مساوات ہے و^۲ کے حاصل کرنے کے لیے ۔

خاص صورت ۔ فرض کرو کہ منحنی دائرہ ہے یعنی س = ا فہ اگر س اور فہ دونوں بالاترین نقطہ سے ناپے جائیں ۔

تب (۱) سے ملتا ہے   فر / فرفہ (و^۲) + ۲ اک و^۲ = ۲ ا ج جب فہ

∴ و^۲ و^{۲اک فہ} = ۲ ا ج ∫ جب فہ . و^{۲اک فہ}

= ۲ ا ج / (۱ + ۴ ا^۲ک^۲) و^{۲اک فہ} (۲ اک جب فہ ۔ جم فہ) + ج

∴ و^۲ = ۲ ا ج / (۱ + ۴ ا^۲ک^۲) (۲ اک جب فہ ۔ جم فہ) + ج و^{-۲اک فہ}

مثالیں

۱ ۔ اکائی کمیّت کے ایک ذرّہ کو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہوئی سمت میں رفتار ع کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ واسطہ کی مزاحمت رفتار کی ک گنی ہے ۔ ثابت کرو کہ ذرّہ کی حرکت کی سمت

پھر افق کے ساتھ زاویہ عہ وقت $\frac{\text{۱}}{\text{ی}}$ لوک $\left\{ \text{۱} + \frac{\text{۲ک}^{\text{۲}}}{\text{ج}} \text{ جیا عہ} \right\}$ کے بعد بنائیگی ۔

۲ ۔ اگر مزاحمت رفتار کے متناسب ہو اور افقی سطح مستوی پر ٹپہ بڑے سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ زاویہ رمیٰ عہ مساوات $\frac{\text{لہ (۱ + لہ جم عہ)}}{\text{جم عہ + لہ}}$ = لوک [۱ + لہ قطع عہ] سے حاصل ہوگا جہاں لہ نسبت ہے رفتار رمیٰ کی انتہائی رفتار کے ساتھ ۔

۳ ۔ ایک ذرّہ جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل ایسے واسطہ میں پھینکا گیا ہے جس کی مزاحمت رفتار کے متناسب ہے ثابت کرو کہ اس کے اسراع کی سمت مستقل رہتی ہے اور یہ بلا انتہا گھٹتے گھٹتے صفر ہو جاتا ہے ۔

۴ ۔ ایک وزنی ذرہ ایک ایسے واسطہ میں حرکت کر رہا ہے جس کی مزاحمت رفتار کے متناسب ہے ۔ ثابت کرو کہ نقطہ رمیٰ کی ہمواری کے اوپر بڑی سے بڑی بلندی ، اُڑان کے کل وقت کے نصف سے کم وقت میں حاصل ہو جاتی ہے ۔

۵ ۔ اگر ایک ذرّہ ایک ایسے واسطہ میں حرکت کر رہا ہو جس کی مزاحمت ذرّہ کی رفتار کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات محوروں کے مناسب انتخاب سے اس شکل میں تحویل ہو سکتی ہے :

$$\text{ما} + \text{ا لا} = \text{ب لوک لا}$$

۶ ۔ اگر ایک ذرّہ کی حرکت میں مزاحمت اس کے وزن کی ن گنی ہو اور ذرّہ کو افقاً رفتار و کے ساتھ پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ ذرّہ کی رفتار جب کہ یہ افق کے ساتھ زاویہ فہ بنانے والی سمت میں حرکت کر رہا ہو

$$\text{و} \left(\text{۱ - جب فہ}\right)^{\frac{\text{ن - ۱}}{\text{۲}}} \left(\text{۱ + جب فہ}\right)^{-\frac{\text{ن + ۱}}{\text{۲}}}$$ ہوگی ۔

۷ ۔ ایک چکنا تار خطِ تدویر کی شکل کا ہے جس کا محور انتصابی اور راس اوپر کی طرف ہے اور اس پر ایک وزنی ذرّہ جس کی کمیت م ہے ایک ایسے واسطہ میں حرکت

کر رہا ہے جس کی مزاحمت $\frac{\text{م ش}^2}{2\,\text{ف}}$ ہے۔ راس سے مقام روانگی کا فاصلہ ف ہے،

ثابت کرو کہ قرن تک پہنچنے کا وقت $\sqrt{\frac{8\,\text{ا}\,(4\,\text{ا} - \text{ف})}{\text{ج ف}}}$ ہے جہاں ۲ ا تدویرہ کے محور کا طول ہے۔

۸ - تدویر کی شکل کا ایک چکنا تار ہے جس کا محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے - اس پر ایک وزنی منکا قرن پر حالتِ سکون سے پھسلنا شروع کرتا ہے اس پر اس کے وزن کے علاوہ ایک عماسی قوتِ مزاحمت جو رفتار کے مربع کے متناسب ہے عمل کرتی ہے۔ بلندی لا ہیں سے نیچے گرنے کے بعد رفتار معلوم کرو۔

۹ - اگر ایک نقطہ مساوی الزاویہ لولبی پر قطب کی طرف قطب کے گرد یکساں زاویئی رفتار کے ساتھ حرکت کرے تو ثابت کرو کہ نقطۂ مذکور کا ظل خطِ مستقیم پر مزاحمت دار سادہ اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۰ - ایک ذرہ مزاحم واسطہ میں مرکزی قوت $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{\text{ن}}}$ کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے۔ اگر راستہ زاویہ عہ والا مساوی الزاویہ لولبی ہو جس کا قطب قوت کا مرکز ہے تو ثابت کرو کہ مزاحمت $\frac{\text{ن} - 3}{2}\,\frac{\text{مہ جم عہ}}{\text{ر}^{\text{ن}}}$ ہے۔

۱۱ - کمیت م کے ایک ذرہ کو ایک ایسے واسطہ میں پھینکا گیا ہے جس کی مزاحمت م ک (رفتار) ہے - ذرہ پر ایک قوت (م × مہ × فاصلہ) ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے، راستہ کی مساوات معلوم کرو اور اگر $2\,\text{ک}^2 = 9\,\text{مہ}$ تو ثابت کرو کہ یہ مکافی ہوگا اور ذرہ بالآخر مبداء پر ساکن ہو جائیگا لیکن حالتِ سکون میں آنے کے لیے لا انتہا وقت درکار ہوگا۔

۱۲ - ایک ڈگڈگی کو رسی کے ذریعے دُور تک اوپر اُچھالا گیا ہے - ہوا کی انتصابی مزاحمت کو نظر انداز کر دیا گیا ہے لیکن گھاؤ اور انتصابی حرکت دونوں مل کر پہلو کی

طرف عمل کرنے والی ایک اُفقی قوت پیدا کرتے ہیں جسے انتصابی رفتار کے متناسب فرض کیا جاسکتا ہے۔ اگر ڈگڈگی کو اس طرح پھینکا جائے کہ یہ بلندی ھ تک صعود کرے اور نقطہ ہی پر واپس آجائے تو ثابت کرو کہ یہ نقطہ رمی میں سے گزرنے والے انتصابی خط سے بڑے سے بڑے فاصلہ ج پر اُس وقت ہوگی جب کہ اِس کی بلندی $\frac{۲ ھ}{۳}$ ہوگی، نیز دکھاؤ کہ اس کے راستہ کی مساوات ۴ ھ۳ لا۲ = ۲۷ ج۲ ما۲ (ھ - ما) کی شکل کی ہوگی۔

۱۳۔ اگر ایک ذرہ مرکزی قوت کے زیرِ عمل اس طرح حرکت کرے کہ واسطہ کی مزاحمت فی اکائی کمیت رفتار کی ک گُنی ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{فر^۲ ء}{فر ط^۲} + ء = \frac{ق}{ھ^۲ ء^۲}$ و$^{۲ ک ت}$ جہاں ھ مرکزِ قوت کے گرد ابتدائی زاویئی معیارِ اثر کا دوچند ہے۔

۱۴۔ ایک ذرہ مرکزی اسراع ق کے زیرِ عمل ایسے واسطہ میں حرکت کرتا ہے جس کی مزاحمت ک (رفتار)۲ ہے، ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات ہے

$$\frac{فر^۲ ء}{فر ط^۲} + ء = \frac{ق}{ھ^۲ ء^۲} و^{۲ ک س}$$

جہاں س قوس طے کردہ کا طول ہے اور ھ مرکزِ قوت کے گرد زاویئی معیارِ اثر کا دوچند ہے۔

۱۵۔ ایک ذرہ ایک مزاحم واسطہ کے اندر معلومہ مرکزی اسراع ق کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے۔ اگر ذرہ کا راستہ معلوم ہو تو ثابت کرو کہ مزاحمت

$$\frac{۱}{۲ ع^۲} \frac{فر}{فر س} \left(ع^۳ \frac{فر ر}{فر ع} ق \right) \text{ہے۔}$$

۱۱۲۔ حرکت جب کہ کمیّت بھی بدلتی جائے۔

مساوات ق = م ف صرف اُسی صورت میں درست ہوتی ہے جب کہ

م مستقل رہے - نیوٹن کا دوسرا کلیہ زیادہ اساسی شکل میں یہ ہے

$$\text{ق} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{م و}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

فرض کرو کہ ذرہ کی کمیت مف م میں وقفہ مف ت کے اندر اضافہ مف م واقع ہوتا ہے اور یہ مف م رفتار ی کے ساتھ حرکت کر رہا تھا۔

تب وقت مف ت میں ذرہ کے معیارِ حرکت میں اضافہ

$$= \text{م} \times \text{مف و} + \text{مف م}\,(\text{و} + \text{مف و} - \text{ی})$$

اور اس وقت میں قوت کا دھکا = ق × مف ت

اِن کو مساوی کرنے اور انتہا لینے سے

$$\text{م}\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} + \text{و}\frac{\text{فرم}}{\text{فرت}} - \text{ی}\frac{\text{فرم}}{\text{فرت}} = \text{ق}$$

یعنی

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{م و}) = \text{ق} + \text{ی}\frac{\text{فرم}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

جب ی صفر ہو تو ہمیں نتیجہ (۱) حاصل ہوتا ہے۔

۱۱۳- **مشق ۱** - بارش کی ایک کروی بوند آزادانہ گر رہی ہے اور ہر آن میں اس کی کمیت کے اندر آنِ مذکور میں اس کی جو سطح ہو اُس کے لگنے حجم کا اضافہ ہوجاتا ہے۔ وقت ت کے بعد رفتار معلوم کرو، نیز بتاؤ کہ اس اثنا میں یہ کتنا فاصلہ گری۔

جب بوند وقت ت میں فاصلہ لا گرے تو فرض کرو کہ اس کا نصف قطر ر اور کمیت ھ ہے، تب

$$\frac{ف}{فت}\left[م \frac{فلا}{فت}\right] = م ج \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱)$$

اب $م = \frac{۴}{۳} \pi ث ر^۳$ پس $\frac{فم}{فت} = ۴ \pi ر^۲ ث \frac{فر}{فت} = ث ۴ لہ \pi ر^۲$

سوال سے

$$\therefore \frac{فر}{فت} = لہ \text{ اور } ر = ا + لہ ت$$

جہاں ا ابتدائی نصف قطر ہے۔

اس لیے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف}{فت}\left[(ا + لہ ت)^۳ \frac{فلا}{فت}\right] = (ا + لہ ت)^۳ ج$$

$$\therefore (ا+لہ ت)^۳ \frac{فلا}{فت} = \frac{(ا+لہ ت)^۴}{۴ لہ} ج - \frac{ا^۴}{۴ لہ} \times ج$$

کیونکہ رفتار ابتدائً صفر تھی

$$\therefore \frac{فلا}{فت} = \frac{ج}{۴ لہ}\left[ا + لہ ت - \frac{ا^۴}{(ا+لہ ت)^۳}\right]$$

اور $$لا = \frac{ج}{۴ لہ^۲}\left[\frac{(ا+لہ ت)^۲}{۲} + \frac{ا^۴}{۲ (ا+لہ ت)^۲}\right] - \frac{ج}{۴ لہ^۲} \times ا^۲$$

کیونکہ لا اور ت ایک ساتھ معدوم ہوئے ہیں۔

$$\therefore لا = \frac{ج}{۸ لہ^۲}\left[(ا+لہ ت)^۲ - ۲ ا^۲ + \frac{ا^۴}{(ا+لہ ت)^۲}\right]$$

$$= \frac{ج}{۸ لہ^۲}\left[ا + لہ ت - \frac{ا^۲}{ا + لہ ت}\right]^۲ = \frac{ج ت^۲}{۸}\left[\frac{۲ ا + لہ ت}{ا + لہ ت}\right]^۲$$

مشق ۲ - ٹھوس اُسطوانہ کی شکل کی ایک کمیّت جس کی تراش کا رقبہ **ا** ہے مستقل قوت **ف** کے زیرِ عمل اپنے محور کی متوازی سمت میں حرکت کر رہی ہے اور دورانِ حرکت میں حجمی کثافت ث کے ریت کے غبار میں سے گزر رہی ہے جو مخالف سمت میں مستقل رفتار **و** سے ساتھ حرکت کرتا ہے - اگر سب ریت جو اسطوانہ سے لگے اس کے ساتھ چمٹی جائے تو وقت ت کے بعد رفتار اور فاصلہ طے کردہ معلوم کرو جب کہ اسطوانہ ابتداءً ساکن ہو اور اس کی ابتدائی کمیّت م ہو۔

فرض کرو کہ وقت ت کے بعد کمیت ھر اور رفتار و ہے، تب

$\text{ھر} \times \text{مف و} + \text{مف ھر} (\text{و} + \text{مف و} + \textbf{و}) = \text{مف ت}$ وقت میں معیارِ حرکت کا اضافہ $= \text{ف} \times \text{مف ت}$

$$\therefore \text{ھر} \frac{\text{فر و}}{\text{فر ت}} + \text{و} \frac{\text{فر ھر}}{\text{فر ت}} + \textbf{و} \frac{\text{فر ھر}}{\text{فر ت}} = \text{ف} \quad \ldots\ldots (۱)$$

انتہا میں۔

$$\text{نیز} \qquad \frac{\text{فر ھر}}{\text{فر ت}} = \text{ا ث} (\text{و} + \textbf{و}) \quad \ldots\ldots (۲)$$

(۱) سے

$$\text{ھر و} + \text{ھر} \textbf{و} = \text{ف} \times \text{ت} + \text{مستقل} = \text{ف ت} + \text{م} \textbf{و}$$

$\therefore$ (۲) سے

$$\text{ھر} \frac{\text{فر ھر}}{\text{فر ت}} = \text{ا ث} (\text{ف ت} + \text{م} \textbf{و})$$

$$\therefore \text{ھر}^{۲} = \text{ا ث} (\text{ف ت}^{۲} + ۲ \text{م} \textbf{و} \text{ت}) + \text{م}^{۲}$$

∴ (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و} = -\text{و} + \frac{\text{ف ت} + \text{م و}}{\text{م}} = -\text{و} + \frac{\text{ف ت} + \text{م و}}{\sqrt{\text{م}^2 + ۲\,\text{م ا ش و ت} + \text{ا ف ش ت}^2}} \quad \ldots\ldots(۳)$$

نیز اگر اسطوانہ کا پچھلا سرا سکون سے چل کر فاصلہ لا طے کرے یعنی رفتار

$$\text{و} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \text{تب} \quad \text{لا} = -\text{و ت} + \frac{1}{\text{اش}}\sqrt{\text{م}^2 + ۲\,\text{م ا ش و ت} + \text{ا ف ش ت}^2} - \frac{\text{م}}{\text{اش}}$$

(۳) سے ہمیں ملتا ہے

$$\text{اسراع}\ \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \frac{\text{م}^2(\text{ف} - \text{ا ش و}^2)}{(\text{م}^2 + ۲\,\text{م ا ش و ت} + \text{ا ف ش ت}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

پس حرکت ہمیشہ قوت کی سمت میں وقوع پذیر ہوتی ہے یا اس کے مخالف اگر بالترتیب

$\text{ف} \gtrless \text{ا ش و}^2$۔

مشق ۳ ۔ ایک یکساں زنجیر افقی سطح مستوی پر لپیٹی پڑی ہے اور اس کا ایک سرا ایک چھوٹی ہلکی چرخی پر سے جس کی بلندی سطح مستوی کے اوپر ا ہے گزرتا ہے۔ ابتداءً طول ب > ا چرخی کے دوسری طرف آزادانہ لٹک رہا ہے ۔ حرکت معلوم کرو۔

جب طول ب بڑھ کر لا ہوجائے تو فرض کرو کہ رفتار و ہے، تب اس کے بعد کے وقفہ مف ت میں حصہ (لا + ا) کے معیارِ حرکت میں بقدر م (لا + ا) مف و کا اضافہ ہوجائیگا جہاں م کمیت ہے فی اکائی طول ۔ نیز طول م مف لا میں دفعۃً حرکت پیدا ہوگئی ہے اور اس نے رفتار و + مف و اختیار کرلی ہے۔ اس لیے

$$\text{م}(\text{لا}+\text{ا})\,\text{مف و} + \text{م مف لا}\,(\text{و} + \text{مف و}) = \text{معیارِ حرکت کی تبدیلی}$$

$$= \text{قوتِ عاملہ کا دھکا} = \text{م ج}\,(\text{لا} - \text{ا}).\text{مف ت}$$

اس لیے مف ت پر تقسیم کرنے سے اور انتہا لینے سے

$$(\text{لا}+\text{ا})\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}+\text{و}^{۲}=(\text{لا}-\text{ا})\,\text{ج}$$

$$\therefore\ \text{و}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}\times(\text{لا}+\text{ا})+\text{و}^{۲}=(\text{لا}-\text{ا})\,\text{ج}$$

$$\therefore\ \text{و}^{۲}(\text{لا}+\text{ا})^{۲}=\int_{\text{ب}}^{\text{لا}}۲(\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲})\,\text{ج}\,\text{فرلا}=۲\left\{\frac{\text{لا}^{۳}-\text{ب}^{۳}}{۳}-\text{ا}^{۲}(\text{لا}-\text{ب})\right\}\text{ج}$$

پس
$$\text{و}^{۲}=\frac{۲\text{ج}}{۳}\times\frac{(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}^{۲}+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ب}^{۲}-۳\text{ا}^{۲})}{(\text{لا}+\text{ا})^{۲}}$$

اس مساوات کو آگے تکمل نہیں کر سکتے۔

خاص صورت میں جب کہ ب = ۲ ا تو اس سے حاصل ہوتا ہے $\text{و}^{۲}=\frac{۲\text{ج}}{۳}(\text{لا}-\text{ب})$

یعنی سر استقلال اسراع $\frac{\text{ج}}{۳}$ کے ساتھ نیچے اُترتا ہے۔

زنجیر کا تناؤ ت صریحاً مف ت = م مف لا × و سے حاصل ہوتا ہے
پس ت = م $\text{و}^{۲}$

مثالیں

۱ - ایک کروی بوند جس کا نصف قطر ا سنتی میٹر ہے سکون سے روانہ ہو کر انتصابی بلندی ھ میں سے گرتی ہے اور دورانِ حرکت میں اس پر فی سکنڈ فی مربع سنتی میٹر ک گرام کے حساب سے مکثف بخار جمع ہوتا جاتا ہے اور سوائے جاذبہ ارض کے کوئی انتصابی قوت عمل نہیں کر رہی۔ ثابت کرو کہ جب یہ زمین پر پہنچ جائیگی تو اس کا نصف قطر $\text{ک}\left(\frac{۲\text{ھ}}{\text{ج}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left[۱+\left(۱+\frac{\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}{۲\text{ھ}\,\text{ک}^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right]$ ہو جائیگا۔

۲ ۔ ایک ٹھوس اسطوانہ جس کا نصف قطر ج ہے اپنے محور کے متوازی پتلے غبار کے ایک یکساں ساکن بادل میں سے جس کی کثافت ث ہے گزر رہا ہے لیکن اس پر کوئی قوت عمل نہیں کر رہی ۔ اگر سب ذرّے جو اسطوانہ سے ملیں اس کو چمٹتے جائیں اور اگر ابتدائی رفتار اور کمیت بالترتیب ء اور مر ہوں تو ثابت کرو کہ فاصلہ لا جو وقت ت میں طے ہوتا ہے مساوات $(\text{مر} + \text{ث}\,\pi\,\text{ج}^2\,\text{لا})^2 = \text{مر}^2 + ۲\,\text{ث}\,\pi\,\text{ء}\,\text{ج}^2\,\text{مر}\,\text{ت}$ سے حاصل ہوتا ہے ۔

۳ ۔ کمیت مر کا ایک ذرہ ساکن ہے اور ایک ثابت سمت میں ایک مستقل قوت ف کے ماتحت حرکت کرنا شروع کرتا ہے ۔ دورانِ حرکت میں یہ باریک غبار کی ایک رَو سے جو سمتِ مخالف میں مستقل رفتار و کے ساتھ متحرک ہے دوچار ہوتا ہے اور اس سے ذرہ مذکور پر مستقل شرح ث سے غبار جمتا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کی کمیت م ہوگی جب کہ یہ فاصلہ

$$\frac{\text{ک}}{\text{ث}^2}\left[\text{م} - \text{مر}\left\{۱ + \text{لوک}\,\frac{\text{م}}{\text{مر}}\right\}\right]$$

طے کر چکیگا جہاں ک = ف ۔ ث و

۴ ۔ ایک کُروی بوند جس کا نصف قطر ۰۴ء۰ انچ ہے ۰۰ء۶۴ فٹ کی بلندی سے گرنا شروع کرتی ہے اور دورانِ حرکت میں بخارات کے اجتماع سے اس کا نصف قطر بشرح $۱۰^{-۴}$ انچ فی سکنڈ کے بڑھتا جاتا ہے ۔ اگر اس کی حرکت میں مزاحمت واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ زمین پر پہنچتے وقت اِس کا نصف قطر ۰۴۲۰ء۰ انچ ہوگا اور گرنے میں تقریباً ۲۰ء۲ سکنڈ کا وقفہ لگیگا ۔

۵ ۔ برف چھت پر سے پھسل کر یکساں چوڑائی کا ایک حصہ خالی کر دیتی ہے ۔

ثابت کرو کہ اگر سب برف ایک ساتھ پھسلے تو تمام چھت $\sqrt{\frac{۶\,۳\,\text{ل}}{\text{ج جب عہ}}}\;\frac{\text{جا}\left(\frac{۲}{۳}\right)}{\text{جا}\left(\frac{۱}{۶}\right)}$ مدت میں خالی ہو جائیگی لیکن اگر چوٹی پہلے حرکت کرے اور اس سے بتدریج باقی ماندہ حصہ میں حرکت پیدا ہو تو اسراع $\frac{۱}{۳}$ ج جب عہ ہوگا اور وقت $\sqrt{\frac{۶\,\text{ل}}{\text{ج جب عہ}}}$ لگیگا جہاں عہ چھت کا

میلان ہے اور ا وہ طول ہے جس پر ابتداءً برف تھی۔

۶ - کمیت م کا ایک گیند جاذبہ ارض کے زیرِ عمل ایسے واسطہ میں حرکت کر رہا ہے جو گیند مذکور پر یکساں شرح مہ سے مادہ جمع کرتا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات اس پر کے ایک نقطہ میں سے گزرنے والے اُفقی اور انتصابی محوروں کے لحاظ سے اس شکل میں لکھی جا سکتی ہے

$$\text{ک}^{2}\,\text{ع}\,\text{ا} = \text{ک لا}\,(\text{ج} + \text{ک د}) + \text{ج ع}\left(1 - \text{و}^{\frac{\text{ک لا}}{\text{ع}}}\right)$$

جہاں ع اور و اُفقی اور انتصابی رفتاریں ہیں مبداء پر اور م ک = ۲ مہ

۷ - ایک گرتی ہوئی بوند کا نصف قطر بخارات کے مسلسل اجتماع سے بتدریج یکساں طور پر بڑھتا جاتا ہے۔ اگر اس کو کوئی افقی رفتار دی جائے تو ثابت کرو کہ یہ زائد مرتسم کریگی جس کا ایک متقارب انتصابی ہوگا۔

۸ - اگر ایک "ہوائی" میں سے جس کی کمیت ابتداءً مـ ہے فی اکائی وقت کمیت د مـ اضافی رفتار و کے ساتھ گرتی جائے اور اگر خول وغیرہ کا وزن مَ ہو تو ثابت کرو کہ یہ فوراً اوپر نہیں اُٹھ سکتی تاوقتیکہ د و بڑا نہ ہو ج سے اور ہرگز نہیں اُٹھ سکیگی تاوقتیکہ $\frac{\text{د مـ و}}{\text{مَ}}$ بڑا نہ ہو ج سے۔ اگر یہ فوراً انتصاباً اوپر اٹھنے کے عین قابل ہو تو ثابت کرو کہ اس کی بڑی سے بڑی رفتار

$$\text{و لوک}\,\frac{\text{مـ}}{\text{مَ}} - \frac{\text{ج}}{\text{د}}\left(1 - \frac{\text{مـ}}{\text{مَ}}\right) \text{ ہوگی}$$

اور اس کی بڑی سے بڑی بلندی

$$\frac{\text{و}^{2}}{2\,\text{ج}}\left(\text{لوک}\,\frac{\text{مـ}}{\text{مَ}}\right)^{2} + \frac{\text{و}}{\text{د}}\left(1 - \frac{\text{مَ}}{\text{مـ}} - \text{لوک}\,\frac{\text{مـ}}{\text{مَ}}\right) \text{ ہوگی۔}$$

۹ - ایک وزنی زنجیر جس کا طول ل ہے ایک سطح مستوی کے اوپر اس طرح

تھامی گئی ہے کہ اِس کا نچلا سرا سطح مذکور کے اوپر بلندی ل پر ہے ۔ اگر اوپر کے سرے کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب نصف زنجیر سطح پر آجائیگی تو سطح پر کے دباؤ کی زنجیر کے وزن کے ساتھ نسبت ۷ : ۲ ہوگی ۔

۱۰ ۔ ایک بڑی لمبی زنجیر کا طول ا ہے ۔ اِسے ایک مینار کی چوٹی پر سے اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ اِس کا نیچے کا سرا زمین سے مس کرتا ہے ۔ اگر اسے گرا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کی رفتار کا مربع اس وقت جب کہ یہ فاصلہ لا میں سے گر چکے

۲ ج ر لوک $\frac{\text{ا + ر}}{\text{ا + ر − لا}}$ ہوگا جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے ۔

۱۱ ۔ طول ل کی ایک زنجیر کو ایک میز کے کنارہ کے پاس اکٹھا کیا گیا ہے ، اس کے ایک سرے کے ساتھ ایک ذرّہ کو باندھ دیا گیا ہے جس کا وزن کل زنجیر کے وزن کے مساوی ہے ، اور اس کے دوسرے سرے کو کنارہ پر سے اُترنے کے لیے رکھا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ زنجیر کے میز پر سے علٰحدہ ہو جانے کے عین بعد ذرّہ کی

رفتار $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{۵ ج ل}}{6}}$ ہوگی ۔

۱۲ ۔ ایک یکساں رسی جس کا طول ل اور وزن و ہے ایک چکنی چرخی پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک اُفقی سطح مستوی سے عین مس کرتا ہے ۔ اگر رسّی کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب رسّی کا طول لا سطح پر جمع ہو جائیگا تو اس پر دباؤ

$$\text{و}\left[\text{۲ لوک}\ \frac{\text{ل}}{\text{ل − لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right]$$ ہوگا

اور چرخی پر حاصل دباؤ $\text{و}\ \frac{\text{ل − ۲ لا}}{\text{ل − لا}}$ ہوگا

۱۳ ۔ ایک زنجیر ہے جس کی کمیت فی اکائی طول م ہے ، اِس کے ایک سرے

کے ساتھ کمیت ھ باندھی گئی ہے۔ زنجیر کو گچھا کر کے اس کل نظام کو ایک چکنے میز پر رکھا گیا ہے اور ھ کو افقاً رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ جب زنجیر کا طول لا خطِ مستقیم میں آجائے تو ثابت کرو کہ ھ کی رفتار $\frac{ھ و}{ھ + م لا}$ ہوگی اور اس کی حرکت ایسی ہوگی گویا کہ کوئی زنجیر نہیں ہے اور اس پر ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو اِس کے خطِ حرکت میں کے ایک ثابت نقطہ سے اِس کے فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہے۔

نیز بتاؤ کہ کسی آن میں جس شرح سے توانائی بالحرکت ضائع ہو رہی ہے وہ کمیت کی رفتار کے مکعب کے متناسب ہے۔

۱۴ - ایک بے وزن رسّی ایک چکنی چرخی پر سے گزر رہی ہے۔ اِس کا ایک سِرا ایک زنجیر کے ایک گچھے کے ساتھ بندھا ہے جو افقی میز پر پڑا ہے اور دوسرا سِرا طول ل کی اُسی زنجیر کے ساتھ بندھا ہے جو انتصاباً لٹک رہا ہے اور جس کا نچلا سِرا میز سے مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ حرکت کے جاری ہونے کے بعد نظام پہلی دفعہ ساکن ہوگا جب کہ زنجیر کا طول لا میز پر سے اُٹھ جائیگا جہاں (ل - لا) و $\frac{لا^۲}{ل}$ = ل

بتاؤ کہ اسی قسم کے نظام کی حرکت معلوم کرنے کے لیے توانائی کا اصول بالراست کیوں استعمال نہیں ہو سکتا؟

۱۵ - ایک جہاز کا رسّا اپنے ڈھیر سے ا بلندی پر کے ایک سوراخ میں سے جو تختۂ جہاز پر واقع ہے گزرتا ہے، اور تختۂ جہاز پر فاصلہ ب میں سے گزرنے کے بعد جہاز کے پہلو میں کے ایک سوراخ میں سے باہر چلا جاتا ہے اور اس کے فوراً باہر اسے ایک لنگر کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ اگر لنگر کو کھول دیا جائے تو جو حرکت پیدا ہوگی اُسے معلوم کرو نیز اگر لنگر کا وزن رسّے کے وزن کا ۲ ا + $\frac{۱}{۲}$ ب گنا ہو تو بتاؤ کہ لنگر یکساں اسراع $\frac{۱}{۲}$ ج کے ساتھ اُتریگا۔

۱۶ - ایک زنجیر جس کی کمیت م فی اکائی طول ہے ایک کھردری افقی سطحِ مستوی پر

لپٹی پڑی ہے جس کی رگڑ کی قدر مہ ہے، اس کے ایک سرے کے ساتھ کمیت ھ بندھی ہے۔ کمیت ھ کو رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے ثابت کرو کہ یہ فاصلہ

$$\frac{\text{ھ}}{\text{م}}\left\{\left(\text{۱} + \frac{\text{۳م}}{\text{۲ھ}} \times \frac{\text{و}^{\text{۲}}}{\text{مہ ج}}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}} - \text{۱}\right\}$$

طے کرنے کے بعد ساکن ہوجائیگا۔

۱۷۔ کمیت ھ کی ایک یکساں زنجیر جس کا طول ل ہے ایک کھردری سطحِ مستوی کی چوٹی پر جس کا زاویہ میلان عہ ہے لپٹی پڑی ہے اور اس کے ایک سرے کے ساتھ کمیت ھ بندھی ہے۔ اس کمیت کو سطحِ مائل کے نیچے کی طرف رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے اگر کل نظام ساکن ہوجائے جب کہ زنجیر عین تن جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{و}^{\text{۲}} = \frac{\text{۱۴ ج ل}}{\text{۳}}\ \text{قط سہ جب (سہ - عہ)}$$

جہاں سہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۸۔ طول ل اور کمیت م ل کی ایک یکساں زنجیر فرش پر لپٹی پڑی ہے، اس کے ایک سرے کے ساتھ کمیت م ج بندھی ہے جسے رفتار $\sqrt{\text{۲ ج ھ}}$ کے ساتھ انتصاباً اوپر پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ بموجب اس کے کہ بالآخر زنجیر فرش سے پوری اُٹھ آئے یا نہ اُٹھے کمیت کی رفتار بالآخر زمین پر پہنچنے پر بالترتیب بلندی

$$\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\left[\text{۲ل} - \text{ج} + \frac{\text{و}^{\text{۳}}}{(\text{ل} + \text{ج})^{\text{۲}}}\right] \text{ یا } \text{۱} - \text{ج}$$

میں سے گرنے کی رفتار کے مساوی ہوگی جہاں $\text{و}^{\text{۳}} = \text{ج}^{\text{۲}}\,(\text{ج} + \text{۳ھ})$

۱۹۔ ایک یکساں زنجیر کو جزوی طور پر ایک میز پر گچھا کیا گیا ہے اور اس کے ایک سرے کو ایک چکنی چرخی پر سے گزار کر جس کی بلندی گچھے کے اوپر انتصاباً ھ ہے تھاما گیا ہے، اور اس کے اس سرے کے ساتھ زنجیر کے طول ۲ ھ کے وزن کا ایک باٹ باندھ دیا گیا ہے ثابت کرو کہ مؤخر الذکر وزن کے میز پر لگنے سے قبل زنجیر یکساں

اسراع $\frac{1}{3}$ ج کے ساتھ کھلتی ہے اور میز سے لگنے کے بعد کسی آن میں رفتار

$\sqrt{\frac{2}{3}\,ج\,ھ\,و - \frac{لا - ھ}{2ھ}}$ ہوتی ہے جہاں لا کھلی ہوئی زنجیر کا طول ہے۔

۲۰ - ایک رسّی جس کا طول ل ہے ایک چکنی میخ پر بحالتِ سکون لٹک رہی ہے۔ رسّی کے ایک سرے کو آگ لگادی گئی ہے اور رسی یکساں رفتار و سے جلتی جارہی ہے ثابت کرو کہ دوسرا سرا وقت ت کے بعد میخ کے نیچے گہرائی لا پر ہوگا جہاں لا مساوات $(ل - وت)\left(\frac{فر^2 لا}{فرت^2} + ج\right) - و\,\frac{فر لا}{فرت} - 2ج\,لا = .$ سے حاصل ہوتا ہے۔

[وقت ت پر فرض کرو کہ لمبے حصہ کا طول لا اور چھوٹے حصہ کا طول ما ہے، پس لا + ما = ل - وت، نیز فرض کرو کہ اُس وقت رسّی کی رفتار و (= لاَ) ہے۔ اس کے بعد کے وقفہ مف ت میں، معیارِ حرکت کی تبدیلی کو قوتِ عاملہ کے دھکے کے مساوی رکھنے سے

$$(لا + ما - و\,مف\,ت)(و + مف\,و) - (لا + ما)\,و = (لا - ما)\,ج\,مف\,ت$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$(لا + ما)\frac{فر و}{فرت} - و و = (لا - ما)\,ج = (2لا - ل + وت)\,ج،\ وغیرہ]$$

۲۱ - ایک زنجیر جس کی کمیت م اور طول ۲ل ہے ایک چکنی چرخی پر بحالتِ تعادل لٹک رہی ہے اور ایک کیڑا جس کی کمیت ھ ہے اس کے ایک سرے پر آہستہ سے آ بیٹھتا ہے اور بلحاظ زنجیر کے یکساں رفتار و کے ساتھ چڑھنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ رفتار جس سے زنجیر چرخی پر سے اُترتی ہے

$$\left[\frac{ھ^2}{(ھ + م)^2}\,و^2 + \frac{2ھ + م}{ھ + م}\,ج\,ل\right]^{\frac{1}{2}}\ \text{ہوگی۔}$$

[فرض کرو کہ زنجیر کی رفتار ابتداءً وَ ہے، پس و - وَ وہ رفتار ہے جس سے کیڑا روانہ ہوتا ہے، تب ھ (و - وَ) = کیڑے اور زنجیر کے درمیان ابتداءً دھکے کی

قسم کا عمل = م و.

$$\text{و}_{\cdot} = \frac{\text{م}}{\text{ھ}+\text{م}}\,\text{و}$$

بعد کے کسی وقت ت پر فرض کرو کہ لا زنجیر کا لمبا حصہ اور ما چھوٹا حصہ ہے اور چرخی کے نیچے کیڑا گہرائی ی پر ہے اور کیڑا زنجیر پر قوت ق لگاتا ہے۔ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ق} + \frac{\text{م ج}}{2\,\text{ل}}\left(\text{لا} - \text{ما}\right)$$

$$\text{ھ}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ی}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ھ ج} - \text{ق} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \text{و}_{\cdot}$$

نیز $\text{لا} + \text{ما} = 2\,\text{ل}$

اِن مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ھ}+\text{م})\,\dot{\text{لا}}^{2} = 2\,(\text{ھ}-\text{م})\,\text{ج لا} + \frac{\text{م ج}}{\text{ل}}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}$$

[نیز جب، $\text{لا} = \text{ل}$، $\dot{\text{لا}} = \text{و}_{\cdot}$ وغیرہ]

۲۲ - ایک یکساں رسّا جس کا طول ل ہے ایک چکنی چرخی پر لٹک رہا ہے اور ایک بندر جس کا وزن رسّے کے طول ک کے وزن کے مساوی ہے اس کے ایک سرے کے ساتھ چمٹا ہوا ہے اور یہ نظام متعادل ہے۔ اگر ایکدم بندر یکساں اضافی رفتار سے رسّے پر چڑھنا شروع کر دے تو ثابت کرو کہ فضا میں، اس کا اوپر چڑھنا وقت $\left(\frac{\text{ل}+\text{ک}}{2\,\text{ج}}\right)^{\frac{1}{2}}\ \text{جمز}^{-1}\left(1+\frac{\text{ل}}{\text{ک}}\right)$ کے بعد بند ہو جائیگا۔

آٹھواں باب

اہتزازی حرکت اور چھوٹے اہتزاز

۱۱۴ - ابواب ماقبل میں ہم نے اہتزازی حرکت کی بہت سی مثالیں دیکھی ہیں مثلاً ہم نے دیکھا ہے کہ جب کبھی حرکت کی مساوات اس شکل لاً = - ن۲ لا یا ظً = - ن۲ ط میں تحویل ہو سکے تو حرکت سے سادہ موسیقی حرکت تعبیر ہوتی ہے جس کے اہتزاز کی مدت $\frac{۲\pi}{ن}$ ہوتی ہے، ہم اس باب میں قدرے زیادہ مشکل نوعیت کی مثالوں پر بحث کرینگے۔

۱۱۵ - چھوٹے اہتزاز۔ تعادل کے محل کے گرد چھوٹے اہتزازوں کو معلوم کرنے کا عام طریقہ یہ ہے کہ جسم کی حرکت کی عام مساواتیں لکھ لی جائیں۔ اگر متغیر صرف ایک ہی ہو مثلاً لا تو لا کی وہ قیمت معلوم کرو جس سے لاَ، لاً وغیرہ صفر ہو جائیں بالفاظِ دیگر وہ قیمت جس سے تعادل کا محل معلوم ہو۔ فرض کرو کہ یہ قیمت ا ہے۔

حرکت کی مساوات میں لا = ا + ضا رکھو جہاں ضا بہت چھوٹا ہے۔ چھوٹے اہتزاز کے لیے ضاَ بہت چھوٹا ہوگا اس لیے ہم اس کے مربع کو نظر انداز کر سکینگے۔ یہ مساواتِ حرکت بالعموم ضاً = - لہ ضا کی شکل میں تحویل ہو جاتی ہے جس سے چھوٹے اہتزاز کی مدت $\frac{۲\pi}{\sqrt{لہ}}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ حرکت کی عام مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \text{ف}\,(\text{لا}) \times \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{فہ}\,(\text{لا})$$

تعادل کے محل کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

فہ (لا) = ۰ جس سے ملتا ہے لا = ا

لا = ا + ضا رکھو اور ضا۲ کو نظر انداز کردو۔

تب یہ مساوات ہوجاتی ہے:

$$\frac{\text{فر}^2\text{ضا}}{\text{فرت}^2} = \text{فہ}\,(\text{ا} + \text{ضا}) = \text{فہ}\,(\text{ا}) + \text{ضا}\ \text{فہَ}\,(\text{ا}) + \ldots$$

ٹیلر کے مسئلہ سے

چونکہ فہ (ا) = ۰ اس لیے حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{فر}^2\text{ضا}}{\text{فرت}^2} = \text{ضا} \cdot \text{فہَ}\,(\text{ا})$

اگر فہَ (ا) منفی ہو تو حرکت چھوٹے اہتزازوں پر مشتمل ہوگی اور تعادل کا محل جو لا = ا سے حاصل ہوتا ہے قائم تعادل کا محل ہوگا۔

اگر فہَ (ا) مثبت ہو تو متناظر حرکت اہتزازی نہیں ہوگی اور تعادل کا محل غیر قائم ہوگا۔

۱۱۶ - مشق ۱ - ایک یکساں سلاخ کا طول ۲ و ہے، یہ اُفقی محل میں دو لچکدار رسیّوں کے ذریعے جو اِس کے سروں کے ساتھ بندھی ہیں لٹک رہی ہے، رسیّوں کے دوسرے سرے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھے ہیں۔ اور ہر ایک رسّی کا طول ل ہے نیز لچک کی قدر سلاخ کے وزن کی ن گنی ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے محل میں

رسیاں سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہیں جہاں

ا مم عہ ۔ ل جم عہ = ل / ن^۲

اور تعادل کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت

۲π √((ا / ج) · مم عہ / (۱ + ۲ن جم^۳ عہ)) ہے

جب سلاخ ثابت نقطہ کے نیچے گہرائی لا پر ہو تو فرض کرو کہ ہر ایک رسی کا میلان سمتِ انتصابی کے ساتھ طہ ہے ۔ پس لا = ا مم طہ اور تناؤ

= ن م ج ((ا / جب طہ) − ل) / ل = (ن م ج / ل) × (ا − ل جب طہ) / جب طہ

تب حرکت کی مساوات ہو جاتی ہے

م لا̈ = م ج − ۲ × (ن م ج / ل) × ((ا − ل جب طہ) / جب طہ) جم طہ

یعنی − (ا / جب^۲ طہ) طہ̈ + (۲ا جم طہ / جب^۳ طہ) طہ̇^۲ = ج − ۲ (ن ج / ل) × ((ا − ل جب طہ) / جب طہ) × جم طہ

یعنی طہ̈ − ۲ مم طہ طہ̇^۲ = − (ج / ا) جب^۲ طہ + (۲ن ج / ا ل) جب طہ × جم طہ (ا − ل جب طہ) .... (۱)

تعادل کے محل میں جب کہ طہ = عہ تو طہ̇ = ۰ اور طہ̈ = ۰ اور

∴ ا مم عہ − ل جم عہ = ل / ن^۲ .... (۲)

چھوٹے اہتزاز کے لیے طہ = عہ + سا رکھو جہاں سا بہت چھوٹا ہے اور

∴ جب طہ = جب عہ + سا جم عہ اور جم طہ = جم عہ − سا جب عہ

اس صورت میں طہ̇^۲ بوجہ چھوٹی مقدار کا مربع ہونے کے نظر انداز ہو سکتا ہے اور (۱) سے ملتا ہے

$$\ddot{\text{سا}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}}(\text{جب عہ} + \text{سا جم عہ})^{2} + \frac{\text{۲ن ج}}{\text{ا ل}}(\text{جب عہ} + \text{سا جم عہ})(\text{جم عہ} - \text{سا جب عہ})$$

$$\times [\text{ا} - \text{ل}(\text{جب عہ} + \text{سا جم عہ})]$$

$$= -\frac{\text{ج}}{\text{ا}}(\text{جب}^{2}\text{عہ} + \text{۲ سا جب عہ جم عہ}) + \frac{\text{۲ن ج}}{\text{ا ل}}[\text{جب عہ جم عہ} + \text{سا}(\text{جم}^{2}\text{عہ} - \text{جب}^{2}\text{عہ})]]$$

$$\left(\frac{\text{ل}}{\text{۲ن}}\text{مس عہ} - \text{ل سا جم عہ}\right) \text{ مساوات (۲) سے}$$

$$= -\text{سا} \times \frac{\text{ج}}{\text{ا}}[\text{۲ن جب عہ جم}^{2}\text{عہ} + \text{مس عہ}]$$

$$= -\text{سا} \times \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\text{مس عہ}(\text{۱} + \text{۲ن جم}^{3}\text{عہ})$$

$$\text{پس مطلوبہ مدت} = \text{۲}\pi \times \sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{جم عہ}}{\text{۱} + \text{۲ن جم}^{3}\text{عہ}}}$$

دفعہ ماقبل کے اصول کو استعمال کرنے سے اگر مساوات (۱) کے بائیں طرف کا رکن ف (طہ) ہو تو چھوٹے اہتزازوں کے لیے مساوات ہو جاتی ہے

$$\ddot{\text{سا}} = \text{سا} \times \text{ف}'(\text{عہ})$$

اور

$$\text{ف}'(\text{عہ}) = -\frac{\text{۲ج}}{\text{ا}}\text{جب عہ جم عہ} + \frac{\text{۲ن ج}}{\text{ا ل}}(\text{جم}^{2}\text{عہ} - \text{جب}^{2}\text{عہ})(\text{ا} - \text{ل جب عہ})$$

$$-\frac{\text{۲ن ج}}{\text{ا}}\text{جب عہ جم}^{2}\text{عہ} = \text{وغیرہ وغیرہ حسب سابق}$$

مشق ۲ - ایک وزنی ذرہ کو ایک چکنے مستدیر میز کے مرکز پر رکھا گیا ہے، اس سے ن رسیاں بندھی ہیں جو میز کے کنارہ پر متشاکلاً لگی ہوئی ن چھوٹی چرخیوں پر سے گزرتی ہیں اور ہر ایک کے دوسرے سرے کے ساتھ ذرہ کے مساوی الوزن کمیت بندھی ہے - اگر ذرہ کو

ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت

۲π √(ل/ج (۱ + ۲/ن)) ہوگی۔

فرض کرو کہ تختہ کا مرکز و ہے اور ا۱، ا۲ ... ان چرخیاں ہیں، نیز فرض کرو کہ ذرہ کو خط و ا پر جو و ان اور و ا۱ کے درمیان واقع ہے ہٹایا گیا ہے۔ جب اس کا فاصلہ و ن = لا تو فرض کرو کہ ن ار = مار اور ∠ ن و ار = عر نیز فرض کرو کہ تختہ کا نصف قطر ا ہے اور ل رسی کا طول ہے۔

تب مار = √(ا² + لا² − ۲ ا لا جم عر) = ا (۱ − لا/ا جم عر) کیونکہ لا بہت چھوٹا ہے۔

نیز فرض کرو کہ تر رسی ن ار کا تناؤ ہے۔

تب م ج − تر = م (فر²/فرت²) (ل − مار) = م لاَ جم عر

∴ تر = م (ج − لاَ جم عر)

نیز فرض کرو کہ تر × جم ا ن ار = م (ج − لاَ جم عر) × (ا جم عر − لا)/مار

= م (ج − لاَ جم عر) (ا جم عر − لا)/ا (۱ + لا/ا جم عر)

= م/ا² (ج − لاَ جم عر) [ا² جم عر − ا لا + ا لا جم² عر]

اب اگر ∠ ن و ا۱ = عہ تو

∑ جم عر = جم عہ + جم (عہ + ۲π/ن) + ... ن رقموں تک = ۰

∑ جم² عر = ½ [۱ + جم ۲عہ + ۱ + جم (۲عہ + ۴π/ن) + ...] = ن/۲

اور ٤ جم^۲ عر = $\frac{1}{\text{ہم}}$ ٤ [۳ جم عر + جم ۳ عر] = ۰

پس ن کی حرکت کی مساوات ہے

م لاً = ٤ ت جم ا ن ا ر = $\frac{\text{م}}{\text{ا ر}}$ [- ا ج لا × ن + ج و لا × $\frac{\text{ن}}{۲}$ - وَ لاً^۲ × $\frac{\text{ن}}{۲}$]

∴ لاً (۱ + $\frac{\text{ن}}{۲}$) = - $\frac{\text{ن ج}}{\text{۲ ا}}$ لا

∴ لاً = - $\frac{\text{ن ج}}{\text{ا (۲ + ن)}}$ لا

اور پورے اہتزاز کی مدت = ۲ π $\sqrt{\frac{\text{ا (۲ + ن)}}{\text{ن ج}}}$

یہ آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ و ن کی عماد وار سمت میں تناؤں کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ صفر ہوتا ہے اگر لا کے مربعوں کو نظر انداز کردیا جائے۔

مشق ۳۔ کمیتوں م اور مَ کے دو ذرّوں کو ایک لچکدار رسّی سے ملایا گیا ہے جس کا طبعی طول و ہے اور لچک کی قدار لہ ہے م ایک چکنے میز پر یکساں زاویئی رفتار کے ساتھ ج نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہے ۔ اس دائرہ کے مرکز پر میز میں ایک سوراخ ہے اور رسّی اس سے گزرتی ہے اور مَ میز کے نیچے گہرائی جَ پر بحالتِ سکون لٹک رہا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر م کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو چھوٹے اہتزازوں کی مدتیں $\frac{۲\pi}{\text{ع}}$ یکساں حرکت کے محل کے گرد مساواتِ ذیل سے حاصل ہوتی ہیں:

و ا ج م مَ ع^۴ - { م ج + (۴ ج + ۳ جَ - ۳ و) مَ } و لہ ع^۲ + ۳ (ج + جَ - و) لہ^۲ = ۰

حرکت کی کسی آن میں فرض کرو کہ م اور مَ کے فاصلے سوراخ سے بالترتیب لا اور ما ہیں اور رسّی کا تناؤ ت ہے ۔ پس حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\text{م}\left(\ddot{\text{لا}} - \text{لا}\,\dot{\text{ط}}^{2}\right) = -\text{ت} = -\text{لہ}\,\frac{\text{لا}+\text{ما}-\text{ل}}{\text{ل}} \;\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\frac{1}{\text{لا}}\,\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\text{لا}^{2}\,\dot{\text{ط}}\right) = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اور

$$\text{مَ}\,\ddot{\text{ما}} = \text{مَ}\,\text{ج} - \text{ت} = \text{مَ}\,\text{ج} - \text{لہ}\,\frac{\text{لا}+\text{ما}-\text{ل}}{\text{ل}} \;\ldots\ldots\ldots (۳)$$

(۲) سے حاصل ہوتا ہے $\text{لا}^{2}\,\dot{\text{ط}} = \text{مستقل} = \text{ھ}$

پس (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\ddot{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{لا}^{3}} - \frac{\text{لہ}}{\text{م}\,\text{ل}}\left(\text{لا}+\text{ما}-\text{ل}\right) \;\ldots\ldots\ldots (۴)$$

جب لا = ج اور ما = جَ تو تعادل ہوتا ہے پس اس وقت $\ddot{\text{لا}} = \ddot{\text{ما}} = 0$۔

اور اس لیے (۳) اور (۴) سے

$$\text{مَ}\,\text{ج} = \text{م}\,\frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ج}^{3}} = \frac{\text{لہ}\left(\text{ج}+\text{جَ}-\text{ل}\right)}{\text{ل}} \;\ldots\ldots\ldots (۵)$$

پس (۴) اور (۳) سے لا = ج + ضا اور ما = جَ + عا رکھنے سے جہاں ضا اور عا چھوٹے ہیں حاصل ہوتا ہے :

$$\ddot{\text{ضا}} = \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ج}^{3}}\left(1 - \frac{3\,\text{ضا}}{\text{ج}}\right) - \frac{\text{لہ}}{\text{م}\,\text{ل}}\left(\text{ج}+\text{جَ}-\text{ل}+\text{ضا}+\text{عا}\right)$$

$$= -\frac{\text{لہ}}{\text{ل}\,\text{م}}\left[\frac{4\,\text{ج}+3\,\text{جَ}-3\,\text{ل}}{\text{ج}}\,\text{ضا}+\text{عا}\right]$$

اور

$$\ddot{\text{عا}} = -\frac{\text{لہ}}{\text{ل}\,\text{مَ}}\left(\text{ضا}+\text{عا}\right)$$

ان مساواتوں کو حل کرنے کے لیے رکھو

$$ضا = ا \text{ جم } (ع ت + بہ) \text{ اور } عا = ب \text{ جم } (ع ت + بہ)$$

مندرج کرنے سے

$$ا \left[-ع^2 + \frac{لہ}{و م} \times \frac{۴ج + ۳ج' - ۳ ل}{ج} \right] + \frac{لہ}{و م} ب = ۰$$

اور

$$ا \frac{لہ}{و م'} + ب \left[-ع^2 + \frac{لہ}{ا م'} \right] = ۰$$

اس طرح $\frac{ا}{ب}$ کی جو دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اُن کو مساوی رکھنے اور تحویل کرنے سے

$$و^2 ج م م' ع^4 - \{ م ج + م' (۴ج + ۳ج' - ۳ ل) \} و لہ ع^2 + ۳ (ج + ج' - ل) لہ^2 = ۰$$

اس مساوات سے $ع^2$ کی دو قیمتیں $ع_1^2$ اور $ع_2^2$ حاصل ہوتی ہیں اور یہ دونوں مثبت ہیں۔ پس حل اس شکل کا ہے

$$ضا = ا_1 \text{ جم } (ع_1 ت + بہ_1) + ا_2 \text{ جم } (ع_2 ت + بہ_2)$$

اور اسی قسم کا جملہ عا کے لیے۔

پس اہتزاز دو سادہ موسیقی حرکتوں سے مرکب ہے جن کی مدتیں $\frac{۲ \pi}{ع_1}$ اور $\frac{۲ \pi}{ع_2}$ ہیں۔

مثالیں

۱۔ اندفاعی قوتوں کے دو مساوی مرکز ایک دوسرے سے فاصلہ ۲ ا پر واقع ہیں

اور قوت کا قانون $\frac{مہ}{ر^۲} + \frac{مہ'}{ر^۳}$ ہے - مرکزوں کو ملانے والے خط پر ذرّہ کے چھوٹے اہتزاز کی مدت معلوم کرو۔

اگر مرکز تجاذبی ہوں تو اس کے علی القوائم خط پر چھوٹے اہتزاز کی مدت دریافت کرو۔

۲ - ایک وزنی ذرّہ کے ساتھ مساوی ہلکی لچکدار دو رسیاں بندھی ہیں جن کے دوسرے سرے ایک ہی اُفقی خط میں دو ثابت نقطوں کے ساتھ جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ا ہے بندھے ہیں - ہر ایک رسّی کا طبعی طول ب ہے اور لچک کی قدر ل ہے۔ حالتِ سکون میں رسیاں سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہیں - اگر ذرّہ کو ذرا سا انتصابی سمت میں ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ ایک مکمل چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$۲\pi\sqrt{\frac{ا \,تم\, ع}{ج} \times \frac{ا - ب \,جب\, ع}{ا - ب \,جب^۳ ع}} \text{ ہے -}$$

۳ - دو مساوی وزنی ذرّوں کو ایک بے وزن سلاخ کے سروں کے ساتھ باندھا گیا ہے سلاخ کا طول ۲ ج ہے - ذرّے انتصابی سطح مستوی میں نصف قطر ا کے ایک چکنے کرہ میں حرکت کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت طول $\frac{ا^۲}{\sqrt{ا^۲ - ج^۲}}$ کے سادہ رقاص کی مدت کے مساوی ہے۔

۴ - ایک وزنی مستطیلی تختہ جس کے کونوں کے ساتھ چار لچکدار رسیاں بندھی ہیں تشاکلاً متوازی الافق محل میں لٹک رہا ہے - رسیوں کے دوسرے سرے تختہ کے مرکز کے عین اوپر ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ چھوٹے انتصابی اہتزازوں کی مدت $۲\pi\left(\frac{ج}{ف} + \frac{۴ ف^۲ ل}{ک^۳ م}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$ ہے جہاں ف بحالتِ تعادل تختہ کا فاصلہ ہے ثابت نقطہ کے نیچے، ا طول ہے تختہ کے نصف وتر کا

$$ک = \sqrt{ا^۲ + ف^۲}$$

اور ل لچک کی قدر ہے۔

۵ - کمیّت م کی ایک سلاخ اُفقی محل میں دو مساوی انتصابی لچکدار رسیّوں کے ذریعے لٹک رہی ہے جن کی لچک کی قدر لہ اور جن کا طبعی طول ل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سلاخ کو اِس کے متوازی ذرا سا ہٹا دیا جائے تو افقی اہتزاز کی مدّت

$$۲\pi\sqrt{ل\left(\frac{۱}{ج}+\frac{م}{۲\,لہ}\right)}$$ ہے۔

۶ - ایک ہلکی رسّی کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ ا کے ساتھ بندھا ہے، رسّی ایک چکنی چرخی ب کے اوپر سے گزرتی ہے جو ا کی ہمواری پر اس سے ۲ ل فاصلہ پر واقع ہے اور اس کے دوسرے سرے پر ایک کمیت ن ہے۔ رسّی کا جو حصّہ ا اور ب کے درمیان ہے اس پر کمیت مـ کا ایک چھلا پھسل سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے تعادل کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کا دَور

$$۲\pi\left[\,ل\,مـ\,ن\,(مـ+ن)\div ج\,(۴ن^{۲}-مـ^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

ہے - یہ فرض کیا جائے کہ $(۲ن > مـ)$ -

۷ - کمیّت م کے ایک ذرّہ کو ایک ہلکی لچکدار رسّی کے ذریعہ چکنے اُفقی میز کے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے رسّی کا طبعی طول ل اور لچک کی قدر لہ ہے۔ ذرّہ میز پر یکساں طور پر گھوم رہا ہے اور دورانِ گردش میں رسّی کا طول ب ہے۔ ثابت کرو کہ تعفیف سے مزید کھنچاؤ کے لیے چھوٹے اہتزاز کی مدّت

$$۲\pi\sqrt{\frac{م\,ل\,ب}{لہ\,(۴ب-۳ل)}}$$ ہوگی۔

۸ - دو ذرّے جن کی کمیتیں $م_۱$ اور $م_۲$ ہیں طول $ل_۱+ل_۲$ کی رسی کے سروں کے ساتھ بندھے ہیں رسّی ایک اُفقی میز پر کے چکنے حلقے میں سے گزرتی ہے اور ذرّے $ل_۱$ اور $ل_۲$ نصف قطر کے دائرے بالترتیب زاویئی رفتاروں $سہ_۱$ اور $سہ_۲$ کے ساتھ مرتسم کر رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ $م_۱ ل_۱ سہ_۱^{۲} = م_۲ ل_۲ سہ_۲^{۲}$ اور اس حالت کے گرد چھوٹا اہتزاز مدّت

$$2\pi\sqrt{\frac{م_1+م_2}{3\left(م_1 س_1^2+م_2 س_2^2\right)}}$$

میں تکمیل پذیر ہوتا ہے۔

۹ - کمیت م کا ایک ذرّہ ایک چکنے میز پر پڑا ہے اور ایک ہلکی رسی کے ذریعہ جو میز پر کے ایک سوراخ میں سے گزرتی ہے ایک اور ذرّہ کے ساتھ جس کی کمیت مَ ہے ملحق ہے - مؤخرالذکر ذرّہ آزادانہ لٹک رہا ہے۔ شرط معلوم کرو کہ ذرّہ م یکساں رفتار کے ساتھ دائرہ مرتسم کرے اور بتاؤ کہ اگر مَ ذرا سا انتصاباً ہٹادیا جائے تو جو اہتزاز پیدا ہوگا اُس کا دَور $2\pi\sqrt{\frac{(م+مَ)\,ا}{3\,مَ\,ج}}$ ہوگا جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۱۰ - ایک تار مکافی کی شکل کا ہے جس کا وتر خاص ۴ ا ہے، محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے اس پر ایک منکا ہے جسے ایک لچکدار رسّی کے ذریعے ماسکہ سے ملحق کیا گیا ہے رسّی کا طبعی طول $\frac{ا}{2}$ ہے اور لچک کی قدر منکے کے وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزاز کا دَور $2\pi\sqrt{\frac{ا}{ج}}$ ہے۔

۱۱ - ایک مربع کے ہر وتر کا طول ۲ ا ہے، اس کے ہر کونہ پر چار مساوی الطاقت تجاذبی قوتوں کے مرکز ہیں قوت کا قانون م × ف (لا) ہے جہاں م کشش کردہ ذرّہ کی کمیت ہے جب کہ اس کا فاصلہ مرکزِ قوت سے لا ہو۔ ایک ذرّہ کو مرکز کے قریب ایک وتر پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزاز کا دَور

$$2\pi\left\{\frac{1}{ا}\,ف\,(ا)+فَ\,(ا)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$ ہے۔

۱۲ - تین مساوی ذرّے ہیں جن کی کمیتیں م ہیں۔ ان کو مساوی لچکدار رسیّوں سے ملایا گیا ہے اور یہ ایک دوسرے کو قوت " مہ × فاصلہ " کے مطابق اندفاع کرتے ہیں۔ تعادل کی حالت میں ہر ایک رسّی کا طول طبعی طول سے دوچند ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ذرّوں کو تشاکلاً اس طرح ہٹایا جائے کہ تینوں رسیاں ہمیشہ

مساوی الاضلاع مثلث بنائیں تو وہ دَور $2\pi\sqrt{\frac{\text{م}}{3\,\text{مہ}}}$ سے اہتزاز کریگی۔

۱۳۔ ایک باریک یکساں مستدیر حلقہ کا ہر ایک نقطہ ایک ذرّہ کو فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب قوت کے ساتھ اندفاع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ حلقہ کے مرکز پر تعادل کے محل کے گرد ذرّہ کے چھوٹے اہتزاز کی مدت حلقہ کے نصف قطر کے متناسب بدلتی ہے۔

۱۴۔ طول ۲ ل کی ایک یکساں سیدھی سلاخ ایک چکنی ثابت نلی کے اندر کمیّت م کے ایک ثابت ذرّہ کی کشش کے زیرِ عمل حرکت کرتی ہے جو کہ نلی سے فاصلہ ج پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزاز کی مدّت $2\pi\sqrt[4]{\frac{(\text{ل}^2+\text{ج}^2)^3}{\text{جہ}^2\,\text{م}^2}}$

۱۵۔ ایک یکساں سیدھی سلاخ ایک ثابت یکساں مستدیر حلقہ کی سطح مستوی پر علی القوائم ہے اور اِس کے مرکز میں سے گزرتی ہے۔ حلقہ کا ہر ذرّہ سلاخ کے ہر ذرہ کو فاصلہ کے مربع کی معکوس قوت کے ساتھ کشش کرتا ہے۔ تعادل کے محل کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کی مدّت معلوم کرو جب کہ حرکت حلقہ کی سطح مستوی پر عمود وار ہو۔

۱۶۔ ایک ذرّہ جس کی کمیّت ھ ہے طول ل کی ایک انقبابی رسّی کے ایک سرے سے ایک ثابت نقطہ و سے لٹک رہا ہے اس ذرّہ کے ساتھ ایک اَور رسّی بندھی ہے جو ایک چکنی چرخی پ پر سے گزرتی ہے، جو کہ و کی ہمواری پر اس سے فاصلہ ل پر واقع ہے۔ اس رسّی کے دوسرے سرے کے ساتھ کمیّت م بندھی ہے جو بمقابلہ ھ کے بہت چھوٹی ہے۔ اگر م کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ نظام اوسط محل کے گرد دَور $2\pi\left[1+\frac{\text{م}}{8\,\text{ھ}}\left(2+\sqrt{2}\right)\right]\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ کے ساتھ اہتزاز کریگا۔ نیز اوسط محل معلوم کرو۔

۱۷۔ ایک لچکدار رسی کے ذریعہ ایک وزنی ذرّہ لٹک رہا ہے، رسّی کی

لچک کی قدر ذرّہ کے وزن کی تین گنی ہے ۔ اگر ذرّہ کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اِس کا طریق مکافی کی ایک چھوٹی قوس ہوگی ۔
اگر ہٹاؤ افق کے ساتھ زاویہ $م^{-1}$ ہ بنانے والی سمت میں ہو تو ثابت کرو کہ قوسِ مکافی کا وہ حصہ ہوگی جو وترِ خاص سے منقطع ہوتا ہے ۔

۱۱۷۔ ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے قوت م $ن^{۲}$ (فاصلہ) کے زیرِ عمل خطِ مستقیم پر کے ایک ثابت نقطہ کی طرف حرکت کر رہا ہے ۔ اِس کی حرکت میں مزاحمت م مہ (رفتار) واقع ہوتی ہے، حرکت معلوم کرو۔

حرکت کی مساوات ہے

$$م \frac{ف^{۲}لا}{فرت^{۲}} = - م ن^{۲} لا - م مہ \frac{فلا}{فرت}$$

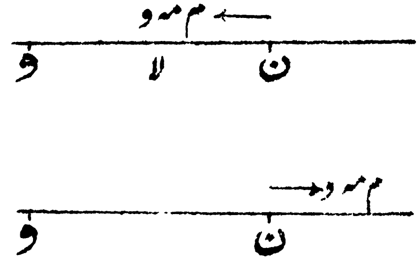
یعنی

$$\frac{ف^{۲}لا}{فرت^{۲}} + مہ \frac{فلا}{فرت} + ن^{۲} لا = ۰ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱)$$

[صریحاً یہ ایسی حرکت کی مساوات ہے جس میں لا بڑھ رہا ہے]
اگر ذرّہ اس طرح حرکت کرے کہ لا گھٹ رہا ہو جیسا کہ ذیل کی شکل دوم میں، یعنی بائیں جانب، تو رگڑ کی مزاحمت دائیں جانب ہوگی اور م × مہ × و کے مساوی ہوگی لیکن اس صورت میں $\frac{فلا}{فرت}$ منفی ہوتا ہے یعنی و کی قیمت $-\frac{فلا}{فرت}$ ہوتی ہے، پس رگڑ کی مزاحمت اس طرف م مہ $\left(-\frac{فلا}{فرت}\right)$ ← ہوتی ہے ۔ اس صورت میں حرکت کی مساوات ہوگی :

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\,\text{م}\,\text{ن}^{2}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{مہ}\left(-\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)$$

جو پھر (۱) کے معادل ہو جاتی ہے



پس مساوات (۱) و کے دائیں جانب ن کے سب محلوں کے لیے حرکت کو تعبیر کرتی ہے خواہ ن کسی سمت میں بھی حرکت کرے۔ [اسی طرح سے دکھایا جا سکتا ہے کہ و کے بائیں طرف ن کے سب مقامات کے لیے بھی حرکت کی یہی مساوات درست ہے خواہ ن کسی سمت میں بھی حرکت کر رہا ہو۔]

(۱) کو حل کرنے کے لیے $\text{لا} = \text{ل}\,\text{و}^{\text{ع ت}}$ رکھو تب

$$\text{ع}^{2} + \text{مہ}\,\text{ع} + \text{ن}^{2} = ۰$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع} = -\,\frac{\text{مہ}}{۲} \pm \text{خ}\sqrt{\text{ن}^{2} - \frac{\text{مہ}^{2}}{۴}}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \text{و}^{-\frac{\text{مہ}}{۲}\text{ت}}\left[\text{ل}\,\text{و}^{\sqrt{\text{ن}^{2}-\frac{\text{مہ}^{2}}{۴}}\,\text{خ ت}} + \text{لَ}\,\text{و}^{-\sqrt{\text{ن}^{2}-\frac{\text{مہ}^{2}}{۴}}\,\text{خ ت}}\right]$$

یعنی لا = ا و $^{-\frac{مہ}{۲}ت}$ جم $\left[\sqrt{ن^۲ - \frac{مہ^۲}{۴}}\ ت + ب\right]$ ....(۲)

جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

اگر مہ بہت چھوٹا ہو تو ا و $^{-\frac{مہ}{۲}ت}$ آہستہ طور پر بدلنے والی مقدار ہے، اس لیے (۲) تقریباً سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرتا ہے جس کا دور $۲\pi \div \sqrt{ن^۲ - \frac{مہ^۲}{۴}}$ ہے اور سعت ا و $^{-\frac{مہ}{۲}ت}$ ایک آہستہ طور پر گھٹنے والی مقدار ہے۔ اس قسم کی حرکت کو کاہیدہ اہتزاز (Damped oscillation) کہتے ہیں اور مہ کاہیدگی کا ناپ ہے۔

یہ دور مہ کے مربع پر منحصر ہے یعنی تقرب کے پہلے رتبہ تک رگڑ کی خفیف سی مزاحمت کا کوئی اثر حرکت کے دور پر نہیں پڑتا۔ اس کا اثر خصوصاً حرکت کی سعت کے کم کرنے میں ظہور پذیر ہوتا ہے کیونکہ سعت $= ا\left(۱ - \frac{مہ}{۲}\ ت\right)$ ہے جبکہ مہ کے مربعوں کو نظر انداز کر دیا جائے اور اس لیے یہ مہ کی پہلی قوت پر موقوف ہے۔

اوپر جس قسم کے ارتعاش کا ذکر ہوا اُسے آزاد ارتعاش سے موسوم کرتے ہیں یہ ایسے ذرّہ کی حرکت ہے جس کی حرکت بیرونی دَوری قوتوں کے زیرِ اثر نہ ہو۔

اگر مہ بمقابلہ ن کے بہت چھوٹا نہ ہو تو حرکت کی تعبیر ایسی سادہ نہیں رہتی لیکن مہ کی سب قیمتوں کے لیے جو ۲ن سے چھوٹی ہوں مساوات (۲) حرکت کو تعبیر کرتی ہے۔

(۲) سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے لاَ = ۰ جب کہ

$$\text{مس}\left[\sqrt{\text{ن}^2-\frac{\text{مہ}^2}{4}}\;\text{ت}+\text{ب}\right]=-\frac{\text{مہ}}{\sqrt{4\text{ن}^2-\text{مہ}^2}}=\text{مس عہ (فرض کرو)}\quad\ldots(3)$$

جس کے حل اس شکل کے ہیں:

$$\sqrt{\text{ن}^2-\frac{\text{مہ}^2}{4}}\;\text{ت}+\text{ب}=\text{عہ}،\ \pi+\text{عہ}،\ 2\pi+\text{عہ}،\ \ldots$$

اس لیے لاَ صفر ہوتا ہے یعنی رفتار معدوم ہوتی ہے وقفوں

$$\pi\div\sqrt{\text{ن}^2-\frac{\text{مہ}^2}{4}}\quad\text{کے بعد۔}$$

پس اہتزاز کے دَور اب بھی مستقل رہتے ہیں اگرچہ رگڑ نہ ہونے کی صورت میں جو دَور ہوتے ہیں یہ دَور اُن سے بڑے ہوتے ہیں۔

اگر (۳) سے ت کی جو متواتر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ $\text{ت}_1، \text{ت}_2، \text{ت}_3 \ldots$ ہوں تو (۲) کی متناظر قیمتیں ہونگی

$$\text{ا و}^{-\frac{\text{مہ}}{2}\text{ت}_1}\,\text{جم عہ}،\ -\text{ا و}^{-\frac{\text{مہ}}{2}\text{ت}_2}\,\text{جم عہ}،\ \text{ا و}^{-\frac{\text{مہ}}{2}\text{ت}_3}\,\text{جم عہ}،\ldots$$

لہٰذا اہتزازوں کی سعتیں گھٹنے والے سلسلۂ ہندسیہ میں ہوتی ہیں جس کی

نسبت مشترک $=\text{و}^{-\frac{\text{مہ}}{2}(\text{ت}_2-\text{ت}_1)}=\text{و}^{-\text{مہ}\frac{\pi}{2}\div\sqrt{\text{ن}^2-\frac{\text{مہ}^2}{4}}}$

اگر مہ > ۲ ن تو حل کی شکل بدل جاتی ہے کیونکہ اب

$$\text{ع}=-\frac{\text{مہ}}{2}\pm\sqrt{\frac{\text{مہ}^2}{4}-\text{ن}^2}$$

اور عام حل ہوتا ہے:

$$\text{لا} = \text{و}^{-\frac{\text{م ت}}{۲}}\left[\text{ل}\,\text{و}^{\sqrt{\left(\frac{\text{م}^۲}{۴}-\text{ن}^۲\right)}\,.\text{ت}} + \text{لَ}\,\text{و}^{-\sqrt{\left(\frac{\text{م}^۲}{۴}-\text{ن}^۲\right)}\,\text{ت}}\right]$$

$$= \text{و}^{-\frac{\text{م ت}}{۲}}\ \text{ا}_{۱}\ \text{جمز}\left[\sqrt{\left(\frac{\text{م}^۲}{۴}-\text{ن}^۲\right)} \times \text{ت} + \text{ب}_{۱}\right]$$

اس صورت میں حرکت اہتزازی نہیں ہوتی -
اگر $\text{م} = ۲\text{ن}$ تو تفرقی مساواتوں کے قواعد کی رُو سے

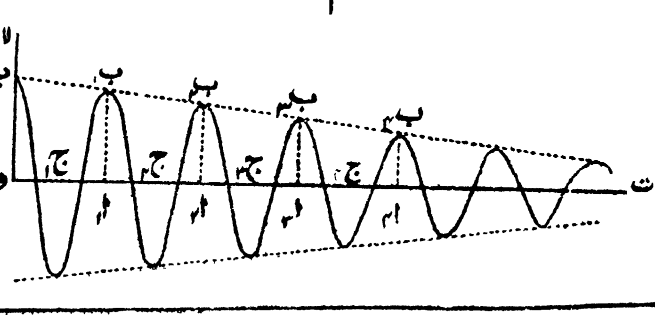
$$\text{لا} = \text{ل}\,\text{و}^{-\text{ن ت}} + \underset{\text{جہ}=۰}{\text{نہا}}\ \text{ھ}\,\text{و}^{-(\text{ن}+\text{جہ})\text{ت}}$$

$$= \text{ل}\,\text{و}^{-\text{ن ت}} + \underset{\text{جہ}=۰}{\text{نہا}}\ \text{ھ}\,\text{و}^{-\text{ن ت}}\left(۱-\text{جہ ت}+\text{مربعے}\right)$$

$$= \text{ل}_{۱}\,\text{و}^{-\text{ن ت}} + \text{ھ}_{۱}\text{ت}\,\text{و}^{-\text{ن ت}} = \text{و}^{-\text{ن ت}}\left(\text{ل}_{۱}+\text{ھ}_{۱}\text{ت}\right)$$

مشق - رگڑ کی مزاحمت کی عدم موجودگی میں ایک ذرّہ کے اہتزاز کا دَور $\frac{۱}{۲}$ اسکنڈ ہے - اگر مزاحمت $\frac{۱}{۴}$ × م × رفتار کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو بتاؤ کہ دَور میں کیا تبدیلی پیدا ہوگی اور کونسا جزوِ ضربی بڑی سے بڑی مسلسل سعتوں کی نسبت کو تعبیر کریگا -

۱۱۸ - دفعۂ ماقبل کی حرکت کو ترسیمی طریق پر حسبِ ذیل دکھایا جاسکتا ہے - فرض کرو کہ وقت ت کو اُفقی محور پر ناپا گیا ہے اور ذرّہ کے ہٹاؤ لا کو انتصابی معینوں پر - تب دفعۂ ماقبل کا کسی قسم کا ہٹاؤ شکلِ ذیل سے تعبیر ہوگا



نقطہ دار منحنی جس پر بڑے سے بڑے معینوں کے سب سرے واقع ہیں لا = ± ا و^{- مہ/۲ ت} جم عہ ہے - متواتر دوروں کی مدتیں ا۱ ا۲، ا۲ ا۳، ا۳ ا۴، ... مساوی ہیں اور متناظر بڑے سے بڑے معین ا۱ ب۱، ا۲ ب۲، ... ایک گھٹنے والا سلسلہ ہندسیہ بناتے ہیں جس کی نسبت مشترک

$$\frac{\text{ا جم عہ و}^{- \frac{مہ}{۲} \text{ د}_{\text{ا}_۲}}}{\text{ا جم عہ و}^{- \frac{مہ}{۲} \text{ د}_{\text{ا}_۱}}} = \text{و}^{- \frac{مہ}{۲} \text{ تہ}}$$

جہاں تہ اہتزاز کا دور ہے -

اگر ایک ذرہ اس طرح کے کاہیدہ ارتعاش میں حرکت کر رہا ہو اور ہم حیلی طور پر ایسا انتظام کریں کہ یہ اپنے ہٹاؤ کا منحنی خود مرتسم کرے جیسا کہ اوپر کی شکل میں، تو ہم اس منحنی کی مدد سے یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ ذرہ پر کیا قوتیں عمل کر رہی ہیں، کیونکہ متواتر فاصلوں ج ج۲، ج۲ ج۳ ... وغیرہ کو ناپنے اور ان کا اوسط لینے سے ہمیں دورتہ معلوم ہو جاتا ہے جو دفعۂ ماقبل کی رو سے ۲ π ÷ $\sqrt{\text{ن}^۲ - \frac{\text{مہ}^۲}{۴}}$ کے مساوی ہوتا ہے یعنی

$$\frac{۴\pi^۲}{\text{تہ}^۲} = \text{ن}^۲ - \frac{\text{مہ}^۲}{۴} \text{ -}$$

نیز اگر بڑے سے بڑے معینوں ا۱ ب۱، ا۲ ب۲، ا۳ ب۳، ... کو ناپا جائے اور $\frac{\text{ا}_۲ \text{ب}_۲}{\text{ا}_۱ \text{ب}_۱}$، $\frac{\text{ا}_۳ \text{ب}_۳}{\text{ا}_۲ \text{ب}_۲}$، ... کی قیمتیں معلوم کر کے ان کا اوسط لہ نکالا جائے تو ہمیں و^{- مہ/۲ تہ} کی قیمت مل سکتی ہے، پس

$$\text{- } \frac{\text{مہ}}{۲} \text{ تہ} = \text{لوگ}_{\text{و}} \text{ لہ}$$

اس طرح ہمیں ن^2 اور مہ کی قیمتیں مل جاتی ہیں جن سے بحالی قوت (مہ) اور فرکی مزاحمت پیدا کرنے والی قوت (ن^2) مل جاتی ہیں -

۱۱۹ - ایک ذرّہ ایک خطِ مستقیم میں ایک ثابت مرکز کی طرف اسراع مہ لا کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور مزید برآں ذرّۂ مذکور اسراع ل جم ع ت بھی رکھتا ہے - حرکت معلوم کرو -

حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{مہ}\ \text{لا} + \text{ل}\ \text{جم}\ \text{ع}\ \text{ت}$$

اس کا حل ہے :

$$\text{لا} = \text{ا}\ \text{جم}\left(\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} + \text{ب}\right) + \text{ل}\,\frac{1}{\text{عف}^2 + \text{مہ}}\ \text{جم}\ \text{ع}\ \text{ت}$$

$$= \text{ا}\ \text{جم}\left[\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} + \text{ب}\right] + \frac{\text{ل}}{\text{مہ} - \text{ع}^2}\ \text{جم}\ \text{ع}\ \text{ت} \quad \ldots\ldots(۱)$$

اگر ذرّہ وقت صفر پر فاصلہ ا سے سکون سے روانہ ہو تو

$$\text{ب} = ۰ \ \text{اور}\ \text{ا} = \text{ا} - \frac{\text{ل}}{\text{مہ} - \text{ع}^2}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \left[\text{ا} - \frac{\text{ل}}{\text{مہ} - \text{ع}^2}\right]\text{جم}\ \sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} + \frac{\text{ل}}{\text{مہ} - \text{ع}^2}\ \text{جم}\ \text{ع}\ \text{ت} \quad \ldots\ldots(۲)$$

پس نقطہ کی حرکت دو سادہ موسیقی حرکتوں سے مرکب ہے جن کے ادوار $\frac{2\pi}{\sqrt{\text{مہ}}}$ اور $\frac{2\pi}{\text{ع}}$ ہیں -

(۲) کی بائیں جانب کے رُکن کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر ع تقریباً $\sqrt{\text{مہ}}$ کے مساوی ہو تو $\frac{\text{ل}}{\text{مہ} - \text{ع}^{۲}}$ بہت بڑا ہو جاتا ہے' بالفاظ دیگر اضطرابی اسراع ل جم ع ت کا اثر بہت وقیع ہوتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ کسی دَوری اضطرابی قوت کا اثر بالآخر صرف اُس کی مقدار ل پر ہی موقوف نہیں ہوتا بلکہ اس کے دَور پر بھی منحصر ہوتا ہے اور اگر دَور آزاد حرکت کے دَور کے تقریباً مساوی ہو تو ممکن ہے کہ اس کا اثر بہت زیادہ ہو جائے خواہ مقدار ل مقابلۃً چھوٹی ہی کیوں نہ ہو۔

اگر ع = $\sqrt{\text{مہ}}$ تو (۲) میں کی رقمیں لامتناہی ہو جاتی ہیں۔ اس صورت میں مندرجۂ بالا حل درست نہیں رہتا اور (۱) میں دوسری رقم

$$= \text{ل}\frac{۱}{-\text{ع}^{۲}+\text{مہ}}\text{جم}\left[\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}\right] = \text{ل}\underset{\text{جہ}\to۰}{\text{نہا}}\frac{۱}{-\text{ع}^{۲}+\text{مہ}}\text{جم}\left(\sqrt{\text{مہ}}+\text{جہ}\right)\text{ت}$$

$$= \text{ل}\underset{\text{جہ}\to۰}{\text{نہا}}\frac{۱}{\text{مہ}-\left(\sqrt{\text{مہ}}+\text{جہ}\right)^{۲}}\text{جم}\left[\sqrt{\text{مہ}}+\text{جہ}\right]\text{ت}$$

$$= -\text{ل}\frac{۱}{۲\sqrt{\text{مہ}}}\left[\text{کوئی چیز لامتناہی} - \text{ت جب}\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}\right]$$

پس تفرقی مساواتوں کے معمولی نظریہ کی رُو سے حل حسب ذیل ہے

$$\text{لا} = \text{ا}_{۱}\text{جم}\left[\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}+\text{ب}_{۱}\right]+\frac{\text{ل}}{۲\sqrt{\text{مہ}}}\text{ت جب}\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}$$

اگر حسب سابق لا = و اور لاَ = ۰ تو ت = ۰ اس سے ملتا ہے

$$\text{لا} = \text{و جم}\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}+\frac{\text{ل}}{۲\sqrt{\text{مہ}}}\text{ت جب}\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}$$

اور بنائے علیہ $\text{لاَ} = \left(\frac{\text{ل}}{۲\sqrt{\text{مہ}}} - \text{و}\sqrt{\text{مہ}}\right)\text{جب}\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}+\frac{\text{ل}}{۲}\text{ت جم}\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت}$

اس سے ظاہر ہے کہ جب، ت بہت بڑا ہو جائے تو حرکت کی سعت اور رفتار دونوں بہت بڑی ہو جاتی ہیں۔

۱۲۰ ۔ اگر دفعۂ ماقبل کی قسم کی خطی حرکت کی بجائے زاویئی حرکت ہو جیساکہ سادہ رقاص کی صورت میں ہوتا ہے تو حرکت کی مساوات ہوتی ہے

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{طہ}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{طہ} + \text{ل}\ \text{جم}\ \text{ع}\ \text{ت}$$

جس کا حل بھی دفعۂ ماقبل کے حل کے مماثل ہے۔

اس صورت میں اگر ل بمقابلہ $\frac{\text{ج}}{\text{ل}}$ کے بہت بڑا ہو یا اگر ع تقریباً $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ کے برابر ہو جو آزاد ارتعاش کا دور ہے تو طہ کا دوران حرکت میں ہر وقت چھوٹا ہونا ضروری نہیں ۔ اس صورت میں اوپر کی مساواتِ حرکت کی بجائے زیادہ صحیح مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{طہ}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{جب}\ \text{طہ} + \text{ل}\ \text{جم}\ \text{ع}\ \text{ت}$$

لینا چاہیے۔

۱۲۱ ۔ ایک ایسی دوری قوت کی مثال کے لیے جس کا دور آزاد حرکت کے دور کے تقریباً مساوی ہو ایک شخص پر غور کرو جو جھولے میں جھول رہا ہو اور جس کی حرکت میں ہر وقت جب کہ وہ بلند ترین مقام پر پہنچے دھکے کے ذریعہ خفیف معیارِ حرکت کا اضافہ کیا جائے ۔ یہ دھکا اپنی نوعیت کے لحاظ سے ایک ایسی دوری قوت کے معادل ہے جس کا دور آزاد حرکت کے دور کے مساوی ہے ۔ اس قسم کے دھکے کا اثر یہ ہوگا کہ جس زاویہ میں جھولا حرکت کرتا ہے وہ مسلسل طور پر بڑھتا جائیگا۔

اگر دھکے کا دَور جھولے کے دَور کے مساوی نہ ہو تو اس کا اثر کبھی تو حرکت کے موافق ہوکر اِس میں مد ہوگا اور کبھی اِس کے مخالف ہوکر اس میں مزاحم ہوگا۔

اگر اس کا دَور جھولے کے دَور کے بالکل مساوی نہ ہو بلکہ تقریباً مساوی ہو تو بہت سے متواتر دھکوں تک اثر حرکت کے موافق ہوگا اور حرکت میں اضافہ پیدا کریگا، لیکن بعد ازاں بہت سے متواتر دھکوں تک ان کا اثر حرکت کے مخالف ہوگا جو حرکت کو کم کریگا۔ اِس صورت میں پہلے تو حرکت کی سعت میں بہت بڑا اضافہ ہوتا ہے جو بعد ازاں بتدریج کم ہوتے ہوتے ایک خاص حد تک پہنچ جاتا ہے اور بعدہٗ پھر اضافہ شروع ہوجاتا ہے علیٰ ہذا القیاس۔

۱۲۲ - ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے ایک خطِ مستقیم میں قوت م ن۲ × فاصلہ کے زیرِ اثر جس کا مرکز، مذکورہ خطِ مستقیم پر کا ایک ثابت نقطہ ہے حرکت کرتا ہے۔ علاوہ ازیں ذرہ پر دگڑ کی مزاحمت م مہ × (رفتار) اور دَوری قوت م ل جم ع ت عمل کرتی ہیں۔ حرکت معلوم کرو۔

حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ن}^2\,\text{لا} - \text{مہ}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ل جم ع ت}$$

یعنی

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \text{مہ}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ن}^2\,\text{لا} = \text{ل جم ع ت}$$

متمم تفاعل ہے:

$$\text{ا}\,\text{و}^{-\frac{\text{مہ}}{۲}\text{ت}}\ \text{جم}\left[\sqrt{\text{ن}^۲-\frac{\text{مہ}^۲}{۴}}\ \text{ت}+\text{ب}\right]\ \ldots\ldots\ldots\ (۱)$$

جب کہ مہ < ۲ن اور خاص تکملہ،

$$=\frac{۱}{\text{ن}^۲-\text{ع}^۲+\text{مہ ع ف}}\ \text{ل جم ع ت}=\text{ل}\,\frac{(\text{ن}^۲-\text{ع}^۲)\,\text{جم ع ت}+\text{مہ ع جیب ع ت}}{(\text{ن}^۲-\text{ع}^۲)^۲+\text{مہ}^۲\text{ع}^۲}$$

$$=\frac{\text{ل جیب د}}{\text{مہ ع}}\ \text{جم}\,(\text{ع ت}-\text{د})\ \ldots\ldots\ldots\ (۲)$$

جہاں　$\text{مس د}=\dfrac{\text{مہ ع}}{\text{ن}^۲-\text{ع}^۲}$

پس حرکت دو اہتزازی حرکتوں سے مرکب ہے ۔ پہلی حرکت کو آزاد ارتعاش کہتے ہیں اور دوسری کو قسری ارتعاش ۔

خاص صورت ـــــ فرض کرو کہ اضطرابی قوت کا دور $\frac{۲\pi}{\text{ع}}$ آزاد حرکت کے دور $\frac{۲\pi}{\text{ن}}$ کے مساوی ہے

پس قسری ارتعاش کے لیے حل ہے

$$\text{لا}=\frac{\text{ل}}{\text{مہ ن}}\ \text{جیب ن ت}$$

اب اگر مہ بہت چھوٹا ہو جیسا کہ عام طور پر ہوتا ہے تو اس سے جو ارتعاش حاصل ہوتا ہے اُس کی اعظم سعت بہت بڑی ہوتی ہے ۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک چھوٹی دوری قوت کا دور جسم کی آزاد حرکت کے دور کے تقریباً مساوی ہو تو یہ دوری قوت ایسے عظیم الشان نتائج پیدا کر سکتی ہے جو اس کی مقدار کے ساتھ کوئی مناسبت نہیں رکھتے ۔

اس لیے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اِس کی کیا وجہ ہے کہ اگر سپاہیوں کی

ایک جماعت یکسانیت کے ساتھ گامزن ہوتی ہوئی ایک پُل پر سے گزرے تو پل کو نقصان پہنچنے کا خطرہ پیدا ہوجاتا ہے اور جہازات مناسب دَور والی لہروں کے زیرِ اثر نہایت شدت کے ساتھ پہلو کے بل لوٹتے ہیں اور اسی طرح جب چلتی ریل گاڑی میں رفتار ایسی ہو کہ ایک پٹری کے طول کو طے کرنے کی مدت ڈبہ کے نیچے کی کمانیوں کی ارتعاش کی مدت کے تقریباً مساوی ہو تو گاڑی کے ڈبے انتصابی سمت میں معتدبہ حدود تک اہتزاز کرتے ہیں۔

ان کے علاوہ اور زیادہ دقیق نوعیت کے مظہرات کی تشریح بھی اسی اصول کی بنا پر آسانی سے ہوسکتی ہے۔

۱۲۳ – آزاد ارتعاش جو جملہ (۱) سے تعبیر ہوتا ہے اور قسری ارتعاش جو (۲) سے تعبیر ہوتا ہے اِن دونوں میں بہت بڑا فرق ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ ذرّہ ابتداءً مبداء سے ایک محدود فاصلہ پر ساکن تھا۔ اب اختیاری مستقل ا اور ب نہایت آسانی سے معلوم ہوسکتے ہیں جو محدود ہیں۔ (۱) کا جزوِ ضربی $و^{-\frac{مہ}{۲}ت}$ بتدریج کم ہوتا جاتا ہے اور بنائے علیہ جملہ (۱) کی قیمت مسلسل طور پر گھٹتی جاتی ہے اور بالآخر معدوم ہوجاتی ہے پس آزاد ارتعاش بتدریج معدوم ہوتا جاتا ہے۔

جملہ (۲) کی قسری حرکت میں اس قسم کا کم ہونے والا جزوِ ضربی کوئی نہیں ہے لیکن یہ مسلسل طور پر عَود کرنے والا دَوری تفاعل ہے۔ اِس لیے بالآخر صرف یہی حرکت ہی اہمیت رکھتی ہے۔

۱۲۴ – ایک سادہ رقاص کے چھوٹے اہتزازجاذبۂ ارض کے زیرِ عمل، جب کہ مزاحمت = مہ × (رفتار)^۲ اور مہ بہت چھوٹا ہو۔ حرکت کی مساوات ہے

ل طٰ = − ج ط + مہ ل^۲ طٰ^۲ ....(۱)

[اگر رقاص حالتِ سکون سے روانہ ہو اور ابتداءً اس کا زاویہ سمت انتصابی کے ساتھ عہ ہو تو حرکت کی وہی مساوات درست رہتی ہے تاوقتیکہ انتصابی خط کے دوسری جانب پھر سکون میں نہ آجائے۔]

پہلے تقریب تک چھوٹی رقم $\text{مہ ل}\,\dot{\text{طہ}}^2$ کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{طہ} = \text{ا جم}\left[\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\,\text{ت} + \text{ب}\right]$$

دوسرے تقریب تک طہ کی یہ قیمت (۱) کے بائیں جانب کے رکن میں مندرج کرنے سے یہ ہو جاتی ہے:

$$\ddot{\text{طہ}} + \frac{\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{طہ} = \text{مہ ل} \times \frac{\text{ج}}{\text{ل}} \times \text{ا}^2\,\text{جب}^2\left[\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\,\text{ت} + \text{ب}\right]$$

$$= \frac{\text{ا}^2\,\text{مہ ج}}{2}\left[1 - \text{جم}\left(2\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\,\text{ت} + 2\,\text{ب}\right)\right]$$

$$\therefore\ \text{طہ} = \text{ا جم}\left[\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\,\text{ت} + \text{ب}\right] + \frac{\text{ا}^2\,\text{مہ ل}}{2} + \frac{\text{ا}^2\,\text{مہ ل}}{6}\,\text{جم}\left[2\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\,\text{ت} + 2\,\text{ب}\right] \quad \text{......... (2)}$$

جہاں $\text{عہ} = \text{ا جم ب} + \frac{\text{ا}^2\,\text{مہ ل}}{2} + \frac{\text{ا}^2\,\text{مہ ل}}{6}\,\text{جم}\,2\,\text{ب}$

اور $0 = -\text{ا جب ب} - \frac{\text{ا}^2\,\text{مہ ل}}{3}\,\text{جب}\,2\,\text{ب}$

$\therefore$ $\text{ب} = 0$ اور $\text{ا} = \text{عہ} - \frac{2}{3}\,\text{عہ}^2\,\text{مہ ل}$ جب کہ مہ کے مربعوں کو نظر انداز کر دیا جائے۔

اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ط} = \left(\text{عہ} - \tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}\right)\text{جم}\left(\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ل}}}\;\text{ت}\right) + \frac{\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}}{\text{۲}} + \frac{\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}}{\text{۶}}\,\text{جم}\left(\text{۲}\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ل}}}\;\text{ت}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{۳})$$

اور اس لیے

$$\dot{\text{ط}} = -\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ل}}}\left(\text{عہ} - \tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}\right)\text{جب}\left(\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ل}}}\;\text{ت}\right) - \frac{\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}}{\text{۳}}\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ل}}}\;\text{جب}\left(\text{۲}\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ل}}}\;\text{ت}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{۴})$$

∴ $\dot{\text{ط}}$ صفر ہوگا جب کہ جب $\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ل}}}\;\text{ت} = \text{۰}$ یعنی جب کہ $\text{ت} = \pi\sqrt{\tfrac{\text{ل}}{\text{ج}}}$

پس اگر ہم مہ کے مربعوں کو نظر انداز کر دیں تو سکون سے سکون تک کے جھولنے کا دور وہی رہتا ہے

نیز جب، $\text{ت} = \pi\sqrt{\tfrac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ تو

$$\text{ط} = -\left(\text{عہ} - \tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}\right) + \frac{\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}}{\text{۲}} + \frac{\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}}{\text{۶}} = -\left(\text{عہ} - \tfrac{\text{۴}}{\text{۳}}\,\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}\right)$$

پس جھولے کی سعت میں بقدر $\tfrac{\text{۴}}{\text{۳}}\,\text{عہ}^{\text{۲}}\,\text{مہ ل}$ کے کمی واقع ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ رقاص سب سے نچلے نقطہ سے وقت

$\sqrt{\tfrac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left(\tfrac{\pi}{\text{۲}} + \text{ت}\right)$ پر گزر رہا ہے جہاں ت بہت چھوٹا ہے۔

تب (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}\,2\text{ت}\,\frac{\text{ع}^2\text{مہ}\,\text{ل}}{6}-\frac{\text{ع}^2\text{مہ}\,\text{ل}}{2}+(-\text{جب}\,\text{ت})\left(\text{ع}-\tfrac{2}{3}\text{ع}^2\text{مہ}\,\text{ل}\right)=0$$

یعنی $$\text{ت}\left(\text{ع}-\tfrac{2}{3}\text{ع}^2\text{مہ}\,\text{ل}\right)=\frac{\text{ع}^2\text{مہ}\,\text{ل}}{2}-\frac{\text{ع}^2\text{مہ}\,\text{ل}}{6}=\frac{\text{ع}^2\text{مہ}\,\text{ل}}{3}$$

اور $$\therefore\ \text{ت}=\frac{\text{ع}\,\text{مہ}\,\text{ل}}{3}$$

پس سب سے نچلے نقطہ تک آنے کی مدت

$$=\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\text{ع}\,\text{مہ}\,\text{ل}}{3}\right)$$

اور پھر سکون میں آنے تک کی مدّت

$$=\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}-\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\text{ع}\,\text{مہ}\,\text{ل}}{3}\right)=\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\text{ع}\,\text{مہ}\,\text{ل}}{3}\right)$$

مثالیں

۱ - مساوات ذیل کی خطی حرکت پر بحث کرو

$$\text{ا}\,\frac{\text{ذ}^4\text{لا}}{\text{ذت}^4}+\text{ب}\,\frac{\text{ذ}^2\text{لا}}{\text{ذت}^2}+\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}=0$$

اور دکھاؤ کہ اگر مساوات $\text{ا}\,\text{ما}^2+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ج}=0$ کی اصلیں حقیقی اور منفی ہوں تو اس سے جو حرکت تعبیر ہوتی ہے وہ دو موسیقی اہتزازوں سے مرکب ہے۔

۲ - ایک ذرہ کشش $\text{مہ}\,\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ کے ماتحت سعت ا والی سادہ موسیقی حرکت میں

اہتزاز کر رہا ہے، اگر ایک چھوٹی اضطرابی قوت $\frac{\text{لہ لا}^{۳}}{\text{ر}^{۲}}$ اور شامل کر دی جائے (جب کہ سعت وہی رہے) تو ثابت کرو کہ پہلے تقرب تک دَور میں نسبت $۱ - \frac{۳\,\text{لہ}}{۸\,\text{مہ}}$: ۱ سے کمی واقع ہو جاتی ہے۔

۳ - ایک لچکدار رسّی و ا ب پر کے دو ثابت نقطوں ا اور ب کے ساتھ دو کمیتیں م اور مَ بندھی ہیں - سرا و ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھا ہے اور نظام مذکور آزادانہ لٹک رہا ہے - اب اگر اسے ذرا سا انتصاباً ہٹا دیا جائے تو حاصل اہتزاز کے دَور معلوم کرو۔

۴ - ایک ذرّہ ایک لچکدار رسّی کے ایک سرے سے بحالتِ سکون لٹک رہا ہے۔ رسّی کا طول بن کھنچے ا ہے - تعادل کی حالت میں رسّی کا طول ب ہے اور اس محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت $\frac{۲\pi}{\text{ن}}$ ہے، وقت صفر پر جب ذرّہ تعادل میں ہے تو نقطہ تعلیق اس طرح حرکت کرنا شروع کرتا ہے کہ وقت ت پر اس کا نیچے کی طرف ہٹاؤ ج جب ع ت ہوتا ہے، ثابت کرو کہ وقت ت پر رسّی کا طول

$$\text{ب} - \frac{\text{ج ن ع}}{\text{ن}^{۲} - \text{ع}^{۲}}\,\text{جب ن ت} + \frac{\text{ج ع}^{۲}}{\text{ن}^{۲} - \text{ع}^{۲}}\,\text{جب ع ت}$$

اگر ع = ن تو ثابت کرو کہ وقت ت پر رسّی کا طول

$$\text{ب} - \frac{\text{ج}}{۲}\,\text{جب ن ت} - \frac{\text{ن ج ت}}{۲}\,\text{جم ن ت}$$ ہوتا ہے۔

۵ - مرغولی شکل کی ایک کمانی ہے جس کے نچلے سرے کے ساتھ ۲۰ پونڈ کا وزن بندھا ہے - کمانی کا طبعی طول ۱۲ انچ ہے اور وزن سے کھنچ کر یہ $۱۳\frac{۱}{۲}$ انچ ہو جاتی ہے - اب اوپر کے سرے کو انتصاباً سادہ موسیقی حرکت دی گئی ہے جس کی سعت ۲ انچ ہے اور ایک منٹ میں ۱۰۰ مکمل ارتعاش واقع ہوتے ہیں - ہوا کی مزاحمت اور کمانی کے جمود کو نظر انداز کرتے ہوئے لٹکی ہوئی کمیّت کی حرکت پر بحث کرو

جب کہ حرکت یکساں ہوجائے اور ثابت کرو کہ جو حرکت پیدا ہوتی ہے اُس کی سعت تقریباً $\frac{1}{2}$ ۳ انچ ہے۔

۶- اگر ایک رقاص ایک ایسے واسطہ میں حرکت کرے جس کی مزاحمت رفتار کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ اہتزاز ہم مدت ہیں۔

۷- ایک رقاص خلا میں حرکت کر رہا ہے اور اِس کا مکمل اہتزاز ۲ سکنڈ کا ہے اگر ہوا کی وجہ سے زاویئی ابطاء رقاص کی زاویئی رفتار کا ۰۴ء ہو اور ابتدائی سعت ۹° ہو تو بعد کی کسی آن میں سمت انتصابی کے ساتھ رقاص کا میلان معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ۱۰ مکمل اہتزازوں کے بعد سعت گھٹ کر تقریباً ۴۰' ۴° رہ جائیگی۔

[معلوم ہے کہ لوک ۱۰ و = ۳۴۳۴۳ء]

۸- ایک سادہ رقاص کا طول ل ہے اور اِس کے سہارے کا نقطہ کلیہ لا = ا جم م ت کے مطابق افقی حرکت کر رہا ہے۔ ذرہ کی حرکت پر اِس کا اثر معلوم کرو۔ بالخصوص اس صورت پر غور کرو جب کہ م۲ مساوی ہو یا تقریباً مساوی ہو $\frac{ج}{ل}$ کے، موخر الذکر صورت میں اگر رقاص انتصابی محل میں سے وقت صفر پر زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گزر رہا ہو تو ثابت کرو کہ جب تک سہ بہت چھوٹا رہے وقت ت پر سمتِ انتصابی کے ساتھ میلان یہ ہوگا:

$$سہ \sqrt{\frac{ل}{ج}}\left[1+\frac{ا ج}{۲ سہ ل^۲}ت\right] جب \sqrt{\frac{ج}{ل}}ت$$

[اگر وقت ت پر نقطہ تعلیق یا سہارے کا مقام وَ ہو تو اس کا اسراع لاَ ہوگا، اس لیے رقاص کے لنگر ن کے اسراع ہونگے ل طہَ، وَن پر عمود وار سمت میں اور ل طہَ۲، ن و کی سمت میں اور لاَ، وو َ کے متوازی۔

اس لیے وَن پر عمود وار تحلیل سے

$$\text{ل}\,\ddot{\text{طہ}} + \text{لاٗ جم طہ} = -\text{ج جب طہ} = -\text{ج طہ}$$

یعنی $\ddot{\text{طہ}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{طہ} + \frac{\text{ا م}^2}{\text{ل}}\,\text{جم م ت}$ کیونکہ طہ بہت چھوٹا ہے۔

اب دفعہ ۱۱۹ کے مطابق حل کرو]

۹- ایک سادہ رقاص کا وزن و اور طول ل ہے۔ اِس کے سہارے کا مقام ایک بے کمیت کمانی کے ساتھ ملحق ہے جو آگے پیچھے ایک افقی خط میں حرکت کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ ارتعاش کی مدت

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\left(1 + \frac{\text{و}}{\text{وَ}}\right)}$$

جہاں وَ وہ وزن ہے جو کمانی کو طول ل تک کھینچنے کے لیے درکار ہوتا ہے۔

۱۰- دو سادہ رقاص جن کے طول ا ہیں ایک ہی اُفقی سطح پر کے دو نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ ب ہے لٹکائے گئے ہیں، ہر ایک کے گولے کی کمیت م اور باہمی اسراع $\frac{\text{لہ م}^2}{(\text{فاصلہ})^2}$ ہے جہاں لہ بمقابلہ ج کے چھوٹا ہے۔ اگر رقاصوں کو اس طرح حرکت دی جائے کہ وہ ہمیشہ مخالف سمتوں میں حرکت کریں تو ثابت کرو کہ سمت انتصابی کے ساتھ $\frac{\text{لہ م}}{\text{ج ب}^2}$ نیم قطری زاویہ بنانے والے اوسط محل کے گرد، ہر ایک کے اہتزاز کی مدت تقریباً

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}\left(1 + \frac{2\,\text{لہ م ا}}{\text{ب}^3\,\text{ج}}\right)$$ ہوگی۔

۱۱- ایک رقاص کو ایک جہاز کے اندر اس طرح آویزاں کیا گیا ہے کہ وہ جہاز کے طول کے علی القوائم اہتزاز کر سکتا ہے اور اِس کی سعتیں ایک پیمانہ سے جو جہاز پر ثابت ہے پڑھی جا سکتی ہیں، آزاد اہتزاز کا دَور ایک سکنڈ ہے اور سہارے کا مقام جہاز کے مرکزِ ثقل سے ۱۰ فٹ اوپر ہے۔ ثابت کرو کہ جب جہاز سمت انتصابی کے گرد چھوٹے زاویہ میں سے ۸ سکنڈ کے دَور سے طرفی اہتزاز کر رہا ہو تو رقاص کی ظاہری زاویئی حرکت جہاز کی زاویئی حرکت سے تقریباً ۲۰ فی صدی زیادہ ہوگی۔

۱۲۔ ایک سادہ رقّاص کا طول ل ہے اور اس کے سہارے کا مقام یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ نصف قطر ﺭ کے ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے۔ جب حرکت یکساں ہوجائے ثابت کرو کہ سمت انتصابی کے ساتھ رقّاص کے تاگے کا مَیلان عہ مساوات ذیل سے معلوم ہوگا

$$سہ^۲ (ﺭ + ل\ جب\ عہ) - ج\ مس\ عہ = ۰$$

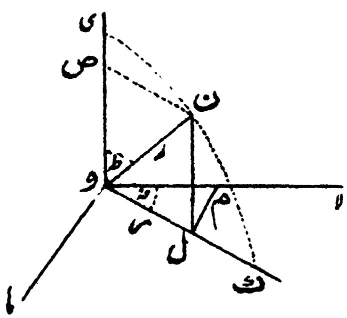
۱۳۔ ایک لچکدار رسّی کے ایک سرے کے ساتھ وزن بندھا ہے اور دوسرا سرا ثابت ہے۔ تعادل کے محل میں رسّی کا طول ل، طبعی طول کا $\frac{۲}{۳}$ ہے۔ اگر ذرّہ کو مقامِ تعادل سے ذرا سا ہٹا کر چھوڑ دیا جائے تو اِس کی حرکت کا راستہ معلوم کرو اور اِس کی حرکت جن ترکیبی اہتزازوں سے مرکب ہے انہیں دریافت کرو۔

نواں باب

تین ابعاد میں حرکت

۱۲۵ - ذرہ کے اسراع قطبی محددوں کی رقوم میں۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ ن کے محدد ر، ط، فہ ہیں جہاں ر فاصلہ ہے ن کا ایک ثابت نقطہ و سے، ط وہ زاویہ ہے جو و ن ایک ثابت محور و ی کے ساتھ بناتا ہے اور فہ وہ زاویہ ہے جو سطح مستوی ی و ن اور ایک ثابت سطح مستوی ی و لا کے درمیان بنتا ہے۔



ن ل عمود کھینچو سطح مستوی لا و ما پر اور فرض کرکہ و ل = س
تب ن کے اسراع

$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2}$ ہیں جہاں لا، ما، ی محدد ہیں ن کے۔

چونکہ ل کے قطبی محدد جو کہ ہمیشہ سطح مستوی لا و ما میں رہتا ہے س اور فہ ہیں، اس لیے اس کے اسراع بموجب دفعہ ۹۴ حسب ذیل ہیں۔

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$ و ل کی سمت میں

اور $$\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)$$ و ل پر علی القوائم

نیز ن کا اسراع بلحاظ ل کے ہے $\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}$، ل ن کی سمت میں

پس ن کے اسراع ہیں:

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$ ص ن کی سمت میں

$$\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)$$ سطح ی ن ک پر عمود وار

اور $$\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}$$ و ی کے متوازی

اب چونکہ ی = ر جم طہ اور ر = ر جب طہ اس لیے دفعہ ۵۰ کے مطابق اسراع $\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}$ محور و ی کی سمت میں اور $\frac{\text{فر}^2\,\text{ر}}{\text{فرت}^2}$ محور و ی پر عمود وار سطح مستوی ی ن ک میں دونوں معادل ہیں اِن اسراعوں کے $\frac{\text{فر}^2\,\text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2$ خط و ن کی سمت میں اور $\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)$ خط و ن پر عمود وار سطح مستوی ی ن ک میں۔

نیز اسراع $-\text{ر}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$، ص ن کی سمت میں معادل ہے $-\text{ر}$ جب طہ $\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$ خط و ن کی سمت میں اور $-\text{ر}$ جم طہ $\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$ خط و ن پر علی القوائم۔

اس لیے اگر ن کے اسراع (۱) و ن کی سمت میں (۲) و ن پر علی القوائم سطح ی ن ک میں زاویہ طہ کے بڑھنے کی سمت میں اور (۳) سطح مستوی ی ن ک پر علی القوائم ← فہ کی بڑھنے والی سمت میں بالترتیب عہ، بہ، جہ ہوں تو

$$\text{عہ} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 - \text{ر جب طہ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$

$$= \frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 - \text{ر جب}^2\text{طہ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{بہ} = \frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right) - \text{ر جم طہ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$

$$= \frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right) - \text{ر جب طہ جم طہ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2 \quad \ldots (۲)$$

$$\text{جہ} = \frac{۱}{\text{سر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{سر}^2\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right) = \frac{۱}{\text{ر جب طہ}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\text{ جب}^2\text{طہ}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots (۳)$$

۱۲۶ ۔ اُستوانی محدد ۔ بعض اوقات ن کی حرکت کو بلحاظ محددوں ی، سر، فہ کے جن کو اُستوانی محدد کہتے ہیں بیان کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔

تب دفعۂ ماقبل کے مطابق اسراع حسب ذیل ہیں:

$$\frac{\text{فر}^2\text{سر}}{\text{فرت}^2} - \text{سر}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$ ص ن کی سمت میں

$$\frac{۱}{\text{سر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{سر}^2\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)$$ سطح مستوی ی ن ک پر عمود وار

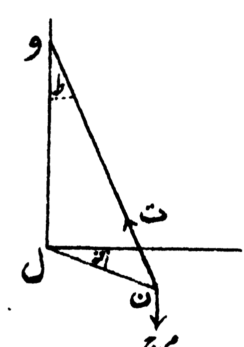
اور $\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}$ و ی کے متوازی

۱۲۷ - ایک ذرّہ رسّی کے ایک سرے کے ساتھ بندھا ہے، رسّی کا طول ل ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک ثابت نقطہ و کے ساتھ بندھا ہے ۔ رسّی خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے اور ذرّہ کو رسّی پر عمود وار و رفتار سے افقاً پھینکا گیا ہے۔ محصلہ حرکت معلوم کرو۔

اسراعوں کے لیے اوپر جو جملے (۱)، (۲)، (۳) مندرج ہیں اُن میں ر = ل رکھنا چاہیے۔

پس حرکت کی مساواتیں یہ ہیں:

$$-\text{ل}\,\dot{\text{ط}}^2 - \text{ل}\,\text{جب}^2\text{ط}\,\dot{\text{فہ}}^2 = -\frac{\text{ت}}{\text{م}} + \text{ج}\,\text{جم}\,\text{ط} \quad \ldots(۱)$$



$$\text{ل}\,\ddot{\text{ط}} - \text{ل}\,\text{جم}\,\text{ط}\,\text{جب}\,\text{ط}\,\dot{\text{فہ}}^2 = -\text{ج}\,\text{جب}\,\text{ط} \quad \ldots(۲)$$

اور $$\frac{1}{\text{جب}\,\text{ط}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{جب}^2\text{ط}\,\dot{\text{فہ}}\right) = 0 \quad \ldots\ldots(۳)$$

آخری مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب}^2\text{ط}\,\dot{\text{فہ}} = \text{مستقل} = \text{جب}^2\text{ع}\,[\dot{\text{فہ}}]$$

$$= \frac{\text{و}\,\text{جب}\,\text{ع}}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(۴)$$

(۲) میں فہ کی قیمت مندرج کرنے سے

$$\ddot{\text{ط}} - \frac{\text{و}^2\,\text{جب}^2\text{ع}}{\text{ل}^2}\times\frac{\text{جم ط}}{\text{جب}^3\text{ط}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{جب ط} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\therefore\ \dot{\text{ط}}^2 + \frac{\text{و}^2\,\text{جب}^2\text{ع}}{\text{ل}^2}\times\frac{1}{\text{جب}^2\text{ط}} = \frac{2\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{جم ط} + \text{ا}$$

جہاں

$$0 + \frac{\text{و}^2\,\text{جب}^2\text{ع}}{\text{ل}^2}\times\frac{1}{\text{جب}^2\text{ع}} = \frac{2\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{جم ع} + \text{ا}$$

$$\therefore\ \dot{\text{ط}}^2 = \frac{\text{و}^2\,\text{جب}^2\text{ع}}{\text{ل}^2}\left[\frac{1}{\text{جب}^2\text{ع}} - \frac{1}{\text{جب}^2\text{ط}}\right] - \frac{2\text{ج}}{\text{ل}}\left(\text{جم ع} - \text{جم ط}\right) \quad \ldots\ldots (6)$$

$$= \frac{2\text{ج}}{\text{ل}}\left(\text{جم ع} - \text{جم ط}\right)\left(2\text{ن}^2\,\frac{\text{جم ع} + \text{جم ط}}{\text{جب}^2\text{ط}} - 1\right)$$

جہاں $\text{و}^2 = 4\,\text{ل ج ن}^2$

پس $\dot{\text{ط}}$ پھر صفر ہوگا جب کہ

$$2\text{ن}^2\left(\text{جم ع} + \text{جم ط}\right) = \text{جب}^2\text{ط}$$

یعنی جب کہ $\text{جم ط} = -\text{ن}^2 \pm \sqrt{1 - 2\text{ن}^2\,\text{جم ع} + \text{ن}^4}$

نیچے کی علامت سے ط کی قیمت ناقابلِ قبول ہے۔ پس وہ میلان جس پر $\dot{\text{ط}}$ صفر ہوتا ہے $\text{ط} = \text{ط}_1$ ہے جہاں

$$\text{جم ط}_1 = -\text{ن}^2 + \sqrt{1 - 2\text{ن}^2\,\text{جم ع} + \text{ن}^4}$$

پس حرکت ط کی قیمتوں ع اور ط_1 کے اندر رہتی ہے۔

ذرہ کی حرکت مقامِ روانگی سے ہمیشہ اوپر یا ہمیشہ نیچے رہتی ہے اگر

بالترتیب طہ $\lesseqgtr$ عہ

یعنی اگر یا بالترتیب جم طہ $\gtreqless$ جم عہ

یعنی ″ ″ $\sqrt{\text{۱ - ۲ ن}^2 \text{ جم عہ + ن}^4}$ $\gtreqless$ ن^2 + جم عہ

″ ″ ″ ۱ - ۲ ن^2 جم عہ $\lesseqgtr$ جم^2 عہ + ۲ ن^2 جم عہ

″ ″ ″ ن^2 $\lesseqgtr$ $\dfrac{\text{جب}^2\text{عہ}}{\text{۴ جم عہ}}$

″ ″ ″ و^2 $\lesseqgtr$ ل ج جب عہ مس عہ

اب کسی آن میں تناؤ مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے ۔ جو کچھ اوپر مذکور ہوا اس میں یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ دورانِ حرکت میں ت معدوم نہیں ہوتا

کسی آن میں رفتار کا مربع

= (ل طہ̇)^2 + (ل جب طہ فہ̇)^2 = ل^2 (طہ̇^{2} + فہ̇^{2} جب^2 طہ)

پس توانائی کے اصول سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{2}$ م ل^2 (طہ̇^{2} + فہ̇^{2} جب^2 طہ) = $\frac{1}{2}$ م و^2 - م ج ل (جم عہ - جم طہ)

[فہ̇ کی قیمت (۴) سے مندرج کرنے سے ہمیں مساوات (۶) مل جاتی ہے]

تب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$\dfrac{\text{ت}}{\text{م}}$ = ج جم طہ + $\dfrac{\text{(رفتار)}^2}{\text{ل}}$ = ج جم طہ + $\dfrac{\text{و}^2 \text{ - ۲ ج ل (جم عہ - جم طہ)}}{\text{ل}}$

= $\dfrac{\text{و}^2}{\text{ل}}$ + ج (۳ جم طہ - ۲ جم عہ)

۱۲۸ ۔ دفعہ ماقبل میں ظَہ صفر ہوگا جب کہ طہ = عہ یعنی ذرّہ مرکز و کے نیچے مستقل گہرائی پر گھومتا ہے جیسا کہ مخروطی رقاص کی صورت میں اگر

$$\text{و}^2 = \text{ج ل} \frac{\text{جب}^2\,\text{عہ}}{\text{جم عہ}}$$

فرض کرو کہ ذرّہ کو اس رفتار سے پھینکا گیا ہے اور جب یہ یکساں طور پر گھوم رہا ہو تو اسے سطح مستوی ل و ن میں ایک چھوٹا ہٹاؤ اس طرح دیا جاتا ہے کہ فَہ کی قیمت میں دفعتہً کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا طہ = عہ + سا رکھنے سے جہاں سا بہت چھوٹا ہے دفعۂ ماقبل کی مساوات (۵) ہوجاتی ہے

$$\ddot{\text{سا}} = \frac{\text{ج جب}^4\text{عہ جم (عہ + سا)}}{\text{ل جم عہ جب}^3\text{(عہ + سا)}} - \frac{\text{ج}}{\text{ل}}\text{جب (عہ + سا)}$$

$$= \frac{\text{ج جب عہ}}{\text{ل}}\left[\frac{\text{۱ ـ سا مس عہ}}{\text{(۱ + سا مم عہ)}^3} - \text{(۱ + سا مم عہ)}\right]$$

جب کہ سا کے مربعوں کو نظر انداز کر دیا جائے

$$= -\frac{\text{ج جب عہ}}{\text{ل}}\,\text{سا (مس عہ + ۴ مم عہ)} = -\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\,\frac{\text{۱ + ۳ جم}^2\text{عہ}}{\text{جم عہ}}\,\text{سا}$$

پس اضافی تعادل کے محل کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}} \times \frac{\text{جم عہ}}{\text{۱ + ۳ جم}^2\text{عہ}}}$$ ہے۔

نیز (۴) سے طہ = عہ + سا رکھنے سے

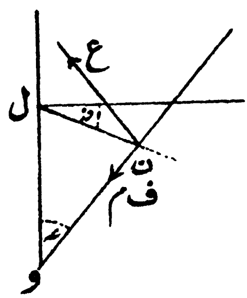
$$\dot{\text{فہ}} = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل جم عہ}}}\,\frac{1}{\text{(۱ + سا مم عہ)}^2} = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل جم عہ}}}\left[\text{۱ ـ ۲ سا مم عہ}\right]$$

پس دورانِ اہتزاز میں فہ کی قیمت میں خفیف تغیر واقع ہوتا ہے جس کا دَور سا کے دَور کے مساوی ہے۔

۱۲۹ - ایک ذرہ ایک چکنے مخروط کی اندرونی سطح پر حرکت کرتا ھے، مخروط کا زاویۂ راس ۲ع ھے ذرہ پر مخروط کے راس کی طرف قوت عمل کرتی ھے اور اُس کی حرکت کی سمت مکونوں کو ھمیشہ ایک مستقل زاویہ ب پر قطع کرتی ھے، حرکت اور قوت کا قانون معلوم کرو۔

فرض کرو کہ قوت ف × م ہے جہاں م ذرہ کی کمیت ہے اور ع مخروط کا تعامل ہے۔ تب دفعہ ۱۲۵ کے اسراعوں میں

$$\text{ط} = \text{ع} \quad \therefore \quad \dot{\text{ط}} = 0$$



پس حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر جب}^2\text{ع} \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2 = -\text{ف} \quad \ldots\ldots(1)$$

$$-\text{ر جب ع جم ع} \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2 = -\frac{\text{ع}}{\text{م}} \quad \ldots\ldots(2)$$

اور
$$\frac{\text{جب ع}}{\text{ر}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2 \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right) = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

نیز چونکہ حرکت کی سمت ہمیشہ ون کو مستقل زاویہ ب پر کاٹتی ہے،

$$\therefore \quad \frac{\text{ر جب ع}\,\dot{\text{فہ}}}{\dot{\text{ر}}} = \text{مس ب} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

(۳) سے ملتا ہے
$$\text{ر}^2 \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}} = \text{مستقل} = \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

اور اس لیے (۴) سے

$$\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} = \text{جب ع مم ب} \times \frac{\text{ا}}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

(۱) میں مندرج کرنے سے

$$-\text{ف} = \text{جب}^{2}\text{ع}\ \text{مم}^{2}\text{ب} \times \frac{\text{ا}^{2}}{\text{ر}^{3}} - \text{جب}^{2}\text{ع} \times \frac{\text{ا}^{2}}{\text{ر}^{3}}$$

یعنی

$$\text{ف} = \frac{\text{ا}^{2}\ \text{جب}^{2}\text{ع}}{\text{جب}^{2}\text{ب}} \times \frac{1}{\text{ر}^{3}} = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{3}} \qquad \ldots\ldots (۷)$$

نیز

$$\text{و}^{2} = \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right)^{2} + \text{ر}^{2}\ \text{جب}^{2}\text{ع} \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \frac{\text{ا}^{2}\ \text{جب}^{2}\text{ع}}{\text{ر}^{2}\ \text{جب}^{2}\text{ب}}$$

پس

$$\text{و} = \frac{\sqrt{\text{مہ}}}{\text{ر}}$$

نیز (۲) سے

$$\frac{\text{ع}}{\text{م}} = \frac{\text{ا}^{2}\ \text{جب ع جم ع}}{\text{ر}^{3}} = \text{ف} \frac{\text{جب}^{2}\text{ب جم ع}}{\text{جب ع}}$$

(۴) سے راستہ کی مساوات ہے $\text{ر} = \text{ب}\ \text{و}^{\text{جب ع مم ب فہ}}$

مثالیں

۱ - ایک وزنی ذرّہ ایک چکنے کرہ میں حرکت کرتا ہے - ثابت کرو کہ اگر رفتار مرکز کی ہمواری پر سے گرنے کی رفتار کے مساوی ہو تو سطح کا تعامل مرکز کے نیچے ذرّہ کی گہرائی کے متناسب ہوگا -

۲ - ایک ذرّہ ایک چکنے نصف کرہ کی اندرونی سطح پر افقاً پھینکا گیا ہے نصف کرہ کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف پھینکنے کا نقطہ سب سے نچلے نقطہ سے زاویئی فاصلہ ب پر واقع ہے ثابت کرو کہ اگر ذرہ نصف کرہ کے عین کنارہ تک پہنچے تو ابتدائی رفتار $\sqrt{\text{۲ا ج قط ب}}$ ہوگی -

۳ - ایک چکنے کروی خول کا نصف قطر $\frac{\text{ل}}{\text{۲۴}}$ ہے اور اس کے مرکز کے نیچے گہرائی

$\frac{2\,\text{ا}}{3}$ کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ کو رفتار $\sqrt{\frac{7\,\text{اج}}{3}}$ کے ساتھ اس کی اندرونی سطح کے ساتھ افقاً پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ مرکز کے اوپر بلندی $\frac{\text{ا}}{3}$ تک صعود کریگا اور کرہ پر دباؤ راستہ کے بلند ترین نقطہ پر عین صفر ہوگا۔

۴- ایک ذرہ ایک چکنے کرہ پر حرکت کرتا ہے، اس پر عمل کرنے والی قوت سوائے سطح کے دباؤ کے اور کوئی نہیں ثابت کرو کہ اس کا راستہ ہے مم طہ = مم بہ جم فہ جہاں طہ اور فہ اس کے زاویئی محدد ہیں۔

۵- نصف قطر ا کا ایک کرہ ہے اور اس کے ایک اُفقی قطر کے سرے سے اس کی اندرونی سطح پر ایک وزنی ذرہ استوا کے ساتھ زاویہ بہ بنانے والی سمت میں رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ اگر ذرہ سطح سے کبھی علیحدہ نہ ہو تو ثابت کرو

$$3\,\text{جب}^2\,\text{بہ} > 2 + \left(\frac{\text{و}^2}{3\,\text{ج}\,\text{ا}}\right)^2$$

۶- ایک ذرہ کی حرکت ایک چکنے کروی خول کی سطح پر مقید ہے اسے مرکز کی ہمواری پر کے ایک نقطہ سے اس طرح اُفقاً پھینکا گیا ہے کہ مرکز کے لحاظ سے اس کی زاویئی رفتار سہ ہے اگر بمقابلہ ج کے سہ² ا بہت بڑا ہو تو ثابت کرو کہ مرکز کی ہمواری کے نیچے اِس کی گہرائی ی وقت ت پر تقریباً

$$\frac{2\,\text{ج}}{\text{سہ}^2}\,\text{جب}^2\,\frac{\text{سہ}\,\text{ت}}{2}$$ ہوگی۔

۷- ایک پتلی سیدھی مجوف چکنی نلی ہمیشہ اوپر کی طرف کھچے ہوئے خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے اور انتصابی محور کے گرد جو اسے قطع کرتا ہے یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھومتی ہے۔ نلی کے ساکن نقطہ سے ایک ذرہ کو رفتار $\frac{\text{ج}}{\text{سہ}}\,\text{مم}\,\text{عہ}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وقت ت میں یہ فاصلہ $\frac{\text{ج}\,\text{جم}\,\text{عہ}}{\text{سہ}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}\left[1 - \text{و}^{-\text{سہ}\,\text{جب}\,\text{عہ}\,\text{ت}}\right]$ طے کرتا ہے۔ نیز نلی کا تعامل معلوم کرو۔

۸- ایک چکنے مجوف قائم مستدیر مخروط کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے۔ اس کی اندرونی سطح پر راس کے اوپر

بلندی ھ پر کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ کو افقاً سطح پر رفتار $\sqrt{\frac{۲ ج ھ}{ن^{۲} + ن}}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ذرہ کے راستہ پر کا سب سے نچلا نقطہ راس کے اوپر بلندی $\frac{ھ}{ن}$ پر واقع ہوگا ۔

۹ ۔ زاویہ ۲ عہ کے ایک چکنے مستدیر مخروط کا محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے ۔ راس پر نیچے کی طرف ایک چھوٹا سوراخ ہے ۔ ایک کمیت ھ راس کے سوراخ میں سے گزرنے والی ایک رسی کے ذریعہ بحالتِ سکون لٹک رہی ہے اور کمیت م جو اوپر کے سرے کے ساتھ بندھی ہے مخروط کی اندرونی سطح پر ایک افقی دائرہ مرتسم کرتی ہے ۔ کل گردش کا دَور ت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یکساں حرکت کے محل کے گرد چھوٹے اہتزازوں کا دَور ت قم عہ $\sqrt{\frac{ھ + م}{۳ م}}$ ہے ۔

۱۰ ۔ ایک چکنی مخروطی سطح اس طرح ثابت ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف ہے ۔ ایک ذرہ اس کے مقعر رُخ پر یکسانیت کے ساتھ افقی دائرہ مرتسم کر رہا ہے اور اس مقام سے ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ یکساں حرکت کے محل کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور $۲\pi \sqrt{\frac{ل}{۳ ج جم عہ}}$ ہے جہاں عہ مخروط کا نصف راسی زاویہ ہے اور ل مخروط کے مکون کا طول ہے یکساں حرکت کے دائرہ تک۔

۱۱ ۔ تین کمیتوں $م_{۱}$، $م_{۲}$، $م_{۳}$ کو ایک رسی کے ساتھ باندھا گیا ہے جو ایک حلقہ میں سے گزرتی ہے ۔ $م_{۱}$ مخروطی رقاص کی طرح ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے $م_{۲}$ اور $م_{۳}$ انتصاباً لٹک رہے ہیں ۔ اگر $م_{۳}$ گر جائے تو ثابت کرو کہ تناؤ میں فوری تبدیلی $\frac{ج م_{۱} م_{۳}}{م_{۱} + م_{۲}}$ واقع ہوگی ۔

۱۲ ۔ ایک ذرہ ایک کرہ پر **Rhumb-line*** اس طرح مرتسم کرتا

*۔ مساوی میلان کا خط (لکھتی)

ہے کہ اِس کا طول بلد یکساں طور پر بڑھتا ہے۔ ثابت کرو کہ حاصل اسراع ایسے بدلتا ہے جیسے عرض بلد کا جیب التمام اور اِس کی سمت ، عماد کے ساتھ عرض بلد کے مساوی زاویہ بناتی ہے۔

[Rhumb-line سے مراد کرہ پر کا وہ منحنی ہے جو سب نصف النہاروں کو مستقل زاویہ عہ پر قطع کرتا ہے اس کی مساوات ہوتی ہے

$$\text{مس عہ} = \frac{\text{فَ جب طہ}}{\text{طَہ}} \quad]$$

۱۳ - ایک ذرہ ایک چکنے قائم مستدیر مخروط پر ایک ایسی قوت کے زیر عمل حرکت کرتا ہے جو ہمیشہ مخروط کے محور پر علی القوایم سمت میں عمل کرتی ہے - اگر ذرہ کا راستہ مخروط کے مکونوں کو مستقل زاویہ عہ پر قطع کرے تو قوت کا قانون اور ابتدائی رفتار معلوم کرو - نیز دکھاؤ کہ کسی آن میں مخروط کا تعامل قوتِ عاملہ کے متناسب ہوتا ہے۔

۱۴ - ایک ذرہ یکساں رفتار سے ایک مخروط پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کی حرکت کی سمت، مخروط کے محور پر عمود وار سطح مستوی کے ساتھ ہمیشہ مستقل زاویہ بناتی ہے - ثابت کرو کہ حاصل اسراع مخروط کے محور پر عمود وار ہے اور محور سے نقطہ کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے۔

۱۵ - ایک چکنے مخروط کا محور انتصابی ہے اور رأس نیچے کی طرف ، رأس پر قوتِ اندفاعی $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^{3}}$ کا مرکز ہے - ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ محور سے ج ہے مخروط کے اندر کی سطح کے ساتھ ایک بے وزن ذرہ کو افق کے متوازی رفتار $\sqrt{\frac{\text{۲ مہ جب}^{2}\text{ عہ}}{\text{ج}^{3}}}$ سے پھینکا گیا ہے - ثابت کرو کہ یہ مخروط پر ایک ایسا منحنی مرتسم کریگا جس کا ظل افقی سطح مستوی پر منحنی $\text{ا} - \frac{\text{ج}}{\text{ر}} = \text{۲ مسنر}^{2}\left(\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}\text{ جب عہ}\right)$ ہوگا - جہاں ۲ عہ مخروط کا رأسی زاویہ ہے۔

۱۶ - ایک مخروطی رقاص اس کے سہارے کے مقام کو انتصاباً خفیف

موسیقی طور پر اہتزاز کرنے سے رقاص کی قائم حرکت میں اضطراب پیدا کیا جاتا ہے۔ رقاص کی حرکت پر بحث کرو ۔ کیا اس قسم کے اضطراب سے حرکت غیر قائم بن سکتی ہے ؟

۱۷ ۔ نصف قطر لہ کے ایک چکنے کرہ کے اندر ایک ذرہ حرکت کرتا ہے ۔ قوت عاملہ ایک معلومہ قطر پر عمود وار اور قطر مذکور سے پرے عمل کرتی ہے اور مہ $\frac{\text{جب طہ}}{\text{جم}^3\ \text{طہ}}$ کے مساوی ہے جب کہ ذرّہ قطر سے فاصلہ طہ پر واقع ہو ۔ اگر اس وقت جب کہ ذرّہ کا زاویئی فاصلہ جہ ہو تو اسے قطرِ معلومہ اور آن زیرِ بحث میں اس کے مقام دونوں میں سے گزرنے والی سطح مستوی پر عمود وار رفتار $\sqrt{\text{ہ مہ لہ}}$ قطرجہ کے ساتھ پھینکا گیا ہو تو ثابت کرو کہ اس کا راستہ کرہ کا ایک چھوٹا دائرہ ہے ۔ نیز کرہ کا تعامل معلوم کرو۔

۱۸ ۔ ایک ذرّہ ایک چکنے کرہ کی سطح پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ خطِ حرکت کرہ کے سب نصف النہاروں کے ساتھ مساوی زاویہ بناتا ہے ۔ قوتِ عاملہ حرکت کے منحنی کے محور کے متوازی عمل کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ قوتِ عاملہ محور سے فاصلہ کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب اور محور پر عمود وار مرکزی سطح مستوی سے فاصلہ کے بالراست تناسب ہے ۔

۱۹ ۔ ایک ذرّہ ایک چکنے کرہ کی سطح پر حرکت کرتا ہے ۔ قوتِ عاملہ ذرّہ سے ایک قطر پر عمود وار سمت میں عمل کرتی ہے اور $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^3}$ کے مساوی ہے ۔ ثابت کرو ذرّہ کو اس طرح پھینکا جاسکتا ہے کہ اس کا راستہ طول بلدوں کو مستقل زاویہ پر قطع کرے ۔

۲۰ ۔ نصف قطر ا کا ایک چکنا کرہ ہے، اس کی اندرونی سطح پر ایک ذرہ ایک ایسی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو مہ ع$^{\text{ن}}$ کے مساوی ہے جہاں ع فاصلہ ہے نقطۂ مذکور کا ایک ثابت محور سے ۔ ذرہ کو اس بڑے دائرہ پر جو قطر پر عمود ہے رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے اور اس کے راستہ سے اسے ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ نیا راستہ ایک گردش میں پرانے راستہ کو م بار قطع کریگا

جہاں $\text{م}^2 = 4\left[1 - \dfrac{\text{مہ و}^{\text{ن}+1}}{\text{و}^2}\right]$

۲۱ - ایک ذرّہ ایک چکنے مخروط پر ایک ایسی قوت کے زیرِ عمل جو راُس کی طرف عمل کرتی ہے اور فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے حرکت کرتا ہے - اگر مخروط کو کھول کر سطح مستوی بنا دیا جائے تو ثابت کرو کہ راستہ مخروطی تراش بن جاتا ہے -

۲۲ - ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے ایک گردشی مخروط کی اندرونی سطح پر جس کا راُسی زاویہ ۲ عہ ہے محور سے باہر کی طرف عمل کرنے والی اندفاعی قوت $\dfrac{\text{م مہ}}{(\text{فاصلہ})^3}$ کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے محور کے گرد ذرّہ کا زاویئی معیارِ اثر م $\sqrt{\text{مہ}}$ مس عہ ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کا راستہ قطع زائد کی ایک قوس ہے جس کا خروج المرکز قطا عہ ہے

[دفعہ ۱۲۹ کی ترقیم کے مطابق ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\dot{\text{ف}}^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{جم}^2\text{عہ جب}^2\text{عہ}} \cdot \frac{1}{\text{ر}^4}$$

اور $$\ddot{\text{ر}} = \frac{\text{مہ}}{\text{جم}^2\text{عہ جب}^2\text{عہ}} \times \frac{1}{\text{ر}^3}$$ جس سے نکلتا ہے

$$\dot{\text{ر}}^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{جم}^2\text{عہ جب}^2\text{عہ}}\left(\frac{1}{\text{د}^2} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right)$$ جہاں د کوئی مستقل ہے -

اس لیے $\left(\dfrac{\text{فرر}}{\text{فرف}}\right)^2 = \text{ر}^2 \times \dfrac{\text{ر}^2 - \text{د}^2}{\text{د}^2}$، اس لیے $\text{ف} = \text{جہ} - \text{جب}^{-1}\dfrac{\text{د}}{\text{ر}}$

$\therefore \dfrac{\text{د}}{\text{ر}} = \text{جب}(\text{جہ} - \text{ف}) = \text{جم ف}$ اگر ف کی ابتدائی سطح مستوی کو مناسب طور پر منتخب کیا جائے - یہ مستوی لا = د جب عہ ہوگا جو مخروط کے محور کے متوازی ہے - پس طریق، اُس مخروط کی ایک زائدی تراش ہے جس کے راُس میں سے گزرنے والی متوازی تراش دو خطوطِ مستقیم پر مشتمل ہے جن کا درمیانی زاویہ ۲ عہ ہے اس لیے وغیرہ وغیرہ]

۲۳ - اگر ایک ذرّہ ایک قائم مستدیر مخروط کی اندرونی سطح پر ایسی اندفاعی قوت کے

زیرِ عمل حرکت کرے جس کا مرکز راس ہو اور جس کا قانون م مہ $\left[\frac{\text{ا جم}^2\text{ عہ}}{\text{ر}^3} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right]$ ہو جہاں ۲ عہ مخروط کا راسی زاویہ ہے اور اگر اسے ایک اوج سے جو فاصلہ ا پر واقع ہے رفتار $\frac{\sqrt{\text{مہ}}}{\text{ا}}$ جب عہ کے ساتھ پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ راستہ مکافی ہوگا۔

[اس میں یہ ثابت کیا جائے کہ حرکت کی سطح مستوی مخروط کے ملون کے متوازی ہے]۔

۲۴ - ایک ذرّہ زاویہ ۲ عہ والی چکنی مخروطی سطح پر حرکت کرنے کے لیے مقید ہے اور راس کی طرف عمل کرنے والی قوت کے زیرِ عمل مستوی منحنی مرتسم کرتا ہے جو مخروط کے محور کو راس سے فاصلہ ا پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تجاذبی قوت $\frac{1}{\text{ر}^2} - \frac{\text{ا جم عہ}}{\text{ر}^3}$ کے متناسب ہے۔

۲۵ - ایک ذرّہ ایک کھردرے مستدیر اسطوانہ پر حرکت کرتا ہے اور اس پر کوئی بیرونی قوت عمل نہیں کرتی - ابتداءً ذرّہ کی رفتار و ہے اور حرکت کی سمت اسطوانہ کی عرضی سطح مستوی کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے - ثابت کرو کہ وقت ت میں جو فاصلہ طے ہوتا ہے وہ $\frac{\text{ا قط}^2\text{ عہ}}{\text{مہ}}$ لوک $\left[1 + \frac{\text{مہ و جم}^2\text{ عہ}}{\text{ا}}\text{ ت}\right]$ ہے۔

[دفعہ ۱۲۶ کی مساواتوں کو استعمال کرو]

۱۳۰ - ایک ذرّہ تین ابعاد میں ایک منحنی پر حرکت کرتا ہے، اس کے اسراع (۱) منحنی کے مماس کی سمت میں (۲) صدر عماد کی سمت میں اور (۳) دوگونہ عماد کی سمت میں معلوم کرو۔

اگر وقت ت پر ذرّہ کے محدد (لا، ما، ی) ہوں تو محوروں کے متوازی ذرہ کے اسراع لاً، ماً اور یً ہونگے۔

اب
$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}=\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\times\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}=\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}+\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}\ \cdots\cdots\cdots\ \text{(۱)}$$

اسی طرح
$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}=\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}+\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}\ \cdots\cdots\cdots\ \text{(۲)}$$

اور
$$\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2}=\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}+\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}\ \cdots\cdots\cdots\ \text{(۳)}$$

ماس کی سمتی جیوب التمام ہیں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$ اور $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$

پس ماس کی سمت میں اسراع

$$=\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}+\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}+\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2}$$

$$=\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}\left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right)^2+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right)^2+\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\right)^2\right]+\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2\left[\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}+\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}+\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}\right]$$

$$=\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{(۴)}$$

کیونکہ
$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right)^2+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right)^2+\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\right)^2=1$$

اور اس لئے
$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}+\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}+\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}=0$$

صدر عماد کی سمتی جیوب التمام میں $\text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}$ ، $\text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}$ اور $\text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}$

جہاں ر انحنا کا نصف قطر ہے۔

اس لیے اس کی سمت میں اسراع

$$=\text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}+\text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}+\text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2}$$

$$=\text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}\left[\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}+\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}+\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}\right]$$

$$+\text{ر}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2\left[\left(\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}\right)^2+\left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}\right)^2+\left(\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}\right)^2\right]$$

$$=\text{ر}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2\times\frac{1}{\text{ر}^2}=\frac{1}{\text{ر}}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

دوگونہ عماد کی سمتی جیوب التمام متناسب ہیں

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}-\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}\,،\quad \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}-\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}$$

اور
$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}-\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}$$

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) کو بالترتیب اِن سے ضرب دے کر

جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل جمع صفر آتا ہے، یعنی دوگونہ عماد کی سمت میں اسراع صفر ہے۔

یہ نتائج براہ راست مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) پر غور کرنے سے ازخود ظاہر و بیّن ہیں کیونکہ اگر مماس، صدر عماد اور دوگونہ عماد کی سمتی جیوب التمام بالترتیب $(\text{ل}_1, \text{م}_1, \text{ن}_1)$، $(\text{ل}_2, \text{م}_2, \text{ن}_2)$، $(\text{ل}_3, \text{م}_3, \text{ن}_3)$ ہوں تو اِن مساواتوں کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے:

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ل}_1 \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \text{ل}_2 \left\{ \frac{1}{\text{ر}} \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = \text{م}_1 \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \text{م}_2 \left\{ \frac{1}{\text{ر}} \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \right)^2 \right\}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^2\text{ئی}}{\text{فرت}^2} = \text{ن}_1 \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \text{ن}_2 \left\{ \frac{1}{\text{ر}} \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \right)^2 \right\}$$

اِن مساواتوں کو محض دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ محوروں کی سمت میں اسراع اِن اسراعوں کے اجزائے ترکیبی ہیں

مماس کی سمت میں اسراع $\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}$

صدر عماد کی سمت میں اسراع $\frac{1}{\text{ر}} \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \right)^2$

دوگونہ عماد کی سمت میں اسراع صفر۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی مانند جو سطح مستوی میں حرکت کر رہا ہو اس صورت میں بھی مماس کی سمت میں اسراع $\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}$ یا $\text{و}\frac{\text{فرو}}{\text{فرس}}$ ہے اور

صدر عماد کی سمت میں جو لنمی مستوی میں واقع ہوتا ہے اسراع $\frac{و^۲}{ر}$ ہے۔

۱۳۱ ۔ ایک ذرّہ ایک منحنی پر حرکت کر رہا ہے ۔ رگڑ نہیں ہے اور قوتیں ایسی ہیں جیسی قدرت میں ہوتی ہیں۔ ثابت کرو کہ جب یہ ایک محل سے دوسرے محل تک جاتا ہے تو توانائی بالحرکت کی تبدیلی راستہ پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ محض ابتدائی اور آخری محلوں پر موقوف ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا ' ما ' ے ہیں۔ دفعۂ ماقبل کی رُو سے راستہ کے مماس کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$م \frac{فر^۲س}{فرت^۲} = لا \frac{فرلا}{فرس} + ما \frac{فرما}{فرس} + ے \frac{فری}{فرس}$$

$$\therefore \frac{۱}{۲} م \left(\frac{فرس}{فرت}\right)^۲ = \int \left(لا\ فرلا + ما\ فرما + ے\ فری \right)$$

اب دفعہ ۹۵ کی رُو سے چونکہ قوتیں ایسی ہیں جو قدرت میں پائی جاتی ہیں یعنی ثابت نقطوں سے فاصلوں کے وحید القیمت تفاعل ہیں اس لیے مقدار لا فرلا + ما فرما + ے فری کسی تفاعل فہ (لا ' ما ' ی) کا ٹھیک تفرقہ ہے۔

$$\text{پس} \qquad \frac{۱}{۲} م و^۲ = \frac{۱}{۲} م \left(\frac{فرس}{فرت}\right)^۲ = فہ(لا ' ما ' ی) + ج$$

$$\text{جہاں} \qquad \frac{۱}{۲} م و_۱^۲ = فہ(لا_۱ ' ما_۱ ' ی_۱) + ج$$

(لا۱ ' ما۱ ' ی۱) مقام روانگی ہے اور و۱ ابتدائی رفتار ہے۔

اس لیے $\frac{۱}{۲}\text{م}\,\text{و}^{۲} - \frac{۱}{۲}\,\text{م}\,\text{و}_{\text{ب}}^{۲} = \text{فہ}\,(\text{لا، ما، ی}) - \text{فہ}\,(\text{لا}_{\text{ب}}\text{، ما}_{\text{ب}}\text{، ی}_{\text{ب}})$

اس مساوات کا دائیں طرف کا رکن محض ابتدائی نقطہ کے محل پر اور نقطہ زیر بحث کے مقام پر موقوف ہے، اسے نقطہ کے راستہ سے کچھ تعلق نہیں سدر عماد کی سمت میں منحنی کا تعامل ع اس مساوات

$$\text{ع} = \frac{\text{و}^{۲}}{\text{ر}}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ر منحنی کا نصف قطر انحنا ہے۔

۱۳۲ - چکنی سطح پر حرکت ۔ اگر ذرہ سطح پر حرکت کرے جس کی مساوات ف (لا، ما، ی) = ہو اور کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام $(\text{ل}_{۱}\text{، م}_{۱}\text{، ن}_{۱})$ ہوں تو

$$\frac{\text{ل}_{۱}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}} = \frac{\text{م}_{۱}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}} = \frac{\text{ن}_{۱}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}} = \frac{۱}{\sqrt{\left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)^{۲}}}$$

اب اگر عمادی تعامل ع ہو تو

$$\text{م}\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} = \text{لا} + \text{ع}\,\text{ل}_{۱}\text{،}\quad \text{م}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} = \text{ما} + \text{ع}\,\text{م}_{۱}\text{،}\quad \text{اور}\quad \text{م}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ی}}{\text{فرت}^{۲}} = \text{ے} + \text{ع}\,\text{ن}_{۱}$$

جہاں لا، ما، ے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی ہیں۔

اِن مساواتوں کو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\text{،}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\text{،}\ \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$ سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

ہمیں ملتا ہے۔

$$\frac{۱}{۲}\text{م}\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲}+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{۲}+\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)^{۲}\right]=\text{لا}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}+\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}+\text{ے}\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$$

کیونکہ ع کا سر

$$=\text{ل}_{۱}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}+\text{م}_{۱}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}+\text{ن}_{۱}\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$$

$$=\left(\text{ل}_{۱}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}+\text{م}_{۱}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}+\text{ن}_{۱}\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\right)\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

$=\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\times$ اُس زاویہ کا جیب التمام جو کسی مماسی خط اور عماد کے درمیان بنتا ہے

$=۰$

اس لیے تکمل کرنے سے

$$\frac{۱}{۲}\text{م}\,\text{و}^{۲}=\int(\text{لا فرلا}+\text{ما فرما}+\text{ے فری})$$

حسب دفعہ ماقبل۔

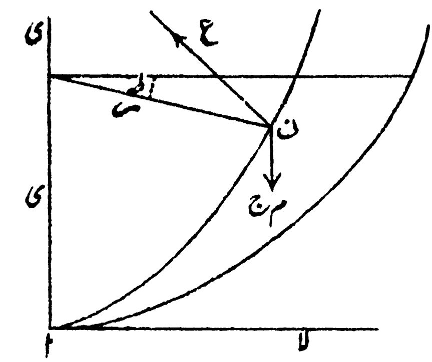
نیز ع کو ساقط کرنے سے سطح پر راستہ کی مساوات ذیل حاصل ہوگی

$$\frac{\text{م}\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}-\text{لا}}{\text{ل}_{۱}}=\frac{\text{م}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}}-\text{ما}}{\text{م}_{۱}}=\frac{\text{م}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ی}}{\text{فرت}^{۲}}-\text{ے}}{\text{ن}_{۱}}$$

یہ دو مساواتوں پر مشتمل ہے، اِن میں سے ت کو ساقط کرنے سے ہمیں ایک دوسری سطح حاصل ہوگی جو معلومہ سطح کے ساتھ مل کر ایک منحنی کو تعبیر کریگی۔

۱۳۳- ایک گردشی سطح پر جس کا محور انتصابی ہے

جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل ایک ذرّہ کی حرکت ۔



دفعہ ۱۲۶ کے محددوں ی، ر، فہ کو استعمال کرنے اور گردش کے محور کو ی کا محور ماننے سے، دفعۂ مذکور کی مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے ۔

$$\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)=0$$

یعنی $\text{ر}^2\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ = مستقل = ھ ....(۱)

نیز اگر ایک ثابت نقطہ ا سے قوس ا ن کا طول س ہو تو ن کی رفتار مکون منحنی کے مماس کی سمت میں $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ اور مستوی ی ا ن پر علی القوائم سمت میں ر $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ ہوگی ۔ پس توانائی کے اصول سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2+\text{ر}^2\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2\right]=\text{مستقل}-\text{ج ی}\quad\ldots\ldots(2)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے حرکت معلوم ہوتی ہے ۔

مساوات (۱) اس امرِ واقع کو تعبیر کرتی ہے کہ ذرہ کا زاویئی معیارِ اثر محوری کے گرد مستقل رہتا ہے۔

وی کے متوازی قوتوں کو $م \frac{ف^۲ ی}{ف ت^۲}$ کے مساوی رکھنے سے تعامل ع کی قیمت آسانی سے نکل آتی ہے۔

اگر مکون منحنی کی مساوات ہو ی = ف (س)، تو چونکہ

$$سَ^۲ = یَ^۲ + سَ^۲ = \left[۱ + \left\{ فَ(س) \right\}^۲ \right] \left(\frac{فر}{فہ} \right)^۲ \left(\frac{فہ}{فت} \right)^۲$$

مساوات (۲) سے بآسانی حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{ر^۲} \left(\frac{فر}{فہ} \right)^۲ \left[۱ + \left\{ فَ(س) \right\}^۲ \right] + \frac{۱}{ر^۲} = مستقل - \frac{۲ج}{ہ^۲} \times ف (س)$$

جو اُفقی سطح مستوی پر راستہ کے ظل کی تفرقی مساوات ہے۔

مثالیں

۱- ایک چکنے مرغولہ کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور ایک چھوٹا منکا جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل اس پر پھسلتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ سکون سے روانہ ہو کر پہلی گردش مدت $۲ \sqrt{\frac{۲\pi ل}{ج \ جب ع \ جم ع}}$ میں مکمل کرتا ہے جہاں ع مرغولہ کا زاویہ ہے۔

۲- ایک بے وزن ذرہ نصف قطر ل اور زاویہ ع کے چکنے مرغولہ پر ایک قوت م ہ (فاصلہ) کے زیرِ عمل جس کا مرجع محور پر کا ایک ثابت نقطہ ہے پھسلتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی کا تعامل صفر نہیں ہو سکتا تاوقتیکہ ذرہ کی بیڑی سے بڑی رفتار ل $\sqrt{ہ}$ قطاع ع نہ ہو۔

۳- ایک چکنے مکافی نما کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے۔ مکون مکافی کا وترِ خاص ۴ و ہے۔ سب سے نچلے نقطہ کے اوپر بلندی ہ پر

سے ایک ذرہ کو افقاً رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ذرّہ کی رفتار پھر اُفق کے متوازی بلندی $\frac{\text{و}^{۲}}{\text{۲ ج}}$ پر ہوگی ۔ نیز ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر مکافی نما کا تعامل ، مکون مکافی کے متناظر نصف نظرِ انحنا کے بالعکس متناسب ہے ۔

۴ ۔ ایک چکنے گردشی مکافی نما کی اندرونی سطح پر جس کا محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے ایک ذرّہ قائم حرکت کے ساتھ نصف قطر ب کا ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہے ، اسے محور میں سے گزرنے والی سطح مستوی میں دھکے کے ساتھ ذرا سا ہلا دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ قائم حرکت کے گرد اہتزاز کا دَور $\text{۲}\pi\sqrt{\frac{\text{ل}^{۲} + \text{ب}^{۲}}{\text{ج ل}}}$ ہے جہاں ل مکافی نما کا نصف وترِ خاص ہے ۔

۵ ۔ ایک گردشی مکافی نما ہے اور ایک ذرّہ اس پر محور کے متوازی قوت کے زیرِ عمل اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا راستہ نصف النہاروں کو مستقل زاویہ پر قطع کرتا ہے ، ثابت کرو کہ قوتِ عاملہ محور سے فاصلہ کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہے ۔

۶ ۔ ایک ذرہ گردشی مکافی نما پر ایسی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو ہمیشہ محور کی طرف عمل کرتی ہے اور محور سے فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہے ۔ ثابت کرو کہ خاص شرائط کے تحت ذرہ کے راستہ کا جو ظل راس پر کی افقی سطح پر ہے اُس کی مساوات بشکلِ ذیل لکھی جاسکتی ہے

$$\text{ر}\sqrt{\text{۴ ا}^{۲} + \text{ر}^{۲}} + \text{ا لوگ}\frac{\sqrt{\text{۴ ا}^{۲} + \text{ر}^{۲}} - \text{۲ ا}}{\sqrt{\text{۴ ا}^{۲} + \text{ر}^{۲}} + \text{۲ ا}} = \text{ک} \times \text{ط}$$

جہاں ۴ ا کمون مکافی کا وترِ خاص ہے ۔

۷ ۔ ایک ذرہ ایک قائم مخروط مستدیر پر بلا قوت عامل حرکت کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ خواہ ابتدائی حرکت کچھ ہی ہو محور پر عمود وار سطح پر راستہ کا ظل ر جب ن ط = ج کے مماثل منحنیوں میں سے ایک ہوگا ۔

۸ ۔ ایک چکنا وزنی ذرہ منحنی $\text{لا}^{۲} = \text{ا}^{۲}$ کو انتصابی محور ما کے گرد گھمانے سے بننے والی سطح پر حرکت کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ابتدائی رفتار مناسب ہو تو ذرہ تمام نصف النہاری خطوں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کریگا ۔

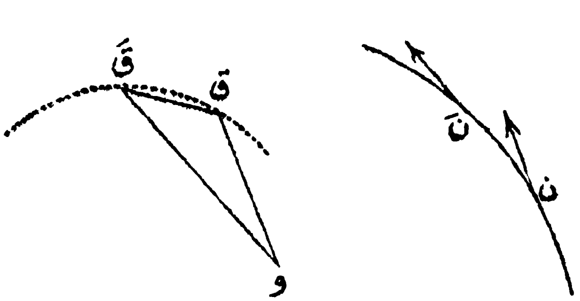
۹ ۔ ایک وزنی ذرہ ایک چکنی گردشی سطح پر جس کی مساوات اسطوانی محددوں میں $\text{۸ ی}^{۳} = \text{۲۷ ا ر}^{۲}$ ہے افقاً پھینکا گیا ہے ۔ محور ی انتصابی اور اوپر کی طرف ہے ۔ نقطۂ رمی پر عماد اور نقطۂ علیحدگی پر کا عماد بالترتیب سمت انتصابی سے ۴۵° اور ۶۰° کے زاویے بناتے ہیں ثابت کرو کہ رفتار رمی $\sqrt{\frac{\text{ج ا}}{\text{۵۲۵}}}$ ہے ۔

دسواں باب

متفرق

رسم الطریق ۔ گردش کرنے والے منحنیوں پر حرکت ۔
رسیّوں کے دھکے کی قسم کے تناؤ

۱۳۴ ۔ رسم الطریق ۔ اگر ہم ایک ثابت نقطہ و سے ایک خطِ مستقیم وق ایسا کھینچیں جو ایک متحرک نقطہ ن کی رفتار کے متوازی اور متناسب ہو تو ق کے طریق کو ن کی حرکت کا رسم الطریق کہتے ہیں ۔



اگر نؔ اس راستہ پر ن کے پاس کا نقطہ ہو اور وقؔ متوازی اور متناسب ہونؔ کی رفتار کے، تو ذرّہ کے ن سے نؔ تک جانے میں رفتار میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے وہ دفعہ ۳ کی رُو سے ق قؔ سے تعبیر ہوتی ہے۔
اگر قوس ن نؔ کے طے کرنے کا وقت تہ ہو تو ن کا اسراع

$$= \text{نہایۃ}_{\text{تہ} \to \cdot} \frac{\text{ققؔ}}{\text{تہ}} = \text{قؔ کی رفتار رسم الطریق میں}$$

پس رسم الطریق میں ق کی رفتار بلحاظ مقدار اور سمت دونوں کے، ن کے راستہ میں اس کے اسراع کو تعبیر کرتی ہے۔
اس سے ظاہر ہے کہ کسی سمت میں ق کے محدد اور رفتار اُسی سمت میں ن کی رفتار اور اسراع کے متناسب ہوتے ہیں۔
اگر ن کی حرکت سطح مستوی پر نہ ہو تو بھی یہی استدلال قائم رہتا ہے۔
اگر کسی آن میں متحرک نقطہ ن کے محدد لا، ما ہوں اور رسم الطریق پر کے متناظر نقطہ ق کے محدد ضا، عا ہوں تو صریحاً

$$\therefore \text{ضا} = \text{لہ} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \text{اور} \quad \text{عا} = \text{لہ} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

جہاں لہ کوئی مستقل ہے۔
اب اگر $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ کی قیمتیں ت کی رقوم میں معلوم ہوں تو اِن مساواتوں میں سے ت کو ساقط کرنے سے ہمیں ضا، عا کا طریق یعنی رسم الطریق حاصل ہوتا ہے۔
سہ ابعادی حرکت کی بھی یہی کیفیت ہے۔

۱۳۵ – مرکزی مدار کا رسم الطریق قوت کے مرکز س کے لحاظ سے مدار کا متکافی ہوتا ہے جسے س کے گرد ایک قائمہ

میں سے گھمایا گیا ہو۔

فرض کرو کہ س ما مدار پر کے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر عمود ہے۔ س ما کو نَ تک ایسا بڑھاؤ کہ س ما × س نَ = ک^2 = ایک مستقل، پس نَ کا طریق مدار کا متکافی ہے بلحاظ س کے۔

دفعہ ۴۵ کی رُو سے ن کی رفتار و = $\frac{ھ}{\text{س ما}} = \frac{ھ}{ک^2}$ س نَ

پس س نَ عمود وار ہے، ن پر کی رفتار پر علی القوائم ہے اور اس کے متناسب ہے۔

پس اگر نَ کے طریق کو س کے گرد ایک زاویہ قائمہ میں سے گھمایا جائے تو اس سے حرکت کا رسم الطریق تعبیر ہوتا ہے۔

اس لیے نَ کی رفتار اس کے مدار میں عمود وار ہے اور مساوی ہے ن کے اسراع کے $\frac{ک^2}{ھ}$ گنا کے۔

یعنی یہ = $\frac{ک^2}{ھ}$ × ن کا مرکزی اسراع۔

مثالیں

۱ ۔ ایک ذرہ جاذبۂ ارض کے زیر عمل مکافی مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی حرکت کا رسم الطریق اس کے محور کے متوازی خطِ مستقیم ہے جو یکساں رفتار کے ساتھ مرتسم ہوتا ہے۔

۲ ۔ ایک ذرّہ ماسکہ کی طرف عمل کرنے والی قوت کے زیر عمل مخروطی تراشش مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ رسم الطریق دائرہ ہے جو قوت کے مرکز میں سے گزرتا ہے جب کہ راستہ مکافی ہو۔

۳ ۔ ایک ذرّہ ایک ناقص مرتسم کرتا ہے جب کہ قوت ناقص کے مرکز کی طرف

عمل کرتی ہے - ثابت کرو کہ رسم الطریق متشابہ ناقص ہے -

۴ - ایک منکا ایک چکنے انتصابی دائرہ کے بالا ترین نقطہ سے سکون سے روانہ ہوتا ہے - ثابت کرو کہ رسم الطریق کی مساوات ہے ر = لہ جب $\frac{\text{طہ}}{۲}$

۵ - ایک نقطہ ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہے جب کہ قوت کا مرکز اِس کے محیط پر ہے - ثابت کرو کہ اس کا رسم الطریق ایک مکافی ہے -

۶ - ایک مدار کا رسم الطریق ایک مکافی ہے جس کا معیّن یکساں طور پر بڑھتا ہے - ثابت کرو کہ مدار، نیم کعبی مکافی ہے -

۷ - ایک ذرّہ ایک باریک تدویری نلی کے اندر پھسلتا ہے جس کا محور انتصابی اور راس اوپر کی طرف ہے، ذرّہ نلی کے کسی نقطہ سے روانہ ہوتا ہے، ثابت کرو کہ رسم الطریق کی مساوات کی شکل $ر^۲$ = ۲ج [ا + ب جم ۲ طہ] ہے - اگر یہ بالاترین نقطہ سے روانہ ہو تو ثابت کرو کہ رسم الطریق دائرہ ہے -

۸ - ایک ذرّہ ایک مساوی الزاویہ لولبی مرتسم کرتا ہے جس کا قطب قوت کا مرکز ہے - ثابت کرو کہ اس کا رسم الطریق (hodograph) بھی مساوی الزاویہ لولبی ہے -

۹ - اگر ایک ذرّہ دو خشمی (منحنی)[^] مرتسم کرے جس کا قطب قوت کا مرکز ہو تو ثابت کرو کہ رسم الطریق کی مساوات $ر^۲$ = $و^۲$ $قط^۳$ $\frac{\text{۲ طہ}}{۳}$ ہے -

۱۰ - اگر رسم الطریق دائرہ ہو جو اس کے محیط پر کے کسی نقطہ کے گرد یکساں زاویئی رفتار سے مرتسم ہوتا ہو تو ثابت کرو کہ راستہ تدویر ہوگا -

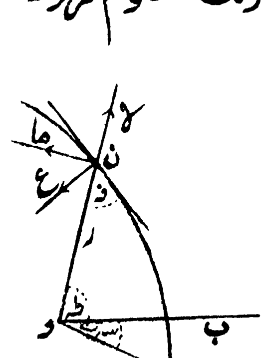
۱۱ - ثابت کرو کہ جن مرکزی مداروں کے رسم الطریق بھی مرکزی مداروں کی طرح مرتسم ہو سکیں وہ صرف ایسے ہیں جن میں مرکزی اسراع مرکز سے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے -

lemniscate ۵

[دفعہ ۱۳۵ میں اگر س ن ، نَ پر کے مماس سے مَا پر ملے تو س مَا عمود ہوگا مَانَ پر اور = $\frac{ک^2}{س ن}$ ، رسم الطریق س کی طرف عمل کرنے والے تجاذبی اسراع کے زیرِ عمل مرتسم ہوتا ہے اگر نَ کی رفتار × س مَا = مستقل یعنی اگر ن کا مرکزی اسراع × $\frac{ک^2}{س ن}$ مستقل ہو، پس نتیجہ زیرِ بحث حاصل ہوتا ہے]۔

۱۲ — اگر مدار مرغولہ ہو جس کا محور انقلابی ہو اور جو جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل مرتسم ہو تو ثابت کرو کہ رسم الطریق قائم مستدیرہ مخروط ہوگا جس کا نیم راسی زاویہ مرغولہ کے زاویہ کا متمم ہوگا۔

۱۳۶ — حرکت گھومنے والے منحنی پر — ایک معلومہ منحنی اپنی سطح مستوی میں ایک ثابت نقطہ و کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے اور ایک چھوٹا منکا ن منحنی پر معلومہ قوتوں کے زیرِ عمل جن کے اجزائے ترکیبی و ن کی سمت اور اس پر عمود وار سمت میں بالترتیب لا اور ما میں حرکت کر رہا ہے۔ حرکت معلوم کرو۔



منحنی کی سطح مستوی میں ایک ثابت خط و ا لو اور و ب ایک خط لو جو بلحاظ منحنی کے ثابت ہو اور جو ابتداء سے حرکت میں و ا پر منطبق ہو پس وقت ت کے بعد ∠ ا و ب = سہ ت

فرض کرو کہ وقت ت پر منکا ن پر ہے جہاں و ن = ر اور و ن اور ن پر کے مماس کے درمیان زاویہ فہ بنتا ہے۔

تب دفعہ ۹۴ کی رو سے حرکت کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ر}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \text{سہ}\right)^{۲} = \frac{\text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ع}}{\text{م}}\ \text{جب فہ}$$

اور

$$\frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left\{\text{ر}^{۲}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \text{سہ}\right)\right\} = \frac{\text{ما}}{\text{م}} + \frac{\text{ع}}{\text{م}}\ \text{جم فہ}$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ر}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \text{رسہ}^{۲} + ۲\,\text{رسہ}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \frac{\text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ع}}{\text{م}}\ \text{جب فہ}$$

اور

$$\frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^{۲}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right) = -۲\,\text{سہ}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{ما}}{\text{م}} + \frac{\text{ع}}{\text{م}}\ \text{جم فہ}$$

فرض کرو کہ بلحاظ منحنی کے منکے کی رفتار و ہے پس

$$\text{و جم فہ} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} \quad \text{اور} \quad \text{و جب فہ} = \text{ر}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$$

تب حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ر}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \text{سہ}^{۲}\text{ر} + \frac{\text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{عَ}}{\text{م}}\ \text{جب فہ} \quad \ldots\ldots (۱)$$

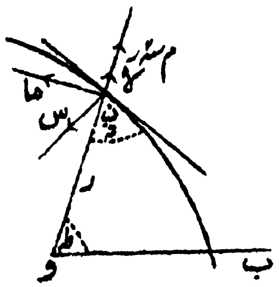
اور

$$\frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^{۲}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right) = \frac{\text{ما}}{\text{م}} + \frac{\text{عَ}}{\text{م}}\ \text{جم فہ} \quad \ldots\ldots (۲)$$

جہاں

$$\frac{\text{عَ}}{\text{م}} = \frac{\text{ع}}{\text{م}} - ۲\,\text{سہ و} \quad \ldots\ldots (۳)$$

یہ مساواتیں منحنی کے لحاظ سے ذرہ کی حرکت کو تعبیر کرتی ہیں -



اب فرض کرو کہ منحنی گھومتا نہیں بلکہ ساکن ہے اور منکا اس پر ان ہی قوتوں ل اور ها کے اور مزید براں ون کی سمت میں عمل کرنے والی قوت م سہ۲ر کے زیرِ اثر حرکت کرتا ہے، نیز فرض کرو کہ نیا عمادی تعامل س ہے - اب حرکت کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{ف}^2\text{ر}}{\text{فت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فط}}{\text{فت}}\right)^2 = \text{سہ}^2\text{ر} + \frac{\text{ل}}{\text{م}} - \frac{\text{س}}{\text{م}}\ \text{جب فہ} \quad \ldots\ldots(۴)$$

اور

$$\frac{۱}{\text{ر}}\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\text{ر}^2\frac{\text{فط}}{\text{فت}}\right) = \frac{\text{ها}}{\text{م}} + \frac{\text{س}}{\text{م}}\ \text{جم فہ} \quad \ldots\ldots\ldots(۵)$$

یہ مساواتیں وہی ہیں جو (۱) اور (۲) ہیں، صرف سَر کی بجائے س لکھا گیا ہے -

پس متحرک منحنی کی صورت میں، منکے کی جو حرکت بلحاظ منحنی کے ہے وہ ان ہی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہے جن سے دوسری صورت میں مطلق حرکت حاصل ہوتی ہے -

پس گھومنے والے منحنی کی صورت میں اضافی حرکت حسب ذیل طریق پر حاصل ہوسکتی ہے -

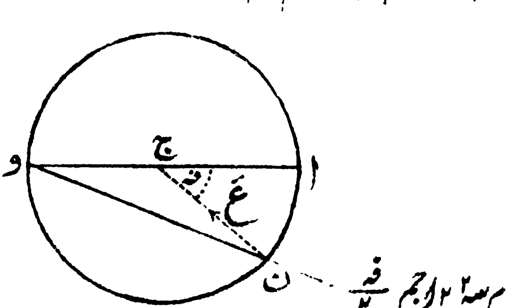
منحنی کو ثابت مانو اور منکے پر گردش کے مرکز سے باہر کی طرف ایک مزید قوت م سہ۲ر لگاؤ، تب منکے کی حرکت معلوم کرو - اس طرح جو حرکت حاصل ہوگی وہ اضافی حرکت ہوگی جب کہ منحنی گردش کر رہا ہو - منحنی کا تعامل جو اس طرح حاصل ہوگا وہ متحرک منحنی کا اصلی تعامل نہیں ہوگا - اصلی تعامل کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں اس کی رُو سے اُس تعامل میں جو مندرجۂ بالا طریقہ سے حاصل ہو

مقدار ۲ م سہ و کا اضافہ کرنا پڑیگا جہاں و منکے کی رفتار ہے بلحاظ منحنی کے ۔
اوپر کا عمل متحرک منحنی کو سکون میں تحویل کرنے کے طریقہ سے موسوم ہوتا ہے ۔
جب متحرک منحنی کو سکون میں تحویل کرلیا جائے تو عمدہ ترین طریقہ یہ ہے کہ اسراعوں کو مماساً اور عماداً لیا جائے جیسا کہ دفعہ ۸۸ میں مذکور ہوا ۔

۱۳۷ ۔ اگر زاویئی رفتار سہ مستقل نہ ہو تو بھی عمل وہی رہتا ہے سوائے اس کے کہ مساوات (۲) میں بائیں جانب ایک زائد رقم ۔ ر $\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$ کا اضافہ ہوجاتا ہے ۔ اس صورت میں ہمیں قطراً قوت م سہ۲ ر لگانے کے علاوہ مزید قوت ۔ م ر $\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$ و ن پر عمود وار لگانی پڑیگی اور تب منحنی "سکون میں تحویل" ہوگا ۔

۱۳۸ ۔ مشق ۔ ایک چکنی مستدیر نلی کے اندر جو ایک چکنے میز پر پڑی ہے کمیت م کا ایک ذرّہ ہے ۔ ذرّہ ابتداً مقام ا پر ہے جب کہ نلی و میں سے (جو ا و کا متقاطر نقطہ ہے) گزرنے والے محور کے گرد جو نلی کی سطح پر عمود ہے یکساں رفتار سہ کے ساتھ گھومنا شروع کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ وقت ت کے بعد ذرّہ نلی کے مرکز کے گرد زاویہ فہ میں سے گھوم جائیگا جہاں

فہ = ۴ مس ۔۱ (مسز $\frac{\text{سہ ت}}{\text{۲}}$) ۔ نیز دکھاؤ کہ نلی اور ذرّہ کے درمیان تعامل اس وقت ۲ م لو سہ۲ جم $\frac{\text{فہ}}{\text{۲}}$ (۳ جم $\frac{\text{فہ}}{\text{۲}}$ ۔ ۲) ہوگا ۔



اگر وقت ت پر ذرہ کا مقام ن ہو اور فہ = ح ا ج ن تو ہم نلی کو ساکن تصور کر سکتے ہیں اگر ہم و ن کی سمت میں مزید قوت م سہ² × و ن یعنی م سہ² . ۲ ا جم فہ/۲ عمل کرتی ہوئی فرض کریں۔ اگر عادی اسراع کو عَ فرض کیا جائے تو مماسی اور عادی اسراع لینے سے

ا فہً = − سہ² × ۲ ا جم فہ/۲ جب فہ/۲ .... (۱)

اور ا فہً² = عَ/م − سہ² × ۲ ا جم² فہ/۲ .... (۲)

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

فہً² = ۲ سہ² جم فہ + أ .... (۳)

اب اگر نلی اس طرح ^ حرکت کرے تو چونکہ ذرہ ابتداءً ساکن تھا اس کی اضافی رفتار ابتداءً سہ × و ا یعنی سہ × ۲ ا مقابل سمت میں تھی۔

اس لیے فہً = ۲ سہ ابتداءً

اس لیے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

فہً² = ۲ سہ² (۱ + جم فہ)

∴ ۲ سہ ت = ∫ فر فہ / جم فہ/۲ = ۲ لوک مس (π/۴ + فہ/۴) مستقل صفر ہے۔

∴ و^{سہ ت} = (۱ + مس فہ/۴) / (۱ − مس فہ/۴) پس مس فہ/۴ = (و^{سہ ت} − ۱) / (و^{سہ ت} + ۱) = مسز (سہ ت/۲)

نیز (۲) سے حاصل ہوتا ہے

عَ/م = ۶ ا سہ² . جم² فہ/۲

اب دفعہ ۱۳۶ کی مساوات (۳) کی رو سے حقیقی تعامل ع مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

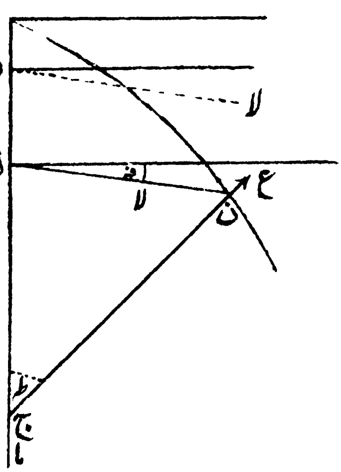
ع/م = عَ/م + ۲ سہ و

جہاں و رفتار ہے ذرہ کی بلحاظ نلی کے اُسی سمت میں جس میں نلی حرکت کر رہی ہے یعنی (سمت میں
پس و = - ا فہَ ۔

∴ ع = عَ - ۲م سہ ا فہَ = ۲م ا سہ۲ جم $\frac{\text{فہ}}{۲}$ [۲جم $\frac{\text{فہ}}{۲}$ - ۲]

مشق - اگر ذرہ ابتداءً و کے نہایت قریب حالتِ سکون میں ہو تو ثابت کرو کہ جب یہ و سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر ہوگا تو منحنی کا تعامل ۱۰ م ا سہ۲ ہوگا۔

۱۳۹ - فرض کرو کہ دفعہ ۱۳۶ کا منحنی اپنی سطح مستوی میں ثابت محور و ما کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔



وقت ت میں فرض کرو کہ منحنی زاویہ فہ میں سے گھوم گیا ہے اور اس وقت ذرہ کے محدد ثابت محور کی سمت میں اور اس پر علی القوائم سمت میں ما اور لا ہیں۔ نیز فرض کرو کہ عمادی تعامل منحنی کی سطح مستوی میں ع ہے اور منحنی کی سطح مستوی پر علی القوائم سمت میں س ہے۔

تب دفعہ ۱۲۶ کی حرکت کی مساواتیں حسب ذیل ہو جاتی ہیں کیونکہ
فہَ = سہ

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{لا سہ}^2 + \frac{\text{ع}}{\text{م}}\,\text{جب ط} + \frac{\text{ل}}{\text{م}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{1}{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{لا}^2\text{سہ}\right) = \frac{\text{س}}{\text{م}} + \frac{\text{ے}}{\text{م}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

اور $$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = -\frac{\text{ع}}{\text{م}}\,\text{جم طہ} + \frac{\text{ما}}{\text{م}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

جہاں لا، ما اور ے لگی قوتیں ہیں بالترتیب لا اور ما کے متوازی، اور منحنی کی سطح مستوی پر عمودوار سمت میں، اور طہ میلان ہے عماد کا محور ما کے ساتھ۔

مساواتیں (۱) اور (۳) جو تار کے لحاظ سے منکے کی حرکت کو ظاہر کررہی ہیں وہ وہی ہیں جو ہمیں اُس صورت میں ملتیں جب کہ تار کو ساکن تصور کیا جاتا اور ذرّہ پر مزید قوت م سہ² × ر لگائی جاتی جہاں ر فاصلہ ہے ذرّہ کا گردش کے محور سے جو اس پر عمود وار ناپا جائے۔

پس یہ زائد قوت لگانے سے ہم منحنی کو ساکن تصور کرسکتے ہیں اور جو مساواتیں زیادہ سہل ہوں اُن کو استعمال کرسکتے ہیں۔

۱۴۰ ۔ عددی مثال کے طور پر فرض کرو کہ منحنی چکنے مستدیر تار پر مشتمل ہے جو اپنے انتصابی قطر کے گرد گھوم رہا ہے، اِس کا مرکز ج ہے اور ا اس کا نصف قطر ہے۔ فرض کرو کہ منکا تار کے بالاترین نقطہ کے نہایت قریب سے روانہ ہوتا ہے۔ دائرہ کو ساکن مانو اور ل ن کی سمت میں مزید قوت م سہ² × ل ن (= م سہ² × ا جب طہ) لگاؤ۔ مماسی اور عمادی اسراع لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}\,\ddot{\text{طہ}} = \text{سہ}^{2}\,\text{ا جب طہ جم طہ} + \text{ج جب طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اور $$\text{ا}\,\dot{\text{طہ}}^{2} = -\frac{\text{ع}}{\text{م}} + \text{ج جم طہ} - \text{سہ}^{2}\,\text{ا جب}^{2}\text{طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

(۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}\,\dot{\text{طہ}}^{2} = \text{سہ}^{2}\,\text{ا جب}^{2}\text{طہ} + ۲\,\text{ج}\,(۱ - \text{جم طہ})$$

اور پھر (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ع}}{\text{م}} = \text{ج}\,(۳\,\text{جم طہ} - ۲) - ۲\,\text{سہ}^{2}\,\text{ا جب}^{2}\text{طہ}$$

نیز (۲) کی رُو سے تار کی سطح مستوی پر عمود وار سمت میں تعامل س مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{س}}{\text{م}} = ۲\,\dot{\text{لا}}\,\text{سہ} = ۲\,\text{سہ}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ا جب طہ}\right) = ۲\,\text{سہ ا جم طہ} \times \dot{\text{طہ}}$$

$$= ۲\,\text{سہ جم طہ}\sqrt{\text{سہ}^{۲}\,\text{ا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{طہ} + ۲\,\text{ج ا}\,(۱ - \text{جم طہ})}$$

مثالیں

۱ - ایک ذرّہ کو ایک چکنی سیدھی نلی کے اندر رکھا گیا ہے اور اس کو اس کی سطح مستوی پر کے ایک ثابت نقطہ و کے گرد جو نلی سے عمودی فاصلہ ا پر واقع ہے یک لخت گھمایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نلی کے اندر وقت ت میں ذرّہ جو فاصلہ طے کرتا ہے وہ ا جبنز سہ ت ہے جہاں ذرّہ کا و سے ابتدائی درمیانی فاصلہ ا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ذرّہ اور نلی کے درمیان اُس وقت تعامل م ا سہ² [۲ جمنز سہ ت - ۱] ہوگا۔

۲ - ایک مستدیر نلی جس کا نصف قطر ا ہے یکساں طور پر ایک انتصابی قطر کے گرد زاویئی رفتار $\sqrt{\frac{\text{ن ج}}{\text{ا}}}$ کے ساتھ گھومتی ہے، اور ذرّہ کو اس کے سب سے نچلے نقطہ سے ایسی رفتار کے ساتھ جھٹکا گیا ہے کہ یہ عین اِس کے بالاترین نقطہ تک پہنچ سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ پہلے رُبع کو مرتسم کرنے کی مدت

$$\sqrt{\frac{\text{ا}}{(\text{ن}+۱)\,\text{ج}}}\ \text{لوک}\left[\sqrt{\text{ن}+۲}+\sqrt{\text{ن}+۱}\right] \text{ ہے۔}$$

۳ - ایک چکنی مستدیر نلی کے اندر جس کا نصف قطر ا ہے اور جو ایک انتصابی قطر کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے ایک ذرّہ ن حرکت کرتا ہے۔ اگر کسی وقت ت کے بعد ذرہ کا زاویئی فاصلہ سب سے نچلے نقطہ سے طہ ہو اور اگر یہ بلحاظ

نلی کے ساکن ہو جب کہ طہ = عہ جہاں جم $\frac{\text{ع}}{2} = \frac{1}{\text{سہ}}\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ تو بعد کے کسی وقت ت پر
مم $\frac{\text{طہ}}{2}$ = ھم $\frac{\text{ع}}{2}$ جمز (سہ ت جب $\frac{\text{ع}}{2}$) ۔

۴ - ایک پتلے مستدیر تار کو ایک انتصابی قطر کے گرد مستقل زاویئی رفتار سے گھمایا گیا ہے - ایک چکنا چھلا تار پر پھسلتا ہے اور تار کے بالا ترین نقطہ کے ساتھ ایک لچکدار رسی کے ذریعہ جس کا قدرتی طول تار کے نصف قطر کے مساوی ہے بندھا ہے ۔ اگر چھلے کو سب سے نچلے نقطہ سے ذرا سا ہٹا دیا جائے تو حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ بالا ترین نقطہ تک پہنچیگا اگر رسی کی لچک کی قدر حلقہ کے وزن کی چار گنی ہو ۔

۵ - ایک چکنا مستدیر تار یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ اپنے ایک مماسی خط کے گرد گھوم رہا ہے ۔ ایک بے وزن منکا نقطہ تماس کے قریب سے سکون کی حالت سے پھسلتا ہے، ثابت کرو کہ نقطۂ تماس کے مقابل کے نقطہ میں سے گذرنے کے بعد، وقت ت میں زاویئی فاصلہ $2\,\text{مس}^{-1}\,\text{سہ ت}$ طے ہوتا ہے ۔

۶ - ایک چھوٹا منکا نصف قطر ل کی ایک دائری قوس پر پھسلتا ہے جو اپنے انتصابی قطر کے گرد مستقل زاویئی رفتار سہ سے گھومتی ہے ۔ اس کے تعادل قائم کا محل معلوم کرو جب کہ $\text{سہ}^2 > \frac{\text{ج}}{\text{ل}}$ اور ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزازہ کی مدت اس کے تعادل کے محل کے گرد ان دو صورتوں میں بالترتیب $\frac{2\pi\,\text{سہ ل}}{\sqrt{\text{سہ}^4\text{ل}^2 - \text{ج}^2}}$ اور $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}} - \text{سہ}^2}}$ ہوگی ۔

۷ - ایک مکافی کی شکل کا تار جس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف اپنے محور کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے ۔ اس کے کسی نقطہ پر اضافی سکون کی حالت میں ایک چھلا ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف حرکت کریگا اگر بالترتیب $\text{سہ}^2 > \frac{\text{ج}}{2\text{ل}}$ اور یہ ساکن رہیگا اگر $\text{سہ}^2 = \frac{\text{ج}}{2\text{ل}}$ جہاں ۴ ل مکافی کا وترِ خاص ہے ۔

۸ - **قلب نما** (Cardioid) ر = ل (۱ + جم طہ) کی شکل کی

ایک نلی کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور قرن اوپر کی طرف ہے اور یہ زاویئی رفتار $\sqrt{\frac{ج}{ر}}$ سے گھوم رہی ہے۔ نلی کے اندر اس کے سب سے نچلے نقطہ سے ایک ذرّہ کو رفتار $\sqrt{۳ج\,ر}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرّہ صعود کریگا تاوقتیکہ یہ قرن کی ہمواری پر آجائے۔

۹ - ایک چکنی مستوی نلی اپنی سطح مستوی میں کے ایک نقطہ و کے گرد کسی زاویئی رفتار کے ساتھ گھوم رہی ہے۔ اس کے اندر کمیّت م کا ایک ذرّہ ہے جس پر قوت م سہ^۲ ر نقطہ و کی طرف عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ نلی کا تعامل $ا + \frac{ب}{ر^۳}$ ہے جہاں ا اور ب مستقل ہیں اور ر نلی کا نصف قطر انحنا ہے اُس مقام پر جہاں ذرّہ ہے۔

۱۰ - ایک لچکدار رسّی کا طبعی طول ل ہے۔ اس کی کمیّت م ل ہے اور لچک کی قدر لہ ہے۔ اس کا ایک سرا ایک چکنی نلی کے ایک سرے کے ساتھ بندھا ہے جس کے اندر یہ رسّی ہے۔ اگر نلی افقی سطح مستوی میں سرے ا کے گرد یکساں زاویئی رفتار کے ساتھ گھومے تو ثابت کرو کہ جب رسّی تعادل میں ہوگی تو اس کا طول ل $\frac{مس\,ط}{ط}$ ہوگا جہاں

$$ط = ل\,سہ\sqrt{\frac{م}{لہ}}$$

۱۱ - ایک منکا ایک مساوی الزاویہ لولبی پر جس کا زاویہ عہ ہے قطب سے فاصلہ ر پر ساکن ہے۔ لولبی کی سطح مستوی متوازی الافق ہے اور لولبی اپنے قطب میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ ثابت کرو کہ منکا قطب سے فاصلہ ر جم عہ پر اضافی تعادل کی حالت میں ہوگا اور منحنی کا تعامل اُس وقت $\frac{۱}{۲}$ م سہ^۲ ر جب ۲ عہ ہوگا۔ نیز بتاؤ کہ جب ذرّہ پھر قطب سے اسی فاصلہ پر ہوگا جس پر ابتداء میں تھا تو تعامل م سہ^۲ ر جب عہ (۳ + جب^۲ عہ) ہوگا۔

۱۲ - ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے ایک اُفقی میز پر پڑا ہے۔ میز کو تیل سے چکنا کیا گیا ہے۔ تیل کی لزوجی رگڑ کی وجہ سے ذرّہ پر قوت م ک ع عمل کرتی ہے جہاں ع ذرّہ کی رفتار ہے بلحاظ میز کے۔ میز کو انتصابی محور کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ

گھمایا جاتا ہے ثابت کرو کہ ذرہ کو مناسب حالات کے تابع پھینکنے سے میز پر ذرہ کے راستہ کی مساواتیں یہ ہونگی

لا = و^(ع - ک/۲) ت جم (سہ - بہ) ت ، ما = - و^(ع - ک/۲) ت جب (سہ - بہ) ت

جہاں ع + خ بہ = √(ک²/۴ + خ سہ ک)

[دفعہ ۱۵ کی ترقیم کی رُو سے حرکت کی مساواتیں ہیں:

(عف² + ک عف - سہ²) لا - ۲ سہ عف ما = ۰

اور (عف² + ک عف - سہ²) ما + ۲ سہ عف لا = ۰

اس لیے [عف² + ک عف - سہ² + ۲ خ سہ عف] (لا + خ ما) = ۰

اب حسبِ معمول حل کرو۔]

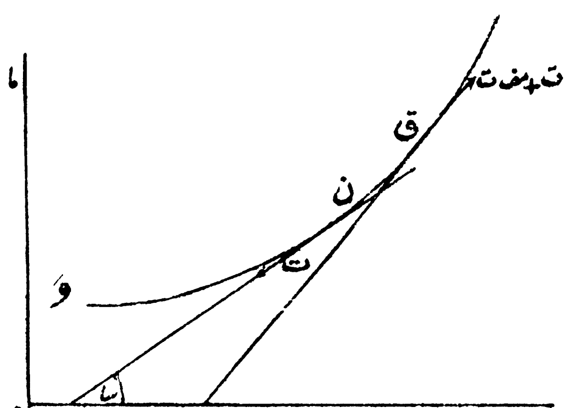
۱۳ - ایک چکنی افقی سطح مستوی ایک انتصابی محور کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے محور کے ایک نقطہ کے ساتھ ایک لچکدار رسّی بندھی ہے جس کا طبعی طول د سطح مستوی تک پہنچنے کے لیے عین کافی ہے۔ رسّی کو کھینچ کر ایک سُوراخ میں سے جو محور اور سطح مذکور کے تقاطع پر واقع ہے گزارا گیا ہے اور اس کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک ذرّہ باندھا گیا ہے جس کی کمیّت م ہے اور جو سطح مستوی میں حرکت کرتا ہے۔ اگر ذرّہ ابتدائً سطح مستوی پر ساکن ہو تو ثابت کرو کہ سطح مستوی کے لحاظ سے اِس کا راستہ ایک درتدویر (Hypocycloid) ہے جو نصف قطر ½ ا [۱ - سہ (م د/لہ)^½] والے دائرہ کے نصف قطر ا کے ایک دائرہ پر گردش کرنے سے پیدا ہوتی ہے جہاں ا ابتدائی کھنچاؤ ہے رسّی کا اور لہ رسی کی لچک کی قدر ہے۔

۱۴ - ایک ذرّہ ایک چکنی نلی کے اندر جو ایک انتصابی محور کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے پھسلتا ہے - اگر ذرّہ اُس نقطہ سے اضافی سکون سے روانہ ہو جہاں محور اور نلی کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ کا خط نلی سے ملتا ہے تو ثابت کرو کہ

وقت ت میں ذرّہ فاصلہ $\frac{ج^{۲}}{س^{۲}}$ مم ء قم ء جبز^{۲} ($\frac{۱}{۲}$ س ت جب ء) میں حرکت کریگا
جہاں ء میلان ہے نلی کا سمت انتصابی کے ساتھ ۔

۱۴۱ - زنجیروں کے دھکے کی قسم کے تناؤ ۔

ایک زنجیر ایک چکنی افقی سطح مستوی پر ایک معلومہ منحنی کی شکل میں پڑی ہے اور اس کے ایک سرے پر مماس کی سمت میں دھکے کی قسم کا تناؤ عمل کرتا ہے ۔ اس سے منحنی کے کسی اور نقطہ پر دھکے کی قسم کا جو تناؤ پیدا ہوتا ہے اسے معلوم کرو ۔ نیز اس نقطہ کی ابتدائی حرکت دریافت کرو ۔



فرض کرو کہ ن ق زنجیر کا کوئی جزو مف س ہے جہاں س طول ہے کسی قوس وَن کا جو ایک ثابت نقطہ وَ سے ناپا گیا ہے ۔
فرض کرو کہ ن اور ق پر دھکے کی قسم کے تناؤ ت اور ت + مف ت ہو

ن پر و لا کے متوازی تناؤ کا جزوِ تحلیلی ت $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$ ہے، اور یہ صریحاً قوس س کا تفاعل ہے۔ فرض کرو کہ یہ ف (س) ہے۔
تب ق پر تناؤ کا جزوِ تحلیلی

$$= \text{ف (س + مف س)} = \text{ف (س)} + \text{مف س} \times \text{ف}'\text{(س)}$$

$$+ \frac{(\text{مف س})^2}{1 \times 2} \text{ف}''\text{(س)} + \cdots$$

$$= \text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{مف س} \times \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} \left(\text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right) + \cdots$$

ٹیلر کے مسئلہ سے۔
اس لیے اگر ن پر فی اکائی طول زنجیر کی کمیت م ہو اور محوروں کے متوازی جزو ن ق کی ابتدائی رفتاریں بالترتیب ء اور و ہوں تو

$$\text{م مف س ء} = \left[\text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{مف س} \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} \left(\text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right) + \cdots\right] - \text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

یعنی انتہا میں جب مف س لا انتہا چھوٹا ہو جائے تو

$$\text{م ء} = \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} \left(\text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right) \cdots\cdots\cdots (1)$$

اسی طرح

$$\text{م و} = \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} \left(\text{ت} \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right) \cdots\cdots\cdots (2)$$

نیز چونکہ رسّی ناقابل کھنچاؤ ہے اس لیے ن کی رفتار ن ق کی سمت میں یعنی بالآخر ن پر کے مماس کی سمت میں مساوی ہوگی ق کی رفتار کے اسی سمت میں۔

اس لیے

د جم سا + و جب سا = (د + مف د) جم سا + (و + مف و) جب سا

∴ مف د جم سا + مف و جب سا = ۰

یعنی $\frac{\text{فد}}{\text{فس}} \frac{\text{فلا}}{\text{فس}} + \frac{\text{فو}}{\text{فس}} \frac{\text{فسا}}{\text{فس}} = ۰$ .... (۳)

۱۴۲ - مماسی اور عمادی تحلیل

اگر ہم ابتداءً ن پر کی مماسی اور عمادی رفتار کو بالترتیب ق اور ع سے تعبیر کریں تو ہمیں نسبۃً آسان مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

مماسی تحلیل سے

م مف س × ق = (ت + مف ت) جم مف سا - ت

= مف ت + دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداریں

یعنی انتہا میں $\frac{\text{فت}}{\text{فس}}$ = م ق .... (۱)

اسی طرح عماد کی سمت میں تحلیل کرنے سے

م مف س × ع = (ت + مف ت) جب مف سا = ت مف سا + ...

یعنی انتہا میں $\frac{\text{ت}}{\text{ر}}$ = م ع .... (۲)

جہاں ر نصف قطر انحنا ہے۔

ناقابل کھنچاؤ ہونے کی شرط سے حاصل ہوتا ہے

ق = (ق + مف ق) جم مف سا - (ع + مف ع) جب مف سا

یعنی ۰ = مف ق - ع مف سا

یعنی $$\frac{\text{ف}\,\text{و}_\text{ص}}{\text{ف}\,\text{س}} = \text{و}_\text{ر}\,\frac{\text{ف}\,\text{سا}}{\text{ف}\,\text{س}} = \frac{\text{و}_\text{ر}}{\text{ر}} \text{ انتہا میں} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

(۱)، (۲) اور (۳) سے $\text{و}_\text{ر}$ اور $\text{و}_\text{ص}$ کو ساقط کرنے سے

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف}\,\text{س}}\left[\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{ف}\,\text{ت}}{\text{ف}\,\text{س}}\right] = \frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{ت}}{\text{ر}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

چونکہ زنجیر کی ابتدائی شکل معلوم ہے اس لیے ر، س کا معلومہ تفاعل ہے۔ نیز م یا مستقل ہے یا س کا معلومہ تفاعل ہے۔ پس مساوات (۴) سے ت معلوم ہو جاتا ہے اور اس کی قیمت میں دو اختیاری مستقل بھی داخل ہو جاتے ہیں۔ ان مستقلوں کا تعیّن اس امرِ واقع کی بناء پر ہو سکتا ہے کہ ت کی قیمت ایک سرے پر معلوم ہے جو دیے ہوئے دھکے کے تناؤ کے مساوی ہے اور دوسرے سرے پر صفر ہے۔

پس ت معلوم ہو گیا اور اس سے (۱) اور (۲) کی مدد سے ہر ایک جزو کی ابتدائی رفتاریں متعین ہو گئیں۔

مشق - ایک یکساں زنجیر زنجیرہ (Catenary) کی شکل میں لٹک رہی ہے اور اس کے سرے ایک ہی هموار ی پر هیں - ہر ایک سرے پر دھکات مماسًا عمل کرتا ہے۔ زنجیر کے ہر ایک نقطہ پر دھکا معلوم کرو اور اس کی ابتدائی رفتار دریافت کرو۔

اس منحنی میں $\text{س} = \text{ج}\,\text{مس}\,\text{سا}$ یعنی نیم قطر انحنا $\text{ر} = \frac{\text{ف}\,\text{س}}{\text{ف}\,\text{سا}} = \text{ج}\,\text{قط}^2\,\text{سا}$

اگر تناؤ ت سے تعبیر کیا جائے تو

$$\frac{\text{ف}\,\text{ت}}{\text{ف}\,\text{س}} = \frac{\text{ف}\,\text{ت}}{\text{ف}\,\text{سا}} \times \frac{\text{جم}^2\,\text{سا}}{\text{ج}}$$

اور $\frac{\text{ف}^2\text{ت}}{\text{فزس}^2} = \frac{\text{ف}^2\text{ت}}{\text{فزسا}^2}\,\frac{\text{جم}^4\,\text{سا}}{\text{ج}^2} - \frac{2\,\text{جب سا جم}^3\,\text{سا}}{\text{ج}^2} \times \frac{\text{فزت}}{\text{فزسا}}$

اس لیے مساوات (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}^2\text{ت}}{\text{فزسا}^2} - 2\,\text{مس سا}\,\frac{\text{فزت}}{\text{فزسا}} = \text{ت}$$

یعنی $\frac{\text{ف}^2\text{ت}}{\text{فزسا}^2}\,\text{جم سا} - \text{جب سا}\,\frac{\text{فزت}}{\text{فزسا}} = \text{ت جم سا} + \text{جب سا}\,\frac{\text{فزت}}{\text{فزسا}}$

$$\therefore \frac{\text{فزت}}{\text{فزسا}}\,\text{جم سا} = \text{ت جب سا} + \text{ا}$$

$\therefore$ ت جم سا = ا سا + ب .... (۱)

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

نیز مساواتوں (۱) اور (۲) سے

$\text{م وس} = \frac{\text{جم}^2\text{سا}}{\text{ج}} \times \frac{\text{فزت}}{\text{فزسا}} = \frac{1}{\text{ج}}\left[\text{ا جم سا} + \text{ا سا جب سا} + \text{ب جب سا}\right]$ ...... (۲)

اور $\text{م وہ} = \frac{\text{ت}}{\text{ج}}\,\text{جم}^2\,\text{سا} = \frac{\text{ا سا} + \text{ب}}{\text{ج}}\,\text{جم سا}$ .... (۳)

اب تشاکل سے ظاہر ہے کہ سب سے نچلے نقطہ کی کوئی حرکت مماساً نہیں ہوسکتی۔
پس وس کو صفر ہونا چاہیے سا = ۰ پر، اس لیے ا = ۰۔

نیز اگر سا. کسی ایک سرے پر مماس کا میلان ہو تو (۱) سے،

$$\text{ب} = \text{ت. جم سا.}$$

$$\therefore \text{ت} = \text{ت.}\,\frac{\text{جم سا.}}{\text{جم سا}} = \frac{\text{ت. جم سا.}}{\text{ج}} \times \text{م}$$

پس کسی نقطہ پر دھکا تناؤ اس کے معین کے متناسب ہوتا ہے۔

نیز $\text{وس} = \frac{\text{ت.}}{\text{م ج}}\,\text{جم سا جب سا}$ اور $\text{وہ} = \frac{\text{ت.}}{\text{م ج}}\,\text{جم سا. جم سا}$

نقطہ زیر بحث کی رفتار زنجیرہ کے مرتب کے متوازی

$$= و_س \text{ جم سا} - و_ح \text{ جب سا} = ۰$$

پس زنجیرہ پر کا ہر ایک نقطہ مرتب پر علی القوائم سمت میں حرکت کرنا شروع کرتا ہے،

اور کسی نقطہ پر رفتار $= \sqrt{و_س^۲ + و_ح^۲} = \frac{ت}{م ج} \text{ جم سا}$

۱۴۲ - ایک زنجیر کی حرکت جو ایک سطح مستوی میں آزادانہ حرکت کر سکتی ہو۔

دفعہ ۱۴۱ کی شکل میں فرض کرو کہ لا اور ما دو قوتیں ہیں جو زنجیر کے جزو ن ق پر محوروں کی متوازی سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ نیز فرض کرو کہ د اور و محوروں کے متوازی نقطہ ن کی ترکیبی رفتاریں ہیں۔ تب اگر ن پر تناؤ ت ہو تو اس کا جزو ترکیبی و لا کے متوازی $= ت \frac{فرلا}{فرس} = ف(س)$

جہاں س قوس و ن کو تعبیر کرتا ہے۔

اگر و ن = مف س تو ق پر تناؤ و لا کے متوازی

$$= ف(س + مف س) = ف(س) + مف س \times فَ(س) + \ldots$$

اس لیے اگر فی اکائی طول زنجیر کی کمیّت م ہو تو ن ق کی حرکت کی مساوات ہوگی

$$م \, مف س \times \frac{فرد}{فرت} = \text{و لا کے متوازی قوتیں}$$

$$= م \, مف س . لا + \{ف(س) + مف س \times فَ(س) + \ldots\} - ف(س)$$

$$= م \, مف س \times لا + مف س \times \frac{فر}{فرس}\left(ت \frac{فرلا}{فرس}\right) + \ldots$$

مف س پر تقسیم کرنے اور مف س کی قوتوں کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{م}\ \frac{\text{فر}^2\text{ء}}{\text{فرت}^2} = \text{م لا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اسی طرح

$$\text{م}\ \frac{\text{فر}^2\text{و}}{\text{فرت}^2} = \text{م ما} + \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

زنجیر کو نا قابل کھنچاؤ فرض کرنے سے ظاہر ہے کہ ن کی رفتار ن ق کی سمت میں وہی ہوگی جو ق کی رفتار ہے ن ق کی سمت میں

$$\therefore\ \text{ء}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{و}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = (\text{ء} + \text{مف ء})\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + (\text{و} + \text{مف و})\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$$

یعنی

$$\text{مف ء}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{مف و}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = ۰$$

اور اس لیے

$$\frac{\text{فرء}}{\text{فرس}}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرس}}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

اِن مساواتوں سے لا ، ما اور ت کی قیمتیں س اور ت کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں یعنی ہمیں وقت ت پر کسی جزو کا مقام معلوم ہوتا ہے جو قوسی فاصلہ س پر واقع ہو۔

مثالیں

۱۔ نصف دائرہ کی شکل کی ایک یکساں زنجیر کو ایک سرے پر دھکے کی قسم کے تناؤ ٹ سے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس سرے سے زاویئی فاصلہ طہ پر دھکے کی قسم کا تناؤ ہے

$$\text{ٹ}\ \frac{\text{جبز}\,(\pi - \text{طہ})}{\text{جبز}\,\pi}$$

۲ - ایک زنجیر کی شکل منحنی $ر = ا و^{\frac{۳ ط}{۲}}$ ہے اور اس کے سرے $ط = ۰$ اور $ط = بہ$ پر ہیں اسے اُس نقطہ پر جہاں $ط = ۰$ ایک مماسی دھکا ت دیا گیا ہے ، اگر دوسرا سرا آزاد ہو تو ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر دھکے کی قسم کا تناؤ ہے

$$ت \frac{و^{\frac{۵ بہ - ط}{۲}} - و^{۲ط}}{و^{\frac{۵ بہ}{۲}} - ۱}$$

۳ - ایک یکساں زنجیر کی شکل ایک ایسے مستوی منحنی کی ہے جس کا ہر سمتی نیم قطر منحنی کو زاویہ $مس^{-۱} \frac{۱}{بہ}$ پر قطع کرتا ہے - اور جس کے سروں پر سمتی نیم قطروں کے طول ا اور ۲۵۶ ہیں - اگر قطب سے قریب ترین اور بعید ترین نقطوں پر ایک ساتھ مماساً دھکے کی قسم کے تناؤ جو بالترتیب ۲ اور ۱ اکائیوں کے مساوی ہوں لگائے جائیں تو ثابت کرو کہ قطب سے ۸۱ اکائیوں کے فاصلہ پر جو نقطہ ہے اس پر دھکے کی قسم کا تناؤ $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ اکائیوں کے مساوی ہوگا -

۴ - بے لچک تار کا ایک چھلا ہے جس کا نصف قطر ر ہے - اسے افقی محل میں رکھا گیا ہے اور اس پر نصف قطر س اور کمیت م کا ایک کرہ (جس کا مرکز تار کے مرکز کے انتصاباً اوپر ہے) انتصاباً رفتار و کے ساتھ سیدھا گرتا ہے - ثابت کرو کہ تار میں دھکے کی قسم کا تناؤ $\frac{م و}{۲ بہ} \cdot \frac{ر}{\sqrt{س^۲ - ر^۲}}$ پیدا ہوتا ہے -

۵ - ایک چکنی نیم مستدیر نلی ہے جس کا نصف قطر ا ہے اس کے اندر ایک وزنی ناقابل کھنچاؤ زنجیر پڑی ہے جس کا طول $ا \pi$ ہے اور اس میں ٹھیک پھنس کر آتی ہے - نلی کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا قطر متوازی الافق ہے ، راس اوپر کی طرف ہے اور اس کے سرے کھلے ہیں - اب انتصابی مستوی میں خفیف سا خلل واقع ہوتا ہے - اگر زنجیر کا وہ طول جو کسی لمحہ میں نلی سے باہر پھسل آئے $ا سا$ ہو (جہاں $سا د \pi$) تو ثابت کرو کہ

$$ا \pi \frac{فر^۲ سا}{فرت^۲} = ج (سا + جب سا)$$

نیز معلوم کرو کہ کسی آن میں زنجیر کے کسی نقطہ پر تناؤ بڑے سے بڑا ہے -

استوار جسم کا علمِ حرکت

گیارہواں باب

جمود کے معیارِ اثر اور حاصل ضرب - صدر محور

۱۴۴ - اگر جسم کی کمیّت کے کسی جزو م کا عمودی فاصلہ ایک معلومہ خطِ مستقیم سے رہو تو مقدار Σ م ر۲ کو دیے ہوئے خط کے گرد "جسم کے جمود کا معیارِ اثر" کہتے ہیں۔

دوسرے لفظوں میں جمود کا معیارِ اثر حسبِ ذیل طریقہ سے حاصل ہوتا ہے، جسم کا ہر جزو لو اور اس کو معلومہ خطِ مستقیم سے جو اس کا عمودی فاصلہ ہے اس کے مربع سے ضرب دو - پھر ان سب مقداروں کو جو حاصل ہوں باہم جمع کرو۔

اگر یہ مجموعہ ھ ک۲ کے مساوی ہو جہاں ھ کل کمیّت ہے جسم کی، تو ک کو معلومہ خط کے گرد "گھماؤ کا نصف قطر" کہتے ہیں۔

اگر تین باہم علی القوائم محور و لا، و ما، و ی لیے جائیں اور اگر نظام کے کسی جزو م کے محدد ان محوروں کے لحاظ سے لا، ما، ی ہوں تو مقداروں Σ م ما ی، Σ م ی لا، Σ م لا ما کو بالترتیب بلحاظ محوروں ما اور ی کے، ی اور لا کے اور لا اور ما کے جمود کے حاصل ضرب کہتے ہیں۔

چونکہ لا کے محور سے اس جزو کا عمودی فاصلہ $\sqrt{\text{ما}^2 + \text{ی}^2}$ ہے اس لیے

محور لا کے گرد جمود کا معیارِ اثر $= \text{ع}\ \text{م}\ (\text{ما}^2 + \text{ی}^2)$

۱۴۵ - جمود کے معیار اثروں کی سادہ صورتیں۔

۱- کمیّت م اور طول ۲ ل کی ایک یکساں پتلی سلاخ - فرض کرو کہ سلاخ اب ہے اور ن ق اس پر کا کوئی جزو ایسا ہے کہ ا ن = لا اور ن ق = مف لا،

تب ن ق کی کمیت $= \dfrac{\text{مف لا}}{\text{۲ ل}} . \text{م}$

اس لیے ایسے محور کے گرد جو ا میں سے سلاخ پر علی القوائم کھینچا جائے جمود کا معیارِ اثر

$$= \text{ع} \frac{\text{مف لا}}{\text{۲ ل}} \times \text{م} \times \text{لا}^2 = \frac{\text{م}}{\text{۲ ل}} \int_0^{\text{۲ ل}} \text{لا}^2\ \text{فر لا}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{۲ ل}} \times \frac{1}{3} [\text{۲ ل}]^3 = \text{م} \times \frac{\text{۴ ل}^2}{3}$$

اسی طرح اگر و سلاخ کا مرکز ہو، و ن = ما، ن ق = مف ما تو سلاخ کے جمود کا معیارِ اثر ایسے محور کے گرد جو و میں سے سلاخ پر عمود وار ہو

$$= \text{ع} \frac{\text{مف ما}}{\text{۲ ل}} \times \text{م} \times \text{ما}^2 = \frac{\text{م}}{\text{۲ ل}} \int_{-\text{ل}}^{+\text{ل}} \text{ما}^2\ \text{فر ما}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{۲ ل}} \times \frac{1}{3} [\text{ما}^3]_{-\text{ل}}^{+\text{ل}} = \text{م} \frac{\text{ل}^2}{3}$$

۲- مستطیلی پترا - فرض کرو کہ ا ب ج د پترا ہے، جس کا مرکز و ہے ا ب = ۲ ل اور ا د = ۲ ب، ا د کے متوازی بہت سے خط کھینچنے سے ہمیں ٹکڑوں کی ایک بہت بڑی تعداد حاصل ہوتی ہے جن میں سے ہر ایک بالآخر ایک خطِ مستقیم بن جاتا ہے۔

ان میں سے ہر ایک ٹکڑے کے جمود کا معیارِ اثر و میں سے گزرنے والے ا ب کے متوازی محور کے گرد (۱) کی رُو سے) مساوی ہے اس کی کمیت مضروب $\frac{\text{ب}^2}{3}$ کے۔
اس لیے سب ٹکڑوں کے معیارِ اثروں کا مجموعہ یعنی پورے مستطیل کا معیارِ اثر اسی خط کے گرد

$$= \text{م} \times \frac{\text{ب}^2}{3}$$

اسی طرح اِس کے جمود کا معیارِ اثر و میں سے گزرنے والے محور کے گرد جو ضلع ۲ب کے متوازی ہے = $م \frac{ا^۲}{۳}$

اگر اُن محوروں کے لحاظ سے جو و میں سے بالترتیب ا ب اور ا د کے متوازی کھینچے جائیں پترے پر کے کسی نقطہ ن کے محدد لا، ما ہوں تو اِن نتائج سے حاصل ہوتا ہے

$ت م ما^۲ =$ و لا کے گرد جمود کا معیارِ اثر $= م \frac{ب^۲}{۳}$ اور $ت م لا^۲ = م \frac{ا^۲}{۳}$

و میں سے پترے پر عمود وار محور کے گرد پترے کے جمود کا معیارِ اثر

$$= ت م \times و ن^۲ = ت م (لا^۲ + ما^۲) = م \frac{ا^۲ + ب^۲}{۳}$$

۳ - مستطیلی متوازی السطوح - فرض کرو کہ اس کے اضلاع کے طول بالترتیب ۲ا، ۲ب اور ۲ج ہیں - مرکز میں سے اضلاع ۲ا کے متوازی محور کھینچو اور فرض کرو کہ متوازی السطوح اس محور پر عمود وار بہت سے ٹکڑوں سے بنا ہوا ہے - اِن میں سے ہر ایک ٹکڑے کے طول اور عرض ۲ب اور ۲ج ہیں - اس لیے اس محور کے گرد اس کے جمود کا معیارِ اثر مساوی ہے اس کی کمیت مضروب $\frac{ب^۲ + ج^۲}{۳}$، اس لیے کل جسم کے جمود کا معیارِ اثر مساوی ہے کل کمیت مضروب $\frac{ب^۲ + ج^۲}{۳}$ یعنی $م \frac{ب^۲ + ج^۲}{۳}$

۴ - دائرہ کا محیط - فرض کرو کہ و لا مرکز و میں سے کوئی قطر کھینچا گیا ہے ن محیط پر کوئی نقطہ ایسا ہے کہ زاویہ لا و ن = ط، ن ق = ا مف ط ہے، تب و لا کے گرد جمود کا معیارِ اثر

$$= ت \left[\frac{ا مف ط}{۲ \pi ا} م \right] \times ا^۲ جب^۲ ط = \frac{م ا^۲}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} جب^۲ ط فر ط$$

$$= ۴ \times \frac{م ا^۲}{۲\pi} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} جب^۲ ط فر ط = \frac{۲ م ا^۲}{\pi} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\pi}{۲} = م \frac{ا^۲}{۲}$$

۵ ـ نصف قطر ا کا مستدیر قرص ـ نصف قطروں ر اور ر + مف ر والے ہم مرکز دائروں کے اندر جو رقبہ گھرا ہوتا ہے وہ ۲ π ر مف ر ہے اور اس لیے اس کی کمیت

$$= \frac{\text{۲}\pi\,\text{ر فر ر}}{\pi\,\text{ا}^{\text{۲}}}\,\text{م}$$

دفعہ ماقبل کی رُو سے اس کے جمود کا معیارِ اثر قطر کے گرد $= \frac{\text{۲ ر فر ر}}{\text{ا}^{\text{۲}}}\,\text{م} \times \frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{\text{۲}}$

پس مطلوبہ جمود کا معیارِ اثر

$$= \frac{\text{م}}{\text{ا}^{\text{۲}}}\int_{\text{۰}}^{\text{ا}} \text{ر}^{\text{۳}}\,\text{فر ر} = \frac{\text{م}}{\text{ا}^{\text{۲}}}\times\frac{\text{ا}^{\text{۴}}}{\text{۴}} = \text{م}\,\frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۴}}$$

اس قطر پر علی القوائم قطر کے گرد جمود کا معیارِ اثر بھی یہی ہے ۔
مرکز میں سے قرص پر عمود وار محور کے گرد جمود کا معیارِ اثر = (حسب ۲) ان کا مجموعہ $= \text{م}\,\frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}}$

محوروں ۲ ا اور ۲ ب والا ناقصی قرص ـ ا کے محور کے متوازی خط کھینچنے سے جو قاشیں بنتی ہیں اُن پر غور کرنے سے ا کے محور کے گرد جمود کا معیارِ اثر صریحاً

$$= \text{۲}\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\left[\frac{\text{۲ ب جب فہ فر (ا جم فہ)}}{\pi\,\text{ا ب}}\,.\,\text{م}\right]\times\frac{\text{ب}^{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{فہ}}{\text{۳}}$$

$$= \frac{\text{۴}}{\text{۳}}\times\frac{\text{م ب}^{\text{۲}}}{\pi}\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\text{جب}^{\text{۴}}\,\text{فہ فر فہ} = \text{م}\,\frac{\text{ب}^{\text{۲}}}{\text{۴}}$$

اسی طرح محور ب کے گرد جمود کا معیارِ اثر $= \text{م}\times\frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۴}}$

۶ ـ کھوکھلا کرہ ـ فرض کرو کہ یہ (۴) کے دائرہ کو قطر کے گرد گھمانے سے بنتا ہے، تب قطر کے گرد جمود کا معیارِ اثر

$$= \int_{\text{۰}}^{\pi}\left[\frac{\text{ا مف طہ}\times\pi\,\text{۲ ا جب طہ}}{\text{۴}\pi\,\text{ا}^{\text{۲}}}\,.\,\text{م}\right]\text{ا}^{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{طہ} = \frac{\text{م ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}}\int_{\text{۰}}^{\pi}\text{جب}^{\text{۳}}\,\text{طہ فر طہ}$$

$$= \text{۲}\times\frac{\text{م ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}}\times\frac{\text{۲}}{\text{۳}\times\text{۱}} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{م ا}^{\text{۲}}$$

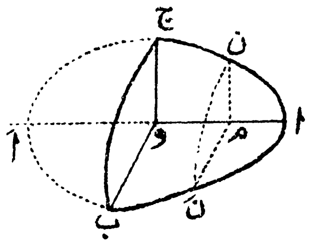
۷ — ٹھوس کرہ — نصف قطر ر اور ر + مف ر والے کروں کے اندر جو پتلا خول گھر جاتا ہے اُس کا حجم = $4\pi\,\text{ر}^2\,\text{مف ر}$ اور اِس لیے اُس کی کمیّت

$$= \frac{4\pi\,\text{ر}^2\,\text{مف ر}}{\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3}\,\text{م} \quad \text{یعنی} \quad \frac{3\,\text{ر}^2\,\text{مف ر}}{\text{ا}^3}\,\text{م}$$

اس لیے (۶) کی رُو سے قطر کے گرد مطلوبہ جمود کا معیارِ اثر

$$= \int_{0}^{\text{ا}} \frac{3\,\text{ر}^2\,\text{مف ر}}{\text{ا}^3}\,\text{م} \times \frac{2\,\text{ر}^2}{3} = \frac{3\,\text{م}}{\text{ا}^3} \times \frac{\text{ا}^5}{5} = \text{م} \times \frac{2\,\text{ا}^2}{5}$$

۸ — کسی صدر محور کے گرد ٹھوس ناقص نما — فرض کرو کہ ناقص نما کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2}=1$ ہے۔



محوروں ما اور ی میں سے جو سطح مستوی گزرتی ہے اُس کے متوازی مرکز سے فاصلوں لا اور لا + مف لا پر دو سطوح مستوی کھینچنے سے اِن کے اندر جو قاش منقطع ہوتی ہے اُس پر غور کرو۔

ن م نَ میں سے گزرنے والی تراشش کا رقبہ ہے

$$\pi \times \text{م ن} \times \text{م نَ}$$

اب $$\frac{\text{ن م}^2}{\text{و ج}^2}+\frac{\text{و م}^2}{\text{و ا}^2}=1$$

یعنی $$\text{م ن} = \text{ج}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}$$

اسی طرح $$\text{م نَ} = \text{ب}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}$$

اس لیے پتلی قاش کا حجم $= \pi\,\text{ب ج}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right)\times\text{مف لا}$

بہٰذا اِس کے جمود کا معیار اِسی کی سطح مستوی پر عمود وار خط کے گرد

$$= \text{اس کی کمیت} \times \frac{\text{م ن}^2 + \text{م ن}'^2}{4}$$

$$= \pi \,\text{ب ج مف لا} \times \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2}\right)^2 \times \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2}{4} \times \text{ک}$$

اس لیے مطلوبہ جمود کا معیارِ اثر

$$= \pi \,\text{ب ج} \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2}{4} \int_{-\text{و}}^{+\text{و}} \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2}\right)^2 \text{مف لا} \times \text{ک}$$

$$= \pi \,\text{و ب ج} \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2}{4} \times \frac{16}{15} \text{ک} = \frac{4}{3}\left(\pi \,\text{و ب ج ک}\right) \times \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2}{5}$$

$$= \text{م} \times \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2}{5}$$

۱۴۶ - ڈاکٹر راؤتھ[1] نے بہت سے سادہ قسم کے اجسام کے جمود کے معیار اثروں کو یاد رکھنے کے لیے ایک آسان طریقہ بتایا ہے، یہ حسب ذیل ہے
تشاکل کے کسی محور کے گرد جمود کا معیارِ اثر ہوتا ہے

$$\text{کمیت} \times \frac{\text{علی القوائم نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ}}{3،4 \text{ یا } 5}$$

نسب نما ۳ یا ۴ یا ۵ ہوگا اگر بالترتیب جسم مستطیلی ہو، ناقصی ہو (جس میں مستدیرہ بھی شامل ہے) یا ناقص نمائی ہو (جس میں کروی بھی شامل ہے)

۱۴۷ - اگر جسم کے مرکزِ جمود ث میں سے گزرنے والے کسی خط یا خطوں کے گرد جسم کے جمود کا معیارِ اثر اور جمود کے حاصل ضرب معلوم ہوں تو کسی متوازی خط یا خطوں کے گرد یہی مقادیر معلوم کرو۔

[1] Dr. Routh

فرض کرو کہ ث لا ، ث ما اور ث ے کوئی تین محور ہیں جو جسم کے مرکزِ ثقل ث میں سے گزرتے ہیں اور و لاَ ، و ماَ ، و ےَ متوازی محور ہیں جو ایک نقطہ و ہیں سے گزرتے ہیں ۔ فرض کرو کہ جسم کے کسی جزو م کے محدد بلحاظ پہلے محوروں کے لا ، ما ، ی اور بلحاظ دوسرے محوروں کے لاَ ، ماَ ، یَ ہیں تب اگر ف ، گ ، ھ محدد ہوں ث کے بلحاظ و لاَ ، و ماَ ، و ےَ کے تو

لاَ = لا + ف ، ماَ = ما + گ ، یَ = ی + ھ

اس لیے کسی جسم کے جمود کا معیارِ اثر بلحاظ و لاَ کے

= ج م (ماَ^۲ + یَ^۲) = ج م [ما^۲ + ی^۲ + ۲ ما گ + ۲ ی ھ + گ^۲ + ھ^۲] ...(۱)

اب ج م×۲ ما گ = ۲گ × ج م ما

نیز سکونیات سے ہم جانتے ہیں کہ (ج م ما)/(ج م) = بلحاظ مبداء ث کے مرکزِ ثقل ث کا ما محدد = ۰ اس لیے ج م × ۲ ما گ = ۰ اور اسی طرح سے

ج م × ۲ ی ھ = ۰

اس لیے (۱) سے

و لاَ کے لحاظ سے جمود کا معیارِ اثر

= ج م (ما^۲ + ی^۲) + مر (گ^۲ + ھ^۲)

= جمود کا معیارِ اثر بلحاظ ث لا کے + جمود کا معیارِ اثر کمیت مر کا جو ث پر رکھی ہو بلحاظ محور و لاَ کے ۔

نیز محوروں و لاَ اور و ماَ کے لحاظ سے جمود کا حاصلِ ضرب

= ج م لاَ ماَ = ج م (لا + ف) (ما + گ)

$=$ ع م [لا ا + گ لا + ف ا + ف گ]

$=$ ع م لا ا + مر ف گ

= جمود کا حاصل ضرب ث لا اور ث ما کے گرد + کمیت مر کے جمود کا حاصلِ ضرب جو ث پر رکھی ہو محور و لا اور و ما کے گرد۔

نتیجہ صریح — اس سے ظاہر ہے کہ ایک ہی سمت میں بہت سے خطوں میں سے اس خط کے گرد جو جمود کے مرکز میں سے گزرتا ہے جمود کا معیارِ اثر کم سے کم ہوتا ہے۔

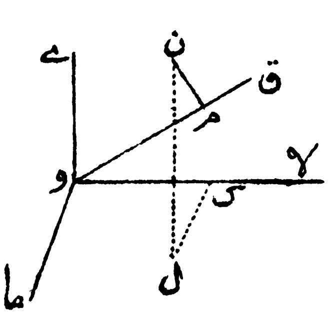
مشقیں - ایک پورے دائرہ کے محیط کے جمود کا معیارِ اثر ایک مماس کے گرد

$$= \text{مر}\frac{\text{ر}^2}{2} + \text{مر ر}^2 = \frac{3}{2}\text{مر ر}^2$$

ایک ٹھوس کرہ کے جمود کا معیارِ اثر مماس کے گرد

$$= \text{مر}\frac{2\text{ر}^2}{5} + \text{مر ر}^2 = \frac{7}{5}\text{مر ر}^2$$

۱۴۸ - اگر ایک جسم کے جمود کے معیارِ اثر اور حاصل ضرب تین متراکز اور علی القوائم خطوں میں سے ہر ایک کے گرد معلوم ہوں تو نقطۂ تراکز میں سے گزرنے والے کسی اور خط کے گرد جمود کا معیارِ اثر معلوم کرو۔



فرض کرو کہ و لا، و ما، و ے تین معلومہ محور ہیں اور اِن کے گرد جمود کے معیارِ اثر بالترتیب ا، ب، ج ہیں اور محوروں ما اور ے، ے اور لا، لا اور ما کے گرد

جمود کے حاصل ضرب بالترتیب د، ع، ف ہیں۔

نیز فرض کرو کہ خط و ق کے گرد معیارِ اثر مطلوب ہے اور اس کی سمتی جیوب التمام ل، م اور ن ہیں۔

جسم کے کسی جزو مَ کو لو جو ن پر واقع ہے اور جس کے محدد لا، ما اور ی ہیں یعنی و ک = لا، ک ل = ما اور ل ن = ی۔

ن م عمود کھینچو محور و ق پر

تب ن م^2 = و ن^2 - و م^2

اب و ن^2 = لا^2 + ما^2 + ی^2

اور و م = خط و ن کا ظل و ق پر

= شکستہ خط و ک ل ن کا ظل و ق پر

= ل × و ک + م × ک ل + ن × ل ن = ل لا + م ما + ن ی

پس و م کے گرد مطلوبہ جمود کا معیارِ اثر

= Σ مَ × ن م^2 = Σ مَ [لا^2 + ما^2 + ی^2 - (ل لا + م ما + ن ی)^2]

= Σ مَ × [لا^2 (م^2 + ن^2) + ما^2 (ن^2 + ل^2) + ی^2 (ل^2 + م^2) - ۲ م ن ما ی - ۲ ن ل ی لا - ۲ ل م لا ما]

کیونکہ ل^2 + م^2 + ن^2 = ۱

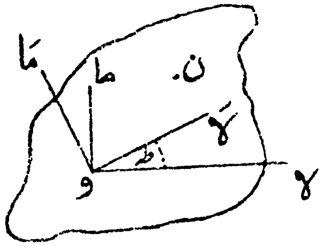
= ل^2 Σ مَ (ما^2 + ی^2) + م^2 Σ مَ (ی^2 + لا^2) + ن^2 Σ مَ (لا^2 + ما^2)

- ۲ م ن Σ مَ ما ی - ۲ ن ل Σ مَ ی لا - ۲ ل م Σ مَ لا ما

= ا ل^2 + ب م^2 + ج ن^2 - ۲ د م ن - ۲ ع ن ل - ۲ ف ل م

۱۴۹- دفعۂ ماقبل کی ایک خاص صورت کے طور پر مستوی پترے پر غور کرو۔

فرض کرو کہ دو علی القوائم خطوں و لا اور وما کے گرد ایک پترے کے جمود کے معیارِ اثر بالترتیب ا اور ب ہیں اور انہی دو خطوں کے گرد جمود کا حاصل ضرب ف ہے۔



پس ا = Σ م ما^{2} ، ب = Σ م لا^{2}
اور ف = Σ م لا ما اگر کسی نقطہ ن کے محدد بلحاظ محوروں ولاَ ، وماَ کے (لاَ ، ماَ) ہوں، جہاں ∠ لا و لاَ = طہ تو

لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ

اور ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ

∴ لاَ = لا جم طہ + ما جب طہ اور ماَ = ما جم طہ - لا جب طہ

پس جمود کا معیارِ اثر ولاَ کے گرد

= Σ م ماَ^{2} = Σ م (ما جم طہ - لا جب طہ)^{2}

= جم^{2} طہ Σ م ما^{2} + جب^{2} طہ Σ م لا^{2} - ۲ جب طہ جم طہ Σ م لا ما

= ا جم^{2} طہ + ب جب^{2} طہ - ۲ ف جب طہ جم طہ

جمود کا حاصل ضرب ولاَ ، وماَ کے گرد

= Σ م لاَ ماَ = Σ م (لا جم طہ + ما جب طہ) (ما جم طہ - لا جب طہ)

= Σ م [ما^{2} جب طہ جم طہ - لا^{2} جب طہ جم طہ + لا ما (جم^{2} طہ - جب^{2} طہ)]

= (ا - ب) جب طہ جم طہ + ف جم ۲ طہ

مستوی پترے کی صورت میں اگر دو علی القوائم خطوں کے گرد جو پترے پر

واقع ہوں. جمود کے معیارِ اثر ا اور ب ہوں تو اِن کے نقطۂ تقاطع میں سے پترے پر علی القوائم خط کے گرد جمود کا معیارِ اثر

$$ا + ب = \Sigma\, م\, لا^2 + \Sigma\, م\, ما^2 = \Sigma\, م\, (لا^2 + ما^2) =$$

۱۵۰ - مشق ۱ - ایک ناقصی رقبہ کے جمود کا معیارِ اثر ایک ایسے خط ج ن کے گرد معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ زاویہ طہ بنائے، نیز جمود کا معیارِ اثر ج ن کے متوازی مماس کے گرد معلوم کرو۔

محورِ اعظم اور محورِ اصغر کے گرد جمود کے معیارِ اثر ا اور ب بالترتیب دفعہ ۱۴۵ کی رُو سے، $م\frac{ب^2}{۴}$ اور $م\frac{ا^2}{۴}$ ہیں، پس جمود کا معیارِ اثر خط ج ن کے گرد

$$= م\frac{ب^2}{۴}\, جم^2 طہ + م\frac{ا^2}{۴}\, جب^2 طہ$$ کیونکہ ف = ۰ تشاکل سے

ج ن کے متوازی مماس پر عمود ج ما $= \frac{اب}{ج ن}$

اس لیے دفعہ ۱۴۷ کی رُو سے جمود کا معیارِ اثر اِس مماس کے گرد

$$= م\frac{ب^2}{۴}\, جم^2 طہ + م\frac{ا^2}{۴}\, جب^2 طہ + م\frac{ا^2 ب^2}{ج ن^2}$$

$$= م\frac{ب^2}{۴}\, جم^2 طہ + م\frac{ا^2}{۴}\, جب^2 طہ + م\, ا^2 ب^2 \left[\frac{جم^2 طہ}{ا^2} + \frac{جب^2 طہ}{ب^2}\right]$$

$$= \frac{۵م}{۴}\left[ا^2 جب^2 طہ + ب^2 جم^2 طہ\right]$$

مشق ۲ - ایک یکساں مکعب کے جمود کا معیارِ اثر اس کے مرکز میں سے گذرنے والے کسی خط کے گرد وہی ہوتا ہے۔

کیونکہ $ا = ب = ج$ اور $د = ع = ف = ۰$

اس لیے دفعہ ۱۴۸ کی رُو سے

جمود کا معیارِ اثر = ا (ل^۲ + م^۲ + ن^۲) = ا

مثالیں

مندرجہ ذیل کا جمود کا معیارِ اثر معلوم کرو:

۱ - ایک مستطیل کا اس کے وتر کے گرد اور مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط کے گرد۔

۲ - ایک مستدیر رقبہ کا اِس کی سطحِ مستوی میں ایک ایسے خط کے گرد جس کا عمودی فاصلہ اس کے مرکز سے ج ہے۔

۳ - قوسِ دائرہ کا (۱) قوس کی تنصیف کرنے والے قطر کے گرد (۲) مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد جو اِس کی سطح پر عمود ہو (۳) اس کے وسطی نقطہ میں سے ایک محور کے گرد جو اِس کی سطحِ مستوی پر عمود وار ہو۔

۴ - ایک متساوی الساقین مثلث کا اُس عمود کے گرد جو اِس کے رأس سے مقابل کے ضلع پر کھینچا جائے۔

۵ - ایک مثلثی رقبہ ا ب ج کا ا میں سے گزرنے والے اِس کی سطح پر عمود وار خط کے گرد

[جواب $\frac{\text{مـ}}{۱۲}(۳\text{ب}^۲ + ۳\text{ج}^۲ - \text{ا}^۲)$]

۶ - ر^۲ = ا^۲ جم ۲ طہ کے رقبہ کا اس کے محور کے گرد

[جواب $\frac{\text{مـ ا}^۲}{۱۶}\left(\pi - \frac{۸}{۳}\right)$]

۷ - ایک قائم مستدیر اسطوانہ کا (۱) اِس کے محور کے گرد (۲) ایک خطِ مستقیم کے گرد جو اِس کے مرکزِ ثقل میں سے اِس کے محور پر عمود وار ہو۔

۸۔ ایک مستطیلی متوازی السطوح کا اِس کے ایک کنارہ کے گرد۔

۹۔ ایک کھوکھلے کرہ کا ایک قطر کے گرد جب کہ خول کے بیرونی اور اندرونی نصف قطر ا اور ب ہوں۔

[جواب $\frac{۲م}{۵}\,\frac{ا^{۵} - ب^{۵}}{ا^{۳} - ب^{۳}}$]

۱۰۔ ایک ناقص مخروط کا اِس کے محور کے گرد جس کے سروں کے نصف قطر ا اور ب ہوں۔

[جواب $\frac{۳م}{۱۰}\,\frac{ا^{۵} - ب^{۵}}{ا^{۳} - ب^{۳}}$]

۱۱۔ ثابت کرو کہ ایک قائم مجسم مخروط کے جمود کا معیارِ اثر جس کی بلندی ھ ہے اور جس کے قاعدہ کا نصف قطر ا ہے مائل بلندی کے گرد $\frac{۳م ا^{۲}}{۲۰}\times\frac{۶ھ^{۲} + ا^{۲}}{ھ^{۲} + ا^{۲}}$ ہے اور اس کے مرکزِ ثقل میں سے ایک خط کے گرد جو اِس کے محور پر عمود وار کھینچا جائے

$\frac{۳م}{۸۰}\left(ھ^{۲} + ۴ا^{۲}\right)$ ہوتا ہے۔

۱۲۔ ایک مکافی (وترِ خاص ۴ا) رقبہ ہے جو راس سے فاصلہ ھ پر کے ایک معیّن سے منقطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے جمود کا معیارِ اثر راس پر کے مماس کے گرد

$\frac{۳}{۷}م ھ^{۲}$ ہے اور محور کے گرد $\frac{۴}{۵}م ا ھ$ ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ تدویری مکافی نما کے جمود کا معیارِ اثر اس کے محور کے گرد

$\frac{م}{۳}\times$ اس کے قاعدہ کے نصف قطر کے مربع کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۴۔ متجانس مجسم ناقص نما $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} + \frac{ی^{۲}}{ج^{۲}} = ۱$ کے جمود کا معیارِ اثر نقطہ لاَ، ماَ، یَ پر کے عماد کے گرد معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک پتلا متجانس ناقص نمائی خول ہے جو دو متشابہ، ہم وضع اور ہم مرکز

ناقص نماؤں سے محیط ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کے جمود کا معیارِ اثر ایک محور کے گرد $م \frac{ب^2 + ج^2}{3}$ ہے جہاں $م$ خول کی کمیت ہے ۔

۱۶ ۔ ثابت کرو کہ ن اضلاع والے منتظم کثیر الاضلاع کے جمود کا معیارِ اثر اس کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط کے گرد $\frac{م ج^2}{24} \times \frac{2 + جم \frac{\pi 2}{ن}}{1 - جم \frac{\pi 2}{ن}}$ ہوتا ہے جہاں ن اضلاع کی تعداد ہے اور ج ہر ضلع کا طول ہے ۔

۱۷ ۔ خطِ صنوبری[٥] $ر = ا (1 + جم\, ط)$ کو خطِ ابتدائی کے گرد گھمانے سے ایک ٹھوس مجسم بنایا گیا ہے جس کی کثافت ک ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کے جمود کا معیارِ اثر ایک خطِ مستقیم کے گرد جو اس کے قطب میں سے گزرے اور خطِ ابتدائی پر عمود ہو $\frac{352}{105} \pi ک ا^5$ ہوتا ہے ۔

۱۸ ۔ ایک بند مرکزی منحنی اپنی سطحِ مستوی میں کے ایک خط و لا کے گرد جو منحنی کو نہیں کاٹتا گھومتا ہے ۔ ثابت کرو کہ گردشی مجسم کے جمود کا معیارِ اثر $م (ا^2 + 3 ک^2)$ کے مساوی ہوتا ہے جہاں $م$ کمیت ہے تکوین یافتہ مجسم کی اور ا فاصلہ ہے و لا سے منحنی کے مرکز ج کا اور ک منحنی کے گھماؤ کا نصف قطر ہے ج میں سے گزرنے والے اور و لا کے متوازی خط کے گرد ۔

ایک منحنی کی قوس کو گھمانے سے جو سطح پیدا ہوتی ہے اُس کے جمود کے معیارِ اثر کے لیے اسی قسم کا مسئلہ ثابت کرو ۔

۱۹ ۔ ایک ٹھوس ربر کا ٹائر ہے جس کی کمیت $م$ اور جس کی مستدیر تراش کا نصف قطر ا ہے اس کے جمود کا معیارِ اثر اس کے محور کے گرد $\frac{م}{4} (4 ب^2 + 3 ا^2)$ ہے جہاں ب وسطی نصف قطر ہے ۔ اگر ٹائر مجوف ہو اور اس کی موٹائی چھوٹی مگر یکساں ہو تو ثابت کرو کہ جمود کا معیارِ اثر $\frac{م}{2} (2 ب^2 + 3 ا^2)$ ہوگا ۔

٥ Cardioid

۱۵۱ - جمودی ناقص نما ـــ خط و ق پر جو مجسم کے کسی نقطہ و میں سے کھینچا جائے طول و ق ایسا لو کہ جسم کے جمود کا معیارِ اثر و ق کے گرد و ق کے مربع کے بالعکس تناسب ہو ۔ تب دفعہ ۱۴۸ کے نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے:

ا ل² + ب م² + ج ن² - ۲ د م ن - ۲ ع ن ل - ۲ ف ل م

$\propto$ ۱ / وق² = و × ک² / وق²

جہاں م جسم کی کمیت ہے اور ک کوئی خطی جزوِ ضربی ہے ۔

اگر (لا، ما، ی) محدد ہوں ق کے بلحاظ محوروں ولا، وما، وے کے تو اس سے حاصل ہوتا ہے

ا لا² + ب ما² + ج ی² - ۲ د ما ی - ۲ ع ی لا - ۲ ف لا ما = م ک⁴ ... (۱)

پس نقطہ ق کا طریق ایک ناقص نما ہے جسے بلحاظ نقطہ و کے جسم کا جمودی ناقص نما کہتے ہیں ۔

چونکہ ق کا محل طبیعی تعریف کے مطابق حاصل کیا گیا ہے جسے حوالہ کے محوروں کے کسی خاص نظام سے کوئی تعلق نہیں اس لیے ظاہر ہے کہ خواہ محور ولا، وما، وے کوئی لیے جائیں ہیں ہر صورت میں وہی ایک ہی ناقص نما حاصل ہوگا ۔

ہندسۂ مجسمات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ ہر ایک ناقص نما کے لیے تین علی القوائم قطر ایسے معلوم ہو سکتے ہیں کہ اگر ان قطروں کو محددوں کے محور مانا جائے تو ناقص نما کی محصلہ مساوات میں ما ی، ی لا اور لا ما والی رقمیں شامل نہیں ہونگی ۔ اِن قطروں کو ناقص نما کے صدر محور کہتے ہیں ۔

فرض کرو کہ جمودی ناقص نما (۱) کی مساوات صدر محوروں کے لحاظ سے

یہ ہے

اَ لا^{2} + بَ ما^{2} + جَ ی^{2} = م کَ^{2} ....(۲)

ان نئے محوروں کے لحاظ سے جمود کا حاصل ضرب لازماً صفر ہوگا کیونکہ اگر اِن میں سے کوئی حاصل ضرب مثلاً فرض کرو دَ موجود ہوتا تو مساوات (۱) کی طرح (۲) میں ایک رقم "- ۲ دَ ما ی" موجود ہوتی۔

پس ہمیں ذیل کا نہایت ضروری اور اہم مسئلہ حاصل ہوتا ہے: ہر ایک جسم کے لیے، ہر ایک نقطہ و پر، تین علی القوائم محور ایسے ہوتے ہیں (اور یہی و پر کے جمودی ناقص نما کے صدر قطر ہوتے ہیں) کہ اِن کو دو دو کر کے لینے سے ان کے گرد جسم کے جمود کے حاصل ضرب سب صفر ہوتے ہیں۔

اِن تین محوروں کو نقطہ و پر جسم کے **صدر محور** کہتے ہیں، نیز اِن محوروں میں سے کسی دو میں سے گزرنے والی سطح مستوی کو جسم کی صدر سطح مستوی کہتے ہیں۔

۱۵۲ - نیز ہندسۂ مجسمات میں یہ بھی بتایا گیا ہے کہ ناقص نما کے تین صدر محوروں میں سے ایک ناقص نما کا بڑے سے بڑا نیم قطرِ سمتی ہوتا ہے اور دوسرا چھوٹے سے چھوٹا۔ چونکہ جمودی ناقص نما کے نیم قطرِ سمتی کا مربع اس نیم قطرِ سمتی کے گرد جسم کے جمود کا جو معیارِ اثر ہے اُس کے بالعکس متناسب ہے اس لیے معلوم ہوا کہ ان تین صدر محوروں میں سے جو سب سے چھوٹا ہے اُس کے گرد جسم کے جمود کا معیارِ اثر بڑے سے بڑا ہے اور برعکس اس کے سب سے بڑے کے گرد چھوٹے سے چھوٹا۔

اگر و پر جمود کے تین صدر معیارِ اثر مساوی ہوں تو جمود کا ناقص نما کرہ بن جاتا ہے، اس کے سب نیم قطر مساوی ہوتے ہیں۔ اس صورت میں و میں سے گزرنے والے سب خطوں کے گرد جمود کے معیارِ اثر مساوی ہوتے ہیں۔

مثلاً ۲ ا ضلع کے مکعب کی صورت میں، مرکز پر جمود کے صدر معیارِ اثر

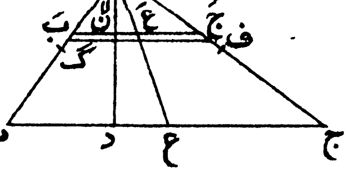
مساوی ہیں اس لیے اِس کے مرکز میں سے گزرنے والے ہر ایک خط کے گرد جمود کے معیارِ اثر باہم برابر اور $م \times \frac{۲ر^۲}{۳}$ کے مساوی ہیں۔

اگر جسم پتلا ہو تو پترے کے کسی نقطہ پر جمودی ناقص نما کی تراش جو پترے کی سطح مستوی سے حاصل ہو نقطۂ مذکور پر پترے کا جمودی ناقص کہلاتا ہے۔

اگر اِس صورت میں دو صدر معیارِ اثر مساوی ہوں تو جمودی ناقص دائرہ بن جاتا ہے اور پترے کے جمود کے معیارِ اثر و میں سے گزرنے والے سب خطوں کے گرد وہی ہوتے ہیں۔

۱۵۳ - ثابت کرو کہ ایک یکساں مثلث کے جمود کے معیارِ اثر اور حاصل ضرب کسی خط کے گرد وہی ہوتے ہیں جو اِن کے اضلاع کے وسطی نقطوں پر رکھے ہوئے تین ذرّات کے اُسی خط کے گرد ہوں جب کہ ہر ایک ذرّہ کی کمیّت مثلث کی کمیت کا ایک تہائی ہو۔

مثلث ا ب ج کو بہت سے خطوطِ مستقیم کے ذریعے جو اس کے قاعدہ کے متوازی کھینچے جائیں قلیل العرض ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔



فرض کرو کہ لا = ا ن ،
ان میں سے ایک ٹکڑے کا فاصلہ ہے ا سے۔ تب $بَ جَ = \frac{لا}{ھ} ا$

جہاں ا د = ھ اور مثلث کی کمیت

$م = \frac{۱}{۲} ا ھ \times ک$ جہاں ک کثافت ہے۔

ب ج کے متوازی خط ا ک کے گرد جمود کا معیارِ اثر

$$= \int_0^{\text{ھ}} \left[\frac{\text{لا اک}}{\text{ھ}} \text{فرلا} \right] \text{لا}^2 = \frac{\text{اک}}{\text{ھ}} \times \frac{1}{4} \text{ھ}^4 = \text{م} \frac{\text{ھ}^2}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

دفعہ ۱۸۷ کی رُو سے ا د کے گرد جمود کا معیارِ اثر

$$= \int_0^{\text{ھ}} \left[\frac{\text{لا اک}}{\text{ھ}} \text{فرلا} \right] \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\text{لا او}}{2\text{ھ}} \right)^2 + \frac{\text{لا}^2}{\text{ھ}^2} \text{دع}^2 \right]$$

جہاں ع وسطی نقطہ ہے ب ج کا

$$= \frac{1}{4} \text{ک ا ھ} \left[\frac{\text{و}^2}{12} + \text{دع}^2 \right] = \frac{\text{م}}{24} \Big[(\text{ب جم ج} + \text{ج جم ب})^2$$

$$+ 3 (\text{ب جم ج} - \text{ج جم ب})^2 \Big]$$

$$= \frac{\text{م}}{6} \left[\text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{ج} + \text{ج}^2 \text{جم}^2 \text{ب} - \text{ب ج جم ب جم ج} \right] \quad \ldots\ldots (2)$$

اک، ا د کے گرد جمود کا حاصل ضرب

$$= \int_0^{\text{ھ}} \frac{\text{لا اک}}{\text{ھ}} \text{فرلا} \times \text{لا} \times \text{ن ع} \quad \text{دفعہ ۱۸۷ کی رُو سے}$$

$$= \frac{\text{اک}}{\text{ھ}^2} \int_0^{\text{ھ}} \text{لا}^3 \times \text{دع} \times \text{فرلا} = \frac{\text{اک}}{\text{ھ}^2} \times \frac{1}{4} \text{ھ}^4 \times \text{دع}$$

$$= \frac{\text{م ھ}}{4} \left[\text{ب جم ج} - \text{ج جم ب} \right] \quad \ldots\ldots (3)$$

اگر کمیت $\frac{\text{م}}{3}$ کے تین ذرّوں کو مثلث کے اضلاع کے وسطی نقطوں ع، ف اور گ پر رکھا جائے تو جمود کا معیارِ اثر اک کے گرد

$$= \frac{\text{م}}{3} \left[\text{ھ}^2 + \left(\frac{\text{ھ}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\text{ھ}}{2} \right)^2 \right] = \text{م} \frac{\text{ھ}^2}{2}$$

ا د کے گرد جمود کا معیارِ اثر

= م/۳ [(ل/۲ − ج جم ب)² + (ب/۲ جم ج)² + (ج/۲ جم ب)²]

= م/۱۲ [(ب جم ج − ج جم ب)² + ب² جم² ج + ج² جم² ب]

= م/۶ [ب² جم² ج + ج² جم² ب − ب ج جم ب جم ج]

نیز اِن کے جمود کا حاصل ضرب اک، ا د کے گرد

= م/۳ [ا د × د ع + ½ ا د × ½ د ج − ½ ا د × ½ ب د]

= مھ/۳ [د ع + (ب جم ج − ج جم ب)/۴] = مھ/۴ [ب جم ج − ج جم ب]

پس مثلث کے جمود کے معیارِ اثر اور حاصل ضرب بالترتیب متذکرہ بالا تین ذرّوں کے جمود کے معیارِ اثر اور حاصل ضرب کے مساوی ہیں ۔

اس لیے دفعہ ۱۴۹ کی رُو سے ا میں سے گزرنے والے کسی خط کے گرد جمود کے معیارِ اثر وہی ہیں اور نیز اُسی دفعہ کی رُو سے ا میں سے گزرنے والے کسی دو علی القوائم خطوں کے گرد جمود کے حاصل ضرب بھی وہی ہیں ۔

نیز یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ تین ذرّوں کے جمود کا مرکز، مثلث کے جمود کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے ۔

اس لیے دفعہ ۱۴۷ کی رُو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مشترک مرکزِ ثقل میں سے گزرنے والے کسی خط کے گرد اِن دو نظاموں کے جمود کے معیارِ اثر اور حاصل ضرب باہم مساوی ہیں اور اس لیے اُسی دفعہ کی رُو سے مثلث کی سطح مستوی میں کسی دو اور علی القوائم خطوں کے گرد جمود کے معیار اثر اور حاصل ضرب باہم مساوی ہوتے ہیں ۔

بالآخر کسی نقطہ ن میں سے گزرنے والے خط کے گرد جو مثلث کی سطح مستوی پر عمود ہو جمود کا معیارِ اثر مساوی ہوتا ہے اُن جمود کے معیار اثروں کے

مجموعہ کے جو ن میں سے گزرنے والے کسی دو علی القوائم خطوں کے گرد لیے جائیں جب کہ یہ خط مثلث کی سطح مستوی میں واقع ہوں - اور اس لیے یہ بھی دونوں نظاموں کے لیے مساوی ہوتا ہے۔

۱۵۴ - اگر دو جسمی نظام مثلاً ایک مثلث اور تین ذرّے جن کا دفعۂ ماقبل میں ذکر ہوا ایسے ہوں کہ اُن کے جمود کے معیارِ اثر میں خطوں کے گرد وہی ہوں تو ایسے نظاموں کو **مساوی المعیار** نظام یا حرکی طور پر **معادل نظام** کہتے ہیں۔

اگر دو نظاموں کا مرکزِ جمود ایک ہی ہو، کمیّت ایک ہی ہو، صدر محور ایک ہی ہوں اور مرکزِ جمود پر صدر معیارِ اثر ایک ہی ہوں تو دفعات ۱۴۷ و ۱۴۸ سے ظاہر ہے کہ اُن کے جمود کے معیارِ اثر کسی خط کے گرد وہی ہوتے ہیں اور اس لیے ایسے نظام مساوی المعیار ہوتے ہیں۔

مثالیں

۱ - ایک ناقصی پترے کے مرکز پر جمودی ناقص نما کی مساوات ہے

$$\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + ی^2 \left[\frac{1}{و^2} + \frac{1}{ب^2} \right] = \text{مستقل}$$

۲ - ایک مجسم ناقص نما کے مرکز پر جمودی ناقص نما کی مساوات یہ ہوتی ہے

$$(ب^2 + ج^2)\ لا^2 + (ج^2 + و^2)\ ما^2 + (و^2 + ب^2)\ ی^2 = \text{مستقل}$$

۳ - ایک مکعب کے کونے پر جمودی ناقص نما کی مساوات بلحاظ مؤخر الذکر کے صدر محوروں کے یہ ہوتی ہے $۲\ لا^2 + ۱۱\ (ما^2 + ی^2) = \text{مستقل}$ جہاں ۲ و مکعب کے ضلع کا طول ہے۔

۴ - ایک نصف کرہ کے کنارہ پر کے کسی نقطہ پر جمودی ناقص نما کی مساوات

ہوتی ہے ۲ لا^{2} + ۷ (ما^{2} + ی^{2}) - $\frac{15}{4}$ لا ی = مستقل

۵ - ایک مجسم مخروط کے مستدیر کنارہ پر کے ایک نقطہ پر جمودی ناقص نما کی مساوات (۳ ر^{2} + ۲ ھ^{2}) لا^{2} + (۲۳ ر^{2} + ۲ ھ^{2}) ما^{2} + ۲۶ ر^{2} ی^{2} - ۱۰ ر ھ لا ی = مستقل ہوتی ہے جہاں ھ ارتفاع ہے اور ر قاعدہ کا نصف قطر ہے۔

۶ - ایک قائم مستدیر مخروط کے قاعدہ کے محیط پر کے کسی نقطہ پر صدر محور معلوم کرو، اور ثابت کرو کہ اُن میں سے ایک اس کے مرکزِ ثقل میں سے گزریگا اگر مخروط کا راسی زاویہ ۲ مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ ہو۔

۷ - ثابت کرو کہ ایک یکساں سلاخ جس کی کمیت م ہے حرکی طور پر تین ذرّوں کے معادل ہوتی ہے جو استواراً ایک دوسرے سے مربوط ہوں اور جن میں دو سلاخ کے سروں پر واقع ہوں اور تیسرا اِس کے وسطی نقطہ پر نیز ان ذرّوں کی کمیتیں $\frac{1}{6}$ م، $\frac{1}{6}$ م اور $\frac{2}{3}$ م ہوں۔

۸ - ا ب ج د ایک یکساں متوازی الاضلاع ہے جس کی کمیت م ہے، چار اضلاع کے وسطی نقطوں پر کمیت $\frac{\text{م}}{6}$ کے چار ذرّے رکھے گئے ہیں اور کمیت $\frac{\text{م}}{3}$ کا ایک ذرّہ وتروں کے تقاطع پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ پانچ ذرّے اور متوازی الاضلاع مساوی المعیار نظام ہیں۔

۹ - ثابت کرو کہ کوئی پترا حرکی طور پر تین ذرّوں کے معادل ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک کی کمیت پترے کی کمیت کا ایک تہائی ہو اور جن کو پترے کے مرکزِ جمود پر کے جمودی ناقص (بلحاظ صدر محوروں کے) $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ب}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ا}} = 2$ کے اندر بنے ہوئے بڑے سے بڑے مثلث کے کونوں پر رکھا جائے جہاں م ا اور م ب جمود کے صدر معیارِ اثر ہیں ولا اور وما کے گرد اور م کمیت ہے۔

۱۰ - ثابت کرو کہ ایک مثلثی رقبہ کے ایک زاویئی نقطہ پر کا جمودی ناقص مقابل کے ضلع کو اِس کے وسطی نقطہ پر مس کرتا ہے اور متصل ضلعوں کی تنصیف کرتا ہے۔

[دفعہ ۱۵۳ کو استعمال کرو]۔

۱۱ - ثابت کرو کہ ایک یکساں مثلث کے مرکزِ جمود پر کا جمودی ناقص مثلث کے اضلاع کو ان کے وسطی نقطوں پر مس کرتا ہے۔

۱۲ - ثابت کرو کہ ایک یکساں چہار سطحی حرکی طور پر معادل ہے $\frac{\text{م}}{۲۰}$ کمیت والے چار ذرّوں کے جو چہار سطحی کے کونوں پر واقع ہوں اور کمیت $\frac{۴\text{م}}{۵}$ والے پانچویں ذرہ کے جسے جمود کے مرکز پر رکھا جائے۔

فرض کرو کہ و ا ب ج ایک چہار سطحی ہے۔ اس کے ایک رأس و میں سے تین علی القوائم محور و لا، و ما، و ی کھینچو۔ فرض کرو کہ ا، ب، ج کے محدد بلحاظ ان محوروں کے بالترتیب ($\text{لا}_۱$، $\text{ما}_۱$، $\text{ی}_۱$)، ($\text{لا}_۲$، $\text{ما}_۲$، $\text{ی}_۲$)، ($\text{لا}_۳$، $\text{ما}_۳$، $\text{ی}_۳$) ہیں بناءً علیہ ب ج کا وسطی نقطہ $\left(\frac{\text{لا}_۲+\text{لا}_۳}{۲}، \frac{\text{ما}_۲+\text{ما}_۳}{۲}، \frac{\text{ی}_۲+\text{ی}_۳}{۲}\right)$ ہے،
و سے عمودی فاصلہ ضا پر اور ا ب ج کے متوازی کوئی تراش ن ق ر لو،
اس کا رقبہ $\text{ا}_. \frac{\text{ضا}^۲}{\text{ع}^۲}$ ہوگا جہاں $\text{ا}_.$ رقبہ ہے ا ب ج کا اور ع عمود ہے و سے ا ب ج پر۔ دفعہ ۱۵۳ کی رُو سے ایک پتلے ٹکڑے (موٹائی فرضا) کے جمود کا معیارِ اثر و لا کے گرد

= تین ذرّوں کے جمود کا معیارِ اثر جن کی کمیت $\frac{۱}{۳}\text{ا}_.\text{ک}\frac{\text{ضا}^۲}{\text{ع}^۲}$ فرضا اور جو بالترتیب ق ر، ر ن اور ن ق کے وسطی نقطوں پر واقع ہوں

$$= \frac{۱}{۳}\text{ا}_.\text{ک}\frac{\text{ضا}^۲}{\text{ع}^۲}\,\text{فرضا}\left[\left(\frac{\text{ضا}}{\text{ع}}\times\frac{\text{ما}_۲+\text{ما}_۳}{۲}\right)^۲ + \text{دو متماثل رقمیں}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\text{ضا}}{\text{ع}}\times\frac{\text{ی}_۲+\text{ی}_۳}{۲}\right)^۲ + \text{دو متماثل رقمیں}\right]$$

پس بلحاظ ضا کے صفر سے ع تک تکمل کرنے سے تمام چہار سطحی کے جمود کا معیارِ اثر و لا کے گرد

$$=\frac{1}{15}\,\text{ا ک}\,\frac{\text{ع}}{4}\left[\left\{(\text{لا}_2+\text{لا}_3)^2+(\text{ی}_2+\text{ی}_3)^2\right\}+\text{دو متشابہ رقمیں}\right]$$

$$=\frac{\text{م}}{10}\left[\begin{array}{l}\text{لا}_1^2+\text{لا}_2^2+\text{لا}_3^2+\text{لا}_2\text{لا}_3+\text{لا}_3\text{لا}_1+\text{لا}_1\text{لا}_2\\+\text{ی}_1^2+\text{ی}_2^2+\text{ی}_3^2+\text{ی}_2\text{ی}_3+\text{ی}_3\text{ی}_1+\text{ی}_1\text{ی}_2\end{array}\right]\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

اب و لا کے گرد ایسے چار ذرّوں کے جمود کا معیارِ اثر جن میں سے ہر ایک کی کمیت $\frac{\text{م}}{20}$ ہو اور ہر ایک چہار سطحی کے راس پر واقع ہو اور کمیت $\frac{4\text{م}}{5}$ والے پانچویں ذرہ کے جمود کا معیارِ اثر جو مرکزِ جمود پر کا واقع ہو

$$=\frac{\text{م}}{20}\left[(\text{لا}_1^2+\text{ی}_1^2)+\text{دو متماثل رقمیں}\right]+\frac{4\text{م}}{5}\left[\left(\frac{\text{لا}_1+\text{لا}_2+\text{لا}_3}{4}\right)^2+\left(\frac{\text{ی}_1+\text{ی}_2+\text{ی}_3}{4}\right)^2\right]$$

اور یہ بعد از تحویل وہی ہے جو (۱) ہے، اسی طرح محوروں و ما اور و ے کے گرد جمود کے معیار اثروں کے لیے۔

اسی طرح چہار سطحی کے جمود کا حاصل ضرب محوروں و ما ، و ے کے گرد

$$=\frac{\text{م}}{20}\left[(\text{لا}_2+\text{لا}_3)(\text{ی}_2+\text{ی}_3)+\text{دو متشابہ رقمیں}\right]\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

اور پانچ ذرّوں کے جمود کا معیارِ اثر

$$=\frac{\text{م}}{20}\left[\text{لا}_1\text{ی}_1+\text{لا}_2\text{ی}_2+\text{لا}_3\text{ی}_3\right]+\frac{4\text{م}}{5}\times\frac{(\text{لا}_1+\text{لا}_2+\text{لا}_3)}{4}\,\frac{(\text{ی}_1+\text{ی}_2+\text{ی}_3)}{4}$$

اور یہ (۲) کے مساوی ہے۔

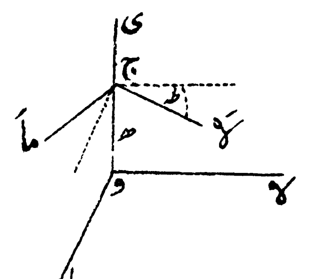
نیز اس سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چہار سطحی کے جمود کا مرکز اُن پانچ ذرّوں کے جمود کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔

پس یہ دو نظام مساوی المعیار ہیں کیونکہ دفعات ۱۴۷ اور ۱۴۸ کی رُو سے اُن کے معیارِ اثر ہر خط کے گرد باہم مساوی ہیں۔

۱۴ - ثابت کرو کہ ایک چہار سطحی حرکی طور پر معادل ہے چھ ذرّوں کے جن میں سے ہر ایک کی کمیت چہار سطحی کی کمیت کا $\frac{۱}{۱۰}$ ہو اور ہر ایک جداگانہ چہار سطحی کے اضلاع کے وسطی نقطہ پر واقع ہو اور ایک ساتویں ذرّہ کے جس کی کمیّت چہار سطحی کمیّت کا $\frac{۲}{۵}$ ہے اور جو اِس کے مرکزِ ثقل پر واقع ہے۔

۱۵۵ - معلوم کرو کہ ایک معلومہ خطِ مستقیم اپنے طول پر کے کسی نقطہ پر ایک معلومہ مادی نظام کا صدر محور ہے یا نہیں اور اگر ہے تو باقی کے دو صدر محور معلوم کرو۔

معلومہ خطِ مستقیم کو ی کا محور مانو، نیز اس پر کے کسی نقطہ و کو مبدا مان کر اس میں سے گزرنے والے دو خطوں و لا اور و ما کو حوالے کے محور تصور کرو۔



فرض کرو کہ و ی اپنے طول پر کے ایک نقطہ ج پر جو و سے فاصلہ ھ پر واقع ہے صدر محور ہے اور ج پر دو صدر محور ج لاَ اور ج ماَ ایسے ہیں کہ و لا کے متوازی خط اور ج لاَ کے درمیان زاویہ طہ بنتا ہے۔

فرض کرو کہ مادی نظام کے کسی ذرّہ م کے محدد بلحاظ محوروں و لا، و ما، و ی کے (لا، ما، ی) ہیں اور بلحاظ محوروں ج لاَ، ج ماَ، ج ی کے لاَ، ماَ، یَ ہیں۔ تب

ی = یَ + ھ، لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ، اور ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ

لاَ = لا جم طہ + ما جب طہ، ماَ = - لا جب طہ + ما جم طہ اور یَ = ی - ھ

∴ ﻉ م ماَ یَ = ﻉ م (- لا ی جب طہ + ما ی جم طہ + ھ لا جب طہ - ھ ما جم طہ)

= د جم طہ ۔ ع جب طہ + ھ ھ (لاَ جب طہ ۔ ماَ جم طہ) .... (۱)

دفعہ ۱۴۸ کی ترقیم کے مطابق

Σ م یَ لاَ = Σ م [لا ی جم طہ + ما ی جب طہ ۔ ھ لا جم طہ ۔ ھ ما جب طہ]

= د جب طہ + ع جم طہ ۔ ھ ھ (لاَ جم طہ + ماَ جب طہ) ..... (۲)

اور

Σ م لاَ ماَ = Σ م [۔ لاَ۲ جب طہ جم طہ + لا ما (جم۲ طہ ۔ جب۲ طہ) + ما۲ جب طہ جم طہ]

= ½ جب ۲طہ (ا ۔ ب) + ف جم ۲طہ .... (۳)

اگر ج لاَ، ج ماَ، ج ے صدر محور ہوں تو مقادیر (۱)، (۲) اور (۳) صفر ہونی چاہییں۔

مؤخر الذکر سے   مس ۲طہ = ۲ف / (ب ۔ ا) .... (۴)

(۱) اور (۲) سے

(ع جب طہ ۔ د جم طہ) / (لاَ جب طہ ۔ ماَ جم طہ) = (د جب طہ + ع جم طہ) / (لاَ جم طہ + ماَ جب طہ) = ھ ھ

اِن سے حاصل ہوتا ہے   ع / لاَ = د / ماَ .... (۵)

اور   ھ = د / (ھ ماَ) = ع / (ھ لاَ) .... (۶)

(۵) وہ شرط ہے جو لازماً پوری ہونی چاہیے اگر خط و ے اپنے طول پر کے کسی نقطہ پر صدر محور ہو اور اگر یہ پوری ہو تو (۶) اور (۴) سے نقطہ کا محل اور باقی دو صدر محوروں کی سمتیں متعین ہوتی ہیں۔

۱۵۶ - اگر کوئی محور اپنے طول پر کے ایک نقطہ و پر صدر محور ہو تو بالعموم یہ کسی اَور نقطہ پر صدر محور نہیں ہوتا - کیونکہ اگر یہ و پر صدر محور ہو تو د، ع اور ف سب صفر ہوتے ہیں، تب دفعۂ ماقبل کی مساوات (۶) سے حاصل ہوتا ہے ھ = ۰ یعنی ج کی قسم کا کوئی اَور نقطہ نہیں ہے سوائے اُس صورت کے جب کہ لاَ = ۰ اور ماَ = ۰ اس صورت میں ی کا محور مرکزِ ثقل میں سے گزرتا ہے اور ھ کی قیمت غیر معیّن ہوتی ہے یعنی ی کا محور اپنے ہر نقطہ پر صدر محور ہے -

اگر کوئی محور جسم کے مرکزِ ثقل میں سے گذرے اور اپنے طول کے کسی نقطہ پر صدر محور ہو تو یہ اپنے طول کے سب نقطوں پر صدر محور ہوگا۔

۱۵۷ - پس اگر جسم ایک پترا ہو جیسا کہ دفعہ ۹۴ کی شکل میں، تو اس کے کسی ایک نقطہ و پر کے صدر محور یہ ہوتے ہیں، سطح مستوی پر عماد وے اور دو خط ولاَ اور وماَ جو ولا اور وما کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں۔

اس صورت میں چونکہ پترے کے ہر نقطہ کے لیے ی = ۰ اس لیے د اور ع دونوں صفر ہیں - اس لیے دفعہ ۱۵۵ کی مساوات (۶) سے حاصل ہوتا ہے:

ھ = ۰ اور طہ اس مساوات سے نکلتا ہے

$$\text{مس}\ ۲\text{طہ} = \frac{۲\text{ف}}{\text{ب} - \text{ا}}$$

عددی مثال کے طور پر دفعہ ۱۵۳ کے مثلث پر غور کرو۔

$$\text{یہاں}\quad \text{ا} = \text{م}\frac{\text{ھ}^۲}{۲}\text{،}\quad \text{ب} = \frac{\text{م}}{۹}\left[\begin{array}{l}\text{ب}^۲\ \text{جم}^۲\text{ج} + \text{ج}^۲\ \text{جم}^۲\ \text{ب} \\ - \text{ب ج جم ب جم ج}\end{array}\right]$$

$$\text{اور}\qquad \text{ف} = \frac{\text{م ھ}}{۴}\left(\text{ب جم ج} - \text{ج جم ب}\right)$$

تب اک کے ساتھ ایک صدر محور کا میلان طہ اوپر کے ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۵۸- ایک پترے کے کسی نقطہ ن پر کے صدر محور حسبِ ذیل طریقہ سے بنائے جا سکتے ہیں۔

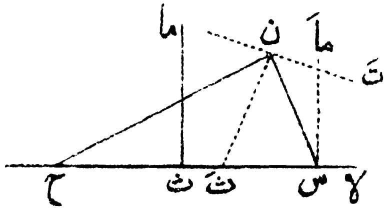
پترے کی سطح مستوی کو کاغذ کی سطح مستوی لو اور فرض کرو کہ اِس کا مرکزِ ثقل ث ہے اور ث لا اور ث ما، ث پر کے صدر محور ہیں اور اِن کے گرد جمود کے معیارِ اثر ا اور ب ہیں نیز ا بڑا ہے ب سے۔

ث لا پر نقطے س اور ح ایسے لو کہ

ث س = ث ح = √((ا - ب) / م)

تب دفعہ ۱۴۷ کی رُو سے ث ما کے متوازی س مَا کے گرد جمود کا

معیارِ اثر = ب + م × ث س² = ا



پس س لا اور س مَا کے گرد جمود کے معیارِ اثر دونوں ا کے مساوی ہیں۔

نیز س لا اور س مَا کے گرد جمود کا حاصل ضرب

= Σ م (لا - ث س) ما = Σ م لا ما - ث س × Σ م ما = ۰

کیونکہ ث لا اور ث ما دونوں ث پر کے صدر محور ہیں اور ث جمود کا مرکز ہے۔

پس س ایسا نقطہ ہے کہ س لا اور س مَا صدر محور ہیں اور ہر ایک کے گرد جمود کا معیارِ اثر ا کے مساوی ہے۔

پس دفعہ ۱۴۹ اور ۱۵۲ کی رُو سے کاغذ کی سطح مستوی میں س میں سے گزرنے والا کوئی خط س پر کا صدر محور ہے اور اس کے گرد جمود کا معیارِ اثر

۱ کے مساوی ہے۔

اسی طرح ح میں سے گزرنے والے کسی خط کے لیے۔

پس س ن اور ح ن کے گرد جو معیارِ اثر ہیں اُن میں سے ہر ایک ۱ کے مساوی ہے۔ نیز ن پر پترے کا عماد صریحاً ن پر کا ایک صدر محور ہے؛ اس لیے باقی دو صدر محور پترے کی سطح مستوی میں واقع ہیں۔ پس اگر ہم ن پر کا جمودی ناقص کھینچیں تو ن س اور ن ح کی سمت میں اِس کے نیم قطرِ سمتی مساوی ہونگے کیونکہ ہم دکھا چکے ہیں کہ ن س اور ن ح کے گرد جمود کے معیارِ اثر مساوی ہیں۔ چونکہ کسی ناقص میں مساوی نیم قطر صدر محوروں کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں اس لیے صدر محور مساوی سمتی نیم قطروں کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتے ہیں۔

لہذا ن پر کے جمودی ناقص کے صدر محور یعنی ن پر پترے کے صدر محور پترے کی سطح مستوی میں ن س اور ن ح کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

پس اگر ہم س اور ح کو ماسکے مان کر پترے کے کسی نقطہ ن میں سے گزرنے والا کوئی ناقص کھینچیں تو ن پر پترے کے صدر محور ن پر ناقص کے مماس اور عماد ہونگے۔ اس بناء پر نقطوں س اور ح کو جمود کے ماسکے کہتے ہیں۔

۱۵۹ - دفعۂ ماقبل کے مسئلہ کو کسی جسم تک وسعت دے سکتے ہیں جب کہ ث جمود کا مرکز ہو، ث لا، ث ما اور ث ے، ث پر کے صدر محور ہوں اور ن کوئی نقطہ ہو لا ما کی سطح مستوی میں۔

مثالیں

۱ - اگر ایک یکساں پترے کے جمود کے معیارِ اثر اس کی سطح مستوی میں دو علی القوائم خطوں و لا اور و ما کے گرد ا اور ب ہوں اور اِن خطوں کے گرد جمود کا حاصل ضرب

ف ہو تو ثابت کرو کہ و پر صدر معیار اثر $\frac{۱}{۲}\left[ا + ب \pm \sqrt{(ا - ب)^{۲} + ۴ ف^{۲}} \right]$ کے مساوی ہونگے ۔

۲ ۔ ایک مستطیل ا ب ج د کے اضلاع کے طول ۲ ا اور ۲ ب ہیں ۔ ثابت کرو کہ ا پر کے صدر محوروں میں سے ایک کا میلان ا ب کے ساتھ

$$\frac{۱}{۲} \text{مس}^{-۱} \frac{۳ ا ب}{۲ (ا^{۲} - ب^{۲})}$$ ہے ۔

۳ ۔ ایک تار نصف دائرہ کی شکل کا ہے جس کا نصف قطر و ہے ثابت کرو کہ اس کے قطر کے ایک سرے پر اس کی سطح مستوی میں صدر محور قطر کے ساتھ زاویے

$\frac{۱}{۲} \text{مس}^{-۱} \frac{۴}{\pi}$ اور $\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{مس}^{-۱} \frac{۴}{\pi}$ بناتے ہیں۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے ایک رُبع کے مرکز پر اس کی سطح مستوی میں صدر محوروں کے ساتھ زاویہ $\frac{۱}{۲} \text{مس}^{-۱} \left(\frac{۴}{\pi} \frac{ا ب}{ا^{۲} - ب^{۲}} \right)$ بناتے ہیں۔

۵ ۔ ایک ناقصی رقبہ کے محیط پر کے کسی نقطہ پر صدر محور معلوم کرو۔

۶ ۔ ایک قائم الزاویہ مثلث ا ب ج کے رأس ج (زاویہ قائمہ ج) پر ایک صدر محور اس کی سطح مستوی پر عمود ہے اور باقی دو صدر محور ضلعوں کے ساتھ زاویہ

$\frac{۱}{۲} \text{مس}^{-۱} \frac{ا ب}{ا^{۲} - ب^{۲}}$ بناتے ہیں ۔

۷ ۔ ا ب ج ایک مثلثی رقبہ ہے اور ا د عمود ہے ب ج پر، ح وسطی نقطہ ہے ب ج کا اور و وسطی نقطہ ہے د ح کا ۔ ثابت کرو کہ ب ج مثلث کا صدر محور ہے و پر ۔ [دفعہ ۱۵۳ کی خاصیت کو استعمال کرو] ۔

۸ ۔ ایک یکساں مربع پترا لا = ۰، ما = ۰ سے اور لا = ۲ ج، ما = ۲ ج سے

گھرا ہوا ہے۔ اس کا ایک کونہ خط $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۲$ سے کاٹ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مربع کے مرکز پر صدر محور لا کے محور کے ساتھ جو میلان رکھتے ہیں وہ

$$مس\ ۲ط = \frac{اب - ۲(ا + ب)ج + ۳ج^۲}{(ا - ب)(ا + ب - ۲ج)}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۹ - ایک یکساں پترا مکافی قوس (وترِ خاص ۴ا) سے اور رأس سے فاصلہ ب پر کے دوہرے معین سے گھرا ہوا ہے۔ اگر ب = $\frac{ا}{۳}(۷ + ۴\sqrt{۷})$ تو ثابت کرو کہ وترِ خاص کے سرے پر دو صدر محور وہاں پر کے مماس اور عماد ہیں۔

۱۰ - ثابت کرو کہ دو چشمی منحنی $ر^۲ = ا^۲$ جم ۲ط کے ایک نصف حلقہ کے عقدہ پر صدر محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویے $\frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}\frac{۱}{۲}$ بناتے ہیں۔

۱۱ - ایک مکعب کے کونہ و پر کے صدر محور و کو مرکز سے ملانے والا خط اور اس پر کے کوئی دو علی القوائم خط ہوتے ہیں۔

۱۲ - اگر ایک مخروط کا راسی زاویہ ۹۰° کا ہو تو وہ نقطہ جہاں پر کوئی مکون صدر محور ہوگا وہ مکون کو نسبت ۳ : ۷ میں تقسیم کرتا ہے۔ [دفعہ ۱۵۹ کو استعمال کرو]۔

۱۳ - کمیت م، طول ۲ا کی تین سلاخیں اب، ب ج اور ج د ایسی ہیں کہ ہر سلاخ باقی دو پر عمود وار ہے۔ ثابت کرو کہ کمیت کے مرکز پر جمود کے صدر معیارِ اثر م$ا^۲$، $\frac{۱۱}{۳}$م$ا^۲$ اور ۴م$ا^۲$ ہیں۔

۱۴ - ایک ٹھوس گردشی مکافی نما کے محور کا طول تکوینی مکافی کے وتر خاص کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ مستدیر کنارہ پر کے کسی نقطہ پر کا ایک صدر محور گردش کے محور کو زاویہ $\frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}\frac{۲}{۳}$ پر قطع کرتا ہے۔

بارہواں باب

ڈی البرٹ[1] کا اصول

حرکت کی عام مساواتیں

۱۶۰ ـ ہم قبل ازایں دیکھ چکے ہیں کہ اگر وقت ت پر ایک ذرّہ م کے محدد لا، ما، ی ہوں تو اِس کی حرکت م $\frac{\text{فز}^{2}\,\text{لا}}{\text{فزت}^{2}}$ کو لا کے محور کے متوازی عمل کرنے والی قوت کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوسکتی ہے، علیٰ ہذا ما اور ی کے محوروں کے متوازی حرکت کے لیے۔

اگر م ایک استوار جسم کا جزو ہو تو اِس کی حرکت بھی اسی طرح سے حاصل ہوتی ہے لیکن اس صورت میں ہمیں محوروں کے متوازی عمل کرنے والی قوتوں کے ضمن میں نہ صرف ذرّہ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں (مثلاً ذرّہ کا وزن، وغیرہ) کو ملحوظ رکھنا چاہیے بلکہ ایسی قوتوں کو بھی ملحوظ رکھنا چاہیے جو ذرّہ مذکور پر بقیہ جسم کے تعاملوں پر مشتمل ہیں۔

مقدار م $\frac{\text{فز}^{2}\,\text{لا}}{\text{فزت}^{2}}$ کو لا کے محور کے متوازی ذرّہ پر عمل کرنے والی مؤثر قوت

[1] D' Alembert

کہتے ہیں۔[نیز بعض اوقات اِسے ذرہ کے حرکی تعامل سے بھی موسوم کرتے ہیں]
پس ہم کہہ سکتے ہیں کہ موثر قوت کا "لا جزوِ ترکیبی" بیرونی قوتوں کے لا، جزوِ ترکیبی کے اور معہم اندرونی قوتوں کے لا جزوِ ترکیبی کے مساوی ہوتا ہے۔
یا یوں کہ اُلٹی مؤثر قوتوں کا لا جزوِ ترکیبی اور بیرونی اور اندرونی قوتوں کا لا جزوِ ترکیبی دونوں مل کر ایک نظام متعادل بناتے ہیں۔
اسی طرح ما اور ی کے محوروں کے متوازی اجزائے ترکیبی کے لیے۔
پس الٹی موثر قوت، بیرونی قوت اور اندرونی قوت جو ایک جسم کے ذرہ م پر عمل کرتی ہیں باہم متعادل ہوتی ہیں۔
یہی کیفیت جسم کے دیگر ذرّات کی ہے۔
پس جسم کے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی اُلٹی مؤثر قوتیں، بیرونی قوتیں اور جسم کی اندرونی قوتیں باہم تعادل میں ہوتی ہیں۔ نیز اندرونی قوتیں خود اپنے آپ میں متعادل ہیں کیونکہ نیوٹن کے تیسرے کلیہ کی رُو سے ہر عمل کے جواب میں مساوی اور متقابل ردِّ عمل ہوتا ہے۔
پس اُلٹی مؤثر قوتیں جو جسم کے ہر ذرّہ پر عمل کرتی ہیں اور نظام کی بیرونی قوتیں باہم تعادل میں ہوتی ہیں۔
یہ ڈی المبرٹ (D' Alembert) کا اصول ہے۔ یہ اُس کے مؤلفہ رسالہ حرکت میں (Traité de Dynamique) جو ۱۷۴۳ء میں طبع ہوا مندرج ہے۔ غور سے معلوم ہوگا کہ در اصل یہ نیوٹن کے تیسرے کلیہ کا صریح اور بیّن نتیجہ ہے۔

۱۶۱ ۔ فرض کروکہ لا، ما، ی حوالہ کے محوروں کے متوازی بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی ہیں جو جسم کے ایک ذرّہ م پر جس کی کمیّت م ہے اور جس کے محدد وقت ت پر لا، ما، ی ہیں عمل کرتی ہیں۔
تب دفعۂ ماقبل کا اصول یہ ہے کہ وہ قوتیں جن کے اجزائے ترکیبی

$$\text{لا} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2}،\quad \text{ما} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2}،\quad \text{ے} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}$$

ہیں اور جو نقطہ (لا، ما، ی) پر عمل کرتی ہیں مع اُسی قسم کی دیگر قوتوں کے جو جسم کے دیگر ذرّوں پر عمل کرتی ہیں ایک ایسا نظام بناتی ہیں جو متعادل ہے۔

پس تعادل کی معمولی شرائط (سکونیات دفعہ ۱۶۵) کی رُو سے

$$\Sigma\left(\text{لا} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2}\right) = 0$$

$$\Sigma\left(\text{ما} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2}\right) = 0$$

$$\Sigma\left(\text{ے} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}\right) = 0$$

$$\Sigma\left[\text{ما}\left(\text{ے} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}\right) - \text{ی}\left(\text{ما} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2}\right)\right] = 0$$

$$\Sigma\left[\text{ی}\left(\text{لا} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2}\right) - \text{لا}\left(\text{ے} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}\right)\right] = 0$$

اور

$$\Sigma\left[\text{لا}\left(\text{ما} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2}\right) - \text{ما}\left(\text{لا} - \text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2}\right)\right] = 0$$

اِن سے معادلاتِ ذیل حاصل ہوتی ہیں:-

$$\Sigma\,\text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \Sigma\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Sigma\,\text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2} = \Sigma\,\text{ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\Sigma\,\text{م}\frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2} = \Sigma\,\text{ے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\Sigma\, \text{م} \left(\text{ما} \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ی}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{ی} \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}}\right) = \Sigma \left(\text{ما ے} - \text{ی ما}\right) \ldots\ldots\ldots (۴)$$

$$\Sigma\, \text{م} \left(\text{ی} \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{لا} \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ی}}{\text{فرت}^{۲}}\right) = \Sigma \left(\text{ی ک} - \text{لا ے}\right) \ldots\ldots (۵)$$

اور
$$\Sigma\, \text{م} \left(\text{لا} \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{ما} \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}\right) = \Sigma \left(\text{لا ما} - \text{ما ک}\right) \ldots\ldots (۶)$$

یہ چھ مساواتیں کسی اُستوار جسم کی حرکت کی مساواتیں ہیں۔

مساواتیں (۱)، (۲) اور (۳) اس امر کو ظاہر کرتی ہیں کہ محددوں کے محوروں کے متوازی مؤثر قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعے ان ہی محوروں کے متوازی بالترتیب بیرونی عاملہ قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعوں کے مساوی ہوتے ہیں۔

مساواتیں (۴)، (۵)، (۶) اس امر کو ظاہر کرتی ہیں کہ حوالہ کے محوروں کے گرد مؤثر قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ ان ہی محوروں کے گرد بالترتیب بیرونی عاملہ قوتوں کے معیار اثروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۶۲ - مرکزِ جمود کی حرکت اور مرکزِ جمود کے لحاظ سے حرکت -

فرض کرو کہ ($\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$، $\bar{\text{ی}}$) مرکزِ جمود کے محدد ہیں اور جسم کی کمیت ھ ہے۔

تب $\text{ھ}\,\bar{\text{لا}} = \Sigma\,\text{م لا}$ تمام دورانِ حرکت میں اور اس لیے

$$\text{ھ} \frac{\text{فر}^{۲}\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}^{۲}} = \Sigma\,\text{م} \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}$$

پس دفعۂ ماقبل کی مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ھ} \frac{\text{فر}^{۲}\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}^{۲}} = \Sigma\,\text{ک} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\overline{\text{ما}}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ج ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

اور

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\overline{\text{ی}}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ج ے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

لیکن یہ ایک ایسے ذرّہ کی حرکت کی مساواتیں ہیں جس کی کمیّت م ہو اور جو جسم کے مرکزِ جمود پر رکھا ہو اور جس پر وہ تمام بیرونی قوتیں جو جسم کے مختلف ذرات پر عمل کرتی ہیں اپنی سمتوں کے متوازی اور مساوی مقدار میں عمل کریں۔

پس جسم کا مرکزِ جمود اس طرح حرکت کرتا ہے گویا کہ جسم کی کل کمیت اس پر ملتف کر دی گئی ہے اور تمام بیرونی قوتیں اُس پر اُسی مقدار میں اور اپنی اُن سمتوں کے متوازی عمل کرتی ہیں جن میں کہ یہ در اصل جسم کے مختلف ذرّات پر عمل کر رہی ہیں۔

فرض کرو کہ جسم کے مرکزِ ثقل ث کے لحاظ سے جسم کے کسی ذرّہ کے محدد ($\text{لا}'$، $\text{ما}'$، $\text{ی}'$) ہیں اور اسی ذرّہ کے محدد بلحاظ اصلی محوروں کے (لا، ما، ی) ہیں تو پورے دورانِ حرکت میں

$$\text{لا} = \overline{\text{لا}} + \text{لا}' \text{،}\quad \text{ما} = \overline{\text{ما}} + \text{ما}' \text{،}\quad \text{ی} = \overline{\text{ی}} + \text{ی}'$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{فر}^{2}\,\overline{\text{لا}}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}'}{\text{فرت}^{2}} \text{،}\quad \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{فر}^{2}\,\overline{\text{ما}}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}'}{\text{فرت}^{2}}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ی}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{فر}^{2}\,\overline{\text{ی}}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ی}'}{\text{فرت}^{2}}$$

$$\therefore\ \text{ما}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فرت}^{2}} - \text{ی}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = (\overline{\text{ما}} + \text{ما}')\left(\frac{\text{فر}^{2}\overline{\text{ی}}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{فر}^{2}\text{ی}'}{\text{فرت}^{2}}\right) - (\overline{\text{ی}} + \text{ی}')\left(\frac{\text{فر}^{2}\overline{\text{ما}}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}'}{\text{فرت}^{2}}\right)$$

پس دفعۂ ماقبل کی مساوات (۴) سے حاصل ہوتا ہے

Σ م (مآ فر۲یٓ/فرت۲ − یٓ فر۲مآ/فرت۲) + Σ م (ماَ فر۲یَ/فرت۲ − یَ فر۲ماَ/فرت۲)

+ Σ م [مآ فر۲یَ/فرت۲ + ماَ فر۲یٓ/فرت۲ − یٓ فر۲ماَ/فرت۲ − یَ فر۲مآ/فرت۲]

= Σ [(مآ + ماَ) ے − (یٓ + یَ) ما] ..... (۴)

اب Σ م ماَ / Σ م = مرکزِ جمود کا ما محدد جب کہ مبداء ث پر ہو = ۰

اور اس لیے Σ م ماَ = ۰ اور Σ م فر۲ماَ/فرت۲ = ۰

اسی طرح Σ م یَ = ۰ اور Σ م فر۲یَ/فرت۲ = ۰

پس (۴) سے حاصل ہوتا ہے

مـ [مآ فر۲یٓ/فرت۲ − یٓ فر۲مآ/فرت۲] + Σ م (ماَ فر۲یَ/فرت۲ − یَ فر۲ماَ/فرت۲)

= Σ [مآ ے − یٓ ما + ماَ ے − یَ ما] .... (۵)

لیکن مساواتوں (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

مـ [مآ فر۲یٓ/فرت۲ − یٓ فر۲مآ/فرت۲] = Σ [مآ ے − یٓ ما]

∴ (۵) سے حاصل ہوتا ہے

Σ م [ماَ فر۲یَ/فرت۲ − یَ فر۲ماَ/فرت۲] = Σ [ماَ ے − یَ ما] .... (۶)

لیکن اس مساوات کی شکل وہی ہے جو دفعۂ ماقبل کی مساوات (۴) کی ہے

اور بنا ءً علیہ یہ وہی مساوات ہے جو ہمیں مرکزِ جمود کو ثابت تصور کرنے سے حاصل ہوتی۔

پس مرکزِ جمود کے گرد جسم کی حرکت وہی ہوتی ہے جو کہ اُس صورت میں ہوتی جب کہ مرکزِ جمود ثابت ہوتا اور جسم پر وہی قوتیں عمل کرتیں۔

۱۶۳ ۔ دفعۂ ماقبل میں جو دو نتائج حاصل ہوئے ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ جسم کی انتصابی حرکت کو گردشی حرکت سے علیحدہ تصور کر سکتے ہیں۔

پہلے نتیجہ سے ہم نے دیکھا کہ مرکزِ جمود کی حرکت ذرہ کے علمِ حرکت کے طریقوں سے حاصل ہو سکتی ہے۔

دوسرے نتیجہ میں ہم نے دیکھا کہ گردشی یا گھماؤ کی حرکت ایسی حرکت میں تحویل ہو جاتی ہے جو ایک ثابت نقطہ کے گرد ہو۔

اس کی ایک سادہ مثال حسب ذیل ہے: ایک یکساں چھڑی کی حرکت پر غور کرو جسے ہوا میں اس طرح پھینکا گیا ہے کہ بوقتِ رمی اس کا مرکز ایک معلومہ سمت میں حرکت کرتا ہے اور ساتھ ہی چھڑی اپنے مرکز کے گرد معلومہ زاویئی رفتار سے گھوم رہی ہے۔ [ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کردو اور فرض کرو کہ جاذبہ مستقل ہے]۔

پہلے نتیجہ کی رُو سے مرکزِ جمود کی حرکت ایسی ہے گویا کہ کل کمیت اس پر مکثف کر دی گئی ہے اور اس پر تمام جسم پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں اپنی سمت کے متوازی عمل کرتی ہیں۔ صورت زیرِ بحث میں یہ بیرونی قوتیں جسم کے مختلف اجزا کے وزن ہیں۔ جب یہ سب مرکزِ ثقل پر عمل کریں تو اِس کے یہ معنی ہوئے کہ مرکزِ ثقل پر کل جسم کا وزن عمل کرتا ہے۔ پس چھڑی کا مرکزِ ثقل اس طرح حرکت کرتا ہے گویا کہ اس کی کمیت م ہے اور اس پر انتصابی قوت م ج عمل کرتی ہے یعنی یہ جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل ایک ایسے ذرہ کی طرح حرکت کرتا ہے گویا اسے چھڑی کے مرکزِ ثقل کی ابتدائی رفتار کے ساتھ پھینکا گیا ہے لہذا چھڑی کے مرکزِ جمود کا طریق مکافی ہوگا۔

بعد کے کسی باب میں یہ واضح ہوگا کہ چھڑی کی زاویئی رفتار میں کوئی تبدیلی

واقع نہیں ہوتی۔ پس چھڑی کا مرکزِ ثقل مکافی مرتسم کریگا اور چھڑی اس کے گرد یکساں زاویئی رفتار سے گھومیگی۔

ایک اور مثال کے طور پر ایک بمب کے گولے پر غور کرو جو ہوا میں حرکت کررہا ہو اور فرض کرو کہ یہ ہوا کے اندر پھٹ جاتا ہے۔ اندرونی قوتیں جو دھماکے سے عمل پذیر ہوتی ہیں ایک دوسری کا تعادل کرتی ہیں اور گولے کے مرکزِ ثقل کی حرکت پر کوئی اثر نہیں ڈالتیں۔ پس مرکزِ جمود دھماکے کے بعد بھی وہی مکافی مرتسم کرتا ہے جو پہلے مرتسم کررہا تھا۔ [یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ حرکت خلا میں وقوع پذیر ہوتی ہے اور جاذبہ مستقل ہے]۔

۱۶۴۔ دفعہ ۱۶۱ کی مساوات (۱) کو حسب ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\text{ج م}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right]=\text{ج}(\text{ل})$$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ [لا کے محور کے متوازی کل معیار حرکت]

= و لا کے متوازی کل بیرونی قوتوں کا مجموعہ۔

اسی طرح باقی دو محوروں کے لیے۔

نیز (۴) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\text{ج م}\left(\text{ما}\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}-\text{ی}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)\right]=\text{ج}(\text{ما ے}-\text{ی ما})$$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ [لا کے محور کے گرد کل زاویئی معیار حرکت]

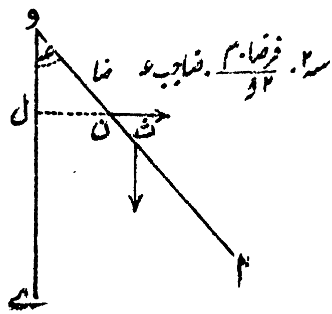
= و لا کے گرد بیرونی قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ۔

۱۶۵۔ ڈی المبرٹ کے اصول کی تشریح کے لیے ذیل کی مثال پر غور کرو۔

ایک یکساں سلاخ و ا جس کا طول ۲ ا ہے اپنے ایک سرے و کے گرد یکساں زاویئی رفتار ىد کے ساتھ و میں سے گزرنے والے انتصابی خط و ے کے گرد گھوم سکتی ہے اور و ے کے ساتھ مستقل

میلان عہ رکھتی ہے، عہ کی قیمت معلوم کرو۔

سلاخ کے ایک چھوٹے جزو ن ف پر غور کرو جہاں و ن = ضا اور ن ق = فرضا، وے پر عمود ن ل کھینچو۔



تب ابتدائی علم حرکت سے ن کا اسراع سہ۲ × ن ل ہوگا ن ل کی سمت میں۔

پیروں نہنچی موثر قوت

$\left[\frac{\text{فرضا}}{\text{۲ا}} \times \text{م}\right] \times$ سہ۲ ضا جب عہ ہے

اور نشان زدہ سمت میں عمل کرتی ہے۔

سب الٹی مؤثر قوتیں جو سلاخ کے مختلف حصوں پر عمل کرتی ہیں سب بیرونی قوتوں یعنی وزن م ج اور و پر کے تعاملوں کے ساتھ مل کر قوتوں کے ایک ایسے نظام پر مشتمل ہیں جو متعادل ہے۔

تعاملوں کو خارج کرنے کے لیے و کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

م ج × ا جب عہ = و کے گرد مختلف مؤثر قوتوں کا معیار اثر

$$= \text{ع}\left[\frac{\text{فرضا}}{\text{۲ا}} \times \text{م}\right] \times \text{سہ}^2\text{ضا جب عہ} \times \text{ضا جم عہ}$$

$$= \frac{\text{م سہ}^2\text{ جب عہ جم عہ}}{\text{۲ا}} \int_0^{\text{۲ا}} \text{ضا}^2 \times \text{فرضا} = \text{م سہ}^2 \text{ جب عہ جم عہ} \frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}}$$

پس یا عہ = ۰ یا جم عہ $= \frac{\text{۳ج}}{\text{۴ سہ}^2\text{ا}}$، اگر ۳ج > ۴ سہ۲ ا یعنی اگر سہ۲ $< \frac{\text{۳ج}}{\text{۴ا}}$ تو دوسری مساوات سے عہ کی ناممکن قیمت نکلتی ہے اور اس صورت میں صرف ایک ہی حل قابلِ قبول ہے یعنی عہ = ۰ یعنی سلاخ انتصاباً لٹک رہی ہے۔ اگر ۳ج < ۴ سہ۲ ا تو

$$\text{عہ} = \text{جم}^{-1}\frac{\text{۳ج}}{\text{۴ سہ}^2\text{ا}}$$

مثالیں

۱- کمیت م کا ایک تختہ افق کے ساتھ زاویہ ہ بنانے والی ایک چکنی سطح مائل کے میلان اعظم پر ابتداءً ساکن ہے اور ایک آدمی جس کی کمیت مَ ہے اس کے اوپر کے کنارہ سے روانہ ہوکر تختہ پر نیچے کی طرف اس طرح چلتا ہے کہ تختہ حرکت نہیں کرتا۔ ثابت کرو کہ

وہ دوسرے سرے پر وقت $\sqrt{\dfrac{۲ مَ ا}{(م + مَ) ج جب ہ}}$

میں پہنچتا ہے - ا تختہ کا طول ہے۔

۲- ایک کھردرا یکساں تختہ جس کی کمیت م اور طول ۲ ا ہے ایک چکنی افقی سطح مستوی پر ساکن ہے اور اس پر ایک شخص جس کی کمیت مَ ہے ایک سرے سے روانہ ہوکر دوسرے سرے کی طرف جاتا ہے۔ بتاؤ کہ اس مدت میں تختہ کس قدر فاصلہ میں سے حرکت کرتا ہے۔
[نظام کے جمود کا مرکز ساکن رہتا ہے]۔

۳- ایک سلاخ جو اپنے ایک ثابت سرے کے گرد ایک چکنی افقی سطح مستوی میں گھومتی ہے ٹوٹ کر دو ٹکڑوں میں منقسم ہوجاتی ہے۔ دونوں ٹکڑوں کی حرکتِ مابعد کیسی ہوگی۔

۴- ایک مستدیر تختہ کو ایک چکنی افقی سطح مستوی پر رکھا گیا ہے اور ایک لڑکا اس کے کنارہ کے گرد یکساں رفتار سے بھاگتا ہے۔ تختہ کے مرکز کی حرکت معلوم کرو۔

۵- ایک سلاخ کو جس کا طول ۲ ا ہے ایک رسّی کے ذریعہ جس کا طول ل ہے اور جو اس کے ایک سرے کے ساتھ بندھی ہے لٹکایا گیا ہے۔ اگر رسی اور سلاخ دونوں خطِ انتصابی کے گرد یکساں زاویئی رفتار کے ساتھ حرکت کریں اور اُن کے میلان خطِ انتصابی کے ساتھ بالترتیب ط اور ف ہوں تو ثابت کرو کہ $\dfrac{۳ ل}{ا} = \dfrac{(۴ مس ط - ۳ مس ف) جب ف}{(مس ف - مس ط) جب ط}$

۶- ایک پتلا مستدیر قرص ہے جس کی کمیّت م اور نصف قطر ا ہے، یہ ایک

پتلی محور و ا کے گرد جو اس کے محیط پر کے ایک نقطہ و میں سے اس کی سطح مستوی پر عمود وار کھینچا گیا ہے گھوم سکتا ہے ۔ محور و ا کو اپنے ایک سرے ا کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ افقی سطح مستوی میں گھمایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ خطِ انتصابی کے ساتھ قرص کے و میں سے گزرنے والے نصف قطر کا میلان $ط = جم^{-1} \left(\frac{ج}{ا سہ^2}\right)$ بشرطیکہ $سہ^2$ چھوٹا نہ ہو $\frac{ج}{ا}$ سے ،

مؤخر الذکر صورت میں ط = ۰ ۔

۷ ۔ ایک پتلا وزنی قرص اپنی سطح مستوی میں کے ایک محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اور یہ محور اپنے اوپر کے ایک ثابت نقطہ کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ متوازی الافق محل میں گھوم رہا ہے ۔ ثابت کرو کہ قرص کی سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ

$ط = جم^{-1} \frac{ج\, ھ}{ک^2 سہ^2}$ جہاں ھ قرص کے مرکزِ جمود کا فاصلہ ہے محور سے اور ک قرص کے گھماؤ کا نصف قطر ہے محور کے گرد ۔

اگر $سہ^2 < \frac{ج\, ھ}{ک^2}$ تو قرص کی سطح مستوی انتصابی ہوتی ہے ۔

۸ ۔ دو یکساں کُرے جن میں سے ہر ایک کی کمیت مـ اور نصف قطر ا ہے دو یکساں پتلی سلاخوں کے سروں کے ساتھ ثابت کر دیے گئے ہیں ۔ سلاخوں کے دوسرے سرے نقطہ و پر آزادانہ وصل کر دیے گئے ہیں نیز ہر ایک سلاخ کی کمیت م اور طول ل ہے ۔ یہ کل نظام و میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے ۔ ثابت کرو کہ جب حرکت قائم ہو جائے تو سلاخوں کا میلان سمتِ انتصابی کے ساتھ ط ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$جم\, ط = \frac{ج}{سہ^2} \times \frac{مـ(ل + ا) + م \frac{ل}{۲}}{مـ(ل + ا)^2 + م \frac{ل^2}{۳}}$$

دھکے کی قوتیں

۱۶۶ ۔ جب کسی جسم پر عمل کرنے والی قوتیں بہت بڑی ہوں اور بہت

چھوٹے عرصہ کے لیے عمل کریں تو ہم اِن کے اثروں کو اُن کے دھکوں کے ذریعہ ناپتے ہیں - اگر چھوٹا سا وقفہ جس کے دوران میں قوت ﻻ عمل کرے ت ہو تو اِس کا دھکا ∫ₒᵗ ﻻ فت ہوگا-

اگر قوتیں دھکے کی قسم کی ہوں تو دفعہ ۱۶۱ کی مساواتیں ۱ تا ۶ قدرے مختلف شکل اختیار کرتی ہیں -

مساوات (۱) کو تکمل کرنے سے

∫ₒᵗ ﻻ فت Σ = Σ ∫ₒᵗ ﻻ فت = [Σ م فلا/فت]ₒᵗ

اگر دھکے سے پہلے اور دھکے کے بعد ایک ذرّہ م کی رفتاریں بالترتیب ع اور عَ ہوں تو اس سے حاصل ہوتا ہے

Σ م (عَ - ع) = Σ ﻻَ

جہاں ﻻَ قوت کا دھکا ہے کمیّت م پر محور لا کے متوازی -

اسے یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

Σ م عَ - Σ م ع = Σ ﻻَ .... (۱)

یعنی محور لا کے متوازی معیارِ حرکت کی کل تبدیلی اسی سمت میں بیرونی قوتوں کے کل دھکے کے مساوی ہوتی ہے -

پس کل کمیّت م کے معیارِ حرکت کی تبدیلی و لا کے متوازی جب کہ کل کمیّت م مرکزِ جمود پر مکثف سمجھی جائے اور اس کے ساتھ حرکت کر رہی ہو مساوی ہوتی ہے و لا کے متوازی بیرونی قوتوں کے دھکے کے -

اسی طرح ما اور ی کے محوروں کے متوازی حرکت کے لیے مساواتیں حسبِ ذیل ہونگی

Σ م وَ - Σ م و = Σ مَا .... (۲)

اور Σ م ہَ - Σ م ہ = Σ ےَ .... (۳)

نیز مساوات (۴) کو تکمل کرنے سے

[ع م (ما فری/فرت - ی فرما/فرت)]ت. = ع [ما ر. ت سے فرت - ی ر. ت. مافرت]

یعنی ع م [ما (ھَ - ھ) - ی (وَ - و)] = ع [ماۓ - ی مَا]

اس لیے

ع م [ما ھَ - ی وَ] - ع م [ما ھ - ی و] = ع (ماۓ - ی مَا) ....(۴)

پس محور لا کے گرد زاویئی معیارِ حرکت کی تبدیلی بیرونی قوتوں کے دھکوں کے معیارِ اثر کے مساوی ہوتی ہے۔

اسی طرح باقی دو محوروں کے لیے، ان کی صورتوں میں مساواتیں حسب ذیل ہونگی۔

ع م (ی ءَ - لا ھَ) - ع م (ی ء - لا ھ) = ع (ی کَا - لاۓ) ...(۵)

اور ع م (لا وَ - ما ءَ) - ع م (لا و - ما ء) = ع (لا مَا - ما کَا) ...(۶)

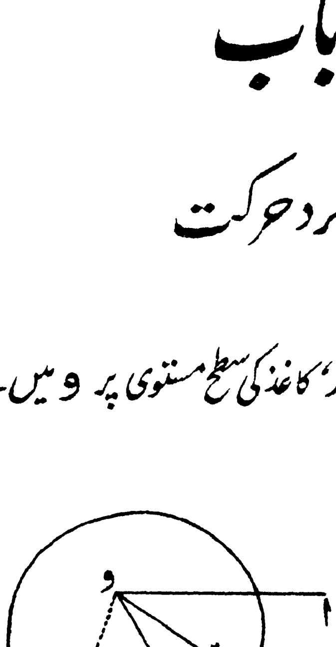
۱۶۷ - دفعات ۱۶۱ اور ۱۶۶ کی مساواتیں ایک استوار جسم کی حرکت کی عام مساواتیں ہیں جب کہ قوتیں بالترتیب محدود اور دھکے کی قسم کی ہوں، ان سے ہمیشہ جسم کی حرکت معلوم ہوسکتی ہے۔ تاہم یہ شکلیں ایسی ہیں کہ یہ کسی سوال کو حل کرنے میں آسانی سے استعمال نہیں ہوسکتیں۔

مختلف قسم کے سوالوں کے لیے مختلف شکلیں زیادہ موزوں ثابت ہوتی ہیں۔ اِن پر ابواب مابعد میں بحث کی جائیگی۔

تیرہواں باب

ایک ثابت محور کے گرد حرکت

۱۶۸ ۔ فرض کرو کہ گردش کا ثابت محور، کاغذ کی سطح مستوی پر و میں سے گزرنے والا عمود وے ہے اور وے میں سے گزرنے والی ایک ثابت سطح مستوی کاغذ کی سطح مستوی کو و ا پر کاٹتی ہے۔ نیز فرض کرو کہ وے میں سے گزرنے والی ایک سطح مستوی ے و ث جو جسم میں ثابت ہے ثابت سطح مستوی کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے یعنی ∠ ا و ث = طہ



فرض کرو کہ وے اور جسم کے کسی نقطہ ن میں سے گزرنے والی کوئی سطح مستوی ے و ا کے ساتھ زاویہ فہ بناتی ہے اور کاغذ کی سطح مستوی سے وق پر ملتی ہے یعنی ∠ ا و ق = فہ

جب جسم وے کے گرد گھومتا ہے تو زاویہ ق و ث ہمیشہ وہی رہتا ہے پس طہ کے اضافہ کی شرح وہی رہتی ہے جو فہ کے اضافہ کی شرح ہے

$$\therefore \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \quad \text{اور اس لیے} \quad \frac{\text{فر}^2\text{فہ}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2}$$

اگر ذرہ ن کا فاصلہ ن م ثابت محور و ے سے ر کے مساوی ہو تو چونکہ ن مرکز م کے گرد دائرہ مرتسم کرتا ہے اس لیے اس کے اسراع یہ ہیں

$$\text{ر}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2 \text{ سمت ن م میں اور } \text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{فہ}}{\text{فرت}^2} \text{ سمت ن م پر علی القوائم۔}$$

اس لیے اس پر مؤثر قوتیں اِن سمتوں میں یہ ہیں

$$\text{م ر}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2 \text{ اور م ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{فہ}}{\text{فرت}^2}\text{، یعنی م ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 \text{ اور م ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2}$$

پس اِس کی مؤثر قوتوں کا معیارِ اثر محور و ی کے گرد

$$= \text{ر} \times \text{م ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2} \text{ یعنی م ر}^2\,\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2}$$

پس و ے کے گرد کل جسم کی مؤثر قوتوں کا معیارِ اثر

$$= \Sigma\, \text{م ر}^2\,\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2} \text{ یعنی } \frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2} \times \Sigma\, \text{م ر}^2$$

کیونکہ $\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2}$ جسم کے سب ذرّوں کے لیے وہی ہے۔

اب Σ م ر² ثابت محور کے گرد جسم کے جمود کے معیارِ اثر م ک² کے مساوی ہے۔ پس مؤثر قوتوں کا مطلوبہ معیارِ اثر م ک² $\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2}$ جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو محور میں سے گزرنے والی کوئی سطح مستوی جو جسم میں ثابت ہو محور میں سے گزرنے والی کسی اور سطح مستوی کے ساتھ جو فضا میں ثابت ہو بناتی ہے۔

۱۶۹ - جسم کی توانائی بالحرکت

ذرہ م کی رفتار = ر $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ یعنی ر $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ اس لیے اس کی توانائی = $\frac{1}{2}$ م $\left(\text{ر}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2$

اس لیے جسم کی کل توانائی بالحرکت

$$= \Sigma \frac{1}{2} م ر^2 \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)^2 \times \Sigma م ر^2 = \frac{1}{2} مک^2 \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)^2$$

۱۷۰- ثابت محور کے گرد جسم کا زاویئی معیارِ اثر یعنی معیارِ حرکت کا معیارِ اثر۔

اگر ذرّہ ن کی کمیّت م ہو اور اِس کا فاصلہ ثابت محور سے ر ہو تو اس کی رفتار ثابت محور اور طول ر کے سمتی نیم قطر دونوں پر علی القوائم سمت میں ر $\frac{فرطہ}{فرت}$ ہوگی اِس لیے گردش کے محور کے گرد کمیّت م کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر (زاویئی معیارِ اثر)

$$م \times ر \frac{فرطہ}{فرت} \text{ یعنی } م ر^2 \frac{فرطہ}{فرت} \text{ ہوگا}$$

یعنی کل جسم کا زاویئی معیارِ اثر

$$= \Sigma م ر^2 \frac{فرطہ}{فرت} = \frac{فرطہ}{فرت} \Sigma م ر^2 = مک^2 \frac{فرطہ}{فرت}$$

۱۷۱- گردش کے محور کے گرد حرکت معلوم کرنا

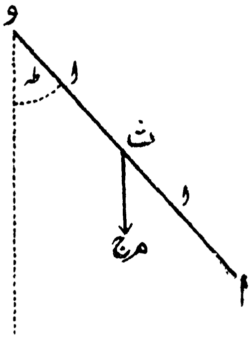
دفعہ ۱۶۱ کی رُو سے ہمیں معلوم ہے کہ کسی حرکت میں مؤثر قوتوں کا معیارِ اثر محور کے گرد بیرونی قوتوں کے معیارِ اثر کے مساوی ہوتا ہے۔ پس اگر بیرونی قوتوں کا معیارِ اثر گردش کے محور کے گرد طہ کی بڑھنے والی سمت میں ل ہو تو

$$مک^2 \frac{فر^2طہ}{فرت^2} = ل$$

اس مساوات کو دو مرتبہ تکمل کرنے سے طہ اور $\frac{فرطہ}{فرت}$ وقت ت کی رقوم میں حاصل ہونگے۔ اختیاری مستقل جو تکمل کے عمل سے پیدا ہوتے ہیں معلوم ہوسکینگے اگر ہمیں سطحِ مستوی ے و ث کا محل جو جسم میں ثابت ہے اور اس کی زاویئی رفتار دونوں کسی آن میں معلوم ہوں۔

۱۷۲- مشق ۱ — ایک یکساں سلاخ جس کی کمیّت م اور طول ۲ ا ہے اپنے ایک سرے کے گرد جو ثابت ہے آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ اسے اُس محل سے جس میں کہ یہ انتصاباً لٹکتی ہے زاویئی رفتار سہ کے ساتھ چلایا گیا ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

بیرونی قوت صرف سلاخ کا وزن م ج ہے جس کا معیارِ اثر ل ثابت محور کے گرد م ج × ا جب ط ہے جب کہ سلاخ زاویہ ط میں گھوم چکی ہو اور یہ معیارِ اثر ط کو کم کرنے کی طرف میلان رکھتا ہے۔



پس حرکت کی مساوات ہے

$$\text{م ک}^2\,\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرت}^2} = -\,\text{م ج ا جب ط}$$

یا چونکہ $\text{ک}^2 = \frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}}$ ، $\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرت}^2} = -\,\frac{\text{۳ج}}{\text{۴ا}}\,\text{جب ط}$

تکمل کرنے سے

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2 = \frac{\text{۳ج}}{\text{۴ا}}\,\text{جم ط} + \text{ج}' \text{، جہاں } \frac{1}{2}\,\text{سہ}^2 = \frac{\text{۳ج}}{\text{۴ا}} + \text{ج}'$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{سہ}^2 - \frac{\text{۳ج}}{\text{۲ا}}\left(1 - \text{جم ط}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

جس سے کسی آن میں زاویئی رفتار معلوم ہوتی ہے۔ بالعموم مساوات (۱) آگے متکمل نہیں ہوسکتی یعنی ت ، ط کی رقوم میں معلوم نہیں ہوسکتی۔

جیسے جیسے ط بڑھتا جاتا ہے زاویئی رفتار $\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$ کم ہوتی جاتی ہے اور صفر ہوجاتی ہے جب کہ ط = π یعنی جب سلاخ بالاترین مقام پر ہو بشرطیکہ سہ = $\sqrt{\frac{\text{۳ج}}{\text{ا}}}$ سلاخ کی زاویئی رفتار کی یہ کم سے کم قیمت ہے جب کہ یہ سب سے نچلے محل میں ہو تاکہ یہ مکمل گردشیں لگا سکے۔ زاویئی رفتار کی اس خاص قیمت کے لیے مساوات (۱)

ہوجاتی ہے

$$\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^۲ = \frac{۳\,\text{ج}}{۲\,\text{ا}}\left(۱ + \text{جم طہ}\right) = \frac{۳\,\text{ج}}{\text{ا}} \times \text{جم}^۲ \frac{\text{طہ}}{۲}$$

$$\therefore \text{ت}\sqrt{\frac{۳\,\text{ج}}{\text{ا}}} = \int \frac{\text{فرطہ}}{\text{جم}\frac{\text{طہ}}{۲}} = ۲\left[\text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{طہ}}{۴}\right)\right]^{\text{طہ}}$$

$$= ۲\,\text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{طہ}}{۴}\right)$$

اس سے کسی خاص صورت میں زاویہ طہ مرتسم کرنے کا وقت معلوم ہوتا ہے۔

توانائی اور کام۔

مساوات (۱) کو حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے

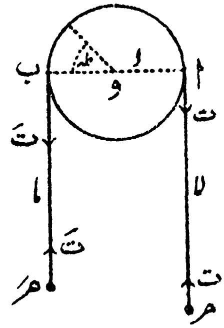
$$\frac{۱}{۲}\,\text{م}\,\frac{۴\,\text{ا}^۲}{۳}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^۲ - \frac{۱}{۲}\,\text{م}\,\frac{۴\,\text{ا}^۲}{۳}\,\text{سہ}^۲ = -\,\text{م ج ا}\left(۱ - \text{جم طہ}\right)$$

یعنی دفعہ ۱۶۹ کی رو سے جسم کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی مساوی ہے اُس کام کے جو جسم کے وزن کے خلاف سرانجام پاتا ہے۔

مشق ۲۔ ایک باریک رسی کے سروں کے ساتھ دو کمیتیں م اور مَ بندھی ہیں، رسّی ایک کھردری چرخی پر سے گزرتی ہے جس کی کمیّت م ہے اور جس کا مرکز ثابت ہے۔ اگر رسّی چرخی پر سے نہ پھسلے تو ثابت کرو کہ م اسراع $\dfrac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{م} + \text{مَ} + \text{م}\frac{\text{ک}^۲}{\text{ا}^۲}} \times$ ج کے ساتھ نیچے اتریگا جہاں ا چرخی کا نصف قطر ہے اور ک گھماؤ کا نصف قطر۔

اگر چرخی پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی کھردری نہ ہو اور اُترنے والی کمیّت م ہو تو ثابت کرو کہ اسراع $\dfrac{\text{م} - \text{مَ و}^{\text{مہ}\pi}}{\text{م} + \text{مَ و}^{\text{مہ}\pi}}$ ج ہوگا اور چرخی زاویئی اسراع $\dfrac{۲\,\text{م مَ ج ا}\left(\text{و}^{\text{مہ}\pi} - ۱\right)}{\text{م ک}^۲\left(\text{م} + \text{مَ و}^{\text{مہ}\pi}\right)}$ کے ساتھ گھومیگی۔

فرض کرو کہ جب چرخی زاویہ ط میں سے گھوم چکے تو رسّی کے تناؤ ت اور تَ ہیں، اور چرخی کے مرکز کے نیچے م اور مَ کی گہرائیاں بالترتیب لا اور ما ہیں۔ تب دفعہ ۱۷۰ کی رُو سے چرخی کی حرکت کی مساوات ہوگی



$\text{م ک}^2\,\ddot{\text{ط}} = (\text{ت} - \text{تَ})\,\text{ا} \quad ......(۱)$

نیز اوزان کی حرکت کی مساواتیں ہیں

$\text{م}\,\ddot{\text{لا}} = \text{م ج} - \text{ت}$ اور $\text{مَ}\,\ddot{\text{ما}} = \text{مَ ج} - \text{تَ} \quad ......(۲)$

نیز لا + ما دورانِ حرکت میں مستقل رہتا ہے،

پس

$\ddot{\text{ما}} = -\ddot{\text{لا}} \quad ....(۳)$

اولاً فرض کرو کہ چرخی، رسّی کے پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی کھردری ہے اور بنابرآں علیہ ا پر چرخی اور رسّی دونوں ہمیشہ ایک ہی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ تب $\dot{\text{لا}} = \text{ا}\,\dot{\text{ط}}$ اور اس لیے

$\ddot{\text{لا}} = \text{ا}\,\ddot{\text{ط}} \quad ....(۴)$

مساواتیں (۱) تا (۴) سے حاصل ہوتا ہے $\ddot{\text{لا}} = \text{ا}\,\ddot{\text{ط}} = \dfrac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{م} + \text{مَ} + \text{م}\frac{\text{ک}^2}{\text{ا}^2}}\,\text{ج}$

جس سے م کی حرکت کا مستقل اسراع ملتا ہے۔

اگر چرخی یکساں قرص ہو تو $\text{ک}^2 = \frac{\text{ا}^2}{۲}$ اور یہ اسراع

$$= \frac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{م} + \text{مَ} + \frac{\text{م}}{۲}}\,\text{ج}$$

اگر یہ پتلا چھلا ہو تو $\text{ک}^2 = \text{ا}^2$ اور اسراع ہوگا $\dfrac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{م} + \text{مَ} + \text{م}}\,\text{ج}$۔

ثانیاً، اگر چرخی رسّی کے پھسلنے کو قطعی طور پر روکنے کے لیے کافی کھردری نہ ہو تو مساوات (۴) برقرار نہ رہیگی۔ اگر رگڑ کی قدر مہ ہو تو (سکونیات دفعہ ۲۶۶ کی رُو سے)

$$\text{ت} = \text{تَ}\ \text{و}^{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

(۲)، (۳) اور (۵) کو حل کرنے سے

$$\text{لاَ} = \frac{\text{م} - \text{مَ}\ \text{و}^{2}}{\text{م} + \text{مَ}\ \text{و}^{2}}\ \text{ج} \quad \text{اور} \quad \text{ت} = \frac{\text{۲ م مَ ج و}^{2}}{\text{م} + \text{مَ}\ \text{و}^{2}} = \text{تَ}\ \text{و}^{2}$$

اور تب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{طٗ} = \frac{\text{۲ ج ا}\ (\text{و}^{2} - 1)}{\text{م ک}^{2}} \times \frac{\text{م مَ}}{\text{م} + \text{مَ}\ \text{و}^{2}}$$

صورت اول کا نتیجہ توانائی اور کام کے اصول کی بنا پر نہایت آسانی سے حاصل ہوسکتا تھا ۔ دوسری صورت میں یہ اصول برقرار نہیں رہتا ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک رسّی کو جو ۱۰ فٹ لمبی ہے ایک چرخ کے محور کے گرد جس کا قطر ۴ انچ ہے لپیٹا گیا ہے اور اس کے دوسرے سرے کو ۵۰ فٹ پونڈ کی ایک مستقل قوت کے ساتھ کھینچا گیا ہے حتےٰ کہ تمام رسّی کھُل جاتی ہے ۔ اب اگر چرخی فی منٹ ۱۰۰ گردشوں کے حساب سے گھوم رہی ہو تو ثابت کرو کہ اس کے جمود کا معیارِ اثر $\frac{\text{۹۰ ج}}{\pi^{2}}$ فٹ پونڈ اکائیاں ہوگا ۔

۲ ۔ ایک یکساں پہیئے کا وزن ۱۰۰ پونڈ ہے اور اس کے مرکز کے گرد اس کے گھماؤ کا نصف قطر ایک فٹ ہے ۔ اس پر ۱۰ فٹ پونڈ کا ایک جفت ایک منٹ تک عمل کرتا ہے ۔ جو زاویئی رفتار پیدا ہوتی ہے اُسے محسوب کرو ۔

نیز وہ مستقل جفت معلوم کرو جو کہ پہیئے کو نصف منٹ میں ساکن کر دے جب کہ اول الذکر فی سکنڈ ۱۵ گردشوں کے حساب سے چکر لگا رہا ہو ۔ نیز معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پہلے پہیہ کتنے چکر لگائیگا ۔

۳ ۔ ایک پہیہ ایک قرص پر مشتمل ہے جس کا قطر ۲ فٹ اور کمیت ۵۰ پونڈ ہے ۔ اِس کے مرکز سے ایک فٹ کے فاصلہ پر ۱۰ پونڈ کی کمیّت لگی ہے ، پہیہ اپنے محور کے گرد

جو متوازی الافق ہے گھوم رہا ہے۔ اگر ایک گردش کے دوران میں اِس کی کم سے کم زاویئی رفتار فی منٹ ۲۰۰ گردشوں کے حساب سے ہو تو ثابت کرو کہ اس کی بڑی سے بڑی زاویئی رفتار بحساب ۲۰۴،۴ گردشیں فی منٹ ہے۔

۴ - دو غیر مساوی کمیتیں ھ اور ھَ دو کھردری سطوح مستوی پر جو افق کے ساتھ زاویے عہ اور بہ بناتی ہیں ساکن ہیں۔ اِن کو ایک باریک رسّی کے ذریعہ جو ایک چھوٹی چرخی پر سے گزرتی ہے ملحق کر دیا گیا ہے۔ چرخی کی کمیّت م اور نصف قطر ا ہے اور یہ دو سطوح کے مشترک راس پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ کسی ایک کمیّت کا اسراع

$$ج\left[ھ\,(جب\,عہ - مہ\,جم\,عہ) - ھَ\,(جب\,بہ + مَہ\,جم\,بہ)\right] \div \left[ھ + ھَ + م\frac{ک^2}{ا^2}\right]$$

جہاں مہ اور مَہ رگڑ کی قدریں ہیں، ک مرکز کے گرد چرخی کے گھماؤ کا نصف قطر ہے، اور ھ وہ کمیت ہے جو نیچے کو حرکت کر رہی ہے۔

۵ - ایک یکساں سلاخ ا ب ایک کھردری سطح مائل پر جس کا میلان افق کے ساتھ خ ہے اور جس کی رگڑ کی قدر مہ ہے ایک چکنی سوئی کے گرد جو سرے ا پر ثابت ہے آزادانہ حرکت کر رہی ہے۔ سلاخ کو افقی محل میں سطح مستوی میں رکھا گیا ہے اور اس محل سے یہ نیچے گرتی ہے۔ اگر طہ وہ زاویہ ہو جس میں سے یہ سکون سے گرتی ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{جب\,طہ}{طہ} = مہ\,مم\,خ$$

۶ - ایک یکساں انتصابی مستدیر قرص نصف قطر ر، اپنے مرکز میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد گھوم سکتا ہے اور ایک کھردری ملائم زنجیر جس کی کمیّت اور طول قرص کی کمیّت اور طول کے مساوی ہیں بحالتِ تعادل اس کے کنارہ پر سے لٹک رہی ہے۔ اگر اِس کے ایک سرے کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ زنجیر کی رفتار جب کہ دوسرا سرا قرص تک پہنچے

$$\sqrt{\frac{۳۲\,ر\,ج}{۶}}$$ ہو جائیگی۔

[توانائی اور کام کے اصول کو استعمال کرو]

۷ - ایک یکساں زنجیر جس کا طول ۲۰ فٹ اور کمیّت ۴۰ پونڈ ہے ایک مجسم مستدیر

چرخی کمیت ۱۰ پونڈ پر، دونوں طرف مساوی طولوں میں لٹک رہی ہے چرخی کا محور متوازی الافق ہے اور نصف قطر قلیل۔ اِس کے سروں سے ۴۰ اور ۲۵ پونڈ کی کمیتوں کو باندھ دیا گیا ہے اور حرکت جاری ہوجاتی ہے۔ ثابت کرو کہ چھوٹے جسم کے قرص تک پہنچنے میں جو وقت لگتا ہے وہ

۱۵√۳ / ۴ لوک_ر (۹ + ۴√۵) سکنڈ ہے۔

۸۔ ایک وزنی اُڑ پہیہ جو ایک متشاکل محور کے گرد گھوم رہا ہے اپنی چولوں وغیرہ کی رگڑ کے زیرِ عمل ساکن ہو رہا ہے۔ ایک خاص منٹ کے دوران میں اس کی زاویئی رفتار کم ہو کر ابتداء سے ۹۶ منٹِ مذکور پر جو رفتار تھی اُس کا ۹۰ فی صد رہ جاتی ہے۔ اس مفروضہ کی بناء پر کہ (۱) رگڑ کا معیارِ اثر مستقل ہے (۲) زاویئی رفتار کے متناسب ہے (۳) زاویئی رفتار کے مربع کے متناسب ہے، بعد کے منٹ کے اختتام پر زاویئی رفتار محسوب کرو۔

فرض کرو کہ اپنے محور کے گرد جسم کے جمود کا معیارِ اثر ج ہے، کسی وقت ت پر اس کی زاویئی رفتار سہ ہے اور سہہ اُس کی ابتدائی زاویئی رفتار ہے۔ فرض کرو کہ دوسرے منٹ کے اختتام پر زاویئی رفتار لا سہہ ہے۔

(۱) اگر رگڑ کا معیارِ اثر مستقل ہو اور ف کے مساوی ہو تو دفعہ ۱۷۱ کی مساوات ہو جاتی ہے

$$ج \frac{فسہ}{فت} = -ف$$

$$\therefore ج سہ = -ف ت + م = -ف ت + ج سہہ$$

جہاں ج × ۹/۱۰ سہہ = - ف ۶۰ + ج سہہ اور ج لا سہہ = - ف × ۱۲۰ + ج سہہ

$$\therefore لا = \frac{۸}{۱۰}$$

(۲) اگر رگڑ کا معیارِ اثر لہ سہ ہو تو حرکت کی مساوات ہوگی

$$\text{ج}\,\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = -\,\text{لہ سہ}$$

$$\therefore\ \text{ج لوگ سہ} = -\,\text{لہ ت} + \text{مستقل}$$

$$\therefore\ \text{سہ} = \text{ھ}\ \text{و}^{-\frac{\text{لہ}}{\text{ج}}\text{ت}} = \text{سھ}\ \text{و}^{-\frac{\text{لہ}}{\text{ج}}\times\text{ت}}$$

جہاں $\frac{۹\,\text{سھ}}{۱۰} = \text{سھ}\ \text{و}^{-\frac{\text{لہ}}{\text{ج}}\times ۶۰}$ اور $\text{لا سھ} = \text{سھ}\ \text{و}^{-\frac{\text{لہ}}{\text{ج}}\times ۱۲۰}$

$$\therefore\ \text{لا} = \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۲} = \frac{۸۱}{۱۰۰}$$

(۳) فرض کرو کہ رگڑ کا معیارِ اثر مہ سہ^۲ ہے، تب حرکت کی مساوات ہوگی

$$\text{ج}\,\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = -\,\text{مہ سہ}^{۲}$$

$$\therefore\ \text{ج}\,\frac{۱}{\text{سہ}} = \text{مہ ت} + \text{ھ} = \text{مہ ت} + \frac{\text{ج}}{\text{سھ}}$$

جہاں $\text{ج}\,\frac{۱۰}{۹\,\text{سھ}} = \text{مہ} \times ۶۰ + \frac{\text{ج}}{\text{سھ}}$ اور $\text{ج} \times \frac{۱}{\text{لا سھ}} = \text{مہ} \times ۱۲۰ + \frac{\text{ج}}{\text{سھ}}$

$$\therefore\ \text{لا} = \frac{۹}{۱۱} = \frac{۸۱\frac{۹}{۱۱}}{۱۰۰}$$

پس اِن تین مفروضوں کی بناء پر دو منٹ کے اختتام پر زاویئی رفتار ابتدائی زاویئی رفتار کا ۸۰، ۸۱، $۸۱\frac{۹}{۱۱}$ فی صد ہوتی ہے۔

۹- ایک اُڑ پہیہ کے گھماؤ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اور اس کا وزن ۱۰۰ پونڈ ہے اور اس کے محور کے ساتھ ایک پنکھا لگا ہوا ہے۔ جب یہ فی منٹ ۱۲۰ گردشوں کے حساب سے چکر لگا رہا ہو تو پنکھے کو دفعۃً پانی کے اندر ڈبو دیا جاتا ہے۔ اگر پانی کی مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہو اور اگر اُڑ پہیہ کی زاویئی رفتار ۳ منٹ میں نصف ہو جائے تو ثابت کرو کہ ابتدائی جفتِ البطا ۲۰ π قٹ پونڈل ہوگا۔

۱۰ ــ ایک اُڑن پہیہ پر جس کے جمود کا معیارِ اثر ج ہے ایک متغیر جفت گ جر ع ت عمل کرتا ہے۔ زاویئی رفتار کی تبدیلیوں کی سعت معلوم کرو۔

مرکب رقاص

۱۷۳ ــ اگر ایک استوار جسم جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل ایک ثابت افقی محور سے جھول رہا ہو تو ثابت کرو کہ ایک مکمل چھوٹے اہتزاز کے دَور کی مدت $2\pi\sqrt{\frac{\text{ک}^2}{\text{ہ ج}}}$ ہے جہاں ک گھماؤ کا نصف قطر ہے ثابت محور کے گرد، اور ہ فاصلہ ہے ثابت محور اور جسم کے مرکزِ جمود کے درمیان۔

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح مستوی، ثابت محور پر عمود وار ہے اور جسم کے مرکزِ ثقل ث میں سے گزرنے والی سطح مستوی ہے اور یہ محور سے و پر ملتی ہے۔ نیز فرض کرو کہ خطِ انتصابی و ا اور و ث کے درمیان زاویہ ط بنتا ہے۔ پس ط وہ زاویہ ہے جو جسم کے لحاظ سے ایک ثابت سطح مستوی اور فضا کے لحاظ سے ایک ثابت سطح مستوی کے درمیان بنتا ہے۔

گردش کے افقی محور و سے کے گرد بیرونی قوتوں کا معیارِ اثر ل

= جسم کے ذرّات کے وزنوں کے معیار اثروں کا مجموعہ

= ث پر عمل کرنے والے وزن ہ ج کا معیارِ اثر

= ہ ج ہ جب ط جہاں و ث = ہ

اور یہ اس طرح عمل کرتا ہے کہ ط کم ہوتا ہے۔

پس دفعہ ۱۷۱ کی مساوات ہوجاتی ہے

$$\text{ہ ک}^2\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرت}^2} = -\text{ہ ج ہ جیب ط} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{ج ہ}}{\text{ک}^2}\,\text{جب ط} \ldots\ldots (1)$$

اگر ط اتنا چھوٹا ہو کہ اِس کے مربع اور مکعب نظرانداز ہوسکیں تو یہ مساوات

ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{د}^2\text{ط}}{\text{دت}^2} = -\frac{\text{ج ھ}}{\text{ک}^2}\,\text{ط} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اب حرکت سادہ موسیقی ہے اور مکمل دَور کی مدت

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\text{ج ھ}}{\text{ک}^2}}} \quad \text{یعنی} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ک}^2}{\text{ھ ج}}}$$

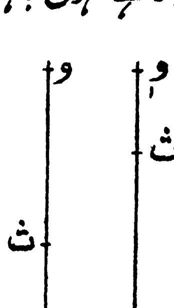
پس دفعہ ۹۷ کی رُو سے اہتزاز کی مدّت مساوی ہے اُس سادہ رقاص کے دَور کے جس کا طول $\frac{\text{ک}^2}{\text{ھ}}$ ہو۔ اس طول کو سادہ معادل رقاص کا طول کہتے ہیں ۔

اگر مرکب رقاص کا اہتزاز چھوٹا نہ بھی ہو تو بھی اس کے اہتزاز کی مدت وہی ہوگی جو $\frac{\text{ک}^2}{\text{ھ}}$ طول والے سادہ رقاص کی ہے ۔

دفعہ ۹۷ کی رُو سے مؤخرالذکر رقاص کی حرکت کی مساوات ہے ۔

$$\frac{\text{د}^2\text{ط}}{\text{دت}^2} = -\frac{\text{ج جب ط}}{\frac{\text{ک}^2}{\text{ھ}}} = -\frac{\text{ج ھ}}{\text{ک}^2}\,\text{جب ط} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور یہ وہی مساوات ہے جو کہ (۱) ہے ۔ پس (۱) اور (۳) سے جو حرکت تعبیر ہوتی ہے وہ ہمیشہ وہی ہوگی جب کہ ابتدائی شرائط وہی ہوں ۔ مثلاً اگر دونوں رقاص ایک آن کے لیے ط کی ایک ہی قیمت عہ پر ساکن ہوں یا اگر دونوں رقاصوں کی زاویئی رفتاریں جب کہ یہ تعادلِ قائم کے محل سے گزر رہے ہوں باہم مساوی ہوں۔



۱۷۴ ۔ اگر ہم و سے وث پر فاصلہ و$_1$و ساده معادل رقاص کے طول $\frac{\text{ک}^2}{\text{ھ}}$ کے طول کے مساوی ناپ لیں تو نقطہ و$_1$ کو اہتزاز کا مرکز کہتے ہیں ۔

ہم آسانی سے دکھا سکتے ہیں کہ لٹکاؤ

(یا تعلیق) اور اہتزاز کے مرکز و اور $و_{ا}$ ایک دوسرے سے باہم بدل سکتے ہیں یعنی اگر ہم جسم کو و کی بجائے $و_{ا}$ سے لٹکائیں تو جسم اُسی مدت میں جھولیگا جس میں کہ طول $و و_{ا}$ کا سادہ رقاص جھولتا ہے۔

کیونکہ

$$و و_{ا} = \frac{ک^{2}}{وث} = \frac{ک^{2} + وث^{2}}{وث}$$

جہاں ک گھماؤ کا نصف قطر ہے ث میں سے گزرنے والے ایسے محور کے گرد جو گردش کے محور کے متوازی ہو۔

اس لیے $ک^{2} = وث \times و و_{ا} - وث^{2} = وث \times ث و_{ا}$ .....(۱)

جب جسم $و_{ا}$ میں سے گزرنے والے متوازی محور کے گرد جھولے تو فرض کرو کہ اہتزاز کا مرکز $و_{۲}$ ہوتا ہے تو اسی طرح حسب سابق ہمیں حاصل ہوگا

$$ک^{2} = و_{ا}ث \times ث و_{۲} \quad ....(۲)$$

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $و_{۲}$ اور و ایک ہی نقطے ہیں۔ پس اگر $و_{ا}$ لٹکاؤ کا مرکز ہو تو و اہتزاز کا مرکز ہوگا۔ گویا یہ دونوں نقطے باہم قابل تبدیل ہیں۔

کپتان کیٹر[۱] نے اِس خصوصیت کو استعمال کرنے سے جاذبۂ ارض ج کی قیمت معلوم کی تھی۔ اُس کے رقاص میں دو باریک دھاریں ہوتی ہیں اور رقاص اِن میں سے ہر ایک کے گرد جھول سکتا ہے۔ اس میں ایک حرکت پذیر کمیت یا کمیتیں بھی ہوتی ہیں جنہیں اس طرح ترتیب دیا جاسکتا ہے کہ اِن دھاروں کے گرد اہتزاز کی مدتیں مساوی ہوتی ہیں۔ تب ہم جانتے ہیں کہ باریک دھاروں کا درمیانی فاصلہ ل اُس سادہ معادل رقاص کا طول ہوتا ہے جو مرکب رقاص کے اہتزاز کی مشاہدہ شدہ مدت ت میں اہتزاز کریگا۔ پس ج کی قیمت ضابطہ $ت = ۲\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}}$ سے حاصل ہوتی ہے۔

[۱] Captain Kater

اس تجربہ کی تفصیل طالب علم طبعیات کی عملی کتابوں میں دیکھ سکتا ہے۔

۱۷۵ ۔ مرکب رقاص کے اہتزاز کی کم سے کم مدت۔

اگر گردش کے محور کے متوازی مرکزِ جمود میں سے گزرنے والے خط کے گرد جسم کے گھماؤ کا نصف قطر ک ہو تو

$$ک'^2 = ک^2 + ھ^2$$

پس سادہ معادل رقاص کا طول

$$= \frac{ک^2 + ھ^2}{ھ} = ھ + \frac{ک^2}{ھ}$$

سادہ معادل رقاص کا طول کم سے کم اور بناءً علیہ اِس کے اہتزاز کی مدت کم سے کم ہوگی جب کہ $\frac{فر}{فرھ}\left(ھ + \frac{ک^2}{ھ}\right) = ۰$

یعنی جب $۱ - \frac{ک^2}{ھ^2} = ۰$ یعنی جب $ھ = ک$

اور اس صورت میں سادہ معادل رقاص کا طول ۲ک ہوگا۔

اگر $ھ = ۰$ یا لاتناہی یعنی اگر لٹکاؤ کا محور جمود کے مرکز میں سے گزرے یا لاتناہی پر واقع ہو تو سادہ معادل رقاص کا طول لاتناہی ہوگا اور بناءً علیہ اہتزاز کی مدت لاتناہی ہوگی۔

اوپر جو کچھ مذکور ہوا وہ صرف ایک خاص سمت میں ہی کھینچے ہوئے لٹکاؤ کے محوروں کے اہتزاز کی کم سے کم مدت کے متعلق ہے لیکن ہمیں دفعہ ۱۵۲ کی رُو سے معلوم ہے کہ مرکزِ جمود ث میں سے گزرنے والے سب محوروں میں سے ایک محور ایسا ہوتا ہے کہ جسم کے جمود کا معیارِ اثر اس محور کے گرد بڑے سے بڑا ہوتا ہے اور ایک ایسا ہوتا ہے کہ جمود کا معیار اِس کے گرد کم سے کم ہوتا ہے۔ اگر مؤخر الذکر محور معلوم کر لیا جائے اور اگر اِس کے گرد جمود کا معیارِ اثر $ک_1$ ہو تو وہ محور جس کے گرد اہتزاز کی مدّت مطلق طور پر کم سے کم ہوگی وہ اس کے متوازی اور فاصلہ $ک_1$ پر کا محور ہوگا۔

۱۷۶ ۔ مشق ۔ ایک مرکب رقاص ایک سلاخ پر مشتمل ہے

جس کی کمیّت م اور طول ا ھے اور جس کے ایک سرے پر کمیّت $م_{۱}$ اور قطر ۲ ب کا گولا بندھا ھے - سلاخ کا ایک سرا ثابت ھے - اھتزاز کی کم سے کم مدت معلوم کرو-

یہاں $$(م+م_{۱})ک^{۲} = م \times \frac{ا^{۲}}{۳} + م_{۱}\left[(ا+ب)^{۲} + \frac{۲ب^{۲}}{۵}\right]$$

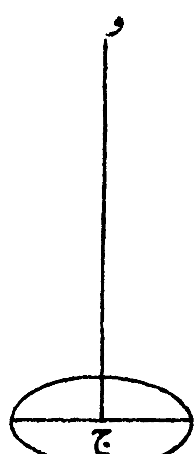
اور $$(م+م_{۱})ھ = م \times \frac{ا}{۲} + م_{۱}(ا+ب)$$

پس سادہ معادل رقاص کا طول

$$\frac{ک^{۲}}{ھ} = \frac{م\frac{ا^{۲}}{۳} + م_{۱}\left[(ا+ب)^{۲} + \frac{۲ب^{۲}}{۵}\right]}{م\frac{ا}{۲} + م_{۱}(ا+ب)}$$

۱۷۷ - مروڑ کے ارتعاشوں کا ہم مدت ہونا

فرض کرو کہ ایک وزندار یکساں مستدیر قرص (یا اسطوانہ) کو کافی لمبے پتلے تار سے لٹکایا گیا ہے جس کا ایک سرا قرص کے مرکز ج کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا سرا ایک ثابت نقطہ و کے ساتھ بندھا ہے -



فرض کرو کہ قرص کو و ج کے گرد زاویہ عہ میں سے اس طرح مروڑا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی متوازی الافق رہتی ہے اور پھر اسے اہتزاز کے لیے چھوڑا گیا ہے -

ہم یہ مان لیتے ہیں کہ تار کے مروڑ کا جفت یعنی وہ جفت جو قرص کو اس کے تعادل کے محل میں لانے کا میلان رکھتا ہے اُس زاویہ کے متناسب ہے جس میں سے قرص کو مروڑا گیا ہے یعنی اگر مروڑ کا زاویہ طہ ہو تو جفت لہ طہ ہے -

نیز فرض کرو کہ قرص کی کمیت م ہے اور گردش کے محور وج کے گرد اس کے گھاؤ کا نصف قطر ک ہے۔

دفعہ ۱۷ کی رُو سے حرکت کی مساوات ہوگی

$$\text{م ک}^2 \frac{\text{فر}^2 \text{طہ}}{\text{فر ت}^2} = - \text{لہ طہ} \quad \text{یعنی} \quad \ddot{\text{طہ}} = - \frac{\text{لہ}}{\text{م ک}^2} \text{طہ}$$

پس حرکت سادہ موسیقی حرکت ہے اور اہتزاز کی مدت

$$= ۲\pi \div \sqrt{\frac{\text{لہ}}{\text{م ک}^2}} = ۲\pi \sqrt{\frac{\text{م ک}^2}{\text{لہ}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

یہ مدت عہ پر جو اہتزاز کی سعت ہے، موقوف نہیں ہے۔

پس ہم عملی طور پر اس مفروضہ کی صداقت کی جانچ کر سکتے ہیں کہ مروڑ کا جفت لہ طہ ہے۔ قرص کو مروڑ کر کسی زاویہ عہ میں سے گھاؤ اور متعدد اہتزازوں کا اوسط لینے سے اہتزاز کی تناظر مدت معلوم کرو۔ عہ کی مختلف قیمتوں کے لیے جو ایک دوسرے سے معتد بہ اختلاف رکھتی ہوں یہی تجربہ کرو۔ تب معلوم ہوگا کہ یہ مدت ہر صورت میں تقریباً وہی رہتی ہے پس (۱) کی بنا پر ہم یہ کہ سکتے ہیں کہ لہ ایک مستقل مقدار ہے۔

۱۷۸- جمود کے معیارِ اثر کا دریافت کرنا تجربی طریق پر-

تشاکل کے محور کے گرد ایک جسم کے جمود کا معیارِ اثر تجربی طور پر دفعۂ ماقبل کے مطابق بآسانی معلوم ہو سکتا ہے۔

اگر قرص کو تول لیا جائے اور اس کا قطر معلوم کر لیا جائے تو اس کا م ک² معلوم ہو جائیگا۔ فرض کرو کہ یہ ج ہے۔

اب اگر اہتزاز کی مدت ت ہو تو

$$\text{ت} = ۲\pi \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{لہ}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب اُس جسم کو جس کے جمود کا معیارِ اثر جَ تشاکل کے محور کے گرد معلوم کرنا مطلوب ہے قرص پر اس طرح رکھو کہ اِس کا محورِ تشاکل ج و پر منطبق ہو۔ اِس

مرکب جسم کے اہتزاز کی مدت تَ حسب دفعہ ماقبل معلوم کرو۔

تب $\text{تَ} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ج}+\text{جَ}}{\text{لہ}}}$ .... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ج}+\text{جَ}}{\text{ج}} = \frac{\text{تَ}^۲}{\text{ت}^۲} \quad \text{یعنی} \quad \text{جَ} = \text{ج} \times \frac{\text{تَ}^۲ - \text{ت}^۲}{\text{ت}^۲}$$

جس سے جَ معلومہ مقادیر کی رقوم میں معلوم ہوجاتا ہے۔

مثالیں

ذیل کی صورتوں میں سادہ معادل رقاصوں کے طول معلوم کرو جب کہ محور افقی ہوں۔

۱۔ گول تار، محور (۱) مماس (۲) اس کی قوس پر کے کسی نقطہ میں سے تار کی سطح مستوی پر عمود۔

۲۔ مستدیر قرص، محور اِس کا ایک مماس۔

۳۔ ناقصی پترا، محور وترِ خاص۔

۴۔ نصف کرہ، محور قاعدہ کا ایک قطر [جواب $\frac{۱۶}{۱۵}$ ر]

۵۔ ضلع ۲ ا کا مکعب، محور (۱) ایک کنارہ (۲) اِس کے ایک رُخ کا وتر

[نتائج (۱) $\frac{۴}{۳}\sqrt{۲}$ ا، (۲) $\frac{۵\,\text{ا}}{۳}$]

۶۔ مثلث پترا ا ب ج، محور (۱) ضلع ب ج (۲) نقطہ ا میں سے پترے پر عمود۔

[نتائج (۱) $\frac{۱}{۲}$ ب جب ج، (۲) $\frac{۱}{۴}\times\frac{۳\text{ب}^۲+۳\text{ج}^۲-\text{ا}^۲}{\sqrt{۲\text{ب}^۲+۲\text{ج}^۲-\text{ا}^۲}}$]

۷۔ مخروط، محور قاعدہ کا قطر [نتیجہ $\frac{۲+۳\,\text{مس}^۲\text{ھ}}{۵}\times\text{ھ}$]

۸۔ ایک بے وزن سلاخ کے ساتھ تین مساوی ذروں کو ایک دوسرے سے مساوی فاصلوں

ویر باندھا گیا ہے۔ اِس نظام کو اُس نقطہ سے جس کا فاصلہ سلاخ کے وسطی نقطہ سے لا ہے لٹکایا گیا ہے اور یہ آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہ کم سے کم ہوگی اگر لا = ۲ × ۵ × و تقریباً۔

۹۔ ایک خمیدہ بیرم ہے، اس کی ساقوں کے طول و اور ب ہیں اور اِن کے درمیان زاویہ عہ ہے۔ بیرم اپنے نصاب کے گرد اپنی سطح مستوی میں چھوٹے اہتزاز کر رہا ہے ثابت کرو کہ متناظر سادہ رقاص کا طول $\frac{۲}{۳}\,\frac{و^۳ + ب^۳}{\sqrt{و^۴ + ۲\,و^۲ ب^۲ \,جم\, عہ + ب^۴}}$ ہے۔

۱۰۔ ایک مجسم متجانس مخروط ہے جس کی بلندی عہ اور راسی زاویہ ۲ عہ ہے اور یہ اپنے راس میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد اہتزاز کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ سادہ معادل رقاص کا طول $\frac{عہ}{۵}$ (۴ + مس^۲ عہ) ہے۔

۱۱۔ ایک کرہ کو جس کا نصف قطر و ہے ایک پتلے تار سے ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے جس کا ایک سرا اس کے مرکز سے فاصلہ ل پر بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزاز کی مدت $۲\pi\sqrt{\frac{۵ ل^۲ + ۲ و^۲}{۵ ل ج}}\left[۱ + \frac{۱}{۴}\,جب^۲\frac{عہ}{۲}\right]$ ہے جہاں عہ ارتعاش کی سعت ہے۔

۱۲۔ طول ۲ و کی ایک سیدھی بے وزن سلاخ ا ب ج ہے جو اپنے ایک سرے ا کے گرد جو ثابت ہے حرکت کر سکتی ہے۔ اس سلاخ کے ساتھ دو مساوی کمیتوں کے ذرّے مربوط ہیں جن میں ایک سلاخ کے وسطی نقطہ ب پر ہے اور دوسرا ایک سرے ج پر۔ اگر سلاخ کو افقی محل میں لاکر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ سلاخ کی زاویئی رفتار انتصابی محل میں $\sqrt{\frac{۶ ج}{۵ و}}$ ہوگی اور سادہ معادل رقاص کا طول $\frac{۵ و}{۳}$ ہوگا۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ مرکب رقاص کے لیے سہارے کے تین اور محور ایسے ہیں جو ابتدائی محور کے متوازی ہیں اور مرکزِ جمود میں سے، ابتدائی محور پر جو خط عمود وار کھینچا جائے اُس کو قطع کرتے ہیں کہ اِن محوروں کے لیے اہتزاز کی مدت وہی ہے جو ابتدائی محور کے گرد ہے۔

اس نتیجہ کا عملی اطلاق بیان کرو۔

۱۴ - عام تال پیما کے تنہ کی درجہ بندی کا کلیہ معلوم کرو۔

۱۵ - ایک کمیت مہ کو طول ل کے ایک بے وزن تار کے ذریعے ایک ثابت نقطے سے لٹکانے سے ایک سادہ مستدیر رقاص بنایا گیا ہے۔ اگر ایک کمیت م جو بمقابلہ مہ کے بہت چھوٹی ہو تار کے ساتھ سہارے کے مقام سے فاصلہ و پر باندھ دی جائے تو ثابت کرو کہ رقاص کے ایک چھوٹے ارتعاش کی مدت، پہلی مدت کے مقابلہ میں بقدر تقریباً

$$\frac{م}{۲مہ}\times\frac{و}{ل}\left(۱-\frac{و}{ل}\right)$$

کے کم ہو جاتی ہے۔

۱۶ - ایک معلومہ مرکب رقاص کے ساتھ چھوٹی کمیت کا ایک ذرّہ بندھا ہے، ثابت کرو کہ رقاص کی مدت میں بڑی سے بڑی تبدیلی اُس وقت پیدا ہوتی ہے جب کہ ذرّہ کو مرکزِ تعلیق اور مرکزِ اہتزاز کے عین بیچ میں رکھا جائے۔ نیز بتاؤ کہ اہتزاز کی مدّت میں معلومہ فرق پیدا کرنے کے لیے ذرّہ کے مقام میں خفیف سی غلطی، تقرب کے پہلے درجہ تک ذرّہ کے وزن میں کوئی تبدیلی پیدا نہ کریگی۔

۱۷ - ایک یکساں وزنی کُرہ کو جس کی کمیت ایک پونڈ اور نصف قطر ۲ انچ ہے تار کے ذریعہ ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے اور تعادل کے محل سے کرہ کو جس زاویہ میں سے گھمایا جائے مروڑ کا جفت اُس زاویہ کے متناسب ہوتا ہے۔ اگر ایک اہتزاز کی مدّت ۲ سکنڈ ہو تو وہ جفت معلوم کرو جس سے کرہ کو ابتدائی محلِ تعادل سے چار قائمہ زاویوں میں سے گھمانے کے بعد تعادل میں رکھ سکیں۔

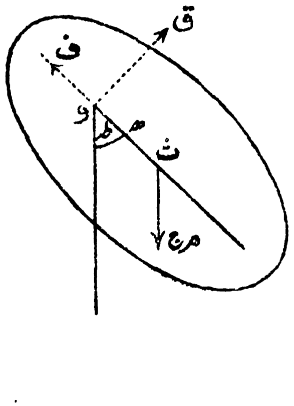
۱۸ - ایک اُڑ پہیہ دو رسیوں کے ذریعے جو اس کے مرکز سے متساوی الفصل نقطوں کے ساتھ بندھی ہیں اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ رسیاں اور اس کا محور سب باہم متوازی ہیں اور پہیہ مروڑ کی ارتعاشیں کر رہا ہے۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ ۵۰ فٹ پونڈ کا سکونی جفت اس کو تعادل میں رکھ سکتا ہے جب کہ یہ محلِ تعادل سے $\frac{۱}{۲}$ نیم قطری زاویہ میں سے گھوم چکا ہو

اور اگر اسے کسی چھوٹے زاویہ میں سے گھما کر چھوڑ دیا جائے تو یہ مکل اہتزاز ۵ سکنڈ میں کرلیتا ہے، ثابت کرو کہ جب یہ اُڑ پہیہ فی منٹ ۲۰۰ گردشوں کی شرح سے گھوم رہا ہو تو اس سے جو توانائی پیدا ہوگی وہ تقریباً ۱۳۱ فٹ ٹن کے مساوی ہوگی ۔

۱۷۹ ۔ گردش کے محور کے تعامل

پہلے ہم اُس سادہ مثال پر غور کرتے ہیں جس میں کہ جسم اُس سطح مستوی کے گرد، جو گردش کے محور پر مرکز ثقل میں عمود دار کھینچا جائے تشاکل ہے بالفاظِ دیگر کاغذ کی سطح مستوی کے گرد متشاکل ہے اور قوت عاملہ صرف جاذبۂ ارض ہے ۔

تشاکل سے ظاہر ہے کہ محور کے تعامل جو جسم پر ہیں وہ ایک واحد قوت میں تحلیل ہوسکینگے جو و پر کاغذ کے مستوی میں عمل کرتی ہے ۔ فرض کرو کہ اس واحد قوت کے اجزائے ترکیبی ف اور ق ہیں جو ث و کی سمت میں اس پر علی القوائم عمل کرتے ہیں۔



دفعہ ۱۶۲ کی رُو سے مرکزِ ثقل ث کی حرکت ویسی ہی ہے جو کہ اُس صورت میں ہوتی جب کہ کل کمیّت م، ث پر مکثف ہوتی اور بیرونی قوتیں سب اپنی ابتدائی سمتوں کے متوازی اِس پر عمل کرتیں ۔

اب ث ثابت نقطہ و کے گرد دائرہ مرتسم کرتا ہے اور اس کے اسراع ث و کی سمت میں اور اِس پر علی القوائم سمت میں بالترتیب

$$ھ\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)^2 \text{ اور } ھ\frac{فر^2طہ}{فرت^2} \text{ ہیں ۔}$$

پس اس کی حرکت کی مساواتیں یہ ہیں

$$\text{م} \times \text{ھ} \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \text{ف} - \text{م ج جم طہ} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\text{م} \times \text{ھ} \, \frac{\text{فر}^{۲}\text{طہ}}{\text{فرت}^{۲}} = \text{ق} - \text{م ج جب طہ} \quad \ldots\ldots (۲)$$

نیز حسب دفعہ ۱۷۱

$$\text{م ک}^{۲} \, \frac{\text{فر}^{۲}\text{طہ}}{\text{فرت}^{۲}} = - \text{م ج ھ جب طہ} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ق کی قیمت (۲) اور (۳) میں سے $\frac{\text{فر}^{۲}\text{طہ}}{\text{فرت}^{۲}}$ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر (۳) کو تکمل کیا جائے اور اختیاری مستقل کی تعیین ابتدائی شرائط سے کرلی جائے تو (۱) سے ف کی قیمت معلوم ہوسکتی ہے۔

بطور صورت خاص کے فرض کرو کہ جسم، طول ۲و کی یکساں سلاخ ہے جو اپنے سرے و کے گرد گھوم رہی ہے اور فرض کرو کہ ابتداءً یہ و کے انتصاباً اوپر ہے۔ اس صورت میں

$$\text{ھ} = \text{و}،\ \text{ک}^{۲} = \text{و}^{۲} + \frac{\text{و}^{۲}}{۳} = \frac{۴\text{و}^{۲}}{۳}$$

پس مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$\ddot{\text{طہ}} = - \frac{۳\text{ج}}{۴\text{و}} \text{جب طہ} \quad \ldots\ldots (۴)$$

$$\therefore \frac{۱}{۲} \dot{\text{طہ}}^{۲} = \frac{۳\text{ج}}{۴\text{و}} \text{جم طہ} + \text{مستقل} = \frac{۳\text{ج}}{۴\text{و}} (۱ + \text{جم طہ}) \quad \ldots\ldots (۵)$$

کیونکہ $\dot{\text{طہ}}$ صفر ہے جب کہ طہ = π

(۱) اور (۵) سے ملتا ہے

$$\text{ف} = \text{م ج} \times \frac{۳ + ۵\ \text{جم طہ}}{۲}$$

(۲) اور (۴) سے $\quad \text{ق} = \frac{۱}{۴} \text{م ج جب طہ}$

پس ہمیں ثابت محور کا حاصل تعامل معلوم ہوجاتا ہے ۔ جب طہ = ۰ یعنی جب سلاخ سب سے نچلے محل میں ہو تو یہ تعامل سلاخ کے وزن کا چار گنا ہوتا ہے ۔

سلاخ کے کسی محل کے لیے انتصابی تعامل

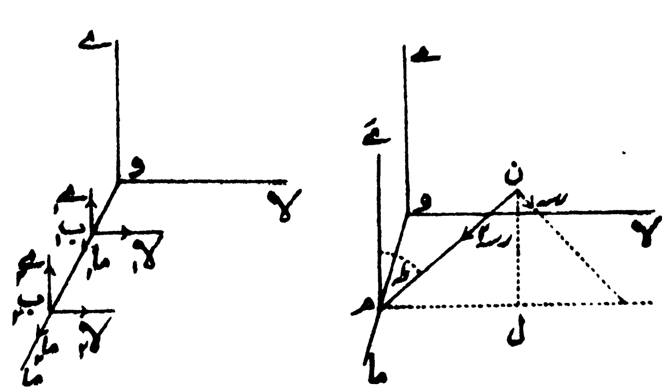
$$= \text{ف جم طہ} + \text{ق جب طہ} = \text{ھ رج} \left(\frac{۱ + ۳\,\text{جم طہ}}{۲}\right)^{۲}$$

اور اس لیے یہ صفر ہوتا ہے جب کہ $\text{طہ} = \text{جم}^{-۱}\left(-\frac{۱}{۳}\right)$

$$\text{افقی تعامل} = \text{ف جب طہ} - \text{ق جم طہ} = \frac{۳}{۴}\,\text{ھ رج جب طہ}\,(۲ + ۳\,\text{جم طہ})$$

۱۸۰ ۔ عام صورت میں، جب جسم پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں یا خود جسم گردش کے محور کے گرد متشاکل نہ ہو تو ہم حسب ذیل عمل کرتے ہیں ۔

گردش کے محور کو ما کا محور مانو اور فرض کرو کہ جسم اس کے دو نقطوں کے ساتھ جن کے فاصلے مبداء سے بالترتیب ب۱ اور ب۲ ہیں بندھا ہے ۔ فرض کرو کہ ان نقطوں پر محور کے ترکیبی تعامل محوروں کے متوازی بالترتیب لا۱، ما۱، ے۱ اور لا۲، ما۲، ے۲ ہیں ۔



اب فرض کرو کہ جسم کا کوئی نقطہ ن (لا، ما، ی) ہے جس کا عمودی فاصلہ ن ھ محور و ما سے ر کے مساوی ہے اور و ے کے متوازی خط کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے ۔

تب دوران حرکت میں ن، مرکز م کے گرد دائرہ مرتسم کرتا ہے بناءً علیہ ر دورانِ حرکت میں منتقل رہتا ہے اور لہٰذا رَ صفر رہتا ہے ۔

اب   لا = رجب طہ اور ی = رجم طہ

∴ لاَ = رجم طہ طہَ اور یَ = ۔ رجب طہ طہَ

∴ لاًّ = ۔ رجب طہ طہَ۲ + رجم طہ طہً اور یً = ۔ رجم طہ طہَ۲ ۔ رجب طہ طہً

پس اگر طہَ کو سہ سے تعبیر کیا جائے تو

لاً = ۔ لا سہ۲ + ی سہَ اور ماً = ۰ اور یً = ۔ ی سہ۲ ۔ لا سہَ

[یہ نتائج ن کے اسراعوں کو محوروں کے متوازی تحلیل کرنے سے بھی حاصل ہو سکتے تھے، یعنی ن م کی سمت میں ر سہ۲ اور ن م کے علی القوائم ر سہَ]

اب اگر لا، ما، یے محوروں کے متوازی جسم کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر عمل کرنے والی بیرونی قوت کے اجزائے ترکیبی ہوں تو دفعہ ۱۶۱ کی حرکت کی مساواتیں یہ ہو جاتی ہیں ۔

Σ لا + لا۱ + لا۲ = Σ م لاً = Σ م [۔ لا سہ۲ + ی سہَ]

= ۔ م لاَ × سہ۲ + م یَ × سہَ ...... (۱)

Σ ما + ما۱ + ما۲ = Σ م ماً = ۰ .... (۲)

Σ یے + یے۱ + یے۲ = Σ م یً = Σ م (۔ ی سہ۲ ۔ لا سہَ)

= ۔ م یَ × سہ۲ ۔ م لاَ × سہَ ...... (۳)

Σ (ما یے ۔ ی ما) + یے۱ ب۱ + یے۲ ب۲

= Σ م (ما یً ۔ ی ماً) = Σ م ما (۔ ی سہ۲ ۔ لا سہَ)

= ۔ سہ۲ Σ م ما ی ۔ سہَ Σ م لا ما .... (۴)

Σ (ی لا ۔ لا یے) = Σ م (ی لاً ۔ لا یً)

= ڈ م (- ی لا سہ^2 + ی^2 سہَ + لا ی سہ^2 + لا^2 سہَ) = سہَ × م ک^2 ...(۵)

جہاں ک، وما کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے اور

ڈ (لا ما - ما لا) - ک$_1$ ب$_1$ - ک$_2$ ب$_2$

= ڈ م (لا ماَ - ما لاَ) = - ڈ م ما (- لا سہ^2 + ی سہَ)

= سہ^2 ڈ م لا ما - سہَ ڈ م ما ی ....(۶)

(۵) کو تکمل کرنے سے ہمیں سہ اور سہَ کی قیمتیں ملتی ہیں اور پھر محض اندراج سے مساواتوں (۱) تا (۴) اور (۶) کے بائیں جانب کے رکنوں کی قیمتیں ملتی ہیں۔

(۱) اور (۶) سے ک$_1$ اور ک$_2$ ملتے ہیں۔

نیز (۳) اور (۴) سے ب$_1$ اور ب$_2$ متعین ہوتے ہیں۔

ما$_1$ اور ما$_2$ غیر معیّن ہیں اور جداگانہ معلوم نہیں ہو سکتے مگر (۲) سے اُن کا حاصل جمع معلوم ہو جاتا ہے۔

ظاہر ہے کہ (۴) اور (۶) کے بائیں جانب کے رکن صفر ہونگے اگر گردش کا محور و میں سے گزرنے والا صدر محور ہو کیونکہ اِس صورت میں مقادیر ڈ م لا ما اور ڈ م ما ی صفر ہونگی۔

پس اِس قسم کی مثال کو عملاً حل کرنے کے لیے مبداء ایسے نقطہ و پر (بشرطیکہ یہ ہو) لینا چاہیے جہاں گردش کا محور صدر محور ہو۔

مثالیں

۱۔ ایک پتلی یکساں سلاخ کا ایک سرا ایک چکنے قبضہ کے ساتھ پیوستہ ہے۔ اسے افقی محل سے گرنے دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ قبضہ کا افقی تعامل بڑے سے بڑا ہوگا جب کہ سلاخ

خطِ انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے اور اُس وقت انتصابی تعامل سلاخ کے وزن کا $\frac{۱۱}{۸}$ گنا ہوگا۔

۲ - ایک وزنی متجانس مکعب جس کا وزن و ہے اپنے ایک کنارہ کے گرد جو متوازی الافق ہے گھوم سکتا ہے - یہ اپنے تعادل غیر قائم کے محل سے ذرا سے ہٹاؤ کی وجہ سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ جب وہ خط جو مکعب کے مرکز سے گردش کے کنارہ پر عمود وار کھینچا جائے زاویہ طہ میں سے گھوم چکے تو ثابت کرو کہ قبضہ کے تعامل کے اجزائے ترکیبی اِس عمود کی سمت میں اور اس پر علی القوائم بالترتیب $\frac{و}{۲}$ (۳ - ۵ جم طہ) اور $\frac{و}{۴}$ جب طہ ہوتے ہیں۔

۳ - ایک مستدیر رقبہ ایک افقی محور کے گرد جو اس کے محیط پر کے ایک نقطہ و میں سے گزرتا ہے اور اس کی سطح پر علی القوائم ہے آزادانہ حرکت کرتا ہے۔ اگر حرکت اُس وقت شروع ہو جب کہ نقطہ و میں سے گزرنے والا قطر و کے انتصاباً اوپر واقع ہو تو ثابت کرو کہ جب یہ قطر زاویہ طہ میں سے گھوم چکے تو و پر کے تعامل قطر کی سمت میں اور اِس پر علی القوائم بالترتیب $\frac{و}{۳}$ (۷ جم طہ - ۴) اور $\frac{و}{۳}$ جب طہ ہونگے۔

۴ - ایک یکساں نصف دائرہ قوس کی کمیّت م اور نصف قطر ا ہے۔ اِس کے دونوں سروں کو ایک انتصابی خط پر کے دو نقطوں کے ساتھ ثابت کردیا گیا ہے اور سلاخ مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے۔ ثابت کرو کہ اوپر کے سرے پر افقی تعامل م $\frac{ج + سہ^{۲} ا}{\pi}$ ہوگا۔

۵ - ایک قائم مخروط جس کا زاویہ ۲ عہ ہے ایک گردش کے محور کے گرد جو اِس کے قاعدہ کے مرکز میں سے اس کے محور پر عمود وار کھینچا گیا ہے آزادانہ گھوم رہا ہے - اب اگر مخروط حالتِ سکون سے روانہ ہو اور ابتداءً اس کا محور متوازی الافق ہو تو ثابت کرو کہ جب محور انتصابی ہوگا تو ثابت محور پر کے تعامل کی نسبت مخروط کے وزن کے ساتھ

$$۱ + \frac{۱}{۲} جم^{۲} عہ : ۱ - \frac{۱}{۴} جم^{۲} عہ$$ ہوگی۔

۶ - ایک منتظم چہار سطحی جس کی کمیت م ہے اپنے ایک کنارہ کے گرد جو متوازی الافق ہے گھوم رہا ہے - ابتدائے حرکت میں کمیت کے مرکز سے اِس کنارہ پر کا عمود متوازی الافق ہے۔

ثابت کرو کہ جب یہ خط سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو تعامل کا انتصابی جزوِ ترکیبی

$\frac{م ج}{۷}$ (۲ جب۲ طہ + ۱۷ جم۲ طہ) ہوگا۔

۱۸۱۔ ایک ثابت محور کے گرد حرکت ۔ دھکے کی قوتیں۔

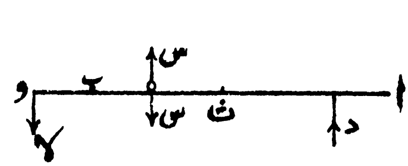
دفعہ ۱۶۶ کی رُو سے ہم جانتے ہیں کہ ایک ثابت محور کے گرد زاویئی معیارِ حرکت کی تبدیلی اسی محور کے گرد دھکے کی قوتوں کے معیارِ اثر ل کے مساوی ہوتی ہے۔

لیکن دفعہ ۱۷۰ کی مانند جسم کا زاویئی معیارِ حرکت (معیارِ حرکت کا معیارِ اثر) اس محور کے گرد م ک۲ سھ ہے جہاں سھ زاویئی رفتار ہے اور م ک۲ اس محور کے گرد جمود کا معیارِ اثر ہے۔

پس اگر دھکے کی قوتوں کے عمل سے عین پہلے اور عین بعد محور کے گرد زاویئی رفتاریں سھ اور سَھ ہوں تو یہ تبدیلی = م ک۲ (سَھ ۔ سھ)

اور ہمیں حاصل ہوتا ہے م ک۲ (سَھ ۔ سھ) = ل

مشق ۔ ایک یکساں سلاخ و ا، کمیت م، طول ۲ ا ایک چکنے میز پر ساکن ہے اور اپنے چکنے سرے و کے گرد آزادانہ حرکت کر سکتی ہے۔ اس سلاخ کے ساتھ مس کرتا ہوا، اس کے سرے و سے فاصلہ ب پر، کمیت م کا ایک بے لچک ذرہ پڑا ہے۔ سلاخ کو ایک افقی صدمہ جس کا دھکا د ہے، و سے فاصلہ لا پر سلاخ پر علی القوائم سمت میں دیا گیا ہے۔ اس سے سلاخ کی جو زاویئی رفتار پیدا ہوتی ہے اسے معلوم کرو نیز و اور ذرہ پر جو دھکے کی قسم کے تعامل پیدا ہوتے ہیں انہیں دریافت کرو۔



اگر مطلوبہ زاویئی رفتار سہ ہو اور سلاخ اور ذرہ کے درمیان تعامل کا دھکا س ہو تو دفعہ ماقبل کی رُو سے

$$\text{ھ} \times \frac{\text{ک}^{2}}{3}\,\text{سہ} = \text{د} \times \text{لا} - \text{س} \times \text{ب} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

نیز دھکا س کمیت م میں رفتار ب سہ ایسی پیدا کرتا ہے کہ

$$\text{م} \times \text{ب}\,\text{سہ} = \text{س} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ} = \text{د}\,\text{لا} \Big/ \left(\text{ھ} \times \frac{\text{ک}^{2}}{3} + \text{م}\,\text{ب}^{2}\right)$$

نیز فرض کرو کہ نقطہ و پر سلاخ پر کا تعامل ٧ ہے ۔ نیز چونکہ سلاخ کے مرکزِ ثقل کی حرکت کی تبدیلی ایسی ہوتی ہے گویا کہ دھکے کی تمام قوتیں مرکز پر لگائی گئی ہیں،

$$\therefore\ \text{ھ} \times \text{ا}\,\text{سہ} = \text{د} - \text{س} - \text{٧}$$

$$\therefore\ \text{٧} = \text{د} - (\text{ھ}\,\text{ا} + \text{م}\,\text{ب})\,\text{سہ} = \text{د}\left[1 - \frac{(\text{ھ}\,\text{ا} + \text{م}\,\text{ب})\,\text{لا}}{\text{ھ}\frac{\text{ک}^{2}}{3} + \text{م}\,\text{ب}^{2}}\right]$$

نیز (۲) سے حاصل ہوتا ہے

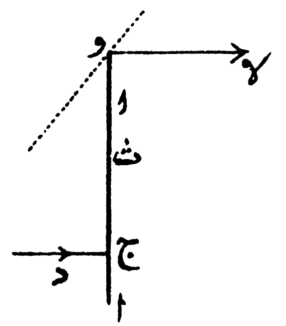
$$\text{س} = \frac{\text{م}\,\text{د}\,\text{ب}\,\text{لا}}{\text{ھ}\frac{\text{ک}^{2}}{3} + \text{م}\,\text{ب}^{2}}$$

۱۸۲ ۔ مرکزِ زد ——— جب گردش کا ثابت محور دیا گیا ہو اور جسم کو اس طرح ضرب لگائی جا سکے کہ محور پر دھکے کی قسم کا کوئی تعامل نہ ہو تو دھکے کے خطِ عمل پر کا کوئی نقطہ مرکزِ زد کہلاتا ہے ۔

اس کی ایک سادہ مثال کے طور پر ایک یکساں سلاخ و ا (= ۲ ا) پر غور کرو جو اپنے ایک سرے و سے آزادانہ لٹک رہی ہے اور جس کے نقطہ ج پر ایک افقی ضرب لگائی گئی ہے جہاں و ج = لا اور ضرب کا دھکا = د

فرض کرو کہ دھکے سے سلاخ میں فوری زاویئی رفتار سہ پیدا ہوتی ہے اور

ھ سلاخ پر محور گردش کا دھکے کی قسم کا تعامل ہے۔



دھکے کے عین بعد مرکزِ ثقل ث کی رفتار ا سَہ ہوگی اس لیے دفعہ ۱۶۶ کے نتیجہ کی رُو سے

$$\text{م ا سَہ} = \text{د} + \text{ھ} \quad ....(۱)$$

نیز سلاخ کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر و کے گرد دھکے کے عین بعد $\text{م ک}^2\,\text{سَہ}$ ہوگا جہاں ک، و کے گرد سلاخ کے گھماؤ کا نصف قطر ہے یعنی $\text{ک}^2 = \frac{\text{۴ ا}^2}{\text{۳}}$

پس دفعہ ۱۶۶ کی مساوات (۴) کی رُو سے

$$\text{م ک}^2\,\text{سَہ} = \text{د} \times \text{لا} \quad ....(۲)$$

اس لیے $\text{ھ} = \text{م ا سَہ} - \text{م}\frac{\text{ک}^2}{\text{لا}}\,\text{سَہ} = \text{م ا سَہ}\,\frac{\text{لا} - \frac{\text{ک}^2}{\text{ا}}}{\text{لا}}$ ....(۳)

پس ھ صفر ہوگا یعنی و پر کوئی دھکے کی قسم کا تعامل پیدا نہ ہوگا، اگر $\text{لا} = \frac{\text{ک}^2}{\text{ا}}$ اور تب و ج = سادہ معادل رقاص کا طول (دفعہ ۱۷۳)۔ اس صورت میں مطلوبہ نقطہ ج اہتزاز کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے، پس ثابت محور کے لحاظ سے زد کا مرکز اسی محور کے لحاظ سے اہتزاز کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔

اگر لا مساوی نہ ہو $\frac{\text{ک}^2}{\text{ا}}$ کے تو (۳) کی رُو سے ھ مثبت یا منفی ہوگا اگر لا بالترتیب زیادہ ہو یا کم ہو $\frac{\text{ک}^2}{\text{ا}}$ سے، یعنی جسم کے نقطہ و پر دھکے کی قسم کا تعامل، دھکے کی سمت میں ہوگا اگر دھکا زد کے مرکز سے نیچے لگایا جائے یا دھکے کی مخالف سمت میں ہوگا جب کہ دھکا زد کے مرکز سے اوپر لگایا جائے۔

۱۸۳ ۔ ایک جسم کی حرکت کی عام صورت میں جب کہ جسم ایک محور کے گرد

دھکے کی قسم کی قوتوں کے زیرِ عمل آزادانہ حرکت کر رہا ہو ہمیں دفعہ ۱۶۶ کی اساسی مساواتیں استعمال کرنی چاہییں۔

دفعہ ۱۸۰ کی ترقیم اور شکل کے مطابق فرض کرو کہ (لاَ، ماَ، ےَ) جسم کے نقطہ (لا، ما، ی) پر عمل کرنے والے دھکے کے اجزائے ترکیبی ہیں محوروں کے متوازی اور (لاَ۱، ماَ۱، ےَ۱) اور (لاَ۲، ماَ۲، ےَ۲) نقاط ب۱ اور ب۲ پر عمل کرنے والے دھکے کی قسم کے تعامل ہیں۔

تب دفعہ ۱۸۰ کی مانند

ء = لاَ = ی سہ، و = ماَ = ۰ اور ھ = یَ = - لا سہ

ءَ = ی سہَ، وَ = ۰ اور ھَ = - لا سہَ

جہاں سہَ دھکوں کے بعد و ما کے گرد زاویئی رفتار ہے۔

تب دفعہ ۱۶۶ کی مساواتیں (۱) تا (۶) ہو جاتی ہیں:-

Σلاَ + لاَ۱ + لاَ۲ = Σم ی سہَ - Σم ی سہ = ھ یَ (سہَ - سہ) ....(۱)

Σماَ + ماَ۱ + ماَ۲ = ۰ ....(۲)

Σےَ + ےَ۱ + ےَ۲ = Σم (- لا سہَ) - Σم (- لا سہ)

= - ھ لاَ (سہَ - سہ) ....(۳)

Σ(ما ےَ - ی ماَ) + ےَ۱ ب۱ + ےَ۲ ب۲ = Σم [- لا ما سہَ] - Σم [- لا ما سہ]

= - (سہَ - سہ) Σم لا ما ....(۴)

Σ(ی لاَ - لا ےَ) = Σم (ی² سہَ + لا² سہَ) - Σم (ی² سہ + لا² سہ)

= (سہَ - سہ) ھ ک² ....(۵)

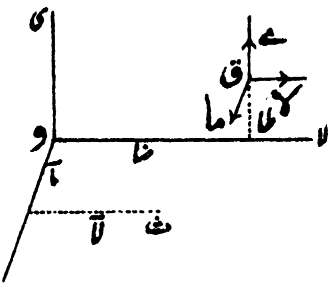
اور Σ(لا ماَ - ما لاَ) - لاَ۱ ب۱ - لاَ۲ ب۲ = Σم (- ما ی سہَ) - Σم (- ما ی سہ)

= - (سہَ - سہ) Σم ما ی ......(۶)

باقی حل دفعہ ۱۸۰ کے مطابق ہے ۔

۱۸۴ ۔ **زد کا مرکز** ـــــ ثابت محور کو ما کا محور مانو، فرض کرو کہ لا ما کی سطحِ مستوی مرکزِ جمود ث کے فوری محل میں سے گزرتی ہے، نیز فرض کرو کہ ثابت محور پر عمود وار دھکے کے نقطۂ عمل ق میں سے گزرنے والی سطحِ مستوی لا ی کی سطحِ مستوی ہے ۔ پس ث نقطہ (لآ، مآ، ۰) ہے اور ق (ضا، ۰، طا) ہے ۔

فرض کرو کہ دھکے کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما اور ے ہیں، نیز فرض کرو کہ گردش کے محور پر کوئی تعامل نہیں ہے ۔



تب دفعہ ماقبل کی مساواتیں ہو جاتی ہیں ۔

لا = ۰ ....(۱)

ما = ۰ ....(۲)

ے = ۔ م لآ (سَہ ۔ سہ)...(۳)

طا ما = (سَہ ۔ سہ) 3 م لا ما....(۴)

طا لا ۔ ضا ے = (سَہ ۔ سہ) م ک^۲ ....(۵)

اور ضا ما = ۔ (سَہ ۔ سہ) 3 م ما ی ....(۶)

مساواتیں (۱) اور (۲) اس امرِ واقعہ کو ظاہر کرتی ہیں کہ دھکے کا کوئی جزوِ ترکیبی لا اور ما کے محوروں کے متوازی نہیں ہے یعنی ضرب ثابت محور اور مرکزِ جمود کے فوری محل میں سے گزرنے والی سطحِ مستوی پر علی القوائم ہے ۔

تب (۴) اور (۶) سے حاصل ہوتا ہے 3 م لا ما = ۰ اور 3 م ما ی = ۰

پس ثابت محور جسم کا صدر محور ہے مبداء پر یعنی اُس نقطہ پر جہاں ضرب کے خطِ عمل میں سے گزرنے والی اور ثابت محور پر علی القوائم سطحِ مستوی، ثابت محور کو کاٹتی ہے۔

یہ زد کے مرکز کے وجود کے لیے کافی شرط ہے ۔ اس لیے اگر ثابت محور اپنے طول کے کسی نقطہ پر صدر محور نہ ہو تو زد کا مرکز موجود نہ ہوگا ۔ اگر یہ اپنے

طول پر کے صرف ایک نقطہ پر صدمحور ہو تو ضرب اس نقطہ میں سے گزرنے والی اور گردش کے محور پر عمود وار سطح مستوی میں عمل کریگی۔

بالآخر (۳) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے ضا = $\frac{ک^2}{لا}$

پس دفعہ ۱۷۳ سے ظاہر ہے کہ اگر زد کا مرکز موجود ہو تو اس کا فاصلہ ثابت محور سے وہی ہوگا جو اہتزاز کے مرکز کا ہے جب کہ جسم ثابت محور کے گرد آزادانہ اہتزاز کرے اور یہ ثابت محورِ تعلیق کا اُفقی محور ہو۔

نتیجہ صریح ـــ اُس خاص صورت میں جب کہ ما = ۰ اور جمود کا مرکز ث، و لا پر واقع ہو تو زد کا خط، اہتزاز کے مرکز میں سے گزرتا ہے ۔ یہ وہ صورت ہے جب کہ مرکزِ جمود میں سے گزرنے والی اور گردش کے محور پر عمود وار سطح مستوی، مؤخر الذکر کو اُس نقطہ پر کاٹے جس پر یہ صدمحور ہے اور اس لیے دفعہ ۱۷۴ کی رُو سے، گردش کا محور مرکزِ جمود پر کے صدمحور کے متوازی ہے۔

اوپر کی تین دفعات کی تحقیق دھکے کی قسم کے تعاملوں سے متعلق ہے ۔ گردش شروع ہو جانے کے بعد محور پر حرکت کی وجہ سے معمولی محدود دباؤ پڑیگا۔

۱۸۵ ـ دفعۂ ماقبل کی ایک سرسری مثال کرکٹ کے بلّے میں پائی جاتی ہے۔ اگرچہ ٹھیک طور پر یہ ایک محور کے گرد گردش نہیں کرتا لیکن کھلاڑی کے ہاتھ بلّے کے دستہ کے چھوٹے سے جزو پر ہوتے ہیں اس لیے ہم حرکت کو تقریباً واحد محور کے گرد تصور کر سکتے ہیں ۔ اگر گیند بلّے کے مناسب مقام پر آکر لگے تو کھلاڑی کے ہاتھوں کو بہت کم صدمہ محسوس ہوگا۔

ثانیاً معمولی ہتھوڑے کی مثال پر غور کرو جس کا دستہ لکڑی کا ہو، اس کی کمیّت کا معتدبہ حصہ آہنی سر پر مکثف ہوتا ہے اور زد کا مرکز سر کے اندر یا اس کے قریب واقع ہوتا ہے اور اس لیے صدمہ زد کے مرکز کے بالکل قریب عمل کرتا ہے اور گردش کے محور پر کا تعامل یعنی مزدور کے ہاتھ پر کا صدمہ نہایت خفیف ہوتا ہے۔ اگر ہتھوڑی کا دستہ بھی آہنی ہو تو نتائج بہت مختلف ہونگے۔

۱۸۶ ـ مشق ـــ ایک مثلث ا ب ج اپنے ضلع ب ج کے گرد

آزادانہ گردش کر سکتا ہے۔ زد کا مرکز معلوم کرو۔

ا د ، ب ج پر عمود وار کھینچو اور فرض کرو کہ ب ج کا وسطی نقطہ ع اور د ع کا وسطی نقطہ ف ہے، تب مشق، صفحہ ۳۲۲ کے مطابق ف وہ نقطہ ہے جس پر ب ج صدر محور ہے۔

اگر ا د = $ع_1$ تو دفعہ ۱۵۴ کی رُو سے ب ج کے گرد جمود کا معیارِ اثر

$$= \frac{ه}{۳}\left[\left(\frac{ع_1}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{ع_1}{۲}\right)^۲\right] \quad \text{یعنی}\quad ک^۲ = \frac{ع_1^۲}{۶}$$

$$\text{نیز} \qquad ه = \frac{ع_1}{۳} \quad \text{یعنی} \quad \frac{ک^۲}{ه} = \frac{ع_1}{۲}$$

مثلث کے اندر ف فَ عمود کھینچو ب ج پر جو ا ع سے ف پر ملے تب

ف فَ = $\frac{۱}{۲}$ ا د = $\frac{ع_1}{۲}$، اس لیے فَ زد کا مطلوبہ مرکز ہے۔ اگر ہم ع عَ ب ج پر عمود وار کھینچیں اور اسے $\frac{ع_1}{۲}$ کے مساوی بنائیں تو عَ لٹکاؤ کے اُفقی محور ب ج کے گرد گردش کے لیے اہتزاز کا مرکز ہوگا۔

نقاط عَ اور فَ اُس صورت میں ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں جب کہ مثلث کے ضلعے ا ب اور ا ج باہم مساوی ہوں۔

مثالیں

ذیل کی صورتوں میں زد کے مرکز کا محل معلوم کرو:

۱ ۔ ایک یکساں سلاخ جس کا ایک سرا ثابت ہے۔

۲ ۔ ایک یکساں مستدیر قرص جب کہ محور اُفقی مماس ہے۔

۳ ۔ ایک قطاع دائرہ، محور قطاع کی سطح مستوی میں، اس کے تشاکل نصف قطر پر عمود وار اور دائرہ کے مرکز میں سے گزرنے والا۔

۴ ۔ ایک یکساں مستدیر پترا ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ یہ اپنے محیط پر کے ایک نقطہ و کے گرد حرکت شروع کریگا جب کہ اسے ایک ضرب و میں سے

گزرنے والے قطر پر علی القوائم سمت میں وسے اس قطر کے تین چوتھائی فاصلہ پر لگائی جائے ۔

۵ ۔ ایک ٹھوس کرہ کمیت م نصف قطر ل کو ایک سلاخ (کمیت م اور طول ب) کے ایک سرے کے ساتھ لگا کر ایک رقاص بنایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر رقاص کو محور سے فاصلہ

$$\left\{م\left[\frac{۲}{۵}ل^{۲}+(ل+ب)^{۲}\right]+\frac{۱}{۳}م\,ب^{۲}\right\}\div\left[م(ل+ب)+\frac{۱}{۲}م\,ب\right]$$

پر ضرب لگائی جائے تو گردش کے محور پر کوئی تعامل نہ ہوگا ۔

۶ ۔ بتاؤ کہ ایک پترے کو کس طرح مارنا چاہیئے کہ یہ اپنے ایک ضلع کے گرد گردش کرنا شروع کرے ۔

۷ ۔ ایک یکساں شہتیر اب جو اپنے ایک سرے ا کے گرد گھوم سکتا ہے تعادل میں ہے ۔ اس کے طول پر کے وہ نقطے معلوم کرو جہاں پر صدمہ لگانے سے ا پر کے دھکے ہر صورت میں صدمہ کے $\frac{۱}{ن}$ کے مساوی ہوں ۔

۸ ۔ ایک یکساں سلاخ اب جس کا طول ۶ فٹ اور کمیت ۲۰ پونڈ ہے ا پر کے ایک چکنے افقی محور سے انتصاباً لٹک رہی ہے ۔ اسے ا کے نیچے ۵ فٹ کے فاصلہ پر عموداً صدمہ لگایا گیا ہے جو ۲ پونڈ کمیت میں فی سکنڈ ۳۰ فٹ کی رفتار پیدا کر سکتا ہے ۔ محور پر جو دھکا لگتا ہے اسے معلوم کرو اور بتاؤ کہ سلاخ کس زاویہ میں سے اوپر اٹھتی ہے ۔

۹ ۔ کمیت م اور طول ۲ ل کی ایک سلاخ جو اپنے ایک سرے ا کے گرد آزادانہ حرکت کر سکتی ہے انتصابی محل سے گرتی ہے اور جب یہ افقی محل میں آتی ہے تو سرے ا سے فاصلہ ب پر ایک بے لچک رکاوٹ سے ٹکراتی ہے ۔ ثابت کرو کہ صدمہ کا دھکا $م\times\frac{۲ل}{ب}\sqrt{\frac{۲ج ل}{۳}}$ مساوی ہے اور ا پر کے تعامل کا دھکا $م\sqrt{\frac{۳ج ل}{۲}}\left[۱-\frac{۴ل}{۳ب}\right]$ انتصاباً اوپر کی طرف ہے ۔

۱۰۔ ایک سلاخ جسکی کمیّت ن م ہے ایک افقی میز پر پڑی ہے اور اس کا ایک سرا ثابت ہے اور ایک ذرہ جس کی کمیّت م ہے اس کے ساتھ مَس کرتا ہے۔ سلاخ کو اس کے ایک آزاد سرے پر افقی صدمہ لگایا گیا ہے۔ بتاؤ کہ ذرہ کس جگہ ہو کہ اس کی رفتارِ روانگی زیادہ سے زیادہ ہو۔

اس صورت میں ثابت کرو کہ توانائیاں (بالحرکت) جو سلاخ اور کمیّت میں منتقل ہوتی ہیں باہم مساوی ہیں۔

۱۱۔ ایک یکساں بے لچک شہتیر اپنے مرکزِ ثقل کے گرد انتصابی سطحِ مستوی میں گھوم سکتا ہے اور بحالتِ سکون سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ ء بناتا ہے۔ معلومہ کمیّت کے ایک ذرہ کو شہتیر کے مرکز کے اوپر ایک معلومہ بلندی سے گرایا گیا ہے اور یہ شہتیر سے ایک معلومہ نقطہ ن پر ٹکراتا ہے۔ ن کا محل معلوم کرو تاکہ حاصل زاویئی رفتار بڑی سے بڑی ہو۔

۱۲۔ کمیّت م اور طول ۲ ا کی ایک سلاخ اپنے ثابت مرکز کے گرد زاویئی رفتار مہ کے ساتھ انتصابی سطحِ مستوی میں گھوم رہی ہے۔ جب سلاخ متوازی الافق محل میں ہے تو اس کا اوپر چڑھنے والا سرا کمیّت م کے ایک گیند سے جو ء رفتار کے ساتھ گر رہا ہے متصادم ہوتا ہے اور جب یہ پھر متوازی الافق ہوتی ہے تو یہی سرا ایسے ایک گیند کے ساتھ جو رفتار ء کے ساتھ گر رہا ہے متصادم ہوتا ہے۔ سلاخ اور گیندوں میں جو حرکت پیدا ہوتی ہے اُسے جداگانہ معلوم کرو۔

۱۳۔ ایک یکساں شہتیر جس کی کمیّت م اور طول ۲ ل ہے افقی محل میں ہے اور اپنے ثابت مرکز کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ کمیّت مَ کا ایک ذرہ جو انتصابی رفتار ء کے ساتھ حرکت کر رہا ہے شہتیر کے ایک سرے پر ٹکراتا ہے۔ اگر تصادم کے لئے لچک کی قدر لہ ہو تو ثابت کرو کہ تصادم کے عین بعد شہتیر کی رفتار

۳ مَ (۱ + لہ) ء \ (م + ۳ مَ) ل

ہو گی اور ذرہ کی انتصابی رفتار ء (لہ م - ۳ مَ) \ (م + ۳ مَ) ہو گی۔

۱۴۔ دو پہیے دو ثابت نلکوں پر لگے ہوئے ہیں جو ثابت چولوں پر گھومتے ہیں۔ یہ دفعتہً ایک ساتھ پکڑ میں آکر مخالف سمتوں میں اس طرح گھومنا شروع کرتے ہیں کہ

ان کی زاویئی رفتاریں اِن کے نصف قطروں کے بالعکس تناسب ہوتی ہیں۔ ایک پہیہ کا نصف قطر ل، جمود کا معیارِ اثر $\text{جم}_{\text{۱}}$ اور ابتدائی رفتار سہ تھی اور دوسرے پہیہ کا نصف قطر ب، جمود کا معیارِ اثر $\text{جم}_{\text{۲}}$ اور یہ ابتداءً ساکن تھا۔ ثابت کرو کہ اُن کی نئی زاویئی رفتاریں ہونگی
$$\frac{\text{جم}_{\text{۱}}\,\text{ب}^{\text{۲}}}{\text{جم}_{\text{۱}}\,\text{ب}^{\text{۲}} + \text{جم}_{\text{۲}}\,\text{ل}^{\text{۲}}}\ \text{سہ اور}\ \frac{\text{جم}_{\text{۱}}\,\text{ل}\,\text{ب}}{\text{جم}_{\text{۱}}\,\text{ب}^{\text{۲}} + \text{جم}_{\text{۲}}\,\text{ل}^{\text{۲}}}\ \text{سہ}$$

۱۵۔ ایک مستطیلی متوازی السطوح کے کنارے ۲ل، ۲ب، ۲ج ہیں اور وزن و ہے اور اسے اس کے انتصابی کنارہ ۲ل کے اوپر اور نیچے کے سروں پر دو قبضے سہارے ہوئے ہیں اور یہ اس کنارہ کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ قبضوں پر کے ترکیبی دباؤ جہاں تک کہ یہ قابلِ تعیین ہوں معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک یکساں سلاخ کا طول ۲ل ہے اور اس کا ایک سرا ایک چکنے قبضہ کے ذریعہ ثابت کر دیا گیا ہے۔ سلاخ اس سرے میں سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ اس طرح گھوم رہی ہے کہ اس کی گردش سے مخروطِ مرتسم ہوتا ہے جس کا نصف راسی زاویہ عہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{سہ}^{\text{۲}} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\cdot\frac{\text{ج}}{\text{ل جم عہ}}$$

نیز ثابت کرو کہ قبضہ پر کے تعامل کی سمت خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ مسا $\left(\frac{\text{۳}}{\text{۴}}\ \text{مس عہ}\right)$ بناتی ہے۔

۱۷۔ ایک دروازہ جس کا عرض ل فٹ اور کمیت م پونڈ ہے آگے پیچھے یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے اور چھوٹے زاویہ طہ کے اندر ایک روک کے ذریعہ جو قبضوں کے محور سے فاصلہ $\frac{\text{ل}}{\text{۲}}$ پر ایک یکساں قوت ق لگاتی ہے ساکن ہو جاتا ہے۔ قوت ق کی مقدار معلوم کرو اور دروازہ پر عمود وار سمت میں قبضہ کے تعامل محسوب کرو جب کہ روک افقی سطح مستوی میں دروازہ کی نصف بلندی پر عمل کرے۔

اگر دروازہ ۲ل فٹ بلند ہو اور اس پر دو قبضے ہوں اور متشاکلاً لگے ہوئے ہوں

اور ایک دوسرے سے ۲ ب فاصلہ پر ہوں تو قبضوں کے تعامل معلوم کرو جب کہ روک بالاترین کنارہ پر ہو۔

۱۸۔ ایک یکساں سلاخ اب جس کا طول ج اور کمیت م ہے ایک ثابت نقطہ سے جس کے گرد یہ آزادانہ گھوم سکتی ہے لٹک رہی ہے اور ہوا یکساں رفتار و کے ساتھ افقاً چل رہی ہے۔ اگر سلاخ کے جزو فر پر ہوا کا دباؤ ک و۲ فر سمجھا جائے جہاں و عمادی اضافی رفتار ہے تو ثابت کرو کہ محلِ تعادل میں سمتِ انتصابی کے ساتھ سلاخ کا میلان عہ مساوات م ج جب عہ = ج ک و۲ جم۲ عہ سے حاصل ہوتا ہے۔ نیز معلوم کرو کہ اگر سلاخ کو ذرا سے زیادہ میلان پر رکھ کر ہوا کے خلاف گرنے کے لئے چھوڑ دیا جائے تو اس میلان تک گرنے میں اس کو کیا وقت لگیگا۔

۱۹۔ ایک سلاخ کے ایک سرے پر ایک سخت جوڑ لگا ہوا ہے جو سلاخ کو سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ پر رکھ سکتا ہے۔ اگر سلاخ کو ایک چھوٹے زاویہ عہ میں سے اٹھا کر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ تقریباً زاویہ ۲ عہ ۔ $\frac{1}{2}$ عہ۲ مس طہ میں سے گھومنے کے بعد سکون میں آئے گی جب کہ جوڑ پر کی رگڑ کے جفت کو مستقل خیال کیا جائے۔

۲۰۔ ایک ریل کے ڈبہ کا دروازہ کھلا ہوا ہے اور ریل کی سمت پر علی القوائم ہے۔ ریل روانہ ہوکر اسراع ف سے حرکت کرنا شروع کرتی ہے، اگر دروازہ یکساں ہو اور اس کے قبضے چکنے تصور کیے جائیں تو ثابت کرو کہ جب دروازہ زاویہ طہ میں سے گھومے تو اس کی زاویئی رفتار $\sqrt{\frac{۳ ف}{۲ ا}}$ جب طہ ہوگی۔ جہاں ۲ ا دروازہ کی چوڑائی ہے۔

۲۱۔ آتشبازی کا کیتھرین پہیہ ایک مستدیر قرص نصف قطر ا کے محیط کے گرد کئی مرتبہ بارود کی پتلی تہیں لپیٹنے سے بنایا گیا ہے، اگر پہیہ وقت ف تک چلتا رہے اور بارود محیط کی سمت میں اضافی رفتار و کی یکساں شرح کے ساتھ جلتی رہے، تو ثابت کرو کہ وقت ت میں پہیہ جس زاویہ میں سے گھومیگا وہ

$$\frac{و \times ت}{ا} \left\{ ۱ - ج \text{ لوک} \left(۱ + \frac{۱}{ج} \right) \right\}$$

کے مساوی ہوگا جہاں ۲ ج قرص اور بارود کی کمیتوں کی نسبت ہے۔

بارود کی تہیں اتنی پتلی فرض کی گئی ہیں کہ قرص کے مرکز سے سب بارود کا فاصلہ ر ہے۔

[اگر بارود کی کل کمیت م ہو اور د دھکے کی قسم کا تعامل ہو وقت ت پر تو حرکت کی مساواتیں ہونگی

{ ۲ ج م ر'²/۲ + م (۱ - ت/تَ) ر'² } طَ'' = د × ر اور د × مف ت = (م × مف ت / تَ) × و]

چودھواں باب

دو ابعاد میں حرکت ۔ محدود قوتیں

۱۸۷ ۔ ایک پترے کا محل جس کی حرکت سطح مستوی لا ما میں مقید ہو صریحاً معلوم ہو جائیگا جب ہمیں اس پتر کے کسی معلومہ نقطے مثلاً مرکزِ جمود کا محل معلوم ہو اور نیز ایک ایسے ثابت خط کا محل معلوم ہو جو جسم کے لحاظ سے ثابت ہے یعنی یہ معلوم ہو کہ جسم کے لحاظ سے ایک ثابت خط، فضا کے لحاظ سے ایک ثابت خط کے ساتھ کیا زاویہ بناتا ہے ۔ اِن مقداروں (مثلاً لاَ، ماَ، طہ) کو جسم کے محدد کہتے ہیں ۔ اگر ہمیں اِن کی قیمتیں وقت ت کی رقوم میں معلوم ہو سکیں تو ہمیں گویا جسم کی پوری حرکت معلوم ہو گئی ۔

دفعہ ۱۶۲ کی رُو سے مرکزِ جمود کی حرکت ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہوتی ہے

$$م \frac{ف^{2}\,\bar{لا}}{ف\,ت^{2}} = ع\,\bar{لا} \qquad (1)$$

اور

$$م \frac{ف^{2}\,\bar{ما}}{ف\,ت^{2}} = ع\,\bar{ما} \qquad (2)$$

اگر مرکزِ جمود کے لحاظ سے جسم کے کسی نقطہ کے محدد (لاَ، ماَ) ہوں تو دفعہ ۱۶۲ کی مساوات (۶) کی رُو سے مرکزِ جمود کے گرد حرکت ذیل کی مساواتوں سے

حاصل ہوتی ہے

$$\text{ج}\,\text{م}\left(\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}^2\,\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}^2} - \bar{\text{ما}}\,\frac{\text{فر}^2\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}^2}\right) = \text{ج}\,(\bar{\text{لا}}\,\text{ما} - \bar{\text{ما}}\,\text{لا})$$

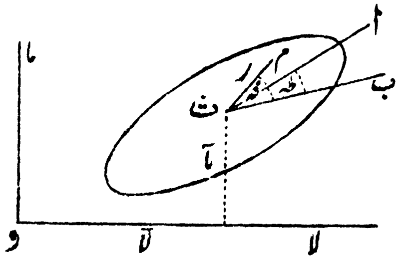
یعنی
$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\text{ج}\,\text{م}\left(\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \bar{\text{ما}}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\right) = \text{ج}\,(\bar{\text{لا}}\,\text{ما} - \bar{\text{ما}}\,\text{لا}) \quad \ldots\ldots(3)$$

اب $\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \bar{\text{ما}}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}$ = م کی رفتار (اضافی بلحاظ ث کے) کا معیار اثر ث کے گرد۔

فرض کرو کہ فہ وہ زاویہ ہے جو م کو ث کے ساتھ ملانے والا خط، خط ث ب کے ساتھ جو فضا میں ثابت ہے بناتا ہے، اور طہ وہ زاویہ ہے جو خط ث ا جو جسم میں ثابت ہے ث ب کے ساتھ بناتا ہے۔

تب دفعہ ۱۶۸ کی رُو سے چونکہ ا ث م جسم کے سب محلوں کے لیے وہی ہے، اس لیے

$$\frac{\text{فر فہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}}$$



اگر ث م = ر تو م کی رفتار بلحاظ ث کے ر $\frac{\text{فر فہ}}{\text{فرت}}$ ہے۔

اس لیے اِس کا معیارِ اثر ث کے گرد

$$= \text{ر}\,\frac{\text{فر فہ}}{\text{فرت}} \times \text{ر} = \text{ر}^2\,\frac{\text{فر فہ}}{\text{فرت}} = \text{ر}^2\,\frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}}$$

اس لیے $\text{ج}\,\text{م}\left(\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \bar{\text{ما}}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\right)$ = ث کے گرد م کی قسم کی تمام جزوی کمیتوں کی رفتاروں کے معیارِ اثروں کا مجموعہ

$$\text{مہ ک}^{2} \times \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \sum \text{م ر}^{2} \times \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \sum \text{م} \times \text{ر}^{2} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} =$$

جہاں ک جسم کے گھماؤ کا نصف قطر ہے ث میں سے گزرنے والے اور حرکت کی سطح مستوی پر عمود وار خط کے گرد۔

پس مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left[\text{مہ ک}^{2} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \right] = \sum (\text{لَاما} - \text{مَالا})$$

یعنی $\text{مہ ک}^{2} \frac{\text{فر}^{2}\text{طہ}}{\text{فرت}^{2}}$ = نظام پر عمل کرنے والی سب بیرونی قوتوں کا معیارِ اثر ث کے گرد .... (۴)

۱۸۸ ۔ دفعۂ ماقبل کی مساواتیں (۱)، (۲) اور (۴) ایک سطح مستوی میں کسی جسم کی حرکت کے لیے تین حرکی مساواتیں ہیں۔ بالعموم لا، ما، طہ کو مربوط کرنے کے لیے ہندسی مساواتیں ہوتی ہیں اور انھیں کسی خاص سوال کے لیے لکھ لینا چاہیے۔

اکثر اوقات، تمثیلاً دفعہ ۱۹۶ کی مثال میں، متحرک جسم ثابت سطحوں کے ساتھ مس کرتا ہے۔ ہر ایسے تماس کی صورت میں ایک عمادی تعامل س ہوتا ہے اور ہر ایسے س کے جواب میں ایک ہندسی ربط اس شرط کو ظاہر کرنے کے لیے ہوتا ہے کہ متحرک جسم کے نقطۂ تماس کی رفتار کا جزوِ ترکیبی ثابت سطح پر کی عماد کی سمت میں صفر ہے۔

اگر دفعہ ۲۰۲ کی مانند دو متحرک جسم ہوں جو ہمیشہ ایک دوسرے کو مس کریں تو نقطۂ تماس پر عمادی تعامل س ہوگا اور اس کے جواب میں اس شرط کو ظاہر کرنے کے لیے ہندسی ربط ہوگا کہ ہر ایک جسم کے نقطۂ تماس کی رفتار مشترک عماد کی سمت میں وہی ہے۔

اسی طرح دوسری صورتوں کے لیے۔ اب یہ ظاہر ہوگیا ہوگا کہ ہر ایک تعامل کے جواب میں مقید حرکت کو ظاہر کرنے والا ایک ہندسی ربط ہوتا ہے یعنی جو

تعاملوں کی تعداد ہو اس کے مساوی ہندسی مساواتوں کی تعداد ہوتی ہے۔

۱۸۹ - رگڑ ---- رگڑ کے کلیے علم حرکت میں بھی وہی فرض کر لیے گئے ہیں جو سکونیات میں تھے یعنی رگڑ کی قوت کی صرف اتنی مقدار معرض وجود میں آتی ہے جتنی درکار ہو اور یہ اُس نقطہ کی اضافی حرکت کو جس پر یہ عمل کرتی ہے روکنے کا میلان رکھتی ہے۔ لیکن اس کی مقدار عمادی تعامل کے ایک مستقل ضعیف (مہ) سے متجاوز نہیں ہوتی جہاں مہ ایک ایسی مقدار ہے جو مس کرنے والے اجسام کی نوعیت پر موقوف ہوتی ہے۔ حرکی مسائل میں مہ کو مستقل فرض کیا جاتا ہے مگر در اصل جیسے جیسے اضافی رفتار بڑھتی ہے اس کی قیمت کم ہوتی جاتی ہے۔

رگڑ کے متعلق بنیادی اصول یہ ہے کہ یہ نقطۂ تماس کو جس پر یہ عمل کرتی ہے اضافی تعادل کی حالت میں رکھنا چاہتی ہے بشرطیکہ یہ ممکن ہو یعنی بشرطیکہ ایسا کرنے کے لیے رگڑ کی جس مقدار کی ضرورت ہے وہ انتہائی رگڑ سے متجاوز نہ ہو۔ پس اگر ایسا ممکن ہو سکے تو رگڑ جسم کو لڑھکنے پر آمادہ کریگی اور پھسلنے سے باز رکھیگی۔

پس ہم کسی عملی سوال میں یہ فرض کرتے ہیں کہ رگڑ ف اُس سمت کے مخالف عمل کرتی ہے جس میں کہ جسم اضافی حرکت شروع کرتا ہے اور یہ فرض کرتے ہیں کہ نقطۂ تماس اضافی سکون میں ہے۔ مؤخر الذکر شرط کے جواب میں ایک ہندسی شرط ہوتی ہے۔ اسی طرح ہر نا معلوم رگڑ کے جواب میں ایک ہندسی مساوات ہوتی ہے۔

اگر قوت ف جو پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے درکار ہو مہ ر سے زیادہ ہو تو پھسلنے کا عمل شروع ہو جاتا ہے اور ہماری مساواتوں میں عدم تسلسل پیدا ہوتا ہے۔ اس صورت میں ہمیں مساواتوں کو دوبارہ لکھنا پڑیگا اور ہم ف کی بجائے مہ ر لکھینگے اور پہلی متناظر ہندسی شرط کو ترک کر دینگے۔

۱۹۰ - ایک جسم کی توانائی بالحرکت دو ابعاد میں ---

فرض کرو کہ ثابت محوروں کے لحاظ سے مرکزِ جمود ث کے محدد (لآ ، مآ) ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ان ہی محوروں کے لحاظ سے کسی جزو م کے محور (لا ، ما) ہیں اور اسی جزو کے محدد مرکزِ ثقل میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے (لاَ ، ماَ) ہیں

تب $\text{لا} = \bar{\text{لا}} + \text{لاَ}$ اور $\text{ما} = \bar{\text{ما}} + \text{ماَ}$

پس جسم کی توانائی بالحرکت

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ع م}\left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}\,\text{ع م}\left[\left(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ع م}\left[\left(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2}\,\text{ع م}\left[\left(\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

$$+ \text{ع م}\,\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\cdot\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} + \text{ع م}\,\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}}\cdot\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

چونکہ لاَ نقطہ کا لا محدد ہے جب کہ مرکزِ جمود کو مبداء مانا جائے اس لیے دفعہ ۱۶۲ کی رُو سے

$$\text{ع م لاَ} = 0 \quad \text{اور} \quad \text{ع م}\,\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = 0$$

$$\therefore \text{ع م}\,\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} \times \text{ع م}\,\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = 0$$

پس (۱) کی آخری دو رقمیں صفر ہیں اور توانائی بالحرکت

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ھ}\left[\left(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2}\,\text{ع م}\left[\left(\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

= کمیت ھ کے ایک ذرّہ کی توانائی بالحرکت جسے مرکزِ جمود پر رکھا جائے اور جو اس کے ساتھ حرکت کر رہا ہو

+ جسم کی توانائی بالحرکت بلحاظ جمود کے مرکز کے۔

اب ذرّہ م کی رفتار بلحاظ ث کے

$$= \text{ر}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$$

اس لیے جسم کی توانائی بالحرکت بلحاظ ث کے

$$= \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\text{م}\,\text{ر}^2\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2\Sigma\,\text{م}\,\text{ر}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\times\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2\times \text{م}\,\text{ک}^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ک}^2\,\dot{\text{طہ}}^2$$

پس مطلوبہ توانائی بالحرکت

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{و}^2 + \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ک}^2\,\dot{\text{طہ}}^2$$

جہاں و مرکزِ جمود ث کی رفتار ہے اور طہ وہ زاویہ ہے جو جسم کے لحاظ سے کوئی ثابت خط فضا کے لحاظ سے کسی ثابت خط کے ساتھ بناتا ہے اور ک جسم کے گھماؤ کا نصف قطر ہے ث میں سے گزرنے والے اور حرکت کی سطح مستوی پر علی القوائم خط کے گرد۔

۱۹۱ ۔ ایک جسم کا جو دو ابعاد میں حرکت کر رہا ہو مبداء و کے گرد زاویئی معیارِ حرکت ۔

دفعۂ ماقبل کی ترقیم کے مطابق جسم کا زاویئی معیارِ حرکت مبداء کے گرد

$$= \Sigma\,\text{م}\left[\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - \text{ما}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right]$$

$$= \Sigma\,\text{م}\left[\left(\bar{\text{لا}}+\text{لا}'\right)\left(\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}}+\frac{\text{فرما}'}{\text{فرت}}\right) - \left(\bar{\text{ما}}+\text{ما}'\right)\left(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}+\frac{\text{فرلا}'}{\text{فرت}}\right)\right]$$

$$= \Sigma\,\text{م}\left[\bar{\text{لا}}\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \bar{\text{ما}}\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\right] + \Sigma\,\text{م}\left[\text{لا}'\frac{\text{فرما}'}{\text{فرت}} - \text{ما}'\frac{\text{فرلا}'}{\text{فرت}}\right]$$

$$+\Sigma\,\text{م}\left[\bar{\text{لا}}\frac{\text{فرما}'}{\text{فرت}} + \text{لا}'\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \bar{\text{ما}}\frac{\text{فرلا}'}{\text{فرت}} - \text{ما}'\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\right] \ldots\ldots(1)$$

لیکن دفعۂ ماقبل کی مانند، $\Sigma\,\text{م لاَ} = ۰$ اور $\Sigma\,\text{م}\,\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = ۰$

$$\therefore\ \Sigma\,\text{م لاَ}\,\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}}\,\Sigma\,\text{م لاَ} = ۰$$

اور

$$\Sigma\,\text{م ماَ}\,\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = \text{ماَ}\,\Sigma\,\text{م}\,\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = ۰$$

اسی طرح ماَ کی تناظر رقموں کے لیے۔ پس (۱) سے و کے گرد زاویئی معیارِ حرکت

$$= \text{ه}\left[\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - \text{ما}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right] + \Sigma\,\text{م}\left[\text{لاَ}\,\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}} - \text{ماَ}\,\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}}\right]$$

= معیارِ حرکت کا معیارِ اثر و کے گرد ایک ایسے ذرّہ کا جس کی کمیّت ه ہے، جسے مرکزِ جمود ث پر رکھا گیا ہے اور جو اس کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔

+ جسم کا زاویئی معیارِ اثر بلحاظ ث کے۔

اب بلحاظ ث کے ذرّہ م کی رفتار

$$= \text{ر}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}} = \text{ر}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$$

اور اس کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر ث کے گرد

$$= \text{ر} \times \text{ر}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{ر}^۲\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$$

پس جسم کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر بلحاظ ث کے

$$= \Sigma\,\text{م ر}^۲\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\,\Sigma\,\text{م ر}^۲ = \text{ه ک}^۲\,\dot{\text{طہ}}$$

پس کل معیارِ حرکت کا معیارِ اثر

$$= \text{ه و ع} + \text{ه ک}^۲\,\dot{\text{طہ}} \qquad \text{..............(۲)}$$

جہاں ع عمود ہے مبداء و سے مرکزِ جمود کی رفتار و کی سمت پر۔
یا اگر ثابت نقطہ و کو مبداء مان کر مرکزِ جمود ث کے قطبی محدد (ر، سا) ہوں تو اِس جملہ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\text{م ر}^2\,\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}}+\text{م ک}^2\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۳)$$

۱۹۲- چونکہ مبداء و ثابت نقطہ ہے اس لیے اس میں سے گزرنے والے اور گردش کی سطحِ مستوی پر عمود وار محور کے گرد معیارِ حرکت کے معیارِ اثر (جسے اختصاراً و کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر کہ سکتے ہیں) کی تبدیلی کی شرح دفعہ ۱۸۷ کی مساوات (۲) کی رُو سے و کے گرد بیرونی قوتوں کے معیارِ اثر کے مساوی ہوتی ہے۔ معیارِ حرکت کے معیارِ اثر کے لیے ہم جملات (۱)، (۲)، (۳) میں سے کوئی ایک جملہ لے سکتے ہیں۔
مثلاً (۱) کی رُو سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\text{م}\left(\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}}-\bar{\text{ما}}\,\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\right)+\text{م ک}^2\,\dot{\text{طہ}}\right]=\text{ل}\ \text{یعنی}$$

بیرونی قوتوں کا معیارِ اثر و کے گرد۔

$$\text{اس لیے}\quad \text{م}\left[\bar{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}^2\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}^2}-\bar{\text{ما}}\,\frac{\text{فر}^2\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}^2}\right]+\text{م ک}^2\,\ddot{\text{طہ}}=\text{ل}$$

اسی طرح اگر ہم نقطہ (لا، ما) کے گرد معیارِ اثر لیں تو مساوات ہوگی

$$\text{م}\left[(\bar{\text{لا}}-\text{لا})\,\frac{\text{فر}^2\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}^2}-(\bar{\text{ما}}-\text{ما})\,\frac{\text{فر}^2\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}^2}\right]+\text{م ک}^2\,\ddot{\text{طہ}}$$

= بیرونی قوتوں کا معیارِ اثر لا، ما کے گرد۔

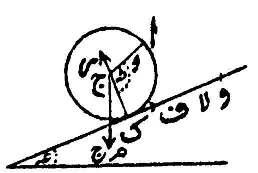
دفعۂ ہذا کے جملات کے استعمال سے کسی سوال کا حل بالعموم بہت مختصر ہو جاتا ہے لیکن مبتدی کے لیے اس میں غلطی کر جانے کا احتمال ہے اس لیے کم از کم شروع میں تو

یہ ضروری ہے کہ طالب علم اپنی توجہ دفعۂ ۱۸۷ کے ضوابط تک محدود رکھے ۔

۱۹۳ ۔ دفعۂ ۱۸۷ کی مساواتوں (۱) اور (۲) کی بجائے کوئی اور مساواتیں استعمال کی جا سکتی ہیں جن سے ایک ذرّہ کی حرکت حاصل ہوتی ہو مثلاً دفعۂ ۹۴ یا دفعۂ ۸۸ میں اسراعوں کے لیے جو جملے دیے گئے ہیں اُن کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔ باب ہٰذا کے باقی ماندہ حصہ میں متذکرۂ بالا اصولوں کی توضیح کے لیے چند مثالیں مندرج کی جائینگی ۔

۱۹۴ ۔ ایک یکساں کرہ ایک سطحِ مائل پر سے نیچے کی طرف لڑھکتا ہے، سطحِ مذکور پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی کھردری ہے۔ حرکت معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ ابتداءً جب کرہ ساکن ہے تو اِس کا نقطۂ تماس و ہے ۔ وقت ت کے بعد جب کرہ کا مرکز فاصلہ لا طے کر چکتا ہے تو فرض کرو کہ کرہ کا وہ نقطہ جو پہلے و پر تھا اب ا پر چلا جاتا ہے ۔ پس خط ج ا بلحاظ کرہ کے ثابت ہے ۔ فرض کرو کہ ∠ ک ج ا جو جسم کے لحاظ سے ایک ثابت خط اور فضا کے لحاظ سے ایک ثابت خط دونوں کے درمیان بنتا ہے ط ہے ۔ نیز فرض کرو کہ ر اور ف بالترتیب عمادی تعامل اور رگڑ ہیں ۔



پس دفعۂ ۱۸۷ کی حرکت کی مساواتیں ہوجائینگی

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فت}^{2}} = \text{م ج جب ہ} - \text{ف} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$0 = \text{م ج جم ہ} - \text{ر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{م ک}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ط}}{\text{فت}^{2}} = \text{ف} \times \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

چونکہ پھسلنے کا عمل بالکل وقوع پذیر نہیں ہوتا اس لیے قوس ک ا = خط ک و
یعنی تمام دورانِ حرکت میں $\text{لا} = \text{ا}\,\text{طہ}$ .... (۴)

(۱) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{ک}^{2}}{\text{ا}}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{طہ}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ج جب عہ}$$

یعنی (۴) سے

$$\left(1+\frac{\text{ک}^{2}}{\text{ا}^{2}}\right)\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ج جب عہ}$$

یعنی

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{ا}^{2}}{\text{ا}^{2}+\text{ک}^{2}}\,\text{ج جب عہ} \qquad (5)$$

پس کرہ کا مرکز یکساں اسراع $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{ا}^{2}+\text{ک}^{2}}\,\text{ج جب عہ}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور

بنائً علیہ اِس کی رفتار $\text{و} = \frac{\text{ا}^{2}}{\text{ا}^{2}+\text{ک}^{2}}\,\text{ج جب عہ} \times \text{ت}$ اور

$$\text{لا} = \frac{1}{2}\times\frac{\text{ا}^{2}}{\text{ا}^{2}+\text{ک}^{2}}\,\text{ج جب عہ}\times\text{ت}^{2}$$

کرہ میں $\text{ک}^{2} = \frac{2\text{ا}^{2}}{5}$، اس لیے اسراع $= \frac{5}{7}$ ج جب عہ

[اگر جسم پتلا کروی خول ہو تو $\text{ک}^{2} = \frac{2\text{ا}^{2}}{3}$ اور اسراع $\frac{3}{5}$ ج جب عہ ہوگا۔

اگر یہ یکساں مجسم قرص ہو تو $\text{ک}^{2} = \frac{\text{ا}^{2}}{2}$ اور اسراع $\frac{2}{3}$ ج جب عہ ہوگا۔

اگر یہ یکساں پتلا چھلا ہوتا تو $\text{ک}^{2} = \text{ا}^{2}$ اور اسراع $\frac{1}{2}$ ج جب عہ ہوگا]۔

(۱) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف} = \text{م ج جب عہ} - \frac{5}{7}\,\text{م ج جب عہ} = \frac{2}{7}\,\text{م ج جب عہ}$$

اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے   ر = م ج جم عہ

پس اگر مجسم کرہ کی صورت میں پھسلنے کا عمل وقوع پذیر نہ ہو تو چونکہ $\frac{ف}{ر}$ لازماً کم ہوگا رگڑ کی قدر مہ سے اس لیے $\frac{۲}{۷}$ مس عہ کم ہوگا مہ سے ۔

توانائی کی مساوات ــــ مساوات (۵) کو تکمل کرنے سے

$$\frac{۱}{۲} لا^۲ = \frac{و^۲}{و^۲ + ک^۲} ج لا جب عہ$$

مستقل رقم صفر ہے کیونکہ جسم حالتِ سکون سے چلا تھا ۔

پس وقت ت پر توانائی بالحرکت دفعہ ۱۹۰ کی رُو سے

$$= \frac{۱}{۲} م لا^۲ + \frac{۱}{۲} م ک^۲ ظ^۲ = \frac{۱}{۲} م لا^۲ \left(۱ + \frac{ک^۲}{و^۲}\right)$$

= م ج لا جب عہ = کام جو جاذبۂ ارض سرانجام دیتی ہے ۔

مشق ۱ ــــ ایک یکساں مجسم اسطوانہ کو ایک سطح مائل پر جس کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور متوازی الافق ہے، ثابت کرو کہ سطح اور مجسم کے درمیان رگڑ کی قدر، کم سے کم $\frac{۱}{۳}$ مس عہ ہونی چاہیے تاکہ اسطوانہ صرف لڑھکے لیکن پھسلے نہیں ۔

اگر اسطوانہ مجوف ہو لیکن اس کی موٹائی کم ہو تو کم سے کم قیمت $\frac{۱}{۲}$ مس عہ ہوگی ۔

مشق ۲ ــــ ایک مجوف اسطوانہ ایک مکمل طور پر کھردری سطح مستوی کا طول ایک منٹ میں لڑھک کر طے کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ٹھوس اسطوانہ اتنے ہی فاصلہ میں سے تقریباً ۵۲ سکنڈ میں لڑھکیگا اور مجوف کرہ ۵۵ سکنڈ میں اور ٹھوس کرہ تقریباً ۵۰ سکنڈ میں ۔

مشق ۳ ــــ ایک یکساں مستدیر قرص جس کا قطر ۱۰ انچ اور وزن ۵ پونڈ ہے ایک تکلے پر جس کا قطر $\frac{۱}{۲}$ انچ ہے سہارا ہوا ہے ۔ تکلا ریل گاڑی کی مائل سڑک پر جس کا میلان ۳۰ افقی میں ایک انتصابی ہے نیچے کی طرف لڑھک رہا ہے ۔ معلوم کرو کہ

(۱) سکون سے ۴ فٹ لڑھکنے میں اسے کتنی مدت درکار ہوتی ہے (۲) اس وقفہ کے بعد اس کی خطی اور زاویئی رفتاریں کیا ہیں ۔

مشق ۴ ــــ ایک اسطوانہ ایک چکنی سطح مائل سے نیچے لڑھکتا ہے ۔ سطح مذکور کا میلان ہ ہے اور لڑھکنے کے دوران میں اسطوانہ پر سے ایک رسّی کھلتی جاتی ہے جس کا ایک سرا سطح مائل کے بالاترین نقطہ سے بندھا ہے ۔ اس کا اسراع اور رسّی کا تناؤ معلوم کرو ۔

مشق ۵ ــــ ایک ریل پر تاگا لپٹا ہوا ہے ۔ تاگے کا ایک سرا ثابت ہے اور ریل اس طرح گرتی ہے کہ اس کا محور افق کے متوازی رہتا ہے اور تاگا انتصابی ۔ اگر ریل مجسم اسطوانہ ہو جس کا نصف قطر ا اور وزن و ہو تو ثابت کرو کہ ریل کے مرکز کا اسراع $\frac{۲}{۳}$ ج ہوگا اور تاگے کا تناؤ $\frac{۱}{۳}$ و ۔

مشق ۶ ــــ دو مساوی اسطوانے جن میں سے ہر ایک کی کمیّت م ہے ایک دوسرے کے ساتھ ایک لچکدار رسّی کے ذریعے جس کا تناؤ ت ہے بندھے ہیں اور ایک کھردری سطح مائل پر جس کا میلان ہ ہے اس طرح لڑھکتے ہیں کہ اُن کے محور متوازی الافق رہتے ہیں ۔

ثابت کرو کہ اُن کا اسراع $\frac{۲}{۳}$ ج جب ہ $\left[۱ - \frac{۲ \text{ مہ ت}}{\text{م ج جب ہ}} \right]$ ہوگا جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے اُسطوانوں کے درمیان ۔

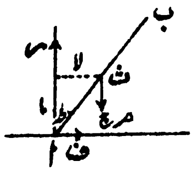
مشق ۷ ــــ ایک مستدیر اسطوانہ جس کے جمود کا مرکز اس کے محور سے فاصلہ ج پر ہے ایک افقی سطح مستوی پر لڑھکتا ہے ۔ اگر اسے تعادل غیر قائم کے محل سے چھوڑا جائے تو ثابت کرو کہ جب کمیّت کا مرکز اپنے سب سے نچلے مقام پر ہوگا تو سطح مستوی کا عمادی تعامل

اس کے وزن کا $۱ + \frac{۴ \text{ ج}^۲}{(\text{ا} - \text{ج})^۲ + \text{ک}^۲}$ گنا ہوگا جہاں ک کمیّت کے مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے ۔

۱۹۵ ــ ایک یکساں سلاخ کو انتصابی شکل میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا ایک سرا ایک مکمل طور پر کھردرے میز پر ساکن ہے ۔

چھوڑ دینے پر یہ اس مس کرنے والے سرے کے گرد گھومتی ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

جب سلاخ کا میلان خطِ انتصابی کے ساتھ طہ ہو تو فرض کرو کہ عادی تعامل اور رگڑ بالترتیب س اور ف ہیں اب اگر مرکزِ ثقل کے



محدد لا اور ما ہوں تو لا = ا جب طہ اور ما = ا جم طہ

تب دفعہ ۱۸۷ کی مساواتیں ہو جاتی ہیں:

$$\text{ف} = \text{م}\,\frac{\text{فز}^2\,\text{لا}}{\text{فزت}^2} = \text{م}\left[\text{ا جم طہ طہ}'' - \text{ا جب طہ طہ}'^2\right] \ldots(1)$$

$$\text{س} - \text{م ج} = \text{م}\,\frac{\text{فز}^2\,\text{ما}}{\text{فزت}^2} = \text{م}\left[-\text{ا جب طہ طہ}'' - \text{ا جم طہ} \times \text{طہ}'^2\right] \ldots(2)$$

اور
$$\text{م} \times \frac{\text{ا}^2}{3} \times \text{طہ}'' = \text{س ا جب طہ} - \text{ف ا جم طہ}$$

$$= \text{م ج ا جب طہ} - \text{م ا}^2\,\text{طہ}'' \quad \text{(۱) اور (۲) سے}$$

پس
$$\text{م}\,\frac{4\,\text{ا}^2}{3}\,\text{طہ}'' = \text{م ج ا جب طہ} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

[یہ آخری مساوات دفعہ ۱۷۱ کے اصول سے فوراً لکھی جا سکتی تھی کیونکہ سلاخ گویا ثابت نقطہ ا کے گرد گھوم رہی ہے۔]

(۳) سے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے $\text{طہ}'^2 = \frac{3\,\text{ج}}{2\,\text{ا}}\left(1 - \text{جم طہ}\right)$ کیونکہ طہ' صفر ہوتا ہے جب کہ طہ = ۰۔

لہٰذا (۱) اور (۲) سے

$$\text{ف} = \text{م} \times \frac{3\,\text{ج}}{4}\,\text{جب طہ}\left(3\,\text{جم طہ} - 2\right) \quad \text{اور} \quad \text{س} = \frac{\text{م ج}}{4}\left(1 - 3\,\text{جم طہ}\right)^2$$

یہ بات قابلِ غور ہے کہ س معدوم ہو جاتا ہے اور علامت نہیں بدلتا جب کہ جم طہ = $\frac{1}{3}$ پس سرا ا سطح مستوی سے کبھی علیحدہ نہیں ہوتا۔

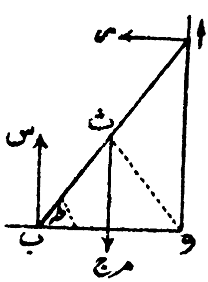
رگڑ ف اپنی علامت بدل دیتی ہے جب کہ طہ قیمت جم$^{-1}$ $\frac{۲}{۳}$ میں سے گزرتا ہے۔ پس اس کے بعد اس کی سمت اُلٹ جاتی ہے۔

نسبت $\frac{ف}{ر}$ لامتناہی ہوجاتی ہے جب کہ جم طہ = $\frac{۱}{۳}$، اس لیے اگر سطح مستوی لا انتہا کھردری نہ ہو تو اس وقت پھسلنے کا عمل شروع ہوجائیگا۔

کسی عملی صورت میں سرا ا، طہ کی کسی قیمت کے لیے جو جم$^{-1}$ $\frac{۱}{۳}$ سے کم ہو پھسلنا شروع کریگا اور یہ آگے یا پیچھے کی طرف پھسلیگا اگر بالترتیب پھسلنے کا عمل میلان کے جم$^{-1}$ $\frac{۲}{۳}$ کے مساوی ہونے کے بعد یا پہلے شروع ہو۔

۱۹۶ ۔ ایک یکساں سیدھی سلاخ ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح نیچے پھسلتی ہے کہ اس کے سرے دو چکنی سطوح مستوی کے ساتھ مس کرتے ہیں جن میں سے ایک افقی ہے اور دوسری انتصابی۔ اگر حالتِ سکون سے روانہ ہوتے وقت اِس کا میلان افق کے ساتھ ہ ہو تو حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ جب سلاخ افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے تو ان دو سطوح مستوی کے تعامل ر اور س ہیں۔ اگر مرکزِ ثقل ث کے محدد لا اور ما ہوں تو دفعہ ۱۸۷ کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے



$$م \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} = ر \qquad ....(۱)$$

$$م \frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} = س - م ج \qquad ....(۲)$$

اور $م ک^۲ \frac{فر^۲ طہ}{فرت^۲} = ر \times ا جب طہ - س ا جم طہ \qquad ...(۳)$

چونکہ $ک^۲ = \frac{ل^۲}{۳}$ اس لیے

و/۳ × فر۲ط/فرت۲ = جب ط فر۲لا/فرت۲ ۔ جم ط × ج ۔ جم ط فر۲ما/فرت۲ .... (۴)

اب لا = ا جم ط اور ما = ا جب ط

اس لیے فر۲لا/فرت۲ = ۔ ا جم ط طَ۲ ۔ ا جب ط × طً

اور فر۲ما/فرت۲ = ۔ ا جب ط × طَ۲ + ا جم ط طً

اس لیے (۴) سے حاصل ہوتا ہے

۴/۳ ا فر۲ط/فرت۲ = ۔ ج جم ط ....(۵)

پس تکمیل کرنے سے

۱/۲ (فرط/فرت)۲ = ۔ ۳ج/۴ا جب ط + جَ جہاں

۰ = ۔ ۳ج/۴ا جب ھ + جَ

∴ (فرط/فرت)۲ = ۳ج/۲ا (جب ھ ۔ جب ط) ....(۶)

(۱) سے س/م = ۔ ا جم ط × طَ۲ ۔ ا جب ط طً

= ۔ ۳ج/۲ (جب ھ ۔ جب ط) جم ط + ۳ج/۴ جب ط جم ط ... (۵) اور (۶) سے

= ۳ج/۴ جم ط (۳ جب ط ۔ ۲ جب ھ) ....(۷)

(۲) سے ص/م = ج ۔ ا جب ط طَ۲ + ا جم ط طً

$$=\frac{\text{ج}}{\text{۴}}\left[\text{۱ − ۶ جب عہ جب طہ + ۹ جب}^{\text{۲}}\text{ طہ}\right]=\frac{\text{ج}}{\text{۴}}\left[\left(\text{۳ جب طہ − جب عہ}\right)^{\text{۲}}\text{ + جم}^{\text{۲}}\text{ عہ}\right]\ldots\text{(۸)}$$

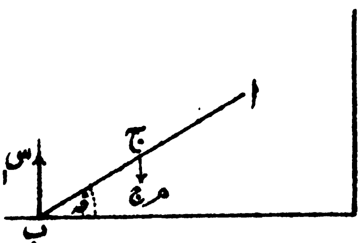
(۷) سے ظاہر ہے کہ س صفر ہوگا جب کہ جب طہ $=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ جب عہ اور طہ کی اس سے چھوٹی قیمتوں کے لیے س منفی ہوجاتا ہے۔ پس سرا ۱ دیوار کو چھوڑیگا جب کہ جب طہ $=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ جب عہ اور اس کی زاویئی رفتار اس وقت (۶) کی رُو سے $\sqrt{\frac{\text{ج جب عہ}}{\text{۲ ا}}}$ کے مساوی ہوگی۔

نیز اس آن میں ث کی افقی رفتار

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}=-\text{ ا جب طہ}\times\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\sqrt{\text{۲ ا ج جب}^{\text{۳}}\text{ عہ}}$$

اس کے بعد حرکت کی مساواتیں ذیل کی شکل اختیار کرلیتی ہیں:

$$\text{م}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{لا}}{\text{فرت}^{\text{۲}}}=\text{۰}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(۱َ)}$$



$$\text{م}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرت}^{\text{۲}}}=\text{س}_{\text{۱}}-\text{مرج}\ \ldots\ldots\text{(۲َ)}$$

$$\text{اور م}\times\frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۳}}\times\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{فہ}}{\text{فرت}^{\text{۲}}}=-\text{س}_{\text{۱}}\times\text{ا جم فہ}\ \ldots\text{(۳َ)}$$

نیز ما = ا جب فہ، اس لیے

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرت}^{\text{۲}}}=-\text{ا جب فہ}\times\text{فہَ}^{\text{۲}}+\text{ا جم فہ}\times\text{فہً}$$

(۲َ) اور (۳َ) سے اب حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{فہ}}{\text{فرت}^{\text{۲}}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۳}}+\text{جم}^{\text{۲}}\text{فہ}\right)-\text{جب فہ جم فہ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^{\text{۲}}=-\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\text{ جم فہ}\ \ldots\ldots\text{(۴َ)}$$

مکمل کرنے سے

$$\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^{\text{۲}}\left[\frac{\text{۱}}{\text{۳}}+\text{جم}^{\text{۲}}\text{فہ}\right]=-\frac{\text{۲ج}}{\text{ا}}\text{ جب فہ}+\text{ج}_{\text{۱}}\ \ldots\ldots\text{(۵َ)}$$

مستقل کی قیمت اس بناء پر محسوب ہوسکتی ہے کہ جب سلاخ دیوار سے علیحدہ ہوئی یعنی جب، جب فہ = $\frac{۲}{۳}$ جب عہ تو $\frac{فرفہ}{فرت}$ مساوی تھا $\sqrt{\frac{ج\,جب\,عہ}{۲ا}}$ کے،

پس (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ج\,جب\,عہ}{۲ا}\left[\frac{۴}{۳}-\frac{۴\,جب^{۲}عہ}{۹}\right]=-\frac{۲ج}{ا}\times\frac{۲\,جب\,عہ}{۳}+ج_{۱}$$

پس $$ج_{۱}=\frac{۲ج\,جب\,عہ}{ا}\left[۱-\frac{جب^{۲}عہ}{۹}\right]$$

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{فرفہ}{فرت}\right)^{۲}\left[\frac{۱}{۳}+جم^{۲}فہ\right]=\frac{۲ج\,جب\,عہ}{ا}\left[۱-\frac{جب^{۲}عہ}{۹}\right]-\frac{۲ج}{ا}\,جب\,فہ \quad ....(۶)$$

جب سلاخ افقی سطح مستوی تک پہنچتی ہے یعنی جب، فہ = ۰ تو زاویئی رفتار مساوی ہوتی ہے سہ کے جہاں $سہ^{۲}\left[\frac{۱}{۳}+۱\right]=\frac{۲ج\,جب\,عہ}{ا}\left(۱-\frac{جب^{۲}عہ}{۹}\right)$

یعنی $$سہ^{۲}=\frac{۳ج\,جب\,عہ}{۲ا}\left[۱-\frac{جب^{۲}عہ}{۹}\right] \quad ....(۷)$$

مساوات (۱) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ حرکت کے دوسرے حصہ میں $\frac{فرلا}{فرت}$ مستقل رہتا ہے اور اس کی جو قیمت حرکت کے پہلے حصہ کے اختتام پر ہے یعنی $\frac{۱}{۳}\sqrt{۲ا ج\,جب^{۳}عہ}$ وہی قائم رہتی ہے۔

توانائی اور کام ـــ مساوات (۶) تحفظِ توانائی کے اصول سے بھی مستنبط ہوسکتی ہے کیونکہ جب تک سلاخ دیوار کے ساتھ مس کرتی ہے ث و = ا، اور ∠ ث و ب = طہ یعنی ث مرکز و کے گرد رفتار ا طہ کے ساتھ گھومتا ہے۔ اس لیے دفعہ ۱۹۰ کی رُو سے سلاخ کی توانائی بالحرکت $\frac{۱}{۲}ھ ا^{۲} طہ^{۲}+\frac{۱}{۲}ھ\frac{ا^{۲}}{۳}طہ^{۲}$، یعنی $\frac{۲ھ ا^{۲}}{۳}طہ^{۲}$ ہے۔

اس کو جاذبۂ ارض کے کام یعنی مہ ج ل (جب عہ ۔ جب طہ) کے مساوی رکھنے سے ہمیں مساوات (۶) حاصل ہوتی ہے ۔

مشق ۱ ۔ ایک یکساں سلاخ انتصابی محل میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک افقی میز پر ٹکا ہوا ہے ۔ چھوڑ دینے پر سلاخ اس سرے کے گرد گھومتی ہے ۔ ثابت کرو کہ جب سلاخ کا میلان افق کے ساتھ ۶۰° ہو تو رگڑ کی قوت جو پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے درکار ہوگی سلاخ کے وزن کا ۳۲ء گنا ہوگی ۔

مشق ۲ ۔ ایک یکساں سلاخ کا ایک سرا ایک افقی میز کے ساتھ تماس میں ہے اور سلاخ افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے ۔ اگر سلاخ گرے تو ثابت کرو کہ افقی محل میں آنے پر اس کی زاویئی رفتار $\sqrt{\frac{۳ ج}{۲ ل}}$ جب عہ ہوگی خواہ سطح مستوی مکمل طور پر چکنی ہو یا مکمل طور پر کھردری ۔ نیز بتاؤ کہ سلاخ کا مس کرنے والا سرا دونوں صورتوں میں سطح مستوی سے علیحدہ نہیں ہوگا ۔

مشق ۳ ۔ ایک یکساں کھردری سلاخ کو جس کا طول ۲ ل ہے ایک کھردرے میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ یہ میز کے ایک کنارہ پر علی القوائم ہے ۔ اگر سلاخ کا مرکزِ ثقل ابتدائً کنارہ سے فاصلہ ب پر ہو تو بتاؤ کہ سلاخ پھسلنے لگیگی جب یہ زاویہ

$$\text{مس}^{-1} \frac{\text{مہ } ل^{۲}}{ل^{۲} + ۹ ب^{۲}}$$

میں سے گھوم چکے جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے ۔

مشق ۴ ۔ ایک یکساں سلاخ کو ایک افقی میز پر جس کی رگڑ کی قدر مہ ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے ۔ اگر اب اسے چھوڑ دیا جائے تو بتاؤ کہ یہ پھسلنا شروع کریگی اگر مہ $<$ $\frac{\text{۳ جب عہ جم عہ}}{\text{۱ + جب}^{۲}\text{ عہ}}$

مشق ۵ ۔ ایک سلاخ کے نچلے سرے کو ایک چکنے افقی میز پر رکھا گیا ہے اور سلاخ افق کے ساتھ ابتدائً زاویہ عہ بناتی ہے ۔ اس کے نچلے سرے پر ایک ایسی افقی قوت لگائی گئی ہے کہ سلاخ انتصابی سطح مستوی میں یکساں زاویئی رفتار سہ سے گھومنے لگتی ہے ۔

ثابت کرو کہ جب سلاخ افق کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو قوت کی مقدار

م ج مم طہ۔ م و سہ۲ جم طہ

ہوگی جہاں م سلاخ کی کمیت ہے۔

مشق ۶۔ ایک وزنی سلاخ کو جس کا طول ۲ و ہے انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا ایک سرا ایک کھردری دیوار سے اور دوسرا مساوی طور پر کھردرے فرش پر ٹکا ہوا ہے۔ رگڑ کی قدر مس د ہے۔ ثابت کرو کہ یہ نیچے کی طرف پھسلنا شروع کریگی اگر اس کا ابتدائی میلان سمت انتصابی کے ساتھ ۲ د سے زیادہ ہو۔ نیز ثابت کرو کہ کسی آن میں سمتِ انتصابی کے ساتھ سلاخ کا میلان طہ مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

طہ٘ (ک۲ + اَ۲ جم ۲ د) ۔ اَ طہ٘۲ جب ۲ د = اج جب (طہ ۔ ۲ د)

مشق ۷۔ ایک یکساں شہتیر کے سروں پر دو چھوٹے حلقے ہیں جو دو مساوی طور پر کھردری سلاخوں پر پھسلتے ہیں، ان سلاخوں میں سے ایک سلاخ افقی ہے اور ایک انتصابی۔ شہتیر کی زاویئی رفتار کی قیمت حاصل کرو جب کہ یہ سمتِ انتصابی کے ساتھ کوئی میلان رکھتی ہو، اس کا ابتدائی میلان ع ہے۔

۱۹۷ ۔ ایک مجسم ہمجانس کرہ ایک اور ثابت کرہ کی چوٹی پر ساکن ہے۔ اوپر کے کرہ کو ذرا سا اس طرح ہٹا دیا گیا ہے کہ یہ نیچے کی طرف ثابت کرہ پر لڑھکنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ نیچے پھسلیگا جب کہ مشترک عماد سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے جہاں طہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

۲ جب (طہ ۔ لہ) = ۵ جب لہ (۳ جم طہ ۔ ۲)

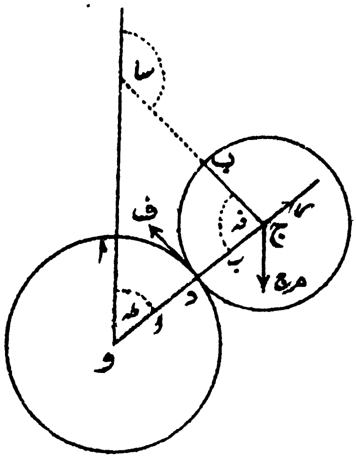
جہاں لہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

فرض کرو کہ حرکت محض لڑھکنے کی ہے۔

فرض کرو کہ اوپر کے کرہ کا نصف نطر جو ابتداءً انتصابی تھا وقت ت کے بعد محل ج ب میں آجاتا ہے۔ پس اگر د تماس کا نقطہ ہو اور ا کرہ کا بالاترین نقطہ ہو تو

قوس ا د = قوس ب د

یعنی ا طہ = ب فہ .... (۱)



فرض کرو کہ س اور ف بالترتیب عادی تعامل اور رگڑ کی قوت ہیں جو اوپر کے کرہ پر عمل کرتی ہیں ۔

چونکہ ج ، و کے گرد نصف قطر (ا+ب) کا دائرہ مرتسم کرتا ہے اس لیے اس کے اسراع (ا+ب) طَ۲ اور (ا + ب) طً ہیں ج و کی سمت میں اور اس پر علی القوائم ۔

اس لیے

م (ا+ب) طَ۲ = م ج جم ط ـ س ... (۲)

م (ا+ب) طً = م ج جب ط ـ ف ... (۳)

نیز اگر سا وہ زاویہ ہو جو خط ج ب (بلحاظ جسم کے ثابت خط) انتصابی خط (فضا کے ثابت خط) کے ساتھ بناتا ہے تو

م ک۲ ساً = ف ب

لیکن سا = ط + فہ = (ا + ب)/ب ط اور ک۲ = ۲ب۲/۵

پس م ۲(ا + ب)/۵ طً = ف .... (۴)

(۳) اور (۴) سے ملتا ہے

طً = ۵/۷ ج/(ا + ب) جب ط

∴ طَ۲ = ۱۰/۷ × ج/(ا + ب) (۱ ـ جم ط) کیونکہ کرہ سکون سے اس وقت چلا تھا جب کہ ط = ۰

[یہ مساوات توانائی کے اصول سے براہِ راست حاصل ہو سکتی ہے]

(۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

ف = ۲م/۷ ج جب ط اور س = م ج/۷ (۱۷ جم ط ـ ۱۰) ......(۵)

کرہ پھسل جائیگا جب کہ رگڑ انتہائی ہو جائے یعنی جب کہ ف = س مس لہ یعنی جب کہ

جم لہ × ۲ جب ط = جب لہ (۱۷ جم ط ـ ۱۰)

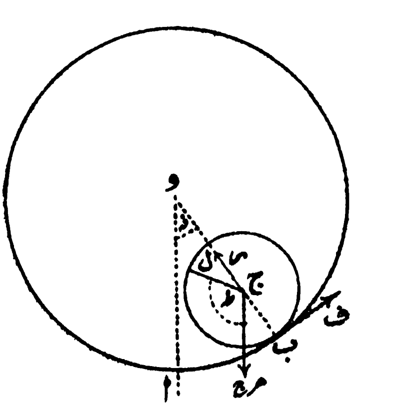
یعنی ۲ جب (ط ـ لہ) = ۵ جب لہ (۳ جم ط ـ ۲)

اگر کرہ اتنا کھردرا ہو کہ پھسلنے کا عمل وقوع پذیر نہ ہو تو (۵) کی رُو سے س صفر ہوگا اور اپنی علامت بدلیگا یعنی اوپر کا کرہ نچلے کرہ سے علٰحدہ ہو جائیگا جب کہ جم ط = ۱۰/۱۷

[اگر دونوں کرے چکنے ہوں تو دکھایا جاسکتا ہے کہ اوپر کا کرہ نچلے کرہ سے علٰحدہ ہو جائیگا جب کہ جم ط = ۲/۳]

۱۹۸ ـ ایک کھوکھلا اسطوانہ جس کا نصف قطر ا ہے اس طرح ثابت ہے کہ اس کا محور متوازی الافق ہے اس کے اندر نصف قطر ب کا ایک ٹھوس اسطوانہ حرکت کرتا ہے جس کی رفتار اس کے سب سے نچلے محل میں معلوم ہے ۔ اگر اسطوانوں کے درمیان رگڑ پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی ہو تو حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ثابت اسطوانہ کا مرکز و ہے اور وقت ت پر متحرک اسطوانہ کا مرکز ج ہے ۔ فرض کرو کہ متحرک اسطوانہ کا وہ نصف قطر ج ل ہے جو اس کے سب سے نچلے محل میں انتصابی تھا ۔ چونکہ پھسلنے کا عمل وقوع پذیر نہیں ہوا اس لیے قوس ب ل = قوس ب ا



پس ا ف = ب × ب ج ل

اس لیے اگر ط وہ زاویہ ہو جو جسم کے لحاظ سے ایک ثابت خط ج ل اور فضا کے لحاظ سے ایک ثابت خط یعنی خطِ انتصابی کے درمیان بنتا ہے تو

ط = ∠ ب ج ل − فہ = $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}}$ فہ .... (۱)

ج کے اسراع ہیں (ا − ب) فہ˙^۲ اور (ا − ب) فہ˙˙ بالترتیب ج و کی سمت میں اور اس پر علی القوائم ۔

چونکہ اسطوانہ کے مرکزِ جمود کی حرکت ایسی ہوتی ہے گویا کہ تمام بیرونی قوتیں اس پر عمل کر رہی ہیں، اس لیے

م (ا − ب) فہ˙^۲ = س − م ج جم فہ .... (۲)

اور م (ا − ب) فہ˙˙ = ف − م ج جب فہ .... (۳)

جہاں س عمادی تعامل ہے اور ف رگڑ کی قوت ہے ب پر نشان زدہ سمت میں ۔

نیز مرکزِ جمود کے لحاظ سے اضافی حرکت کے لیے

م ک^۲ ط˙˙ = قوتوں کا معیارِ اثر ج کے گرد = − ف × ب

یعنی م × $\frac{\text{ب}^۲}{۲}$ × $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}}$ فہ˙˙ = − ف ب .... (۴)

یہ مساواتیں حرکت کی تعیین کے لیے کافی ہیں ۔

(۳) اور (۴) میں سے ف کو ساقط کرنے سے

فہ˙˙ = − $\frac{۲\text{ج}}{۳(\text{ا} - \text{ب})}$ جب فہ .... (۵)

اس مساوات کو تکمل کرنے سے

فہ˙^۲ = $\frac{۴\text{ج}}{۳(\text{ا} - \text{ب})}$ جم فہ + مستقل = سھ^۲ − $\frac{۴\text{ج}}{۳(\text{ا} - \text{ب})}$ (۱ − جم فہ) ...(۶)

جہاں سھ، فہ˙ کی قیمت ہے جب کہ اسطوانہ اپنے پست ترین محل پر رہے ۔

اس مساوات کو بالعموم آگے تکمل نہیں کیا جا سکتا ۔

(۲) اور (۶) سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{س}}{\text{م}}$ = (ا − ب) سھ^۲ + $\frac{\text{ج}}{۳}$ [۷ جم فہ − ۴] .... (۷)

اب اسطوانے کے مکمل گردشیں لگانے کے لیے ضروری ہے کہ س بالاترین نقطہ پر (جہاں فہ = π) صفر ہو۔

اس صورت میں (ا - ب) سھ² = $\frac{۱۱ ج}{۳}$ اس لیے رمی کی رفتار

$$= (ا - ب)\ سھ = \sqrt{\frac{۱۱}{۳}\ ج\ (ا - ب)}$$

اگر سھ اس قیمت سے کم ہو تو س صفر ہوگا اور اس لیے اندرونی اسطوانہ بیرونی اسطوانہ کو چھوڑ دیگا جب کہ جم فہ = $\frac{1}{2}\left[۴ - \frac{۳ (ا - ب) سھ^2}{ج}\right]$

(۴) اور (۵) سے حاصل ہوگا

$$ف = \frac{ھر ج}{۳}\ جب\ فہ \quad ....(۸)$$

پس جب اسطوانہ سب سے نچلے محل میں ہو تو رگڑ صفر ہوگی اور کسی اور محل کے لیے ف مثبت ہوگا اور اس لیے شکل میں نشان زدہ سمت میں عمل کریگا۔

توانائی کی مساوات۔ اس اصول کی بناء پر کہ توانائی بالحرکت کی تبدیلی بیرونی قوتوں کے کام کے مساوی ہوتی ہے مساوات (۶) آسانی سے حاصل ہوسکتی ہے۔

جب مرکز ج پر ہو تو توانائی (دفعہ ۱۹۰ کی رُو سے)

$$= \frac{1}{2}\ ھر\ (ا - ب)^2\ \dot{فہ}^2 + \frac{1}{2}\ ھر\ \frac{ب^2}{۲}\ \dot{طہ}^2 = \frac{۳}{۴}\ ھر\ (ا - ب)^2\ \dot{فہ}^2$$

پس توانائی بالحرکت کا نقصان جیسے اسطوانہ اپنے سب سے نچلے محل سے حرکت کرتا ہے = $\frac{۳}{۴}$ ھر (ا - ب)² (سھ² - $\dot{فہ}^2$)۔ اس کو اُس کام کے مساوی رکھنے سے جو جاذبۂ ارض کے خلاف ہوا یعنی ھر ج (ا - ب) (۱ - جم فہ) ہمیں مساوات (۶) حاصل ہوتی ہے۔

چھوٹے اهتزاز۔ فرض کرو کہ اسطوانہ سب سے نچلے محل کے گرد چھوٹے اهتزاز کرتا ہے یعنی فہ ہمیشہ چھوٹا رہتا ہے۔ تب مساوات (۵) سے حاصل ہوتا ہے $\ddot{فہ} = - \frac{۲ ج}{۳ (ا - ب)}\ فہ$

لہذا چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$= ۲\pi \sqrt{\frac{۳ (\text{ا} - \text{ب})}{۲ \text{ج}}}$$

مشق ۱ ـ ایک قرص ایک ثابت مجوف مستدیر اسطوانہ کے اندر جس کا محور افقی ہے لڑھکتا ہے ۔ قرص کی سطح مستوی انتصابی ہے اور اسطوانہ کے محور پر عمود وار ہے ۔ اگر قرص کے سب سے نچلے محل میں اس کا مرکزِ ثقل رفتار $\sqrt{\frac{۴}{۳} \text{ج} (\text{ا} - \text{ب})}$ کے ساتھ حرکت کر رہا ہے تو ثابت کرو کہ قرص کا مرکز اسطوانہ کے مرکز کے گرد زاویہ فہ وقت

$$\sqrt{\frac{۳ (\text{ا} - \text{ب})}{۲ \text{ج}}} \; \text{لوک مس} \left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{فہ}}{۴} \right)$$

میں بنائیگا ۔

مشق ۲ ـ ایک مجسم متجانس کرہ ایک اور ثابت مجوف کرہ کے اندر لڑھک رہا ہے ۔ دونوں کے مرکز ہمیشہ ایک ہی انتصابی سطح مستوی میں رہتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ چھوٹا کرہ مکمل گردشیں کریگا ۔ اگر اس کے سب سے نچلے محل میں اس پر کا دباؤ اس کے وزن کے $\frac{۳۴}{۷}$ گنا سے زیادہ ہو ۔

مشق ۳ ـ ایک مستدیر قرص جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل ایک کھردرے دائرہ کے اندرونی محیط پر لڑھک رہا ہے قرص اور دائرہ دونوں کی سطحیں انتصابی مستوی میں ہیں ۔ جب ان کے مرکزوں کو ملانے والا خط سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ اجسام کے درمیان رگڑ $\frac{\text{جب طہ}}{۳} \times$ قرص کا وزن کے مساوی ہوگی ۔

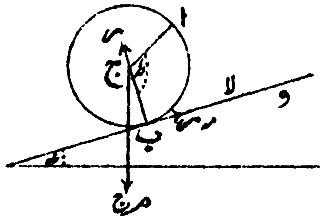
مشق ۴ ـ نصف قطر ا کا ایک اسطوانہ نصف قطر ۲ ا کے ایک کھردرے ثابت اسطوانی خول کے اندر پڑا ہے ۔ اسطوانہ کا مرکزِ ثقل اس کے محور سے فاصلہ ف پر واقع ہے ، ابتداءً کرہ تعادلِ قائم کے محل میں خول کے سب سے نچلے نقطہ پر ہے ۔ ثابت کرو کہ چھوٹی سے چھوٹی زاویئی رفتار جس سے کہ اسطوانہ روانہ ہوکر تمام خول کے گرد گھوم سکے مساواتِ ذیل $\text{سمہ}^{۲} (\text{ا} + \text{ف}) = \text{ع} \left\{ ۱ + \frac{۴ (\text{ا} + \text{ف})^{۲}}{(\text{ا} - \text{ف})^{۲} + \text{ک}^{۲}} \right\}$ ، جہاں ک مرکزِ ثقل کے گرد

گھماؤ کا نصف قطر ہے ۔

نیز کسی محل میں اسطوانوں کے درمیان عمادی تعامل معلوم کرو۔

۱۹۹ ۔ ایک نامکمل کھردرا کرہ حالتِ سکون سے ایک سطحِ مائل کے نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے ۔ سطحِ مائل کا میلان افق کے ساتھ ھ ہے ۔ حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مرکز ج وقت ت میں فاصلہ لا طے کرتا ہے اور کرہ زاویہ طہ میں سے گھومتا ہے۔ گویا طہ وہ زاویہ ہے جو وقت ت پر سطح مستوی پر کے عماد ب ج اور نصف قطر ج ا کے درمیان ہے جہاں ج ا صفر وقت پر عماد تھا ۔ فرض کرو کہ رگڑ خالص لڑھکنے کے عمل کو جاری رکھنے کے لیے کافی نہیں ہے اور اس لیے کرہ لڑھکتا بھی ہے اور پھسلتا بھی ہے ۔ اس صورت میں رگڑ کی مقدار بڑی سے بڑی ہوگی جو وجود میں آسکتی ہے یعنی مہ سا جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے ۔



چونکہ کرہ سطح مستوی کے ساتھ مس کرتا رہتا ہے ۔ اس لیے اس کا مرکز سطح مستوی سے ہمیشہ فاصلہ ا پر رہتا ہے ۔ پس ما' اور ما" دونوں صفر رہتے ہیں ۔

پس حرکت کی مساواتیں یہ ہیں:

$$\text{مر}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{مرج جب ھ} - \text{مہ سا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$0 = \text{سا} - \text{مرج جم ھ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

اور

$$\text{مر} \times \text{ک}^2 \times \frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ سا} \times \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

چونکہ $\text{ک}^2 = \frac{2\text{ا}^2}{5}$ ، اس لیے (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ط}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{۵ مہ ج}}{\text{۱۲}}\ \text{جم عہ}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \frac{\text{۵ مہ ج}}{\text{۱۲}}\ \text{جم عہ} \times \text{ت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

اور

$$\text{ط} = \frac{\text{۵ مہ ج}}{\text{۱۲}}\ \text{جم عہ}\ \frac{\text{ت}^{2}}{\text{۲}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

تکمل کے مستقل صفر ہیں کیونکہ ط اور طَ دونوں ابتداءً صفر ہیں۔

پس (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ج (جب عہ - مہ جم عہ)}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ج (جب عہ - مہ جم عہ) ت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۶})$$

اور

$$\text{لا} = \text{ج (جب عہ - مہ جم عہ)}\ \frac{\text{ت}^{2}}{\text{۲}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۷})$$

مستقل حسبِ سابق صفر ہیں۔

سطحِ مستوی سے نیچے کی طرف نقطہ ب کی رفتار = ج کی رفتار + ب کی رفتار بلحاظ ج کے $= \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - \text{ا}\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \text{ج (جب عہ} - \frac{\text{۷}}{\text{۲}}\text{ مہ جم عہ) ت}$۔

اولاً۔ فرض کرو کہ جب عہ $- \frac{\text{۷}}{\text{۲}}$ مہ جم عہ مثبت ہے یعنی مہ $<$ $\frac{\text{۲}}{\text{۷}}$ مس عہ

اس صورت میں ب کی رفتار ہمیشہ مثبت رہتی ہے اور کبھی صفر نہیں ہوتی، پس نقطۂ تماس ہمیشہ پھسلتا ہے اور کبھی لڑھکتا نہیں۔ اس صورت میں حرکت مکمل طور پر (۴)، (۵)، (۶) اور (۷) سے تعبیر ہوتی ہے۔

ثانیاً۔ فرض کرو کہ جب عہ $- \frac{\text{۷}}{\text{۲}}$ مہ جم عہ صفر ہے یعنی مہ $=$ $\frac{\text{۲}}{\text{۷}}$ مس عہ

یہاں ابتدا میں ب کی رفتار معدوم ہوتی ہے اور ہمیشہ صفر رہتی ہے ۔ حرکت سراسر محض لڑھکنے پر مشتمل ہوتی ہے اور زیادہ سے زیادہ رگڑ کی مقدار مہ ر عمل میں آتی رہتی ہے ۔

ثالثاً — فرض کرو کہ جب عہ ـ $\frac{\text{۲}}{\text{۷}}$ مہ جم عہ منفی ہے یعنی مہ > $\frac{\text{۲}}{\text{۷}}$ مس عہ ۔

اس صورت میں ب کی رفتار منفی حاصل ہوتی ہے جو ناممکن ہے کیونکہ رگڑ صرف اتنی قوت کے ساتھ عمل کرتی ہے جو محض نقطۂ عمل کو ساکن رکھنے کے لیے کافی ہو ۔ پس اس صورت میں خالص لڑھکنے کا عمل ابتداء سے ہی وقوع پذیر ہوتا ہے اور بڑی سے بڑی رگڑ مہ ر ہمیشہ عمل نہیں کرتی ۔

اس صورت میں مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) کی بجائے یہ مساواتیں ہو جائینگی:

$$\text{م}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{لا}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} = \text{مرج جب عہ} - \text{ف} \qquad \text{(۸)}$$

$$\text{۰} = \text{ر} - \text{مرج جم عہ} \qquad \text{(۹)}$$

اور

$$\text{مرک}^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{طہ}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} = \text{ف} \times \text{ا} \qquad \text{(۱۰)}$$

نیز چونکہ تماس کا نقطہ ساکن ہے اس لیے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - \text{ا}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{۰} \qquad \text{(۱۱)}$$

اب (۸) اور (۱۰) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{لا}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} + \frac{\text{۲ا}}{\text{۵}}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{طہ}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} = \text{ج جب عہ}$$

اس لیے (۱۱) کی رو سے $\text{لاَ} = \text{اطہَ} = \frac{\text{۵}}{\text{۷}}\,\text{ج جب عہ}$

$$\therefore\ \text{لاَ} = \text{اطہَ} = \frac{\text{۵}}{\text{۷}}\,\text{ج جب عہ} \times \text{ت} \qquad \text{(۱۲)}$$

اور

$$\text{لا} = \text{اطہ} = \frac{\text{۵}}{\text{۷}}\,\text{ج جب عہ} \times \frac{\text{ت}^{\text{۲}}}{\text{۲}} \qquad \text{(۱۳)}$$

تکمل کے مستقل حسبِ سابق صفر ہیں ۔

توانائی کی مساوات — جاذبۂ ارض کا کام جب مرکز فاصلہ لا مرتسم کرے = م ج × لا جب ع، اور تب توانائی بالحرکت

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{لا}^2 + \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ک}^2\,\text{ط}^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{م}\left[\text{لا}^2 + \tfrac{2}{5}\,\text{ر}^2\,\text{ط}^2\right]$$

پہلی صورت میں (۴) اور (۶) کی رُو سے توانائی

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ج}^2\text{ت}^2\left[(\text{جب ع} - \text{مہ جم ع})^2 + \tfrac{5}{2}\,\text{مہ}^2\text{جم}^2\text{ع}\right] \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

اور (۷) کی رُو سے جاذبۂ ارض کا کام

$$= \text{م ج لا جب ع} = \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ج}^2\text{ت}^2\,\text{جب ع}\,(\text{جب ع} - \text{مہ جم ع}) \quad \ldots (۱۵)$$

یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ (۱۴)، (۱۵) کی نسبت کم ہے جب تک کہ مہ $<$ ۲/۷ مس ع ہے یعنی جب تک کہ پھسلنے کا عمل کسی نہ کسی حد تک جاری رہے۔ پس اِس صورت میں رگڑ کی وجہ سے کام ضائع ہو جاتا ہے اور کام اور توانائی کی مساوات برقرار نہیں رہتی۔

تیسری صورت میں توانائی بالحرکت (۱۲) اور (۱۳) کی رُو سے

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{لا}^2 + \tfrac{1}{2}\,\text{م} \times \tfrac{2}{5}\,\text{ر}^2 \times \text{ط}^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{م} \times \tfrac{7}{5}\,\text{ر}^2 \times \text{ط}^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{م} \times \tfrac{5}{7}\,\text{ج}^2\text{جب}^2\text{ع}\,\text{ت}^2$$

اور جو کام ہوا وہ (۱۳) کی رُو سے

$$= \text{م ج} \times \text{لا جب ع} = \text{م ج جب ع} \times \tfrac{5}{7}\,\text{ج جب ع}\,\tfrac{\text{ت}^2}{2} = \tfrac{1}{2}\,\text{م} \times \tfrac{5}{7}\,\text{ج}^2\text{جب}^2\text{ع}\,\text{ت}^2$$

اس صورت میں، اور اسی طرح دوسری صورت میں توانائی بالحرکت جو حاصل ہوتی ہے وہ انجام یافتہ کام کے مساوی ہوتی ہے اور کام اور توانائی کی مساوات قائم رہتی ہے۔

یہ ایک عام اصول کی سادہ مثال ہے یعنی جہاں رگڑ نہ ہو یا بالفاظِ دیگر حرکت کا عمل محض لڑھکنے پر مشتمل ہو تو توانائی بالحرکت ضائع نہیں ہوتی، لیکن جب خالص لڑھکنے کا عمل نہ ہو بلکہ پھسلنا اور لڑھکنا دونوں ایک ساتھ وقوع پذیر ہوں تو توانائی ضائع ہوتی ہے۔

مشق ۱ — نصف قطر ا کا ایک متجانس کرہ افقی قطر کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ سے

گھوم رہا ہے، اسے آہستہ سے ایک میز پر رکھ دیا گیا ہے جس کی رگڑ کی قدر مہ ہے ۔ ثابت کرو کہ تماس کے نقطہ پر مدت ۲ سہ ا / ۷ مہ ج تک پھسلنے کا عمل جاری رہیگا اور بعد ازاں کرہ زاویئی رفتار ۲ سہ / ۷ سے لڑھکیگا ۔

مشق ۲ ۔ ایک ٹھوس مستدیر اسطوانہ کو جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے اور جس کا محور افقی ہے آہستہ سے ایک کھردری سطح مستوی پر رکھ دیا گیا ہے جس کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے ۔ ابتداءً رگڑ سطح مائل کے اوپر کی طرف عمل کرتی ہے اور رگڑ کی قدر مہ ہے ۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ اوپر کی طرف حرکت کریگا اگر مہ > مس عہ، نیز بتاؤ کہ لڑھکنے کا عمل کتنی مدت کے بعد جاری ہوگا ۔

مشق ۳ ۔ ایک کرہ کو زبردست مروڑ کے ساتھ ایک کھردری سطح مائل سے نیچے کی طرف پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ دورانِ حرکت میں واپس اُلٹیگا اگر

۲ ا سہ (مہ ۔ مس عہ) > ۵ ع مہ

جہاں ع اور سہ بالترتیب ابتدائی خطی اور زاویئی رفتاریں ہیں کرہ کی؛ اور مہ رگڑ کی قدر ہے اور عہ سطح مستوی کا میلان ہے اور مہ > ۲ / ۷ مس عہ

مشق ۴ ۔ نصف قطر ا کے ایک کرہ کو ایک سطح مائل کے اوپر کی طرف رفتار و کے ساتھ اور زاویئی رفتار سھ کے ساتھ جس کا رُخ کرہ کو اوپر کی طرف لڑھکانے کا ہے پھینکا گیا ہے اگر و > ا سھ اور رگڑ کی قدر > ۲ / ۷ مس عہ تو ثابت کرو کہ کرہ اوپر چڑھنے سے وقت

۵ و + ۲ ا سھ / ۵ ج جب عہ

کے بعد رُک جائیگا، جہاں عہ سطح مستوی کا میلان ہے ۔

مشق ۵ ۔ ایک کرہ کو ایک سطح مائل کے اوپر کی طرف پھینکا گیا ہے اور رگڑ کی قدر مہ = ۲ / ۷ مس عہ، ابتداءً خطی رفتار و اور زاویئی رفتار سھ ہے جس کا میلان کرہ کو اوپر کی طرف لڑھکانے کا ہے ۔ اگر و > ا سھ تو ثابت کرو کہ رگڑ پہلے نیچے کی طرف عمل کرتی ہے اور بعد میں اوپر کی طرف، نیز ثابت کرو کہ وہ کل مدت جس دوران میں کرہ اوپر چڑھتا ہے

$$\frac{\text{۱۷ و + ۴ ا سھ}}{\text{۱۸ ا ج جب عہ}}$$ ہے ـ

مشق ۶ ـ ایک گول حلقہ کو ایک سطح مائل (زاویۂ میلان عہ) کے نیچے کی طرف رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے ـ رگڑ کی قدر مہ (> مس عہ) ہے ـ ابتداً اس کو پیچھے کی طرف "اسپنی زاویئی گردشی رفتار" سھ دی گئی ہے کہ مدت ت کے بعد یہ اوپر کی طرف چڑھنا شروع کرتا ہے اور وقت ت۲ تک چڑھتا رہتا ہے جس کے بعد یہ نیچے اترتا ہے ـ حرکت معلومہ سطح مائل پر اس کے عمود وار انتصابی سطح مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے ـ ثابت کرو کہ (ت۱ + ت۲) ج جب عہ = ا سھ - و

مشق ۷ ـ نصف قطر ا کا ایک یکساں کرہ ایک افقی قطر کے گرد زاویئی رفتار سھ کے ساتھ گھوم رہا ہے ـ اسے آہستہ سے ایک سطح مائل پر جس کا زاویئی میلان عہ ہے رکھا گیا ہے ـ سھ ایسا ہے کہ کرہ کی حرکت خطِ میلانِ اعظم پر اوپر کی طرف میلان رکھتی ہے ـ ثابت کرو کہ اگر رگڑ کی قدر مس عہ ہو تو کرہ کا مرکز مدت $\frac{\text{۲ ا سھ}}{\text{۵ ج جب عہ}}$ تک ساکن رہیگا اور پھر نیچے کی طرف اسراع $\frac{\text{۵}}{\text{۷}}$ ج جب عہ کے ساتھ حرکت کریگا ـ

اگر جسم کرہ کی بجائے پتلا مستدیر حلقہ ہو تو ثابت کرو کہ مدت $\frac{\text{ا سھ}}{\text{ج جب عہ}}$ ہوگی

اور اسراع $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ج جب عہ

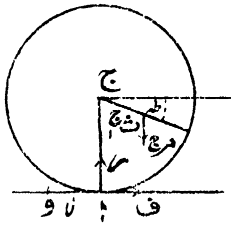
۲۰۰ ـ ایک کرہ کو جس کا نصف قطر ا ہے اور جس کا مرکزِ ثقل ث اس کے مرکز ج سے فاصلہ ج پر واقع ہے ایک کھردری سطح مستوی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ج ث افقی ہے، ثابت کرو کہ یہ گھومنا یا پھسلنا شروع کریگا اگر بالترتیب

$$\text{مہ} \gtrless \frac{\text{ا ج}}{\text{ک}^2 + \text{ا}^2}$$

جہاں ک گھماؤ کا نصف قطر ہے ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد ـ اگر مہ اس قیمت کے مساوی ہو تو کیا واقع ہوگا ـ

جب ج ث افق کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو فرض کرو کہ نقطۂ تماس ۱ اپنے ابتدائی محل و سے افقی فاصلہ لا میں سے حرکت کرتا ہے یعنی فرض کرو کہ

و ۱ = لا -



فرض کرو کہ کرہ لڑھکتا ہے اور رگڑ کی قوت ف ہے، چونکہ نقطۂ تماس ۱ ساکن رہتا ہے

∴ لاَ = ا طہَ . . . . (۱)

دفعہ ۱۸۷ کی حرکت کی مساواتیں ہیں

ف = م $\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}$ [لا + ج جم طہ]

= م [(ا - ج جب طہ) طہً - ج جم طہ طہَ۲] . . . . (۲)

س - م ج = م $\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}$ [ا - ج جب طہ] = م [- ج جم طہ طہً + ج جب طہ طہَ۲] . . . . (۳)

اور س ج جم طہ - ف (ا - ج جب طہ) = م ک۲ طہً . . . . (۴)

ہم صرف ابتدائی حرکت معلوم کرنا چاہتے ہیں جب کہ طہ = ۰ اس وقت طہَ = ۰ لیکن طہً ≠ ۰ . اس صورت میں مساواتیں (۲) ، (۳) ، (۴) ہوجاتی ہیں -

ف = م ا طہً
س = م ج - م ج طہً
اور س ج - ف ا = م ک۲ طہً

} ابتدائی قیمتوں کے لیے -

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے طہً = $\frac{\text{ج ج}}{\text{ک}^2 + \text{ا}^2 + \text{ج}^2}$

$\frac{\text{س}}{\text{م}} = \frac{\text{ک}^2 + \text{ا}^2}{\text{ک}^2 + \text{ا}^2 + \text{ج}^2}$ ج اور $\frac{\text{ف}}{\text{م}} = \frac{\text{ج ا ج}}{\text{ک}^2 + \text{ا}^2 + \text{ج}^2}$

اگر ابتدائی حرکت محض لڑھکنے پر مشتمل ہو تو ف > مہ س یعنی مہ > $\frac{\text{ا ج}}{\text{ک}^2 + \text{ا}^2}$

اگر مہ اس قیمت سے چھوٹا ہو تو کرہ نہیں لڑھکیگا کیونکہ رگڑ کافی نہ ہوگی -

انتہائی صورت - اگر $\text{م} = \frac{\text{ا ج}_{۱}}{\text{ک}^{۲} + \text{ا}^{۲}}$ تو اس بات پر غور کرنا ضروری ہے کہ جب ط چھوٹا ہو لیکن بالکل صفر نہ ہو تو $\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ کی قیمت م سے ذرا بڑی ہوگی یا ذرا چھوٹی۔

لہذا ہمیں مساوات کو ابتداء سے حل کرنا چاہیے اور دورانِ عمل میں صرف ط کی پہلی قوت کو قائم رکھنا چاہیے اور $\text{ط}^{۲}$، $\text{ط}^{۳}$، ... وغیرہ کو نظر انداز کر دینا چاہیے۔

(۲)، (۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے، ف اور س کو ساقط کرنے کے بعد

$$\ddot{\text{ط}}\left[\text{ک}^{۲} + \text{ا}^{۲} + \text{ج}_{۱}^{۲} - ۲\text{ا ج}_{۱}\,\text{جب ط}\right] - \text{ا ج}_{۱}\,\text{جم ط}\,\dot{\text{ط}}^{۲} = \text{ج ج}_{۱}\,\text{جم ط} \quad \text{......(۵)}$$

پس تکمل کرنے پر

$$\dot{\text{ط}}^{۲}\left[\text{ک}^{۲} + \text{ا}^{۲} + \text{ج}_{۱}^{۲} - ۲\text{ا ج}_{۱}\,\text{جب ط}\right] = ۲\text{ج ج}_{۱}\,\text{جب ط} \quad \text{......(۶)}$$

اگر $\text{ک}'^{۲} \equiv \text{ک}^{۲} + \text{ا}^{۲} + \text{ج}_{۱}^{۲}$ تو اِن سے حاصل ہوتا ہے جب کہ ط کے مربعوں کو نظر انداز کر دیا جائے،

$$\dot{\text{ط}}^{۲} = \frac{۲\text{ج ج}_{۱}\text{ط}}{\text{ک}'^{۲}} \quad \text{اور} \quad \ddot{\text{ط}}\left[\text{ک}'^{۲} - ۲\text{ا ج}_{۱}\text{ط}\right] = \text{ج ج}_{۱} + \frac{۲\text{ج ا ج}_{۱}^{۲}\text{ط}}{\text{ک}'^{۲}}$$

یعنی

$$\text{ک}'^{۲}\ddot{\text{ط}} = \left[\text{ج ج}_{۱} + \frac{۲\text{ج ا ج}_{۱}^{۲}\text{ط}}{\text{ک}'^{۲}}\right]\left[۱ + \frac{۲\text{ا ج}_{۱}\text{ط}}{\text{ک}'^{۲}}\right] = \text{ج ج}_{۱}\left[۱ + \frac{۴\text{ا ج}_{۱}\text{ط}}{\text{ک}'^{۲}}\right]$$

پس ط کی پہلی قوتوں تک (۲) اور (۳) سے بعد تحویل و اختصار حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{س}} = \frac{(\text{ا} - \text{ج}_{۱}\text{ط})\ddot{\text{ط}} - \text{ج}_{۱}\dot{\text{ط}}^{۲}}{\text{ج} - \text{ج}_{۱}\ddot{\text{ط}}} = \frac{\text{ا ج}_{۱}}{\text{ک}^{۲} + \text{ا}^{۲}}\left[۱ - \text{ج}_{۱}\frac{۴\text{ک}^{۲} - \text{ا}^{۲}}{\text{ا}(\text{ک}^{۲} + \text{ا}^{۲})}\text{ط}\right]$$

اگر $\text{ک}^{۲} > \frac{\text{ا}^{۲}}{۴}$ تو $\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ چھوٹا ہوگا $\frac{\text{ا ج}_{۱}}{\text{ک}^{۲} + \text{ا}^{۲}}$ سے یعنی $\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ رگڑ کی قدر سے کم ہے اور کرہ لڑھکتا ہے۔

اگر $\text{ک}^{۲} < \frac{\text{ا}^{۲}}{۴}$ تو $\frac{\text{ف}}{\text{س}} >$ رگڑ کی قدر سے اور کرہ پھسلیگا۔

مشق ۱ ۔ کمیّت ھ کے ایک متجانس کرہ کو ایک نامکمل کھردرے میز پر رکھا گیا ہے اور کمیت م کے ایک ذرّہ کو اس کے ایک افقی قطر کے ایک سرے کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ لڑھکنا شروع کریگا یا پھسلنا شروع کریگا اگر بالترتیب

$$\text{مہ} \lessgtr \frac{\text{۵(ھ+م)م}}{\text{۷ھ}^2 + \text{۱۷ھم} + \text{۵م}^2}،$$

اگر مہ اس قیمت کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ کرہ لڑھکنا شروع کریگا۔

مشق ۲ ۔ ایک متجانس ٹھوس نصف کرہ جس کی کمیّت ھ اور نصف قطر ا ہے ایک کھردری افقی سطح مستوی پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا راس سطح مذکور پر دھرا ہے۔ ایک ذرہ (کمیّت م) کو اس کے چکنے قاعدہ پر اس کے مرکز سے فاصلہ ج پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نصف کرہ لڑھکنا یا پھسلنا شروع کریگا اگر بالترتیب رگڑ کی قدر

$$\lessgtr \frac{\text{۲۵ م ا ج}}{\text{۲۶(ھ+م)ا}^2 + \text{۴۰ م ج}^2}$$

مشق ۳ ۔ ایک کرہ جس کا نصف قطر ا ہے اور جس کا مرکز ثقل ث اس کے مرکز و پر واقع نہیں ہے ایک کھردرے میز پر اس طرح پڑا ہے کہ و ث اوپر کی طرف کھنچے ہوئے انتصابی خط کے ساتھ زاویہ ھ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ میز پر پھسلنا شروع کریگا اگر رگڑ کی قدر

$$< \frac{\text{ج جب ھ (ا + ج جم ھ)}}{\text{ک}^2 + \text{(ا + ج جم ھ)}^2}$$

جہاں و ث = ج اور ک گھماؤ کا نصف قطر ہے ث میں سے گزرنے والے اُفقی محور کے گرد۔

مشق ۴ ۔ اگر ایک یکساں نصف دائرہ کی شکل کے تار کو انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا جائے کہ اِس کا ایک سرا ایک کھردری افقی سطح مستوی پر ہو اور اس سرے میں سے گزرنے والا قطر انتصابی ہو تو ثابت کرو کہ تار لڑھکیگا یا پھسلیگا اگر بالترتیب

$$\text{مہ} \lessgtr \frac{\pi}{\pi^2 - ۲}،$$

اگر مہ کی یہ قیمت ہو تو ثابت کرو کہ تار لڑھکیگا۔

مشق ۵ ۔ ایک وزنی یکساں کرہ جس کی کمیت ھ ہے ایک کامل کھردری افقی سطح مستوی پر ساکن ہے اور ایک ذرہ کو جس کی کمیت م ہے آہستہ سے اس کے بالاترین نقطہ سے

زاویئی فاصلہ عہ پر رکھا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ذرّہ کرہ پر فوراً پھسلیگا اگر

$$\text{مہ} > \frac{\text{جب عہ}\,\{\,\text{۷ مر} + \text{۵ م}\,(\text{۱} + \text{جم عہ})\,\}}{\text{۷ مر جم عہ} + \text{۵ م}\,(\text{۱} + \text{جم عہ})^{\text{۲}}}$$

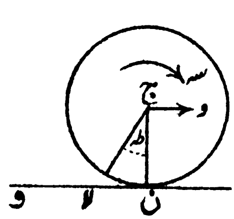
جہاں مہ کرہ اور ذرہ کے درمیان رگڑ کی قدر ہے ۔

۲۰۱ ۔ ایک یکساں مستدیر قرص کو ایک کھردری افقی سطح مستوی پر اس طرح پھینکا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی انتصابی رہتی ہے اور حرکتِ انتقالی کی ابتدائی رفتار و ہے اور مرکز کے گرد زاویئی رفتار سہ ہے ۔ حرکت معلوم کرو ۔

صورت ۱ ۔ و ← اور سہ ↻ اور و > ا سہ

اس صورت میں نقطۂ تماس کی ابتدائی رفتار و ۔ ا سہ اس سمت میں ← ہے اور رگڑ مہ مر ج اس سمت → میں ۔

جب مرکز فاصلہ لا طے کرتا ہے اور قرص فاصلہ ط میں سے گھومتا ہے تو حرکت کی مساواتیں حسبِ ذیل ہونگی:



مر لاَ = ـ مہ مر ج اور مر × $\frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}}$ × طَ = مہ مر ج ا

∴ لاَ = و ـ مہ ج ت اور $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ طَ = $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ سہ + مہ ج ت ...(۱)

پس نقطۂ تماس ن کی رفتار

= لاَ ـ ا طَ = و ـ ا سہ ـ ۳ مہ ج ت

پس پھسلنا جاری رہتا ہے ۔ حتیٰ کہ ت = $\frac{\text{و} - \text{ا سہ}}{\text{۳ مہ ج}}$ اور بعد ازیں خالص لڑھکنے کا عمل شروع ہو جاتا ہے ۔

نیز اس وقت مرکز کی رفتار = $\frac{\text{۲ و} + \text{ا سہ}}{\text{۳}}$ ....(۲)

اور اُس وقت حرکت کی مساواتیں ہو جاتی ہیں

م لاَ = ۔ ف

اور م $\frac{\text{ل}^2}{2}$ فہَ = ف × ا } جہاں ف رگڑ ہے ←

نیز لاَ = ا فہَ کیونکہ نقطۂ تماس اب ساکن ہے ∴ لاَ = ا فہَ

اِن تین مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے ف = ۰۔ یعنی اب کسی رگڑ کی ضرورت نہیں رہتی۔

نیز ا فہَ = لاَ = مستقل = پھسلنے کے عمل کے شروع میں رفتار = $\frac{\text{۲ و + ا سہ}}{3}$

(۲) کی رُو سے۔

پس قرص مستقل رفتار سے جو ابتدائی رفتار سے کم ہے لڑھکتا رہتا ہے۔

صورت دوم — و ← اور سہ ↶ اور و > ا سہ

یہاں نقطۂ تماس کی ابتدائی رفتار ← ہے اور اس لیے رگڑ مہ م ج کی سمت عمل → ہے

پس حرکت کی مساواتیں یہ ہیں

م لاَ = مہ م ج اور م $\frac{\text{ل}^2}{2}$ طہَ = ۔ مہ م ج ا

جس سے حاصل ہوگا لاَ = و + مہ ج ت اور $\frac{\text{ل}}{2}$ طہَ = $\frac{\text{ل}}{2}$ سہ ۔ مہ ج ت

پس خالص لڑھکنے کا عمل شروع ہوتا ہے جب کہ لاَ = ا طہَ

یعنی جب کہ ت = $\frac{\text{ا سہ - و}}{\text{۳ مہ ج}}$

اُس وقت مرکز کی رفتار لاَ = $\frac{\text{ا سہ + ۲ و}}{3}$ اور صورت اول کی طرح قرص مستقل رفتار سے لڑھکتا رہتا ہے جو مرکز کی ابتدائی رفتار سے بڑی ہے۔

صورت سوم — و ←، سہ ↷

ابتدائی نقطۂ تماس کی رفتار و + ا سہ ← ہے پس رگڑ مہ م ج → ہے۔ حرکت کی مساواتیں ہیں

مہ لاً = ۔ مہ مہ ج اور مہ ک²/۲ طَہً = مہ مہ ج ا

∴ لاً = و ۔ مہ ج ت اور ا/۲ طَ = مہ ج ت ۔ ا/۲ سہ

خالص لڑھکنے کی حرکت شروع ہوتی ہے جب کہ لاً = ا طَ یعنی ت = (و + ا سہ)/(۳ مہ ج)

اور اُس وقت مرکز کی رفتار = (۲ و ۔ ا سہ)/۳

اگر ۲ و > ا سہ تو یہ رفتار اس سمت ← میں ہے اور خالص لڑھکنے کے عمل کے دوران میں حرکت ← حسب سابق مستقل رفتار کے ساتھ وقوع پذیر ہوتی ہے ۔

اگر ۲ و < ا سہ تو مرکز کی رفتار خالص لڑھکنے کا عمل شروع ہونے کے وقت → ہے اور قرص پھر مبداء و کی طرف لڑھکتا ہے ۔ اس خاص صورت میں مرکز کی رفتار صفر ہو جاتی ہے جب کہ ت = و/(مہ ج) جو کم ہے (و + ا سہ)/(۳ مہ ج) سے بشرطیکہ ۲ و < ا سہ ، پس خالص لڑھکنے کا عمل شروع ہونے سے پہلے قرص → سمت میں حرکت کرنا شروع کرتا ہے ۔

آخری صورت میں حرکت اسی قسم کی ہے جو رومالی حلقہ کے مشہور تجربہ میں ہوتی ہے جیسے میز پر ابتدائی رفتار و ← سے اور کافی زاویئی رفتار سہ ↶ سے پھینکا جائے ۔

مشق ۔ ایک رومالی حلقہ کو جس کا نصف قطر ا ہے ایک کھردرے اُفقی میز پر خطی رفتار ع اور پیچھے کی طرف کے مروڑ سہ کے ساتھ چلایا گیا ہے ، سہ > ع/ا ، حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ حلقہ نقطۂ رمیٔ تک مدت (ع + ا سہ)²/(۴ مہ ج (ا سہ ۔ ع)) میں آجائیگا جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے ۔ اگر ع > ا سہ تو کیا واقع ہوگا ۔

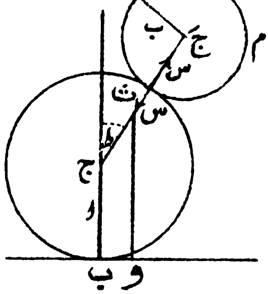
۲۰۳ ۔ دو غیر مساوی چکنے کروں کو ایک دوسرے کے اوپر تعادلِ غیر قائم کے محل میں رکھا گیا ہے ، نچلا کرہ ایک چکنے میز پر ساکن ہے ۔ نظام کو ذرا سا ہلا دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ کرے علٰحدہ ہو جائیںگے جب کہ اُن کے مرکزوں کو ملانے والا خط سمتِ انتصابی

کے ساتھ زاویہ ط بنائے جہاں ط مساوات $\frac{\text{م}}{\text{ھ}+\text{م}}\,\text{جم}^3\text{ط} - 3\,\text{جم ط} + 2 = 0$ کی اصل ہے

جہاں ھ کمیت ہے نیچے کے کرہ کی اور م کمیت ہے اوپر کے کرہ کی۔

فرض کرو کہ کروں کے نصف قطر ا اور ب ہیں اور ث ان کا مرکزِ ثقل ہے تب

$$\frac{\text{ج ث}}{\text{م}} = \frac{\text{جَ ث}}{\text{ھ}} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ھ} + \text{م}}$$



چونکہ میز پر کوئی رگڑ عمل نہیں کر رہی ہے، اس لیے دو کروں کے نظام پر عمل کرنے والی حاصل افقی قوت صفر ہے۔

پس دفعہ ۱۶۲ کی رُو سے مرکزِ ثقل کی افقی رفتار مستقل رہتی ہے اور اس کی قیمت وہی رہتی ہے جو ابتدائے حرکت میں تھی یعنی یہ ہمیشہ صفر رہتی ہے۔ پس ث کی کل رفتار انتصابی ہے اس لیے ث انتصابی خطِ مستقیم ث و مرتسم کرتا ہے جہاں و نقطۂ تماس ب کا ابتدائی محل ہے۔ پس نقطۂ و ثابت ہے۔

پس نچلے کرہ کی افقی حرکت کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{س جب ط} = \text{ھ}\,\frac{\text{ف}^2}{\text{فت}^2}\left[\text{ج ث} \times \text{جب ط}\right] = \frac{\text{ھ م}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{ھ}+\text{م}}\left[\text{جم ط}\,\ddot{\text{ط}} - \text{جب ط}\,\dot{\text{ط}}^2\right] \quad \ldots(1)$$

اوپر کے کرہ کی انتصابی حرکت کے لیے

$$\text{س جم ط} - \text{م ج} = \text{م}\,\frac{\text{ف}^2}{\text{فت}^2}\left[\text{ا} + (\text{ا} + \text{ب})\,\text{جم ط}\right] = \text{م}(\text{ا}+\text{ب})\left[-\text{جب ط}\,\ddot{\text{ط}} - \text{جم ط}\,\dot{\text{ط}}^2\right] \quad \ldots(2)$$

س کو ساقط کرنے سے

$$\ddot{\text{ط}}\left[\text{ھ} + \text{م جب}^2\text{ط}\right] + \text{م جب ط جم ط}\,\dot{\text{ط}}^2 = \frac{(\text{ھ}+\text{م})\,\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب}}\,\text{جب ط} \quad \ldots\ldots(3)$$

پس تکمل کرنے سے

$$طَ^2 \left[ھ + م\ جب^2 ط \right] = \frac{2ج}{ا+ب} (ھ+م)(1 - جم ط) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

کیونکہ حرکت بالاترین نقطہ سے سکون سے شروع ہوتی ہے ۔

(۱) سے، س معدوم ہوجاتا ہے یعنی کُرے علٰحدہ ہوجاتے ہیں جب کہ

$$جم\ ط\ طَ = جب\ ط \times طَ^2 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

(۳) اور (۵) سے اِس وقت $طَ^2 = \frac{ج\ جم\ ط}{ا+ب}$ اور اُس وقت (۴) کی مدد سے

$$م\ جم^3 ط = (ھ+م)(2جم ط - 2)$$

کسی کرہ کو اُس کے مرکز کے گرد پھرانے والی کوئی قوت نہیں ہے، اس لیے کسی کرہ میں گھماؤ کی حرکت پیدا نہیں ہوتی ۔

کام اور توانائی ـــــ مساوات (۴) کام کے اصول کی بناء پر بھی حاصل ہوسکتی ہے ۔ نچلے کرہ کی افقی رفتار

$$= \frac{فر}{فرت} (ج\ ث\ جب\ ط) = \frac{م(ا+ب)}{ھ+م} جم\ ط\ طَ$$

اس لیے اس کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} ھ \frac{م^2 (ا+ب)^2}{(ھ+م)^2} جم^2 ط\ طَ^2$$

اوپر کے کرہ کی افقی اور انتصابی رفتاریں ہیں

$$\frac{فر}{فرت} [ث\ جَ\ جب\ ط] \quad اور \quad \frac{فر}{فرت} [ا + (ا+ب) جم\ ط]$$

یعنی

$$\frac{ھ(ا+ب)}{ھ+م} جم\ ط\ طَ \quad اور \quad -(ا+ب)\ جب\ ط\ طَ$$

پس اِس کی توانائی بالحرکت

$$= \frac{1}{2} م (ا+ب)^2 \times طَ^2 \left[\frac{ھ^2}{(ھ+م)^2} جم^2 ط + جب^2 ط \right]$$

ان دو توانائیوں کے حاصل جمع کو کام انجام پذیرفتہ یعنی م ج (ﻟ + ب) (ا - جم طہ) کے مساوی رکھنے سے ہمیں مساوات (۴) حاصل ہوتی ہے۔

۲۰۳ ـ **متغیر کمیّت** ـــ دفعہ ۱۶۱ کی مساواتیں حاصل کرنے میں ہم نے فرض کیا تھا کہ جسم کی کمیت مستقل رہتی ہے۔ اگر ذرّہ کی کمیّت م مستقل نہ ہو تو ترکیبی مؤثر قوت $\frac{فر}{فرت}\left(م \frac{فرلا}{فرت}\right)$ ہوگی نہ کہ م $\frac{فر^۲لا}{فرت^۲}$

تب دفعہ ۱۶۱ کی مساوات (۱) ہوگی

$$ع \left[ک - \frac{فر}{فرت}\left(م \frac{فرلا}{فرت}\right) \right] = ۰$$

یعنی $$ع ک = ع \frac{فر}{فرت}\left(م \frac{فرلا}{فرت}\right) = \frac{فر}{فرت} ع م \frac{فرلا}{فرت} = \frac{فر}{فرت}\left(م \frac{فرلا}{فرت}\right)$$

نیز مساوات (۶) دفعہ مذکور ہوگی

$$ع (لا ما - ما ک) = ع \left[لا \frac{فر}{فرت}\left(م \frac{فرما}{فرت}\right) - ما \frac{فر}{فرت}\left(م \frac{فرلا}{فرت}\right) \right]$$

$$= ع \frac{فر}{فرت}\left[لا \times م \frac{فرما}{فرت} - ما \times م \frac{فرلا}{فرت} \right] = \frac{فر}{فرت} ع \left[م \left(لا \frac{فرما}{فرت} - ما \frac{فرلا}{فرت} \right) \right]$$

$$= \frac{فر}{فرت}\left[م ک^۲ \frac{فرطہ}{فرت} \right]$$ حسب دفعہ ۱۸۷۔

مشق ـــ برف کی ایک اسطوانہ کی شکل کی کمیّت ایک سطح مائل پر نیچے کی طرف لڑھک رہی ہے اور سطح پر یکساں گہرائی ع تک برف جمی ہوئی ہے۔ اسطوانہ دورانِ حرکت میں تمام برف اپنے گرد لپیٹتا جاتا ہے اور ہمیشہ مستدیر رہتا ہے۔ برف کی حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ اسراع $\frac{۱}{۵}$ ج جب ہ کے ساتھ حرکت کریگی اگر

ابتداءً جب کہ اِس کا نصف قطر ا ھو اسے رفتار ا $\sqrt{\frac{\text{۳۲ ج جب عہ}}{\text{۵ ع}}}$،
کے ساتھ چلایا جائے جہاں عہ سطح مائل کا میلان ھے۔

روانگی سے وقت ت کے بعد فرض کروکہ سطح مائل پر نیچے کی طرف فاصلہ لا طے ہوا ہے۔
اور فرض کرو نصف قطر ر ہے، پس

$$\pi\,(\text{ر}^2-\text{ا}^2) = \text{برف کی مقدار جو لپیٹ گئی}$$

$$= \text{ع} \times \text{لا} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور اگر ف رگڑ ہو سطح مائل پر اوپر کی طرف اور طہ وہ زاویہ ہو جس میں سے یہ کرہ گھومے تو

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\pi\, \text{ر}^2 \text{م} \times \dot{\text{لا}}\right] = \pi\, \text{ر}^2 \text{ج م جب عہ} - \text{ف} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اور
$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\pi\, \text{ر}^2 \text{م ک}^2 \dot{\text{طہ}}\right] = \text{ف} \times \text{ر} \quad \ldots\ldots (۳)$$

جہاں م کثافت ہے برف کے کرہ کی،

نیز
$$\dot{\text{لا}} - \text{ر}\dot{\text{طہ}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۴)$$

کیونکہ پھسلنے کا عمل نہیں ہوتا

نیز چونکہ $\text{ک}^2 = \frac{\text{ر}^2}{۲}$ تو مساواتوں (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر}\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{ر}^2 \dot{\text{لا}}) + \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{ر}^3}{۲}\dot{\text{لا}}\right) = \text{ر}^3 \text{ج جب عہ}$$

یعنی
$$۳\, \ddot{\text{لا}} + ۷\, \frac{\dot{\text{ر}}}{\text{ر}}\, \dot{\text{لا}} = ۲\, \text{ج جب عہ}$$

یعنی (۱) سے
$$\ddot{\text{لا}} + \frac{۷}{۶}\,\frac{\text{ع}}{\pi\, \text{ا}^2 + \text{ع لا}}\, \dot{\text{لا}}^2 = \frac{۲}{۳}\, \text{ج جب عہ}$$

$\text{لاَ}^{۲} = \text{ع}$ اور اس لیے $\text{۲ لاَ} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ رکھنے سے مساوات خطی بن جاتی ہے اور اس کا حل ہے

$$\text{لاَ}^{۲}\left(\text{۳ و}^{۲}+\text{ع لا}\right)^{\frac{۴}{۳}} = \frac{۴}{۳}\,\text{ج جب ه} \times \frac{۳}{\text{۱۰ ع}}\left(\text{۳ و}^{۲}+\text{ع لا}\right)^{\frac{۷}{۳}} + \text{ج}$$

یعنی

$$\text{لاَ}^{۲} = \frac{\text{۲ ج جب ه}}{\text{۵ ع}}\left(\text{۳ و}^{۲}+\text{ع لا}\right) + \frac{\text{ج}}{\left(\text{۳ و}^{۲}+\text{ع لا}\right)^{\frac{۴}{۳}}}$$

اس مساوات کو بالعموم آگے تکمل نہیں کیا جا سکتا۔

تاہم اگر $\text{لاَ} = \text{و}\sqrt{\frac{\text{۲ ۳ ج جب ه}}{\text{۵ ع}}}$ جب کہ $\text{لا} = ۰$ تو $\text{ج} = ۰$ اور تب

$$\text{لاَ}^{۲} = \frac{\text{۲ ج جب ه}}{۵}\,\text{لا} + \frac{\text{۲ ۳ ج و}^{۲}\text{جب ه}}{\text{۵ ع}} = \left[\text{لاَ}^{۲}\right]_{\text{ت}=۰} + \frac{\text{۲ ج جب ه}}{۵}\,\text{لا}$$

پس اسراع $\frac{\text{ج جب ه}}{۵}$ ہے۔

چودھویں باب پر متفرق مثالیں

۱- ایک یکساں چھڑی جس کا طول ۲ و ہے اپنے ایک سرے سے آزادانہ لٹک رہی ہے اور دوسرا سرا زمین کے قریب ہے، اب چھڑی کو زاویئی رفتار سه دی گئی ہے اور جب یہ ایک زاویۂ قائمہ میں سے گھوم جاتی ہے تو اِس کے ثابت سرے کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سب سے پہلے زمین کو مس کرنے کے وقت یہ سیدھے محل میں ہوگی اگر

$$\text{سه}^{۲} = \frac{\text{ج}}{\text{۲ و}}\left[۲ + \frac{\text{ع}^{۲}}{\text{۱+ع}}\right]$$

جہاں ع، $\frac{\pi}{۲}$ کا کوئی طاق ضعف ہے۔

۲ - ایک مستدیر قرص ایک سطح مستوی میں ایک ثابت سطح مستوی پر لڑھکتا ہے اور اس کا مرکز یکساں اسراع ف کے ساتھ حرکت کرتا ہے ۔ عاملہ قوتوں کا خطِ عمل اور مقدار معلوم کرو۔

۳ - ایک تکلا ہے جس کا نصف قطر ا ہے اور اس پر ایک چرخ لگا ہے جس کا نصف قطر ب ہے ۔ دونوں کی مجموعی کمیت ھ ہے اور جمود کا معیارِ اثر جہ ہے ۔ تکلا ایک ثابت راستہ پر جس کا میلان افق کے ساتھ ء ہے نیچے کی طرف لڑھک رہا ہے ۔ ایک رسّی جو چرخ کے گرد لپٹی ہوئی ہے اس کے نیچے کی طرف سے ہوتی ہوئی ایک ہلکی چرخی پر سے گزرتی ہے اور اس کے دوسرے سرے کے ساتھ کمیت م بندھی ہے جو انتصاباً لٹک رہی ہے، چرخی اور تکلے کے درمیان رسّی کا حصّہ راستہ کے متوازی ہے ۔ ثابت کرو کہ وزن کا اسراع

ج (ب - ا) {ھ ا جب ء + م (ب - ا)} ÷ [جہ + ھ ا^2 + م (ب - ا)^2] ہے ۔

۴ - تین یکساں کرے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ا اور کمیت م ہے ایک دوسرے کو فاصلہ کے معکوس مربع کے قانون کے مطابق کشش کرتے ہیں ۔ ابتداءً اُن کو ایک کمل طور پر کھردری افقی سطح مستوی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اُن کے مرکزوں کو ملانے والے خط اضلاع ۴ ا کا مساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ بوقتِ تصادم اُن کے مرکزوں کی رفتار

$\sqrt{\text{جہ} \frac{\text{۵م}}{\text{۱۴ا}}}$ ہوگی جہاں جہ تجاذب کا مستقل ہے ۔

۵ - کمیت م اور نصف قطر ا کا ایک یکساں کرہ ایک اُفقی سطح مستوی پر لڑھکتا ہے ۔ اگر ہوا کی مزاحمت کو کرہ کے مرکز پر عمل کرنے والی ایک افقی قوت $\frac{\text{م لہ}}{\text{ا}}$ و^2 اور اس کے گرد ایک جفت م مہ و^2 سے تعبیر کیا جائے (جہاں و مرکز کی رفتار ہے کسی آن میں) تو ثابت کرو کہ مرکز وقت ت میں جو فاصلہ طے کرتا ہے وہ

$$\frac{1}{\text{ا}} \text{لوک} [1 + \text{ا و ت}] \text{ ہے جہاں } \text{ا} = \frac{5}{7} \frac{\text{لہ} + \text{مہ}}{\text{ا}}$$

اور و ابتدائی رفتار ہے ۔

۶ - ایک یکساں کرہ ایک کھردری افقی سطح مستوی پر ایک خطِ مستقیم میں لڑھکتا ہے اور اس کے مرکز پر ایک یکساں افقی قوت ~ اس کے مرکز کی سمتِ حرکت کے مخالف عمل

کرتی ہے - ثابت کرو کہ کرہ کا مرکز اس طرح حرکت کرتا ہے گویا اس کی کمیت تمام اس پر مکثف کر دی گئی ہے اور عمل کرنے والی قوت $\frac{5}{7}$ ل ہے اور رگڑ $\frac{2}{7}$ ل ہے قوت ل کی مخالف سمت میں۔

۷ - ایک شخص ایک کھردرے کرہ پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ کرہ ایک سطح مائل (میلان ع) پر سیدھا اوپر چڑھتا جاتا ہے شخص مذکور ہمیشہ کرہ کے بالاترین نقطہ سے زاویئی فاصلہ ب پر رہتا ہے - اگر آدمی اور کرہ کی کمیتیں بالترتیب ھ اور م ہوں تو ثابت کرو کہ کرہ کا اسراع

$$\frac{\text{۵ ج}\{\text{م جب ب} - (\text{ھ} + \text{م})\ \text{جب ع}\}}{\text{۷ ھ} + \text{۵ م}\{\text{۱} + \text{جم}(\text{ع} + \text{ب})\}}$$ ہے۔

۸ - ایک مستدیر اسطوانہ جس کا نصف قطر ا ہے اور گھماؤ کا نصف قطر ک ہے نصف قطر ب کے ایک ثابت افقی اسطوانہ کے اندر لڑھکتا ہے - ثابت کرو کہ محوروں میں سے گزرنے والی سطح مستوی طول $(\text{ب} - \text{ا})\left(\text{۱} + \frac{\text{ک}^2}{\text{ا}^2}\right)$ والے سادہ مستدیر رقاص کی طرح حرکت کریگی۔

اگر ثابت اسطوانہ اپنے محور کے گرد حرکت کرنے کے لیے آزاد ہو اور اس کا مرکز ثقل اس کے محور میں ہو تو متناظر رقاص کا طول $(\text{ب} - \text{ا})(\text{۱} + \text{ن})$ ہوگا جہاں

$$\text{ن} = \frac{\frac{\text{ک}^2}{\text{ا}^2}}{\text{۱} + \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{م ک}^2}{\text{ھ ک}'^2}}$$

م اور ھ بالترتیب اندرونی اور بیرونی اسطوانوں کی کمیتیں ہیں اور ک بیرونی اسطوانہ کے گھماؤ کا نصف قطر ہے اس کے محور کے گرد۔

[دوسری صورت میں اگر باہر کا اسطوانہ وقت ت میں زاویہ سا میں سے گھومے تو دفعہ ۱۹۸ کے مطابق حرکت کی مساواتیں یہ ہونگی۔

$$\text{م}(\text{ب} - \text{ا})\,\dot{\text{فہ}}^2 = \text{ر} - \text{م ج جم فہ}،\quad \text{م}(\text{ب} - \text{ا})\,\ddot{\text{فہ}} = \text{ف} - \text{م ج جب فہ}$$

$$\text{م ک}^2\,\ddot{\text{طہ}} = -\text{ف} \times \text{ا}،\quad \text{اور}\quad \text{ھ ک}'^2\,\ddot{\text{سا}} = -\text{ف} \times \text{ب}$$

نیز ہندسی مساوات ہے $\text{ا}(\text{طہ} + \text{فہ}) = \text{ب}(\text{فہ} - \text{سا})$]۔

۹ ـــ ایک یکساں مستدیر حلقہ کے گرد ایک باریک رسّی لپٹی ہوئی ہے جو اس کے اوپر سے گزرتی ہوئی ایک چکنی چرخی پر سے گزرتی ہے جو سطح مذکور کے اوپر حلقہ کے قطر کے مساوی بلندی پر واقع ہے ـ رسّی کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک ذرّہ بندھا ہے ـ نظام کی حرکت معلوم کرو جب کہ کل حرکت ایک انتصابی سطح مستوی میں فرض کی جائے اور ثابت کرو کہ خواہ سطح مستوی چکنی ہو یا کھردری حلقہ ہمیشہ بغیر پھسلنے کے لڑھکیگا ـ

۱۰ ـــ ایک قرص ایک افقی میز پر ایک خطِ مستقیم پر لڑھکتا ہے اور قرص کی چپٹی سطح میز سے مس کرتی ہے، اگر قرص کے مرکز کی رفتار کسی آن میں و ہو تو ثابت کرو کہ یہ وقت $\frac{۲۷\,\pi\,و}{۶۴\,مہ\,ج}$ کے بعد ساکن ہو جائیگا جہاں مہ میز اور قرص کے درمیان رگڑ کی قدر ہے ـ

۱۱ ـــ چکی کا ایک مکمل طور پر کھردرا اسطوانی پاٹ ہے جس کا نصف قطر ا ہے، یہ اپنے محور کے گرد جو متوازی الافق ہے یکساں اسراع کے ساتھ گھوم رہا ہے ـ ایک کرہ اس کے کنارہ کے ساتھ مس کرتا ہے اور کرہ کا مرکز بحالتِ سکون رہتا ہے ـ ثابت کرو کہ چکی کے پاٹ کا زاویئی اسراع $\frac{۵ج}{۲ا}$ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے ـ

۱۲ ـــ ایک مکمل طور پر کھردرا گیند ایک مجوف اسطوانہ کی شکل کے اسطوانہ کے اندر ساکن ہے اور اس کو ایک ہموار سطح مستوی پر یکساں رفتار و سے کھینچا جاتا ہے ـ اگر

$$و^{۲} > \frac{۲۷}{۷}\,ج\,(ب - ا)$$

تو ثابت کرو کہ گیند رولر کے اندر پورا چکر لگائیگا، ا اور ب گیند اور رولر کے نصف قطر ہیں ـ

۱۳ ـــ ایک مجسم یکساں قرص جس کا نصف قطر ا ہے اس کے مرکز میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اور ایک کیڑا جس کی کمیت قرص کی کمیت کا $\frac{۱}{ن}$ ہے قرص کے سب سے نچلے نقطہ سے روانہ ہوتا ہے اور کنارہ پر بلحاظ کنارہ کے یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے ـ ثابت کرو کہ یہ کبھی قرص کے بالاترین نقطہ تک نہیں پہنچیگا اگر مستقل رفتار

$\frac{۲}{ن}\sqrt{۲ج\,ا\,(ن + ۲)}$ سے کم ہو ـ

۱۴ - ایک مجوف کھردرا اسطوانہ جس کا نصف قطر ا اور کمیّت ھ ہے اپنے افقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اس کے اندر کمیّت م کا ایک کیڑا رکھا گیا ہے - اگر کیڑا سب سے نچلے کون سے روانہ ہوکر اسطوانہ کے محور پر عمود وار سطح مستوی میں اسطوانہ کے لحاظ سے یکساں رفتار و کے ساتھ حرکت کرے تو ثابت کرو کہ اس میں سے اور محور میں سے گزرنے والی سطح مستوی اوپر کی طرف کھینچے ہوئے خطِ انتصابی کے ساتھ کبھی

$$\text{۲ جم}^{-1}\left[\frac{\text{و}}{\text{۲ا}}\sqrt{\frac{\text{ھ ک}^{2}}{\text{م ج ا (ھ ک}^{2}+\text{م ا}^{2})}}\right]$$

سے چھوٹا زاویہ نہیں بناتی جہاں ھ ک^{2} اسطوانہ کے جمود کا معیارِ اثر ہے اِس کے محور کے گرد -

۱۵ - ایک کھردرا پترا جس کی کمیّت ھ ہے اپنے مرکزِ ثقل میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے، اس محور کے گرد جمود کا معیارِ اثر ھ ک^{2} ہے - ابتداءً پترا متوازی الافق ہے اور حرکت سے پہلے محور سے فاصلہ ج پر کمیّت م کا ذرہ رکھ دیا گیا ہے -

ثابت کرو کہ ذرہ پترے پر پھسلنا شروع کریگا جب کہ پترا زاویہ $\text{مس}^{-1}\dfrac{\text{مہ} \times \text{ھ ک}^{2}}{\text{ھ ک}^{2}+\text{۳م ج}^{2}}$ میں سے گھومیگا، مہ رگڑ کی قدر ہے -

۱۶ - ایک یکساں شہتیر جس کی کمیّت ھ اور طول ل ہے ایک مکمل طور پر کھردری زمین پر سیدھا کھڑا ہے - اس کے اوپر کے سرے پر جو چپٹا ہے کمیّت م کا ایک وزن ساکن ہے - شہتیر اور وزن کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے - اگر شہتیر کو زمین پر گرنے دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب وزن پھسلنا شروع کریگا شہتیر کا میلان ط سمتِ انتصابی کے ساتھ مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

$$\left(\frac{\text{۴ھ}}{\text{۳}}+\text{۴م}\right)\text{جم ط} - \frac{\text{ھ}}{\text{۶مہ}}\,\text{جب ط} = \text{ھ} + \text{۲م}$$

۱۷ - ایک کھردرا اسطوانہ جس کی کمیّت ھ ہے اپنے محور کے گرد جو متوازی الافق ہے حرکت کر سکتا ہے - اس پر اس کے محور کے انتصاباً اوپر کمیّت م کا ایک ذرّہ رکھا گیا ہے اور پھر نظام کو ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ذرہ اسطوانہ پر اس وقت پھسلیگا جب کہ اسطوانہ زاویہ ط میں سے گھوم جائیگا جہاں ط مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

مہ (ھ + ۶ م) جم طہ - ھ جب طہ = ۴ م مہ٬ جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے۔

۱۸ - ایک نصف کرہ ایک چکنی افقی سطح مستوی پر قاعدہ کے بل ساکن ہے اور ایک مکمل طور پر کھردرے کرہ کو اس کے بالا ترین نقطہ پر رکھ کر ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دورانِ حرکت میں مرکزوں کو ملانے والے خط کی زاویئی رفتار اُس وقت جب کہ اس کا میلان سمتِ انتصابی کے ساتھ طہ ہو ۲ جب $\frac{طہ}{۲}$ $\left[\frac{۵ ن ج}{ج (۷ ن - ۵ جم^۲ طہ)}\right]^{\frac{۱}{۲}}$ ہوگی٬ نیز بتاؤ کہ کرہ٬ نصف کرہ سے علیحدہ ہوجائیگا جب کہ طہ ذیل کی مساوات کو پورا کریگا۔

$$۵ (۳ - \frac{۵}{ن}) جم^۳ طہ + ۲۰ جم^۲ طہ + ۷ (۱۵ - ۷ ا ن) جم طہ + ۰ ۷ (ن - ۱) = ۰$$

جہاں ج نصف قطروں کا مجموعہ ہے٬ ن نسبت ہے جو نصف کرہ اور کرہ کی مجموعی کمیتوں کو کرہ کی کمیّت کے ساتھ ہے۔

[خطی معیارِ حرکت اور توانائی کے اصولوں کو استعمال کرو]

۱۹ - ایک پتلا مجوف اسطوانہ جس کا نصف قطر و ہے اور کمیّت ھ٬ اپنے محور کے گرد جو متوازی الافق ہے آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اسی طرح ایک اور اسطوانہ جس کا نصف قطر ب اور کمیّت م ہے اپنے محور کے گرد جو اول الذکر اسطوانہ کے محور کے متوازی ہے بغیر پھسلنے کے پہلے اسطوانہ کے اندر لڑھکتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب دونوں محوروں کی سطح مستوی سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو بڑے اسطوانہ کی زاویئی رفتار سھ مساوات

$$و^۲ (ھ + م) (۲ ھ + م) سھ^۲ = ۲ ج م^۲ (و - ب) (جم طہ - جم ع)$$

سے حاصل ہوگی بشرطیکہ دونوں اسطوانے ساکن ہوں جب کہ طہ = ع

۲۰ - ایک مکمل طور پر کھردرا مجسم اسطوانہ جس کی کمیّت م اور نصف قطر ر ہے ایک اور مجسم اسطوانہ پر جس کی کمیّت ھ اور نصف قطر س ہے اور جو اپنے افقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے قتشا کلاً ساکن ہے۔ اگر م نیچے لڑھکے تو تماس کے دوران میں کسی آن میں ان کے مرکزوں کو ملانے والا خط سمتِ انتصابی کے ساتھ جو زاویہ فہ بناتا ہے وہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$(س + ر) \ddot{فہ} = \frac{۲ (ھ + م)}{۳ ھ + ۲ م} \times ج جب فہ$$

نیز ف کی وہ قیمت معلوم کرو جب کہ دونوں اسطوانے علیحدہ ہونگے ۔

۲۱ ۔ ایک ریل گاڑی کے انجن کے دو دو پہیوں کے دو زوج ہیں اور ہر ایک پہیہ کا نصف قطر لو ہے ہر زوج کے جمود کا معیارِ اثر اس کے محور کے گرد م ک۲ ہے اور انجن اگلے دُھرے پر جفت ل لگاتا ہے ۔ اگر انجن کے چلنے پر پہیوں کے دونوں زوج بغیر پھسلنے کے لڑھکنا شروع ہوں تو ثابت کرو کہ اگلے ہر پہیہ اور لائن کے درمیان جو رگڑ معرضِ عمل میں آسکتی ہے وہ $\frac{ل}{لو} \cdot \frac{ک^۲ + لو^۲}{۲ک^۲ + لو^۲}$ سے کم نہیں ہونی چاہیے ۔

۲۲ ۔ ایک سلاخ جس کی کمیت م ہے اپنے طول کی سمت میں ایک چکنی افقی سطح مستوی پر رفتار ع سے حرکت کر رہی ہے ۔ ایک اور مکمل طور پر کھردری سلاخ ہے جس کی کمیت م اور طول ۲ لو ہے اور جو پہلی سلاخ میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی میں ہے ۔ دوسری سلاخ کے ایک سرے کو آہستہ سے پہلی سلاخ پر رکھا گیا ہے ۔ اگر دوسری سلاخ کا ابتدائی میلان سمتِ انتصابی کے ساتھ عہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ اُٹھ کر عین انتصابی محل میں آجائیگی اگر

$$۳ع^۲ جب^۲ عہ = ۴ ج لو (۱ - جب عہ)(۵ + ۳ جم^۲ عہ) ۔$$

۲۳ ۔ ایک کھردرا خانہ جس کی کمیت ھ اور میلان عہ ہے ایک چکنی افقی سطح مستوی میں آزادانہ حرکت کرسکتا ہے اس کے مائل رُخ پر کمیت م کا ایک یکساں اسطوانہ رکھا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کے مرکز کا اسراع خانہ کے رُخ کے نیچے کی طرف بلحاظ اُس رُخ کے

$$۲ ج جب عہ \times \frac{ھ + م}{۳ ھ + م + ۲ م جب^۲ عہ}$$ ہوگا ۔

۲۴ ۔ بغیر کسی بیرونی قوت کے عمل کے ایک یکساں مستدیر حلقہ ایک کھردرے منحنی پر حرکت کرتا ہے ۔ منحنی کا انحنا حلقہ کے انحنا سے ہر جگہ کم ہے ۔ اگر حلقہ کو منحنی کے نقطہ ا سے بغیر گھماؤ کے پھینکا جائے اور یہ ب پر گھومنا شروع کرے تو ا اور ب پر کے عمادوں کا درمیانی زاویہ $\frac{لو ک^۲}{مہ}$ ہوگا ۔

۲۵ ۔ ایک یکساں سلاخ کا ایک سرا ایک چُول کے ذریعہ ایک پہیہ کے مرکز کے ساتھ مربوط ہے ۔ پہیہ ایک افقی کھردری سطح مستوی پر حرکت کرتا ہے اور سلاخ کا دوسرا سرا ایک چکنی

انتصابی دیوار کے ساتھ ساکن ہے جو سلاخ اور پہیہ کی سطح مستوی پر عمود وار ہے ۔ ثابت کرو کہ سمتِ انتصابی کے ساتھ سلاخ کا میلان طہ مساوات

$$\text{۹ مہ جم}^{۳}\text{طہ} + \text{۶ م جم طہ} - \text{۴ م جم عہ} = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں مہ اور م بالترتیب پہیہ اور سلاخ کی کمیتیں ہیں اور عہ ابتدائی میلان ہے سمتِ انتصابی کے ساتھ جب کہ نظام ساکن ہو۔

۲۶ - ا فٹ نصف قطر کے ایک ڈھول کے گرد ایک رسی لپیٹی گئی ہے ۔ دو پہیے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ب ہے ڈھول کے سروں کے ساتھ جڑے ہوئے ہیں اور پہیے اور ڈھول ایک جسم استوار بناتے ہیں جن کا محور مشترک ہے ۔ یہ نظام ایک ہموار زمین پر استادہ ہے اور رسی کا آزاد حصہ ڈھول کے نیچے سے گزرنے کے بعد اُفق کے ساتھ ۶۰° کا میلان رکھتا ہے ۔ اگر رسی کے ساتھ قوت ق لگائی جائے تو ثابت کرو کہ ڈھول مخالف سمت میں گھومنا شروع کرتا ہے اور اس کے مرکز کا اسراع $\dfrac{\text{ق (۲ ا - ب) ب}}{\text{۲ مہ (ب}^{۲} + \text{ک}^{۲})}$ ہوتا ہے جہاں مہ نظام کی کمیت ہے اور ک محور کے گرد اس کے گھماؤ کا نصف قطر ہے ۔

۲۷ - ایک پتلا مستدیر اسطوانہ جس کی کمیت مہ اور نصف قطر ب ہے ایک مکمل طور پر کھردری افقی سطح مستوی پر ساکن ہے اور اس کے اندر ایک مکمل طور پر کھردرا کرہ رکھا ہوا ہے جس کی کمیت م اور نصف قطر ا ہے ۔ اگر اس نظام کو اسطوانہ کے مکونوں پر علی القوائم سمت میں ہٹایا جائے تو محدود حرکت کی مساواتیں معلوم کرو اور ان کے پہلے دو تکملے حاصل کرو ۔ اگر حرکت چھوٹی ہو تو ثابت کرو کہ سادہ معادل رقاص کا طول $\dfrac{\text{۱۴ مہ (ب - ا)}}{\text{۱۰ مہ + ۷ م}}$ ہوگا

۲۸ - ایک یکساں کرہ جس کی کمیت مہ ہے کمیت م کے ایک کھردرے تختہ پر ساکن ہے اور تختہ خود ایک کھردری افقی سطح مستوی پر ساکن ہے ۔ تختہ کو دفعۃً اس کے طول کی سمت میں رفتار ع کے ساتھ حرکت دی جاتی ہے ۔ ثابت کرو کہ کرہ تختہ پر پہلے پھسلیگا اور پھر لڑھکیگا اور پورا نظام مدت $\dfrac{\text{م ع}}{\text{مہ ج (مہ + م)}}$ میں ساکن ہو جائیگا جہاں مہ ہر نقطۂ تماس پر رگڑ کی قدر ہے ۔

۲۹ - ایک تختہ کی کمیت مر ہے - اس کی اوپر کی سطح کھردری ہے اور نیچے کی چکنی - تختہ ایک چکنی افقی سطحِ مستوی پر ساکن ہے - کمیت م کے ایک کرہ کو تختہ پر رکھا گیا ہے اور تختہ کو دفعۃً رفتار و کے ساتھ اس کے طول کی سمت میں چلایا گیا ہے - ثابت کرو کہ کرہ وقت

$$\frac{\text{و}}{\left(\frac{\text{۷}}{\text{۲}}+\frac{\text{م}}{\text{مر}}\right)\text{مہ ج}}$$ میں لڑھکنا شروع کریگا -

۳۰ - ایک چکنی میز پر کمیت مر کا ایک تختہ رکھا گیا ہے جس کی اوپر کی سطح کھردری ہے اور نیچے کی چکنی - اوپر کی سطح پر کمیت م کا ایک یکساں کرہ اس طرح پھینکا گیا ہے کہ سمتِ رمی میں سے گزرنے والی انتصابی سطحِ مستوی تختہ کے مرکزِ جمود میں سے گزرتی ہے - اگر پھینکنے کی رفتار ع ہو اور ابتدائی زاویئی رفتار ابتدائی سمتِ رفتار پر علی القوائم افقی محور کے گرد سہ ہو تو ثابت کرو کہ حرکت وقت $\frac{\text{۲ مر}}{\text{۷ مر + ۲ م}}\times\frac{\text{ع - ا سہ}}{\text{مہ ج}}$ کے بعد یکساں ہوجائیگی

اور اس وقت تختہ کی رفتار $\frac{\text{۲ م}}{\text{۷ مر + ۲ م}}$ (ع - ا سہ) ہوگی -

۳۱ - ایک مکمل طور پر کھردری سطحِ مستوی یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ ایک افقی محور کے گرد جو اس کی سطحِ مستوی میں واقع ہے گھوم رہی ہے - ابتداءً جب سطحِ مستوی متوازی الافق تھی تو ایک متجانس کرہ اسے مس کرتا تھا اور گردش کے محور سے فاصلہ و پر بلحاظ تختہ کے ساکن تھا - ثابت کرو کہ وقت ت کے بعد تماس کے نقطہ کا فاصلہ گردش کے محور سے یہ ہوگا

$$\text{ا جمز}\left(\sqrt{\tfrac{\text{۵}}{\text{۷}}}\ \text{سہ ت}\right)+\frac{\sqrt{\text{۳۵}}\ \text{ج}}{\text{۱۲ سہ}^{\text{۲}}}\ \text{جبز}\left(\sqrt{\tfrac{\text{۵}}{\text{۷}}}\ \text{سہ ت}\right)-\frac{\text{۵ ج}}{\text{۱۲ سہ}^{\text{۲}}}\ \text{جب سہ ت}$$

[نیز حسبِ دفعہ ۱۵ یہ معلوم کرو کہ کرہ سطحِ مستوی سے علیحدہ کب ہوگا] -

۳۲ - سوال ماسبق میں سطحِ مستوی اپنے متوازی ایک ایسے خط کے گرد گھومتی ہے جو اس سے فاصلہ ج پر واقع ہے - جب سطحِ مستوی افق کے متوازی ہے اور گردش کے محور کے

اوپر ہے تو نصف قطر ب کے ایک کرہ کو اس کے اُوپر آہستہ سے اس طرح رکھ دیا جاتا ہے کہ اس کا مرکز محور کے انتصاباً اوپر واقع ہے، ثابت کرو کہ وقت ت میں کرہ کا مرکز حسبِ ذیل فاصلہ میں سے حرکت کریگا ۱۴۵√۳ (ج / ۱۲ س^۲ - ب / ۵ - ج / ۷) جیبز (۱۴√(۵/۷) س ت) - ۵ج / ۱۲ س^۲ جب س ت

۳۳ - ایک چھ فٹ اونچا کھلاڑی ایک چبوترہ کے کنارہ پر سے ایک جال کے اندر اپنے آپ کو سیدھا رکھتے ہوئے چھلانگ لگاتا ہے اور ارادۃً اپنا توازن توڑ دیتا ہے اُس وقت جبکہ دباؤ کا جزوِ ترکیبی اُس کی ٹانگ کے ساتھ صفر ہوجاتا ہے وہ پھسلنے کے بغیر اپنے پاؤں کا جماؤ کھو دیتا ہے۔ دورانِ افتاد میں اُس کی اُستواریت قائم رہتی ہے معقول اور ضروری مفروضات کے ساتھ ثابت کرو کہ وہ پیٹھ کے بل گریگا بشرطیکہ چبوترے سے جال کا فاصلہ تقریباً ۳۴ فٹ ہو۔

۳۴ - دو ریل کے ڈبے ہیں - ہر ایک کی کمیت م ہے، ہر ایک کے نصف قطر و والے چار پہیے ہیں اور پہیوں کے ہر جوڑے کا جمود کا معیارِ اثر ج ہے۔ یہ دونوں ڈبے جڑے ہوئے میلان عہ والی سطح مائل پر سے اُتر رہے ہیں۔ پہلے ڈبے کے اندر کمیت مَ کا بوجھ ہے اور دوسری خالی ہے ثابت ملتفی پر عمل کرنے والی قوت ق مساوات ذیل سے حاصل ہوگی ق [۲م + مَ + ۴ج / و^۲] = ۲ج (جب عہ - ن) مَ ج / و^۲ جہاں رگڑوں کی مزاحمتیں لدی ہوئی اور خالی ڈبہ دونوں کے لیے وزن کا ن گنا ہیں - اگر م = ۵ ٹن، مَ = ۱۰ ٹن و = ۱۸ انچ اور جمود کا معیارِ اثر ج ہی ہے جو نصف ٹن کا ہے ۱ فٹ پر، نیز عہ = جیب^{-۱} ۱/۱۰ اور رگڑ فی ٹن ۱۰ پونڈ کا وزن تو ق = ۴۵ ۱/۲ پونڈ۔

۳۵ - ایک یکساں وزنی قائم مستدیر اسطوانہ (نصف قطر و) کو اس کے محور کے گرد گھما کر آہستہ سے دو کھردری اُفقی پٹریوں پر جو ایک ہی لیول پر ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۲ و جب عہ ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ محور پٹریوں کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ اسطوانہ پٹریوں سے لگا رہیگا بشرطیکہ عہ < مس ^{-۱} ع، بصورت دیگر وہ ابتداءً ایک پٹری پر اُٹھیگا۔

۳۶ - ایک بلیرڈ گیند کو اس طرح مارا گیا ہے کہ وہ پھسلتا اور گھومتا ہے حتیٰ کہ حرکت یکساں ہوجاتی ہے۔ حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ گیند کا جو نقطہ چوٹی کے نیچے قطر کے ۲/۵ فاصلہ پر ہے اُس کی رفتار مقداراً دورانِ حرکت میں وہی رہتی ہے۔

پندرھواں باب

دو ابعاد میں حرکت ۔ دھکے کی قوتیں

۲۰۴ ۔ دھکے کی قوتوں کی صورت میں دفعہ ۱۸۷ کی مساواتوں کی شکل آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہے کیونکہ اگر دھکے کی قوتوں کے عمل کرنے کی مدت ت ہو تو (۱) کو تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

[م فرلا / فرت]۰ت = ∫۰ت ع لا فرت = ع لاَ

جہاں لاَ نقطہ (لا ، ما) پر عمل کرنے والی قوت کا دھکا ہے ۔ فرض کرو کہ دھکے کی قوتوں کے عمل کرنے سے عین پہلے مرکزِ جمود کی رفتاریں محوروں کے متوازی بالترتیب ۶ اور و تھیں اور بعد میں متناظر رفتاریں ۶َ اور وَ ہوگئیں ۔

تب اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

م (۶َ - ۶) = ع لاَ .... (۱)

اسی طرح م (وَ - و) = ع ماَ .... (۲)

اِن مساواتوں سے ظاہر ہے کہ کسی سمت میں کمیت م کے معیارِ حرکت کی تبدیلی جب کہ م کو مرکزِ جمود پر مکثف فرض کیا جائے سمتِ مذکور میں دھکوں کے

مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

پس مساوات (۴) کو تکمیل کرنے سے

$$\left[\text{مرک}^{2}\,\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right]^{\text{ت}} = \text{ع}\left[\text{لا}\,\text{ر}^{\text{ت}}\,\text{ما فرت} - \text{ما}\,\text{ر}^{\text{ت}}\,\text{لا فرت}\right]$$

یعنی اگر جسم کی زاویئی رفتاریں دھکوں کی قوتوں کے عمل سے پہلے اور بعد سہ اور سَہ ہوں تو

$$\text{مرک}^{2}\,(\text{سَہ} - \text{سہ}) = \text{ع}\,(\text{لامَا} - \text{مالاَ})$$

پس جمود کے مرکز کے گرد معیارِ حرکت کے معیارِ اثر میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے وہ مرکزِ جمود کے گرد بیرونی دھکوں کے معیارِ اثر کے مساوی ہوتی ہے۔

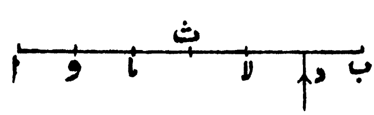
۲۰۵ - مشق ۱ - ایک یکساں سلاخ اب جس کا طول ۲ ل ہے ایک چکنی افقی سطح مستوی پر پڑی ہے، اسے ایک ایسے نقطہ پر جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ب ہے اس پر علی القوائم سمت میں ایک افقی ضرب لگائی گئی ہے جس کا دھکا د ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مرکزِ جمود کی رفتار سلاخ پر علی القوائم سمت میں دھکے کے بعد ءَ ہے، اور مرکز کے گرد زاویئی رفتار سَہ ہے تب دفعۂ ماقبل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مرءَ} = \text{د} \quad \text{اور} \quad \text{مر}\,\frac{\text{ل}^{2}}{3}\,\text{سَہ} = \text{د} \times \text{ب}$$

پس ہمیں ءَ اور سَہ معلوم ہوگئے۔

مشق ۲ - ایک یکساں ساکن سلاخ کو اس کے مرکز سے فاصلہ لا پر اس کے طول پر علی القوائم سمت میں ایک ضرب لگائی گئی ہے۔ بتاؤ کہ یہ کس نقطہ کے گرد گھومنا شروع کریگی۔



فرض کرو کہ حرکت کا مطلوبہ مرکز و ہے، ث و = ما جہاں ث جمود کا مرکز ہے اور ث ا = ث ب = ل

فرض کرو کہ صدمہ کا دھکا د ہے اور و کے گرد محصلہ زاویئی رفتار سہ ہے۔ تب ث کی محصلہ رفتار = ماسہ اس لیے دفعہ ۴۰۲ کی رُو سے

$$\text{م ما سہ} = \text{د} \qquad \ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\text{م}\left[\text{ما}^2 + \frac{\text{ل}^2}{۳}\right]\text{سہ} = \text{د}\,(\text{ما} + \text{لا}) \qquad \ldots\ldots (۲)$$

حل کرنے سے $\text{سہ} = \dfrac{۳\,\text{د} \times \text{لا}}{\text{م ل}^2}$ اور $\text{ما} = \dfrac{\text{ل}^2}{۳\,\text{لا}}$ جس سے محصلہ زاویئی رفتار اور و کا محل دونوں معلوم ہوتے ہیں۔ مرکزِ جمود ث کی رفتار = $\text{ماسہ} = \dfrac{\text{د}}{\text{م}}$

دفعہ ۴۱۵ کی رُو سے جو توانائی بالحرکت حاصل ہوتی ہے وہ

$$= \frac{1}{2}\,\text{م}\left[\text{ما}^2 + \frac{\text{ل}^2}{۳}\right]\text{سہ}^2 = \frac{\text{د}^2}{۲\,\text{م}}\,\frac{\text{ل}^2 + ۳\,\text{لا}^2}{\text{ل}^2} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

اگر سرا ا ثابت ہو تو حاصل زاویئی رفتار سہ_1 مساوات

$$\text{م}\left[\text{ل}^2 + \frac{\text{ل}^2}{۳}\right]\text{سہ}_1 = \text{د}\,(\text{ل} + \text{لا})$$

سے حاصل ہوگی یعنی $\text{سہ}_1 = \dfrac{۳\,\text{د}}{۴\,\text{م}} \times \dfrac{\text{ل} + \text{لا}}{\text{ل}^2}$ اور توانائی بالحرکت جو پیدا ہوتی ہے وہ

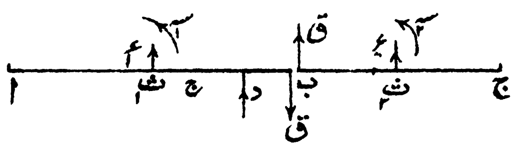
$$= \frac{1}{2}\,\text{م}\,\frac{۴\,\text{ل}^2}{۳}\,\text{سہ}_1^2 = \frac{۳\,\text{د}^2}{۸\,\text{م}}\,\frac{(\text{ل} + \text{لا})^2}{\text{ل}^2} \qquad \ldots\ldots (۴)$$

(۳) اور (۴) سے جو توانائیاں حاصل ہوتی ہیں اُن کی نسبت $= \dfrac{۴}{۳}\,\dfrac{\text{ل}^2 + ۳\,\text{لا}^2}{(\text{ل} + \text{لا})^2}$

اس نسبت کی کم سے کم قیمت صریحاً ۱ ہے جب کہ $\text{لا} = \dfrac{\text{ل}}{۳}$

پس توانائی بالحرکت سلاخ کے آزاد ہونے کی صورت میں بمقابلہ سرے ا کے ثابت ہونے کے ہمیشہ زیادہ ہوتی ہے سوائے اُس صورت کے جب کہ $لا = \frac{ل}{۲}$، اس صورت میں ا، گردش کا مرکز ہوتا ہے۔

مشق ۳ - دو یکساں سلاخوں اب، ب ج کے سروں کو آزادانہ ب پر جوڑا گیا ہے اور اُن کو ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے، اب کو اس کے مرکز سے فاصلہ ج پر، دھکے د کی ایک ضرب اس کے طول کے علی القوائم لگائی گئی ہے۔ اگر اب اور ب ج کے طول بالترتیب ۲ا، ۲ب ہوں اور اِن کی کمیتیں م اور مَ ہوں تو ضرب کے عین بعد حرکت معلوم کرو۔



فرض کرو کہ $ع_۱$ اور $سہ_۱$ خطی اور زاویئی رفتاریں ہیں دھکے کے عین بعد اب کے مرکزِ جمود کی، اسی طرح $ع_۲$، $سہ_۲$ یہی مقداریں ہیں ب ج کے لیے۔ دھکے کے وقت دونوں سلاخوں کے درمیان ب پر دھکے کی قسم کا عمل ہوگا فرض کرو کہ یہ دھکا دونوں سلاخوں پر متقابل سمتوں میں ق ہے۔ اب چونکہ سلاخ اب دھکے کے عین قبل ساکن تھی، اس لیے

$$م\, ع_۱ = د - ق \qquad \ldots\ldots (۱)$$

اور

$$م\, \frac{ا^۲}{۳}\, سہ_۱ = د \times ج - ق \times ا \qquad \ldots\ldots (۲)$$

اسی طرح ب ج کے لیے

$$مَ\, ع_۲ = ق \qquad \ldots\ldots (۳)$$

اور

$$مَ\, \frac{ب^۲}{۳} . سہ_۲ = - ق \times ب \qquad \ldots\ldots (۴)$$

نیز چونکہ سلاخیں ب پر مربوط ہیں، اس لیے ب کی حرکت دونوں سلاخوں کے

لحاظ سے محسوب کی جائے دونوں صورتوں میں وہی ہونی چاہیے

$$\text{ش}\,\text{ع}_{1}+\text{ا}\,\text{س}_{1}=\text{ع}_{2}-\text{ب}\,\text{س}_{2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۵)$$

اِن پانچ سادہ مساواتوں سے ع_{1}، س_{1}، ع_{2}، س_{2} اور ق حاصل ہوتے ہیں۔
اِن کو حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

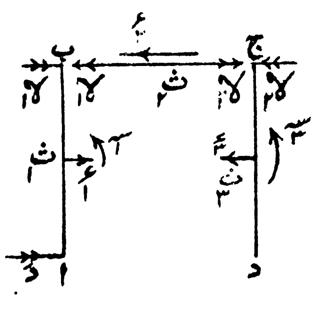
$$\text{ق}=\tfrac{1}{4}\,\text{د}\times\frac{\text{م}'}{\text{م}+\text{م}'}\left(1+\frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\right)،\quad \text{ع}_{1}=\frac{\text{د}}{\text{م}}\left[1-\frac{1}{4}\,\frac{\text{م}'}{\text{م}+\text{م}'}\left(1+\frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\right)\right]$$

$$\text{س}_{1}=\frac{3\text{د}}{\text{م}\,\text{ا}}\left[\frac{\text{ج}}{\text{ا}}-\frac{1}{4}\,\frac{\text{م}'}{\text{م}+\text{م}'}\left(1+\frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\right)\right]،\quad \text{ع}_{2}=\frac{1}{4}\times\frac{\text{د}}{\text{م}+\text{م}'}\left(1+\frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\right)$$

اور

$$\text{س}_{2}=-\frac{3}{4}\,\frac{\text{د}}{(\text{م}+\text{م}')\,\text{ب}}\left(1+\frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\right)$$

مشق ۴ ۔ تین مساوی یکساں سلاخوں اب، ب ج، ج د کو سروں ب اور ج پر اس طرح آزادانہ جوڑا گیا ہے کہ اِن سے ایک مربع کے تین اضلاع بنتے ہیں، اِن کو ایک چکنے میز پر رکھنے کے بعد سرے ا پر اب پر علی القوائم سمت میں ایک افقی ضرب جس کا دھکا د ہے لگائی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ا کی ابتدائی رفتار د کی ابتدائی رفتار کا ۱۹ گنا ہوگی اور ب اور ج پر دھکّے کی قسم کے عمل بالترتیب $\frac{5\,\text{د}}{12}$ اور $\frac{\text{د}}{12}$ ہونگے۔



نقطہ ب کی ابتدائی رفتار اب پر عمود وار ہوگی، پس ب پر تعامل ب ج کی سمت میں ہوگا، اسی طرح ج پر کا تعامل ج ب کی سمت میں ہوگا، فرض کرو کہ یہ تعامل لا_{1}، لا_{2} ہیں جیسے کہ نشان لگائے گئے ہیں، نیز فرض کرو کہ سلاخوں کی رفتاریں اور زاویئی رفتاریں ع_{1} اور س_{1}، ع_{2} اور ع_{3} اور س_{3} ہیں جیسا کہ

شکل میں دکھائی گئی ہیں ۔

ا ب کی حرکت کے لیے

م ع۱ = دَ + ر۱ ……………… (۱)

اور　م (ل²/۳) سہ۱ = (دَ − ر۱) ل ……………… (۲)

جہاں م سلاخ کی کمیت ہے اور ۲ ل ہر ایک سلاخ کا طول ہے ۔

اسی طرح ب ج کے لیے　م ع۲ = ر۱ − ر۲ ……………… (۳)

ج د کے لیے　م ع۳ = ر۲ ……………… (۴)

اور　م (ل²/۳) سہ۳ = ر۲ ل ……………… (۵)

نیز سلاخ ا ب کے نقطہ ب کی حرکت وہی ہے جو سلاخ ب ج کے نقطہ ب کی حرکت ہے ۔

∴ ع۱ − ل سہ۱ = − ع۲ ……………… (۶)

اسی طرح نقطہ ج کے لیے

ع۳ + ل سہ۳ = ع۲ ……………… (۷)

(۱) … (۵) سے (۶) اور (۷) میں مندرج کرنے سے

۵ ر۱ − ر۲ = ۲ دَ اور ر۱ = ۵ ر۲

جس سے حاصل ہوتا ہے　ر۱ = ۵دَ/۱۲ اور ر۲ = دَ/۱۲

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

ع۱ = ۱۷دَ/۱۲م ، ل سہ۱ = ۷دَ/۴م ، ع۲ = دَ/۴م ، ع۳ = دَ/۱۲م ، ل سہ۳ = دَ/۴م

∴ (نقطہ ا کی رفتار)/(نقطہ د کی رفتار) = (ع۱ + ل سہ۱)/(ل سہ۳ − ع۳) = ۱۹

مثالیں

۱- اب اور ب ج دو مساوی تشابہ سلاخیں ہیں جن کو ب پر آزادانہ جوڑا گیا ہے یہ سب ایک چکنے میز پر خطِ مستقیم میں پڑی ہیں - سرے ا کو سلاخ اب پر علی القوائم ایک ضرب لگائی گئی ہے- ثابت کرو کہ ا کی حاصل رفتار ب کی حاصل رفتار کا $۳\frac{۱}{۲}$ گنا ہوگی -

۲- دو یکساں سلاخوں اب اور ب ج کو ب پر چکنے جوڑ کے ذریعہ جوڑا گیا ہے اور ایک افقی خط میں رکھا گیا ہے - سلاخ ب ج کو ث پر اس پر علی القوائم سمت میں ضرب لگائی گئی ہے - ث کا محل معلوم کرو تاکہ اب اور ب ج کی زاویئی رفتاریں بلحاظ مقدار مساوی ہوں -

۳- دو مساوی یکساں سلاخوں اب اور اج کو سرے ا پر آزادانہ جوڑا گیا ہے اور یہ ایک چکنے میز پر ایک خطِ مستقیم میں ساکن ہیں - ب پر سلاخوں کے علی القوائم ایک ضرب لگائی گئی ہے - ثابت کرو کہ توانائی بالحرکت اُس توانائی کا $\frac{۷}{۴}$ گنا ہے جو سلاخوں کے ا پر استواراً مربوط ہونے کی صورت میں ہوتی -

۴- دو مساوی یکساں سلاخوں اب اور ب ج کو ب پر آزادانہ جوڑا گیا ہے اور وہ ا پر ایک چکنے جوڑ کے گرد آزادانہ گردش کرتی ہیں - جب سلاخیں ایک خطِ مستقیم میں ہوں تو اب کی زاویئی رفتار سہ اور ب ج کی کمیت کے مرکز کی رفتار ع ہوتی ہے - اس وقت ب ج نقطہ د پر ایک ثابت بے لچک روک کے ساتھ متصادم ہوتی ہے - ثابت کرو کہ سلاخیں ایک آن کے لیے ساکن ہو جائینگی اگر

$$ب د = ۲ و \frac{۲ ع - و سہ}{۳ ع + ۲ و سہ}$$

جہاں ۲ و ہر ایک سلاخ کا طول ہے -

۵ ۔ دو سلاخیں ا ب اور ب ج جن کے طول ۲ ل اور ۲ ب ہیں اور جن کی کمیتیں اُن کے طولوں کے متناسب ہیں ب پر ایک دوسری سے آزادانہ جڑی ہوئی ہیں اور ایک خطِ مستقیم میں پڑی ہیں ۔ سرے ا پر ایک دھکا لگایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ نظام کے آزاد ہونے کی صورت میں توانائی بالحرکت کی نسبت ج کے ثابت ہونے کی صورت میں جو توانائی بالحرکت ہوگی اس کے ساتھ (۴ل + ۳ب)(۳ل + ۴ب) : ۱۲(ل + ب)^2 ہوگی ۔

۶ ۔ تین مساوی سلاخیں ا ب، ب ج، ج د کو آزادانہ جوڑا گیا ہے اور اُن کو ایک چکنے میز پر ایک خطِ مستقیم میں رکھا گیا ہے ۔ سلاخ ا ب کے سرے ا پر اس کے طول پر عموددار سمت میں ایک ضرب لگائی گئی ہے ۔ حاصل حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ا ب کے مرکز کی رفتار ج د کی رفتار کا ۱۹ گنا ہے اور اس کی زاویئی رفتار ج د کی رفتار کا ۱۱ گنا ہے ۔

۷ ۔ تین مساوی یکساں سلاخوں کو ایک خطِ مستقیم میں رکھ کر اُن کے سروں کو آزادانہ جوڑا گیا ہے اور سلاخیں اپنے طولوں پر علی القوائم سمت میں رفتار و کے ساتھ حرکت کرتی ہیں ۔ اگر درمیانی سلاخ کے وسطی نقطہ کو دفعتہً ثابت کر دیا جائے تو بتاؤ کہ سلاخیں وقت $\frac{۴\pi ل}{۹ و}$ میں مل جائینگی جہاں ل ہر ایک سلاخ کا طول ہے ۔

۸ ۔ دو مساوی یکساں سلاخوں ا ب اور ا ج کو سرے ا پر آزادانہ جوڑا گیا ہے اور ایک دوسری پر علی القوائم محل میں ایک چکنے میز پر رکھا گیا ہے ۔ سلاخ ا ج کو ج پر سلاخ مذکور کے علی القوائم ایک ضرب لگائی گئی ہے ۔ ثابت کرو کہ ا ب اور ا ج کے وسطی نقطوں کی رفتاریں نسبت ۲ : ۷ میں ہونگی ۔

۹ ۔ دو یکساں سلاخوں ا ب اور ا ج کو سرے ا پر آزادانہ جوڑا گیا ہے اور ایک چکنے افقی میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ زاویہ ب ا ج قائمہ ہے، سلاخ ا ب کے نقطہ ب پر ایک دھکا اس پر عموددار سمت میں لگایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ا کی ابتدائی رفتار

$\frac{۷ د}{۴ مَ + م}$ ہے جہاں م اور مَ بالترتیب اب اور اج کی کمیتیں ہیں ۔

۱۰ ۔ اب اور ج د دو مساوی اور متشابہ سلاخیں ہیں جن کو ایک رسّی ب ج کے ذریعہ ملایا گیا ہے ' اب ' ب ج اور ج د ایک مربع کے تین ضلعے ہیں سلاخ اب کے نقطہ ا پر اس کے علی القوائم سمت میں ایک ضرب لگائی گئی ہے ثابت کرو کہ ا کی ابتدائی رفتار د کی ابتدائی رفتار کا ۷ گنا ہے ۔

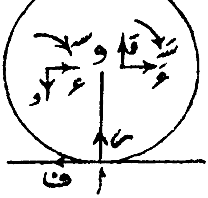
۱۱ ۔ ایک ہلکی استوار سلاخ ا ب ج کے سروں ا اور ج اور وسطی نقطہ ب پر مساوی کمیت کے تین ذرّے رکھے گئے ہیں اور یہ نظام ایک چکنے میز پر ساکن ہے ۔ ذرہ ج پر ایک ضرب سلاخ پر علی القوائم سمت میں لگائی گئی ہے ۔ ثابت کرو کہ ا کے ثابت ہونے کی صورت میں اور نظام کے آزاد ہونے کی صورت میں جو توانائیاں بالحرکت پیدا ہوتی ہیں اُن کی نسبت ۲۴ : ۲۵ ہے ۔

۱۲ ۔ ایک یکساں سیدھی سلاخ کا طول ۲ فٹ اور کمیت ۲ پونڈ ہے ۔ اس کے ہر ایک سرے پر ایک پونڈ کی کمیت اور وسطی نقطہ پر ۴ پونڈ کی کمیت ہے ۔ ایک پونڈ والی ایک کمیت کو سلاخ کے علی القوائم ضرب لگائی گئی ہے اور یہ سرا ۵ فٹ فی سکنڈ کی رفتار سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ سلاخ کا دوسرا سرا مقابل سمت میں ۲٫۵ فٹ فی سکنڈ کی رفتار سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے ۔

۲۰۶ ۔ ایک یکساں کرہ اپنے مرکز کی حرکت کی سطح مستوی پر علی القوائم محور کے گرد زاویئی رفتار سہ سے حرکت کرتا ہوا افقی سطح مستوی کے ساتھ متصادم ہوتا ہے ' اس کی حرکت میں حاصل تبدیلی معلوم کرو ۔

پہلے فرض کرو کہ سطح مستوی پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی کھردری ہے ۔

فرض کرو کہ تصادم سے پہلے اس کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع اور و ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ عَ اور وَ اجزائے ترکیبی ہیں اور سَہ زاویئی رفتار ہے تصادم کے عین بعد۔



فرض کرو کہ ر دھکے کی قسم کا عادی تعامل ہے اور ف دھکے کی قسم کی رگڑ ہے۔

تب دفعہ ۴.۲ کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے:

مر (عَ − ع) = − ف .... (۱)

مر (وَ + و) = ر .... (۲)

اور مرک۲ (سَہ − سہ) = ف × ا .... (۳)

نیز چونکہ نقطہ ا ایک آن کے لیے ساکن ہو جاتا ہے، اس لیے پھسلنے کا عمل نہ ہونے کی بناء پر

عَ − ا سَہ = ۰ .... (۴)

نیز اگر لچک کی قدر ج ہو تو

وَ = ج و .... (۵)

(۱)، (۳) اور (۴) کو حل کرنے سے

عَ = ا سَہ = (۵ع + ۲ا سہ) / ۷ .... (۶)

اور ف = مر × ۲/۷ (ع − ا سہ) .... (۷)

صورت اول، ع = ا سہ

کوئی رگڑ معرضِ عمل میں نہیں آتی، اور ع اور سہ میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

صورت دوم، ع > ا سہ

تب ف عمل کرتا ہے ←، سَہ < سہ اور عَ > ع، پس جب نقطۂ تماس ا تصادم سے پہلے اس طرف ← حرکت کر رہا ہو تو زاویئی رفتار تصادم سے کم ہو جاتی ہے، افقی رفتار بڑھ جاتی ہے اور تصادم کے بعد کرہ کی حرکت کی سمت سطحِ مستوی کے ساتھ مقابلۃً چھوٹا زاویہ بناتی ہے بہ نسبت اُس صورت کے زاویہ کے جب کہ رگڑ موجود نہ ہو۔

صورت سوم۔ ع > ا سہ

اس صورت میں ف عمل کرتی ہے ←، سَہ > سہ اور عَ < ع، اس لیے جب نقطۂ تصادم ا تصادم سے پہلے ← میں حرکت کر رہا ہو تو زاویئی رفتار بڑھ جاتی ہے اور افقی رفتار گھٹ جاتی ہے اور حرکت کی سمت تصادم کے بعد سطحِ مستوی کے ساتھ مقابلۃً بڑا زاویہ بناتی ہے بہ نسبت اُس صورت کے جب کہ کوئی رگڑ نہ ہو۔

صورت چہارم ۔ فرض کرو کہ زاویئی رفتار تصادم سے پہلے ع تھی۔ اب سہ کی علامت کو بدلنے سے حاصل ہوگا

$$\text{عَ} = \text{ا سَہ} = \frac{\text{۶۵ − ۲ ا سہ}}{\text{۷}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{۸})$$

اور

$$\text{ف} = \text{م} \times \frac{\text{۲}}{\text{۷}} (\text{ع + ا سہ}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{۹})$$

اگر $\text{ع} = \frac{\text{۲ ا سہ}}{\text{۵}}$ تو عَ اور سَہ دونوں صفر ہونگے اور کرہ سطحِ مستوی سے بغیر مروڑ کے انتصاباً اُوپر اچھلیگا۔

اگر $\text{ع} > \frac{\text{۲ ا سہ}}{\text{۵}}$ تو عَ منفی ہوگا اور کرہ تصادم کے بعد اُسی سمت میں اچھل کر جائیگا جس سے آیا تھا۔

[زمین پر ٹکر کھانے کے بعد ٹینس کی گیند کی حرکت کے ساتھ مقابلہ کرو جب کہ گیند کو کافی زیر کاٹ دیا گیا ہو]

undercut ـــ ز

ہر صورت میں تصادم کے بعد انتصابی رفتار چ و کے مساوی ہوتی ہے
اور س = م (۱ + چ) و -

مندرجۂ بالا تینوں صورتوں میں تماس کے نقطہ کو ایک آن کے لیے ساکن کرنے کے لیے ف/س < مہ جو رگڑ کی قدر ہے یعنی (۲)، (۵) اور (۷) سے

۲/۷ (ع - ا سہ) < مہ (۱ + چ) و

اگر ۲/۷ (ع - ا سہ) > مہ (۱ + چ) و تو رگڑ نقطۂ تماس کو ایک آن کے لیے ساکن کرنے کے لیے کافی نہ ہوگی، مساوات (۴) قائم نہ رہیگی اور مساواتیں (۱)، (۲)، (۳) ہو جائینگی

م (عَ - ع) = -مہ س .... (آ)

م (وَ + و) = س .... (۲َ)

اور م ک۲ (سہَ - سہ) = مہ س × ا .... (۳َ)

اِن مساواتوں کو (۵) کے ساتھ ملانے سے

عَ = ع - مہ و (۱ + چ)، وَ = چ و

اور سہَ = سہ + ۵مہ/۲ا و (۱ + چ) .... (۴َ)

صورت چہارم میں اگر رگڑ نقطۂ تماس کو سکون میں لے آئے تو ف < مہ س اس لیے (۲)، (۵)، (۹) سے ہمیں حاصل ہوگا

۲/۷ (ع + ا سہ) < مہ و (۱ + چ)

اگر ۲/۷ (ع + ا سہ) > مہ و (۱ + چ) .... (۵َ)

تو رگڑ کافی نہیں ہوگی اور ہمیں (آ)، (۲َ)، (۳َ) کے متشابہ مساواتیں حاصل ہونگی لیکن اِن میں سہ کی علامت بدل دینی ہوگی - اِن سے ملیگا

ع َ = ع - مہ و (۱+چ)، وَ = چ و

اور سَہ = ۵ مہ / ۲ ا و (۱+ چ) - سہ

(ہ) کی رُو سے اس صورت میں ع کے لیے مہ و (۱ + چ) سے کم ہونا ممکن ہوگا بشرطیکہ سہ کافی بڑا ہو۔ اس لیے اگر گیند کو کافی طور پر قوی زیر کاٹ دیا جائے تو عَ منفی ہوسکتا ہے یعنی گیند واپس اچھل سکتا ہے۔

[ٹینس کی گیند کی حرکت سے مقابلہ کرو]

۲۰۷ - ایک سلاخ کو جس کا طول ۲ ا ہے اس طرح تھاما گیا ہے کہ یہ سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ اب اسے ایک چکنی بے لچک افقی سطح مستوی پر گرا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ سرا جو سطح مستوی کے ساتھ ٹکر کھاتا ہے تصادم کے بعد فوراً اچھلیگا اگر وہ بلندی جس میں سے سلاخ گرتی ہے

۱/۱۸ ا قط عہ قم^۲ عہ (۱ + ۳ جب^۲ عہ)^۲

سے بڑی ہو۔

اگر ع اور سہ تصادم کے عین بعد انتصابی اور زاویئی رفتاریں ہوں، و تصادم سے پہلے انتصابی رفتار اور ر سطح مستوی کے تعامل کا دھکا ہو تو

م (و - ع) = ر، م ک^۲ سہ = ر ا جب عہ، اور ع - ا سہ جب عہ

= سطح مستوی کے ساتھ مس کرنے والے سرے کی انتصابی رفتار =۔

اس لیے

سہ = ع / ا جب عہ = ۳ و جب عہ / ا (۱ + ۳ جب^۲ عہ) ....(۱)

اگر یہ فرض کیا جائے کہ یہ سرا سطح مستوی کو مس کرتا رہتا ہے اور س عادی تعامل ہے جب سلاخ سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو

س ۔ م ج = م (فر۲ / فرت۲) (ا جم طہ) ' اور س × ا جب طہ = م (ا۲ / ۳) طہ̈ ...... (۲)

س کو ساقط کرنے سے

طہ̈ (۱ + ۳ جب۲ طہ) + ۳ جب طہ جم طہ طہ̇۲ = (۳ ج / ا) جب طہ ......(۳)

اب س منفی ہوتا ہے جب کہ طہ = عہ اگر طہ̈ اُس وقت منفی ہو' پس اُس وقت

مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے ۳ جب عہ جم عہ سہ۲ > (۳ ج / ا) جب عہ یعنی سہ۲ > ج / (ا جم عہ)

اس لیے (۱) سے

و۲ = (ا۲ / ۹) ((۱ + ۳ جب۲ عہ)۲ / جب۲ عہ) سہ۲ > ج ا (۱ + ۳ جب۲ عہ)۲ / (۹ جم عہ جب۲ عہ)

پس جوابِ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے ۔

مشق ۲ ۔ چار مساوی سلاخیں ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت م اور طول ۲ ا ہے' اِن کے سروں کو آزادانہ جوڑ کر ایک معین بنایا گیا ہے ۔ یہ معین اس طرح گرتا ہے کہ اس کا قطر انتصابی رہتا ہے اور ایک ثابت اُفقی چکنی سطحِ مستوی کے ساتھ اِس کے تصادم کے وقت اس کی رفتار و ہوتی ہے ۔ تصادم کے عین بعد سلاخوں کی حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اُن کی زاویئی رفتار

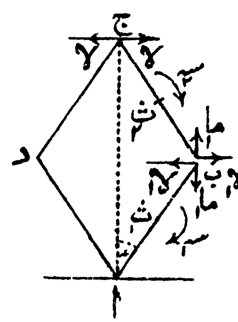
(۳ / ۲) (و جب عہ / ا (۱ + ۳ جب۲ عہ))

ہوتی ہے جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو ہر ایک سلاخ سمتِ انتصابی کے ساتھ بناتی ہے ۔

نیز ثابت کرو کہ تصادم کے پہلے جو توانائی بالحرکت تھی

تصادم سے اُس کا $\frac{1}{1+3\,\text{جب}^2\text{عہ}}$ حصہ ضائع ہوجاتا ہے۔

ظاہر ہے کہ تصادم کے بعد سلاخ اب، ا کے گرد کسی زاویئی رفتار سہ ۲ کے ساتھ گھوم رہی ہے اور ب ج، ب کے گرد زاویئی رفتار سہ ۲ کے ساتھ گھوم رہی ہے۔



چونکہ تشاکل سے ظاہر ہے کہ ج تصادم کے بعد انتصاباً حرکت کریگا اس لیے اس کی افقی رفتار صفر ہے۔

پس ۰ = ب کی افقی رفتار + ج کی افقی رفتار بلحاظ ب کے

= ۲ ا سہ۱ جم عہ + ۲ ا سہ۲ جم عہ

یعنی سہ۲ = - سہ۱ ...... (۱)

اسی طرح ث۲ کی افقی رفتار

= ۲ ا سہ۱ جم عہ + ا سہ۲ جم عہ = ا سہ۱ جم عہ

اور ث۲ کی انتصابی رفتار

= ۲ ا سہ۱ جب عہ - ا سہ۲ جب عہ = ۳ ا سہ۱ جب عہ

اگر ج پر افقی دھکا γ ہو جیساکہ نشان لگایا گیا ہے (تشاکل سے ظاہر ہے کہ یہاں کوئی انتصابی دھکا نہیں ہوگا) تو دفعہ ۱۹۲ کی مانند سلاخوں اب اور ب ج کے لیے ا کے گرد معیارِ اثر لینے سے

م $\frac{\text{ا}^2}{3}$ سہ۱ + م [ا سہ۱ جم عہ × ۲ ا جم عہ + ۳ ا سہ۱ جب عہ × ا جب عہ + $\frac{\text{ا}^2}{3}$ سہ۲] - ۲ م و ا جب عہ

= γ × ۴ ا جم عہ

یعنی ۲ سہ۱ = $\frac{\text{و}}{\text{ا}}$ جب عہ + $\frac{\gamma 2}{\text{م ا}}$ جم عہ .... (۲)

اسی طرح سلاخ ب ج کے لیے ب کے گرد معیارِ اثر لینے سے

م [۱ سہ جم عہ × ۱ جم عہ − ۳ ۱ سہ جب عہ × ۱ جب عہ + ۱²/۳ سہ] − م [−و] × ۱ جب عہ

= ل × ۲ ۱ جم عہ

یعنی   سہ (۲/۳ − ۴ جب² عہ) = − و/۱ جب عہ + ل۲/(م ۱) جم عہ .... (۳)

(۲) اور (۳) کو حل کرنے سے ہمیں سہ اور ل۲ مل جاتے ہیں اور مطلوبہ نتائج حاصل ہوجاتے ہیں۔

سلاخ ب ج کے سرے ب پر دھکّے کی قسم کے تعامل ل۱ → اور ما۱ ↑ صریحاً ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:

ل + ل۱ = م × افقی رفتار جو ث۲ کو دی جاتی ہے = م × ۱ سہ جم عہ

اور   ما۱ = م × انتصابی رفتار جو ث۲ کو دی جاتی ہے

= م (−۳ ۱ سہ جب عہ) − م [−و]

= م [و − ۳ ۱ سہ جب عہ]

نیز سلاخ ا ب کے سرے ا پر دھکا۔ اِن مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

ل۲ = م × افقی رفتار جو ث۱ کو دی جاتی ہے = م × ۱ سہ جم عہ

ا پر مجموعی تعامل ما۲ ↑ = انتصابی معیارِ حرکت کی مجموعی تبدیلی

= ۴ م و − ۸ م ۱ سہ جب عہ

اِن مساواتوں کو حل کرنے سے ملتا ہے

سہ = ۳ و/۲ ۱ × جب عہ/(۱ + ۳ جب² عہ)   ل = م و مس عہ/۲ × (۳ جم² عہ − ۱)/(۱ + ۳ جب² عہ)

ل۱ = م و/۲ × مس عہ/(۱ + ۳ جب² عہ)   ما۱ = م و/۲ × (۳ جم² عہ − ۱)/(۱ + ۳ جب² عہ)

ل۲ = ۳ م و/۲ × جب عہ جم عہ/(۱ + ۳ جب² عہ)   اور   ما۲ = ۴ م و/(۱ + ۳ جب² عہ)

نیز آخری توانائی بالحرکت

= ۱/۲ × ۲م × (۴ل^۲/۳) سہ۱^۲ + ۱/۲ × ۲م [و۱^۲ سہ۱^۲ جم^۲ عہ + ۹ و۱^۲ سہ۱^۲ جب^۲ عہ + (ل^۲/۳) سہ۱^۲]

= (۳ جب^۲ عہ)/(۱ + ۳ جب^۲ عہ) × ابتدائی توانائی بالحرکت

یہ بات قابلِ توجہ ہے کہ چونکہ ہم صرف یہ دیکھ رہے ہیں کہ دھکے سے معیارِ حرکت میں کیا تبدیلی واقع ہوئی ہے اس لیے محدود بیرونی قوتیں (اس صورت میں سلاخوں کے وزن) ہماری مساواتوں میں شامل نہیں ہوتیں کیونکہ یہ محدود قوتیں ضرب کے عمل کے قلیل وقفہ میں کوئی اثر پیدا نہیں کرتیں۔

مشق ۳- ایک جسم کی کمیّت م ہے اور اِس کے ایک معلومہ نقطہ ن پر دھکے د کی ایک ضرب لگائی گئی ہے- اگر د کی سمت میں دھکے سے عین پہلے اور عین بعد ن کی رفتاریں و اور وَ ہوں تو ثابت کرو کہ جسم کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی یعنی دھکے نے اِس پر جو کام کیا وہ ۱/۲ (و + وَ) د کے مساوی ہوگا۔

لا کے محور کو د کی سمت کے متوازی لو اور فرض کرو کہ دھکے کے عمل سے عین پہلے ولا اور وما کے متوازی مرکزِ جمود ث کی رفتاریں ہیں ۶ اور وٗ اور ث کے گرد زاویئی رفتار سہ ہے نیز فرض کرو کہ ۶َ، وَ اور سہَ یہی مقداریں ہیں دھکے کے بعد، تب دفعہ ۴۰۱ کی مساواتیں ہوجاتی ہیں:

م (۶َ - ۶) = د، م (وَ - و) = ۰ اور م ک^۲ (سہَ - سہ) = - مَا × د ......(۱)

جہاں (لَا، مَا) نقطہ ن کے محدد ہیں بلحاظ ث کے،

دفعہ ۱۹۰ کی رُو سے توانائی بالحرکت کی تبدیلی

= ۱/۲ م (۶َ^۲ + وَ^۲ + ک^۲ سہَ^۲) - ۱/۲ م (۶^۲ + و^۲ + ک^۲ سہ^۲) = ۱/۲ م (۶َ^۲ - ۶^۲) + ۱/۲ م ک^۲ (سہَ^۲ - سہ^۲)

= ۱/۲ د (۶َ + ۶) - ۱/۲ مَا × د (سہَ + سہ)، مساوات (۱) سے

= ۱/۲ د [(۶َ - مَا سہَ) + (۶ - مَا سہ)]

اب و = ث کی رفتار و لا کے متوازی + ن کی رفتار بلحاظ ث کے

= ۶ ۔ سہ × ث ن جب ث ن لا = ۶ ۔ م سہ

اور اسی طرح وَ = ۶َ ۔ مَ سہَ

پس توانائی بالحرکت کی تبدیلی = ½ د (وَ + و)

پندرھویں باب پر مثالیں

۱ ۔ ایک یکساں بے لچک سلاخ ابتداءً افق کے ساتھ کوئی زاویہ بناتی ہے ۔ یہ بلا گھماؤ گر کر ایک چکنی ثابت میخ کے ساتھ جو اس کے اوپر کے سرے سے اس کے طول کے ایک تہائی فاصلہ پر واقع ہے متصادم ہوتی ہے ثابت کرو کہ نچلا سرا انتصاباً نیچے گرنا شروع ہوتا ہے ۔

۲ ۔ ایک ہلکی رسّی کو ایک یکساں ریل[1] کے محیط کے گرد جس کا نصف قطر ا اور جس کے گھماؤ کا نصف قطر اس کے محور کے گرد ک ہے لپیٹی گئی ہے ۔ رسّی کا آزاد سرا ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہے ۔ ریل کو اٹھا کر چھوڑ دیا گیا ہے ۔ جب رسّی تن جاتی ہے تو ریل کے مرکز کی رفتار ۶ ہوتی ہے اور رسّی انتصابی ہوجاتی ہے ۔ حرکت کی تبدیلی معلوم کرو اور ثابت کرو کہ دھکے کی قسم کا تناؤ م ۶ $\frac{ک^2}{ا^2 + ک^2}$ ہوگا ۔

۳ ۔ ایک مربع تختی جس کے ضلع کا طول ۲ و ہے اور جس کے اوپر کے کنارہ کے وسطی نقطہ کے ساتھ ایک بے لچک رسی بندھی ہے رفتار ۶ کے ساتھ اس طرح گر رہی ہے کہ اس کا وتر انتصابی ہے جب یہ رسّی تن جائے تو ثابت کرو کہ دھکے کی قسم کا تناؤ $\frac{۱}{۴}$ م ۶ ہوگا، جہاں م کمیت ہے تختی کی ۔

[دفعہ ۲۰۷ مشق ۳ کے مسئلہ کی تصدیق کرو ۔]

۴ ۔ ایک مجوف گولے کی لچک کی قدر ج ہے ۔ مکمل طور پر کھردری زمین کے ساتھ ٹکر کھانے سے پہلے اس کی انتصابی رفتار ۶ اور افقی محور کے گرد اس کی زاویئی رفتار

[1] reel

سہ ہے ۔ تصادم کے بعد اس کی زاویئی رفتار معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اچھلنے کے بعد اس کا ٹپہ $\frac{\text{۴}}{\text{۵}}\ \frac{\text{ا سہ}}{\text{ج}}$ چ ع ہوگا۔

۵ ۔ ایک نامکمل لچک کا کرہ انتصاباً گرتے ہوئے ایک ثابت کھردرے نقطہ سے متصادم ہوتا ہے ۔ تصادم سب سے نچلے نقطہ سے زاویہ عہ پر واقع ہوتا ہے اور لچک کی قدر چ ہے ۔ حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ کرہ تصادم کے بعد افقاً حرکت کریگا اگر $\text{عہ} = \text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{۷ چ}}{\text{۵}}}$

۶ ۔ ایک بلیرڈ کی گیند ایک افقی میز پر ساکن ہے اور اس پر اس کے مرکز میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی میں ایک افقی ضرب لگائی گئی ہے ۔ اگر ابتدائی حرکت محض لڑھکنے پر مشتمل ہو تو میز کے اوپر نقطۂ مضروبہ کی بلندی معلوم کرو۔
[دھکے کی قسم کی رگڑ عمل نہیں کرتی، فرض کرو۔]

۷ ۔ ایک کھردرے نامکمل لچک کے گیند کو انتصاباً گرایا گیا ہے ۔ جب اس کی رفتار و ہوجاتی ہے تو ایک آدمی اپنے بلّے کو اس کی سطح مستوی میں رفتار ع کے ساتھ حرکت دیتا ہے اور اس طرح گیند پر نیچے کی سمت میں افق کے ساتھ زاویہ عہ بنانے والی خاص کاٹ لگاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ کھردری زمین پر ٹکّر کھانے سے گیند تصادم کے نقطہ سے آگے نہیں بڑھیگا،

$$\text{بشرطیکہ}\ (\text{ع} - \text{و جیب عہ})(\text{۱} - \text{جم عہ}) > (\text{۱} + \text{چ})\left(\text{۱} + \frac{\text{و}^2}{\text{ی}^2}\right)\text{و جیب عہ جم عہ}$$

۸ ۔ ایک بے لچک کرہ جس کا نصف قطر و ہے ایک مکمل طور پر کھردرے زینہ کے قدموں پر سے نیچے کی طرف لڑھک رہا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر پہلے زینہ پر مرکز کی رفتار $\sqrt{\text{ج و}}$ سے تجاوز ہو تو اس کی رفتار زینہ پر کے ہر قدم پر وہی ہوگی بشرطیکہ قدم ایسے ہوں کہ گیند کا تصادم کبھی کنارہ پر واقع نہ ہو۔
[کرہ ہر کنارہ کو فوراً چھوڑ دیتا ہے]

۹ - ایک مساوی الاضلاع مثلث یکساں سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے اور یہ اس طرح گر رہا ہے کہ اس کا ایک ضلع اوپر کی طرف اور متوازی الافق ہے۔ اگر اس ضلع کے وسطی نقطہ کو دفعۃً ثابت کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ اوپر کے جوڑوں اور نیچے کے جوڑ پر کے دھکے کی قسم کے تعاملوں کی نسبت $\sqrt{۱۳}$: ۱ ہوگی۔

۱۰ - ایک مساوی الاضلاع مثلث ا ب ج کی شکل کا ایک پترا ایک چکنی افقی سطح مستوی پر پڑا ہے۔ اسے دفعۃً مقام ا پر ب ج کی متوازی سمت میں ایک دھکا لگتا ہے جس سے ا رفتار و کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ ب اور ج کی فوری رفتاریں معلوم کرو اور پترے میں جو حرکت پیدا ہوتی ہے اُسے بیان کرو۔

۱۱ - ایک مستطیل پترا جس کے اضلاع کے طول ۲ا اور ۲ب ہیں ساکن ہے۔ اس کے ایک کونے کو پکڑ کر اس کونے کو پترے کی سطح مستوی میں معینہ رفتار و کے ساتھ چلایا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ بڑی سے بڑی زاویئی رفتار جو اس طرح پترے کو دی جا سکتی ہے وہ $\frac{۳و}{۴\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ ہے۔

۱۲ - یکساں موٹائی اور کثافت کی چار سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک مستطیل بنایا گیا ہے۔ مستطیل کی کمیت م اور اضلاع ۲ا اور ۲ب ہیں۔ مستطیل ایک متوازی الافق سطح مستوی پر پڑا ہے اور کمیت م کا ایک بے لچک ذرہ طول ۲ا والے ضلع پر کی عمودوار سمت میں حرکت کرتا ہوا اس کے مرکز سے فاصلہ ج پر ضلع مذکور سے متصادم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ تصادم سے جو توانائی بالحرکت ضائع ہوئی ہے وہ $\frac{۱}{۲}و^۲ \div \left[\frac{۱}{م} + \frac{۱}{م}\left(۱ + \frac{۳ا + ۳ب}{ا + ۳ب}\,\frac{ج^۲}{ا^۲}\right)\right]$ ہے۔ جہاں و ذرہ کی رفتار ہے بوقت تصادم۔

۱۳ - چار مساوی یکساں سلاخیں ا ب، ب ج، ج د اور د ع کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک مربع بنایا گیا ہے اور مربع مذکور ایک چکنے میز پر

پڑا ہے - سلاخ ا ب کو ا پر اس کے طول پر عمود وار سمت میں مربع کے اندر کی طرف سے ایک ضرب لگائی گئی ہے - ثابت کرو کہ ا کی ابتدائی رفتار ع کی رفتار کا ۷ گنا ہے -

۱۴ - چار یکساں سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک مستطیل بنایا گیا ہے جو ایک چکنی افقی سطحِ مستوی پر اپنے ایک قطر کی سمت میں رفتار و کے ساتھ حرکت کرتا ہوا ایک چکنی بے لچک دیوار کے ساتھ جو قطرِ مذکور کی سمت پر عمود وار ہے متصادم ہوتا ہے - ثابت کرو کہ تصادم سے توانائی میں بقدر

$$\text{و}^2 \Big/ \left\{ \frac{1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} + \frac{3\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{3\,\text{م}_1 + \text{م}_2} + \frac{3\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}{\text{م}_1 + 3\,\text{م}_2} \right\}$$

کے کمی واقع ہو جاتی ہے جہاں م_1 اور م_2 سلاخوں کی کمیتیں ہیں اور عہ وہ زاویہ ہے جو قطرِ مذکور م_1 کمیت والی سلاخ کے ساتھ بناتا ہے -

۱۵ - دو بے لچک مستدیر قرص ہیں جن کے کنارے ناہموار ہیں - ہر ایک کی کمیت م اور نصف قطر ا ہے، ان میں سے ایک قرص، زاویئی رفتار سہ کے ساتھ اپنے مرکز و کے گرد جو ایک چکنی سطحِ مستوی میں ساکن ہے حرکت کر رہا ہے، اور دوسرا قرص بغیر زاویئی رفتار کے اپنی سطحِ مستوی میں، و کی طرف رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہے - تصادم کے عین بعد حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ توانائی جو ضائع ہوتی ہے

وہ $\frac{1}{2}\,\text{م}\left(\text{و}^2 + \frac{\text{ا}^2\,\text{سہ}^2}{5}\right)$ کے مساوی ہے -

۱۶ - ایک یکساں مستدیر قرص جس کی کمیت ھ اور نصف قطر ا ہے یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ ایک چکنی سطحِ مستوی پر گھومتا ہے اور اسی سطحِ مستوی میں ایک ساکن کھردری سلاخ کے ساتھ جس کی کمیت م ہے رفتار ع کے ساتھ عماد وار حرکت کرتا ہوا متصادم ہوتا ہے - سلاخ اور قرص میں جو حرکت پیدا ہوتی ہے اُسے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ مؤخر الذکر کی زاوئیی رفتار کم ہو کر فوراً $\frac{\text{ھ} + \text{م}}{\text{ھ} + 3\,\text{م}}$ سہ ہو جاتی ہے -

۱۷ - قطع ناقص کی شکل کا ایک قرص ہے جس کی کمیّت م ہے - اِسے ایک انتصابی سطح میں مکمل طور پر کھردری افقی سطح مستوی پر رفتار و کے ساتھ گرایا گیا ہے - ثابت کرو کہ تصادم سے توانائی بالحرکت بقدر $\frac{1}{2}(1-چ^2)\,م\,و^2 \times \frac{ک^2+ع^2}{ک^2+ر^2}$ کے ضائع ہوجاتی ہے جہاں ر فاصلہ ہے قرص کے مرکز کا نقطۂ تماس سے، ع مرکزی عمود ہے مماس پر، اور چ لچک کی قدر ہے ۔

۱۸ - دو مشابہ سیڑھیاں ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ا اور کمیّت م ہے - اِن کے ایک ایک سرے کو چوٹی پر آزادانہ جوڑ کر انہیں ایک چکنے فرش پر رکھ کر حالتِ سکون سے چھوڑ دیا گیا ہے - ابتداءً اِن کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے - جب اِن کا میلان افق کے ساتھ طہ ہو جائے تو یہ طول ل کی ایک ایسی رسّی کے کس جانے سے ساکن ہوجاتی ہیں جو نظیر کے دو ڈنڈوں سے بندھی ہے ثابت کرو کہ رسّی کو جو جھٹکا لگتا ہے وہ

$$4\,م \times \frac{ا}{ل}\,مم\,طہ \sqrt{\frac{2}{3}\,ج\,ا\,(جب\,عہ - جب\,طہ)}$$ ہے ۔

۱۹ - کمیّت م کا ایک کرہ رفتار و کے ساتھ ایک مکمل طور پر کھردری سطح مائل پر جس کی کمیّت مہ اور جس کا زاویۂ میلان عہ ہے گرتا ہے - یہ سطح مائل ایک اُفقی سطح مستوی پر ساکن ہے - ثابت کرو کہ تصادم کے عین بعد کرہ کے مرکز کی انتصابی رفتار $\frac{5\,(مہ + م)\,و\,جب^2 عہ}{7\,مہ + 2\,م + 5\,م\,جب^2 عہ}$ ہوگی جب کہ سب اجسام کو مکمل طور پر بے لچک فرض کیا جائے ۔

۲۰ - ایک کرہ جس کی کمیّت م ہے ایک مکمل طور پر کھردری افقی سطح مستوی پر ساکن ہے - ایک اَور کرہ جس کی کمیّت مَ ہے رفتار و کے ساتھ انتصاباً گرتا ہوا اول الذکر کرہ کے ساتھ متصادم ہوتا ہے، دونوں کُرے بے لچک اور مکمل طور پر کھردرے ہیں اور تصادم کے نقطہ پر مشترک عماد افق کے ساتھ زاویہ جہ بناتا ہے ۔

ثابت کرو کہ گرنے والے کرہ کی انتصابی رفتار فوراً کم ہو کر

$$\text{و}\,(\text{م}+\text{مَ}) \div \left[\frac{۷}{۵}\,\text{م}\,\text{قط}^{۲}\,\text{جہ} + \text{مَ} + \frac{۲}{۷}\,\text{مَ}\,\text{مس}^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\text{جہ}}{۲}\right)\right]$$ ہوجائیگی۔

نیز بتاؤ کہ نچلا کرہ متحرک نہ ہوگا اگر جب جہ $= \frac{۲}{۵}$، لیکن ہر حالت میں اوپر کے کرہ میں گردشی حرکت پیدا ہوگی۔

سولہواں باب

فوری مرکز - زاویئی رفتاریں - تین ابعاد میں حرکت

۲۰۸ - کسی نقطہ کے مقام کو فضا میں متعین کرنے کے لیئے ہمیں نقطۂ مذکور کے تین محدد معلوم ہونے چاہییں، اس امر واقع کو بعض اوقات یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ اِس کی آزادی کے تین درجے ہیں۔

اگر ایک شرط معلوم ہو (مثلاً اس کے محددوں میں ایک ربط جس کی بنا پر یہ ایک مخصوص سطح پر حرکت کرسکیگا) تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اس کی آزادی کے دو درجے ہیں اور ایک درجہ قید کا ہے۔

اگر دو شرائط دی ہوئی ہوں (مثلاً اس کے محددوں میں دو روابط جن کی بناء پر اس کی حرکت ایک خطِ مستقیم یا خطِ منحنی پر مقید ہوگی) تو اِس کی آزادی کا ایک درجہ ہوگا اور دو درجے قید کے۔

اگر ایک استوار جسم آزادانہ حرکت کرسکتا ہو تو اِس کی آزادی کے چھ درجے ہوتے ہیں کیونکہ اس کا محل پورے طور پر متعین ہوجاتا ہے جب کہ اس کے تین نقطوں کے محل معلوم ہوں۔ اِن تین نقطوں کے نو محدد تین شرائط سے مربوط ہوتے ہیں جو کہ اِن تین نقطوں کو ملانے والے تین خطوں کے ناقابلِ تغیر طولوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ پس فی الجملہ جسم کی آزادی کے چھ درجے ہوتے ہیں۔

اگر ایک استوار جسم کا ایک نقطہ ثابت ہو تو اس کی آزادی کے ۶-۳

یعنی ۳ درجے ہونگے اور اس لیے تین درجے قید کے ہونگے۔

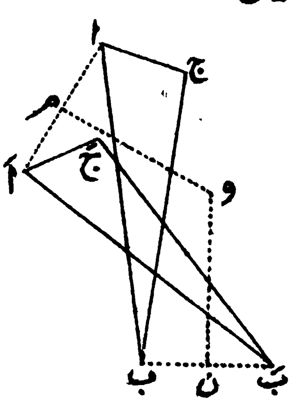
اگر ایک استوار جسم کے دو نقطے ثابت ہوں، یعنی اس کی حرکت ایک خطِ مستقیم کے گرد مقید ہو تو اس کی آزادی کا ایک درجہ ہوگا۔ کیونکہ اِن دو نقطوں کے چھ محدد پانچ مقید شرائط کے معادل ہوتے ہیں کیونکہ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ مستقل رہتا ہے۔

۲۰۹- کسی استوار جسم کا مقام متعین ہوجاتا ہے جب کہ ہمیں اس کے کسی معلومہ نقطہ ث کے تین محدد معلوم ہوں اور نیز یہ معلوم ہو کہ جسم کے اندر دو ثابت خط ث ا اور ث ب حوالہ کے محوروں کے ساتھ کیا زاویے بناتے ہیں۔

[اگر صرف ث اور ث ا دیے ہوئے ہوں تو جسم ث ا کے گرد گھوم سکیگا۔]

چونکہ دو خطوں کی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) اور (لَ، مَ، نَ) کے درمیان یہ تین ربط یعنی (۱) $ل^۲ + م^۲ + ن^۲ = ۱$، (۲) $لَ^۲ + مَ^۲ + نَ^۲ = ۱$، اور (۳) ل لَ + م مَ + ن نَ = معلومہ درمیانی زاویہ ا ث ب کا جیب التمام پائے جاتے ہیں، اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ حسب سابق چھ مقداروں یعنی تین محددوں اور تین زاویوں سے جسم کا محل متعین ہوجاتا ہے۔

۲۱۰- ایک ہی سطح مستوی میں حرکت۔



کسی آن میں خالص گھماؤ کا ایک محور ہمیشہ موجود ہوتا ہے یعنی جسم کو ایک محل سے دوسرے محل میں کسی نقطہ کے گرد حرکت انتقالی کے بغیر محض گھماؤ سے منتقل کرسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ کسی حرکت سے جسم کے تین ثابت نقطے ا، ب، ج

نئے مقامات اَ ، بَ اور جَ پر آجاتے ہیں۔ ا اَ ، ب بَ کی تنصیف ھ اور ن پر کرو اور ھ اور ن سے اِن خطوں پر بالترتیب عمود نکالو جو ایک دوسرے سے و پر ملیں۔ تب و ا = و اَ اور و ب = و بَ

تب مثلث ا و ب اور مثلث اَ و بَ ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔ پس ∠ ا و ب = ∠ اَ و بَ

اور ∠ ا و اَ = ∠ ب و بَ ....(۱)

اور ∠ و ب ا = ∠ و بَ اَ

لیکن ∠ ج ب ا = ∠ جَ بَ اَ

∴ تفریق کرنے سے

∠ و ب ج = ∠ و بَ جَ

نیز و ب = و بَ اور ب ج = بَ جَ

پس مثلث و ب ج اور و بَ جَ ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

اور اس لیے و ج = و جَ .... (۲)

اور ∠ ج و ب = ∠ جَ و بَ

یعنی ∠ ج و جَ = ∠ ب و بَ = ∠ ا و اَ ....(۳)

لہٰذا نقطہ و کے گرد ایسا گھماؤ جو ا کو اَ پر اور ب کو بَ پر لے آئے کسی نقطہ ج کو اِس کے نئے محل جَ پر لے آئیگا۔ لہٰذا و گھماؤ کا مطلوبہ مرکز ہے۔

نقطہ و ہمیشہ معلوم ہو سکیگا بشرطیکہ ا اَ اور ب بَ متوازی نہ ہوں۔ مؤخر الذکر صورت میں حرکت سادہ انتقالی حرکت ہوگی اور تناظر نقطہ و لاتناہی پر ہوگا۔

چونکہ یہ مسئلہ تمام محدود ہٹاؤں کے لئے درست ہے، اس لیے یہ بہت چھوٹے ہٹاؤں کے لیے بھی درست ہوگا۔ پس کوئی جسم جس کی حرکت ایک سطح مستوی میں مقید ہو اپنے مختلف محلوں میں کسی نہ کسی مرکز یا مرکزوں کے گرد متواتر فوری گردشوں کے ذریعہ منتقل ہو سکیگا۔

کسی خاص آن میں نقطہ و کے محل کو متعین کرنے کے لیے فرض کرو کہ کسی خاص نقطہ کے متواتر محل ا اور اَ ہیں اور کسی اَور مخصوص نقطہ کے ب اور بَ۔ ا اَ اور ب بَ کے عمودی منصف ایک دوسرے سے مطلوبہ نقطہ و پر ملینگے۔

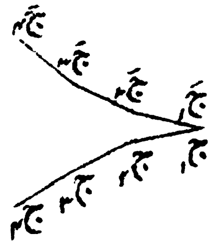
۲۱۱۔ گھماؤ کا مرکز یا محور یا تو مستقل ہوگا، جیساکہ معمولی رقاص کی صورت میں جس کا گھماؤ کا محور مستقل ہوتا ہے، یا فوری ہوگا جیساکہ ایک پہیہ کی صورت میں جو زمین پر ایک خطِ مستقیم میں لڑھک رہا ہو پہیہ کی صورت میں گھماؤ کا مرکز کسی خاص آن میں وہ نقطہ ہوتا ہے جہاں پہیہ زمین سے مس کرتا ہے۔

فوری مرکز کے دو طریق (لوکس) ہوتے ہیں، ایک تو جسم کے لحاظ سے اور دوسرا فضا کے لحاظ سے۔ مثلاً گاڑی کے پہیہ کی صورت میں تماس کے متواتر نقطے پہیہ کے کنارہ پر واقع ہوتے ہیں اس لیے پہیہ کے لحاظ سے اِن کے مختلف مقاموں کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز پہیہ کا مرکز ہے۔ فضا کے لحاظ سے مرکز کے مختلف مقامات سب کے سب زمین پر کے متواتر نقطے ہیں جہاں پہیہ زمین سے مس کرتا ہے یعنی طریق زمین پر ایک خطِ مستقیم ہے۔

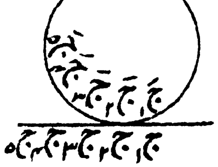
ان لوکسوں (طریق) کو جداگانہ ہم جسمی مرکز طریق اور فضائی مرکز طریق کہینگے۔

۲۱۲۔ جسم کی حرکت جسمی مرکز طریق کو (جس کے ساتھ جسم لگا ہوا خیال کیا جائے) فضائی مرکز طریق پر لڑھکنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ جسمی مرکز طریق کے متواتر نقطے جَ۱، جَ۲، جَ۳، جَ۴... ہیں اور ج۱، ج۲، ج۳، ج۴... فضائی مرکز طریق کے متواتر نقطے ہیں۔



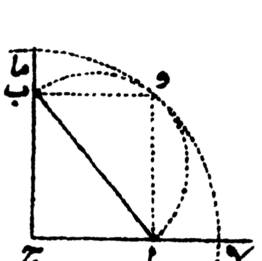
فرض کرو کہ ج۱ اور جَ۱ کسی آن میں ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ گویا جسم آنِ مذکور میں ج۱ مرکز کے گرد گھوم رہا ہے۔ جب جسم چھوٹے زاویہ ط۱ میں گھوم جائے تو نقطہ جَ۲، ج۲ پر منطبق ہوتا ہے اور گھماؤ کا نیا مرکز بن جاتا ہے، ج۲ کے گرد چھوٹے زاویہ میں سے گھمانے سے جَ۳، ج۳ پر آجاتا ہے اور پھر ج۳ کے گرد خفیف سا گھماؤ جَ۴ کو ج۴ پر لے آتا ہے۔ علیٰ ہذا القیاس۔



پہیہ کی صورت میں نقطے جَ۱، جَ۲..... پہیہ پر واقع ہوتے ہیں اور نقاط ج۱، ج۲... زمین پر واقع ہوتے ہیں۔

مشق ۱ ـ سلاخ ایک سطحِ مستوی میں اس طرح پھسل رہی ہے کہ اِس کے سرے دو علی القوائم خطوطِ مستقیم ج لا اور ج ما پر واقع ہوتے ہیں۔

ا اور ب میں سے ج لا اور ج ما پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ایک دوسرے سے و پر ملتے ہیں۔ ا اور ب کی حرکتیں ایک آن کے لیے ا لا اور ب ج کی سمت میں ہوتی ہیں۔ پس و گردش کا فوری مرکز ہے۔



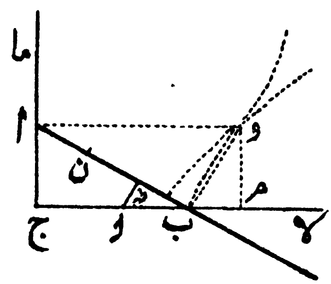
چونکہ ب و ا قائمہ ہے اس لیے و کا طریق بلحاظ جسم کے، قطر ا ب پر

ایک دائرہ ہے لہٰذا جسمی مرکز طریق ایک دائرہ ہے جس کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ اب ہے۔

چونکہ ج و = اب اس لیے و کا طریق فضا میں مرکز ج کے گرد نصف قطر اب کا ایک دائرہ ہے۔ پس سلاخ کی حرکت چھوٹے دائرہ کو اب سمیت اس سے دُگنے بیرونی دائرہ پر لڑھکانے سے حاصل ہو سکتی ہے اور دونوں دائروں کا نقطۂ تماس فوری مرکز ہوتا ہے۔

مشق ۲ ـ ایک معلومہ سلاخ کا سرا ا ایک معلومہ خطِ مستقیم ج ما پر حرکت کرنے کے لیے مجبور کیا گیا ہے، اور سلاخ خود ہمیشہ ایک ثابت نقطہ ب میں سے گزرتی ہے۔

ب ج (= د) عمود کھینچو ج ما پر، ا کی فوری حرکت ج ما کی سمت میں ہے پس فوری مرکز و عمود او پر واقع ہے۔



سلاخ کا نقطہ ب ایک آن کے لیے اب کی سمت میں حرکت کر رہا ہے، پس و، ب و پر واقع ہے جو اب پر عمود وار ہے۔

جسمی مرکز طریق ـ متشابہ مثلثوں واب اور ا ب ج سے

$$\frac{\text{اب}}{\text{او}} = \frac{\text{د}}{\text{اب}} \;\therefore\; \text{او} = \frac{\text{د}}{\text{جم}^2\,\text{واب}}$$

پس جسم کے لحاظ سے و کا طریق منحنی ہے

$$\text{ر} = \frac{\text{د}}{\text{جم}^2\,\text{طہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

فضائی مرکز طریق ـ اگر و مر عمود ہو ج ب پر اور ج مر = لا، مر و = ما

تو لا = د + ما م و ب مر = د + ما مس فہ اور ما = ج ا = د مس فہ

پس و کا طریق فضا میں مکانی م آ = ا (لا - و) ہے۔

پس حرکت منحنی (۱) کو سلاخ سمیت، مکافی پر لڑھکانے سے حاصل ہوتی ہے۔

اس حرکت کو بعض اوقات صدفی حرکت[1] کہتے ہیں کیونکہ سلاخ پر کا ہر ایک ثابت نقطہ ن صریحاً ایک صدفی مرتسم کرتا ہے جس کا قطب ب ہے۔

مشق ۳ ۔ ذیل کی صورتوں میں فوری حرکت کا مرکز معلوم کرو، نیز جسمی اور فضائی مرکز طریق دریافت کرو۔

(۱) ایک سلاخ ا ب اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اس کے سرے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر رہتے ہیں جو علی القوائم نہیں ہیں۔

(۲) ایک سلاخ ا ب اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اس کا سرا ا ایک دائرہ کا محیط مرتسم کرتا ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ل ہے اور ب کی حرکت و میں سے گزرنے والے ایک ثابت خطِ مستقیم پر مقید ہے۔ [واصل سلاخ کی حرکت]۔ ا اور ب کی رفتاروں کا مقابلہ کرو۔

(۳) دو سلاخوں ا ب اور ب د کو ب پر وصل کیا گیا ہے۔ ا ب کو ایک ثابت نقطہ ا کے ساتھ قبضہ کے ذریعہ وصل کر دیا گیا ہے اور یہ ا کے گرد گھومتی ہے۔ ب د ہمیشہ ایک چھوٹے ثابت چھلے میں سے جو ج پر واقع ہے اور ج کے گرد گھوم سکتا ہے گزرتی ہے۔ [اہتزازی اُستوانی حرکت]۔

(۴) ایک سلاخ ا ب کا وسطی نقطہ ث ایک معلومہ دائرہ پر حرکت کرنے کے لیے مقید ہے۔ نیز سلاخ ایک چھوٹے چھلے میں سے گذرتی ہے جو دائرہ کے ایک ثابت نقطہ ج پر واقع ہے، چھلا گھوم سکنے کے لیے آزاد ہے۔

[اس سے ثابت کرو کہ گھونگا منحنی[2] میں ماسکی وتر کے سروں پر کے عمادوں کے تقاطع کا طریق دائرہ ہوتا ہے]

مشق ۴ ۔ ایک تار کی ساقیں ا ج اور ج ب ایک دوسری پر علی القوائم ہیں اور یہ ایک سطح مستوی میں دو ثابت دائروں پر پھسلتی ہیں۔ ثابت کرو کہ فضا میں فوری مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے اور اس کا طریق جسم میں ایک دائرہ ہے جس کا نصف قطر فضائی مرکز طریق کے نصف قطر کا دو چند ہے۔

[2] Limacon   [1] Conchoidal motion

مشق ۵۔ ایک تپلی مستقیم سلاخ کسی طرح سے ایک سطح مستوی میں حرکت کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ کسی آن میں اس کے تمام ذرّوں کی حرکت کی سمتیں ایک مکافی کے مماس ہوتے ہیں ۔

مشق ۶۔ اب، ب ج، ج د تین سلاخیں ہیں جو ب اور ج پر مربوط ہیں ۔ سرے ا اور د ثابت ہیں اور سلاخیں ایک سطح مستوی میں حرکت کر سکتی ہیں ۔ ثابت کرو کہ سلاخوں اب اور ج د کی زاویئی رفتاروں کی نسبت

$$\frac{\text{ب و} \times \text{د ج}}{\text{اب} \times \text{ج و}} \text{ ہے}$$

جہاں و، اب اور ج د کا نقطۂ تقاطع ہے ۔

۲۱۳ ۔ فوری مرکز کا مقام تحلیلی طریق پر آسانی سے متعین ہو سکتا ہے ۔ فرض کرو کہ ع اور و جسم کے مرکز ثقل ث کی رفتاریں ہیں محوروں کے متوازی اور سہ زاویئی رفتار ہے ث کے گرد، تب کسی نقطہ ن کی رفتاریں جس کے محدد بلحاظ ث کے لا اور ما ہیں اور ن ث محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے یہ ہونگی:

ع ۔ ن ث × جب طہ × سہ اور و + ن ث × جم طہ × سہ محوروں کے متوازی

یعنی ع ۔ ما سہ اور و + لا سہ

یہ صفر ہونگی اگر لا = ۔ $\frac{\text{و}}{\text{سہ}}$ اور ما = $\frac{\text{ع}}{\text{سہ}}$

صفر اسراع والے مرکز کے محدد بھی آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں ۔ کیونکہ کسی نقطۂ ن کے اسراع بلحاظ ث کے ہونگے ن ث سہ۲ سمت ن ث میں اور ن ث × سہ̇ سمت ن ث پر عمود وار سمت میں ۔

پس ن کا اسراع محور و لا کے متوازی

= ع̇ ۔ ن ث × سہ۲ × جم طہ ۔ ن ث × سہ̇ جب طہ = ع̇ ۔ سہ۲ لا ۔ سہ̇ ما

اور ن کا اسراع محورِ و ما کے متوازی

= وَ - ن ث × سہ^۲ × جب طہ + ن ث × سہَ جم طہ = وَ - سہ^۲ ما + سہَ لا

اور یہ دونوں صفر ہونگے اگر نقطہ لا، ما ایسا ہو کہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{ءَ سہ}^2 - \text{وَ سہَ}} = \frac{\text{ما}}{\text{وَ سہ}^2 + \text{ءَ سہَ}} = \frac{1}{\text{سہ}^4 + \text{سہَ}^2}$$

۴۱۲ - اگر نقطہ ن جس کے محدد بلحاظ ث کے لا اور ما ہیں فوری مرکز ہو اور ل قوتوں کا معیارِ اثر ہو اس نقطہ کے گرد، تو دفعہ ۱۹۲ کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ل} = \text{م} \left[\text{ک}^2 \text{سہَ} + \text{ما ءَ} - \text{لا وَ} \right]$$

جہاں م ک^۲ جمود کا معیارِ اثر ہے ث کے گرد

$$= \text{م} \left[\text{ک}^2 \text{سہَ} + \frac{\text{ءَءَ} + \text{وَوَ}}{\text{سہ}} \right] = \frac{\text{م}}{2\,\text{سہ}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left[\text{ک}^2 \text{سہ}^2 + \text{ءَ}^2 + \text{وَ}^2 \right]$$

اب چونکہ نقطہ ن فوری مرکز ہے، اس لیے

$$\text{ءَ}^2 + \text{وَ}^2 = \text{ن ث}^2 \times \text{سہ}^2$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{\text{م}}{2\,\text{سہ}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left[\text{ک}^2 \text{سہ}^2 + \text{ن ث}^2 \text{سہ}^2 \right] = \frac{\text{م}}{2\,\text{سہ}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left[\text{ک}_1^2 \text{سہ}^2 \right] \ldots\ldots (1)$$

جہاں ک₁ گھماؤ کا نصف قطر ہے فوری مرکز کے گرد

(۱) اگر فوری مرکز جسم کے اندر ثابت ہو اور بنائً علیہ ک₁^۲ مستقل ہو تو

یہ مقدار = م ک₁^۲ سہَ

(۲) اگر ن ث (= ر) مستقل نہ ہو تو مقدار (۱)

$$= \frac{\text{م}}{2\,\text{سہ}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left\{ (\text{ک}^2 + \text{ر}^2) \text{سہ}^2 \right\} = \text{م} (\text{ک}^2 + \text{ر}^2) \text{سہَ} + \frac{\text{م}}{2\,\text{سہ}} \times 2\, \text{ر رَ سہ}^2$$

$$= \text{م ک}_1^2 \text{سہَ} + \text{م ر رَ سہ}.$$

اب اگر مقداریں ر اور سہ ایسی ہوں کہ ان کے مربعے اور حاصل ضرب نظر انداز ہو سکیں (مثلاً چھوٹے اہتزاز کی صورت میں) تو یہ مقدار ہو جاتی ہے م رک$^{۲}_{۱}$ سہ، پس چھوٹے اہتزاز کی صورت میں فوری مرکز کے گرد معیارِ حرکت کے معیارِ اثروں کی مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{سہ} = \frac{\text{ل}}{\text{م رک}_{۱}^{۲}} = \frac{\text{معیارِ حرکت کا معیارِ اثر فوری مرکز (ے) کے گرد}}{\text{جمود کا معیارِ اثر فوری مرکز ے کے گرد}}$$

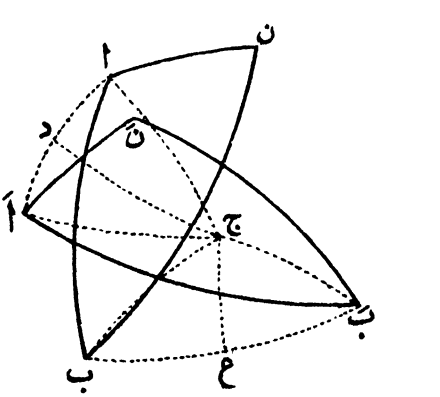
جہاں چھوٹی مقداروں کے مربعوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

یعنی جہاں تک چھوٹے اہتزازوں کا تعلق ہے ہم فوری مرکز کو فضا میں ثابت تصور کر سکتے ہیں۔

۲۱۵۔ تین ابعاد میں حرکت۔

ایک استوار جسم کا ایک نقطہ و ثابت ہے۔ ثابت کرو کہ جسم کو ایک محل سے کسی دوسرے محل میں ایک مناسب محور کے گرد گھمانے سے منتقل کر سکتے ہیں۔

و سے جسم کے کسی دو معلومہ نقطوں عہ اور بہ تک دو نصف قطر کھینچو۔ اور فرض کرو کہ یہ مرکز و والی کسی کروی سطح سے ا اور ب پر ملتے ہیں، نیز فرض کرو کہ جسم کے دوسرے محل میں ا اور ب بالترتیب اَ اور بَ پر چلے جاتے ہیں۔



ااَ اور ب بَ کی تنصیف د اور ع پر کرو اور فرض کرو کہ د اور ع میں سے گزرنے والے بڑے دائرے جو ااَ اور ب بَ

پر عمود وار کھینچے جائیں ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں۔
تب

ج ا = ج اَ ، ج ب = ج بَ اور ا ب = اَ بَ

∴ ∠ ا ج ب = ∠ اَ ج بَ

اس لیے ∠ ا ج اَ = ∠ ب ج بَ یعنی و ج کے گرد وہی گردش جو ا کو اَ پر لے آتی ہے ب کو بَ پر لے آئیگی۔

اب کسی استوار جسم کا محل متعین ہو جاتا ہے جب کہ اس پر کے تین نقطوں کا مقام معلوم ہو جائے اور چونکہ تین نقطے و، ا، ب خط و ج کے گرد ایک ہی گردش سے اپنے تین نئے محلوں و، اَ، بَ پر آجاتے ہیں، اس لیے ظاہر ہے کہ اِسی گردش سے کوئی اور نقطہ ن اپنے نئے محل میں آجائیگا۔

۲۱۶ - اب ہم و کے ثابت ہونے کی شرط کو اڑا دیتے ہیں اور جسم کی نہایت عام حرکت پر غور کرتے ہیں، فرض کرو کہ جسم کے نئے محل میں و کا مقام وَ ہو جاتا ہے۔

تمام جسم کو بغیر گھمانے کے ایسی انتقالی حرکت دو کہ و، وَ پر آجائے۔ اب اگر وَ کو ثابت رکھا جائے تو کسی محور وَ ج کے گرد جسم کی حرکت گردشی یا گھماؤ کی حرکت جو ا اور ب کو اپنے نئے مقاموں پر لے آئے جسم کے کسی اور نقطہ کو اس کے نئے محل میں لے آئیگی۔

پس عام طور پر کسی استوار جسم کا عام سے عام ہٹاؤ ترکیب یافتہ اور معادل ہوتا ہے اِن دو ہٹاؤں کے (۱) کسی حرکتِ انتقالی کے جس سے ہر ذرہ کی حرکتِ انتقالی وہی ہو جو کسی مفروضہ نقطہ و کی ہے اور (۲) و میں سے گزرنے والے کسی محور کے گرد ایک حرکتِ گردشی کے۔

یہ دونوں حرکتیں صریحاً ایک دوسری سے غیر متعلق ہیں، اس لیے کسی ترتیب سے یا ایک ساتھ وقوع پذیر ہو سکتی ہیں۔

۲۱۷ - کسی جسم کی زاویئی رفتاریں ایک سے زیادہ

محوروں کے گرد ۔ ۱۶ لا انتہا چھوٹے گھماؤ ۔

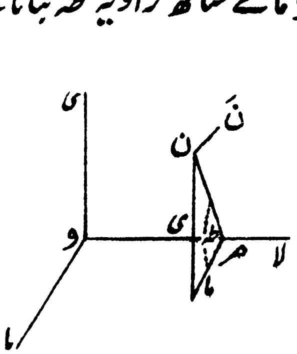
اگر کسی جسم کی زاویئی رفتار کسی محور کے گرد سہ ہو تو اس سے یہ مراد ہے کہ جسم مذکور کا ہر ایک نقطہ اس کے اُس محل سے جو وقت ت پر ہو اُس محل میں آجائیگا جو وقت ت + مف ت پر ہو جب کہ جسم کو محورِ مذکور کے گرد زاویہ سہ مف ت میں سے گھمایا جائے ۔

جب کسی علی القوائم محوروں و لا ، و ما اور و ی کے گرد ایک جسم کی زاویئی رفتاریں بالترتیب سہ، سہ اور سہ ہوں تو اِس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ وقت مف ت کے تین متواتر وقفوں میں جسم اِن محوروں کے گرد بالترتیب زاویوں سہ مف ت ، سہ مف ت اور سہ مف ت میں گھومتا ہے ۔

[زاویئی رفتار سہ کو مثبت تصور کیا جاتا ہے جب کہ اس کا اثر جسم کو و ما سے و ی کی طرف گھمانے کی طرف ہو ۔ اسی طرح سہ اور سہ کو مثبت اس صورت میں تصور کیا جاتا ہے جب کہ اِن کا میلان جسم کو بالترتیب و ی سے و لا کی طرف اور و لا سے و ما کی طرف گھمانے کا ہو ۔ یہ رواج بالعموم مسلم ہے]

اگر مف ت اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کا مربع نظر انداز کیا جاسکے تو یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ یہ گھماؤ خواہ کسی ترتیب سے واقع ہوں اس سے کچھ اثر نہیں پڑتا ۔ لہٰذا اِن کو ہم ایک ساتھ وقوع پذیر ہوتا ہوا فرض کرسکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ن جسم کا کوئی نقطہ (لا ، ما ، ی) ہے ، ن م عمود کھینچو و لا پر اور فرض کرو کہ ن م سطح مستوی لا و ما کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے ۔ تب



ما = م ن جم طہ ، ی = م ن جب طہ

فرض کرو کہ و لا کے گرد گھماؤ سہ مف ت واقع ہوتا ہے ۔ اس لیے ن ، نَ پر چلا جاتا ہے جس کے محدد ہیں

لا ، ما + مف ما ، ی + مف ی

تب ما + مف ما = مرن جم (طہ + سہ مف ت)

= مرن (جم طہ - جب طہ × سہ مف ت)

= ما - ی سہ مف ت

جب کہ مف ت کی ایک سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

اسی طرح ی + مف ی = مرن جب (طہ + سہ مف ت)

= مرن (جب طہ + جم طہ × سہ مف ت)

= ی + ما سہ مف ت

پس و لا کے گرد گھماؤ سہ مف ت سے نقطہ (لا، ما، ی) ہٹ کر نقطہ

(لا، ما - ی سہ مف ت، ی + ما سہ مف ت) ......(۱)

پر چلا جاتا ہے۔

اسی طرح و ما کے گرد گھماؤ سہ مف ت سے نقطہ (لا، ما، ی) ہٹ کر نقطہ

(لا + ی سہ مف ت، ما، ی - لا سہ مف ت) ......(۲)

پر چلا جاتا ہے۔

اسی طرح و ی کے گرد گھماؤ سہ مف ت سے نقطہ (لا، ما، ی) ہٹ کر نقطہ

(لا - ما سہ مف ت، ما + لا سہ مف ت، ی) ......(۳)

پر چلا جاتا ہے۔

۲۱۸ - اب جسم کو یہ تین گھماؤ سہ ۱ مف ت، سہ ۲ مف ت، سہ ۳ مف ت محوروں و لا، و ما، و ی کے گرد یکے بعد دیگرے دو۔

(۱) کی رُو سے گھماؤ سہ ۱ مف ت نقطہ ن (لا، ما، ی) کو نقطہ ن ۱

(لا، ما - ی سہ مف ت، ی + ما سہ مف ت) پر لے جاتا ہے -
(۲) کی رو سے گھماؤ سہ مف ت سے نقطہ ن، نقطہ ن پر یعنی

[لا + (ی + ما سہ مف ت) سہ مف ت، ما - ی سہ مف ت،

ی + ما سہ مف ت - لا سہ مف ت]

یعنی [لا + ی سہ مف ت، ما - ی سہ مف ت، ی + (ما سہ - لا سہ) مف ت]

(مف ت کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے) پر چلا جاتا ہے -

بالآخر و ی کے گرد گھماؤ سہ مف ت نقطہ ن کو ن پر

یعنی [لا + ی سہ مف ت - (ما - ی سہ مف ت) سہ مف ت،

ما - ی سہ مف ت + (لا + ی سہ مف ت) سہ مف ت، ی + (ما سہ - لا سہ) مف ت]

یعنی مف ت کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے

[لا + (ی سہ - ما سہ) مف ت، ما + (لا سہ - ی سہ) مف ت،

ی + (ما سہ - لا سہ) مف ت]

پر لے جاتا ہے -

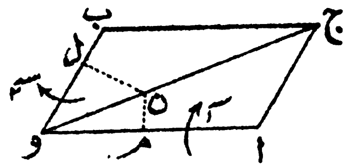
اس نتیجہ کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ اگر مف ت کے مربعوں کو نظر انداز کیا جائے تو محوروں کے گرد حرکتِ گردشی کسی ترتیب میں واقع ہوئی فرض کی جا سکتی ہے -

پس جب کوئی جسم، کسی آن میں، تین فوری زاویئی رفتاریں رکھتا ہو تو ہم گردشی حرکتوں کو کسی ترتیب سے وقوع پذیر ہوتی ہوئی اور بنا بر علیہ ایک ساتھ وقوع پذیر ہوتی ہوئی تصور کر سکتے ہیں - اگر گھماؤ محدود مقدار کے ہوں تو یہ بیان درست نہیں جیسا کہ دفعہ ۲۲۵

سے ظاہر ہوگا۔

۲۱۹ ۔ اگر کوئی جسم دو معلومہ خطوطِ مستقیم کے گرد جو بلحاظ سمت اور مقدار کے و ا اور و ب سے تعبیر ہوں بالترتیب زاویئی رفتاریں سہ۱ اور سہ۲ رکھتا ہو تو حاصل زاویئی رفتار خط و ج کے گرد ہوگی جہاں و ج متوازی الاضلاع و ا ج ب کا قطر ہے اور بلحاظ مقدار کے بھی و ج سے تعبیر ہوگی۔

کسی نقطہ ن پر غور کرو جو و ج پر واقع ہو اور ن م اور ن ل بالترتیب و ا اور و ب پر عمود کھینچو۔



و ا اور و ب کے گرد گھماؤ سہ۱ مف ت اور سہ۲ مف ت نقطہ ن کو کاغذ کی سطح مستوی پر عمود وار، جس تھوڑے سے فاصلہ میں سے ہٹا دینگے وہ

= - ن م × سہ۱ مف ت + ن ل × سہ۲ مف ت

= ل [- ن م × و ا + ن ل × و ب] مف ت = ۲ ل [- △ ن و ا + △ ن و ب] مف ت = ۰

پس ن اور اس لیے و ج پر کا ہر ایک نقطہ ساکن ہے۔

پس و ج لازماً حاصل گھماؤ کا محور ہوگا کیونکہ ہم دفعہ ۲۱۵ کی رُو سے جانتے ہیں کہ ہر حرکت کے لیے گھماؤ کا ایک خاص محور ہوتا ہے۔

اگر و ج کے گرد حاصل زاویئی رفتار سہ ہو تو کسی عام نقطہ (فرض کرو) ا کی حرکت وہی ہوگی خواہ ہم اس کی حرکت کو و ج کے گرد گھماؤ کی حرکت پر مبنی خیال کریں، یا و ا اور و ب دونوں کے گرد۔

پس سہ × ا سے و ج پر عمود = سہ۲ × ا سے و ب پر عمود

∴ سہ × و ا × جب ا و ج = سہ۲ × و ا × جب ا و ب

$$\therefore \frac{\text{سہ}_1}{\text{سہ}_2} = \frac{\text{جب اوب}}{\text{جب اوج}} = \frac{\text{جب واج}}{\text{جب اوج}} = \frac{\text{وج}}{\text{اج}} = \frac{\text{وج}}{\text{وب}}$$

پس جس پیمانہ پر سہ۱، وب سے تعبیر ہوتا ہے یا سہ۲، وا سے تعبیر ہوتا ہے اُسی پیمانہ پر وج کے گرد زاویئی رفتار سہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

پس زاویئی رفتاریں اُسی کلیہ کے مطابق ترکیب پاسکتی ہیں جس کے مطابق قوتوں یا خطی رفتاروں کو ترکیب دیا جاتا ہے یعنی متوازی الاضلاع کا کلیہ۔

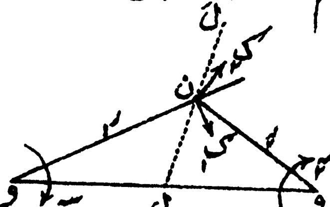
اسی طرح جیسے ابتدائی سکونیات یا علمِ حرکت میں ہیں زاویئی اسراعوں کا متوازی الاضلاع اور زاویئی رفتاروں اور اسراعوں کے متوازی السطوح حاصل ہوسکتے ہیں۔

پس کسی خط ون کے گرد کوئی زاویئی رفتار سہ معادل ہوتی ہے خط ولا کے گرد زاویئی رفتار سہ جم عہ کے (جہاں ∠ لاون = عہ) اور نیز معہ، خط وما کے گرد زاویئی رفتار سہ جب عہ کے۔

نیز تین قائم محوروں ولا، وما اور وی کے گرد زاویئی رفتاریں سہ۱، سہ۲ اور سہ۳ معادل ہیں مجموعی طور پر ایک واحد زاویئی رفتار سہ کے (جہاں $\text{سہ}^2 = \text{سہ}_1^2 + \text{سہ}_2^2 + \text{سہ}_3^2$) ایک ایسے خط کے گرد جس کی سمتی جیوب التمام ہیں $\frac{\text{سہ}_1}{\text{سہ}}$ ، $\frac{\text{سہ}_2}{\text{سہ}}$ اور $\frac{\text{سہ}_3}{\text{سہ}}$

۲۲۰ - ایک جسم کی زاویئی رفتاریں دو متوازی محوروں کے گرد سہ۱ اور سہ۲ ہیں - حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح مستوی جسم کے کسی نقطہ ن میں سے گزرتی ہے اور دونوں متوازی محوروں پر عمود وار ہے اور ان سے بالترتیب و۱ اور و۲ پر ملتی ہے۔



تب ن کی رفتاریں ہیں:-

ر سہ۱ خط ن ک۱ کی سمت میں جو و۱ن پر عمود وار ہے اور ر سہ۲ خط ن ک۲ کے ساتھ جو و۲ن پر عمود وار ہے۔

و۱ و۲ پر نقطہ ل ایسا لو کہ سہ۱ × و۱ل = سہ۲ × ل و۲۔

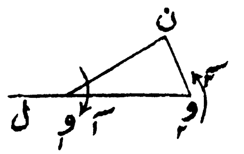
ن کی رفتاریں ہیں سہ۱ × ن و۱ اور سہ۲ × ن و۲ بالترتیب ن و۱ اور ن و۲ پر عمود وار۔

پس معمولی قواعد سے ان کا حاصل ہوتا ہے (سہ۱ + سہ۲) ن ل خط ن ل پر عمود وار۔

پس ن اس طرح حرکت کرتا ہے گویا کہ ل کے گرد اس کی زاویئی رفتار (سہ۱ + سہ۲) ہے۔

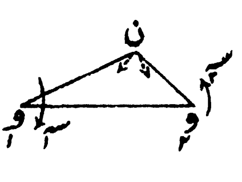
پس دو متوازی محوروں و۱ اور و۲ کے گرد دو زاویئی رفتاریں سہ۱ اور سہ۲ معادل ہیں ایک زاویئی رفتار سہ۱ + سہ۲ کے ایک ایسے محور کے گرد جو فاصلہ و۱ و۲ کو بالعکس سہ۱ : سہ۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

۲۲۱ — اگر زاویئی رفتاریں مخالف سمت میں ہوں اور سہ۱ > سہ۲ تعداداً تو ل، و۱ و۲ کو خارجاً تقسیم کرتا ہے اس طرح کہ سہ۱ × و۱ل = سہ۲ × و۲ل اور حاصل زاویئی رفتار = سہ۱ − سہ۲



مستثنیٰ صورت — اگر زاویئی رفتاریں مخالف اور تعداداً مساوی ہوں تو ل لاتناہی پر ہوگا اور حاصل زاویئی رفتار صفر ہوگی۔

اس صورت میں حاصل حرکت خطی رفتار ہوگی۔



کیونکہ ن کی رفتاریں و۱ن اور ن و۲ پر عمود وار ہونگی اور ان کے متناسب ہونگی اور اس لیے اس کی حاصل رفتار و۱ و۲ پر عمود وار اور اس کے متناسب ہوگی یعنی یہ

ہوگی

سہ$_1$ × و$_1$و$_2$ ↓

متبادل ثبوت ۔ ن کی رفتار و$_1$و$_2$ کے متوازی

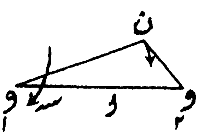
= سہ$_1$ × و$_1$ن جب ن و$_1$و$_2$ - سہ$_2$ × و$_2$ن × جب ن و$_2$و$_1$ = ۰

اور اِس کی رفتار و$_1$و$_2$ پر عمود وار

= سہ$_1$ × و$_1$ن جم ن و$_1$و$_2$ + سہ$_2$ × و$_2$ن جم ن و$_2$و$_1$ = سہ$_1$ × و$_1$و$_2$ ↓

۲۲۲ ۔ کسی محور کے گرد کوئی زاویئی رفتار سہ معادل ہوتی ہے زاویئی رفتار سہ کے ایک ایسے محور کے گرد جو اوّل الذکر محور کے متوازی اس سے فاصلہ ا پر ہو معہ خطی رفتار سہ × ا کے۔

فرض کرو کہ یہ دونوں محور کاغذ کی سطح مستوی سے و$_1$ اور و$_2$ پر ملتے ہیں اور اس پر عمود وار ہیں۔



و$_1$ کے گرد گھماؤ سہ کی وجہ سے کاغذ کی سطح مستوی میں کسی نقطہ ن کی رفتار

= سہ × و$_1$ن عمود وار و$_1$ن پر

اور یہ رفتاروں کے مثلث کی رُو سے معادل ہے رفتاروں سہ × و$_1$و$_2$ اور سہ × و$_2$ن کے جو بالترتیب و$_1$و$_2$ پر اور و$_2$ن پر ایک ہی رُخ میں عمود وار ہیں۔

= سہ × ا ↓ جمع رفتار سہ × و$_2$ن کے جو و$_2$ن پر عمود وار ہے۔

پس کسی نقطہ ن کی رفتار جو و$_1$ کے گرد زاویئی رفتار سہ کی وجہ سے ہو معادل ہوتی ہے اُس رفتار کے جو و$_2$ کے گرد اُسی زاویئی رفتار سہ کی وجہ سے ہو جمع خطی رفتار سہ × و$_1$و$_2$ کے جو و$_1$و$_2$ کی علی القوائم سمت میں ہو۔

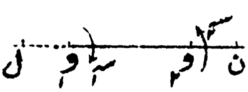
۲۲۳ ۔ عملی صورت میں دفعات ۲۲۰ ۔۔۔ ۲۲۲ کے نتائج نقطہ ن کو و$_2$ پر لینے سے نہایت آسانی سے یاد رکھے جا سکتے ہیں۔

مثلاً (۱) ن کی رفتار = سہ$_1$ × و$_1$ن + سہ$_2$ × و$_2$ن

= سہ$_1$ (و$_1$و$_2$ + و$_2$ن) + سہ$_2$ × و$_2$ن = (سہ$_1$ + سہ$_2$) (و$_2$ن + $\frac{\text{سہ}_1}{\text{سہ}_1 + \text{سہ}_2}$ × و$_1$و$_2$)

= (سہ$_1$ + سہ$_2$) × ل ن، جہاں ل و$_2$ = $\frac{\text{سہ}_1}{\text{سہ}_1 + \text{سہ}_2}$ × و$_1$و$_2$

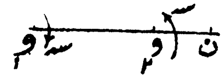
(۲) ن کی رفتار = سہ$_1$ × و$_1$ن − سہ$_2$ × و$_2$ن



= سہ$_1$ (و$_1$و$_2$ + و$_2$ن) − سہ$_2$ × و$_2$ن = (سہ$_1$ − سہ$_2$) [و$_2$ن + $\frac{\text{سہ}_1}{\text{سہ}_1 - \text{سہ}_2}$ × و$_1$و$_2$]

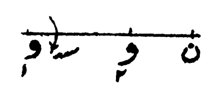
= (سہ$_1$ − سہ$_2$) × ل ن، جہاں و$_2$ل = $\frac{\text{سہ}_1}{\text{سہ}_1 - \text{سہ}_2}$ × و$_1$و$_2$

(۳) ن کی رفتار = سہ × و$_1$ن − سہ × و$_2$ن



= سہ × و$_1$و$_2$ = ایک مستقل رفتار و$_1$و$_2$ پر عمود وار

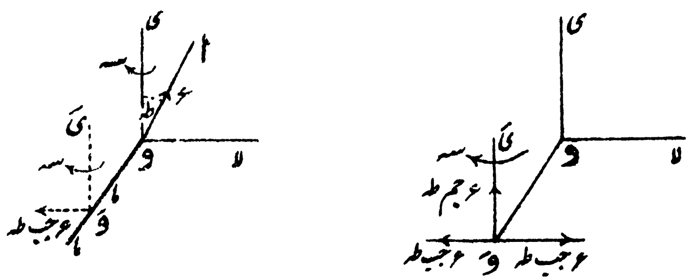
(۴) ن کی رفتار = سہ × و$_1$ن = سہ × و$_1$و$_2$ + سہ × و$_2$ن اور اس لیے معادل



ہے ایک خطی رفتار سہ × و$_1$و$_2$ کے جو و$_1$و$_2$ پر عمود وار ہے بمع زاویئی رفتار سہ کے و$_2$ کے گرد۔

۲۲۴ - ثابت کرو کہ کسی جسم کی فوری حرکت تحویل ہو سکتی ہے ایک مروڑ میں یعنی ایک خطی رفتار میں ایک خاص خط کے ساتھ ساتھ بمع ایک زاویئی رفتار کے خطِ مذکور کے گرد۔

دفعہ ۲۱۶ کی رُو سے کسی اُستوار جسم کی فوری حرکت معادل ہوتی ہے کسی نقطہ و کی انتقالی رفتار کے، بمع و میں سے گزرنے والے کسی خطِ مستقیم کے گرد زاویئی رفتار کے۔



فرض کرو کہ و ا خطی رفتار ع کی سمت ہے اور و ی زاویئی رفتار سہ کا محور ہے۔

سطح مستوی ی و ا میں و لا، و ی پر عمود وار کھینچو اور و ما سطح مستوی ی و لا پر عمود کھینچو۔ فرض کرو کہ ∠ ی و ا = طہ

و ما پر و وَ ایسا لو کہ و وَ × سہ = ع جب طہ

تب دفعہ ۲۲۲ کی رُو سے و ی کے گرد زاویئی رفتار سہ معادل ہے و ی کے متوازی محور وَ یَ کے گرد، زاویئی رفتار سہ کے مع ایک خطی رفتار سہ × و وَ یعنی ع جب طہ کے، و میں سے سطح مستوی ی و وَ پر عمود وار۔

نیز خطی رفتار ع منتقل ہو سکتی ہے وَ میں سے متوازی خطی رفتار کے

اور پھر تحلیل ہو سکتی ہے دو رفتاروں ۶ جب طہ اور ۶ جم طہ میں، اس طرح ہمیں دائیں جانب کی شکل بالا حاصل ہوتی ہے۔

اس میں دو خطی رفتاریں ۶ جب طہ ایک دوسرے کی تعدیم کر دیتی ہیں اور ہمارے پاس وی کی سمت میں ایک خطی رفتار ۶ جم طہ اور اس کے گرد ایک زاویئی رفتار سہ رہ جاتی ہے۔

یہ عمل صریحاً سکونیات میں پائنسوٹ (Poinsot) کا مرکزی محور معلوم کرنے کے مماثل ہے اس لیے اس صورت میں بھی پائنسوٹ کے مرکزی محور کے خواص کے مماثل خواص حاصل ہو سکتے ہیں۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ اوپر کے عمل میں زاویئی رفتار سکونیات میں با کی قوت کے مماثل ہے اور خطی رفتار جفت کے۔

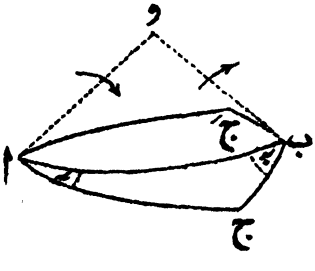
۲۲۵ - محدود گھماؤ ـــــ اگر گھماؤ محدود زاویوں میں سے وقوع پذیر ہوں تو یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ محوروں کے گرد گردشوں کی ترتیب کو ملحوظ رکھنا نہایت ضروری ہوتا ہے۔ سادہ مثال کے طور پر فرض کرو کہ دو علی القوائم محوروں ولا اور وما میں سے ہر ایک کے گرد جسم کو ایک زاویۂ قائمہ میں سے گھمایا گیا ہے۔

ولا کے گرد ایک زاویۂ قائمہ میں سے گھمانے سے وی پر کا کوئی نقطہ ن محور ما کی نفی سمت پر آجائیگا اور وما کے گرد دوسری گردش سے اس کے محل میں کوئی فرق نہ آئیگا۔

برعکس اس کے اگر ہم پہلے محور وما کے گرد گردش دیں تو نقطہ ن محور ولا پر آجائیگا اور پھر ولا کے گرد گردش دینے سے اس کے محل میں کوئی تغیر واقع نہ ہوگا۔

پس محدود ہٹاؤں کے لیے گردشوں کی ترتیب قابلِ لحاظ ہوتی ہے۔

۲۲۶ - محوروں وا اور وب کے گرد بالترتیب دو محدود گردشوں کا اثر معلوم کرو۔



فرض کرو کہ وا اور وب کے گرد گھماؤں کے زاویے نشان زدہ سمتوں میں بالترتیب ۲ عہ اور ۲ بہ ہیں۔ مرکز و والے ہندسی کرہ پر قوسیں اج اور بج ایسی کھینچو کہ

∠ ب ا ج = عہ اور ∠ ا ب ج = بہ

جہاں سمتیں ا ج اور ب ج اس طرح لی گئی ہیں کہ ان میں سے ایک و ا کے گرد گھماؤ کی سمت میں ہے اور دوسری و ب کے گرد گھماؤ کی جو سمت ہے اُس کے مخالف ہے۔

ا ب کے دوسری جانب جَ، ج کے متشاکل لو۔ لہٰذا

∠ ج ا جَ = ۲ عہ اور ∠ ج ب جَ = ۲ بہ

و ا کے گرد زاویہ ۲ عہ میں سے جسم کا گھماؤ و جَ کو محل و ج میں لے آئیگا اور و ب کے گرد دوسرا گھماؤ ۲ بہ، و ج کو پھر محل و جَ میں لے آئیگا۔

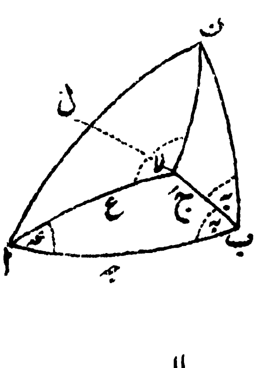
پس دو ترکیبی گھماؤں کا اثر یہ ہوگا کہ و جَ کا محل وہی رہیگا یعنی و جَ گردش کا حاصل محور ہوگا۔

[اگر گردش پہلے و ب کے گرد ہوتی اور پھر و ا کے گرد تو حسب سابق ظاہر ہے کہ گھماؤ کا حاصل محور و ج ہوگا۔]

حاصل گردش کی مقدار۔

نقطہ ا کا مقام و ا کے گرد گھمانے سے نہیں بدلتا، و ب کے گرد گھماؤ ۲ بہ اِسے نقطہ ن پر لے جاتا ہے جہاں ∠ ا ب ن = ۲ بہ اور قوس ب ن = قوس ب ا اور اس لیے

∠ ب ا ن = ∠ ب ن ا



پس حاصل گھماؤ زاویہ ا جَ ن (= لا)

میں سے جَ کے گرد واقع ہوتا ہے

اور جَ ا = جَ ن

اگر ب جَ، ا ن سے ل پر ملے تو

ل قوس ا ن کا وسطی نقطہ ہوگا اور

$$∠\ ا\ جَ\ ل = ∠\ ل\ جَ\ ن = \frac{لا}{۲}$$

اگر محور و ا اور و ب زاویہ جہ پر ملیں تو ا ب = جہ،

نیز فرض کرو کہ اجَ = ع

تب جب جہ جب بہ = جب ال = جب ع جب لا/۲ ......(۱)

نیز △ اب جَ سے

جم جہ جم عہ = جب جہ مم ع - جب عہ مم بہ

جس سے حاصل ہوتا ہے

جب ع = ۱ / √(۱ + مم² ع) = جب جہ / √(جب² جہ + (جم عہ جم جہ + جب عہ مم بہ)²)

پس (۱) سے حاصل ہوتا ہے

جب لا/۲ = جب بہ √(جب² جہ + (جم جہ جم عہ + جب عہ مم بہ)²)

پس حاصل محور وجَ کا مقام، اور حاصل گردش کی مقدار، دونوں کسی صورت میں حاصل ہو جاتے ہیں۔

مشق ۱ - اگر ایک مستوی شکل کو ایک ثابت نقطہ ا کے گرد ۹۰° میں سے گھمایا جائے اور پھر (اسی رُخ میں) ایک ثابت نقطہ ب کے گرد ۹۰° میں سے گھمایا جائے، تو نتیجہ ایک خاص ثابت نقطہ ج کے گرد ۱۸۰° کے گھماؤ کے معادل ہوتا ہے، ج کا مقام معلوم کرو۔

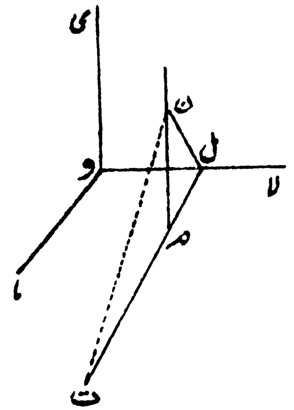
مشق ۲ - ایک جسم دو محوروں کے گرد جو ایک دوسرے سے ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں یکے بعد دیگرے ۹۰° میں سے گھومتا ہے۔ حاصل گھماؤ معلوم کرو۔

مشق ۳ - اگر دو محوروں میں سے ہر ایک کے گرد گھماؤ ۲ قائمہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ گردش کا حاصل محور دو ترکیبی محوروں کی سطح مستوی میں سے گزرنے والی سطح مستوی پر عمود وار ہوگا اور گردش کا حاصل زاویہ محوروں کے درمیانی زاویہ کا دوچند ہوگا۔

۲۲۷ - ثابت محوروں کے متوازی جسم کے کسی نقطہ کی رفتاریں، انھی محوروں کے گرد جسم کی فوری زاویئی رفتاروں کی رقوم میں۔

فرض کرو کہ جسم کا کوئی نقطہ ن (لا، ما، ی) ہے۔ ن م سطح مستوی

لا ما پر عمود کھینچو، اور م ل محور لا پر عمود کھینچو اور ن ت، ل ن پر عمود کھینچو سطح مستوی ل ن م میں جو ل م سے ت پر ملے۔



و لا کے گرد زاویئی رفتار سہ کی رُو سے نقطہ ن، ت ن کی سمت میں رفتار سہ × ن ل حاصل کرتا ہے جو معادل ہے رفتار - سہ × ن ل جم ن ت ل یعنی
" - سہ × ن ل جب ن ل ت" یعنی
" - سہ × ی" کے ل ت کی سمت میں،
اور رفتار سہ × ن ل × جب ن ت ل، یعنی سہ × ن ل جم ن ل م، یعنی سہ × ما کے م ن کی سمت میں۔

پس و لا کے گرد سہ کا گھماؤ ترکیبی رفتاریں "- سہ ی" و ما کی سمت میں اور "سہ ما" و ی کے متوازی پیدا کرتا ہے۔

اسی طرح و ما کے گرد گھماؤ سہ تشاکل سے ترکیبی رفتاریں - سہ لا اور سہ ی بالترتیب و ی کے متوازی اور و لا کے متوازی پیدا کرتا ہے۔

بالآخر و ی کے گرد گھماؤ سہ ترکیبی رفتاریں - سہ × ما اور سہ × لا بالترتیب و لا اور و ما کے متوازی پیدا کرتا ہے۔

جمع کرنے سے ترکیبی رفتاریں حسبِ ذیل ہیں:

سہ × ی - سہ × ما، و لا کے متوازی

سہ × لا - سہ × ی، و ما "

اور سہ × ما - سہ × لا، و ی "

اگر و ساکن ہو تو یہ ہیں ن کی ترکیبی رفتاریں محوروں کے متوازی ۔
اگر و خود متحرک ہو اور اِس کی رفتاریں محوروں کے متوازی ع، د، ھ ہوں تو ن کی ترکیبی رفتاریں فضا میں یہ ہونگی

$$\text{ع} + \text{سہ}_{\text{ما}} \times \text{ی} - \text{سہ}_{\text{ی}} \times \text{ما}\text{، محور و لا کے متوازی}$$

$$\text{د} + \text{سہ}_{\text{ی}} \times \text{لا} - \text{سہ}_{\text{لا}} \times \text{ی}\text{، ” و ما ” ”}$$

$$\text{ھ} + \text{سہ}_{\text{لا}} \times \text{ما} - \text{سہ}_{\text{ما}} \times \text{لا}\text{، ” وی ” ”}$$

۲۲۸ ۔ ایک استوار جسم ایک ثابت نقطہ و کے گرد حرکت کر رہا ہے (۱) و میں سے گزرنے والے کسی ثابت محور وپ کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر معلوم کرو اور (۲) جسم کی توانائی بالحرکت دریافت کرو۔

محور لا کے گرد جسم کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر

$$= \Sigma\, \text{م} \left(\text{ما} \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \right)$$

لیکن، دفعۂ ماقبل کی رُو سے، چونکہ و ثابت ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{ی}} \times \text{لا} - \text{سہ}_{\text{لا}} \times \text{ی} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{لا}} \times \text{ما} - \text{سہ}_{\text{ما}} \times \text{لا}$$

جہاں $\text{سہ}_{\text{لا}}$، $\text{سہ}_{\text{ما}}$ اور $\text{سہ}_{\text{ی}}$ جسم کی زاویئی رفتاریں ہیں محوروں کے گرد

مندرج کرنے سے و لا کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر

$$= \Sigma\, \text{م} \left[(\text{ما}^2 + \text{ی}^2)\, \text{سہ}_{\text{لا}} - \text{لا ما}\, \text{سہ}_{\text{ما}} - \text{ی لا}\, \text{سہ}_{\text{ی}} \right] = \text{ا} \times \text{سہ}_{\text{لا}} - \text{ف} \times \text{سہ}_{\text{ما}} - \text{ع} \times \text{سہ}_{\text{ی}}$$

اسی طرح و ما کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر

$$= \text{ب}\, \text{سہ}_{\text{ما}} - \text{د}\, \text{سہ}_{\text{ی}} - \text{ف}\, \text{سہ}_{\text{لا}}$$

اور و ی کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر

= ج سہی - ع سہلا - د سہما

(۲) توانائی بالحرکت

= ½ Σ م [لاَ² + ماَ² + یَ²]

= ½ Σ م [(سہما × ی - سہی × ما)² + (سہی × لا - سہلا × ی)² + (سہلا × ما - سہما × لا)²]

= ½ Σ م [سہلا² (ما² + ی²) + ... + ... - ۲ سہما سہی × ما ی - ... - ...]

= ½ (ا سہلا² + ب سہما² + ج سہی² - ۲ د سہما سہی - ۲ ع سہی سہلا - ۲ ف سہلا سہما)

۲۲۹ - دفعۂ ماقبل میں محور فضا میں ثابت ہیں اور چونکہ جسم اِن کے لحاظ سے حرکت کرتا ہے اس لیے جمود کے معیارِ اثر اور حاصل ضرب ا، ب، ج... بالعموم متغیر ہوتے ہیں۔

دیگر ضوابط، جو بہت سی صورتوں کے لیے موزوں ہوتے ہیں، حسبِ ذیل طریق پر معلوم ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ و لاَ، و ماَ اور و یَ تین محور ہیں جو جسم میں ثابت ہیں (اور اس لیے بالعموم فضا میں ثابت نہیں ہیں) اور و میں سے گزرتے ہیں۔ فرض کرو کہ اِن کے گرد جسم کی زاویئی رفتاریں سہ۱، سہ۲، سہ۳ ہیں۔

ثابت محور و لا، و ما اور و ی کہیں بھی ہو سکتے ہیں لیکن فرض کرو کہ انہیں اس طرح منتخب کیا گیا ہے کہ آن زیرِ غور میں متحرک محور و لاَ، و ماَ اور و یَ ان پر منطبق ہوتے ہیں تب سہلا = سہ۱، سہما = سہ۲، سہی = سہ۳۔

دفعۂ ماقبل میں معیارِ حرکت کے معیارِ اثروں کے جملے اب ہو جاتے ہیں

ا سہ١ - ف سہ٢ - ع سہ٣، اور اسی طرح کے دو اور جملے اور توانائی بالحرکت ہے

$\frac{1}{2}$ (ا سہ١^2 + ب سہ٢^2 + ج سہ٣^2 - ٢ د سہ٢ سہ٣ - ٢ ع سہ٣ سہ١ - ٢ ف سہ١ سہ٢)

جہاں ا، ب، ج اب جمود کے معیارِ اثر اور د، ع، ف جمود کے حاصل ضرب ہیں ان محوروں کے گرد جو جسم میں ثابت ہیں اور اس کے ساتھ حرکت کرتے ہیں۔

اگر یہ مؤخر الذکر محور و پر صدر محور ہوں تو د = ع = ف = ۰
اور معیارِ حرکت کے ترکیبی معیارِ اثر ا سہ١، ب سہ٢، ج سہ٣ ہونگے اور توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2}$ (ا سہ١^2 + ب سہ٢^2 + ج سہ٣^2) ہوگی۔

۲۳۰ ۔ معلومہ دھکوں کے زیرِ عمل جسم کی حرکت کی عام مساواتیں جب کہ جسم کا ایک نقطہ ثابت ہو۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ مبداء ہے اور اس میں سے گزرنے والے تین علی الفوائم خط حوالہ کے محور ہیں۔

فرض کرو کہ سہ لا، سہ ما، سہ ی جسم کی زاویئی رفتاریں ہیں اِن محوروں کے گرد دھکے سے عین پہلے اور سہَ لا، سہَ ما، سہَ ی متناظر رفتاریں ہیں دھکے کے عین بعد۔

جسم کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر محور لا کے گرد حرکت سے عین پہلے ا سہ لا - ف سہ ما - ع سہ ی ہے اور حرکت کے عین بعد ا سہَ لا - ف سہَ ما - ع سہَ ی ہے۔ پس محور لا کے گرد معیارِ حرکت کے معیارِ اثر میں تبدیلی

= ا (سہَ لا - سہ لا) - ف (سہَ ما - سہ ما) - ع (سہَ ی - سہ ی)

لیکن دفعہ ۱۶۶ کی رُو سے کسی محور کے گرد معیارِ حرکت کے معیارِ اثر کی تبدیلی محور مذکور کے گرد دھکوں کے معیار اثروں کے مساوی ہوتی ہے۔

پس اگر لا، ما اور ی کے محوروں کے گرد دھکوں کے معیارِ اثر بالترتیب ل، م، ن ہوں تو

$$\text{ا}\,(\text{سہ}'_{\text{لا}} - \text{سہ}_{\text{لا}}) - \text{ف}\,(\text{سہ}'_{\text{ما}} - \text{سہ}_{\text{ما}}) - \text{ع}\,(\text{سہ}'_{\text{ی}} - \text{سہ}_{\text{ی}}) = \text{ل}$$

$$\text{ب}\,(\text{سہ}'_{\text{ما}} - \text{سہ}_{\text{ما}}) - \text{د}\,(\text{سہ}'_{\text{ی}} - \text{سہ}_{\text{ی}}) - \text{ف}\,(\text{سہ}'_{\text{لا}} - \text{سہ}_{\text{لا}}) = \text{م}$$

اور

$$\text{ج}\,(\text{سہ}'_{\text{ی}} - \text{سہ}_{\text{ی}}) - \text{ع}\,(\text{سہ}'_{\text{لا}} - \text{سہ}_{\text{لا}}) - \text{د}\,(\text{سہ}'_{\text{ما}} - \text{سہ}_{\text{ما}}) = \text{ن}$$

اِن تین مساواتوں سے $\text{سہ}'_{\text{لا}}$، $\text{سہ}'_{\text{ما}}$ اور $\text{سہ}'_{\text{ی}}$ کی قیمتیں معلوم ہوجاتی ہیں۔

حوالہ کے محوروں کو اس طرح منتخب کرنا چاہیے کہ ا، ب، ج، د، ع اور ف آسانی سے معلوم ہوسکیں۔ بالعموم صدر محور نہایت موزوں ہوتے ہیں۔ اگر اِن کو حوالہ کے محور مانا جائے تو مساواتیں ہوجاتی ہیں:—

$$\text{ا}\,(\text{سہ}'_{\text{لا}} - \text{سہ}_{\text{لا}}) = \text{ل}،\ \text{ب}\,(\text{سہ}'_{\text{ما}} - \text{سہ}_{\text{ما}}) = \text{م}\ \text{اور}\ \text{ج}\,(\text{سہ}'_{\text{ی}} - \text{سہ}_{\text{ی}}) = \text{ن}$$

۲۳۱ — اگر جسم سکون سے روانہ ہو یعنی $\text{سہ}_{\text{لا}}$، $\text{سہ}_{\text{ما}}$ اور $\text{سہ}_{\text{ی}}$ صفر ہوں تو

$$\text{سہ}'_{\text{لا}} = \frac{\text{ل}}{\text{ا}}،\quad \text{سہ}'_{\text{ما}} = \frac{\text{م}}{\text{ب}}\quad \text{اور}\quad \text{سہ}'_{\text{ی}} = \frac{\text{ن}}{\text{ج}}$$

پس فوری محور کی سمتی جیوب التمام ہیں

$$\left(\frac{\text{ل}}{\text{ا}}،\ \frac{\text{م}}{\text{ب}}،\ \frac{\text{ن}}{\text{ج}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

دھکے کے جفت کے محور کی سمتی جیوب التمام ہیں

$$(\text{ل}،\ \text{م}،\ \text{ن}) \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

پس ظاہر ہے کہ بالعموم (۱) اور (۲) وہی نہیں ہوتے یعنی بالعموم جسم ایسے محور کے گرد گھومنا نہیں شروع کرتا جو دھکے کے جفت کی سطح مستوی پر عمود وار ہو۔

(۱) اور (۲) منطبق ہونگے اگر ا = ب = ج ' اس صورت میں ثابت نقطہ پر معیاری ناقص نما کرہ ہو جاتا ہے۔

نیز اگر م = ن = ۰ یعنی اگر دھکے کے جفت کا محور لا کے محور پر جو ثابت نقطہ پر ایک صدر محور ہے منطبق ہو تو جیوب التمام (۱) متناسب ہو جاتی ہیں (۱، ۰، ۰) کے اور فوری محور بھی منطبق ہو جاتا ہے لا کے محور پر یعنی دھکے کے جفت کے محور کی سمت پر۔ اسی کے مماثل کیفیت ہوگی اگر دھکے کے جفت کا محور ثابت نقطہ پر کے باقی دو صدر محوروں میں سے کسی ایک پر منطبق ہو۔

عام صورت میں فوری محور ہندسی طور پر معلوم ہو سکتا ہے۔ کیونکہ دھکے کے جفت کی سطح مستوی ہے۔

$$\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} = ۰$$

اس کا مزدوج قطر بلحاظ معیاری ناقص نما

$$\text{ا لا}^{۲} + \text{ب ما}^{۲} + \text{ج ی}^{۲} = \text{ک}$$

کے صریحاً ہے

$$\frac{\text{لا}}{\frac{\text{ل}}{\text{ا}}} = \frac{\text{ما}}{\frac{\text{م}}{\text{ب}}} = \frac{\text{ی}}{\frac{\text{ن}}{\text{ج}}}$$

اور یہ فوری محور ہے۔

پس اگر کوئی دھکے کا جفت کسی جسم پر عمل کرے جس کا ایک نقطہ و ثابت ہو اور جسم ابتداءً ساکن ہو تو جسم و پر کے معیاری ناقص نما کے اُس قطر کے گرد گھومنا شروع کریگا جو دھکے کے جفت کی سطح مستوی کا مزدوج ہے۔

۲۳۲ - مشق ۱ - ایک پترے وح وَ کی شکل رُبع دائرہ کی ہے جس کا مرکز ح ہے، اس کی قوس کا ایک سرا و ثابت ہے - پترے کے دوسرے سرے وَ پر اِس کی سطح مستوی پر عمود وار سمت میں دھکا د لگایا گیا ہے - جو حرکت پیدا ہوگی اُسے معلوم کرو۔

وح کو لا کا محور مانو، و پر کے مماس کو ما کا محور فرض کرو۔ اور سطح مستوی پر و میں سے گزرنے والے عمود کو ی کا محور تسلیم کرو۔

فرض کرو کہ مرکزِ ثقل ث ہے، ث ل عمود ہے وح پر، پس

$$\text{ح ل} = \text{ل ث} = \frac{4\,\text{ا}}{3\pi}$$

$$\text{تب} \qquad \text{ا} = \text{م}\,\frac{\text{ا}^2}{4}$$

جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$$\text{(دفعہ ۲۱۴ کی رُو سے)}\ \ \text{ب} = \text{م}\,\frac{\text{ا}^2}{4} - \text{م}\times\text{ح ل}^2 + \text{م}\times\text{و ل}^2 = \text{م}\left(\frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi}\right)\text{ا}^2$$

$$\text{ج} = \text{ا} + \text{ب} \qquad \text{د} = \text{ع} = 0$$

$$\text{ف} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\text{ا}} \text{ر فرط فرر}\ (\text{ا} - \text{رجم ط})\ \text{رجب ط} = \text{م}\times\frac{5}{6\pi}\,\text{ا}^2$$

تب دفعہ ۲۳۰ کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{اور}\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{ا سَا} - \text{ف سَہ} = \text{د ا} \\ \text{ب سَہ} - \text{ف سَا} = -\,\text{د ا} \\ \text{ج سَی} = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{اِن سے حاصل ہوتا ہے}\qquad \frac{\text{سَا}}{\text{ب} - \text{ف}} = \frac{\text{سَہ}}{-(\text{ا} - \text{ف})} = \frac{\text{د ا}}{\text{ا ب} - \text{ف}^2}$$

اور $\text{سَی} = 0$۔ اور حل مکمل کیا جا سکتا ہے۔

اگر فوری محور کا میلان و لا کے ساتھ فہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{سہَ}}{\text{سہاَ}} = \frac{\text{۱ - ف}}{\text{ف - ب}} = \frac{\text{۱۰ - ۳۲}}{\text{۱۵ ۲ - ۴۲}}$$

مشق ۲ — ایک یکساں مکعب جس کا مرکز ثابت ہے مرکز مذکور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اس پر اس کے ایک کنارے کی سمت میں ایک دھکا لگایا گیا ہے - فوری محور معلوم کرو۔

مشق ۳ — ایک یکساں ٹھوس ناقص نما کا مرکز ثابت ہے اور یہ اس کے گرد گھوم سکتا ہے۔ اس کی سطح کے ایک معلومہ نقطہ پر ایک ضرب لگائی گئی ہے جس کی سمت ناقص نما کے عماد کی سمت ہے - اس کے فوری محور کی مساوات معلوم کرو۔

مشق ۴ — ایک قرص مکافی کے ایک حصہ کی شکل کا ہے جو وتر خاص، محور اور اپنی قوس سے محیط ہے، اس کا راس ا ثابت ہے - اس پر وتر خاص کے سرے پر اس کی سطح مستوی پر عمود وار ایک ضرب لگائی گئی ہے - ثابت کرو کہ قرص ایک ایسے خط کے گرد گھومنا شروع کرتا ہے جو ا میں سے گزرتا ہے اور محور کے ساتھ زاویہ مس $^{-1}\frac{12}{25}$ بناتا ہے -

مشق ۵ - ایک یکساں مثلث پترا اب ج نقطہ ا کے گرد جو ثابت ہے کسی طرح گھوم سکتا ہے - اس کی سطح مستوی پر عمود وار سمت میں اسے ب پر ایک ضرب لگائی گئی ہے - ثابت کرو کہ پترا اد کے گرد گھومنا شروع کرتا ہے جہاں د کا مقام ب ج پر ایسا ہے کہ ج د = ½ ج ب

۲۲۳ - ایسے محوروں کے لحاظ سے جن کی سمتیں ثابت ہوں کسی جسم کی حرکت کی عام مساواتیں تین ابعاد میں معلوم کرو۔

اگر جسم کے مرکزِ ثقل کے محدد (لا، ما، ی) ہوں تو دفعہ ۱۶۲ کی رُو سے

$م \frac{فر^۲ لا}{فر ت^۲}$ = محور و لا کے متوازی بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ، اسی قسم کی دو اور مساواتیں باقی دو محوروں کے لیے۔

اگر مرکزِ جمود میں سے گزرنے والے اور محددوں کے محوروں کے متوازی محوروں کے گرد کسی آن میں زاویئی رفتاریں $سہ_{لا}$، $سہ_{ما}$، $سہ_{ی}$ ہوں تو دفعات ۱۶۴ اور ۲۲۸ کی رُو سے

$$\frac{فر}{فر ت}\left[ا\, سہ_{لا} - ف\, سہ_{ما} - ع\, سہ_{ی}\right]$$

= ث میں سے و لا کے متوازی خط کے گرد مؤثر قوتوں کا معیارِ اثر = ل

اسی طرح $$\frac{فر}{فر ت}\left[ب\, سہ_{ما} - د\, سہ_{ی} - ف\, سہ_{لا}\right] = م$$

اور $$\frac{فر}{فر ت}\left[ج\, سہ_{ی} - ع\, سہ_{لا} - د\, سہ_{ما}\right] = ن$$

[اگر جسم یکساں کرہ ہو جس کی کمیت $م_۱$ ہو تو د = ع = ف = ۰

اور ا = ب = ج = $م_۱ \frac{۲ ر^۲}{۵}$، تب یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں:—

$$م_۱ \times \frac{۲ ر^۲}{۵} \times \frac{فر سہ_{لا}}{فر ت} = ل،\quad م_۱ \times \frac{۲ ر^۲}{۵} \times \frac{فر سہ_{ما}}{فر ت} = م$$

اور $$م_۱ \times \frac{۲ ر^۲}{۵} \times \frac{فر سہ_{ی}}{فر ت} = ن \quad]$$

دھکے کی قوتیں۔ اگر دھکے سے عین پہلے، مرکزِ ثقل ث میں سے گزرنے والے اور حوالہ کے محوروں کے متوازی محوروں کی سمت میں رفتاریں ع، و، ھ ہوں اور ان کے گرد زاویئی رفتاریں $سہ_{لا}$، $سہ_{ما}$، $سہ_{ی}$ ہوں نیز

اگر دھکے کے عین بعد یہ مقداریں بالترتیب عَ ، وَ ، ھَ اور سَہِ لا ، سَہِ ما ، سَہِ ی ہوں تو دفعات ۱۶۶ اور ۲۲۸ کی رُو سے حرکت کی مساواتیں ہونگی

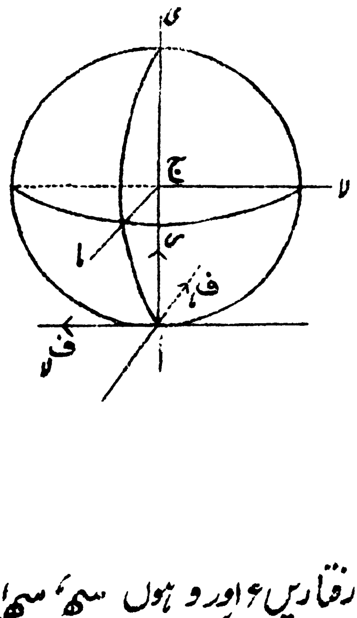
م (عَ - ع) = لا ، وغیرہ

اور ا (سَہِ لا - سہِ لا) - ف (سَہِ ما - سہِ ما) - ع (سَہِ ی - سہِ ی)

= و لا کے گرد دھکے کی قوتوں کا معیارِ اثر

اسی طرح کی دو اور مساواتیں۔

۲۳۴ ۔ **مشق** ۔ بلیئرڈ کی ایک متجانس گیند کسی محور کے گرد گھومتی ہوئی ایک میز پر حرکت کرتی ہے، میز اتنی کھردری نہیں ہے کہ پھسلنے کی حرکت کو ہمیشہ روک سکے۔ ثابت کرو کہ مرکز کا راستہ پہلے مکافی کی ایک قوس ہوگا اور پھر ایک خطِ مستقیم ہوگا۔



نقطہ تماس کے ابتدائی محل کو مبدا مانو اور اس کے پھسلنے کی ابتدائی سمت کو لا کا محور فرض کرو۔

اگر محوروں کے متوازی مرکز کی ابتدائی رفتاریں ع اور و ہوں سہِ لا ، سہِ ما اور سہِ ی بالترتیب محوروں کے گرد زاویئی رفتاریں ہوں تو چونکہ نقطہ تماس کی ابتدائی رفتار محور ما کے متوازی صفر ہے، اس لیے

و + ل سہِ لا = ۰ ....(۱)

کسی آن ت میں فرض کرو کہ سہِ لا ، سہِ ما اور سہِ ی ترکیبی زاویئی رفتاریں

ہیں اور ف$_{\text{لا}}$ ، ف$_{\text{ہا}}$ ترکیبی رگڑ کی قوتیں ہیں جیساکہ نشان سے ظاہر ہے، تب

حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\left.\begin{aligned} \text{م لاً} &= -\,\text{ف}_{\text{لا}} \\ \text{م ہاً} &= -\,\text{ف}_{\text{ہا}} \\ \cdot &= \text{ر} - \text{م ج} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اور

$$\left.\begin{aligned} \text{م} \times \frac{۲\,\text{ا}^۲}{۵} \times \frac{\text{فرسہٓ}}{\text{فرت}} &= -\,\text{ف}_{\text{ہا}} \cdot \text{ا} \\ \text{م} \times \frac{۲\,\text{ا}^۲}{۵} \times \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} &= \text{ف}_{\text{لا}} \cdot \text{ا} \\ \text{م} \times \frac{۲\,\text{ا}^۲}{۵} \; \frac{\text{فرسی}}{\text{فرت}} &= \cdot \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۳)$$

حاصل رگڑ نقطۂ تماس ا کی فوری حرکت کی سمت کے عین مقابل عمل کریگی اور مساوی ہوگی مہ م ج کے

اس لیے $$\frac{\text{ف}_{\text{ہا}}}{\text{ف}_{\text{لا}}} = \frac{\text{ہاً} + \text{ا سہ}}{\text{لاً} - \text{ا سہ}} \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

اور $$\text{ف}_{\text{لا}}^۲ + \text{ف}_{\text{ہا}}^۲ = \text{مہ}^۲\, \text{م}^۲\, \text{ج}^۲ \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

مساواتوں (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف_م}{ف_ل} = \frac{\ddot{م}}{\ddot{ل}} = \frac{-\dot{سہ}_ل}{\dot{سہ}_م} = \frac{\ddot{م} + ا\,\dot{سہ}_ل}{\ddot{ل} - ا\,\dot{سہ}_م}$$

اس لیے (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\ddot{م} + ا\,\dot{سہ}_ل}{\dot{م} + ا\,سہ_ل} = \frac{\ddot{ل} - ا\,\dot{سہ}_م}{\dot{ل} - ا\,سہ_م}$$

$$\therefore\ لوک\,(\dot{م} + ا\,سہ_ل) = لوک\,(\dot{ل} - ا\,سہ_م) + مستقل$$

$$\therefore\ \frac{\dot{م} + ا\,سہ_ل}{\dot{ل} - ا\,سہ_م} = \frac{و + ا\,سھ_ل}{ع - ا\,سھ_م} = ۰\ ،\ (۱)\ سے،$$

پس (۴) اور (۵) سے $ف_م = ۰$ اور $ف_ل = مہ\,م\,ج$

(۲) سے ظاہر ہے کہ مرکز محور لا کے متوازی مستقل قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے اور اس لیے یہ ایک مکافی کی قوس مرتسم کرتا ہے جس کا محور محور لا کی منفی سمت میں ہے۔

(۱)، (۲) اور (۳) سے اب ملتا ہے

$$\left.\begin{aligned} \dot{ل} &= -\,مہ\,ج\,ت + ع \\ \dot{م} &= مستقل = و \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (۶)$$

اور

$$\left.\begin{aligned} ا\,سہ_ل &= مستقل = ا\,سھ_ل \\ ا\,سہ_م &= \tfrac{۵}{۲}\,مہ\,ج\,ت + ا\,سھ_م \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (۷)$$

وقت ت پر نقطۂ تماس کی رفتار محور و لا کے متوازی

$$= \dot{ل} - ا\,سہ_م = ع - ا\,سھ_م - \tfrac{۷}{۲}\,مہ\,ج\,ت$$

اور و ما کے متوازی رفتار = ما + ا سہ = و + ا سہ ما = ۰ (۱) کی رُو سے نقطۂ تماس کی رفتار صفر ہو جاتی ہے اور خالص گھماؤ کا عمل شروع ہوتا ہے جب

$$ت = \frac{۲}{۷ مہ ج} (۶ - ا سہ ما)$$

اور اس وقت $\frac{ما}{لا} = \frac{و}{۶ - مہ ج ت} = \frac{۷ و}{۵ ۶ + ۲ ا سہ ما}$

یعنی اُس وقت جب کہ خالص گھومنے کا عمل شروع ہوتا ہے حرکت کی سمت نقطۂ تماس کی حرکت کی ابتدائی سمت کے ساتھ زاویہ

$$مس^{-۱} \frac{۷ و}{۵ ۶ + ۲ ا سہ ما}$$

بناتی ہے۔

(۶) کو تکمیل کرنے سے ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ خالص گھماؤ کا عمل جس نقطہ پر شروع ہوتا ہے اُس کے محدد ہیں

$$\frac{۲ (۶ - ا سہ ما) (۶ ۶ + ا سہ ما)}{۴۹ مہ ج} \text{ اور } \frac{۲ و (۶ - ا سہ ما)}{۷ مہ ج}$$

یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ حرکت خالص گھماؤ کی رہتی ہے اور اب مرکز کی حرکت خطِ مستقیم میں واقع ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ اگر کوئی متجانس کرہ ایک ثابت کھردری سطح مستوی پر ایسی قوتوں کے زیرِ عمل لڑھکے جن کا حاصل کرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہو تو ثابت کرو کہ حرکت

ایسی ہوگی گویا کہ سطح مستوی چکنی ہے اور قوتوں کی مقداریں اصلی مقداروں کی $\frac{۵}{۷}$ ہیں۔

۲ ۔ ایک مکمل طور پر کھردری سطح مستوی کے اوپر کی طرف ایک کرہ کو مائل سمت میں پھینکا گیا ہے، ثابت کرو کہ کرہ اور سطح مستوی کے نقطۂ تماس کے راستہ کی مساوات

ما = لا مس بہ ۔ $\frac{۵}{۱۴}$ $\frac{\text{ج لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}}$ $\frac{\text{جب عہ}}{\text{جم}^{۲}\text{ بہ}}$ ہوگی جہاں عہ سطح مستوی کا میلان ہے افق کے ساتھ اور و ابتدائی رفتار ہے افق کے ساتھ زاویہ بہ بنانے والی سمت میں۔

۳ ۔ ایک متجانس کرہ کو ایک مائل کھردری سطح مستوی پر، کسی سمت میں اس طرح پھینکا گیا ہے کہ کرہ لڑھکتا ہے۔ اگر سطح مائل افق کے ساتھ زاویہ عہ بنائے تو ثابت کرو کہ رگڑ کی قدر < $\frac{۲}{۷}$ مس عہ ۔

۴ ۔ ایک مکمل طور پر کھردرا کرہ جس کی کمیت مَ اور نصف قطر ا ہے اپنے مرکز کی حرکت کی سمت پر علی القوائم محور کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ یہ ایک اور کھردرے ساکن کرہ کے ساتھ جس کی کمیت م ہے بالراست متصادم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ علیحدگی کے بعد دو کروں کی ترکیبی رفتاریں پہلے کرہ کی حرکت کی ابتدائی سمت پر علی القوائم سمت میں بالترتیب $\frac{۲}{۷}$ $\frac{\text{م}}{\text{م + مَ}}$ ا سہ اور $\frac{۲}{۷}$ $\frac{\text{مَ}}{\text{م + مَ}}$ ا سہ ہونگی۔

۵ ۔ ایک متجانس کرہ جو اپنے انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے ایک چکنے افقی میز پر حرکت کرتا ہوا ایک مکمل طور پر کھردرے انتصابی گدّے کے ساتھ بالراست متصادم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کی توانائی بالحرکت تصادم سے نسبت ۲ چ^{۲} (۵ + ۷ مس^{۲} طہ) : ۱۰ + ۴۹ چ^{۲} مس^{۲} طہ سے کم ہو جاتی ہے جہاں چ گیند کی لچک کی قدر ہے اور طہ انعکاس کا زاویہ ہے۔

۶ ۔ ایک کرہ جس کا نصف قطر ا ہے ایک محور کے گرد جو خط انتصابی کے ساتھ زاویہ بہ بناتا ہے زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ یہ اُس محور میں سے

گزرتی ہوئی انتصابی سطح مستوی میں، رفتار ع کے ساتھ ایک ایسی سمت میں حرکت کرتے ہوئے جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے، ایک مکمل طور پر کھردری افقی سطح مستوی کے ساتھ متصادم ہوتا ہے۔ حاصل حرکت معلوم کرو اور بتاؤ کہ حرکت کی نئی سمت میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی، ابتدائی سطح مستوی کے ساتھ زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\left[\frac{\text{۲ ا سہ جیب بہ}}{\text{۵ ع جم عہ}}\right]$$

بناتی ہے۔

۷۔ ایک گیند رفتار ع کے ساتھ افقاً حرکت کرتی ہوئی اور انتصابی محور کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھومتی ہوئی ایک مساوی ساکن گیند کے ساتھ بالراست متصادم ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی گیند کی ابتدائی سمتِ حرکت اور آخری سمتِ حرکت کے درمیان بڑے سے بڑا اختلاف $\text{مس}^{-1}\frac{\text{مہ}(1+\text{چ})}{1-\text{چ}}$ زاویہ کا ہے جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے اور چ لچک کی قدر ہے دونوں گیندوں کے درمیان۔ نیز ثابت کرو کہ سہ کی کم سے کم قیمت جو اس قدر انحراف پیدا کریگی وہ $\frac{\text{۷ مہ ع}}{\text{۲ ا}}(1+\text{چ})$ ہے۔

۸۔ دو مکمل طور پر کھردرے، بے لچک، یکساں کرے جن کی کمیتیں ھ اور ھَ ہیں تصادم سے پہلے اس طرح حرکت کر رہے ہیں کہ ان کے مرکز ایک ہی سطح مستوی میں رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تصادم سے توانائی بالحرکت میں بقدر

$$\frac{\text{ھ ھَ}}{14(\text{ھ}+\text{ھَ})}\left(2\,\text{ع}^2+7\,\text{و}^2\right)$$

کے کمی واقع ہو جائیگی جہاں ع اور و نقطۂ تماس کی اضافی رفتاریں ہیں تصادم سے پہلے، مماسی سمت میں، مرکزوں کی حرکت کی سطح مستوی میں اور اس کے عمود وار۔

سترہواں باب

معیارِ حرکت کے تحفظ اور توانائی کے تحفظ کے اصولوں پر

۲۳۵ ۔ اگر کسی جسم کے کسی نقطہ کے محدد بلحاظ ثابت محوروں کے کسی آن ت میں لا، ما اور ی ہوں تو دفعہ ۱۶۴ کی رُو سے اِس کی حرکت کی مساواتیں ہونگی :—

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\ \text{ح م}\ \frac{\text{فلا}}{\text{فت}} = \text{ح لا} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\ \text{ح م}\ \frac{\text{فما}}{\text{فت}} = \text{ح ما} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\ \text{ح م}\ \frac{\text{فی}}{\text{فت}} = \text{ح ے} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\ \text{ح م}\left(\text{ما}\ \frac{\text{فی}}{\text{فت}} - \text{ی}\ \frac{\text{فما}}{\text{فت}}\right) = \text{ح}\left(\text{ماے} - \text{ی ما}\right) \quad \ldots (\text{۴})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\ \text{ح م}\left(\text{ی}\ \frac{\text{فلا}}{\text{فت}} - \text{لا}\ \frac{\text{فی}}{\text{فت}}\right) = \text{ح}\left(\text{ی لا} - \text{لاے}\right) \quad \ldots (\text{۵})$$

اور

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\ \text{ح م}\left(\text{لا}\ \frac{\text{فما}}{\text{فت}} - \text{ما}\ \frac{\text{فلا}}{\text{فت}}\right) = \text{ح}\left(\text{لا ما} - \text{ما لا}\right) \quad \ldots (\text{۶})$$

فرض کرو کہ لا کا محور ایسا ہے کہ بیرونی قوتوں کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ اس کے متوازی دورانِ حرکت میں ہمیشہ صفر رہتا ہے یعنی $\Sigma\,\text{لا} = \text{۰}$.

تب مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\,\Sigma\,\text{م}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فت}} = \text{۰}$$

یعنی
$$\Sigma\,\text{م}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فت}} = \text{مستقل} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۷})$$

یا
$$\text{م}\,\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فت}} = \text{مستقل}$$

جہاں $\bar{\text{لا}}$ مرکزِ ثقل کا لا محدد ہے۔

مساوات (۷) اس امر کو تعبیر کرتی ہے کہ اس صورت میں جسم کا کل معیارِ حرکت محور لا کے متوازی دورانِ حرکت میں مستقل رہتا ہے۔

اِسے **خطی معیارِ حرکت کے تحفظ** کا اصول کہتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ بیرونی قوتیں ایسی ہیں کہ محور لا کے گرد اُن کے معیارِ اثروں کا مجموعہ صفر رہتا ہے، یعنی $\Sigma\,(\text{ما ے} - \text{ی ھا}) = \text{۰}$.

تب مساوات (۴) کی رُو سے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\,\Sigma\,\text{م}\left(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فت}}\right) = \text{۰}$$

اور
$$\therefore\ \Sigma\,\text{م}\left(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فت}}\right) = \text{مستقل} \qquad \ldots\ldots (\text{۸})$$

اب $\left(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فت}}\right)$ = کمیت م کی رفتار کا معیارِ اثر محور لا کے گرد۔ پس مساوات (۸) اِس امر کو تعبیر کرتی ہے کہ نظام کے معیارِ حرکت کا کل معیارِ اثر محور لا کے گرد مستقل رہتا ہے۔

اِسے **معیارِ حرکت کے معیارِ اثر کے تحفظ کا اصول** کہتے ہیں اور یہ حسبِ ذیل ہے :

اگر ایک استوار جسم پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کے معیارِ اثروں کا مجموعہ ایک معلومہ خط کے گرد دورانِ حرکت میں صفر رہے تو جسم کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر خطِ مذکور کے گرد دورانِ حرکت میں مستقل رہتا ہے ۔

۲۳۶ ۔ دھکے کی قوتوں کی صورت میں بھی یہی مسئلے درست رہتے ہیں کیونکہ اگر دھکے کی مدتِ عمل ایک چھوٹا وقفہ تہ ہو تو دفعہ ۱۶۶ کی مساوات (۱) کو تکمل کرنے سے

$$\left[\Sigma\, م \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right]_{\cdot}^{\text{تہ}} = \int_{\cdot}^{\text{تہ}} \Sigma\, ٨\ \text{فرت} = \Sigma\, ٨_{1}$$

جہاں ٨_1 قوتوں کا دھکا ہے محور لا کے متوازی ، یعنی محور لا کے متوازی کل معیارِ حرکت کی تبدیلی اِسی سمت میں قوتوں کے دھکوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے ۔

اب اگر لا کا محور ایسا ہو کہ اِس کے متوازی دھکوں کا مجموعہ صفر ہو تو اس کے متوازی کل معیارِ حرکت کی تبدیلی صفر ہوگی ۔

یعنی محور لا کے متوازی کل معیارِ حرکت دھکے کی قوتوں کے عمل سے پہلے
= اسی سمت میں کل معیارِ حرکت ، قوتوں کے عمل کے بعد ۔

اسی طرح مساوات (۴) کو تکمل کرنے سے

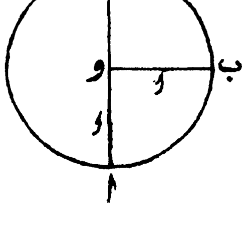
$$\left\{\Sigma\, م \left(\text{ما} \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)\right\}_{\cdot}^{\text{تہ}} = \int_{\cdot}^{\text{تہ}} \Sigma\, (\text{مار} - \text{ی ما})\ \text{فرت} = \Sigma\, [\text{مار}_1 - \text{ی ما}_1]$$

یعنی محور لا کے گرد زاویئی معیارِ حرکت کی تبدیلی ، اُسی سمت کے گرد قوتوں کے دھکوں کے معیارِ اثروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے ۔

اب اگر لا کا محور ایسا ہو کہ اِس کے گرد دھکے کی قوتوں کے معیارِ اثروں کا مجموعہ صفر ہو تو اس کے گرد زاویئی معیارِ حرکت میں کوئی تبدیلی نہ ہوگی، یعنی اس کے گرد زاویئی معیارِ حرکت دھکے کی قوتوں کے عمل سے پہلے = زاویئی معیارِ حرکت اُسی خط کے گرد دھکے کی قوتوں کے عمل کے بعد

۲۳۷ ۔ مشق ۱ ۔ کمیت م کا ایک منکا ایک مستدیر تار پر جس کی کمیت مر اور نصف قطر ا ہے پھسلتا ہے۔ تار ایک انتصابی قطر کے گرد آزادانہ گھوم رہا ہے۔ اگر تار کی زاویئی رفتاریں اُس وقت جب کہ منکا اُفقی اور انتصابی قطروں کے سروں پر ہو بالترتیب سہ اور سَہ ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{سَہ}{سہ} = \frac{مر + ۲م}{مر}$۔

کسی قطر کے گرد تار کے جمود کا معیارِ اثر = $مر \frac{ا^۲}{۲}$ خواہ منکا تار پر کہیں ہو ہر مقام پر اس کا تعامل تار پر مساوی اور مخالف ہوگا اُس تعامل کے جو تار کا اُس پر ہے۔



پس بیرونی قوتیں جو نظام پر عمل کرتی ہیں وہ صرف یہ ہیں (۱) انتصابی محور اا َ کا عمل جس کا کوئی معیارِ اثر اا َ کے گرد نہیں ہے (۲) منکے اور تار کے وزن جن میں سے کسی کا بھی کوئی معیارِ اثر بلحاظ انتصابی محور اا َ کے نہیں ہے۔

پس نظام (تار اور منکے) کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر اا َ کے گرد دورانِ حرکت میں مستقل رہتا ہے۔ نیز منکے کی رفتار کا معیارِ اثر اا َ کے گرد نہیں ہے کیونکہ اس کی سمت اا َ کو قطع کرتی ہے۔

جب منکا ا پر ہو تو اا َ کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر $مر \frac{ا^۲}{۲}$ سہ ہوگا نیز

جب یہ ب پر ہو تو یہ معیارِ اثر $م \frac{ا^۲}{۲}$ سہ + م ا^۲ سہ ہوگا - ان دونوں کو مساوی کرنے سے $\frac{سہَ}{سہ} = \frac{م + ۲ م}{م}$

مشق ۲ - ایک سلاخ جس کا طول ۲ ا ہے ایک چکنے میز پر اپنے طول کی علی القوائم سمت میں رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہے اور ایک چھوٹی بے لچک روک سے جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ج ہے متصادم ہوتی ہے - ثابت کرو کہ جب سرا روک سے علیحدہ ہوگا اُس وقت سلاخ کی زاویئی رفتار $\frac{۳ ج و}{۴ ا^۲}$ ہوگی -

تصادم کے وقت، اور نیز حرکتِ مابعد کے دَوران میں جب تک سلاخ روک کے ساتھ لگی رہتی ہے سلاخ پر جو تعامل عمل کرتا ہے وہ صرف روک پر ہے - پس روک کے گرد معیارِ حرکت کے معیارِ اثر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی - لیکن تصادم سے پہلے معیارِ اثر م ج و تھا - نیز اگر اس وقت جب اِس کا سرا روک سے علیحدہ ہو رہا ہو سلاخ کی زاویئی رفتار سہ ہو تو روک کے گرد اس کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر دفعہ ۱۹۱ کی رُو سے $م \left(\frac{ا^۲}{۳} + ا^۲\right)$ سہ یعنی $م \times \frac{۴ ا^۲}{۳}$ سہ ہوگا - ان دونوں کو مساوی کرنے سے سہ $= \frac{۳ ج و}{۴ ا^۲}$

اگر تصادم کے مین بعد سلاخ کی زاویئی رفتار سہَ ہو تو اسی طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے م ج و $= م \left(\frac{ا^۲}{۳} + ج^۲\right)$ سہَ

مشق ۳ - ایک یکساں مستدیر قرص اپنی سطح مستوی میں اپنے محیط پر کے ایک نقطہ ا کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے - ا کو چھوڑ کر دفعۃً محیط پر کے کسی اور

نقطہ ب کو پکڑ لیا جاتا ہے، ثابت کرو کہ ب کے گرد زاویئی رفتار سہ/۳ (۱+۲ جم عہ) ہوگی
جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو قوس اب کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔

اس صورت میں قرص پر دھکے کی قوت صرف ب پر عمل کرتی ہے اور اس کا معیارِ اثر ب کے گرد صفر ہے۔

پس ب کے گرد (دفعہ ۲۳۵ کی رُو سے) معیارِ حرکت کا معیارِ اثر ب کی تثبیت کے عین بعد وہی رہیگا جو پہلے تھا۔ اگر مطلوبہ زاویئی رفتار سَہ ہو تو تثبیت کے بعد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر

= م (اَ² + ک²) سَہ = م × ۳اَ²/۲ سَہ

ب کی تثبیت سے پہلے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر
= کمیت م کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر جو مرکزِ ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہو
+ مرکزِ ثقل کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر (دفعہ ۱۹۱)

= م ا سہ × ا جم عہ + م ک² سہ = م سہ اَ² (جم عہ + ۱/۲)

کیونکہ ب کو ثابت کرنے سے پہلے مرکز و، ا و پر علی القوائم سمت میں رفتار ا سہ سے حرکت کر رہا تھا۔

پس م × ۳اَ²/۲ سَہ = م سہ اَ² (جم عہ + ۱/۲) ∴ سَہ = سہ (۱+۲ جم عہ)/۳

ظاہر ہے کہ سَہ ہمیشہ سہ سے چھوٹا ہوگا، یعنی توانائی ۱/۲ م (ک² + اَ²) سَہ² ہمیشہ ثابت کرنے کے پہلے کی توانائی سے کم ہوگی۔ یہ اِس عام اصول کی ایک سادہ مثال ہے کہ توانائی بالحرکت تصادم سے یا جھٹکے کی قسم کے کسی عمل کے واقع ہونے سے ہمیشہ کم ہو جاتی ہے۔

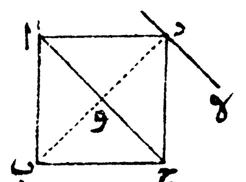
اگر عہ = ۱۲۰°، یعنی اگر قوس اب، کل محیط کا ایک تہائی ہو تو قرص ساکن ہو جائیگا۔

مشق ۴۔ ایک یکساں مربع پترا جس کی کمیت م ہے اور

جس کے ہر ضلع کا طول ۲ ا ہے اپنے ایک وتر کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ سے گھوم رہا ہے۔ دفعۃً اس کا ایک کونہ ثابت کر دیا جاتا ہے جو وتر مذکور پر نہیں ہے، ثابت کرو کہ نئی زاویئی رفتار سہ/۷ ہوگی اور ثابت نقطہ پر قوت کا دھکا $\frac{\sqrt{۲}}{۷}$ م ا سہ کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ اج گردش کا ابتدائی محور ہے۔

حسب دفعہ ۱۴۹ اس کے گرد جسم کا معیارِ اثر م × ا۲/۳ ہے۔ فرض کرو کہ ابتدائی حرکت ایسی تھی کہ ب کاغذ سے اوپر کی طرف حرکت کر رہا تھا۔



فرض کرو کہ کونہ د کو ثابت کیا گیا ہے اور سہَ بعد کی زاویئی رفتار ہے دہ کے گرد جو اج کے متوازی ہے چونکہ ثابت کرنے سے دھکے کی قوت د پر عمل کرتی ہے اس لیے اس کا معیارِ اثر دہ کے گرد صفر ہے پس دہ کے گرد، معیارِ حرکت کا معیارِ اثر، نقطہ د کو ثابت کرنے سے نہیں بدلتا۔

ثابت کرنے کے بعد یہ = م ک۲ سہَ

= م [ا۲/۳ + د و۲] سہَ = م (ا۲/۳ + ۲ا۲) سہَ = م × ۷ا۲/۳ سہَ

نیز ثابت کرنے سے پہلے یہ

= اج کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر + کمیت م کے ایک ذرہ کے معیارِ حرکت کا معیارِ اثر جو و پر ہو اور اس کے ساتھ حرکت کر رہا ہو = م × ا۲/۳ سہ

ان دو مقداروں کو مساوی کرنے سے سہَ = سہ/۷

اسی طرح د ب کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر ثابت کرنے کے بعد

= معیارِ حرکت کا معیارِ اثر ثابت کرنے سے پہلے = .

پس ثابت کرنے کے بعد مربع ' د لا کے گرد ' زاویئی رفتار $\frac{سہ}{ے}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے '

نیز ثابت کرنے سے پہلے مرکزِ ثقل و ساکن تھا ' اور ثابت کرنے کے بعد د کے گرد یہ رفتار سہ × د و کے ساتھ یعنی $\frac{ما ۲ ا سہ}{ے}$ کے ساتھ حرکت کر رہا ہے ۔ پس اس کے معیارِ حرکت کی تبدیلی = $\frac{مر ما ۲ ا سہ}{ے}$ اور یہ دفعہ ۱۶۶ کی رُو سے قوت کے مطلوبہ دھکے کے مساوی ہے ۔

مثالیں

۱ ۔ زمین کو یکساں کُرہ فرض کرکے اگر یہ مانا جائے کہ یہ کسی وقت ذرا سی اس طرح سکڑ جاتی کہ اس کا نصف قطر پہلے نصف قطر کے مقابلہ میں بقدر $\frac{۱}{ن}$ کے کم ہو جاتا تو ثابت کرو کہ اِس وجہ سے دِن کا طول بقدر $\frac{۴۸}{ن}$ گھنٹوں کے کم ہو جاتا ۔

۲ ۔ ایک وزنی مستدیر قرص ایک افقی سطح مستوی میں اپنے مرکز کے گرد جو ثابت ہے گھوم رہا ہے ۔ ایک کیڑا جس کی کمیت قرص کی کمیت کا $\frac{۱}{ن}$ ہے مرکز سے ایک نصف قطر پر چلتا ہے اور پھر اُڑ جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ قرص کی آخری زاویئی رفتار پہلی زاویئی رفتار کی $\frac{ن}{ن+۲}$ ہے ۔

۳ ۔ ایک یکساں مستدیر تختہ کو جس کی کمیت م اور نصف قطر ا ہے ایک مکمل طور پر چکنی افقی سطح مستوی پر رکھا گیا ہے ۔ تختہ اپنے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد گھوم سکتا ہے ۔ ایک شخص جس کی کمیت مَ ہے تختہ کے کنارہ پر چلتا ہے ۔ تختہ کی اُوپر کی سطح اس قدر کھردری ہے کہ پھسلنے کا عمل وقوع میں نہیں آتا ۔ جب شخص مذکور ایک چکر مکمل کرکے مقام روانگی پر آتا ہے تو ثابت

کروکہ تختہ زاویہ $\frac{\text{مَ}}{\text{م} + ۲\,\text{مَ}}$ ۴π میں سے گھوم جاتا ہے۔

۴ ــ ایک مستدیر حلقہ جس کی کمیّت م اور نصف قطر ا ہے ایک چکنی افقی سطحِ مستوی پر پڑا ہے، اور ایک کیڑا، کمیّت مَ اس کے گرد حلقہ کے لحاظ سے یکساں اضافی رفتار و کے ساتھ سکون سے روانہ ہوتا ہے۔ ثابت کروکہ حلقہ کا مرکز زاویئی رفتار $\frac{\text{مَ}}{\text{م} + ۲\,\text{مَ}} \times \frac{\text{و}}{\text{ا}}$ کے ساتھ دائرہ مرتسم کرتا ہے۔

۵ ــ ایک متوازی الافق گھومنے والے مستدیر جھولے[1] کو حرکت دے کر چھوڑ دیا گیا ہے، ثابت کروکہ اگر یہ مقصود ہو کہ (۱) کوئی شخص بڑی سے بڑی رفتار کے ساتھ حرکت کرے یا (۲) اس کے پھسل جانے کا میلان زیادہ سے زیادہ ہو تو اس کو مرکز سے فاصلہ (۱) ک $\sqrt{\text{ن}}$ (۲) ک $\sqrt{\frac{\text{ن}}{۲}}$ پر ہونا چاہیے جہاں ک مشین کا گردشی نصف قطر ہے اس کے محور کے گرد، اور ن نسبت ہے اس کے وزن کی آدمی کے وزن کے ساتھ۔

۶ ــ ایک یکساں مستدیر تار جس کا نصف قطر ا ہے ایک چکنے افقی میز پر پڑا ہے اور اپنے محیط پر کے ایک ثابت نقطہ و کے گرد حرکت کرسکتا ہے۔ ایک کیڑا جس کی کمیّت تار کی کمیّت کے مساوی ہے و میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے سے روانہ ہوکر تار پر بلحاظ تار کے یکساں اضافی رفتار و کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ثابت کروکہ وقت ت کے اختتام پر تار زاویہ

$$\frac{\text{و ت}}{۲\,\text{ا}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \text{مس}^{-۱}\left[\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \text{مس}\ \frac{\text{و ت}}{۲\,\text{ا}}\right]$$

میں سے گھوم جائیگا۔

[جب قطر و ا ابتدائی محل سے زاویہ ﻓ میں سے گھوم جائے تو فرض کرو کہ کیڑا ن پر ہے، پس ∠ ا ج ن = ط = $\frac{\text{و ت}}{\text{ا}}$، جہاں ج تار کا مرکز

[1] merry-go-round

ہے۔ چونکہ و کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر مستقل رہتا ہے،

$$\therefore \text{م}(\text{ک}^{۲}+\text{ا}^{۲})\,\text{فَہ} + \text{م}\left[۴\,\text{ا}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}\times\text{فَہ} + \text{و}\times ۲\,\text{ا}\,\text{جم}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}\right] = \text{مستقل} = ۰$$

۷ - ایک چھوٹا کیڑا ایک یکساں سلاخ پر جس کی کمیّت اِس کی اپنی کمیّت کے مساوی ہے حرکت کرتا ہے۔ سلاخ کا طول ۲ ا ہے اور اِس کے سروں کی حرکت ایک ثابت دائرہ کے محیط پر مقیّد ہے جس کا نصف قطر $\frac{۲\,\text{ا}}{\sqrt{۳}}$ ہے۔ اگر کیڑا سلاخ کے وسطی نقطہ سے روانہ ہو اور سلاخ پر اضافی رفتار و کے ساتھ حرکت کرے تو ثابت کرو کہ وقت ت میں سلاخ زاویہ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$ میں سے گھوم جائیگی۔

۸ - ایک مستدیر قرص ایک محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کی سطحِ مستوی پر عمود وار ہے یکساں زاویئی رفتار سھ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ ایک کیڑا اس کے کنارہ پر اُترتا ہے اور قرص پر کھینچے ہوئے دوچشمی کی شکل کے منحنی پر یکساں اضافی زاویئی رفتار $\frac{۱}{۲}$ سھ کے ساتھ حرکت کرتا ہے، دوچشمی[۵] قرص کے کنارہ کو مس کرتا ہے۔ کیڑے کی کمیّت قرص کی کمیّت کا $\frac{۱}{۱۶}$ ہے۔ ثابت کرو کہ کیڑے کے مرکز تک پہنچنے میں قرص جس زاویہ میں سے گھوم جائیگا وہ $\frac{۲۴}{۷\sqrt{۷}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ - $\frac{\text{ط}}{۴}$ کے مساوی ہوگا۔

۹ - ایک سلاخ ج ا جو ساکن ہے اپنے ایک سرے ج کے گرد افقی سطحِ مستوی میں آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ ایک کیڑا جس کی کمیّت سلاخ کی کمیّت کی ایک تہائی ہے دوسرے سرے ا پر اُترتا ہے اور سلاخ پر یکساں رفتار و کے ساتھ چلنا شروع کرتا ہے۔ اُسی آن میں سلاخ ج کے گرد اس طرح گھومنا شروع کرتی ہے کہ ا کی ابتدائی رفتار و ہے۔ ثابت کرو کہ جب کیڑا ج پر پہنچتا ہے سلاخ ایک زاویۂ قائمہ میں سے گھوم جاتی ہے اور اس وقت سلاخ کی

۵ lemniscate

زاویئی رفتار ابتدائی زاویئی رفتار کا دو چند ہوتی ہے۔

۱۰ ـ ایک ذرّہ جس کی کمیت م ہے ایک کھردری مستدیر نلی کے اندر جس کی کمیت ھ ہے حرکت کرتا ہے ۔ نلی ایک چکنی افقی سطحِ مستوی پر پڑی ہے اور ابتداءً نلی ساکن ہے اور ذرّہ نلی کے گرد کوئی زاویئی رفتار رکھتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اضافی حرکت کے بند ہونے تک ابتدائی توانائی بالحرکت کا حِصّہ $\frac{ھ}{ھ + ۲م}$ رگڑ سے ضائع ہوجاتا ہے۔

[مشترک مرکزِ ثقل کا خطی معیارِ حرکت اور اس کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر دونوں دورانِ حرکت میں مستقل رہتے ہیں] ۔

۱۱ ـ ایک سلاخ جس کا طول ۲ ا ہے اپنے ایک سرے کے گرد یکساں زاویئی رفتار کے ساتھ چکنی اُفقی سطحِ مستوی پر گھوم رہی ہے ۔ دفعتًہ اس سرے کو چھوڑ کر اس سرے سے فاصلہ ب پر کے نقطہ کو ثابت کردیا جاتا ہے ۔ حرکت معلوم کرو اور اُن صورتوں پر غور کرو جب کہ ب $\gtreqless \frac{۴ ا}{۳}$

۱۲ ـ ایک مستدیر قرص ایک محور کے گرد جو اِس کے مرکزِ ثقل میں سے اس کی سطحِ مستوی پر عمود وار ہے زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ اس محور کو چھوڑ کر قرص کے محیط پر کے ایک نقطہ کو ثابت کر دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ حاصل زاویئی رفتار $\frac{سہ}{۳}$ ہوگی ۔

۱۳ ـ ایک مساوی الاضلاع مثلث رقبہ ا ب ج کے کونوں کے ساتھ تین مساوی ذرّے بندھے ہیں ۔ مثلث کا وزن نظر انداز ہوسکتا ہے اور نظام اپنی سطحِ مستوی میں ا کے گرد گھوم رہا ہے ۔ ا کو چھوڑ کر ا ب کے وسطی نقطہ کو دفعتًہ ثابت کردیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ زاویئی رفتار نہیں بدلتی ۔

۱۴ ـ ایک یکساں مربع پترا ا ب ج د جس کی کمیت ھ اور جس کا ہر ضلع ۲ ا ہے ایک چکنی اُفقی سطحِ مستوی پر پڑا ہے ۔ اس سے کمیت ھ کا

ایک ذرّہ خط اب کی سمت میں حرکت کرتا ہوا ا پر متصادم ہوتا ہے اور پتڑے کے ساتھ لگا رہتا ہے ۔ نظام کی حاصل حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس کی زاویئی رفتار $\frac{م}{م + ۴ مَ} \times \frac{۳ و}{۱۲}$ ہوگی ۔

۱۵ ۔ ایک قطع ناقص کی شکل کا پتڑا اپنی سطح مستوی میں اپنے ایک ماسکہ کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے ۔ اس ماسکہ کو چھوڑ کر دوسرے ماسکہ کو پکڑ لیا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ناقص اب اس کے گرد زاویئی رفتار

$$سہ \frac{۲ - ۵ ز^{۲}}{۲ + ۳ ز^{۲}}$$

کے ساتھ گھومتا ہے ۔

۱۶ ۔ ایک ناقص جس کا خروج المرکز ز ہے ایک وترِ خاص کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے ۔ دفعۃً اس وترِ خاص کو چھوڑ کر دوسرا وترِ خاص ثابت کر دیا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ نئی زاویئی رفتار سہ $\frac{۱ - ۴ ز^{۲}}{۱ + ۴ ز^{۲}}$ ہو جائیگی ۔

۱۷ ۔ ایک یکساں مستدیر قرص اپنے ایک قطر کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے جب کہ اس کے محیط پر کے ایک نقطہ ن کو دفعۃً پکڑ لیا جاتا ہے ۔ اگر ن کا سمتی نیم قطر اس قطر کے ساتھ زاویہ عہ بنائے تو ثابت کرو کہ ن کے ثابت کر دینے کے بعد ن پر کے مماس اور عماد کے گرد زاویئی رفتاریں بالترتیب $\frac{۱}{۵}$ سہ جب عہ اور سہ جم عہ ہونگی ۔

۱۸ ۔ ایک مکعب اپنے ایک وتر کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے ۔ دفعۃً اس وتر کو چھوڑ کر ایک کنارہ کو جو اس وتر کو نہیں کاٹتا ثابت کر دیا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کنارہ کے گرد حاصل زاویئی رفتار $\frac{سہ}{۱۲}\sqrt{۳}$ ہوگی ۔

۱۹۔ ایک ناقص نما کا ایک ثمن جو تین صدر مستویوں سے محیط ہے محور و کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے، اس محور کو چھوڑ کر دفعۃً محور ب کو ثابت کر دیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ نئی زاویئی رفتار $\frac{\text{۲ و ب سہ}}{\pi\,(\text{و}^{۲} + \text{ج}^{۲})}$ ہوگی۔

توانائی کا تحفظ

۲۳۸۔ گزشتہ دفعات میں ہم نے بہت سی ایسی مثالیں دیکھی ہیں جن میں کسی ذرّہ یا نظامِ ذرّات کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی، اُس ذرّہ یا اُن ذرّات پر جو کام ہوا ہے اُس کے مساوی ہوتی ہے۔

اصولِ مذکورہ کا حسبِ ضابطہ دعوے بشکل ذیل پیش کیا جاسکتا ہے:

اگر کوئی نظام محدود قوتوں کے زیرِ عمل حرکت کرے اور اگر نظام کی ہندسی مساواتوں میں وقت تصریحی طور پر شامل نہ ہو تو نظام کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی جب کہ نظامِ مذکور ایک وضع سے دوسری وضع میں منتقل ہو قوتوں کے متناظر کام کے مساوی ہوتی ہے۔

دفعہ ۱۶۱ کی رُو سے

$$\text{ہ} = \text{م}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}،\quad \text{ما} = \text{م}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}}،\quad \text{ے} = \text{م}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ی}}{\text{فرت}^{۲}}$$

نقطہ (لا، ما، ی) پر عمل کرتی ہوئی اور اسی قسم کی اَور قوتیں جسم کے دیگر ذرّات پر عمل کرتی ہوئی قوتوں کا ایک متعادل نظام بناتی ہیں۔

فرض کرو کہ مف لا، مف ما، مف ی چھوٹے موہوم ہٹاؤ ہیں ذرّہ م کے جو لا، ما، ی پر ہے۔ اور وقت ت پر نظام کے جو ہندسی شرائط ہیں یہ ہٹاؤ ان کے منافی نہیں ہیں۔

تب موہوم کام کا اصول یہ بیان کرتا ہے کہ

$$\Sigma\left[\left(\overline{\text{لا}}-\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}}\right)\text{مف لا}+\left(\overline{\text{ما}}-\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرت}^{2}}\right)\text{مف ما}+\left(\overline{\text{ے}}-\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فرت}^{2}}\right)\text{مف ی}\right]=0$$

اگر نظام کے ہندسی روابط میں وقت تصریحی طور پر شامل نہیں ہے تو ہم مف لا، مف ما، مف ی کو اصلی ہٹاؤں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{مف ت}،\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\,\text{مف ت}\quad \text{اور}\quad \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\,\text{مف ت}$$

میں بدل سکتے ہیں۔

اس طرح مساوات بالا سے حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma\,\text{م}\left[\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}+\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرت}^{2}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}+\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فرت}^{2}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right]$$

$$=\Sigma\left(\overline{\text{لا}}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}+\overline{\text{ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}+\overline{\text{ے}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)$$

بلحاظ ت کے تکمل کرنے سے

$$\frac{1}{2}\,\Sigma\,\text{م}\left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{2}+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{2}+\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)^{2}\right]_{\text{ت}_{1}}^{\text{ت}}$$

$$=\Sigma\int\left(\overline{\text{لا}}\,\text{فرلا}+\overline{\text{ما}}\,\text{فرما}+\overline{\text{ے}}\,\text{فری}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

یعنی نظام کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی وقت $\text{ت}_{۱}$ سے $\text{ت}_{۲}$ تک اُس کام کے مساوی ہے جو بیرونی قوتیں جسم پر، اس کو $\text{ت}_{۱}$ پر کی وضع سے $\text{ت}_{۲}$ پر کی وضع میں لانے میں سرانجام دیتی ہیں۔

۲۳۹ - اگر قوتیں ایسی ہوں کہ $\int (\text{لا}\ \text{فرلا} + \text{ما}\ \text{فرما} + \text{سے}\ \text{فری})$ کسی مقدار **و** کا کامل تفرقہ ہو یعنی جب قوتوں کا کوئی قوہ تفاعل و موجود ہو تو مقدار $\int (\text{لا}\ \text{فرلا} + \text{ما}\ \text{فرما} + \text{سے}\ \text{فری})$ کی قیمت اُس راستہ سے مستغنی ہوتی ہے جو جسم اپنی ابتدائی وضع سے آخری وضع میں آنے کے لیے اختیار کرتا ہے، اور صرف وقت $\text{ت}_{۱}$ اور $\text{ت}_{۲}$ پر جسم کی وضع پر منحصر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں قوتوں کو **تحفظی قوتیں** کہتے ہیں۔

وقت $\text{ت}_{۱}$ اور $\text{ت}_{۲}$ پر جسم کی وضعوں کو ا اور ب سے تعبیر کرو۔ دفعۂ ماقبل کی مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے:

$$\left.\begin{array}{r}\text{وقت ت}_{۲}\ \text{پر جسم کی توانائی بالحرکت}\\ -\ \text{وقت ت}_{۱}\ \text{پر جسم کی توانائی بالحرکت}\end{array}\right\} = \int_{ا}^{ب} \text{مف}\,\text{و} = \text{و}_{ب} - \text{و}_{ا}$$

(۲)..........

کسی محل میں جسم کی توانائی بالقوہ سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو قوتیں جسم پر انجام دیتی ہیں جب کہ جسم موجودہ محل سے کسی معیاری محل تک حرکت کرتا ہے۔ مؤخر الذکر محل میں اس کی وضع کو ج سے تعبیر کرو، تب

وقت $\text{ت}_{۱}$ پر توانائی بالقوہ

$$= \int_{ا}^{ج} (\text{لا}\ \text{فرلا} + \text{ما}\ \text{فرما} + \text{سے}\ \text{فری}) = \int_{ا}^{ج} \text{مف}\,\text{و} = \text{و}_{ج} - \text{و}_{ا}$$

(۳)..........

اسی طرح وقت $\text{ت}_{۲}$ پر توانائی بالقوہ

$$= \int_{ب}^{ج} (\text{لا}\ \text{فرلا} + \text{ما}\ \text{فرما} + \text{سے}\ \text{فری}) = \int_{ب}^{ج} \text{مف}\,\text{و} = \text{و}_{ج} - \text{و}_{ب}$$

پس مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے:

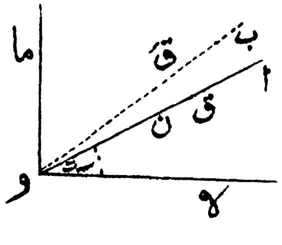
توانائی بالحرکت وقت ت$_2$ پر ۔ توانائی بالحرکت وقت ت$_1$ پر } = { توانائی بالقوہ وقت ت$_1$ پر ۔ توانائی بالقوہ وقت ت$_2$ پر

یعنی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ وقت ت$_1$ پر
= توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ وقت ت$_2$ پر

پس جب کوئی جسم تحفظی قوتوں کے کسی نظام کے زیرِ عمل حرکت کرے تو توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ دورانِ حرکت میں مستقل رہتا ہے۔

۲۴۰۔ یہ امر کہ ہندسی مساواتوں میں وقت تصریحی طور پر شامل نہیں ہونا چاہیے اس مثال پر غور کرنے سے بخوبی واضح ہو جائیگا۔ فرض کرو کہ جسم کوئی ذرّہ ہے اور ایک چکنی سطح مستوی پر حرکت کر رہا ہے۔ یہ سطح ایک افقی محور کے گرد (جس میں سے یہ ہمیشہ گزرتی ہے) یکساں حرکت کر رہی ہے۔ ذرّہ بلحاظ سطح مستوی کے اضافی سکون سے روانہ ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ وقت ت پر سطح مستوی و ا ہے اور اس وقت ذرہ کا مقام ن ہے و ب اور قَ متناظر محل ہیں
وقت ت + مف ت پر،



تب $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$

رفتاریں ہیں وقت ت پر، اور

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ مف ت اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ مف ت

متناظر فاصلے ہیں جو وقت مف ت میں

محوروں کے متوازی طے ہوئے ہیں، لہٰذا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ مف ت اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ مف ت ظل ہیں ن ق کے محوروں پر۔

اب مف لا اور مف ما موہوم کام کے اصول کے مطابق ظل ہیں ایک ایسے چھوٹے ہٹاؤ کے جو وقت ت پر نظام کے ھندسی شرائط کے مطابق ھے، یعنی سطح مستوی و ۱ پر کے ایک چھوٹے ہٹاؤ کے۔

پس مف لا اور مف ما، ن ق کی قسم کے کسی ہٹاؤ کے ظل ہیں۔

پس اس صورت میں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ مف ت اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ مف ت بالترتیب مف لا اور مف ما کی بجائے نہیں لکھے جا سکتے۔

نیز اس صورت میں ہندسی ربط ہے $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ = مس ۱و۷ = مس سہ ت

جس میں وقت تصریحی طور پر شامل ہے۔

یہ استدلال عام صورت پر صادق آتا ہے جب کہ ہندسی ربط ہو:

فہ (لا، ما، ی، ت) = ۰ .... (۱)

کیونکہ یہ مساوات ہر وقت ت کے لیے ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے جس پر ن اور موہوم ہٹاؤ ن ق واقع ہوگا۔

لیکن $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ مف ت، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ مف ت اور $\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$ مف ت محوروں پر ظل ہیں ن قَ کے جہاں قَ قریب کی سطح

فہ (لا، ما، ی، ت + مف ت) = ۰ .... (۲)

پر واقع ہے۔

پس مف لا، مف ما، مف ی کی بجائے

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ مف ت، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ مف ت اور $\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$ مف ت

نہیں لکھا جا سکتا تا وقتیکہ سطحیں (۱) اور (۲) منطبق نہ ہوں، یعنی تا وقتیکہ وقت ت پر ہندسی شرائط وقت ت + مف ت پر کے ہندسی شرائط کے بالکل مطابق نہ ہوں۔ یہ اُس صورت میں ہوگا جب کہ ہندسی مساوات میں وقت تصریحی طور پر شامل نہ ہو۔

۲۴۱ — دفعہ ۲۳۸ کے نتیجہ میں ایسی سب قوتوں کو ترک کر سکتے ہیں جو موہوم کام کی مساوات میں شامل نہیں ہوتیں۔ یعنی اُن سب قوتوں کو جن کا موہوم کام صفر ہو۔

مثلاً لڑھکنے کے عمل میں جو رگڑ ظہور پذیر ہوتی ہے اُس کو ترک کر سکتے ہیں کیونکہ اِس قسم کی رگڑ کا نقطۂ عمل ایک آن کے لیے ساکن ہوتا ہے لیکن پھسلنے کے عمل کی رگڑ کو نظر انداز نہیں کر سکتے کیونکہ اِس کا نقطۂ عمل ساکن نہیں رہتا۔

اسی طرح چکنی ثابت سطحوں کے تعاملوں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور بالعموم ایسی سب قوتوں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے جن کی سمتِ عمل نقطۂ عمل کی حرکت کی سمت پر عمود وار ہو۔

اسی طرح کسی ناقابلِ امتداد رسی کے تناؤں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ تناؤ بوجہ رسی کے طول کے مستقل رہنے کے، کوئی کام انجام نہیں دیتے۔ لیکن لچکدار رسی کے تناؤ کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا کیونکہ لچکدار رسی کو طول ا سے طول ب تک کھینچنے میں مندرجۂ ذیل کام انجام پاتا ہے۔

(ب - ا) × ابتدائی اور آخری تناؤں کا اوسط۔

اسی طرح، اگر دو استوار جسم ایک دوسرے پر لڑھکیں اور ہم دونوں جسموں کو ایک نظام تصور کر کے اِن کی توانائی کی مساوات لکھیں تو ہم اِن کے درمیان جو تعامل ہے اس کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔

۲۴۲ — ایک استوار جسم کسی طرح حرکت کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی توانائی بالحرکت کسی آن میں

مساوی ہوتی ہے کل کمیّت کی توانائی بالحرکت کے جو مرکزِ جمود پر مکثف فرض کی جائے اور اس کے ساتھ حرکت کر رہی ہو مع، اس کے ہر مرکزِ جمود کے لحاظ سے کل کمیّت کی توانائی بالحرکت کے ۔

فرض کرو کہ بلحاظ فضا کے ثابت محوروں کے لحاظ سے کسی آن ت میں مرکزِ جمود کے محدد ($\bar{\text{لا}}$ ، $\bar{\text{ما}}$ ، $\bar{\text{ی}}$) ہیں اور جسم کے کسی جزو م کے محدد (لا، ما، ی) نیز فرض کرو کہ مرکزِ جمود ث کے لحاظ سے آنِ مذکور میں جزوِ مذکور م کے محدد (لاَ ، ماَ ، یَ) ہیں ۔ تب

$$\text{لا} = \bar{\text{لا}} + \text{لاَ} \text{ ، } \text{ما} = \bar{\text{ما}} + \text{ماَ} \text{ اور } \text{ی} = \bar{\text{ی}} + \text{یَ}$$

تب جسم کی کل توانائی بالحرکت

$$= \frac{1}{2}\Sigma\,\text{م}\left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma\,\text{م}\left[\left(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}\bar{\text{ی}}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فریَ}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma\,\text{م}\left[\left(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}\bar{\text{ی}}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\Sigma\,\text{م}\left[\left(\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فریَ}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\Sigma\,\text{م}\left(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\cdot\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}}\cdot\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}\bar{\text{ی}}}{\text{فرت}}\cdot\frac{\text{فریَ}}{\text{فرت}}\right) \cdots\cdots (1)$$

اب چونکہ (لاَ ، ماَ ، یَ) جزو م کے محدد ہیں بلحاظ مرکزِ جمود ث کے،

$$\therefore \frac{\Sigma\,\text{م لاَ}}{\Sigma\,\text{م}} = \text{مرکزِ جمود کا لا محدد بلحاظ خود ث کے} = 0 .$$

∴ Σ م لاَ = ۰، ت کی سب قیمتوں کے لیے

$$\therefore \sum \text{م} \frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \sum \text{م لاَ} = 0$$

$$\therefore \sum \text{م} \frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} \frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \times \sum \text{م} \frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = 0$$

اسی طرح لا کی بجائے بالترتیب ما اور ی لکھنے سے

$$\sum \text{م} \frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}} \cdot \frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}} = 0 \quad \text{اور} \quad \sum \text{م} \frac{\text{فریَ}}{\text{فرت}} \cdot \frac{\text{فریَ}}{\text{فرت}} = 0$$

نیز
$$\sum \text{م} \left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)^2 \right]$$

$$= \text{م} \times \left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)^2 \right]$$

= م و² جہاں و رفتار ہے مرکزِ جمود کی ۔

اور
$$\frac{1}{2} \sum \text{م} \left[\left(\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فریَ}}{\text{فرت}}\right)^2 \right]$$

= ½ Σ م × بلحاظ ث کے م کی رفتار کا مربع

= ث کے لحاظ سے جسم کی توانائی بالحرکت

پس (۱) سے حاصل ہوتا ہے کہ جسم کی کل توانائی بالحرکت = کمیت م کی توانائی بالحرکت جو مرکزِ جمود ث پر مکثف ہو اور اس کے ساتھ حرکت کر رہا ہو + بلحاظ ث کے جسم کی توانائی بالحرکت

۳۴۳ ۔ تین ابعاد کی فضا میں مرکزِ جمود کے لحاظ سے توانائی بالحرکت ۔

فرض کرو کہ $\text{سہ}_{\text{لا}}$، $\text{سہ}_{\text{ما}}$، $\text{سہ}_{\text{ی}}$ جسم کی زاویئی رفتاریں ہیں، محوروں کے

متوازی ث میں سے گزرنے والے خطوں کے گرد۔

تب حسب دفعہ ۲۲۷،

$$\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}} = \text{ی}\,\text{سہ}_{\text{ما}} - \text{ما}\,\text{سہ}_{\text{ی}}\,,\quad \frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}} = \text{لا}\,\text{سہ}_{\text{ی}} - \text{ی}\,\text{سہ}_{\text{لا}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فریَ}}{\text{فرت}} = \text{ما}\,\text{سہ}_{\text{لا}} - \text{لا}\,\text{سہ}_{\text{ما}}$$

پس مرکزِ جمود کے لحاظ سے توانائی بالحرکت

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{م}\left[\left(\frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرماَ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فریَ}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{م}\Big[\text{سہ}_{\text{لا}}^2\,(\text{ما}^2+\text{ی}^2) + \text{سہ}_{\text{ما}}^2\,(\text{ی}^2+\text{لا}^2) + \text{سہ}_{\text{ی}}^2\,(\text{لا}^2+\text{ما}^2) - 2\,\text{ما}\,\text{ی}\,\text{سہ}_{\text{ما}}\text{سہ}_{\text{ی}}$$
$$- 2\,\text{ی}\,\text{لا}\,\text{سہ}_{\text{ی}}\text{سہ}_{\text{لا}} - 2\,\text{لا}\,\text{ما}\,\text{سہ}_{\text{لا}}\text{سہ}_{\text{ما}}\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\text{ا}\,\text{سہ}_{\text{لا}}^2 + \text{ب}\,\text{سہ}_{\text{ما}}^2 + \text{ج}\,\text{سہ}_{\text{ی}}^2 - 2\,\text{د}\,\text{سہ}_{\text{ما}}\text{سہ}_{\text{ی}} - 2\,\text{ع}\,\text{سہ}_{\text{ی}}\text{سہ}_{\text{لا}} - 2\,\text{ف}\,\text{سہ}_{\text{لا}}\text{سہ}_{\text{ما}}\right]$$

جہاں ا، ب، ج مرکزِ جمود ث میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے گرد جمود کے معیارِ اثر ہیں اور د، ع، ف انہی محوروں کے گرد جمود کے حاصل ضرب ہیں۔

اگر یہ محور، ث پر جسم کے صدر محور ہوں تو توانائی بالحرکت ہو جاتی ہے

$$\tfrac{1}{2}\left[\text{ا}\,\text{سہ}_{\text{لا}}^2 + \text{ب}\,\text{سہ}_{\text{ما}}^2 + \text{ج}\,\text{سہ}_{\text{ی}}^2\right]$$

۲۴۴ ـ مشق ۱ ـ ایک کھڑکی کی جھلملی کا طول ل اور کمیّت م ہے، یہ ایک اُفقی بیلن کے ساتھ جس کی کمیّت م ہے بندھی ہے ـ اس کے آزاد سرے کے ساتھ ایک افقی سلاخ جس کی کمیّت مہ ہے ثابت کر دی گئی ہے ـ جھلملی جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل کھلنا شروع کرتی ہے ـ رگڑ کو نظرانداز کر کے ثابت کرو کہ وقت ت میں جھلملی کا طول $\frac{\text{مہ}\,\text{ل}}{\text{م}}$ (جمز ع ت ـ ۱) کھل جائیگا

جہاں $عہ = \sqrt{\frac{ج}{ل}\cdot\frac{۲م}{ھ + ۲م + ۲مہ}}$ اور جھلی کی موٹائی کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

جب جھلی کا طول لا کھل جاتا ہے تو اس کا ہر ایک نقطہ رفتار $\dot{لا}$ سے حرکت کرتا ہے، اور بیلن کی زاویئی رفتار $\frac{\dot{لا}}{ر}$ ہوتی ہے جہاں ر اس کا نصف قطر ہے۔

کُل توانائی بالحرکت

$$= \frac{۱}{۲}م\,\dot{لا}^{۲} + \frac{۱}{۲}مہ\,\dot{لا}^{۲} + \frac{۱}{۲}ھ\,ک^{۲}\,سہ^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}م\,\dot{لا}^{۲} + \frac{۱}{۲}مہ\,\dot{لا}^{۲} + \frac{۱}{۴}ھ\,\dot{لا}^{۲}$$

$$= \frac{\dot{لا}^{۲}}{۴} \times \frac{۲م\,ج}{ل\,عہ^{۲}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{م\,ج}{ل\,عہ^{۲}} \times \dot{لا}^{۲}$$

توانائی اور کام کے اصول سے

$$\frac{۱}{۲}\,\frac{م\,ج}{ل\,عہ^{۲}}\,\dot{لا}^{۲} = مہ\,ج\,لا + \frac{م\,لا}{ل}\,ج\,\frac{لا}{۲}$$

یعنی $\dot{لا}^{۲} = عہ^{۲}\left[لا^{۲} + \frac{۲مہ}{م}\,ل\,لا\right]$

$$\therefore\; ت \times عہ = \int \frac{فرلا}{\sqrt{\left(لا + \frac{مہ\,ل}{م}\right)^{۲} - \frac{مہ^{۲}ل^{۲}}{م^{۲}}}} = جمز^{-۱}\,\frac{لا + \frac{مہ\,ل}{م}}{\frac{مہ\,ل}{م}}$$

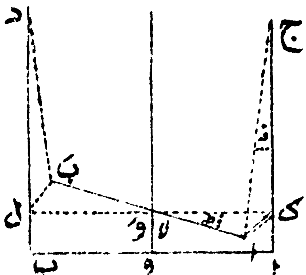
مستقل صفر ہے کیونکہ لا اور ت ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں۔

$$\therefore\; لا = \frac{مہ\,ل}{م}\left[جمز\,عہ\,ت - ۱\right]$$

مشق ۲ - ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲ ک ہے دو انتصابی رسیوں کے ذریعے جن میں سے ہر ایک کا طول ل ہے اور جو اس کے سروں کے ساتھ بندھی ہیں افقی محل میں لٹک رہی ہے - سلاخ کے مرکز میں سے جو انتصابی خط گزرتا ہے اس کے گرد سلاخ کو زاویئی رفتار س دی گئی ہے - جب یہ کسی زاویہ میں گھوم چکے تو اس کی زاویئی رفتار معلوم کرو اور نیز بتاؤ کہ یہ فاصلہ $\frac{\text{ک}^2\text{س}^2}{\text{۶ج}}$ میں سے اوپر اٹھیگی -

نیز ثابت کرو کہ تعادل کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت $۲\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{۳ج}}}$ ہوگی -

فرض کرو کہ ابتداءً سلاخ کا محل اب ہے اور انتصابی رسیاں ج ا اور د ب ہیں، اَبَ اس کا محل ہے جب کہ یہ انتصابی فاصلہ لا میں سے اوپر اٹھتی ہے اور زاویہ طہ میں سے گھوم گئی ہے - فرض کرو کہ اَبَ میں سے گزرنے والی افقی سطح مستوی ج ا اور ب د کو ک اور ل پر کاٹتی ہے نیز $\angle$ اَج ا = فہ



تب توانائی کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{2}$ م لاَ^{2} + $\frac{1}{2}$ م ک^2 طہَ^{2} = $\frac{1}{2}$ م ک^2 س^2 − م ج لا .... (۱)

اب چونکہ $\angle$ اَک ج قائمہ ہے -

$\therefore$ لا = اج − ج ک = ل − ل جم فہ .... (۲)

جہاں ل انتصابی رسّی کا طول ہے ۔

نیز $\text{ل جب فہ} = \text{اَک} = ۲\ \text{ا جب} \frac{\text{طہ}}{۲}$ ....(۳)

$\therefore\ \text{لَ} = \text{ل جب فہ فہَ} = \text{مس فہ} \times \text{ا جم} \frac{\text{طہ}}{۲}\ \text{طہَ} = \frac{\text{ا}^{۲}\ \text{جب طہ طہَ}}{۲\sqrt{\text{ل}^{۲} - ۴\ \text{ا}^{۲}\ \text{جب}^{۲} \frac{\text{طہ}}{۲}}}$

پس مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲}\ \text{م ا}^{۲}\ \text{طَ}^{۲} \left[\frac{\text{ا}^{۲}\ \text{جب}^{۲}\ \text{ط}}{\text{ل}^{۲} - ۴\ \text{ا}^{۲}\ \text{جب}^{۲} \frac{\text{ط}}{۲}} + \frac{۱}{۳} \right] = \frac{۱}{۲}\ \text{م} \times \frac{\text{ا}^{۲}}{۳} \times \text{سہ}^{۲} - \text{م ج لا} \ldots\ldots(۴)$$

اس مساوات سے کسی مقام میں زاویئی رفتار حاصل ہوتی ہے ۔ جب سلاخ فوری سکون میں آتی ہے تو $\text{طَ} = ۰$ ۔ یعنی $\text{لا} = \frac{\text{ا}^{۲}\text{سہ}^{۲}}{۶\ \text{ج}}$ ۔

چھوٹے اہتزاز کے لیے، وَ کے گرد معیارِ اثر لینے سے، اگر ت کسی رسّی کا تناؤ ہو

$$\text{م} \frac{\text{ا}^{۲}}{۳}\ \text{طً} = -\ ۲\ \text{ت جب فہ} \times \text{وَ سے اَک پر عمود}$$

$$= -\ \text{ت جب فہ} \times ۲\ \text{ا جم} \frac{\text{طہ}}{۲}$$

$$= -\ \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ل}}\ \text{ت جب ط} \ldots\ldots\ldots\ldots(۵)$$

نیز $۲\ \text{ت جم فہ} - \text{م ج} = \text{م لاً} = \text{م} \frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فرت}^{۲}} \left(\frac{\text{ل}}{۲}\ \text{فہ}^{۲} \right)$ جہاں فہ چھوٹا ہے۔

$$= \frac{\text{م ا}^{۲}}{۲\text{ل}} \times \frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فرت}^{۲}} (\text{ط}^{۲}) = \frac{\text{م ا}^{۲}}{۲\text{ل}} (۲\text{طَ}^{۲} + ۲\ \text{ط طً}) \ldots\ldots(۶)$$

یعنی رتبہ اول کی چھوٹی مقداروں تک ۲ ت ۔ م ج = ۔
اس لیے (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$م \frac{ا^2}{۳} طً = -\frac{م ا^2}{ل} ج \times ط \quad یعنی \quad طً = -\frac{۳ج}{ل} ط$$

$$پس\ مطلوبہ\ مدت = ۲\pi \sqrt{\frac{ل}{۳ج}}$$

مشق ۳ ۔ ایک یکساں سلاخ کا طول ۲ ا ہے، اس کے ایک سرے کو ایک چکنے اُفقی میز پر رکھا گیا ہے اور اس کو آزادانہ گرنے کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے ۔ اگر ع اس کا ابتدائی میلان ہو سمتِ انتصابی کے ساتھ، تو ثابت کرو کہ جب میلان ط ہوگا تو اس کی زاویئی رفتار

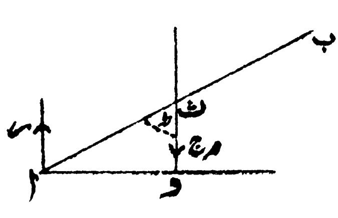
$$\left[\frac{۶ج}{ا} \times \frac{جم\,ع - جم\,ط}{۱ + ۳\,جب^2 ط}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ہوگی ۔

نیز میز کا تعامل دریافت کرو ۔

سلاخ پر کوئی اُفقی قوت عمل نہیں کرتی ۔ اس لیے دورانِ حرکت میں اس کے مرکزِ جمود ث کی کوئی اُفقی رفتار نہیں ہے، کیونکہ ابتداءً اُفقی رفتار صفر ہے ۔

پس ث انتصابی خطِ مستقیم ث د مرتسم کرتا ہے ۔ جب سلاخ کا میلان خطِ انتصابی کے ساتھ ط ہو تو اس کی توانائی بالحرکت



$$= \frac{1}{2} م \left\{\frac{د}{دت}(ا\,جم\,ط)\right\}^2 + \frac{1}{2} م \frac{ا^2}{۳} طً^2$$

$$= \frac{1}{2} م\, ا^2 طً^2 \left(جب^2 ط + \frac{1}{3}\right)$$

کام جو ہوا وہ $= \text{م ج ا} \left(\text{جم ع} - \text{جم ط}\right)$ توانائی اور کام کو مساوی کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ط}'^{2} = \frac{\text{۶ ج}}{\text{ا}} \cdot \frac{\text{جم ع} - \text{جم ط}}{\text{۱} + \text{۳ جب}^{2}\text{ط}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

تفرق کرنے سے

$$\text{ط}'' = \frac{\text{۳ ج جب ط}}{\text{ا}} \times \frac{\text{۴} - \text{۶ جم ع جم ط} + \text{۳ جم}^{2}\text{ط}}{\left(\text{۱} + \text{۳ جب}^{2}\text{ط}\right)^{2}}$$

نیز ث کی انتصابی حرکت کے لیے

$$\text{س} - \text{م ج} = \text{م} \frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}} \left(\text{ا جم ط}\right) = \text{م} \left[-\text{ا جب ط ط}'' - \text{ا جم ط ط}'^{2}\right]$$

مندرج کرنے سے

$$\text{س} = \text{م ج} \, \frac{\text{۴} - \text{۶ جم ط جم ع} + \text{۳ جم}^{2}\text{ط}}{\left(\text{۱} + \text{۳ جب}^{2}\text{ط}\right)^{2}}$$

مثالیں

۱ ۔ ایک یکساں سلاخ کا طول اور کمیت دونوں معلوم ہیں۔ اس کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ کے ساتھ قبضہ کے ذریعہ وصل کر دیا گیا ہے اور اس کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک رسّی بندھی ہے جو ایک ہلکی چرخی پر سے گزرتی ہے۔ چرخی ثابت نقطہ کی ہمواری پر واقع ہے۔ رسّی کے دوسرے سرے کے ساتھ معلومہ کمیت کا ایک ذرّہ بندھا ہے۔ سلاخ متوازی اُفقی حل سے گرتی ہے۔ معلوم کرو کہ وزن کتنی دُور اوپر اٹھتا ہے۔

۲ ۔ ایک ہلکی لچکدار رسّی کا قدرتی طول ۲ ا ہے، اس کا ایک سرا ا ثابت ہے اور دوسرا سرا ب ایک یکساں سلاخ ب ج کے سرے کے ساتھ بندھا ہے۔

سلاخ کا طول ۲ ا اور کمیّت م ہے۔ سلاخ انتصابی سطح مستوی میں اپنے دوسرے سرے ج کے گرد جو ا کے عین نیچے ۲ ا فاصلے پر ثابت ہے گھوم سکتی ہے۔ ابتدائً سلاخ انتصابی ہے اور ذرا سا ہٹا دینے سے گرتی ہے حتیٰ کہ متوازی الافق ہو جاتی ہے اور پھر اوپر اُٹھتی ہے۔ ثابت کرو کہ لچک کی قدر

$$\text{م ج } (\text{۳} + \text{۲}\sqrt{\text{۲}})$$

ہے جہاں ج اسراع بجاذبۂ ارض ہے۔

۳۔ ایک یکساں سلاخ ایک انتصابی سطح مستوی میں حرکت کرتی ہے اور اس کے سرے ثابت چکنے کُرہ کو اندر کی طرف مَس کرتے ہیں۔ جب اس کا میلان افق کے ساتھ ط ہو تو ثابت کرو کہ اس کی زاویئی رفتار کا مربع

$$\frac{\text{۶ ف ج}}{\text{۳ ف}^{\text{۲}} + \text{ا}^{\text{۲}}} (\text{جم ط} - \text{جم ع})$$

ہوگا' جہاں ع، ط کی ابتدائی قیمت ہے' ۲ا سلاخ کا طول ہے' اور ف کرہ کے مرکز سے سلاخ کے وسطی نقطہ کا فاصلہ ہے۔

۴۔ ایک نصف کرہ کو جس کی کمیّت ھ اور نصف قطر ا ہے ایک مستوی میز پر قاعدہ کے بل رکھا گیا ہے اور م کمیّت کی ایک وزنی سلاخ ایک انتصابی خط میں حرکت کرنے کے لیے مقید ہے اور اس کا ایک سران نصف کرہ کی منحنی سطح پر حرکت کرتا ہے۔ اگر کسی وقت ت پر ن کا نصف قطر خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}\,\dot{\text{ط}}^{\text{۲}} \left[\text{ھ جم}^{\text{۲}}\text{ط} + \text{م جب}^{\text{۲}}\text{ط}\right] = \text{۲ م ج} \left[\text{جم ع} - \text{جم ط}\right]۔$$

۵۔ ایک یکساں سلاخ کو جس کا طول ۲ ا ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا ایک سرا ایک چکنی افقی سطح مستوی پر ہے۔ اس سرے کو ایک ہلکی ناقابل کھنچاؤ رسّی کے ذریعہ سطح مستوی پر کے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ رسّی تنی ہوئی ہے اور سلاخ میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی میں واقع ہے اور سلاخ کے ساتھ ایک حادّہ زاویہ ع بناتی ہے۔ اب اگر سلاخ کو جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل گرنے دیا جائے تو اس کا میلان اُفق کے ساتھ معلوم کرو جب کہ رسّی

تنی ہوئی نہ رہے اور ثابت کرو کہ اِس کے متوازی الافق ہونے سے عین پہلے اس کی زاویئی رفتار سھ مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$\text{۶ ا سھ}^{\text{۲}} = \text{ج جب عہ}\,(\text{۸} + \text{جم}^{\text{۲}}\,\text{عہ})$$

۶ ۔ ایک یکساں سیدھی سلاخ ہے جس کا طول ۲ ا ہے ۔ اس کے سروں پر دو چھوٹے حلقے ہیں جو چکنے افقی اور انتصابی تاروں و ا، و ما پر پھسلتے ہیں سلاخ ایسے محل سے جو اُفق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے زاویئی رفتار

$$\sqrt{\frac{\text{۳ ج}}{\text{۲ ا}}\,(\text{۱} - \text{جب عہ})}$$

کے ساتھ روانہ ہوتی ہے اور نیچے کی طرف حرکت کرتی ہے، ثابت کرو کہ یہ افقی تار سے وقت

$$\text{۲}\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{۳ ج}}}\;\text{لوک}\left\{\text{مم}\left(\frac{\pi}{\text{۸}} - \frac{\text{عہ}}{\text{۴}}\right)\text{مس}\,\frac{\pi}{\text{۸}}\right\}$$

کے بعد متصادم ہوتی ہے ۔

۷ ۔ ایک سیدھی یکساں سلاخ کو جس کی کمیّت م ہے میلان عہ کی ایک چکنی سطح مستوی پر اس طرح علی القوائم رکھا گیا ہے کہ اس کا ایک سرا سطح مذکور پر ٹِکا ہوا ہے ۔ اب سلاخ کو چھوڑ دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ جب اِس کا میلان سطح مستوی کے ساتھ فہ ہوگا تو سطح مستوی کا تعامل $\text{م ج}\,\frac{\text{۳}(\text{۱} - \text{جب فہ})^{\text{۲}} + \text{۱}}{(\text{۳ جم}^{\text{۲}}\,\text{فہ} + \text{۱})^{\text{۲}}}\,\text{جم عہ}$ ہوگا ۔

۸ ۔ ایک حلقہ کی کمیّت مہ ہے ۔ اس کے محیط کے ساتھ کمیّت م کا ایک ذرّہ بندھا ہے ۔ حلقہ ایک کھردری سطح مستوی پر پھسلتا ہے، حرکت معلوم کرو ۔

۹ ۔ دو یکساں سلاخوں ا ب اور ب ج کو ب پر آزادانہ واصل کیا گیا ہے ۔ ہر سلاخ کا طول ۲ ا ہے، ا ب سرے ا کے گرد گھوم سکتا ہے، اور ج، ا میں سے گزرنے والے انتصابی خطِ مستقیم پر آزادانہ حرکت کرسکتا ہے ۔ ابتداءً سلاخوں کو ایک افقی خط میں تھاما گیا ہے اور ج، ا پر منطبق ہے، اب

اِن کو چھوڑ دیا گیا ہے - ثابت کرو کہ جب سلاخیں افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہیں تو ہر ایک کی زاویئی رفتار $\sqrt{\frac{\text{۳ج}}{\text{ا}}} \times \frac{\text{جب طہ}}{\text{۱} + \text{۳ جم}^{\text{۲}}\text{طہ}}$ ہوتی ہے -

۱۰ - ایک کرہ جس کا نصف قطر ب ہے پھسلنے کے بغیر ایک خطِ تدویر

$$\text{لا} = \text{ا (طہ + جب طہ)،} \quad \text{ما} = \text{ا (۱ - جم طہ)}$$

پر، نیچے کی طرف پھسلتا ہے، ابتداءً یہ ساکن تھا اور اس کا مرکز، افقی خط ما = ۲ا پر تھا - ثابت کرو کہ جب یہ سب سے نچلے نقطہ پر ہو اور اس وقت اس کی رفتار و ہو تو و مساواتِ ذیل سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{و}^{\text{۲}} = \frac{\text{۱۰}}{\text{۷}}\,\text{ج (۲ا - ب)}$$

۱۱ - ایک رسّی کا طول ۲ل ہے، اس کے سرے ایک ہی افقی سطحِ مستوی پر کے دو نقطوں کے ساتھ جن کا درمیانی فاصلہ ۲ب ہے بندھے ہیں - رسّی کے وسطی نقطہ پر کمیّت م کا ایک ذرّہ ہے - ایک یکساں سلاخ ہے جس کا طول ۲ا اور کمیّت مہ ہے، اس کے دونوں سروں پر دو حلقوں میں سے اول الذکر رسّی گزرتی ہے - سلاخ متشاکل محل سے جو رسّی کے سروں کو ملانے والے خط کی سیدھ میں ہے گرنا شروع کرتی ہے - ثابت کرو کہ سلاخ ذرّہ تک نہ پہنچیگی اگر

$$\text{(ل + ب - ۲ا)} \times \text{(مہ + ۲م) مہ} > \text{۲ (۲ا - ب) م}^{\text{۲}}$$

اگر مہ = م اور ب = ا اور ذرّہ کو محلِ تعادل سے ذرا سا انتصابی ہٹاؤ دیا جائے تو ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزاز کی مدّت $\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}\sqrt{\frac{\text{۲}\sqrt{\text{۳}}\,\text{ا}}{\text{ج}}}$ ہوگی -

۱۲ - دو مساوی مکمل طور پر کھردرے کُرے تعادلِ غیرقائم کے محل میں ایک دوسرے کے اوپر دھرے ہیں - نیچے کا کُرہ ایک چکنے اُفقی میز پر ساکن ہے - اگر تعادل میں خلل پیدا کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ کُرے ایک دوسرے سے اُسی نقطہ پر مَس کرتے رہینگے اور جب اُن کے مرکزوں کو ملانے والا خطِ مستقیم

سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو اِس کی زاویئی رفتار سہ مساواتِ ذیل سے حاصل ہوگی $\text{ا}^2\,\text{سہ}^2\,(\text{۵ جب}^2\,\text{طہ}+\text{۷})=\text{۱۰ ج ا}\,(\text{۱}-\text{جم طہ})$ جہاں ا ہر ایک کرہ کا نصف قطر ہے۔

۱۳ - ایک چھوٹی موٹائی تہ کی ایک ناقابل کھنچاؤ یکساں پٹی ایک پتلے ثابت محور کے گرد اس طرح لپٹی ہوئی ہے کہ اس سے نصف قطر ب کا ایک لچھا بنتا ہے۔ لچھے کو اس قدر کھولا گیا ہے کہ پٹی کا طول لا آزادانہ لٹکتا ہے۔ بعدازاں لچھا خودبخود جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل سکون سے کھُلنا شروع کرتا ہے۔ اگر چھوٹی اُفقی حرکت کو نظر انداز کردیا جائے تو ثابت کرو کہ اتنا وقت

$$\text{ب}\sqrt{\frac{\text{۳π}}{\text{۲ ج تہ}}}\left[\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}{\text{ا}}+\frac{\text{تہ}}{\text{۲π ب}^2}\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}\right]$$

گزر جانا چاہیے بیشتر اس کے کہ لٹکتے ہوئے حصہ کا طول تقریباً لا ہو۔

۱۴ - کپڑے کا ایک تھان اسطوانہ کی شکل میں لپٹا ہوا ہے۔ کپڑے کی موٹائی ایک چھوٹی مقدار د ہے اور تھان ایک کھردرے افقی میز پر ساکن ہے۔ اسے ابتدائی زاویئی رفتار سہ کے ساتھ اس طرح ڈھکیلا گیا ہے کہ کپڑا کھُلنا شروع ہوتا ہے۔ توانائی کا اصول لگا کر ثابت کرو کہ تھان کا نصف قطر ا سے کم ہوکر ر (بشرطیکہ ر بمقابلہ ا کے چھوٹا نہ ہو)

$$\frac{\text{۲π}}{\text{د}}\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۳ج}}}\left\{\sqrt{\text{ج}^3-\text{ر}^3}-\sqrt{\text{ج}^3-\text{ا}^3}\right\}$$

وقت میں ہوجائیگا جہاں $\text{۳ سہ}^2\,\text{ا}^2=\text{۴}\,(\text{ج}^3-\text{ا}^3)\,\text{ج}$ - کیا یہاں توانائی کا اصول لگانا درست ہے؟

۲۴۵ - حرکت کی بہت سی صورتوں میں بابِ ہذا کے اصولوں سے حرکت کے دو پہلے تکملے حاصل ہونگے اور اِس لیے حرکت معلوم ہوجائیگی۔

مشق - ایک مکمل طور پر کھردرا بے لچک کُرہ جس کا نصف قطر ا ہے ایک اُفقی سطح مستوی پر رفتار و کے ساتھ

لڑھکتا ہوا بلندی ھ کی ایک ثابت روک کے ساتھ متصادم ہوتا ہے ۔ بتاؤ کہ اگر کرہ روک پر چڑھ جائے تو کیا شرط پوری ہونی چاہیے، اگر یہ چڑھ جا سکے تو ثابت کرو کہ یہ سطح مستوی پر رفتار (۱ ۔ ۵ھ/۷ا)² و کے ساتھ لڑھکتا رہیگا۔

فرض کرو کہ روک کے نقطۂ تماس ک کے گرد تصادم کے عین بعد زاویئی رفتار سہ ہے۔

تصادم سے پہلے مرکز کی رفتار افقی سمت میں و تھی اور مرکز کے گرد زاویئی رفتار و/ا تھی۔

چونکہ ک کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر نہیں بدلتا کیونکہ دھکے کی قوت صرف ک پر عمل کرتی ہے اس لیے

م (ک² + ا²) سہ = م و (ا ۔ ھ) + م ک² و/ا

∴ سہ = و (۷ا ۔ ۵ھ) / ۷ا² .... (۱)

فرض کرو کہ جب کرہ کا نصف قطر اُفق کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے تو کرہ کی زاویئی رفتار ک کے گرد سہ' ہے، توانائی کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

½ م (۷ا²/۵) (سہ'² ۔ سہ²) = ۔ م ج (ھ + ا جب طہ ۔ ا) ..... (۲)

نیز اگر اس آن میں عمادی تعامل ر ہو تو چونکہ ک کی طرف مرکز کا اسراع ا سہ'² ہے،

اس لیے م ا سہ'² = م ج جب طہ ۔ ر .... (۳)

(۲) سے حاصل ہوتا ہے

سہ'² = سہ² ۔ ۱۰/۷ × ج/ا² (ھ + ا جب طہ ۔ ا) .... (۴)

اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

ر/م = ج/۷ا [۱۰ھ - ۱۰ا + ۱۷ا جب ط] - ا سھ² ...... (۵)

اب اگر روک سے علٰحدہ ہوئے بغیر کُرہ اس پر چڑھ جائے تو (۱) اس کے لیے ضروری ہے کہ کرہ کے بلند ترین نقطہ پر پہنچنے سے پہلے سہ کو معدوم نہیں ہونا چاہیئے یعنی سہ² مثبت ہونا چاہیے جب کہ ط = ۹۰° اور (۲) ر کو اپنی کم سے کم قیمت پر منفی نہیں ہونا چاہیے یعنی اسے منفی نہیں ہونا چاہیے جب کہ

جب ط = (ا - ھ)/ا

پہلی شرط سے حاصل ہوتا ہے سھ² > ۱۰ج ھ/۷ا²

اور دوسری سے سھ² > ج(ا - ھ)/ا²

پس (۱) سے

و > ا/(۷ا - ۵ھ) √(۷۰ ج ھ)، اور و > ۷ا/(۷ا - ۵ھ) √(ج(ا - ھ))

یہ دونوں شرطیں صرف اُس وقت پوری ہوسکتی ہیں جب کہ ھ ≯ ۷ا/۱۷

اگر یہ شرائط پورے ہوں یعنی کُرہ رکاوٹ پر غالب آجائے تو اِس کی زاویئی رفتار جب کہ یہ پھر سطحِ مستوی کے ساتھ متصادم ہو سھ ہوگی ۔ اگر سطحِ مستوی کے ساتھ تصادم کے عین بعد اس کی زاویئی رفتار سہ۱ ہو تو اس اصول سے کہ معیارِ حرکت کا معیارِ اثر مستقل رہتا ہے

م (۷ا²/۵) سہ۱ = م ا سھ (ا - ھ) + م (۲ا²/۵) سھ

کیونکہ تصادم سے عین پہلے کرہ کا مرکز، اُس نصف قطر کی عمودوار سمت میں

رفتار ا سھ کے ساتھ حرکت کر رہا تھا جو مرکز کو روک سے ملاتا تھا۔

$$\therefore \text{سہ} = \text{سھ}\left(\text{۱} - \frac{\text{۵ھ}}{\text{۷ا}}\right) = \left(\text{۱} - \frac{\text{۵ھ}}{\text{۷ا}}\right)^{2} \frac{\text{و}}{\text{ا}}$$

پس کرہ سطح مستوی پر رفتار $\text{و}\left(\text{۱} - \frac{\text{۵ھ}}{\text{۷ا}}\right)^{2}$ کے ساتھ لڑھکتا رہیگا۔

مثالیں

۱ - ایک چکنی یکساں سلاخ اپنے ایک ثابت سرے کے گرد متوازی الافق میز پر حرکت کر رہی ہے اور ایک بے لچک ذرہ کے ساتھ جس کا فاصلہ ثابت سرے سے سلاخ کے طول کا $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ ہے متصادم ہوتی ہے، جب ذرہ سلاخ سے علحدہ ہوتا ہے اس وقت اس کی رفتار کی نسبت اس کی ابتدائی رفتار کے ساتھ معلوم کرو۔

[تصادم کے لیے $\text{مر}\frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}}\,\text{س} = \text{مر}\frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}}\,\text{سَہ} + \text{م}\frac{\text{۴ا}^2}{\text{ن}^2}\,\text{سَہ}$

توانائی اور معیارِ حرکت کے اصولوں سے

$$\frac{1}{2}\,\text{مر}\times\frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}}\times\text{طَ}^2 + \frac{1}{2}\,\text{م}\left(\text{لاَ}^2 + \text{لا}^2\,\text{طَ}^2\right) = \frac{1}{2}\,\text{مر}\frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}}\,\text{سَہ}^2 + \frac{1}{2}\,\text{م}\frac{\text{۴ا}^2}{\text{ن}^2}\,\text{سَہ}^2$$

اور $\text{مر}\times\frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}}\,\text{طَ} + \text{م}\,\text{لا}^2\,\text{طَ} = \text{مر}\frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}}\,\text{سَہ} + \text{م}\frac{\text{۴ا}^2}{\text{ن}^2}\,\text{سَہ}$]

۲ - ایک یکساں سلاخ جس کی کمیت مر ہے ایک چکنے افقی میز پر اپنے ایک ثابت سرے کے گرد حرکت کر رہی ہے، اور اپنے ساتھ ایک ذرہ کو جس کی کمیت ن مر ہے اور جو ابتداءً سلاخ کے ثابت سرے کے قریب ساکن تھا دھکیلتی جاتی ہے۔ جب ذرہ ثابت سرے سے سلاخ کے طول کے $\frac{\text{۱}}{\text{ہ}}$ فاصلہ پر ہو تو ثابت کرو کہ اس کی حرکت کی سمت سلاخ کے ساتھ

زاویہ $\text{مم}^{-1}\sqrt{\text{۱} + \frac{\text{۳ن}}{\text{لا}}}$ بناتی ہے۔

۳ ۔ ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲ ل ہے ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر پڑی ہے اور سطح مذکور پر کے ایک چھوٹے حلقہ میں سے گزرتی ہے، حلقہ اس کے آزادانہ گھومنے میں مزاحم نہیں ہوتا۔ ابتداءً سلاخ کا وسطی نقطہ حلقہ کے بالکل قریب تھا اور اس کو زاویئی رفتار سہ دی گئی تھی۔ حرکت معلوم کرو اور بتاؤ کہ جب سلاخ حلقہ سے علٰحدہ ہوتی ہے اُس وقت اُس کے مرکز کی رفتار $\frac{\sqrt{\text{۵}}}{\text{۲}}$ ل سہ ہوتی ہے اور اس کی زاویئی رفتار $\frac{\text{سہ}}{\text{۲}}$ ہوتی ہے۔

۴ ۔ ایک چکنے مکافی نما کا ایک ٹکڑا جس کی کمیّت ھ ہے اس کے محور پر عمود وار سطح مستوی سے کاٹا گیا ہے۔ یہ ٹکڑا مستوی قاعدہ کے بل ایک چکنی افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اس کے بالاترین نقطہ پر ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے رکھا گیا ہے اور ذرّہ کو ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب ذرّہ فاصلہ لا اُتر چکا تو مکافی نما کی رفتار کا مربع ہوگا

$$\frac{\text{۲ م}^{\text{۲}}\text{ ج ل لا}}{(\text{ھ}+\text{م})\{(\text{ھ}+\text{م})\text{ لا}+\text{ھ ل}\}}$$

[نظام کا افقی معیارِ حرکت ہمیشہ صفر رہتا ہے اور اس کی توانائی بالحرکت جاذبۂ ارض کے کام کے مساوی ہوتی ہے]

۵ ۔ ایک پتلے کروی خول کو جس کی کمیّت ھ اور نصف قطر س ہے ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر رکھا گیا ہے اور ایک چکنا کرہ جس کی کمیّت م اور نصف قطر ر ہے اس کی اندرونی سطح پر پھسلتا ہے۔ ابتداءً کروں کے مرکز ایک ہی افقی خط پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ جب مرکزوں کا خط، افق کے ساتھ زاویہ فہ بنائے تو خول ھ کی رفتار مساواتِ ذیل سے حاصل ہوگی:

$$\text{و}^{\text{۲}}=\text{۲ج}\,\frac{\text{م}^{\text{۲}}}{(\text{ھ}+\text{م})(\text{ھ}+\text{م جم}^{\text{۲}}\text{ فہ})}\,(\text{س}-\text{ر})\text{ جب}^{\text{۳}}\text{ فہ}$$

(دفعہ ۲۰۲ کی مثال کے ساتھ مقابلہ کرو۔)

۶ ۔ ایک پتلی مستدیر نلی جس کا نصف قطر ل اور کمیّت ھ ہے ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر پڑی ہے اس کے اندر دو مساوی ذرّے ہیں جن میں سے ہر ایک کی

کمیت م ہے اور جن کو نلی کے اندر ایک لچکدار رسّی کے ذریعے ملا یا گیا ہے ۔ رسّی کا قدرتی طول نصف محیط کے مساوی ہے ۔ ذرّے ایک دوسرے کو مَس کرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ بندھے ہوئے ہیں جب کہ رسّی محیط کے گرد تنی ہوئی ہے ۔ اگر ذرّے جدا ہو جائیں تو ثابت کرو کہ نلی کی رفتار جب کہ رسّی اپنا قدرتی طول پھر حاصل کر لے

$$\sqrt{\frac{\text{۲}\,\pi\,\text{لہ م و}}{\text{ھر}\,(\text{ھر} + \text{۲ م})}}$$

ہوگی، جہاں لہ لچک کی قدر ہے ۔

اگر ایک ذرّہ نلی کے اندر ثابت کر دیا جائے اور نلی اس ذرّہ کے مقام کے گرد حرکت کر سکتی ہو تو ثابت کرو کہ نلی کے مرکز کی رفتار اس صورت میں اول الذکر صورت کی نسبت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہوگی ۔

۷ - ایک وزنی رقاص اُفقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اور محور مذکور سے فاصلہ ع پر اس کے اندر ایک گولی چلائی گئی ہے ۔ گولی کی رفتار متوازی الافق اور محور پر عمود وار ہے ساکن ہونے سے پہلے رقاص زاویہ طہ میں سے گھوم جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ گولی کی رفتار

$$\text{۲ جیب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}\sqrt{\left(\text{۱} + \frac{\text{ھر ک}^2}{\text{م ع}^2}\right)\left(\text{۱} + \frac{\text{ھر ھ}}{\text{م ع}}\right)\times \text{ج ع}}$$

تھی جہاں ھر اور م کمیتیں ہیں رقاص اور گولی کی اور ھ رقاص کے محور کے نیچے مرکزِ جمود کی گہرائی اور ک محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہیں ۔

۸ - سوال ماقبل کے رقاص کے ساتھ محور کے نیچے ع گہرائی پر اُفقی محل میں ایک بندوق لگا دی گئی ہے اور اس سے کمیت م کی ایک گولی چلائی گئی ہے ۔ ثابت کرو کہ گولی کی رفتار

$$\text{۲}\,\frac{\text{ھَر}}{\text{م}}\times\frac{\text{کَ}}{\text{ع}}\,\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}\times\sqrt{\text{ج ھَ}}$$

ہے جہاں ھَر کمیت ہے رقاص اور بندوق کی، ھَ مرکزِ جمود کی گہرائی ہے محور کے نیچے اور کَ گردشی نصف قطر ہے محور کے گرد ۔

۹ - ایک پتلا یکساں مستدیر تار جس کا نصف قطر و ہے ایک انتصابی قطر کے گرد

آزادانہ گھوم سکتا ہے اور ایک منکا تار پر آزادانہ پھسلتا ہے۔ اگر ابتداءً تار زاویئی رفتار سہ کے ساتھ حرکت کر رہا ہو اور منکا بالاترین نقطہ کے قریب بلحاظ تار کے ساکن ہو تو ثابت کرو کہ جب منکا گھماؤ کے محور سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر ہوگا اُس وقت تار کی زاویئی رفتار $سہ \times \frac{ن}{ن+2}$ ہوگی اور منکے کی اضافی رفتار بلحاظ تار کے

$$\sqrt{\frac{ن\, سہ^2}{ن+2} + \frac{2ج}{و}}$$

ہوگی جب کہ تار کی کمیت منکے کی کمیت کا ن گنا ہو۔

۱۰ - دو یکساں سلاخیں اب اور ب ج ، ب پر جُڑی ہوئی ہیں اور سرے ا کے گرد جو ثابت ہے ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر گھوم سکتی ہیں۔ توانائی اور معیارِ حرکت کے تحفظ کے اصولوں کی مدد سے کسی محل میں ان کی زاویئی رفتاروں کے لیے مساواتیں حاصل کرو۔

۱۱ - ایک ہلکی ناقابلِ کھنچاؤ رسّی کا طول و ہے۔ اس کا ایک سرا ایک چکنے اُفقی میز کے ایک ثابت نقطہ و کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا سرا طول ۲ و کی یکساں سلاخ کے ایک سرے کے ساتھ بندھا ہے۔ جب رسّی اور سلاخ ایک خطِ مستقیم میں ساکن ہیں سلاخ کے وسطی نقطہ پر ایک عمودی ضرب لگائی گئی ہے۔ توانائی اور معیارِ حرکت کے تحفظ کے اصولوں کی مدد سے ثابت کرو کہ جب بعد کی حرکت میں سلاخ اور رسّی علی القوائم ہونگے تو اُن کی زاویئی رفتاریں وہی ہونگی۔

۱۲ - اب ، ب ج اور ج د تین مساوی یکساں سلاخیں ہیں جو ایک چکنے میز پر خطِ مستقیم میں پڑی ہیں۔ اُن کو ب اور ج پر آزادانہ جوڑا گیا ہے۔ ب ج کے مرکز پر اس پر علی القوائم سمت میں ایک ضرب لگائی گئی ہے۔ اگر اب یا ج د کی ابتدائی زاویئی رفتار سہ ہو اور ط وہ زاویہ ہو جو ان میں سے کوئی سلاخ کسی آن میں ب ج کے ساتھ بناتی ہے تو ثابت کرو کہ اُس وقت زاویئی رفتار $\frac{سہ}{\sqrt{1+جب^2 ط}}$ ہوگی۔

۱۳ - ایک یکساں سلاخ جو اپنے طول پر علی القوائم سمت میں ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر

حرکت کر رہی ہے نصف قطر ب کے ایک ثابت مستدیر قرص کے ساتھ اپنے ایسے نقطہ پر متصادم ہوتی ہے جس کا فاصلہ اس کے (سلاخ کے) مرکز سے ج ہے، دھکے کی مقدار معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر سلاخ اور قرص کے درمیان پھسلنا وقوع پذیر نہ ہو تو سلاخ کا مرکز قرص کو وقت

$$\frac{\sqrt{\text{ک}^2+\text{ج}^2}}{2\,\text{ب ج و}}\left\{\text{ج}\sqrt{\text{ک}^2+\text{ج}^2}+\text{ک}^2\,\text{لوک}\,\frac{\text{ج}+\sqrt{\text{ک}^2+\text{ج}^2}}{\text{ک}}\right\}$$

کے بعد آلگیگا، جہاں ک سلاخ کے گھماؤ کا نصف قطر ہے اس کے مرکز کے گرد، اور و سلاخ کی ابتدائی رفتار ہے۔

۱۴۔ ایک یکساں سلاخ کا طول ۲ ل ہے، اس کے ایک سرے کو ایک چھوٹے حلقے کے ساتھ آزادانہ جوڑا گیا ہے، حلقہ کی کمیت سلاخ کی کمیت کے مساوی ہے۔ حلقہ ایک چکنے اُفقی تار پر آزادانہ پھسل سکتا ہے۔ ابتداءً حلقہ ساکن ہے اور سلاخ انتصابی ہے اور حلقہ کے نیچے ہے اور تار میں سے گذرنے والی انتصابی سطح مستوی میں زاویئی رفتار $\sqrt{\frac{3\text{ج}}{\text{ل}}}$ کے ساتھ گھوم رہی ہے جب سلاخ سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو اس کی زاویئی رفتار $\sqrt{\frac{3\text{ج}}{\text{ل}}\times\frac{1+4\,\text{جم}^2\text{ط}}{8-3\,\text{جم}^2\text{ط}}}$ ہے۔ اس وقت حلقہ کی رفتار معلوم کرو۔

[نظام کا اُفقی معیارِ حرکت دورانِ حرکت میں مستقل ہے، اور توانائی بالحرکت کی تبدیلی جاذبۂ ارض کے خلاف جو کام ہوا اُس کے مساوی ہے]

۱۵۔ ایک یکساں سلاخ ا ب، ا پر کے ایک چھوٹے حلقہ کے ذریعہ، ایک چکنے اُفقی تار سے لٹک رہی ہے، سرے ا پر ایک ضرب لگائی گئی ہے جس کی وجہ سے یہ تار کی سمت میں رفتار ع کے ساتھ حرکت شروع کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ کی زاویئی رفتار س جب کہ یہ اُفق کے ساتھ زاویہ ط بنائے مساوات $\text{س}^2(1+3\,\text{جم}^2\text{ط})=\frac{6\text{ع}^2}{16\text{ل}^2}-\frac{6\text{ج}}{\text{ل}}(1-\text{جب ط})$ سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۶۔ ایک حلقہ جس کا نصف قطر ل ہے رفتار و کے ساتھ اُفقی راستہ پر حرکت کرتا ہوا ایک کھردری بے لچک پٹڑی کے ساتھ جس کی بلندی ہ ہے اور جو حلقہ کی سطح مستوی پر عمود ہے متصادم ہوتا ہے ثابت کرو کہ اگر حلقہ پٹڑی پر سے بلا جست گزر سکے تو

$$\text{و} > \frac{2\text{ل}}{2\text{ل}-\text{ہ}}\sqrt{\text{ج ہ}}\quad\text{اور}\quad < \frac{2\text{ل}}{2\text{ل}-\text{ہ}}\sqrt{\text{ج}(\text{ل}-\text{ہ})}$$

۱۷ - ایک یکساں بے لچک کرہ جس کا نصف قطر ا ہے بغیر گھماؤ کے ایک چکنے میز پر حرکت کر رہا ہے اور ایک پتلی کھردری اُفقی سلاخ کے ساتھ متصادم ہوتا ہے جو اس کی حرکت کی سمت پر علی القوائم ہے اور سطح مستوی سے بلندی ب پر واقع ہے، ثابت کرو کہ کرہ سلاخ کے اوپر سے عین لڑھک جائیگا اگر اِس کی رفتار $\frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{ب}}\sqrt{\frac{14\,\text{اج ب}}{5}}$ اور $\text{ب} > \frac{7\,\text{ا}}{17}$ ہو۔

۱۸ - ایک کرہ جس کا نصف قطر ا ہے ایک کھردرے میز پر حرکت کرتا ہوا ایک شگاف تک آتا ہے جس کی چوڑائی ب ہے اور جو کرہ کے راستہ پر علی القوائم ہے - اگر کرہ کی رفتار و ہو تو ثابت کرو کہ بلاجست شگاف پر سے گذر جانے کی شرط یہ ہے

$$\text{و}^2 > \frac{100}{7}\,\text{ج ا}\,(1 - \text{جم عہ})\,\text{جب}^2\text{عہ}\,\frac{14 - 10\,\text{جب}^2\text{عہ}}{(7 - 10\,\text{جب}^2\text{عہ})^2}$$

جہاں $\text{ب} = 2\,\text{ا جب عہ}$ اور $17\,\text{اج ا جم عہ} > 7\,\text{و}^2 + 10\,\text{اج ا}$

۱۹ - ایک کرہ جس کا نصف قطر ا ہے دو کھردری پتلی متوازی سلاخوں ا اور ب پر جو ایک ہی اُفقی سطح میں فاصلہ ۲ب پر واقع ہیں پڑا ہے - کرہ کو ا کے گرد اتنا پھرایا گیا ہے کہ اس کا مرکز ا کے تقریباً انتصاباً اوپر ہوتا ہے - اب اسے پیچھے گرنے دیا گیا ہے - ثابت کرو کہ یہ ا اور ب کے درمیان جھولنے لگیگا اگر $10\,\text{ب}^2 < 7\,\text{ا}^2$، اور ن ویں تصادم کے بعد یہ اتنا گھومیگا کہ نقطۂ تماس تک کا سمتی نصف قطر، سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طن بنائیگا جہاں

$$\text{جم طن} = \frac{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}{\text{ا}}\left(1 - \frac{10\,\text{ب}^2}{7\,\text{ا}^2}\right)^{2\text{ن}}$$

نیز ثابت کرو کہ مرکز کی متواتر بڑی سے بڑی بلندیاں محلِ تعادل کے اوپر ایک نزولی سلسلۂ ہندسیہ بناتی ہیں۔

۲۰ - ایک بے لچک مکعب ایک مائل سطح مستوی پر سے جو اُفق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے نیچے کی طرف پھسل رہا ہے اور رفتار و کے ساتھ ایک چھوٹی ثابت میخ کے ساتھ متصادم ہوتا ہے - اگر یہ میخ کے اوپر سے لڑھک سکے اور نیچے کی طرف پھسلتا جائے تو ثابت کرو کہ و^2 کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت $\frac{16\,\text{اج ا}}{3}\left[\sqrt{2} - \text{جم عہ} - \text{جب عہ}\right]$ ہوگی۔

۲۱ ۔ ایک مکعب کے کنارہ کا طول ۲ ا ہے، اس کا ایک کنارہ ایک کھردری سطح مستوی پر ساکن ہے اور مقابل کا کنارہ پہلے کنارہ کے عین انتصاباً اوپر ہے ۔ یہ سطح مستوی پر گرتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دوسرے کنارہ کے گرد گھومنا شروع ہوگا اور اس کے جمود کا مرکز بلندی $\frac{ا}{۱۶}(۱۵ + \sqrt{۲})$ میں سے اوپر اٹھیگا۔

۲۲ ۔ ایک یکساں مکعب جس کا ہر کنارہ ۲ ا ہے اپنے چار متوازی کناروں کے گرد ایک کھردری اُفقی سطح مستوی پر لڑھک رہا ہے ۔ ابتداءً اس کا ایک رُخ سطح سے مس کرتا ہے اور اُس کنارہ کے گرد جو پہلا تصادم واقع ہونے تک مستوی کے ساتھ تماس میں رہتا ہے اس کی زاویئی رفتار سھ ہے ۔ ثابت کرو کہ مکعب ن ویں تصادم کے بعد آگے لڑھکتا رہیگا جب تک کہ $۴^{۲ن-۱} > ا\,سھ^{۲}(\sqrt{۲} + ۱) \div ۳ج$ ۔

۲۳ ۔ ایک مستطیلی متوازی السطوح کی کمیت ۳ م ہے اور اس کا مربع قاعدہ ا ب ج د ایک اُفقی سطح مستوی پر ساکن ہے اور قبضہ ج د کے گرد حرکت کر سکتا ہے مجسم کی بلندی ۳ ا ہے اور قاعدہ کا ہر ضلع ا ہے ۔ ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے اُفقی رفتار و کے ساتھ حرکت کرتا ہوا اُس انتصابی رُخ کے مرکز پر بالراست متصادم ہوتا ہے جو ا ب پر استادہ ہے اور بغیر اندر جانے کے وہاں چمٹ جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ مکعب نہیں الٹیگا تاوقتیکہ $و^{۲} > \frac{۵۳}{۹} ج ا$ ۔

۲۴ ۔ ایک یکساں مکعب کندا ایک ریل کے ڈبہ میں پڑا ہے جب کہ ریل رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہے ۔ مکعب کے دو رُخ ریل کی حرکت کی سمت پر عمود وار ہیں ۔ اگر کندے کے سامنے کے رُخ کے نچلے کنارہ کو ڈبہ کے ساتھ وصل کر دیا جائے اور ڈبہ کو فوراً روک لیا جائے تو ثابت کرو کہ کندا الٹ جائیگا اگر $و > \frac{۴}{۳}\sqrt{۳ ج ا(\sqrt{۲} - ۱)}$ جہاں ۲ ا کندے کا کنارہ ہے ۔

۲۵ ۔ ایک رسی کا طول ب ہے ۔ اس کے ایک سرے کے ساتھ کمیت م کا ایک ذرہ بندھا ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک مستدیر قرص کے کنارے کے ساتھ بندھا ہے جس کا نصف قطر ا ہے اور جس کی کمیت م ہے اور جو اپنے مرکز کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے ۔ یہ کل نظام ایک چکنے میز پر پڑا ہے اور رسی ایک نصف قطر ممدودہ کی سمت میں ہے ۔ اب ذرہ کو حرکت دی گئی ہے ۔ ثابت کرو کہ رسی قرص کے گرد کبھی نہ لپیٹیگی اگر $ا\,م < ۴\,ب\,م$

۲۶ ۔ ایک یکساں سلاخ کا طول ۲ ا اور کمیت ن م ہے ۔ اس کے ایک سرے کے ساتھ ایک رسّی بندھی ہے اور رسّی کے دوسرے سرے کے ساتھ کمیت م کا ایک ذرّہ بندھا ہے، سلاخ اور رسّی دونوں ایک خطِ مستقیم میں چکنے اُفقی میز پر پڑے ہیں ۔ اب ذرّہ کو رسّی پر علی القوائم سمت میں رفتار و سے پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا زاویہ جو رسّی سلاخ کے ساتھ بناتی ہے ۲ جب$^{-1}$ $\sqrt{\dfrac{(ن+۱)ا}{۱۲ب}}$ ہے ۔

اور اس وقت سلاخ اور رسّی میں سے ہر ایک کی زاویئی رفتاریں $\dfrac{و}{ا+ب}$ ہیں، جہاں ب رسّی کا طول ہے ۔

[نظام کے مرکزِ جمود کا خطی معیارِ حرکت اور اس کے گرد زاویئی معیارِ حرکت دونوں مستقل رہتے ہیں، نیز توانائی بالحرکت مستقل رہتی ہے ۔]

۲۷ ۔ ایک چکنے مستدیر قرص کو ایک چکنے اُفقی میز پر ثابت کیا گیا ہے اور ایک رسّی جس کے سروں کے ساتھ کمیتیں ھ اور م بندھی ہیں اس کے چکنے کنارے پر سے گزرتی ہے اور اس کے آزاد سیدھے حصے مماسوں کے محل میں ہیں ۔ اگر م کو رفتار و کے ساتھ مماس پر عمود وار پھینکا جائے اور کسی آن میں اس مماس کا طول عا ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ھ+م)\,عا^۲\,\dot{عا}^۲ = و^۲\,[(ھ+م)\,ا^۲ + م\,(عا^۲ - ب^۲)]$$

جہاں ا قرص کا نصف قطر ہے اور ب، عا کی ابتدائی قیمت ہے ۔

[کل توانائی بالحرکت مستقل رہتی ہے، نیز قرص کے مرکز کے گرد معیارِ حرکت کا معیارِ اثر مستقل رہتا ہے ۔]

۲۸ ۔ ایک متجانس ناقصی اسطوانہ ایک کھردری سطح مستوی پر پڑا ہے ۔ ثابت کرو کہ کم سے کم دھکے کی قسم کا جفت جو اس کو سطح مستوی پر گھما سکتا ہے م $\sqrt{\dfrac{ج(ا-ب)(ا^۲+۵ب^۲)}{۲}}$ ہے، جہاں م کمیت ہے اور ا اور ب نیم محور ہیں ۔

۲۹ ۔ اس امر کی تشریح کرو کہ اگر کوئی لڑکا جھولا جھول رہا ہو تو سروں پر پہنچ کر سکڑ کر بیٹھنے سے اور نچلے نقطہ پر سیدھا کھڑا ہو جانے سے جھولے کی قوس کا طول کیوں بڑھ جاتا ہے ۔

۳۰ ۔ وزن ھ والے ایک مربع دروازے کا نچلا اُفقی کنارہ ایک قبضہ کے ذریعہ ایک انتصابی دیوار

کے ساتھ وصل ہے ۔ ایک رسی کا ایک سرا دروازہ کے بالائی کنارہ کے وسطی نقطہ ا کے ساتھ بندھا ہے اور رسّی ایک چرخی پر سے (جو دروازہ کے بند ہونے کی صورت میں ا کے مقام پر واقع ہے) گزرتی ہوئی ایک وزن م کو سہارے ہوئے ہے ۔ دروازہ کو آہستہ سے کھول کر اُفقی محل میں لایا گیا ہے اور پھر چھوڑ دیا گیا ہے ۔ کسی محل میں دروازہ کی زاویئی رفتار معلوم کرو اور بتاؤ کہ مسدودی کے وقت توانائی بالحرکت کھولنے میں جو کام ہوا اس سے نسبت ہر : ہر + ۳ م میں کم ہے ۔

۳۱ ـ ایک کرہ ایک ثابت قطر کے گرد گھوم سکتا ہے ۔ ایک مکھی جس کی کمیت کرہ کی کمیت کا $\frac{۲}{۵}$ ہے اس پر آبیٹھتی ہے اور ایسی سمت میں چلنا شروع کرتی ہے جو ہر نصف النہار کے ساتھ مستقل زاویہ عہ بناتی ہے ۔ جب مکھی قطب پر پہنچیگی تو ثابت کرو کہ کرہ اُن دو زاویوں میں سے کسی ایک میں سے گھوم چکیگا جن کا مجموعہ = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ مس عہ لوک $\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}$

۳۲ ـ ایک اُفقی پہیّہ جس کے محیط پر ڈول ہیں بے رگڑ انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے ۔ ڈولوں کے اندر فی اکائی وقت میں کمیت م کی یکساں شرح سے پانی گر رہا ہے ۔ ڈولوں کی کمیت کو پہیّہ کے مقابل نظرانداز کرکے وقت ت پر پہیّہ کی زاویئی رفتار معلوم کرو جب کہ ابتدائی زاویئی رفتار سھ ہو نیز اگر پہیّہ (مع ڈول) کا جمود کا معیارِ اثر انتصابی محور کے گرد ج ہو اور نصف قطر ر تو پہیّہ وقت ت میں زاویہ $\frac{ج\,سھ}{م\,ر^۲}$ لوک $\left(۱+\frac{م\,ر^۲\,ت}{ج}\right)$ میں گھوم جائیگا ۔

۳۳ ـ کمیت م کا ایک شخص اُفقی پترے پر جو ایک ثابت انتصابی محور و کے گرد گھوم سکتا ہے بمقام ا کھڑا ہے ۔ ابتداءً پترا اور آدمی دونوں ساکن ہیں ۔ پھر آدمی بلحاظ پترے کے ایک مکمل دائرہ جس کا قطر و ا (= ر) ہے طے کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ پترا بلحاظ زمین کے زاویہ $\pi\left[۱-\frac{ج}{ج+م\,و^۲}\right]$ میں سے گھوم جائیگا جہاں ج پترے کے جمود کا معیارِ اثر ہے محور کے گرد ۔

اٹھارہواں باب

لگرانج کی مساواتیں تعمیمی محددوں میں

۲۴۶ ۔ گزشتہ باب میں ہم دکھا چکے ہیں کہ ہم براہ راست ایسی مساواتیں لکھ سکتے ہیں جن میں تعامل شامل نہیں ہوتے ، اس باب میں ہم ایسی مساواتیں معلوم کرینگے جن سے اکثر اوقات نظام کی کل حرکت معلوم ہو جائیگی ۔

یہ مساواتیں کسی ایسے محددوں کی رقوم میں حاصل کی جائینگی جن کے استعمال کرنے میں سہولت ہو ، محددوں کا لفظ یہاں عام معنوں میں استعمال کیا گیا ہے اور اس سے مراد ہر ایسی غیر تابع مقداریں ہوسکتی ہیں جن کے معلوم ہونے سے جسم یا اجسام زیر بحث کے مقام متعین ہو سکیں ۔ تعداد میں یہ نظام کی آزادی کے درجوں کے مساوی ہوتے ہیں ۔

۲۴۷ ۔ لگرانج کی مساواتیں ۔

فرض کرو کہ (لا ، ما ، ی) نظام کے کسی ذرہ م کے محدد ہیں بلحاظ قائم محوروں کے ، نیز فرض کرو کہ انہیں چند غیر تابع متغیروں (طہ ، فہ ، سا ، ...) کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے ۔ پس اگر ت وقت کو تعبیر کرے تو

[1] Lagrange

$$\text{لا} = \text{ف}\,(\text{ت، طہ، فہ،}\dots) \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

اور اسی طرح کے جملے ما اور ی کے لیے ۔

یہ ضروری ہے کہ اِن مساواتوں میں $\dot{\text{طہ}}$، $\dot{\text{فہ}}$، .... یا بلحاظ وقت کے کوئی اور تفرقی سر شامل نہ ہوں ۔

حسبِ معمول، فرض کرو کہ زبروں سے تفرقی سر بلحاظ وقت کے تعبیر ہوتے ہیں ۔ نیز فرض کرو کہ $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}$ ، $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}}$ ، ... جزوی تفرقی سروں کو تعبیر کرتے ہیں ۔

تب (۱) کو تفرق کرنے سے

$$\dot{\text{لا}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\cdot\dot{\text{طہ}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}}\cdot\dot{\text{فہ}} + \dots\dots \qquad (2)$$

(۲) کو بلحاظ $\dot{\text{طہ}}$ کے جزءً تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{جف }\dot{\text{لا}}}{\text{جف }\dot{\text{طہ}}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \qquad \dots\dots\dots\dots (3)$$

نیز (۲) کو بلحاظ طہ کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{جف }\dot{\text{لا}}}{\text{جف طہ}} = \frac{\text{جف}^2\text{ لا}}{\text{جف ت جف طہ}} + \frac{\text{جف}^2\text{ لا}}{\text{جف طہ}^2}\cdot\dot{\text{طہ}} + \frac{\text{جف}^2\text{ لا}}{\text{جف طہ جف فہ}}\cdot\dot{\text{فہ}} + \dots$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\left[\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\right] \qquad \dots\dots\dots\dots (4)$$

اگر نظام کی توانائی بالحرکت ت ہو تو

$$\text{ت} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\text{م}\left[\dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2 + \dot{\text{ی}}^2\right] \qquad \dots\dots\dots\dots (5)$$

اب اُلٹی مؤثر قوتیں اور بیرونی قوتیں مل کر قوتوں کا ایک متعادل نظام بناتی ہیں، اس لیے ان کے موہوم کام کی مساوات صفر ہوگی تم بالفاظِ دیگر مؤثر قوتوں کا موہوم کام = بیرونی قوتوں کا موہوم کام ۔

مؤثر قوتوں کا کام صرف طہ کی تبدیلی سے،

$$= \Sigma\,\text{م}\left[\text{لاَ}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \text{ماَ}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \text{یَ}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right]\text{مف طہ}$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\Sigma\,\text{م}\left[\text{لاَ}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \cdots + \cdots\right]\text{مف طہ}$$

$$-\Sigma\,\text{م}\left[\text{لاَ}\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\right) + \cdots + \cdots\right]\text{مف طہ}$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\Sigma\,\text{م}\left[\text{لاَ}\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف طہَ}} + \cdots + \cdots\right]\text{مف طہ}$$

$$-\Sigma\,\text{م}\left[\text{لاَ}\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف طہ}} + \cdots + \cdots\right]\text{مف طہ}$$

مساواتوں (۲) اور (۴) سے

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{جف}}{\text{جف طہَ}}\Sigma\,\text{م} \times \frac{1}{2}\left(\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 + \text{یَ}^2\right)\text{مف طہ}$$

$$-\frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}}\Sigma\,\text{م} \times \frac{1}{2}\left[\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 + \text{یَ}^2\right]\text{مف طہ}$$

$$= \left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہَ}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right]\text{مف طہ}$$

مساوات (۵) سے .... (۶)

نیز اگر کام تفاعل یا قوۃ تفاعل ۵ ہوتو بیرونی قوتوں کا موہوم کام صرف طہ کی تبدیلی کی وجہ سے

$$= \Sigma\,\text{م}\left[\text{لا}\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}} + \text{ما}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر طہ}} + \text{ے}\frac{\text{فر ی}}{\text{فر طہ}}\right]\text{مف طہ}$$

$$= \left[\frac{\text{جف ہ}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ہ}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ہ}}{\text{جف ی}}\cdot\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right]\text{مف طہ}$$

$$= \frac{\text{جف ہ}}{\text{جف طہ}} \times \text{مف طہ} \quad \ldots\ldots (۷)$$

(۶) اور (۷) کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہَ}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = \frac{\text{جف ہ}}{\text{جف طہ}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اسی طرح سے ہمیں اور مساواتیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہَ}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} = \frac{\text{جف ہ}}{\text{جف فہ}}$$

اور

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف سَا}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف سا}} = \frac{\text{جف ہ}}{\text{جف سا}}$$

علیٰ ہذا القیاس حاصل ہوتی ہیں۔

نظام کے ہر غیر تابع محدد کے جواب میں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اِن مساواتوں کو تعمیمی محددوں میں لگرانج کی مساواتیں کہتے ہیں۔

نتیجۂ صریح — اگر نظام کی توانائیٔ بالقوہ ک ہو تو چونکہ ہ = ایک مستقل ـ ک، اس لئے مساوات (۸) ہوجاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہَ}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{فرک}}{\text{فرطہ}} = ۰$$

اب اگر ہم ت ـ ک = ل رکھیں، یعنی ل کسی آن میں توانائیٔ بالحرکت اور توانائیٔ بالقوہ کے فرق کو تعبیر کرے تو چونکہ ہ میں

طہَ، فہَ، ... وغیرہ شامل نہیں ہیں، اس لیے یہ مساوات بشکلِ ذیل لکھی جاسکتی ہے:

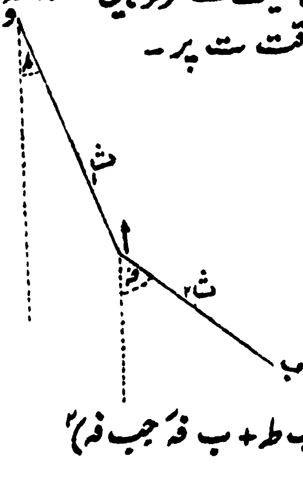
$$\frac{\text{فر}}{\text{وت}}\left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہَ}}\right] - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}} = \cdot$$

ل کو لگرانجی تفاعل یا توانائی بالحرکت کا قوہ تفاعل کہتے ہیں۔

۲۴۸۔ اگر کوئی نظام ایسا ہو کہ اِس کے کسی ذرّہ کے محدد غیر تابع محددوں کی رقوم میں ایسی مساواتوں کے ذریعے بیان ہوسکیں جن میں تفرقی سر بلحاظ وقت کے شامل نہ ہوں تو ایسے نظام کو جامع الاسم[1] نظام کہتے ہیں۔

۲۴۹۔ مشق ۱۔ ایک متجانس سلاخ و ا کی کمیّت م$_1$ اور طول ۲ ا$_1$ ہے۔ اِس کو ایک ثابت نقطہ و کے ساتھ آزادانہ جوڑ دیا گیا ہے۔ اس کے دوسرے سرے پر ایک اور متجانس سلاخ ا ب کو جوڑا گیا ہے جس کی کمیّت م$_2$ اور طول ۲ ب ہے۔ یہ نظام جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے۔ حرکت کو معلوم کرنے کی مساواتیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ث$_1$ اور ث$_2$ سلاخوں کی کمیت کے مرکز ہیں، اور طہ اور فہ اِن کے میلان ہیں سمتِ انتصابی کے ساتھ وقت ت پر۔



و ا کی توانائی بالحرکت ہے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}_1 \times \frac{4\,\text{ا}_1^2}{3} \times \dot{\text{ط}}^2$$

ث$_2$، ا کے گرد رفتار ب فہَ سے پھرتا ہے اور ا، و کے گرد رفتار ۲ ا طہَ کے ساتھ گھومتا ہے۔ پس ث$_2$ کی رفتار کا مربع

$$= (\text{۲ ا طہَ جم طہ + ب فہَ جم فہ})^2 + (\text{۲ ا طہَ جب طہ + ب فہَ جب فہ})^2$$

[1] Holonomous

$$= \text{۴ ا}^{2}\,\dot{\text{ط}}^{2} + \text{ب}^{2}\,\dot{\text{ف}}^{2} + \text{۴ ا ب}\,\dot{\text{ط}}\,\dot{\text{ف}}\ \text{جم}\,(\text{ط} - \text{ف})$$

نیز ش_{2} کے گرد سلاخ کی توانائی بالحرکت

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}_{2} \times \frac{\text{ب}^{2}}{3}\,\dot{\text{ف}}^{2}$$

اس لیے توانائی حت $= \tfrac{1}{2}\,\text{م}_{1} \times \dfrac{\text{۴ ا}^{2}}{3}\,\dot{\text{ط}}^{2}$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\text{م}_{2}\left[\text{۴ ا}^{2}\dot{\text{ط}}^{2} + \text{ب}^{2}\dot{\text{ف}}^{2} + \text{۴ ا ب}\,\dot{\text{ط}}\,\dot{\text{ف}}\ \text{جم}\,(\text{ف} - \text{ط})\right] + \tfrac{1}{2}\,\text{م}_{2} \times \frac{\text{ب}^{2}}{3}\,\dot{\text{ف}}^{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{م}_{1}}{3} + \text{م}_{2}\right) \times \text{۴ ا}^{2}\dot{\text{ط}}^{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{م}_{2} \times \frac{\text{۴ ب}^{2}}{3}\,\dot{\text{ف}}^{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{م}_{2}\,\text{۴ ا ب}\,\dot{\text{ط}}\,\dot{\text{ف}}\ \text{جم}\,(\text{ف} - \text{ط}) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

نیز کام تفاعل ک

$$= \text{م}_{1}\,\text{ج ا جم ط} + \text{م}_{2}\,\text{ج}\,(\text{۲ ا جم ط} + \text{ب جم ف}) + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

تب لگرانج کی ط مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{د}}{\text{دت}}\left[\left(\frac{\text{م}_{1}}{3} + \text{م}_{2}\right)\text{۴ ا}^{2}\dot{\text{ط}} + \text{م}_{2} \times \text{۲ ا ب}\,\dot{\text{ف}}\ \text{جم}\,(\text{ف} - \text{ط})\right] - \text{۲ م}_{2}\,\text{ا ب}\,\dot{\text{ط}}\,\dot{\text{ف}}\ \text{جب}\,(\text{ف} - \text{ط})$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{دت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}}$$

$$= -(\text{م}_{1} + \text{۲ م}_{2})\,\text{ج ا جب ط}$$

یعنی $\left(\dfrac{\text{م}_{1}}{3} + \text{م}_{2}\right)\text{۴ ا}\,\ddot{\text{ط}} + \text{۲ م}_{2}\,\text{ب}\left[\ddot{\text{ف}}\ \text{جم}\,\overline{\text{ف} - \text{ط}} - \dot{\text{ف}}^{2}\ \text{جب}\,\overline{\text{ف} - \text{ط}}\right]$

$$= -\text{ج}\,(\text{م}_{1} + \text{۲ م}_{2})\ \text{جب ط} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اسی طرح ف مساوات ہے

فر/فرت [م۲ {۴ب²/۳ فہَ + ۲ اب طہَ جم (فہ ـ طہ)}] + م۲ × ۲ اب طہَ فہَ جب (فہ ـ طہ)

= ـ م۲ ب ج جب فہ

یعنی ۴ب/۳ فہً + ۲ ا طہً جم (فہ ـ طہ) + ۲ ا طہَ² جب (فہ ـ طہ) = ـ ج جب فہ ....(۴)

(۳) کو ا طہَ سے اور (۴) کو م۲ ب فہَ سے ضرب دے کر جمع کرنے اور تکمل کرنے سے

½ (م۱/۳ + م۲) × ۴ ا² طہَ² + ½ م۲ ۴ب²/۳ فہَ² + ½ م۲ × ۴ اب طہَ فہَ جم (فہ ـ طہ)

= (م۱ + ۲ م۲) ج ا جم طہ + م۲ ج ب جم فہ + ج ....(۵)

یہ توانائی کی مساوات ہے

نیز (۳) کو ا سے اور (۴) کو م۲ ب سے ضرب دے کر جمع کرنے سے

فر/فرت [(م۱/۳ + م۲) × ۴ ا² طہَ + م۲ {۴ب²/۳ فہَ + ۲ اب (طہَ + فہَ) جم (فہ ـ طہ)}]

= ـ ا ج (م۱ + ۲ م۲) جب طہ ـ م۲ ب ج جب فہ

یہ مساوات نظام کے لیے و کے گرد معیارِ اثر لینے سے حاصل ہوتی ہے۔

مشق ۲ـ ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲ ا ہے اپنے ایک سرے کے گرد جو ثابت ہے آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ ابتداءً یہ نیچے کی طرف کھنچے ہوئے انتصابی خط کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے۔ اور ثابت سرے میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے گرد زاویئی رفتار س کے ساتھ گھومنا شروع کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ دورانِ حرکت میں سلاخ ہمیشہ سمتِ انتصابی کے ساتھ جو زاویہ بناتی ہے وہ ≶ ع جیسے بالترتیب

$$س^2 > \frac{3 ج}{4 ا جم عہ}$$

اور ہر صورت میں اِس کی حرکت کا میلان زاویہ عہ اور

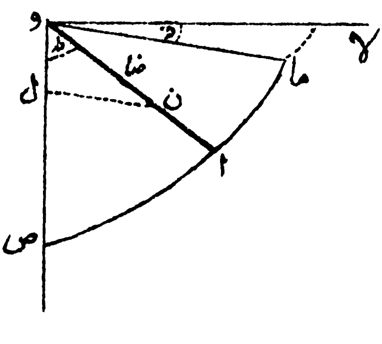
$$جم^{-1}\left[-ن + \sqrt{1 - 2ن جم عہ + ن^2}\right]$$

کے اندر ہوگا۔

جہاں $ن = \frac{ا س^2 جب^2 عہ}{3 ج}$

اگر اسے ذرا سا ہٹا دیا جائے جب کہ یہ مستقل میلان عہ پر گھوم رہی ہو تو ثابت کرو کہ ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت $2\pi\sqrt{\frac{4 ا جم عہ}{3 ج (1 + 3 جم^2 عہ)}}$ ہوگی۔

فرض کرو کہ کسی وقت ت پر سلاخ سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے اور اس میں سے اور انتصابی خط میں سے گزرنے والی سطح مستوی اپنے ابتدائی محل سے زاویہ فہ میں سے گھوم گئی ہے۔



سلاخ کے نقطہ ن پر کے کسی جزو $\frac{د ضا}{2 ا} \times م$ پر غور کرو جہاں

و ن = ضا

اگر سلاخ کے سرے و میں سے سمتِ انتصابی پر عمود ن ل نکالا جائے تو ن، ل ن پر علی القوائم سمت میں رفتار $\dot{فہ}$ × ل ن کے ساتھ یعنی ضا × جب طہ × $\dot{فہ}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور و ن پر علی القوائم سمت میں سطح مستوی ص و ا میں رفتار ضا $\dot{طہ}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

پس اِس جزو کی توانائی بالحرکت

= ½ × (فرضا / ۲ا) × م [ضا² جب² طہ فہَ² + ضا² طہَ²]

پس کل توانائی بالحرکت ت

= ½ × (م / ۲ا) (جب² طہ فہَ² + طہَ²) ∫₀^۲ا ضا² فرضا = (۲ م ا² / ۳) (فہَ² جب² طہ + طہَ²)

نیز کام تفاعل ۂ

= م ج ا جسم طہ + ج

پس لگرانج کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے :-

(فر / فرت) [(۴ م ا² / ۳) × طہَ] − (۲ م ا² / ۳) فہَ² × ۲ جب طہ جم طہ = − م ج ا جب طہ

اور (فر / فرت) [(۴ م ا² / ۳) فہَ جب² طہ] = ۰

یعنی طہً − فہَ² جب طہ جم طہ = − (۳ ج / ۴ ا) جب طہ .... (۱)

اور فہَ جب² طہ = مستقل = سہ جب² عہ .... (۲)

(۱) اور (۲) سے فہَ کو ساقط کرنے سے

طہً − (سہ² جب⁴ عہ / جب³ طہ) جم طہ = − (۳ ج / ۴ ا) جب طہ .... (۳)

قائم حرکت — سلاخ سمتِ انتصابی کے گرد مستقل میلان عہ کے ساتھ گھومتی ہے اگر طہً = ۰ جب کہ طہ = عہ یعنی اگر

سہ² = ۳ ج / (۴ ا جم عہ) .... (۴)

جب، سہ کی یہ خاص قیمت نہ ہو تو (۳) کو تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{طَ}^{2} + \frac{\text{سہ}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}}{\text{جب}^{2}\,\text{طہ}} = \frac{\text{۳ج}}{\text{۲و}}\,\text{جم طہ} + \text{ج} = \text{سہ}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ} + \frac{\text{۳ج}}{\text{۲و}}(\text{جم طہ} - \text{جم عہ})$$
(۵)......

ابتدائی شرائط سے

$$\therefore\ \text{طَ}^{2} = \frac{\text{۳ج ن}}{\text{و}}\left[\text{۱} - \frac{\text{جب}^{2}\,\text{عہ}}{\text{جب}^{2}\,\text{طہ}}\right] + \frac{\text{۳ج}}{\text{۲و}}(\text{جم طہ} - \text{جم عہ})$$

$$= \frac{\text{۳ج}}{\text{۲و}}\ \frac{\text{جم عہ} - \text{جم طہ}}{\text{جب}^{2}\,\text{طہ}}\left[\text{جم}^{2}\,\text{طہ} + \text{۲ن جم طہ} - \text{۱} + \text{۲ن جم عہ}\right]$$

اس لیے طَ صفر ہے جب کہ طہ = عہ یعنی ابتداء میں، یا جب کہ

$$\text{جم}^{2}\,\text{طہ} + \text{۲ن جم طہ} - \text{۱} + \text{۲ن جم عہ} = \text{۰}$$

یعنی جب کہ $\text{جم طہ} = -\text{ن} + \sqrt{\text{۱} - \text{۲ن جم عہ} + \text{ن}^{2}}$ ....(۶)

[علامت مثبت لینی پڑیگی۔ کیونکہ منفی علامت سے جم طہ کی قیمت ایک سے بڑی حاصل ہوگی جو ناممکن ہے۔]

پس حرکت طہ = عہ اور طہ = طہ₁ کے اندر رہتی ہے جہاں جم طہ₁ (۶) کے بائیں جانب کے رُکن کے مساوی ہے۔

اب طہ₁ $\gtrless$ عہ یعنی سلاخ ابتدائی محل سے اوپر یا نیچے ہوگی

اگر بالترتیب جم طہ₁ $\lessgtr$ جم عہ

یعنی اگر بالترتیب $\sqrt{\text{۱} - \text{۲ن جم عہ} + \text{ن}^{2}} \lessgtr (\text{جم عہ} + \text{ن})$

یعنی " " $\text{جب}^{2}\,\text{عہ} \lessgtr \text{۴ن جم عہ}$

یعنی " " $\frac{\text{جب}^{2}\,\text{عہ}}{\text{۴ جم عہ}} \lessgtr \frac{\text{و سہ}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}}{\text{۳ج}}$

یعنی اگر بالترتیب $س^2 \gtrless \frac{۳ ج}{۴ ا جم عہ}$

یعنی اگر ابتدائی زاویئی رفتار بڑی ہو یا چھوٹی ہو میلان عہ پر کی قائم حرکت کی زاویئی رفتار سے ۔

ظاہر ہے کہ مساوات (۲) اس اصول سے بھی حاصل ہوسکتی تھی کہ و ص کے گرد، معیارِ حرکت کا معیارِ اثر مستقل رہتا ہے ۔

نیز توانائی کے تحفظ کے اصول سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۲ م و^2}{۳}\left(فہ^2 جب^2 طہ + طہ^{\cdot 2}\right) = م ج و \left(جم طہ - جم عہ\right) + \frac{۲ م و^2}{۳} س^2 جب^2 عہ$$

مساوات (۲) سے فہ کی قیمت مندرج کرنے سے مساوات (۵) حاصل ہوتی ہے ۔

قائم حرکت کے گرد چھوٹے اهتزاز ۔

(۴) سے قائم حرکت کے لیے $س^2$ کی قیمت $\frac{۳ ج}{۴ ا جم عہ}$ ہے ۔ اگر $س^2$ کی یہ قیمت ہو تو (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\ddot{طہ} = \frac{۳ ج}{۴ و}\left[\frac{جب^4 عہ}{جم عہ} \cdot \frac{جم طہ}{جب^3 طہ} - جب طہ\right] \cdots\cdots\cdots (۷)$$

یہاں طہ = عہ + سا رکھو، جہاں سا چھوٹا ہے اور اس لیے

$$جب طہ = جب عہ + سا جم عہ$$

اور

$$جم طہ = جم عہ - سا جب عہ$$

پس (۷) سے حاصل ہوتا ہے

$$\ddot{سا} = \frac{۳ ج جب عہ}{۴ و}\left[\left(۱ - سا مس عہ\right)\left(۱ + سا مم عہ\right)^{-3} - \left(۱ + سا مم عہ\right)\right]$$

$$= -\frac{۳ ج جب عہ}{۴ و} \times سا \left[۴ مم عہ + مس عہ\right]$$

$$= -\,\text{سا} \times \frac{\text{۳ج}\,(\text{۱} + \text{۳ جم}^{\text{۲}}\,\text{عہ})}{\text{۴ ا جم عہ}}$$

سا کے مربعوں کو نظرانداز کرنے سے

پس مطلوبہ وقت

$$= \text{۲}\pi \sqrt{\frac{\text{۴ ا جم عہ}}{\text{۳ ج}\,(\text{۱} + \text{۳ جم}^{\text{۲}}\,\text{عہ})}}$$

مشق ۳۔ چار مساوی سلاخوں کے سروں کو جوڑنے سے معین ا ب ج د بنایا گیا ہے۔ ہر ایک سلاخ کا طول ۲ ا ہے۔ زاویوں ب اور د کو ایک لچکدار رسّی کے ذریعہ ملایا گیا ہے اور سب سے نچلا سرا ا ایک اُفقی سطح مستوی پر ساکن ہے اور سرا ج ایک چکنے انتصابی تار پر جو ا میں سے گذرتا ہے پھسلتا ہے۔ تعادل کے محل میں رسّی کا طول طبعی طول کا دوچند ہے اور زاویہ اس حالت میں ب ا د، ۲ عہ کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ اس محل کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$\text{۲}\pi \left\{\frac{\text{۲ ا}\,(\text{۱} + \text{۳ جب}^{\text{۲}}\,\text{عہ})\,\text{جم عہ}}{\text{۳ ج جم ۲ عہ}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$ ہے۔

جب سلاخوں کا میلان سمتِ انتصابی کے ساتھ طہ ہو تو اوپر کی ہر ایک سلاخ کے مرکز کی رفتاریں یہ ہونگی

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,[\text{۳ ا جم طہ}] \;\text{اور}\; \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,(\text{ا جب طہ}) \;\text{یعنی}\; -\text{۳ ا جب طہ} \times \dot{\text{طہ}} \;\text{اور}\; \text{ا جم طہ} \times \dot{\text{طہ}}$$

پس کل توانائی بالحرکت ت

$$= \text{۲} \times \tfrac{1}{2}\,\text{م} \left[\frac{\text{۴ ا}^{\text{۲}}}{\text{۳}}\,\dot{\text{طہ}}^{\text{۲}} + (-\text{۳ ا جب طہ} \times \dot{\text{طہ}})^{\text{۲}} + (\text{ا جم طہ} \times \dot{\text{طہ}})^{\text{۲}} + \frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۳}}\,\dot{\text{طہ}}^{\text{۲}}\right]$$

$$= \text{۸ م ا}^{\text{۲}}\,\dot{\text{طہ}}^{\text{۲}} \left[\frac{1}{3} + \text{جب}^{\text{۲}}\,\text{طہ}\right]$$

نیز کامِ تفاعل ہ

$$= - م ج × ۲ (ا جم طہ + ۳ ا جم طہ) - ۲ لہ \int_{ج_۱}^{۲ ا جب طہ} \frac{لا - ج_۱}{ج_۱} فرلا$$

$$= - ۸ م ج ا جم طہ - \frac{لہ}{ج_۱} (۲ ا جب طہ - ج_۱)^۲$$

جہاں ۲ ج_۱ رسّی کا طبعی طول ہے اور لہ اس کی لچک کی قدر ہے۔
پس لگرانج کی مساوات ہے

$$\frac{فر}{فرت}\left[۱۶ ا^۲ م طہَ \left(\frac{۱}{۳} + جب^۲ طہ\right)\right] - ۱۶ م ا^۲ طہَ^۲ جب طہ جم طہ$$

$$= ۸ م ج ا جب طہ - \frac{۴ لہ}{ج_۱} ا جم طہ (۲ ا جب طہ - ج_۱) \quad .... (۱)$$

نیز معلوم ہے کہ طہَ اور طہً دونوں صفر ہیں جب کہ طہ = عہ اور ج_۱ = ا جب عہ

$$\therefore لہ = \frac{۲ م ج ج_۱}{ا جم عہ}$$

(۱) میں طہ = عہ + سا رکھنے سے جہاں سا بہت چھوٹا ہے، اور سا اور سًا کے حاصل ضربوں اور مربعوں کو نظر انداز کرنے سے

$$۱۶ ا^۲ م سًا \left(\frac{۱}{۳} + جب^۲ عہ\right)$$

$$= ۸ م ج ا (جب عہ + سا جم عہ) - \frac{۸ م ج}{جم عہ}[جم عہ - سا جب عہ][ا جب عہ + ۲ سا ا جم عہ]$$

$$= - ۸ ا م ج سا (جم عہ - جب عہ مس عہ)$$

یعنی

$$سًا = - \frac{۳ ج جم ۲ عہ}{۲ ا جم عہ (۱ + ۳ جب^۲ عہ)} × سا$$

پس مطلوبہ وقت $= ۲\pi \sqrt{\frac{۲ ا جم عہ (۱ + ۳ جب^۲ عہ)}{۳ ج جم ۲ عہ}}$

مشق ۴ - مشق ۱ میں تعادلِ قائم کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز جب کہ سلاخوں کی کمیتیں اور طول مساوی ہوں۔

اگر $\text{م}_1 = \text{م}_2$ اور ا = ب تو مشق ۱ کی مساواتیں (۳) اور (۴) ہوجاتی ہیں

$$\frac{16}{3}\ddot{\text{ط}} + 2\,\ddot{\text{ف}}\,\text{جم}(\text{ف} - \text{ط}) - 2\,\dot{\text{ف}}^2\,\text{جب}(\text{ف} - \text{ط}) = -\frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جب ط}$$

اور
$$2\ddot{\text{ط}}\,\text{جم}(\text{ف} - \text{ط}) + \frac{4}{3}\ddot{\text{ف}} + 2\dot{\text{ط}}^2\,\text{جب}(\text{ف} - \text{ط}) = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جب ف}$$

تعادلِ قائم کے محل کے لیے ط = ف = ۰، ط اور ف کو چھوٹا لینے سے، اور $\dot{\text{ط}}^2$ اور $\dot{\text{ف}}^2$ کو نظر انداز کرنے سے، نیز جب ط اور جب ف کی بجائے ط اور ف لکھنے سے یہ مساواتیں ہوجاتی ہیں:-

$$\left(-\frac{16}{3}\text{عف}^2 + \frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\right)\text{ط} + 2\,\text{عف}^2\,\text{ف} = 0 \quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

اور
$$2\,\text{عف}^2\,\text{ط} + \left(-\frac{4}{3}\text{عف}^2 + \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\right)\text{ف} = 0 \quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

جہاں $\text{عف} \equiv \dfrac{\text{فر}}{\text{فرت}}$

ف کو ساقط کرنے سے

$$\left(-\frac{4}{3}\text{عف}^2 + \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\right)\left(-\frac{16}{3}\text{عف}^2 + \frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\right)\text{ط} - 4\,\text{عف}^4\,\text{ط} = 0$$

یعنی
$$\left(\text{عف}^4 + 3\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\text{عف}^2 + \frac{27}{28}\frac{\text{ج}^2}{\text{ا}^2}\right)\text{ط} = 0$$

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے رکھو ط = ل$_{\text{ع}}$ جم (ع ت + $\text{ع}_{\text{ع}}$)، تب

$$\text{ع}^4 - \frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\text{ع}^2 + \frac{27}{28}\times\frac{\text{ج}^2}{\text{ا}^2} = 0$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع}_۱^۲ = \frac{۳\text{ج}}{۱۴\text{ا}}\left(۷ + ۲\sqrt{۷}\right) \text{، اور } \text{ع}_۲^۲ = \frac{۳\text{ج}}{۱۴\text{ا}}\left(۷ - ۲\sqrt{۷}\right)$$

$$\therefore \text{ط} = \text{ل}_۱ \text{جم}\left(\text{ع}_۱\text{ت} + \text{عہ}_۱\right) + \text{ل}_۲ \text{جم}\left(\text{ع}_۲\text{ت} + \text{عہ}_۲\right)$$

پس ط کی حرکت دو سادہ موسیقی حرکتوں کو ترکیب دینے سے حاصل ہوتی ہے جن کے دَور بالترتیب $\frac{۲\pi}{\text{ع}_۱}$ اور $\frac{۲\pi}{\text{ع}_۲}$ ہیں۔

اسی طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف} = \text{م}_۱ \text{جم}\left(\text{ع}_۱\text{ت} + \text{عہ}_۱\right) + \text{م}_۲ \text{جم}\left(\text{ع}_۲\text{ت} + \text{عہ}_۲\right)$$

مستقل ل، ل، م، م غیر تابع نہیں ہیں ۔کیونکہ اگر ہم ط اور ف کی قیمتیں مساواتوں (۱) اور (۲) میں مندرج کریں تو ہمیں اِن کے باہمی روابط حاصل ہو جاتے ہیں۔

جو یہ ہیں $\frac{\text{ل}_۱}{\text{م}_۱} = -\frac{۲\sqrt{۷} - ۱}{۹}$ اور $\frac{\text{ل}_۲}{\text{م}_۲} = \frac{۲\sqrt{۷} + ۱}{۹}$

اختیاری مستقل جو بالآخر رُونما ہوتے ہیں اُن کی قیمتیں ابتدائی شرائط سے حاصل ہوسکتی ہیں۔

مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایک اَور طریقہ سے بھی حل کیا جاسکتا ہے جو حسب ذیل ہے:- (۲) کو لہ سے ضرب دو اور (۱) میں جمع کرو، تب

$$\text{عف}^۲\left[\left(\frac{۱۶}{۳} + ۲\text{لہ}\right)\text{ط} + \left(۲ + \frac{۴}{۳}\text{لہ}\right)\text{ف}\right] + \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\left(۳\text{ط} + \text{لہ}\,\text{ف}\right) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

لہ کو ایسا لو کہ $\frac{\frac{۱۶}{۳} + ۲\text{لہ}}{۳} = \frac{۲ + \frac{۴}{۳}\text{لہ}}{\text{لہ}}$ یعنی $\text{لہ} = \frac{-۱ \pm ۲\sqrt{۷}}{۳}$

اِن قیمتوں کو (۳) میں مندرج کرنے سے، بعد اختصار

عف² [۹ط − (۲√۲ + ۱) فہ] = − ۳ج/۱۴ا [۷ + ۲√۲] [۹ط − (۲√۲ + ۱) فہ]
..........(۴)

اور عف² [۹ط + (۲√۲ − ۱) فہ] = − ۳ج/۱۴ا [۷ − ۲√۲] [۹ط + (۲√۲ − ۱) فہ]
..........(۵)

∴ ۹ط − (۲√۲ + ۱) فہ = ا جم (ع₁ ت + عہ₁)

اور ۹ط + (۲√۲ − ۱) فہ = ب جم (ع₂ ت + عہ₂)

اس طریقہ میں یہ خوبی ہے کہ اس میں صرف چار ضروری اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں ۔

۲۵۰ — اگر آخری مثال میں ہم رکھیں

۹ط − (۲√۲ + ۱) فہ = لا

اور ۹ط + (۲√۲ − ۱) فہ = ما

تو مساواتیں (۴) اور (۵) ہو جاتی ہیں

ف²لا / فت² = − لہ لا ، اور ف²ما / فت² = − مہ ما

جہاں لہ اور مہ عددی مقداریں ہیں ۔

مقداریں لا اور ما جو ایسی ہوں کہ متناظر مساواتوں میں سے ہر ایک میں صرف لا یا ما شامل ہوں، صدر محدد یا عمادی محدد کہلاتی ہیں ۔

زیادہ عام طور پر فرض کرو کہ توانائی بالحرکت تَ اور کام تفاعل ﮦ تعادل قائم کے محل کے گرد، چھوٹے اہتزاز کی صورت میں

طہ، فہ، سا اور طہَ، فہَ، سَا

کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

پس تَ = ا$_{11}$ طہَ^{2} + ا$_{22}$ فہَ^{2} + ا$_{33}$ سَا^2

+ ۲ا$_{21}$ طہَ فہَ + ۲ ا$_{31}$ طہَ سَا + ۲ا$_{32}$ فہَ سَا .... (۱)

اور ﮦ = ج + اِ$_1$ طہ + اِ$_2$ فہ + اِ$_3$ سا + اِ$_{11}$ طہ^2 + اِ$_{22}$ فہ^2 + اِ$_{33}$ سا^2 + .. (۲)

اگر طہ، فہ، سا کو لا، ما، سے کی رقوم میں ذیل کی شکل کی خطی مساواتوں کے ذریعہ بیان کیا جائے

طہ = ل$_1$ لا + ل$_2$ ما + ل$_3$ سے

فہ = م$_1$ لا + م$_2$ ما + م$_3$ سے

سا = ن$_1$ لا + ن$_2$ ما + ن$_3$ سے

اور ل$_1$، ل$_2$، ل$_3$، م$_1$، م$_2$، م$_3$، ن$_1$، ن$_2$، ن$_3$

کو ایسا منتخب کیا جائے کہ (۱) اور (۲) میں مندرج کرنے سے توانائی ت میں کوئی ایسی رقمیں نہ رہیں جن میں مَا سَے، سَے لاَ، لاَ مَا شامل ہوں اور ﮦ میں کوئی ایسی رقمیں نہ ہوں جن میں ما سے، سے لا، لا ما شامل ہوں تو لا، ما، سے کو صدر یا عمادی محدد کہتے ہیں۔ کیونکہ ایسی صورت میں

تَ = ا$_{11}$ لاَ^{2} + ا$_{22}$ مَا^2 + ا$_{33}$ سَے^2

اور $\text{ہ} = \text{ج} + \text{ق}_{1}\,\text{لاَ} + \text{ق}_{2}\,\text{ماَ} + \text{ق}_{3}\,\text{ےَ} + \text{ق}_{11}\,\text{لاَ}^{2} + \text{ق}_{22}\,\text{ماَ}^{2} + \text{ق}_{33}\,\text{ےَ}^{2}$

اور لگرانج کی نمونہ کی مساوات بن جاتی ہے

$$2\,\text{ق}_{11}\,\ddot{\text{لا}} = \text{ق}_{1} + 2\,\text{ق}_{11}\,\text{لا}$$

یعنی ایسی مساوات جس میں صرف لا شامل ہے۔

اِس کو اور اسی طرح ما اور ے کی دو اَور مساواتوں کو حل کرنے سے ہمیں طہ کی قیمت کے لیے تین سادہ موسیقی حرکتوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اگر ابتدائی مساواتوں میں تین سے زیادہ محدد شامل ہوں تو بھی اسی قسم کا عمل درست ہوگا۔

۲۵۱۔ لگرانج کی مساواتیں دھکوں کے لیے۔

فرض کرو کہ لاَ_{0} اور لاَ_{1} سے بالترتیب دھکے سے پہلے اور دھکے کے بعد لاَ کی قیمتیں تعبیر ہوتی ہیں۔ چونکہ مؤثر قوتوں کے موہوم معیارِ اثر $\Sigma\,\text{م}\,(\text{لاَ}_{1} - \text{لاَ}_{0})$ وغیرہ بالترتیب بیرونی دھکوں کے موہوم معیارِ اثروں کے مساوی ہوتے ہیں، اس لیے صرف طہ کے تغیر کے لیے

$$\Sigma\,\text{م}\left[(\text{لاَ}_{1} - \text{لاَ}_{0})\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + (\text{ماَ}_{1} - \text{ماَ}_{0})\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + (\text{یَ}_{1} - \text{یَ}_{0})\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right]\text{مف طہ}$$

$$= \Sigma\,\text{م}\left[\text{لا}_{1}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \text{ما}_{1}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \text{ے}_{1}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right]\text{مف طہ} \quad \ldots(1)$$

فرض کرو کہ ت کی قیمتیں دھکے کے عین پہلے اور عین بعد بالترتیب ت_{0} اور ت_{1} ہیں۔

تب دفعہ ۲۴۴ کی مساواتوں (۴) اور (۵) سے

$$\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right)_{0} = \Sigma\,\text{م}\left[\text{لاَ}\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف طہَ}} + \text{ماَ}\frac{\text{جف ماَ}}{\text{جف طہَ}} + \text{یَ}\frac{\text{جف یَ}}{\text{جف طہَ}}\right]_{0}$$

$$= ح\, م \left[لاَ \frac{جف\, لا}{جف\, طہ} + ماَ \frac{جف\, ما}{جف\, طہ} + ىَ \frac{جف\, ى}{جف\, طہ} \right]_{.}$$

اور

$$\left(\frac{جف\, ت}{جف\, طہَ}\right)_{١} = ح\, م \left[لاَ \frac{جف\, لا}{جف\, طہ} + ماَ \frac{جف\, ما}{جف\, طہ} + ىَ \frac{جف\, ى}{جف\, طہ} \right]_{١}$$

پس (۱) کا دائیں طرف کا رکن

$$= \left[\left(\frac{جف\, ت}{جف\, طہَ}\right)_{١} - \left(\frac{جف\, ت}{جف\, طہَ}\right)_{.} \right] مف\, طہ$$

نیز (۱) کے بائیں طرف کا رکن

$$= \left[\frac{جف\, ك_{١}}{جف\, لا} \cdot \frac{جف\, لا}{جف\, طہ} + \frac{جف\, ك_{١}}{جف\, ما} \cdot \frac{جف\, ما}{جف\, طہ} + \frac{جف\, ك_{١}}{جف\, ى} \cdot \frac{جف\, ى}{جف\, طہ} \right] مف\, طہ$$

$$= \frac{جف\, ك_{١}}{جف\, طہ}\, مف\, طہ$$

جہاں مف $ك_{١}$ ضربوں کا موہوم کام ہے۔

اس لیے اگر مف $ك_{١}$ کو ذیل کی شکل میں بیان کیا جائے۔

$$مف\, ك_{١} = ف\, مف\, طہ + ق\, مف\, فہ + \dots ،$$

تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے

$$\left(\frac{جف\, ت}{جف\, طہَ}\right)_{١} - \left(\frac{جف\, ت}{جف\, طہَ}\right)_{.} = ف \quad \dots\dots\dots (٢)$$

اور اسی طرح دیگر مساواتوں کے لیے۔

مساوات (۲)، دفعہ ۲۴۲ کی مساوات (۸) کو حدود ۰ اور تہ کے درمیان تکمل کرنے سے بھی حاصل ہو سکتی ہے، جہاں تہ دھکے کے دورانِ عمل کا نہایت چھوٹا وقفہ ہے۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right) \text{ کا تکملہ ہے } \left[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right]^{\text{ته}}.$$

یعنی
$$\left[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right] - \left[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right]_{۱}.$$

چونکہ $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}$ محدود ہے، اس لیے چھوٹے وقفہ ته کے دوران میں تکملہ بالآخر صفر ہے۔

$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}$ کا تکملہ $\frac{\text{جف ک}_۱}{\text{جف طہ}}$ ہے۔

پس مساوات (۲) حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۲ — ہم دفعۂ ماقبل کی دو مثالیں درج کرتے ہیں۔ دفعہ ۲۰۵ کی بہت سی مثالیں اور نیز دفعہ ۲۰۷ کی مشق ۲ اور امثلہ باب ۱۵ کی مشق ۱۴ بھی اسی طریقہ سے حاصل ہو سکتی ہے

مشق ۱ — تین مساوی یکساں سلاخیں اب، بج، جد ہیں۔ اِن کے سرے ب اور ج پر آزادانہ جُڑے ہوئے ہیں اور سرے ا اور د دو چکنی ثابت چولوں کے ساتھ آزادانہ طور پر مربوط ہیں جن کا درمیانی فاصلہ ہر ایک سلاخ کے طول کے مساوی ہے۔ یہ قالب مربع کی شکل میں ساکن ہے اور اب پر عمودوار اس کے وسطی نقطہ پر ایک ضرب ض لگائی گئی ہے، جس کا خطِ عمل مربع کی سطحِ مستوی میں ہے۔ ثابت کرو کہ توانائی جو پیدا ہوتی ہے وہ $\frac{۳ \text{ض}^۲}{۴۰ \text{م}}$ جہاں م ہر ایک سلاخ کی کمیت ہے۔

جب اب یا جد زاویہ طہ میں سے گھوم جائیں، تو ہر ایک کی توانائی $\frac{۱}{۲}\text{م}\frac{۴\text{ا}^۲}{۳}\dot{\text{طہ}}^۲$

نیز ب اور ج پر صدمے معلوم کرو۔

ہوتی ہے اور ب ج کی توانائی جو ا د کے متوازی رہتی ہے $\frac{1}{2}\text{م}\,(2\,\text{ا}\,\dot{\text{ط}})^2$ ہوتی ہے۔

$$\therefore\ \text{ت} = 2\times\frac{1}{2}\text{م}\times\frac{4\,\text{ا}^2}{3}\dot{\text{ط}}^2 + \frac{1}{2}\text{م}\times 4\,\text{ا}^2\dot{\text{ط}}^2 = \frac{10\,\text{م}\,\text{ا}^2}{3}\times\dot{\text{ط}}^2$$

$$\therefore\ \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}}\right)_1 = \frac{20\,\text{م}\,\text{ا}^2}{3}\dot{\text{ط}}\ \text{اور}\ \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}}\right)_0 = 0$$

نیز $\text{مف}\,\text{ک}_1 = \text{ض}\times\text{ا}\,\text{مف}\,\text{ط}$

پس $\frac{20\,\text{م}\,\text{ا}^2}{3}\dot{\text{ط}} = \text{ض}\times\text{ا}$ یعنی $\dot{\text{ط}} = \frac{3\,\text{ض}}{20\,\text{م}\,\text{ا}}$

$$\therefore\ \text{مطلوبہ توانائی} = \frac{10\,\text{م}\,\text{ا}^2\dot{\text{ط}}^2}{3} = \frac{3\,\text{ض}^2}{40\,\text{م}}$$

اگر جوڑوں ب اور ج پر دھکے ما اور ما₁ ہوں تو سلاخوں اب اور دج کے لیے ا اور د کے گرد معیارِ اثر لینے سے

$$\text{م}\times\frac{4\,\text{ا}^2}{3}\dot{\text{ط}} = \text{ض}\times\text{ا} - \text{ما}\times 2\,\text{ا}\ \ \text{اور}\ \ \text{م}\times\frac{4\,\text{ا}^2}{3}\dot{\text{ط}} = \text{ما}_1\times 2\,\text{ا}$$

$$\therefore\ \text{ما} = \frac{2\,\text{ض}}{5}\ \ \text{اور}\ \ \text{ما}_1 = \frac{\text{ض}}{10}$$

مشق ۲ — امثلہ باب ۱۵ کی مشق ۱۲ کو اسی طریقہ سے حل کرو۔
فرض کرو کہ سلاخِ مضروب کی کمیت م₁ ہے اور م₂ قریب کی سلاخ کی کمیت ہے، پس

$$\frac{\text{م}_1}{\text{ا}} = \frac{\text{م}_2}{\text{ب}} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ھ}}{\text{ا}+\text{ب}}$$

فرض کرو کہ سلاخِ مضروب میں رفتار ع اور زاویئی رفتار سہ پیدا ہوتی ہے۔

$$\text{تب}\ \ \text{ت} = \frac{1}{2}\times 2\,\text{م}_1\left(\text{ع}^2 + \frac{\text{ا}^2}{3}\text{سہ}^2\right) + \frac{1}{2}\text{م}_2\left[(\text{ع}+\text{ا}\,\text{سہ})^2 + (\text{ع}-\text{ا}\,\text{سہ})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\text{ھ}\,\text{ع}^2 + \frac{1}{6}\text{ھ}\,\text{ا}^2\text{سہ}^2\,\frac{\text{ا}+3\,\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}}\ \ \ldots\ldots\ldots (1)$$

نیز ضرب لا = مر (و - ع - ج سہ) .... (۲)

جہاں و ذرہ کی ابتدائی رفتار ہے -

نیز مف و۱ = مر [و - ع - ج سہ] [مف لا + ج مف طہ] .... (۳)

جہاں ع = لاَ اور سہ = طہَ

پس دفعۂ ماقبل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے:

مرَع = (جف و۱) / (جف لاَ) = مر [و - ع - ج سہ] .... (۴)

اور (مرَ / ۳) × ل۲ سہ × (ا + ۳ب) / (ا + ب) = (جف و۱) / (جف طہَ) = مرج [و - ع - ج سہ] ...... (۵)

اگر له = (۳ج۲ / ل۲) × (ا + ب) / (ا + ۳ب)

تو ان سے ملتا ہے

ع = مر و / (مر(۱ + له) + مرَ) ، اور ج سہ = مر و له / (مر(۱ + له) + مرَ) ...... (۶)

نیز دفعہ ۲۰۷ کی مشق ۳ کی رُو سے توانائی بالحرکت کا نقصان

= ½ لا [و + (ع + ج سہ)] - ½ لا [ع + ج سہ]

= ½ لا × و = ½ مر و [و - (ع + ج سہ)] = وغیرہ وغیرہ

مثالیں

۱- ایک منکا جس کی کمیت مر ہے، ایک چکنے ثابت تار پر پھسلتا ہے جس کا میلان سمتِ انتصابی کے ساتھ عہ ہے اور اس کے ساتھ ایک سلاخ قبضہ کے ذریعہ وصل ہے جس کی کمیت م اور طول ۲ ل ہے، اور جو تار میں سے گزرنے والی انتصابی

سطح مستوی میں آزادانہ گھوم سکتی ہے - اگر نظام حرکت کرنا شروع کرے جب کہ سلاخ انتصاباً لٹک رہی ہو تو ثابت کرو کہ

{۴ م + م (۱ + ۳ جم۲ طہ)} ل طہ̇۲ = ۶ (م + م) ج جب عہ (جب طہ - جب عہ)

جہاں طہ زاویہ ہے سلاخ اور تار کے نچلے حصہ کے درمیان -

۲- ایک ٹھوس یکساں کرہ کے ساتھ ایک ہلکی سلاخ استوار طور پر لگی ہوئی ہے اور سلاخ کرہ کے مرکز میں سے گزرتی ہے - سلاخ کو ایک ثابت انتصابی محور کے ساتھ اس طرح جوڑا گیا ہے کہ سلاخ اور محور کا درمیانی زاویہ طہ خواہ بدلے لیکن سلاخ محور کے ساتھ گھومتی ہے - اگر انتصابی محور کو مستقل یکساں زاویئی رفتار کے ساتھ گھمایا جائے تو ثابت کرو کہ حرکت کی مساوات اس شکل طہ̇۲ = ن۲ (جم طہ - جم بہ) (جم عہ - جم طہ) کی ہوگی - نیز ثابت کرو کہ کرہ میں جو مجموعی توانائی پیدا ہوگی جب کہ طہ، طہ۱ سے بڑھ کر طہ۲ ہو جائے وہ جم۲ طہ۲ - جم۲ طہ۱ کے متناسب ہوگی۔

۳- ایک یکساں سلاخ کی کمیت ۳ م اور طول ۲ ل ہے - اس کا وسطی نقطہ ثابت کر دیا گیا ہے اور ایک کمیت م اس کے ایک سرے کے ساتھ بندھی ہے - سلاخ کو جب کہ یہ اُفقی محل میں ہو اس کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد زاویئی رفتار √(۲ ن ج / ل) کے ساتھ گھمانا شروع کیا گیا ہے - ثابت کرو کہ سلاخ کا وزنی سرا گرتا جائیگا تاوقتیکہ سلاخ کا مَیلان سمتِ انتصابی کے ساتھ جم⁻¹ [√(ن۲ + ۱) - ن] نہ ہو جائے اور بعد ازاں اُٹھنا شروع ہوگا۔

۴- ایک سلاخ و ا جس کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے و پر ایک ثابت انتصابی سلاخ و ب کے ساتھ پیوستہ ہے اور و ا، و ب کے گرد اُفقی سطح مستوی میں آزادانہ گھوم سکتی ہے - ایک سلاخ لہ ما جس کا طول ۲ ا ہے چھوٹے چھوٹے حلقوں کے ذریعہ و ا اور و ب کے ساتھ بالترتیب لہ اور ما پر مربوط ہے۔ اگر نظام کو ابتداءً و ب کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ چلایا جائے تو زاویہ طہ معلوم کرنے کی مساوات دریافت کرو جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو سلاخ لہ ما وقت ت پر سمتِ انتصابی کے ساتھ بناتی ہے - ثابت کرو کہ حرکت قائم ہوگی اور

سلاخ لا ما سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بنائیگی' اگر

$$\text{سہ}^2 = \frac{3\,\text{ج}}{4\,\text{ا}}\ \text{قط عہ}،$$

اور اگر سلاخ کو اِس کی قائم حرکت کے محل سے ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت $4\pi\sqrt{\frac{\text{ا جم عہ}}{3\,\text{ج}\,(1+3\,\text{جم}^2\,\text{عہ})}}$ ہوگی۔

۵ - اگر سوال ماسبق میں سلاخ و ا کو مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھمایا جائے تو ثابت کرو کہ اگر $4\,\text{سہ}^2\,\text{ا} > 3\,\text{ج}$ تو حرکت قائم ہوگی جب کہ

$$\text{جم عہ} = \frac{3\,\text{ج}}{4\,\text{سہ}^2\,\text{ا}}،$$

اور ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت $\frac{8\pi\,\text{ا سہ}}{\sqrt{16\,\text{سہ}^4\,\text{ا}^2 - 9\,\text{ج}^2}}$ ہوگی۔

[سلاخ لا ما کے ہر جزو پر مرکز گریز قوت لگا کر نظام کو ساکن کرو اور توانائی کا اصول لگاؤ۔]

۶ - تین مساوی یکساں سلاخیں ا ب، ب ج، ج د ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت م ہے اور طول ۲ ا، اور یہ سلاخیں ب اور ج پر چکنے طور پر جُڑی ہوئی ہیں اور ایک خطِ مستقیم میں ساکن ہیں۔ ایک ضرب جس کا معیارِ اثر ھ ہے درمیانی سلاخ کو اِس کے مرکز و سے فاصلہ ج پر سلاخ مذکور پر علی القوائم سمت میں لگائی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ و کی ابتدائی رفتار $\frac{2\,\text{ھ}}{3\,\text{م}}$ ہے، اور سلاخوں کی ابتدائی زاویئی رفتاریں

$$\frac{(5\,\text{ا}+9\,\text{ج})\,\text{ھ}}{10\,\text{م}\,\text{ا}^2}،\quad \frac{6\,\text{ج}\,\text{ھ}}{5\,\text{م}\,\text{ا}^2}\ \text{اور}\ \frac{(5\,\text{ا}-9\,\text{ج})\,\text{ھ}}{10\,\text{م}\,\text{ا}^2}\ \text{ہیں۔}$$

۷ - چھ مساوی یکساں سلاخیں ایک منتظم مسدس بناتی ہیں جن کے سرے چکنے طور پر جُڑے ہوئے ہیں۔ یہ مسدس ایک چکنے میز پر پڑا ہے۔ ایک سلاخ کے

وسطی نقطہ پر اس کے عموددار ایک ضرب لگائی گئی ہے۔ حرکت معلوم کرو، اور ثابت کرو کہ مقابل کی سلاخ سلاخِ مضروبہ کی $\frac{1}{10}$ رفتار کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتی ہے۔

۸۔ ایک منتظم مسدس ا ب ج د ع ف یکساں مساوی سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے، مسدس ایک چکنے میز پر ساکن ہے۔ ایک رسّی سلاخ ا ب کے وسطی نقطہ کے ساتھ بندھی ہے اور رسّی کو ا ب کی سمت میں جھٹکا دیا گیا ہے۔ حاصل ابتدائی حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو ا ب اور د ع کے وسطی نقطوں کی رفتاریں بالترتیب اِن کی سمتوں میں متقابل سمتوں میں ہونگی اور اُن کی نسبت ۵۹ : ۴ ہے۔

[فرض کرو کہ $ع_1$ اور $و_1$ رفتاریں ہیں اب کے وسطی نقطہ کی ا ب کی سمت میں اور اس پر عمود وار اور $س_1$ اس کی زاویئی رفتار ہے، نیز فرض کرو کہ ب ج کی حرکت کا تعین اسی طرح $ع_2$، $و_2$ اور $س_2$ سے ہوتا ہے، اور علیٰ ہذالقیاس۔ کونوں ا، ب، ج، .... کی حرکت سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$و_1 = \frac{ع_6 - ع_2}{\overline{۳۴}} \quad \text{اور} \quad \text{ا} س_1 = \frac{ع_6 - ع_1 + ع_2}{\overline{۳۴}} \text{، وغیرہ}$$

اس لیے

$$\text{توانائی } ت = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, م\left[ع_1^2 + و_1^2 + \frac{ل^2}{3} س_1^2\right]$$

$$= \frac{م}{18}\,\Sigma\left[9ع_1^2 + 3(ع_6 - ع_2)^2 + (ع_6 - ع_1 + ع_2)^2\right]$$

نیز $\quad مف\, ک_1 = ض\, مف\, ل_1$، جہاں $ع_1 = \dot{ل}_1$

اور جھٹکا ض ہے۔

تب دفعہ ۲۵۱ کی مساواتیں لکھنے سے مکمل حرکت معلوم ہو جاتی ہے]۔

۹۔ ایک مکمل طور پر کھردرا کُرہ ایک مجوف اسطوانہ کے اندر پڑا ہے جو ایک مکمل طور پر کھردری سطح مستوی پر ساکن ہے۔ کُرہ کو تعادل کے محل سے

ذرا سا ہٹایا گیا ہے، ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزازہ کی مدت

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ج}} \times \frac{14\,\text{ھ}}{10\,\text{ھ} + 7\,\text{م}}}$$

ہے، جہاں ا اسطوانہ کا نصف قطر ہے، اور ب کرہ کا اور ھ اور م اسطوانہ اور کرہ کی کمیتیں ہیں۔

۱۰۔ ایک مکمل طور پر کھردرا کرہ جس کی کمیّت م اور نصف قطر ب ہے، نصف قطر ا کے ایک کروی جوف کے اندر اس کے سب سے نچلے نقطہ پر ساکن ہے۔ اس کرہ کے سب سے اوپر کے نقطہ کے ساتھ کمیت مَ کا ایک ذرہ لگا ہوا ہے۔ اس نظام کو ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اہتزاز ایسے ہونگے جیسے طول

$$(\text{ا} - \text{ب})\,\frac{4\,\text{مَ} + \frac{7}{5}\text{م}}{\text{م} + \text{مَ}\left(2 - \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)}$$

کے ایک سادہ رقاص کے۔

۱۱۔ ایک مجوف اسطوانی بیلن کے ساتھ ایک متقابل وزن بندھا ہے جو اسطوانہ کے محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ یہ نظام ایک کھردری اُفقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل اہتزاز کرتا ہے۔ اگر $\frac{2\pi}{\text{ع}}$ ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت ہو تو ثابت کرو کہ ع کے لیے مساوات یہ ہوگی

$$\text{ع}^2\left[(2\,\text{ھ} + \text{ھَ})\,\text{ک}^2 - \text{ھَ}\,\text{ھ}^2\right] = (2\,\text{ھ} + \text{ھَ})\,\text{ج}\,\text{ھ}$$

جہاں ھ اور ھَ بیلن اور متقابل وزن کی کمیتیں ہیں اور ک، ھَ کے گھماؤ کا نصف قطر ہے اسطوانہ کے محور کے گرد اور ھ اِس کی کمیّت کے مرکز کا فاصلہ ہے محور سے۔

۱۲۔ ایک پتلا مستدیر حلقہ جس کا نصف قطر ا اور کمیّت ھ ہے ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور اس کے ایک قطر کے مقابل کے سروں کے ساتھ دو تنی ہوئی لچکدار رسّیاں بندھی ہیں جن کے دوسرے سرے قطر مذکور ممدودہ پر کے ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ حلقہ کی سطح مستوی میں چھوٹے اہتزاز دو

کے لیے، دَوروں کی مدتیں $\frac{۲\pi}{ع}$ کی قیمتیں ہونگی جو ان مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

$\frac{\text{ه ل ع}^{۲}}{\text{۲ ت}} - ۱ = ۰$ یا $\frac{\text{ب}}{\text{ل} - \text{ب}}$ یا $\frac{\text{ل}}{\text{ا}}$، جہاں ب طبعی طول ہے، جہاں ل اور ت بالترتیب بحالتِ تعادل ایک رسّی کا طول اور تناؤ ہیں۔

۱۳۔ ایک یکساں سلاخ اب جس کا طول ۲ ا ہے اپنے ایک نقطہ کے گرد جس کا فاصلہ اِس کے مرکز سے ج ہے گھوم سکتی ہے، اور محلِ توازن میں افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے جب کہ ایک ذرّہ کو اس کے ایک سرے سے طول ل کی ایک ہلکی رسّی کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ اگر ذرّہ کو سلاخ کی انتصابی سطح مستوی میں ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت وہی ہوگی جو طول

$$\text{ل}\,\frac{\text{ا}^{۲} + ۳\,\text{اج}.\text{جم}^{۲}\text{عہ} + ۳\,\text{ج}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\text{عہ}}{\text{ا}^{۲} + ۳\,\text{اج}}$$

کے رقاص کی مدت ہوگی۔

۱۴۔ ایک تختہ کی کمیّت ه ہے، اس کے گھماؤ کا نصف قطر ک اور طول ۲ ب ہے، یہ ایک کمل طور پر کھردرے اسطوانہ کے گرد جس کا نصف قطر ا ہے ایک بیرمی جھولے کی طرح جھول سکتا ہے۔ اِس کے سروں پر رسیوں کے ذریعے دو ذرے لٹکے ہوئے ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیّت م ہے اور رسیوں کا طول ل ہے۔ ثابت کرو کہ جب یہ نظام جھولتا ہے تو معادل رقاصوں کے طول ل اور

$$\frac{\text{ه ک}^{۲} + ۲\,\text{م ب}^{۲}}{(\text{ه} + ۲\,\text{م})\,\text{ا}}$$

ہوتے ہیں۔

۱۵۔ ایک چکنی مستدیر نلی کے سب سے نچلے نقطہ پر ه کمیّت کا ایک ذرّہ رکھا گیا ہے۔ نلی کی کمیّت ه اور نصف قطر ا ہے۔ نلی اپنے بالاترین نقطے سے جو ثابت ہے، ایک انتصابی سطح مستوی میں لٹکی ہوئی ہے اور اس نقطہ کے گرد

اپنی سطح مستوی میں آزادانہ گھوم سکتی ہے ۔ اگر اس نظام کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ نظام کے غیر تابع اہتزازوں کی مدتیں

$$2\pi\sqrt{\frac{2\,\text{ل}}{\text{ج}}} \quad \text{اور} \quad 2\pi\sqrt{\frac{\text{م}}{\text{م}+\text{مَ}}\times\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$$ ہیں ۔

۱۶ ـ ایک رسّی ا ج کا سرا ا ایک ثابت نقطہ ا کے ساتھ بندھا ہے اور سرے ج کے ساتھ ایک ذرّہ بندھا ہے، اسی مقدار کا ایک ذرّہ ا ج کے وسطی نقطہ ب کے ساتھ بندھا ہے ۔ یہ نظام جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل چھوٹے اہتزاز کر رہا ہے ۔ اگر ابتدائً ا ب ج انتصابی ہو اور ا ب، ب ج کی زاویئی رفتاریں سہ اور سَہ ہوں، تو ثابت کرو کہ وقت ت کے بعد ا ب اور ب ج کے میلان ط اور فہ سمتِ انتصابی کے ساتھ مساواتوں

$$\text{فہ} + \sqrt{2}\,\text{ط} = \frac{\text{سَہ} + \sqrt{2}\,\text{سہ}}{\text{ن}}\ \text{جب ن ت}$$

اور

$$\text{فہ} - \sqrt{2}\,\text{ط} = \frac{\text{سَہ} - \sqrt{2}\,\text{سہ}}{\text{نَ}}\ \text{جب نَ ت}$$

سے حاصل ہونگے، جہاں

$$\text{ا ب} = \text{ب ج} = \text{ل}،\ \text{ن}^2 = \frac{\text{ج}}{\text{ل}}\left(2 - \sqrt{2}\right)\ \text{اور}\ \text{نَ}^2 = \frac{\text{ج}}{\text{ل}}\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

۱۷ ـ ایک یکساں سیدھی سلاخ جس کا طول ۲ ل ہے اپنے مرکز کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے اور ایک ذرّہ کو جس کی کمیّت سلاخ کی کمیّت کا ایک تہائی ہے ایک ہلکی ناقابل کھنچاؤ رسّی کے ذریعہ جس کا طول ل ہے سلاخ کے ایک سرے کے ساتھ باندھا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ صدر اہتزاز کی ایک دوری مدّت

$$2\pi\left(1 + \sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$$ ہوگی ۔

۱۸ ـ ایک یکساں سلاخ کا طول ۲ ل ہے، اس کا ایک سرا طول $\frac{5\,\text{ل}}{12}$ کی

ایک ہلکی ناقابلِ کھنچاؤ رسّی کے ذریعہ ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھا ہے۔ یہ نظام اپنے محلِ تعادل کے گرد انتصابی سطح مستوی میں چھوٹے اہتزاز کر رہا ہے۔ کسی آن میں اِس کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ صدر اہتزازوں کی دَوری مدتیں

$۲\pi\sqrt{\frac{۵ ل}{۳ ج}}$ اور $۲\pi\sqrt{\frac{ل}{۳ ج}}$ ہونگی۔

۱۹ - ایک یکساں سلاخ جس کی کمیت ۵م اور طول ۲ل ہے اپنے ایک ثابت سرے کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ اس کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک ہلکی رسّی کا ایک سرا بندھا ہے جس کا طول ۲ل ہے، رسّی کے دوسرے سرے کے ساتھ کمیت م کا ایک ذرّہ بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ انتصابی سطح مستوی میں چھوٹے اہتزازوں کی دَوری مدتیں طول $\frac{۲ ل}{۳}$ اور $\frac{۲۰ ل}{۷}$ کے سادہ رقاصوں کی دَوری مدتوں کے مساوی ہونگی۔

۲۰ - ایک کھردرے تختہ کا طول ۲ل فٹ ہے۔ اِسے نصف قطر ل کے ایک ہلکے اسطوانہ پر متشاکلاً آڑا رکھا گیا ہے، تختہ ساکن ہے اور ایک مکمل طور پر کھردری اُفقی سطح مستوی پر آزادانہ لڑھک سکتا ہے۔ ایک وزنی ذرّہ جس کی کمیت تختہ کی کمیت کی ن گنا ہے اسطوانہ کے سب سے نچلے نقطہ کے اندر جما ہوا ہے۔ اگر اس نظام کو ذراسی حرکت دی جائے تو ثابت کرو کہ اِس کے اہتزاز کی دَوری مدتیں $\frac{۲\pi}{ع}\sqrt{\frac{ل}{ج}}$ کی قیمتیں ہونگی جہاں ع کی مساوات

$$۸ع^{۴} - (ن + ۱۲) ع^{۲} + ۳(ن - ۱) = ۰$$ ہے۔

۲۱ - ایک مجسم متجانس کرہ کی کمیت ھ ہے۔ اس کے ایک نقطہ کے ساتھ کمیت ن ھ کی ایک متجانس سلاخ کا ایک سرا بندھا ہے۔ سلاخ کا دوسرا سرا ایک اَور ثابت نقطہ کے ساتھ آزادانہ بندھا ہے۔ اگر یہ نظام جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل تعادل کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کرے جب کہ کرہ کا مرکز اور سلاخ

ثابت نقطہ میں سے گذرنے والی انتصابی سطح مستوی میں رہیں تو ثابت کرو کہ صدر اہتزازوں کی دَوری مدتیں $\frac{۲\pi}{ع}$ کی قیمتیں ہونگی جہاں ع مساواتِ ذیل سے حاصل ہوتا ہے، ا طول ہے سلاخ کا، اور ب نصف قطر ہے کرہ کا

$$۲\,ا\,ب\,(۶ + ۷ن)\,ع^{۴} - ع^{۲}ج\left\{۱۰\,ا\,(۳+ن) + ۲۱\,ب\,(۲+ن)\right\}$$
$$+\,۱۵\,ج^{۲}\,(۲+ن) = ۰$$

اُنیسواں باب

چھوٹے اہتزاز - ابتدائی حرکتیں - ٹوٹنے کا میلان

۲۵۳ — ابواب ماقبل میں ہم نے چھوٹے اہتزازوں کے متعلق بہت سی مثالیں دیکھی ہیں، اور آخری باب میں ہم نے یہ بھی دیکھا ہے کہ اس قسم کے بعض سوالوں پر لگرانج کی مساواتیں کس طرح لگ سکتی ہیں۔

اگر اہتزاز ایک واحد جسم کا ہو اور حرکت ایک سطح مستوی میں ہو تو فوری مرکز کے خواص کو استعمال کرنا بالعموم سہولت بخش ہوتا ہے۔ دفعہ ۲۱۴ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ اگر حرکت چھوٹے اہتزاز پر مشتمل ہو تو ہم فوری مرکز ط کے گرد معیارِ اثر لے سکتے ہیں، گویا کہ یہ ثابت نقطہ ہے، اور حرکت کی مساوات ہو جاتی ہے مک² ف²ط/فرت¹ = بیرونی قوتوں کا معیارِ اثر م کے گرد۔

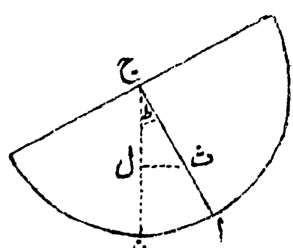
چونکہ حرکت ایک چھوٹے اہتزاز پر مشتمل ہے، اس لیے بائیں طرف کا رکن لازماً چھوٹا ہوگا اور اس لیے طہ بھی چھوٹا ہوگا۔ پس مک² کی ایسی رقمیں جن میں طہ شامل ہو نظر انداز کی جا سکتی ہیں کیونکہ ہم دوسرے رتبہ کی سب مقداروں کو چھوڑ رہے ہیں گویا مک² کے محسوب کرنے میں ہم جسم کو توازن کے محل میں تصور کر سکتے ہیں۔ بائیں طرف کے رکن میں کوئی چھوٹی

مقدار بطور ضارب کے نہیں آتی، اس لیے اسے معلوم کرنے کے لیے ہمیں جسم کے ہٹاؤ کے بعد کا محل لینا چاہیے۔

یہ اصول، ایک مثال کے مطالعہ سے، طالب علم کو بخوبی سمجھ میں آئیگا۔

۴۲۵ - مثال - ایک پتلے یکساں مجوف اسطوانہ کو اس کے محور میں سے گزرنے والی سطح مستوی سے کاٹ کر دو مساوی حصّے کیے گئے ہیں۔ ایک حصّہ ایک اُفقی فرش پر چھوٹے اہتزاز کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اسطوانہ کا نصف قطر ا ہو تو چھوٹے اہتزاز کی مدت $۲\pi\sqrt{\frac{ا(\pi-۲)}{ج}}$ ہوگی اگر فرش کھردرا ہو اور $۲\pi\sqrt{\frac{(\pi^{۲}-۴)ا}{۲\pi ج}}$ ہوگی اگر فرش چکنا ہو۔

فرض کرو کہ ج اسطوانہ کے چپٹے قاعدہ کا مرکز ہے، اور ث اِس کے



جمود کا مرکز۔ پس $ج ث = \frac{۲ا}{\pi}$،

نیز فرض کرو کہ ث ج میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی میں فرش کے ساتھ نقطۂ تماس ن ہے اور $ط = \angle ن ج ث$

اگر فرش کافی کھردرا ہو تو ن گھماؤ کا فوری مرکز ہوگا۔ پس اگر ک گھماؤ کا نصف قطر ہو ث کے گرد تو ن کے گرد معیارِ اثر لینے سے

$$م\left[ک^{۲} + ن ث^{۲}\right]\ddot{ط} = - م ج \times ج ث \;جب\; ط \;......(۱)$$

اب $ن ث^{۲} = ا^{۲} + ج ث^{۲} - ۲ا \times ج ث \times جم\, ط$

اور $م(ک^{۲} + ج ث^{۲}) =$ ج کے گرد جمود کا معیارِ اثر $= م ا^{۲}$

پس (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\ddot{\text{ط}} = -\text{ج} \times \frac{\text{۲ا}}{π} \times \frac{\text{جب ط}}{\text{۴ا}^{۲} - \text{۲ا} \times \text{ج ث جم ط}}$$

$$= -\frac{\text{ج}}{π} \times \frac{\text{ط}}{\text{ا} - \text{ج ث}}$$ ، کیونکہ ط بہت چھوٹا ہے

$$= -\frac{\text{ج ط}}{\text{ا}(π - ۲)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۲)$$

پس مطلوبہ مدت ہے $۲π\sqrt{\frac{\text{ا}(π - ۲)}{\text{ج}}}$

اب فرض کرو کہ سطح مستوی مکمل طور پر چکنی ہے، اور ث ل عمود کھینچو ج ن پر، تب ل فوری مرکز ہوگا ۔ کیونکہ جسم پر کوئی اُفقی قوت عمل نہیں کر رہی ہے، اس لیے ث انتصابی خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے، اس لیے فوری مرکز ث ل میں ہے ۔ نیز چونکہ ن اُفقی سمت میں حرکت کرتا ہے، اس لیے فوری مرکز ن ج میں بھی ہے، اس لیے یہ نقطہ ل ہے ۔ ل کے گرد معیارِ اثر لینے سے

$$\text{م}[\text{ک}^{۲} + \text{ل ث}^{۲}]\,\ddot{\text{ط}} = -\text{م ج} \times \text{ج ث جب ط} \quad \cdots\cdots\cdots (۳)$$

یعنی $$\text{م}[\text{ک}^{۲} + \text{ج ث}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\text{ط}]\,\ddot{\text{ط}} = -\text{م ج} \times \text{ج ث جب ط}$$

پس جب، ط بہت چھوٹا ہو

$$\ddot{\text{ط}} = -\text{ج}\,\frac{\text{۲ا}}{π}\,\frac{\text{ط}}{\text{ا}^{۲} - \text{ج ث}^{۲} + \text{ج ث}^{۲} \times \text{ط}^{۲}}$$

$$= -\frac{\text{۲اج}}{π}\,\frac{\text{ط}}{\text{ا}^{۲} - \text{ج ث}^{۲}} = -\frac{\text{۲ج}}{\text{ا}}\,\frac{π}{π^{۲} - ۴}\,\text{ط} \quad \cdots\cdots\cdots (۴)$$

پس مطلوبہ وقت ہے $۲π\sqrt{\frac{\text{ا}(π^{۲} - ۴)}{۲π\text{ج}}}$

اگر ہم نے وہ اصول استعمال کیا ہوتا جو دفعہ ماقبل میں بیان کیا گیا ہے تو (۱) کے دائیں طرف کے رُکن کی قیمت محسوب کرنے میں ہمیں ن ث کے لیے اس کی قیمت بحالتِ تعادل لینی پڑتی یعنی اث، یعنی ا - ج ث،
اب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\ddot{\text{ط}} = \frac{-\text{ج} \times \text{ج ث} \times \text{ط}}{\text{ک}^{۲} + \text{ج ث}^{۲} + \text{ا}^{۲} - ۲\,\text{ا} \times \text{ج ث}} = \frac{-\text{ج} \times \frac{\text{ا}^{۲}}{۳}}{۲\,\text{ا}^{۲} - ۲\,\text{ا} \times \frac{\text{ا}^{۲}}{۳}}\,\text{ط}، \text{وغیرہ}$$

نیز (۳) کے دائیں طرف کے رکن کو محسوب کرنے میں ہم ل ث کی قیمت بحالتِ تعادل لیتے ہیں جو صفر ہے،
تب (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\ddot{\text{ط}} = \frac{-\text{ج} \times \frac{\text{ا}^{۲}}{۳}}{\text{ا}^{۲} - \text{ج ث}^{۲}} \times \text{ط}، \text{وغیرہ}$$

مثالیں

۱ - ایک پتلی سلاخ جس کی کمیّت کا مرکز اس کو طول ب اور ج کے دو حصّوں میں منقسم کرتا ہے ایک انتصابی سطح مستوی میں نصف قطر ا کے ایک چکنے پیالہ کے اندر ساکن ہے۔ اگر اس کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اِس کے اہتزاز کی مدت وہی ہوگی جو طول $\dfrac{\text{ک}^{۲} + \text{ا}^{۲} - \text{ب ج}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ب ج}}}$ کے سادہ رقاص کی مدت ہوگی، جہاں ک اس کی کمیّت کے مرکز کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے۔

۲ - دو حلقے ہیں جن کی کمیتیں م اور مَ ہیں۔ اِن کو ایک ہلکی اُستوار سلاخ کے

ذریعہ ملایا گیا ہے - یہ حلقے نصف قطر ا کے ایک چکنے انتصابی مستدیر تار پر آزادانہ پھسل سکتے ہیں - اگر اس نظام کو تعادل کے محل سے ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ معادل سادہ رقاص کا طول $\dfrac{(\text{م} + \text{مَ})\,\text{ا}}{\sqrt{\text{م}^2 + \text{مَ}^2 + 2\,\text{م}\,\text{مَ}\,\text{جم}\,\text{عہ}}}$ ہوگا، جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو سلاخ کے محاذی تار کے مرکز پر بنتا ہے -

۳ - دو یکساں سلاخیں ہیں جن کی کمیتیں مساوی ہیں اور ہر ایک کا طول ۲ ا ہے - ان کے ایک ایک سرے کو مشترک نقطہ پر آزادانہ جوڑا گیا ہے - یہ نظام دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی اُفقی سطح مستوی میں واقع ہیں اس طرح ساکن ہے کہ ہر ایک سلاخ انتصابی سمت کے ساتھ ایک ہی زاویہ عہ بناتی ہے - اگر جوڑ کھونٹیوں کے ملانے والے خط کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے والے انتصابی خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزاز کی مدت $2\pi\sqrt{\dfrac{\text{ا}}{9\,\text{ج}} \times \dfrac{1 + 3\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{جم}\,\text{عہ}}}$ ہوگی -

۴ - دو یکساں وزنی سلاخوں ا ب اور ا ج کو سرے ا پر جوڑا گیا ہے - ہر سلاخ کی کمیت مہ اور طول ۲ ا ہے اور ان کے ایک چکنے اسطوانہ پر جس کا محور افقی اور نصف قطر ج ہے متشاکلاً رکھا گیا ہے - اگر محلِ تعادل سے اُن کو ذرا سا متشاکلاً ہٹایا جائے تو ثابت کرو کہ ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ا}\,\text{جب}\,\text{عہ}}{3\,\text{ج}} \times \frac{1 + 3\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}{1 + 2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}} \quad \text{ہوگی،}$$

جہاں

$$\text{ا}\,\text{جم}^3\,\text{عہ} = \text{ج}\,\text{جب}\,\text{عہ}$$

۵ - ایک مجسم ناقص اسطوانہ ایک کھردری افقی سطح مستوی پر تعادلِ قائم میں ساکن ہے - ثابت کرو کہ ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$\pi\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ج}} \times \frac{\text{ا}^2 + 5\,\text{ب}^2}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}} \quad \text{ہوگی -}$$

۶ ۔ ایک متجانس نصف کرہ ایک سطحِ مائل پر جو پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی کھردری ہے ساکن ہے، سطحِ مائل کا میلان اُفق کے ساتھ عہ ہے۔ اگر کرہ کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت وہی ہوگی جو طول

$$\frac{\text{۲ا}}{\text{۵}}\left[\sqrt{\frac{\text{۲۸} - \text{۴۰ جب}^{\text{۲}}\text{عہ}}{\text{۹} - \text{۶۴ جب}^{\text{۲}}\text{عہ}}} - \text{۵ جم عہ}\right]،$$

کے رقاص کی، جہاں ا نصف قطر ہے نصف کرہ کا۔

۷ ۔ ایک کرہ کو جس کا مرکزِ ثقل ث اِس کے ہندسی مرکز ج سے فاصلہ ف پر ہے ایک مکمل طور پر چکنے اُفقی میز پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہندسی مرکز کے گرد اِس کے مرکزِ ثقل کے چھوٹے اہتزاز کی مدت $\text{۲}\pi\sqrt{\frac{\text{ک}^{\text{۲}}}{\text{ف ج}}}\left[\text{۱} + \frac{\text{۴ف}^{\text{۲}} + \text{ک}^{\text{۲}}}{\text{۴ک}^{\text{۲}}}\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{عہ}}{\text{۲}}\right]$ ہے، جہاں ک، نقطہ ث کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے، اور عہ ابتدائی چھوٹا زاویہ ہے جو ج ث سمتِ انتصابی کے ساتھ بناتا ہے۔

۸ ۔ ایک یکساں سلاخ اپنے وسطی نقطہ کے گرد حرکت کرسکتی ہے اور اِس کے سرے لچکدار رسیوں کے ذریعہ ایک ثابت نقطہ کے ساتھ مربوط ہیں۔ ثابت کرو کہ محلِ تعادل کے گرد، سلاخ کے اہتزازوں کی دَوری مدت $\frac{\text{۲}\pi\,\text{ب}}{\text{ج}}\sqrt{\frac{\text{م ب}}{\text{۶ لہ}}}$ ہوگی، جہاں م سلاخ کی کمیت ہے، لہ ہر ایک رسّی کی لچک کی قدر ہے، اور ب محلِ تعادل میں ہر ایک رسی کا طول ہے، اور ج ثابت نقطہ کا فاصلہ ہے سلاخ کے وسطی نقطہ سے۔

۹ ۔ ایک یکساں شہتیر کا ایک سرا ایک چکنی اُفقی سطحِ مستوی پر ساکن ہے اور دوسرا سرا طول ل کی ایک رسّی سے سہارا ہوا ہے جو ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھی ہے، ثابت کرو کہ ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت، انتصابی سطحِ مستوی میں $\text{۲}\pi\sqrt{\frac{\text{۲ل}}{\text{ج}}}$ ہوگی۔

۱۰ - ایک یکساں وزنی سلاخ و ا، و پر کے ایک قبضہ سے لٹک رہی ہے، اور ایک لچکدار رسّی سلاخ کے ایک نقطہ ج کے ساتھ بندھی ہے۔ رسّی کا دوسرا سرا و کے انتصاباً نیچے ایک نقطہ ب کے ساتھ بندھا ہے۔ تعادل کے محل میں رسّی کا طول طبعی طول ہوتا ہے، لچک کی قدر سلاخ کے وزن کا ن گنا ہے۔ اگر سلاخ کو افقی محل میں لاکر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{۳}\,\text{ا}^{۲}\,\text{سہ}^{۲} = \text{ج ا} + \text{ن ج}\left[\frac{\text{ھ ف}}{\text{ھ - ف}} - \sqrt{\text{ھ}^{۲} + \text{ف}^{۲}} + \text{ھ - ف}\right]،$$

جہاں ۲ا سلاخ کا طول ہے، و ج = ف اور و ب = ھ، اور سہ اس کی زاویئی رفتار ہے جب کہ یہ انتصابی محل میں ہو۔
نیز چھوٹے اہتزاز کی مدت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ لچکدار رسّی سے اس میں کوئی تبدیلی نہیں ہوئی۔

۱۱ - ایک یکساں سلاخ ا ب ثابت سرے ا کے گرد انتصابی سطح مستوی میں آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ ب کو ایک ہلکی لچکدار رسّی کے ذریعے جس کا طبعی طول ل ہے ا کے عین اوپر ایک ثابت نقطہ کے ساتھ جس کا فاصلہ ا سے ھ ہے ملایا گیا ہے۔ اگر سلاخ تعادل میں ہو جب کہ یہ سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بنائے اور اس وقت رسّی کا طول ک ہو تو ثابت کرو کہ اِس محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت طول

$$\frac{۲}{۳}\cdot\frac{\text{ک}^{۲}\,(\text{ک - ل})}{\text{ھ ل جب}^{۲}\,\text{عہ}}$$ کے سادہ رقاص کی مدت کے مساوی ہوگی۔

۱۲ - ایک معیّن چار مساوی سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے۔ اسے ایک چکنے کرہ پر انتصابی محل میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ صرف اوپر کی دو سلاخیں کرہ سے مس کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ انتصابی سطح مستوی میں متشاکل اہتزاز کی مدت $۲\pi\sqrt{\dfrac{\text{۲ا جم عہ}}{\text{۳ج (۱ + ۲ جم}^{۲}\text{عہ)}}}$ ہوگی، جہاں ۲ا ہر ایک سلاخ کا طول ہے اور عہ وہ زاویہ ہے جو یہ محلِ تعادل میں سمتِ انتصابی کے ساتھ بناتی ہیں۔

۱۳ - ایک مستدیر قوس جس کا نصف قطر ا ہے ایک انتصابی سطح مستوی میں

ثابت ہے اور ایک یکساں مستدیر قرص جس کی کمیت م ہے اور نصف قطر $\frac{ا}{۳}$، اول الذکر قرص کے اندر لڑھکتا ہے ۔ جب قرص محلِ تعادل میں ہو تو کمیت $\frac{م}{۳}$ کا ایک ذرہ مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی قطر کے ساتھ مرکز سے فاصلہ $\frac{ا}{۲}$ پر ثابت کردیا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ محلِ تعادل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت

$\frac{\pi}{۶}\sqrt{\frac{۸۳ ا}{ج}}$ ہے ۔

۱۴ ۔ ایک یکساں سلاخ ایک کھردرے کُرے کے ساتھ مس کرتی ہوئی محلِ تعادل میں صرف کرہ کی کشش کے زیرِ عمل ساکن ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر اسے ذرا سا ہٹا دیا جائے تو یہ ہمیشہ اہتزاز کریگی اور چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$۲\pi \frac{ل}{ا} \frac{(ا^{۲}+ل^{۲})^{\frac{۳}{۴}}}{(۳ جہ م)^{\frac{۱}{۲}}}$$ ہوگی

جہاں جہ تجاذب کا مستقل ہے، م اور ا بالترتیب کرہ کی کمیت اور نصف قطر ہے، اور ۲ ل سلاخ کا طول ہے ۔

۱۵ ۔ قوت $\left[= \frac{مہ}{(فاصلہ)^{۲}}\right]$ کے دو مرکز دو نقطوں س اور سَ پر واقع ہیں جہاں س سَ = ۲ ب، س سَ کے وسطی نقطہ پر ایک یکساں سلاخ کا مرکز ثابت ہے جس کی کمیت م اور طول ۲ ا ہے ۔ ثابت کرو کہ محلِ تعادل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت $۲\pi (ب^{۲} - ا^{۲}) \div \sqrt{۶ مہ ب}$ ہے ۔

۱۶ ۔ ایک دکان کی اعلانی تختی مستطیل شکل ا ب ج د کی ہے اور اپنے افقی ضلع ا ب کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے ۔ ہوا مستقل رفتار د کے ساتھ متوازی الافق محل میں چل رہی ہے، اور تختی سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بنانے والے محل میں ساکن ہے ۔ اگر تختی کے ہر جزو پر ہوا کے دباؤ کو اضافی عادی رفتار کے ک گنا کے مساوی فرض کیا جائے تو عہ کی قیمت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ تعادل کے محل کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ر}}{\text{ج}}\times\frac{\text{۴ و}^{2}\text{ جم}^{2}\text{ عہ}}{\text{۳ و}^{2}\text{ جم عہ} - \text{ج ر جب}^{2}\text{ عہ}}}$$ ہوگی،

جہاں ب ج = ۲ ر

۱۷ - ایک وزنی حلقہ ا جس کی کمیّت ن م ہے ایک چکنے اُفقی تار پر آزادانہ حرکت کرسکتا ہے، ایک رسّی کا ایک سرا حلقہ کے ساتھ بندھا ہے ۔ تار کے نیچے گہرائی ھ پر ایک اَور چھوٹا ثابت حلقہ و ہے جس میں سے مذکورۂ بالا رسّی گزرتی ہے اور رسّی کے دوسرے سرے کے ساتھ کمیّت م کا ایک ذرّہ بندھا ہے ۔ ثابت کرو کہ رسّی و ا کا مَیلان طہ سمتِ انتصابی کے ساتھ مساواتِ ذیل سے حاصل ہوتا ہے:
ھ (ن + جب^{2} طہ) طہَ^{2} = ۲ ج جم^{4} طہ (قط عہ - قط طہ) جہاں عہ ابتدائی قیمت ہے طہ کی ۔

اس سے ثابت کرو کہ محلِ تعادل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت وہی ہوگی جو طول ن ھ کے سادہ رقّاص کی ہوتی ہے ۔

۱۸ - ایک سیدھی سلاخ ا ب جس کی کمیّت م ہے طول ر کی ایک ناقابلِ کھچاؤ رسّی کے ذریعہ جو سلاخ کے سرے ا کے ساتھ بندھی ہے انتصاباً لٹک رہی ہے ۔ ایک اَور رسّی جو ب کے نیچے گہرائی ب پر کے ایک چھوٹے ثابت حلقہ میں سے گزرتی ہے سرے ب کے ساتھ بندھی ہے اور اس کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک کمیّت مَ بندھی ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر سلاخ کو ہٹاکر قریب کے انتصابی محل میں لے آئیں تو یہ بعد کے اہتزاز کے دوران میں بھی انتصابی رہیگی اگر

$\frac{\text{مَ} + \text{م}}{\text{مَ}} = \frac{\text{ر}}{\text{ب}}$، اور معادل رقّاص کا طول $\frac{\text{ر} - \text{ب}}{2}$ ہوگا ۔

۱۹ - ایک یکساں وزنی سلاخ ا ب ایک انتصابی سطحِ مستوی میں اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اِس کا اوپر کا سرا ا، بغیر رگڑ کے ایک ثابت سیدھی افقی سلاخ پر پھسلتا ہے ۔ اگر سلاخ کا مَیلان سمتِ انتصابی کے ساتھ ہمیشہ چھوٹا رہے تو ثابت

کرو کہ ایک چھوٹے اہتزاز کی مدت نصف ہوگی اُس مدت کی جو متشابہ حرکت کی قوس کی صورت میں ہوگی جس میں ا ثابت رہو۔

۲۰ - ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲ ل ہے، اُفقی محل میں نصف قطر ا کے ایک ثابت افقی اسطوانہ پر ساکن ہے۔ اسے انتصابی سطح مستوی میں ذرا سا ہٹایا گیا ہے اور یہ پھسلنے کے بغیر جھولتی ہے۔ اگر اُس وقت جب کہ یہ افق کے ساتھ زاویہ ط بنائے اِس کی زاویئی رفتار سہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{ل}^2}{3} + \text{ا}^2\,\text{ط}^2\right)\dot{\text{ط}}^2 + 2\,\text{ج}\,\text{ا}\,(\text{جم ط} + \text{ط جب ط})$$ مستقل رہتا ہے۔

اگر اہتزاز چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ اِس کی مدت $2\pi\sqrt{\dfrac{\text{ل}^2}{3\,\text{ج}\,\text{ا}}}$ ہوگی۔

۲۱ - ایک چکنا مستدیر تار جس کا نصف قطر ا ہے مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ ایک انتصابی قطر کے گرد گھوم رہا ہے، اور ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲ب ہے اس طرح پھسل سکتی ہے کہ اس کے سرے تار پر رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ محل جس میں سلاخ متوازی الافق ہو اور تار کے مرکز سے نیچے ہو تعادلِ قائم کا محل ہوتا ہے اگر $\text{سہ}^2 < \dfrac{3\,\text{ج}\,\text{ر}}{(3\,\text{ا}^2 - 4\,\text{ب}^2)}$، جہاں $\text{ر} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ اور تعادلِ قائم کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$2\pi\sqrt{\frac{3\,\text{ا}^2 - 2\,\text{ب}^2}{3\,\text{ر}\,\text{ج} - \text{سہ}^2\,(3\,\text{ا}^2 - 4\,\text{ب}^2)}}$$ ہوگی۔

ابتدائی حرکتیں

۲۵۵ - بعض سوالوں میں ابتدائی اسراعوں، ابتدائی تعاملوں اور انحنا کے ابتدائی نصف قطروں کے جاننے کی ضرورت ہوتی ہے۔ اِن میں

حرکت کی مساواتیں اور ہندسی مساواتیں حسب معمول لکھ لیتے ہیں اور پھر مؤخرالذکر کو تفرق کرکے محصلہ نتائج کو متغیروں کی ابتدائی قیمتیں مندرج کرنے اور ابتدائی رفتاروں اور زاویئی رفتاروں کو نظرانداز کرنے سے مختصر کر لیتے ہیں۔

اس طرح ہمیں ایسی مساواتیں حاصل ہوجاتی ہیں جن سے وقت ت کی چھوٹی قیمتوں کے لیے محددوں کے دوسرے تفرقے معلوم ہوسکتے ہیں۔ اس لیے ہمیں ت کی رقوم میں محددوں کی تقریبی قیمتیں حاصل ہوجاتی ہیں۔

کسی نقطہ ن کے راستہ کے نصف قطرِ انحنا کی ابتدائی قیمت اُس کی حرکت کی ابتدائی سمت کو دریافت کرنے سے معلوم ہوسکتی ہے۔ اگر اس ابتدائی سمت کو ما کا محور مانا جائے اور اس کے ابتدائی ہٹاؤں کو ما، لا سے تعبیر کیا جائے جنہیں متغیر ت کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے تو نصف قطرِ انحنا کی

قیمت = نہا $\frac{\text{ما}^2}{2\,\text{لا}}$ -

دفعہ مابعد میں چند آسان مثالیں مندرج کی جاتی ہیں۔

۲۵۶- مشق ا- ایک یکساں سلاخ اب کی کمیت م اور طول ۲ ا ہے۔ اس کے سروں کے ساتھ دو رسیاں بندھی ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ل ہے اور ان رسیوں کے دوسرے سرے دو ثابت نقطوں و اور وَ کے ساتھ بندھے ہیں جو دونوں ایک ہی افقی خطِ مستقیم میں واقع ہیں۔ سلاخ افقی محل میں ساکن ہے اور رسیاں سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہیں۔ اب رسی وَب کو کاٹا گیا ہے، رسی و ا کے تناؤ میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اُسے معلوم کرو اور نیز رسی اور سلاخ کے فوری زاویئی اسراع معلوم کرو۔

جب رسی کو کاٹا جائے تو فرض کرو کہ رسی ایک چھوٹے زاویہ طہ میں سے گھوم جاتی ہے، اور سلاخ ایک چھوٹے زاویہ فہ میں سے گھوم جاتی ہے۔ فرض کرو کہ

اس وقت رسی کا تناؤ ت ہے۔ نیز فرض کرو کہ اس آن میں سلاخ کے مرکز کے افقی اور انتصابی محدد لا اور ما ہیں پس

لا = ل جب (عہ - طہ) + ا جم فہ = ل (جب عہ - طہ جم عہ) + ا ..... (۱)

ما = ل جم (عہ - طہ) + ا جب فہ = ل (جم عہ + طہ جب عہ) + ا فہ ..... (۲)

اس میں طہ اور فہ کے مربعوں کو نظرانداز کیا گیا ہے۔

ابتدائی حرکت کی مساواتیں ہیں

ل جب عہ × طہ'' + ا فہ'' = ما'' = ج - ت/م جم (عہ - طہ) = ج - ت/م جم عہ ....(۳)

- ل جم عہ × طہ'' = لا'' = - ت جب (عہ - طہ) / م = - ت/م جب عہ ....(۴)

اور ا²/۳ فہ'' = ت/م ا جب [۹۰ - فہ - (عہ - طہ)] = ت/م ا جم (عہ + فہ - طہ)

= ت/م ا جم عہ ....(۵)

(۳)، (۴) اور (۵) کو حل کرنے سے

ت = م ج جم عہ / (۱ + ۳ جم² عہ)، طہ'' = ج/ل . جب عہ / (۱ + ۳ جم² عہ)، اور فہ'' = ۳ج/ا × جم² عہ / (۱ + ۳ جم² عہ)

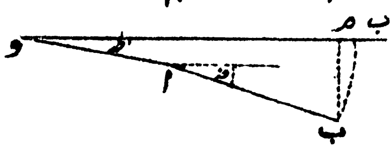
مشق ۲ — دو یکساں سلاخیں و ا، ا ب ہیں جن کی کمیتیں م اور م₂ اور جن کے طول بالترتیب ۲ ا، ۲ ب ہیں۔ یہ باہم ا پر آزادانہ جُڑی ہوئی ہیں اور ثابت نقطہ و کے گرد حرکت کرتی ہیں۔ اگر سلاخیں افقی محل سے روانہ ہوں تو ابتدائی نصف قطرِ انحنا کی قیمت اور سرے ب کا ابتدائی راستہ معلوم کرو۔

صرف ابتدائی حالت کے لیے لگرانج کی مساواتیں لکھو۔

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\left[\text{م}_1 \times \frac{4\text{ا}^2}{3}\dot{\text{ط}}^2 + \text{م}_2\frac{\text{ب}^2}{3}\times\dot{\text{ف}}^2 + \text{م}_2(2\text{ا}\dot{\text{ط}} + \text{ب}\dot{\text{ف}})^2\right]$$

اور

$$\text{ی} = \text{م}_1\text{ج} \times \text{ا}\,\text{ط} + \text{م}_2\text{ج}\,(2\text{ا}\,\text{ط} + \text{ب}\,\text{ف})$$



پس لگرانج کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{\text{م}_1}{3} + \text{م}_2\right) \times 4\text{ا}\,\ddot{\text{ط}} + 2\text{م}_2\text{ب}\,\ddot{\text{ف}} = \text{ج}\,(\text{م}_1 + 2\text{م}_2)$$

اور

$$\frac{4\text{ب}}{3}\ddot{\text{ف}} + 2\text{ا}\,\ddot{\text{ط}} = \text{ج}$$

اس لیے

$$\ddot{\text{ط}} = \frac{3\text{ج}}{\text{ا}}\,\frac{2\text{م}_1 + \text{م}_2}{8\text{م}_1 + 6\text{م}_2} \quad \text{اور} \quad \ddot{\text{ف}} = -\frac{3\text{ج}}{\text{ب}} \times \frac{\text{م}_1}{8\text{م}_1 + 6\text{م}_2}$$

پس ت کی چھوٹی قیمتوں کے لیے

$$\text{ط} = \frac{3\text{ج}\,\text{ت}^2}{2\text{ا}} \times \frac{2\text{م}_1 + \text{م}_2}{8\text{م}_1 + 6\text{م}_2} \quad \text{اور} \quad \text{ف} = -\frac{3\text{ج}\,\text{ت}^2}{2\text{ب}} \times \frac{\text{م}_1}{8\text{م}_1 + 6\text{م}_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

کیونکہ ط، ف اور $\dot{\text{ط}}$، $\dot{\text{ف}}$ ابتداءً صفر ہیں۔

اگر سلاخ کے سرے ب کے محدد اس چھوٹے وقت ت کے بعد لا اور ما ہوں تو

$$\text{لا} = 2\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط} + 2\text{ب}\,\text{جم}\,\text{ف} = 2\text{ا} + 2\text{ب} - \text{ا}\,\text{ط}^2 - \text{ب}\,\text{ف}^2$$

اور

$$\text{ما} = 2\text{ا}\,\text{جب}\,\text{ط} + 2\text{ب}\,\text{جب}\,\text{ف} = 2\text{ا}\,\text{ط} + 2\text{ب}\,\text{ف}$$

$$\therefore \text{نصف قطر انحنا} = \text{نہا}\,\frac{1}{2}\,\frac{\text{ب}'\text{ھ}^2}{\text{ھ}\,\text{ب}'} = \text{نہا}\,\frac{1}{2} \times \frac{\text{ما}^2}{(2\text{ا} + 2\text{ب} - \text{لا})}$$

$$\text{نہا} = \frac{2(\text{ا}\,\text{ط} + \text{ب}\,\text{فہ})^2}{\text{ا}\,\text{ط}^2 + \text{ب}\,\text{فہ}^2} = \frac{2\,\text{ا}\,\text{ب}\,(\text{م}_1 + \text{م}_2)^2}{(2\text{م}_1 + \text{م}_2)^2\,\text{ب} + \text{م}_1^2\,\text{ا}}$$

(۱) سے مندرج کرنے سے

نیز آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ ب کا ابتدائی راستہ ذیل کا مکافی ہے

$$\frac{\text{ما}^2}{2\,\text{ا} + 2\,\text{ب} - \text{لا}} = \frac{4(\text{ا}\,\text{ط} + \text{ب}\,\text{فہ})^2}{\text{ا}\,\text{ط}^2 + \text{ب}\,\text{فہ}^2} = \frac{4\,\text{ا}\,\text{ب}\,(\text{م}_1 + \text{م}_2)^2}{\text{ا}\,\text{م}_1^2 + \text{ب}\,(2\text{م}_1 + \text{م}_2)^2}$$

مثالیں

۱ ۔ مساوی طول کی دو رسیوں کا ایک ایک سرا ایک وزن ج کے ساتھ بندھا ہے اور ان کے دوسرے سرے ایک ہی افقی خط میں دو نقطوں ا اور ب کے ساتھ بندھے ہیں ۔ اگر ایک رسّی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ دوسری رسّی کا تناؤ ۱ : ۲ جم² $\frac{\text{ج}}{2}$ سے بدل جائیگا ۔

۲ ۔ ایک یکساں شہتیر کو اس کے سروں پر دو سہاروں کے ذریعہ اُفقی محل میں رکھا گیا ہے ۔ اگر ایک سہارے کو ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ دوسرے سرے پر کا دباؤ فوراً بدل کر شہتیر کے وزن کے ایک چوتھائی کے مساوی ہو جاتا ہے ۔

۳ ۔ ایک وزنی شہتیر کے سرے، مساوی طول کی رسیوں کے ذریعہ، ایک افقی خط کے دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہیں ۔ رسیاں شہتیر کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہیں ۔ اگر ایک رسّی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ دوسری رسّی کا ابتدائی تناؤ شہتیر کے وزن کا $\frac{2}{7}$ ہو جاتا ہے ۔

۴ ۔ ایک یکساں مثلثی پترا، تین مساوی انتصابی رسیوں کے ذریعے جو اس کے کونوں کے ساتھ بندھی ہیں سہارا ہوا ہے ۔ اگر ایک رسّی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ باقی دو رسیوں میں سے ہر ایک کا تناؤ فوراً نصف ہو جائیگا ۔

۵ - ایک یکساں مربع پتّرے ا ب ج د کو انتصابی رسیّوں کے ذریعہ جو ا اور ب کے ساتھ بندھی ہیں اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ ا ب متوازی الافق ہے - ثابت کرو کہ اگر ایک رسّی کو کاٹا جائے تو دوسری رسّی کا تناؤ دفعۃً نسبت ۵ : ۴ سے بدل جاتا ہے -

۶ - ایک یکساں مستدیر قرص کو دو تاگوں کے ذریعہ جو ایک افقی قطر کے سروں کے ساتھ بندھے ہیں انتصابی سطح مستوی میں لٹکایا گیا ہے - ہر ایک تاگا افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے - اگر ایک تاگے کو کھول دیا جائے تو ثابت کرو کہ دوسرے کا تناؤ نسبت ۲ جب^{۲} عہ : ۱ + ۲ جب^{۲} عہ سے دفعۃً بدل جائیگا -

۷ - ایک افقی سطح مستوی میں ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے اور اس کے کونوں سے تین مساوی طول کی رسیّوں کے ذریعہ ایک ذرّہ کو لٹکایا گیا ہے - مثلث کا ہر ایک ضلع ۲ب ہے اور ہر ایک رسّی کا طول ل ہے، اگر ایک رسّی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ باقی ہر ایک رسّی کا تناؤ اس نسبت $\frac{\text{۳ ل}^{۲} - \text{۴ ب}^{۲}}{\text{۲ (ل}^{۲} - \text{ب}^{۲})}$ سے بدل جائیگا -

۸ - ایک مستدیر قرص کا نصف قطر ل اور وزن و ہے، اسے تین رسیّوں کے ذریعے جو اس کے کنارے کے متشاکل نقطوں کے ساتھ بندھی ہیں افقی محل میں سہارا گیا ہے - رسیّوں کے باقی سروں کو ایک نقطہ کے ساتھ جو قرص کے مرکز سے بلندی ھ پر واقع ہے باندھا گیا ہے - ثابت کرو کہ اگر ایک رسّی کو کاٹ دیا جائے تو باقی ہر ایک رسّی کا تناؤ فوراً $\text{و} \times \frac{\text{۲ ھ} \sqrt{\text{ھ}^{۲} + \text{ل}^{۲}}}{\text{۸ ھ}^{۲} + \text{ل}^{۲}}$ ہوجاتا ہے -

۹ - ایک مساوی الاضلاع مثلث کو تین رسیّوں کے ذریعہ جن کے طول مثلث کے ضلع کے مساوی ہیں مثلث کے راسوں سے باندھ کر مثلث کو ایک نقطہ سے لٹکایا گیا ہے، ایک رسّی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ باقی دو کا تناؤ نسبت ۱۲ : ۲۵ میں کم ہوجاتا ہے -

۱۰ - ایک یکساں کروی خول کو جس کا وزن و ہے اس طرح سہارا گیا ہے کہ

اس کا مستوی قاعدہ ایک انتصابی دیوار سے مس کرتا ہے اور سب سے نچلا نقطہ ایک چکنے فرش پر ٹکا ہے۔ اگر خول کو دفعتہً چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ دیوار اور فرش پر ابتدائی دباؤ بالترتیب $\frac{۳ و}{۱۰}$ اور $\frac{۱۷ و}{۲۰}$ ہونگے۔

۱۱۔ ایک مستدیر نصف اسطوانہ دو سلاخوں کو جو اس کے چپٹے رُخ پر متشاکلاً پڑی ہیں سہارے ہوئے ہے۔ سلاخیں اسطوانہ کے محور کے متوازی ہیں۔ اسطوانہ کی منحنی سطح ایک مکمل چکنی افقی سطح مستوی پر ساکن ہے۔ اگر ایک سلاخ کو ہٹا دیا جائے تو دوسری سلاخ کا ابتدائی اسراع معلوم کرو۔

۱۲۔ ایک یکساں سیدھی سلاخ جس کی کمیت م ہے ایک چکنے ثابت حلقہ میں سے گزرتی ہے اور اس کے ایک سرے کے ساتھ کمیت ھ کا ایک ذرہ بندھا ہے۔ ابتداءً سلاخ اس طرح ساکن ہے کہ اِس کا وسطی نقطہ حلقہ پر ہے اور سلاخ افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ کا ابتدائی اسراع سلاخ کے ساتھ زاویہ

$$مس^{-۱}\left(\frac{ھ م عہ}{ھ + \frac{م}{۳}}\right)$$ بناتا ہے۔

۱۳۔ ایک یکساں سلاخ جس کی کمیت ھ اور طول ۲ ا ہے اپنے ایک سرے کے گرد حرکت کر سکتی ہے اور متوازی الافق محل میں سہاری ہوئی ہے۔ سلاخ کے ایک نقطہ کے ساتھ جس کا فاصلہ ثابت سرے سے ب ہے ایک رسّی کے ذریعے کمیت م کا ایک ذرہ بندھا ہے۔ سلاخ کو دفعتہً چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ رسّی کا تناؤ فوراً بدل کر $\frac{ھ م ج ا (۴ ا - ۳ ب)}{۴ ھ ا^۲ + ۳ م ب^۲}$ ہوجاتا ہے۔

۱۴۔ ایک اُفقی سلاخ جس کی کمیت م اور طول ۲ ا ہے، طول ۲ ا کی دو متوازی رسّیوں کے ذریعے جو اس کے سروں کے ساتھ بندھی ہیں لٹک رہی ہے۔ اگر اسے اس کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد دفعتہً زاویئی رفتار س دی جائے تو ثابت کرو کہ ہر ایک رسّی کا تناؤ فوراً

بقدر $\frac{م ا سہ^۲}{۴}$ کے بڑھ جاتا ہے۔

۱۵ - ایک یکساں سلاخ اپنے ایک سرے کے گرد حرکت کر سکتی ہے۔ اس کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک رسّی کے ذریعہ ایک وزنی ذرّہ بندھا ہے۔ ابتداءً رسی اور سلاخ ایک ہی اُفقی خطِ مستقیم میں ساکن ہیں۔ ثابت کرو کہ ذرّہ کے ابتدائی راستہ کا نصف قطرِ انحنا $\frac{۴ ا ب}{ا + ۹ ب}$ ہوگا، جہاں ا اور ب بالترتیب سلاخ اور رسّی کے طول ہیں۔

۱۶ - ن سلاخیں ہیں جن کے طول بالترتیب $ا_۱$، $ا_۲$، ... $ا_ن$ ہیں، ان کے سروں کو جوڑ کر انہیں ایک خطِ مستقیم میں رکھا گیا ہے۔ ان میں سے ایک کو ایک ضرب لگائی گئی ہے جو ابتداءً ان میں زاویئی اسراع $سہ_۱$، $سہ_۲$، ... $سہ_ن$ پیدا کرتی ہے۔ اگر سلاخوں کا ایک سرا ثابت ہو تو ثابت کرو کہ دوسرے سرے کا ابتدائی نصف قطرِ انحنا $\frac{(ا_۱ سہ_۱ + ا_۲ سہ_۲ + \cdots + ا_ن سہ_ن)^۲}{ا_۱ سہ_۱^۲ + ا_۲ سہ_۲^۲ + \cdots + ا_ن سہ_ن^۲}$ ہوگا۔

۱۷ - ایک سلاخ ا ب ج جس کا طول ل ہے ایک ثابت نقطہ ب میں سے گزرتی ہے۔ سرا ا ایک اور سلاخ و ا کے ساتھ جس کا طول ا ہے مربوط ہے، مؤخر الذکر سلاخ ایک ثابت نقطہ و کے گرد جس کا فاصلہ ب سے ف ہے گھوم سکتی ہے۔ اس نظام کو ابتداءً اس طرح رکھا گیا ہے کہ نقاط ا، و، ب، ج اسی ترتیب میں ایک خطِ مستقیم میں ہیں۔ اگر ا کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ ج کے راستہ کا ابتدائی نصف قطرِ انحنا $\frac{ا(ل - ا - ف)^۲}{(ا + ف)^۲ - ل ا}$ ہے۔

۱۸ - ایک یکساں چکنا مستدیر پترا جس کا نصف قطر ا اور کمیت م ہے ایک اُفقی قطر کے گرد حرکت کر سکتا ہے اور ابتداءً متوازی الافق ہے، اور اس پر اس کے محور سے فاصلہ ع پر کمیت مَ کا ایک ذرّہ رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مَ کے

راستہ کا ابتدائی نصف قطرِ انحنا ۱۲ $\dfrac{\text{م ج}^3}{\text{ھ ا}^2_1}$ ہے۔

[اگر اس وقت جب کہ قرص کا میلان افق کے ساتھ ایک چھوٹا زاویہ طہ ہو محور سے ذرّہ کا فاصلہ ر ہو تو حرکت کی مساواتیں ہونگی :

$$\ddot{\text{ر}} - \text{ر}\dot{\text{طہ}}^2 = \text{ج جب طہ} = \text{ج طہ} \quad .... (1)$$

اور

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف ت}}\left[\text{ھ ک}^2\dot{\text{طہ}} + \text{م ر}^2\dot{\text{طہ}}\right] = \text{م ر ج جم طہ}$$

یعنی

$$\left(\text{ھ}\frac{\text{ا}^2}{\text{۴}} + \text{م ر}^2\right)\ddot{\text{طہ}} + \text{۲م ر}\dot{\text{ر}}\dot{\text{طہ}} = \text{م ر ج} \quad .... (2)$$

اب $\ddot{\text{طہ}}$، $\dot{\text{طہ}}$ اور طہ بالترتیب ت میں رُتبوں ۰، ۱، ۲ کی مقداریں ہیں اور اس لیے (۱) سے $\ddot{\text{ر}}$ رُتبہ ۲ کی مقدار ہے، اور بنائً علیہ $\dot{\text{ر}}$ اور ر - ج_1 بالترتیب ت میں رُتبوں ۳ اور ۴ کی مقداریں ہیں۔

پس (۲) سے ت کی قوتوں کو نظر انداز کرنے سے

$$\ddot{\text{طہ}} = \frac{\text{۴ م ج}_1\text{ ج}}{\text{ھ ا}^2 + \text{۴ م ج}^2_1} = \text{ا ج فرض کرو}$$

$$\therefore \dot{\text{طہ}} = \text{ا ج ت اور طہ} = \tfrac{1}{2}\text{ ا ج ت}^2$$

اس لیے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\ddot{\text{ر}} = \text{ج}_1 \times \text{ا}^2\text{ج}^2\text{ت}^2 + \tfrac{1}{2}\text{ا ج}^2\text{ت}^2 = \text{ا ج}^2\left(\tfrac{1}{2} + \text{ا ج}_1\right)\text{ت}^2$$

$$\therefore \text{ر} - \text{ج}_1 = \text{ا ج}^2\left(\tfrac{1}{2} + \text{ا ج}_1\right)\frac{\text{ت}^4}{12}$$

پس دوچند نصف قطرِ انحنا

$$= \text{نہا}\frac{(\text{ر جب طہ})^2}{\text{ر جم طہ} - \text{ج}_1} = \text{نہا}\frac{\text{ج}^2_1 \times \text{طہ}^2}{\text{ر} - \text{ج}_1 - \text{ر}\frac{\text{طہ}^2}{2}}$$

$$= \text{نہا}\ \frac{\text{ج}^{2}\times\frac{1}{4}\,\text{ا}^{2}\,\text{ج}^{2}\,\text{ت}^{4}}{\text{ا}\,\text{ج}^{2}\left(\frac{1}{2}+\text{ا}\,\text{ج}\right)\frac{\text{ت}^{4}}{12}-\frac{\text{ج}^{2}}{2}\times\frac{1}{4}\,\text{ا}^{2}\,\text{ج}^{2}\,\text{ت}^{4}}$$ وغیرہ وغیرہ]

۱۹ - ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲ ا اور کمیت ھ ہے اپنے ایک سرے کے گرد جو ثابت ہے آزادانہ گھوم سکتی ہے - اسے اُفقی محل میں لاکر اس پر کمیت م کا ایک ذرہ جس کا فاصلہ ثابت سرے سے ب ہے رکھا گیا ہے اور پھر چھوڑ دیا گیا ہے۔
ثابت کرو کہ ذرہ کے راستہ کا ابتدائی نصف قطرِ انحنا $\frac{\text{۹ ب}^{2}}{\text{۴ ا} - \text{۳ ب}}\left(1+\frac{\text{م ب}}{\text{ھ ا}}\right)$ ہے۔
نیز سلاخ اور ذرہ کے درمیان ابتدائی تعامل معلوم کرو۔

۲۰ - ایک متجانس سلاخ ا ج د ب ہے جس کا طول ۲ ا ہے - اسے دو چکنی میخوں ج اور د پر جن میں سے ہر ایک کا فاصلہ سلاخ کے سروں سے $\frac{\text{ا}}{2}$ ہے رکھا گیا ہے - اب میخ د کو دفعتہً نکال دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ سرے ب کے راستہ کا ابتدائی نصف قطرِ انحنا $\frac{\text{۸۱ ا}}{\text{۲۸}}$ ہوگا اور میخ ج کا تعامل فوراً نسبت ۷ : ۸ میں بڑھ جائیگا۔

۲۱ - دفعۂ ماقبل میں اگر ع، ا ب کا وسطی نقطہ ہو، اور واحد سلاخ ا ب کی بجائے ا ع، ع ب دو یکساں سلاخیں ہوں جو ع پر آزادانہ جڑی ہوئی ہوں اور ہر ایک کی کثافت وہی ہو تو ثابت کرو کہ اس صورت میں بھی نتائج بالا صحیح ہونگے۔

۲۲ - ایک مجسم اُسطوانہ کی کمیت م ہے - اسے ایک اَور مجسم اسطوانہ پر جس کی کمیت ھ ہے اور جو ایک افقی سطح مستوی پر پڑا ہے رکھ کر محلِ تعادل سے ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز کے راستہ کا ابتدائی نصف قطرِ انحنا

$\left\{\frac{۳ ھ + ۲ م}{۳ (ھ + م)}\right\}^{۲}$ ج ہوگا، جہاں ج ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور تمام سطحیں پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی کھردری ہیں۔

ٹوٹنے کا میلان

۲۵۷۔ ہمارے پاس چھوٹی تراشش کی ایک سلاخ ا ب ہے جو معلومہ قوتوں کے زیرِ عمل تعادل میں ہے۔ اگر ہم اس کے ایک حصّہ ن ب کے تعادل پر علٰحدہ غور کریں تو ظاہر ہے کہ ن پر کی تراشش پر ا ن کا جو تعامل ن ب پر ہے، اُسے ن ب پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا توازن کرنا چاہیئے۔

اب ہم سکونیات سے جانتے ہیں کہ ن پر جو تراش ہے اس پر تعامل اولاً ایک تناؤ ت پر مشتمل ہوتا ہے جو ن پر کے مماس کی سمت میں عمل کرتا ہے، ثانیاً ایک جزّی زوج ج پر مشتمل ہوتا ہے جو ت پر عمود وار سمت میں عمل کرتا ہے اور ثالثاً ایک جفت ث پر مشتمل ہوتا ہے جسے زورِ جفت کہا جا سکتا ہے۔ اب اگر ن ب پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں معلوم ہوں تو حسبِ معمول تحلیل کرنے اور معیارِ اثر لینے سے ت، ج اور ث کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

اگر سلاخ متحرک ہو تو ڈی المبرٹ[ط] کے اصول کی رُو سے، ہمیں بیرونی قوتوں میں اُلٹی مُؤثر قوتیں بھی شامل کرنا چاہییں جو ن ب کے مختلف اجزا پر عمل کرتی ہیں۔

اب ہمیں معلوم ہے کہ سلاخ کو جو شَے توڑتی ہے وہ جفت ث ہے اس لیے ہم جفت ث کو سلاخ کے ٹوٹنے کے میلان کا ناپ تصور کرتے ہیں۔

پس ن پر سلاخ کے ٹوٹنے کا میلان ن کے گرد اُن تمام

ط D'Alembert

بیرونی اور اُلٹی مؤثر قوتوں کے معیارِ اثر سے جو ن کے ایک طرف عمل کرتی ہیں ناپا جاتا ہے۔

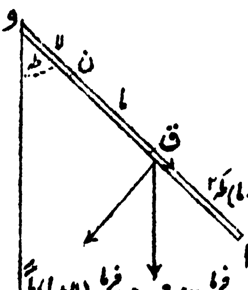
یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ سلاخ خواہ سیدھی ہو یا ٹیڑھی ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہے، اس کی تراش بہت چھوٹی ہے۔ اگر ایسا نہ ہو تو سوال ذرا پیچیدہ ہوجاتا ہے۔

اگر سلاخ کے بجائے رسّی ہو تو جفت ٹ معدوم ہوجائیگا اور ٹوٹنے کا میلان تناؤ ت سے ناپا جائیگا۔

ذیل کی دو مثالوں سے ظاہر ہوجائیگا کہ کسی خاص صورت میں کیا طریقہ اختیار کیا جاتا ہے

۲۵۸ - مشق ۱ - ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲ ل ہے انتصابی سطح مستوی میں ایک ثابت سرے و کے گرد حرکت کر رہی ہے۔ کسی نقطہ ن پر جس کا فاصلہ و سے لا ہے سلاخ کی تراش میں کے تعامل معلوم کرو۔

کسی نقطہ ق پر جس کا فاصلہ ن سے ما ہے سلاخ کے جزو فرما پر غور کرو۔ اس کا وزن ہے (فرما / ۲ل) × م ج۔



اُلٹی مؤثر قوتیں یہ ہیں

(م فرما / ۲ل) (لا + ما) طہَ اور (م فرما / ۲ل) (لا + ما) طہَ۲

جو نشان زدہ سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔

یہ تین قوتیں اور اسی قسم کی اور قوتیں جو جسم کے باقی اجزاء پر عمل کرتی ہیں بیرونی قوتوں کے ساتھ مل کر قوتوں کا ایک متعادل نظام پیدا کرتی ہیں۔ ن پر کے تعامل جو سلاخ کے ساتھ اور اس پر عمود وار عمل کرتے ہیں اور ن پر کا زور جفت بمع تمام ایسی قوتوں کے جو حصہ ن ا پر عمل کرتی ہیں باہم تعادل میں ہیں۔

پس ن پر زور جفت سمت ↶ میں

$$= \int_{\cdot}^{\text{۲ا}-\text{لا}} \frac{\text{فرما}}{\text{۲ا}} \text{م ج} \times \text{ما جب طہ} + \int_{\cdot}^{\text{۲ا}-\text{لا}} \frac{\text{م فرما}}{\text{۲ا}} (\text{لا} + \text{ما})\, \ddot{\text{طہ}}\, \text{ما}$$

$$= \frac{\text{م ج جب طہ}}{\text{۴ا}} (\text{۲ا} - \text{لا})^{۲} + \frac{\text{م}}{\text{۲ا}} \ddot{\text{طہ}} \left[\frac{\text{لا}}{۲} (\text{۲ا} - \text{لا})^{۲} + \frac{(\text{۲ا} - \text{لا})^{۳}}{۳} \right]$$

لیکن سلاخ کے سرے و کے گرد معیارِ اثر لینے سے

$$\ddot{\text{طہ}} = - \frac{\text{۳ ج}}{\text{۴ ا}} \text{جب طہ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور اس لیے

$$\dot{\text{طہ}}^{۲} = \frac{\text{۳ ج}}{\text{۲ا}} (\text{جم طہ} - \text{جم عہ}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں عہ سلاخ کا ابتدائی میلان ہے سمتِ انتصابی کے ساتھ۔

پس زور جفت

$$= \frac{\text{م ج جب طہ}}{\text{۴ا}} (\text{۲ا} - \text{لا})^{۲} - \frac{\text{۳ م ج}}{\text{۸ ا}^{۲}} \text{جب طہ} (\text{۲ا} - \text{لا})^{۲} \left[\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{۲ا} - \text{لا}}{۳} \right]$$

$$= - \frac{\text{م ج جب طہ}}{\text{۱۶ ا}^{۲}} \text{لا} (\text{۲ا} - \text{لا})^{۲}$$

یہ بڑے سے بڑا اُس وقت ہوگا جب کہ $\text{لا} = \frac{\text{۲ا}}{۳}$، پس اگر سلاخ ٹوٹے تو یہ و سے اپنے طول کے ایک تہائی فاصلہ پر ٹوٹیگی۔

سلاخ کے نقطہ ن پر کا تناؤ ن و کی سمت میں = ن ا پر عمل کرنے والی قوتوں کا مجموعہ ن ا کی سمت میں

$$= \int_{\cdot}^{\text{۲ا}-\text{لا}} \frac{\text{فرما}}{\text{۲ا}} \text{م ج جم طہ} + \int_{\cdot}^{\text{۲ا}-\text{لا}} \frac{\text{م فرما}}{\text{۲ا}} (\text{لا} + \text{ما})\, \dot{\text{طہ}}^{۲}$$

$$= \frac{\text{م ج}}{\text{۲ا}} (\text{۲ا} - \text{لا})\, \text{جم طہ} + \frac{\text{م}\, \dot{\text{طہ}}^{۲}}{\text{۴ا}} (\text{۲ا} - \text{لا})(\text{۲ا} + \text{لا})$$

$$= \frac{\text{م ج}}{\text{۸ا}^{۲}} (\text{۲ا} - \text{لا}) \left[\text{۴ا جم طہ} + ۳ (\text{۲ا} + \text{لا})(\text{جم طہ} - \text{جم عہ}) \right] \ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۲) سے

ن پر کا جزئی زور و ن پر علی القوائم اور اوپر کی طرف

$$= \int_{\cdot}^{\text{۲ا} - \text{لا}} \frac{\text{فرما}}{\text{۲ا}} \times \text{م ج جب طہ} + \int_{\cdot}^{\text{۲ا} - \text{لا}} \frac{\text{م فرما}}{\text{۲ا}} (\text{لا} + \text{ما}) \, \text{طما}$$

$$= \frac{\text{م ج}}{\text{۲ا}} (\text{۲ا} - \text{لا}) \text{ جب طہ} + \frac{\text{م ظہ}^2}{\text{۱۲ا}} (\text{۲ا} - \text{لا}) (\text{۲ا} + \text{لا})$$

$$= \frac{\text{م ج جب طہ}}{\text{۱۶ا}^2} (\text{۲ا} - \text{لا}) (\text{۲ا} - \text{۳لا})$$

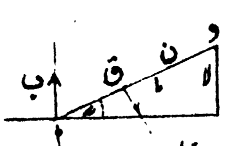
مشق ۲ ۔ ایک پتلی سیدھی سلاخ کے ایک سرے کو ساکن رکھا گیا ھے اور دوسرے سرے کو ایک بے لچک میز پر اس طرح مارا گیا ھے کہ سلاخ ٹوٹ جاتی ھے ۔ ثابت کرو کہ مقامِ شکست ثابت سرے سے سلاخ کے کل طول کے $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ گنا فاصلہ پر ہے ۔

جب سلاخ میز کے ساتھ متصادم ہو تو فرض کرو کہ یہ اُفق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے ۔ فرض کرو کہ تصادم سے عین پہلے زاویئی رفتار سہ تھی اور ضرب ب تھی ۔ ثابت سرے کے گرد معیارِ اثر لینے سے

$$\text{م} \times \frac{\text{۴ا}^2}{\text{۳}} \text{ سہ} = \text{ب} \times \text{۲ا جم عہ} \quad \text{.............(۱)}$$

جہاں م سلاخ کی کمیت ہے اور ۲ا طول ۔

اب ہم ن پر زور جفت معلوم کرتے ہیں ۔



$\frac{\text{م فرما}}{\text{۲ا}} (\text{لا} + \text{ما}) \text{ سہ}$

ق پر کے جزو $\frac{\text{فرما}}{\text{۲ا}}$ م پر

مؤثر دھکا $= \frac{\text{م فرما}}{\text{۲ا}} \times (\text{لا} + \text{ما}) \times$ سہ اُوپر کی طرف ۔

جہاں ن ق = ما، پس ق کا الٹا مؤثر دھکا نشان زدہ سمت میں عمل کرتا ہے۔ ن کے گرد معیارِ اثر لینے سے، ٹوٹنے کے میلان کا ناپ

$$= ب\,(۲ا - لا)\,جم\,عہ - \int_{0}^{۲ا - لا} \frac{فر\,ما}{۲ا}\,م\,(لا + ما)\,سہ\,ما$$

$$= ب\,(۲ا - لا)\,جم\,عہ - \frac{م\,سہ}{۱۲ا}\,(۲ا - لا)^{۲}\,(۴ا + لا)$$

$$= ب\,جم\,عہ\left[(۲ا - لا) - \frac{(۲ا - لا)^{۲}(۴ا + لا)}{۸ا^{۲}}\right] = \frac{ب\,جم\,عہ}{۸ا^{۲}}\,لا\,(۴ا^{۲} - لا^{۲})$$

یہ بڑے سے بڑا ہوگا جب $لا = \frac{۲ا}{\sqrt{۳}}$، اور جب ب کافی بڑا ہو تو سلاخ اس مقام پر ٹوٹیگی۔

مثالیں

۱ - ایک پتلی سیدھی سلاخ جس کا طول ۲ا ہے اپنے ایک سرے کے گرد جو ثابت ہے گھوم سکتی ہے۔ ثابت سرے سے فاصلہ ب پر اِسے معلومہ دھکے کا ایک صدمہ لگایا گیا ہے۔ اگر $ب > \frac{۴ا}{۳}$ تو ثابت کرو کہ ٹوٹنے کا امکان ثابت سرے سے فاصلہ $۲ا\sqrt{\frac{۳ب - ۴ا}{۳ب}}$ پر ہوگا۔

اگر $ب < \frac{۴ا}{۳}$، تو ثابت کرو کہ یہ تصادم کے نقطہ پر ٹوٹیگی۔

۲ - ایک پتلا مستدیر تار نقطہ ا پر تڑخ گیا ہے۔ تار کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ ا میں سے گزرنے والا قطر اب انتصابی ہے، ب ثابت ہے اور تار اب کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھومتا ہے۔ کسی نقطہ ن پر ٹوٹنے کا میلان دریافت کرو۔

اگر یہ اپنے مرکز کے گرد مستقل زاویئی رفتار سہ سے اُفقی سطحِ مستوی میں گھومے تو ثابت کرو کہ اُس نقطہ پر جس کا زاویئی فاصلہ ترڑخ سے عہ ہے ٹوٹنے کا میلان جب^{۲} $\frac{\text{عہ}}{۲}$ کے تناسب ہوگا۔

۳ - ایک نصف دائرہ کی شکل کا تار ہے جس کا نصف قطر ا ہے۔ یہ ایک چکنے اُفقی میز پر اپنے ایک سرے ا کے گرد مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ اگر وہ زاویہ جو کسی قوس ا ن کے محاذی مرکز پر بنتا ہے فہ ہو تو ثابت کرو کہ ن پر ٹوٹنے کا میلان بڑے سے بڑا اُس وقت ہوگا جب کہ

مس فہ = π - فہ

اگر ا کو دفعۃً چھوڑ کر ا میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے کو پکڑ لیا جائے تو اس گرفت کی وجہ سے ٹوٹنے کا میلان ن پر بڑے سے بڑا اُس وقت ہوگا جب کہ مس $\frac{\text{فہ}}{۲}$ = فہ

۴ - ایک ترڑخا ہوا چکر ایک خطِ مستقیم میں ایک مکمل طور پر کھردری اُفقی سطحِ مستوی پر لڑھک رہا ہے۔ ثابت کرو کہ جب ترڑخ کے عین مقابل کے نقطہ پر ٹوٹنے کا میلان بڑے سے بڑا ہو تو اُس وقت ترڑخ میں سے گزرنے والا نصف قطر اُفق کے ساتھ زاویہ مس$^{-۱}$ $\left(\frac{۲}{\pi}\right)$ بنائیگا۔

۵ - ایک تار منحنی ر = ا (۱ + جم طہ) کے ایک حصہ کی شکل کا ہے جو ابتدائی خط سے منقطع ہوتا ہے، یہ مبداء کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ طہ = $\frac{\pi}{۲}$ پر ٹوٹنے کا میلان $\frac{۱۲+\pi^{۲}}{۵}$ م سہ^{۲} ا^{۳} ہے۔

۶ - ایک وزنی مربع پترے کے دو کونوں کو ایک سلاخ کے دو ایسے نقطوں کے ساتھ ملایا گیا ہے جن کے فاصلے سلاخ کے مرکز سے مساوی ہیں۔ سلاخ کا طول ۲ ا اور پترے کے ہر ضلع کا طول ا ہے۔ سلاخ اور پترے کے

وزن مساوی ہیں ۔ اگر سلاخ کو اُفقی محل میں سروں پر سے سہارا جائے تو سلاخ ٹوٹنے کے عین قریب ہوتی ہے ۔ سلاخ کو انتصابی محل میں رکھ کر سرے کو اس کے گرد مستقل زاویئی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ سلاخ ٹوٹ جائیگی اگر ل سہ۲ > ۳ ج ۔

بیسواں باب

لٹّو کی حرکت

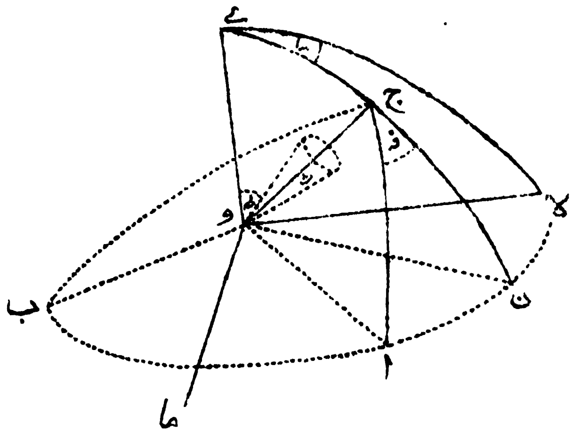
۲۵۹- ایک لٹّو جس کے دو صدر معیارِ اثر، اس کے مرکزِ جمود کے گرد مساوی ہیں، جاذبۂ ارض کے زیرِ عمل ایک ثابت نقطہ و کے گرد حرکت کرتا ہے، جو غیر مساوی معیارِ اثر والے صدر محور پر واقع ہے۔ اگر لٹّو کو ابتداءً اس کے محور کے گرد گھمانا شروع کیا جائے جو ابتداءً ساکن تھا تو حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ وث ج لٹّو کا محور ہے، ث مرکزِ جمود ہے، وے انتصابی خط ہے، ےوہ وہ سطحِ مستوی ہے جس میں محور وج صفر وقت پر تھا اور وہ اور وما ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں اور اُفق کے متوازی ہیں۔

وقت ت پر فرض کرو کہ وج خطِ انتصابی سے زاویہ طہ بناتا ہے۔ اور فرض کرو کہ سطحِ مستوی ے وج اپنے ابتدائی محل ے وہ سے زاویہ سا میں سے گھومی ہے۔

فرض کرو کہ وا، وب دو علی القوائم خط ہیں جن میں سے ہر ایک

و ج پر عمود ہے ۔ نیز و ا یا و ب کے گرد جمود کا معیارِ اثر ا ہے اور
و ج کے گرد ج ۔



وقت ت پر فرض کرو کہ سہ۱، سہ۲ اور سہ۳ لٹّو کی زاویئی رفتاریں ہیں
و ا ، و ب اور و ج کے گرد۔
سہ۱، سہ۲، سہ۳ اور طہ، فہ، سا میں روابط حاصل کرنے کے لیے
نقاط ا اور ج کی حرکتوں پر غور کرو ۔ اگر و ج = ا تو
طہَ = ج کی رفتار ے ج کی سمت میں = سہ۱ جب فہ + سہ۲ جم فہ
..........(۱)

ساَ جب طہ = ساَ × ج سے وے پر عمود
= ج کی رفتار سطحِ مستوی ے و ج پر عمود وار

= - سہ۱ جم فہ + سہ۲ جب فہ ....(۲)

نیز سہ۳ = ا کی رفتار ا ب کی سمت میں
= فہَ + ساَ × ن کی رفتار و ے پر عمود وار
= فہَ + ساَ جب (۹۰ - طہ) = فہَ + ساَ جم طہ ....(۳)

دفعہ ۲۲۹ کی رُو سے توانائی بالحرکت

ت = ½ [ا سہ۱² + ا سہ۲² + ج سہ۳²]

= ½ ا (طَہ² + سَا² جب² طہ) + ½ ج (فَہ + سَا جم طہ)² ....(۴)

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) سے۔

نیز ک = م ج (ھ جم عہ - ھ جم طہ) .... (۵)

جہاں ھ = و ث اور عہ، طہ کی ابتدائی قیمت ہے۔

پس لگرانج کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

فر/فرت [ا طَہ] - ا سَا² جب طہ جم طہ + ج (فَہ + سَا جم طہ) سَا جب طہ

= م ج ھ جب طہ .... (۶)

فر/فرت [ج (فَہ + سَا جم طہ)] = ۰ .... (۷)

اور فر/فرت [ا سَا جب² طہ + ج جم طہ (فَہ + سَا جم طہ)] = ۰ ..... (۸)

مساوات (۷) سے حاصل ہوتا ہے فَہ + سَا جم طہ = مستقل

سہ۳ = فَہ + سَا جم طہ = ن،

ابتدائی زاویئی رفتار محور و ج کے گرد۔

تب (۸) سے حاصل ہوتا ہے

ا سَا جب² طہ + ج ن جم طہ = مستقل = ج ن جم عہ .... (۹)

نیز (۴) اور (۵) کے ذریعے توانائی کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ا (طَہ² + سَا² جب² طہ) + ج ن² = ج ن² + ۲ م ج ھ (جم عہ - جم طہ)

.... (۱۰)

کیونکہ ابتداءً لٹو کو محور و ج کے گرد گھمانا شروع کیا گیا تھا جو ابتداءً ساکن تھا۔
مساواتوں (۹) اور (۱۰) سے حاصل ہوتا ہے

ا۲ جب۲ طہ طَہ۲ = ا جب۲ طہ × ۲ م ر ج ھ (جم عہ - جم طہ) - ج۲ ن۲ (جم عہ - جم طہ)۲

یعنی اگر ج۲ ن۲ = ا × ۴ م ر ج ھ ع تو

ا جب۲ طہ × طَہ۲ = ۲ م ر ج ھ (جم عہ - جم طہ) [جب۲ طہ - ۲ع (جم عہ - جم طہ)]

= ۲ م ر ج ھ (جم طہ - جم عہ) [(جم طہ - ع)۲ - (ع۲ - ۲ع جم عہ + ۱)]

= ۲ م ر ج ھ (جم طہ - جم عہ) [جم طہ - ع + √(ع۲ - ۲ع جم عہ + ۱)]

[جم طہ - ع - √(ع۲ - ۲ع جم عہ + ۱)] .... (۱۱)

اس لیے طَہ معدوم ہو جاتا ہے جب کہ طہ = عہ یا طہ۱ کے، جہاں

جم طہ۱ = ع - √(ع۲ - ۲ع جم عہ + ۱)

اور جم طہ۲ = ع + √(ع۲ - ۲ع جم عہ + ۱)

[صریحاً جم طہ۲ > ۱ اس لیے طہ۲ خیالی ہے۔]

نیز طہ۱ > عہ کیونکہ یہ بآسانی دیکھا جا سکتا ہے کہ جم طہ۱ < جم عہ، کیونکہ

ع - جم عہ < √(ع۲ - ۲ع جم عہ + ۱)

نیز (۱۰) سے طَہ۲ منفی ہوگا اگر طہ < عہ یعنی اگر جم طہ > جم عہ،
یا نیز (۱۱) سے اگر طہ > طہ۱ یعنی اگر

جم طہ < ع - √(ع۲ - ۲ع جم عہ + ۱)

پس لٹو کا میلان کبھی عہ سے کم نہیں ہوتا اور نہ کبھی طہ سے زیادہ ہوتا ہے یعنی حرکت اِن حدود کے اندر رہتی ہے۔

اب (۹) سے حاصل ہوتا ہے ا سَا جب^2 طہ = ج ن (جم عہ - جم طہ) یعنی سَا اور ن ایک ہی علامت رکھتے ہیں۔

پس جب تک جمود کا مرکز ث، و کے اوپر رہے سَا اور لٹو کے محور کے گرد اس کی زاویئی رفتار ن ایک ہی علامت رکھتے ہیں۔ اس کو اکثر اوقات اس طرح بیان کرتے ہیں کہ اگر جمود کا مرکز ثابت نقطہ سے اوپر رہے تو استقبالی حرکت اور زاویئی رفتار یا دونوں راست ہونگی یا دونوں رجعی۔

[اگر ث، و کے نیچے ہو تو معلوم ہوگا کہ سَا اور ن مختلف العلامت ہیں]

مساواتوں ۹ اور ۱۱ سے ظاہر ہے کہ طَہ اور سَا دونوں صفر ہونگے جب کہ طہ = عہ

نیز

$$\frac{\text{فر}}{\text{فطہ}}\left[\frac{1}{\text{ج ن}}\,\text{سَا}\right] = \frac{\text{فر}}{\text{فطہ}}\left[\frac{\text{جم عہ} - \text{جم طہ}}{\text{جب}^{2}\,\text{طہ}}\right] = \frac{1 - 2\,\text{جم طہ جم عہ} + \text{جم}^{2}\,\text{طہ}}{\text{جب}^{3}\,\text{طہ}}$$

جو ہمیشہ مثبت ہوتا ہے جب کہ طہ > عہ

پس سَا مسلسل بڑھتا جاتا ہے جیسے طہ، عہ سے طہ$_1$ تک بڑھتا ہے، نیز اِس کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{2\,\text{ہ ج ھ}}{\text{ج ن}}$ ہوتی ہے جب کہ طہ = طہ$_1$۔

پس لٹو کی حرکت کا اقتباس یہ ہے۔ اس کی زاویئی رفتار اس کے محور کے گرد دورانِ حرکت میں مستقل رہتی ہے اور ابتدائی قیمت ن کے مساوی ہوتی ہے۔ محور انتصابی محل سے جھکتا جاتا ہے حتےٰ کہ طہ = طہ$_1$ کے ہو جاتا ہے، نیز ساتھ ہی ساتھ یہ محور انتصابی خط کے گرد متغیر زاویئی رفتار کے ساتھ گھومتا رہتا ہے جو صفر ہوتی ہے جبکہ طہ = عہ اور بڑی سے بڑی ہوتی ہے جب کہ طہ = طہ$_1$۔

محور کی حرکت کو جو صرف ط کی تبدیلی پر مبنی ہوتی ہے "کبو" کہتے ہیں ۔

مشق ۱ ۔ اگر ایک لٹو کو اس طرح چھوڑا جائے کہ ابتداءً اس کا محور اُوپر کی طرف کھنچے ہوئے انتصابی خط کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بنائے اور اس کے محور کے گرد اس کا ابتدائی گھماؤ $\frac{\text{۱}}{\text{ج}}\sqrt{\frac{\text{۳ م ج ه}}{\text{ا}}}$ ہو، اور اس کے محور کی زاویئی رفتار زاویۂ سمت میں $\text{۲}\sqrt{\frac{\text{م ج ه}}{\text{۳ ا}}}$ ہو، اور اس کی زاویئی رفتار نصف النہاری سطح مستوی میں ابتداءً صفر ہو تو ثابت کرو کہ وقت ت پر سمتِ انتصابی کے ساتھ اس کے محور کا میلان ط مساوات

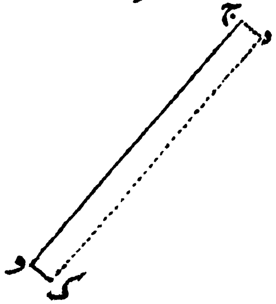
$$\text{قط ط} = \text{۱} + \text{قطز}\left\{\sqrt{\frac{\text{م ج ه}}{\text{ا}}}\ \text{ت}\right\}$$

سے حاصل ہوگا، یعنی محور بتدریج سمتِ انتصابی کے قریب آتا جائیگا لیکن اس تک کبھی نہ پہنچیگا ۔

مشق ۲ ۔ ثابت کرو کہ سہارے کے نقطہ پر لٹو کا انتصابی دباؤ اس کے وزن کے مساوی ہوگا جب کہ سمتِ انتصابی کے ساتھ اِس کے محور کے میلان کی قیمت ط ذیل کی مساوات کی چھوٹی سے چھوٹی اصل ہو

$$\text{۳ ا م ج ه جم}^{\text{۲}}\text{ ط} - \text{جم ط}\left[\text{ج}^{\text{۲}}\text{ن}^{\text{۲}} + \text{۲ ا م ب ج ه}\right] + \text{ج}^{\text{۲}}\text{ن}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{ا م ج ه} = \text{۰}$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں جن کی قیمتیں ابتدائی شرائط پر منحصر ہیں ۔



۲۶۰ ۔ ابتدائی اصولوں سے دیکھا جاسکتا ہے کہ لٹو کے محور میں استقبالی حرکت ضرور ہوگی ۔

لٹو کے محور پر ایک طول و ج ایسا ناپو جو وقت ت پر زاویئی رفتار ن کو تعبیر کرے ۔

اگر مخروط کا مرکزِ جمود ث ، و کے اوُپر ہو تو فرت وقت میں مخروط کا وزن کوئی زاویئی رفتار پیدا کریگا جو سمت کے متعلق معمولی طریقِ تعبیر کے مطابق وج پر عمود وار ایک نہایت چھوٹے متوازی الافق خطِ مستقیم وک سے تعبیر ہوگی ۔

وک اور وج سے تعبیر ہونے والی دو زاویئی رفتاروں کا حاصل ود سے تعبیر ہوگا ، پس محور کی حرکت راست استقبالی ہوگی ۔

اگر مرکزِ جمود ث ، و کے نیچے ہوتا تو وک متقابل سمت میں کھینچا جائیگا اور حرکت رجعی ہوگی ۔

۲۶۱ ۔ دو خاص صورتیں ۔

اگر ن بہت بڑا ہو (جیسا کہ عام طور پر ہوتا ہے) تو ع بھی بہت بڑا ہوگا ، تب

$$\text{جم طہ}_{۱} = \text{ع}\left[۱ - \left(۱ - \frac{۲}{\text{ع}}\,\text{جم عہ} + \frac{۱}{\text{ع}^{۲}} \right)^{\frac{۱}{۲}} \right] = \text{جم عہ} - \frac{\text{جب}^{۲}\,\text{عہ}}{۲\,\text{ع}}$$

($\frac{۱}{\text{ع}}$ کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے) ۔

پس حرکت طہ کے حدود عہ اور عہ + $\frac{\text{جب عہ}}{۲\,\text{ع}}$ کے اندر وقوع پذیر ہوگی ،

یعنی عہ اور عہ + $\frac{۲\,\text{ا م ج ھ جب عہ}}{\text{ج}^{۲}\,\text{ن}^{۲}}$ کے اندر ،

نیز اگر عہ = ۰ تو جم طہ$_{۱}$ = ۱ پس طہ$_{۱}$ بھی صفر ہے اس لیے محور دورانِ حرکت میں انتصابی رہتا ہے ۔ لیکن اگر محور کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو لٹّو کی حرکت کا توازنِ قائم میں ہونا ضروری نہیں ۔

۲۶۲ ۔ لٹّو کی قائم حرکت ۔۔ اس صورت میں لٹّو کا محور خطِ انتصابی کے گرد گھماؤ کی مستقل شرح کے ساتھ ایک مخروط مرتسم کرتا

ہے - پس دورانِ حرکت میں

طہ = عہ ، طہَ = ۰ ، طہً = ۰ . اور سا = مستقل = سہ

تب دفعہ ۲۵۹ کی مساوات (۶) سے حاصل ہوتا ہے

ا سہ² جم عہ - ج ن سہ + م ر ج ھ = ۰ ....(۱)

اس مساوات سے سہ کی دو ممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں - اگر یہ حقیقی ہوں تو

ج² ن² > ۴ ا م ر ج ھ جم عہ

ہم دکھا سکتے ہیں کہ دونوں صورتوں میں حرکت قائم ہے - فرض کرو کہ ہٹاؤ ایسا ہے کہ طہ ایک چھوٹی قیمت اختیار کرتا ہے، اور سا میں ابتدائً کوئی تبدیلی نہیں ہوتی، تب دفعہ ۲۵۹ کی مساواتوں (۶)، (۷)، (۸) سے حاصل ہوتا ہے

ا طہً - ا سا² جب طہ جم طہ + ج ن سا جب طہ = م ر ج ھ جب طہ

اور ا سا جب² طہ + ج ن جم طہ = مستقل = ا سہ جب² عہ + ج ن جم عہ

سا کو ساقط کرنے سے

ا طہً - (جم طہ / جب³ طہ) [ا سہ جب² عہ + ج ن جم عہ - ج ن جم طہ]²

+ (ج ن / جب طہ) [ا سہ جب² عہ + ج ن جم عہ - ج ن جم طہ]

= ا م ر ج ھ جب طہ

طہ = عہ + طہ رکھنے سے جہاں طہ بہت چھوٹا ہے تھوڑے سے اختصار کے بعد مساوات (۱) کو استعمال کرنے سے

طہً = - طہ × (ا² سہ⁴ - ۲ ا م ر ج ھ سہ² جم عہ + م² ر² ج² ھ²) / (ا² سہ²)

اب بائیں طرف کا رکن صریحاً ہمیشہ مثبت رہتا ہے، پس سہ کی دونوں قیمتوں کے لیے جو (۱) سے حاصل ہوتی ہیں قائم حرکت حاصل ہوتی ہے۔

نیز ایک چھوٹے اہتزاز کی مدّت

$$= ۲\pi \sqrt{\text{ا سہ} \div \left(\text{ا}^{۲}\,\text{سہ}^{۴} - ۲\,\text{ا ھر ج ھ سہ}^{۲}\,\text{جم عہ} + \text{ھر}^{۲}\text{ج}^{۲}\text{ھ}^{۲}\right)} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر لٹو کو حسبِ معمول چلایا جائے تو ن بہت بڑا ہوتا ہے۔ اس صورت میں (۱) کو حل کرنے سے

$$\text{سہ} = \frac{\text{ج ن} \pm \sqrt{\text{ج}^{۲}\text{ن}^{۲} - ۴\,\text{ا ھر ج ھ جم عہ}}}{۲\,\text{ا جم عہ}}$$

$$= \frac{\text{ج ن}}{۲\,\text{ا جم عہ}}\left[۱ \pm \left(۱ - \frac{۲\,\text{ا ھر ج ھ جم عہ}}{\text{ج}^{۲}\text{ن}^{۲}} + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{\text{ج ن}}{\text{ا جم عہ}} \text{ یا } \frac{\text{ھر ج ھ}}{\text{ج ن}} \text{ تقریباً}$$

پہلی صورت میں استقبال سہ بہت بڑا ہوتا ہے اور دوسری میں بہت چھوٹا۔

نیز جب سہ بہت چھوٹا ہو تو (۲) سے جو مدت حاصل ہوتی ہے وہ

$$= \frac{۲\pi\,\text{ا سہ}}{\text{ھر ج ھ}} \text{ تقریباً}$$

$$= \frac{۲\pi\,\text{ا}}{\text{ج ن}}$$

اسے الگ طور پر اگلی دفعہ میں دکھایا جائیگا۔

۲۶۳ - ایک لٹو کو بہت بڑی زاویئی رفتار کے ساتھ گھمایا گیا ہے - ابتداءً اس کا محور ساکن تھا - اوسط انتصابی حرکت معلوم کرو اور کبو کا متناظر وقت دریافت کرو۔

دفعہ ۲۵۹ سے ط کے لیے مساوات ہے:

ا جب² ط × ط'² = ۲ م ر ج ھ (جم عہ - جم ط) [جب² ط - ۲ ع (جم عہ - جم ط)]
.... (۱)

اگر ن اور بنائے علیہ ع بہت بڑا ہو تو بائیں طرف کے رکن کا دوسرا جزوِ ضربی مثبت نہیں ہوسکتا تاوقتیکہ جم عہ - جم ط بہت چھوٹا نہ ہو، یعنی تاوقتیکہ ط تقریباً مساوی نہ ہو عہ کے، یعنی تاوقتیکہ لٹو خطِ انتصابی کے ساتھ تقریباً ایک ہی زاویہ بناتا ہوا نہ گھومے - اِس صورت میں (۹) سے ظاہر ہے کہ سَا تقریباً مستقل رہتا ہے اور حرکت تقریباً قائم ہوتی ہے۔
ط = عہ + لا رکھو، جہاں لا بہت چھوٹا ہے، پس

(جم عہ - جم ط) / جب ط = لا تقریباً

تب (۱) ہو جاتی ہے:

ا لا'² = ۲ م ر ج ھ لا (جب ط - ۲ ع لا)

= ۲ م ر ج ھ لا [جب عہ - (۲ ع - جم عہ) لا]

= ۲ م ر ج ھ لا [جب عہ - ۲ ع لا] کیونکہ ع بہت بڑا ہے۔

∴ لا'² = (۴ م ر ج ھ ع / ا) [(لا / ۲ع) جب عہ - لا²] = (ج² ن² / ا²) [۲ ق لا - لا²]

جہاں ق = جب عہ / ۴ ع = ا م ر ج ھ جب عہ / ج² ن²

$$\therefore \frac{\text{ج ن ت}}{\text{ا}} = \int \frac{\text{فرلا}}{\text{ہ}\sqrt{\text{۲ہ ق لا} - \text{لا}^{2}}} = \text{جم}^{-1}\,\frac{\text{ق} - \text{لا}}{\text{ق}}$$

$$\therefore \text{ط} = \text{عہ} + \text{لا} = \text{عہ} + \text{ق}\left[\text{ا} - \text{جم}\,\frac{\text{ج ن ت}}{\text{ا}}\right]$$

پس کمبو کی مدت

$$= 2\pi \div \frac{\text{ج ن}}{\text{ا}} = \frac{2\pi\,\text{ا}}{\text{ج ن}}$$

نیز

$$\text{سَا} = \frac{\text{ج ن}}{\text{ا}} \times \frac{\text{جم عہ} - \text{جم طہ}}{\text{جب}^{2}\,\text{طہ}}$$

دفعہ ۲۵۹ کی مساوات (۹) سے

$$\therefore \text{سَا} = \frac{\text{ج ن}}{\text{ا}} \times \frac{\text{لا}}{\text{جب طہ}} = \frac{\text{ج ن}}{\text{ا}} \times \frac{\text{لا}}{\text{جب عہ}} \quad \text{تقریباً}$$

$$= \frac{\text{ج ن ق}}{\text{ا جب عہ}}\left(\text{ا} - \text{جم}\,\frac{\text{ج ن}}{\text{ا}}\,\text{ت}\right) = \frac{\text{مرجھ}}{\text{ج ن}}\left(\text{ا} - \text{جم}\,\frac{\text{ج ن ت}}{\text{ا}}\right)$$

$$\therefore \text{سا} = \frac{\text{مرجھ}}{\text{ج ن}}\,\text{ت} - \frac{\text{ا مرجھ}}{\text{ج}^{2}\text{ن}^{2}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج ن ت}}{\text{ا}}$$

پہلی رقم وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتی جاتی ہے، اور دوسری دَور وار اور چھوٹی ہے جس میں $\frac{1}{\text{ن}^{2}}$ شریک ہوتا ہے۔

پس پہلے تقریب تک سا اوسط شرح $\frac{\text{مرجھ}}{\text{ج ن}}$ فی اکائی وقت سے

بڑھتا ہے۔

پس اگر ایک لٹو کو بہت بڑی زاویئی رفتار ن کے ساتھ چلایا جائے تو اولاً محور کے دَور $\frac{۲ \pi ۱}{ج ن}$ کے چھوٹے کبو ہوتے ہیں اور لٹو ایسی اوسط زاویئی رفتار کے ساتھ جو تقریباً $\frac{ھ ج ط}{ج ن}$ کے مساوی ہوتی ہے استقبالی حرکت کرتا ہے ۔ پہلے پہل یہ اہتزاز بشکل نظر آتے ہیں ۔ لیکن جیسے جیسے ن ہوا کی رگڑ کی وجہ سے کم ہوتا جاتا ہے یہ زیادہ نمایاں ہوتے جاتے ہیں اور بالآخر ۲۵۹ دفعہ کی صورت پیدا ہو جاتی ہے ۔

۲۶۴ ۔ ایک لٹو زاویئی رفتار ن کے ساتھ اپنے محور کے گرد جو انتصابی ہے گھوم رہا ہے ۔ اگر محور کو کبو میں ذرا سا ارتعاش دیا جائے تو حرکت کے قائم ہونے کی شرط دریافت کرو۔

دفعہ ۲۶۲ کا عمل اس جگہ نہیں لگ سکتا کیونکہ اُس میں ہم نے فرض کیا تھا کہ جب عہ بہت چھوٹا نہیں ہے ۔

ہمیں طَہ کی قیمت کی ضرورت ہوگی جب کہ طہ بہت چھوٹا ہو، دفعہ ۲۵۹ کی مساوات (۶) سے حاصل ہوتا ہے

$$ا طَہ = ا سَا^۲ جب طہ جم طہ - ج ن سَا جب طہ + ھ ج ہ جب طہ$$
(۱) ....

نیز مساوات (۹) سے حاصل ہوتا ہے

$$ا سَا جب^۲ طہ = ج ن (جم عہ - جم طہ) = ج ن (۱ - جم طہ) \quad ..... (۲)$$

کیونکہ لٹو ابتداءً انتصابی تھا۔

طہ چھوٹا ہے، اس لیے (۲) سے ملتا ہے

$$\dot{\text{سا}} = \frac{\text{ج ن}}{\text{ا}} \times \frac{۱}{۱ + \text{جم طہ}} = \frac{\text{ج ن}}{۲\text{ا}} + \text{طہ}^{۲}\ \text{والی رقیں وغیرہ۔}$$

تب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}\ddot{\text{طہ}} = \frac{\text{ج}^{۲}\text{ن}^{۲}}{۴\text{ا}} \times \text{طہ} - \frac{\text{ج}^{۲}\text{ن}^{۲}}{۲\text{ا}} \times \text{طہ} + \text{مرجھ طہ} + \text{طہ}^{۲}\ \text{والی رقیں وغیرہ۔}$$

$$= -\left[\frac{\text{ج}^{۲}\text{ن}^{۲}}{۴\text{ا}} - \text{مرجھ}\right] \text{طہ}$$

پس اگر لٹّو کو انتصابی سمت سے باہر کی طرف ذرا سا ہٹا دیا جائے تو حرکت قائم ہوگی، اگر

$$\frac{\text{ج}^{۲}\text{ن}^{۲}}{۴\text{ا}} > \text{مرجھ}\ \ \text{یعنی اگر ن} > \sqrt{\frac{۴\text{ا مرجھ}}{\text{ج}^{۲}}}$$

نیز ایک کبو کی مدت

$$= ۲\pi\sqrt{\frac{۴\text{ا}^{۲}}{\text{ج}^{۲}\text{ن}^{۲} - ۴\text{ا مرجھ}}}$$

نتیجہ صریح۔ اگر جسم لٹّو نہ ہو بلکہ نصف قطر اکا ایک یکساں کرہ ہو جو انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہو اور اپنے سب سے نچلے نقطہ پر سہارا ہوا ہو تو

$$\text{ھ} = \text{ا}،\ \text{ا} = \text{م}\frac{۷\text{ا}^{۲}}{۵}،\ \text{ج} = \text{م}\frac{۲\text{ا}^{۲}}{۵}$$

اس لیے ن کو بڑا ہونا چاہیے $\sqrt{\frac{۳۵\text{ج}}{\text{ا}}}$ سے۔

اگر ا = ۱ فٹ تو حرکت کے قائم ہونے کے لیے گردشوں کی کم سے کم تعداد فی ثانیہ

$$= \frac{ن}{۲\pi} = \frac{\sqrt{۳۵ \times ۳۲}}{۲\pi} = \text{تقریباً}\ ۵\tfrac{۱}{۴}$$

مشق ۔ نصف قطر ا کا ایک مستدیر قرص ہے جس کے مرکز میں سے اس کی سطح مستوی پر عمود وار ایک سلاخ گزاری گئی ہے ۔ سلاخ کا طول قرص کے نصف قطر کے مساوی ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ نظام سلاخ کے انتصابی رہنے کی حالت میں نہیں گھوم سکتا تاوقتیکہ زاویئی رفتار بڑی نہ ہو $\sqrt{\frac{۲۰ج}{ا}}$ سے ۔

ضمیمہ

تفرقی مساواتوں کی چند کثیر الاستعمال شکلوں کا حل

۱۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف ما} = \text{ق}$ جہاں ف اور ق، لا کے تفاعل ہیں۔

[پہلے رتبہ کی خطی مساوات]

مساوات کو $\text{و}^{\int \text{ف فرلا}}$ سے ضرب دو، تب یہ ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\text{ما و}^{\int \text{ف فرلا}}\right] = \text{ق و}^{\int \text{ف فرلا}}$$

اس لیے $\text{ما و}^{\int \text{ف فرلا}} = \int \text{ق و}^{\int \text{ف فرلا}}$ + کوئی اختیاری مستقل

مشق — $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما مس لا} = \text{قط لا}$

یہاں $\text{و}^{\int \text{ف فرلا}} = \text{و}^{\int \text{مس لا فرلا}} = \text{و}^{-\text{لوک جم لا}} = \frac{1}{\text{جم لا}}$

پس مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\frac{۱}{\text{جم لا}} \cdot \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^۲ \text{لا}} = \text{قط}^۲ \text{لا}$$

$$\therefore \frac{\text{ما}}{\text{جم لا}} = \text{مس لا} + \text{ج}$$

$$۲ - \frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + \text{ف} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ = \text{ق}،$$

جہاں ف اور ق، ما کے تفاعل ہیں۔

$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ = \text{ت}$ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = \frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}} \quad \text{اس لیے} \quad \frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = \frac{۱}{۲} \frac{\text{فرت}}{\text{فرما}}$$

تب مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرما}} + ۲ \text{ف} \times \text{ت} = ۲ \text{ق}$$

جو ت اور ما کے درمیان ایک خطی مساوات ہے، اور اس پر شکل ا میں بحث ہو چکی ہے۔

$$۳ - \frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = - \text{ن}^۲ \text{ما}$$

$۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ سے طرفین کو ضرب دینے اور تکمل کرنے سے

$$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ = - \text{ن}^۲ \text{لا}^۲ + \text{مستقل} = \text{ن}^۲ (\text{ج}^۲ - \text{ما}^۲)$$

$$\therefore \text{ن لا} = \int \frac{\text{فرما}}{\sqrt{\text{ج}^۲ - \text{ما}^۲}} = \text{جب}^{-۱} \frac{\text{ما}}{\text{ج}} + \text{مستقل}$$

$$\therefore \text{ما} = \text{ج جب}\,(\text{ن لا} + \text{د}) = \text{ل جب ن لا} + \text{م جم ن لا}$$

جہاں ج، د، ل اور م اختیاری مستقل ہیں۔

$$\text{۴ ـ}\quad \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{ن}^{۲}\,\text{ما}$$

شکل ع۳ کی مانند ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} = \text{ن}^{۲}\,\text{ما}^{۲} + \text{کوئی مستقل} = \text{ن}^{۲}\,(\text{ما}^{۲} - \text{ج}^{۲})$$

$$\therefore \text{ن لا} = \int \frac{\text{فرما}}{\sqrt{\text{ما}^{۲} - \text{ج}^{۲}}} = \text{جمز}^{-۱}\,\frac{\text{ما}}{\text{ج}} + \text{مستقل}$$

$$\therefore \text{ما} = \text{ج جمز}\,(\text{ن لا} + \text{د}) = \text{ل و}^{\text{ن لا}} + \text{م و}^{-\text{ن لا}}$$

جہاں ج، د، ل اور م اختیاری مستقل ہیں۔

$$\text{۵ ـ}\quad \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{ف}\,(\text{ما})$$

حسبِ سابق ہمیں اس صورت میں حاصل ہوتا ہے:

$$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} = ۲\int \text{ف}\,(\text{ما})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} = ۲\int \text{ف}\,(\text{ما})\,\text{فرما}$$

۶ ـ مستقل سروں والی خطی مساوات، مثلاً

$$\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} + \text{ا}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{ب}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ج ما} = \text{ف}\,(\text{لا})$$

[ذیل میں جو طریقے مندرج ہیں اُن کا اطلاق ہر صورت پر ہوسکیگا خواہ مساوات کا درجہ کچھ ہی ہو۔]

فرض کرو کہ عا اس مساوات کا کوئی حل ہے، تب

(عف^۳ + ا عف^۲ + ب عف + ج) عا = ف (لا) .... (۱)

ما = ما + عا رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(عف^۳ + ا عف^۲ + ب عف + ج) ما = ۰ .... (۲)

(۲) کو حل کرنے کے لیے ما = وف لا رکھو، تب ہمیں

ف^۳ + ا ف^۲ + ب ف + ج = ۰ .... (۳)

مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں فرض کرو کہ ف$_۱$، ف$_۲$ اور ف$_۳$ ہیں۔

لہٰذا ا و$^{ف_۱ لا}$، ب و$^{ف_۲ لا}$، ج و$^{ف_۳ لا}$ (جہاں ا، ب اور ج اختیاری مستقل ہیں)

مساوات (۲) کے حل ہیں، اس لیے ا و$^{ف_۱ لا}$ + ب و$^{ف_۲ لا}$ + ج و$^{ف_۳ لا}$ بھی ایک حل ہے۔
چونکہ اس حل میں تین اختیاری اور غیر تابع مستقل ہیں اس لیے یہ تیسرے رتبہ کی مساوات کا جیسی کہ (۲) ہے عام سے عام حل ہے۔

اس لیے ما = ا و$^{ف_۱ لا}$ + ب و$^{ف_۲ لا}$ + ج و$^{ف_۳ لا}$ .... (۴)

حل کے اس حصہ کو متمم تفاعل کہتے ہیں۔

اگر مساوات (۳) کی کچھ اصلیں خیالی ہوں تو مساوات (۴) اور شکل اختیار کرلیتی ہے

فرض کرو کہ اصلیں عہ + خ بہ، عہ - خ بہ اور ف$_۳$ ہیں۔

تب ما = ا و$^{(عہ + خ بہ) لا}$ + ب و$^{(عہ - خ بہ) لا}$ + ج و$^{ف_۳ لا}$

= ا و$^{عہ لا}$ [جم بہ لا + خ جب بہ لا] + ب و$^{عہ لا}$ [جم بہ لا - خ جب بہ لا]
+ ج و$^{ف_۳ لا}$

= و$^{عہ لا}$ [ا$_۱$ جم بہ لا + ب$_۱$ جب بہ لا] + ج و$^{ف_۳ لا}$

جہاں ا$_۱$ اور ب$_۱$ نئے اختیاری مستقل ہیں۔

بعض صورتوں میں مقادیر ف$_۱$، ف$_۲$، ف$_۳$ میں دو مقداریں مساوی ہوتی ہیں۔

ایسی صورت میں متمم تفاعل کی شکل (۴) کو بدلنا پڑیگا۔

فرض کرو کہ $\text{ف}_{2} = \text{ف}_{1} + \text{جہ}$، جہاں جہ بالآخر مائل بہ صفر ہوگا،

تب شکل (۴)

$$= \text{ا}\,\text{و}^{\text{ف}_{1}\text{لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{(\text{ف}_{1}+\text{جہ})\text{لا}} + \text{ج}\,\text{و}^{\text{ف}_{3}\text{لا}}$$

$$= \text{ا}\,\text{و}^{\text{ف}_{1}\text{لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{\text{ف}_{1}\text{لا}}\left[1 + \text{جہ}\,\text{لا} + \frac{\text{جہ}^{2}\text{لا}^{2}}{\lfloor 2} + \cdots\right] + \text{ج}\,\text{و}^{\text{ف}_{3}\text{لا}}$$

$$= \text{ا}_{1}\text{و}^{\text{ف}_{1}\text{لا}} + \text{ب}_{1}\text{و}^{\text{ف}_{1}\text{لا}}\left[\text{لا} + \frac{\text{جہ}\,\text{لا}^{2}}{\lfloor 2} + \cdots\right] + \text{ج}\,\text{و}^{\text{ف}_{3}\text{لا}}$$

جہاں ا_{1}، ب_{1}، نئے اختیاری مستقل ہیں۔

اب اگر جہ کو صفر بنایا جائے تو یہ ہوجاتا ہے

$$(\text{ا}_{1} + \text{ب}_{1}\text{لا})\,\text{و}^{\text{ف}_{1}\text{لا}} + \text{ج}\,\text{و}^{\text{ف}_{3}\text{لا}}$$

اگر تینوں اصلیں ف_{1}، ف_{2}، ف_{3} سب باہم مساوی ہوں، تو اسی طرح سے متمم تفاعل کی شکل یہ ہوگی،

$$(\text{ا}_{1} + \text{ب}_{1}\text{لا} + \text{ج}_{1}\text{لا}^{2})\,\text{و}^{\text{ف}_{1}\text{لا}}$$

(۱) سے عا کی جو قیمت حاصل ہو اُس کو خاص تکملہ کہتے ہیں۔

عا کے معلوم کرنے کا طریقہ ف (لا) کی شکل پر منحصر ہوتا ہے۔ یہاں صرف اِن شکلوں $\text{لا}^{\text{ن}}$، $\text{و}^{\text{لہ لا}}$، $\text{جب}_{\text{جم}}\,\text{لہ لا}$، اور $\text{و}^{\text{مہ لا}}\,\text{جب}_{\text{جم}}\,\text{لہ لا}$ پر بحث کرنا کافی ہوگا۔

(۱) $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}^{\text{ن}}$

یہاں عاملوں کے اصول سے

$$\text{عا} = \frac{1}{\text{عفن}^{3} + \text{ا}\,\text{عفن}^{2} + \text{ب}\,\text{عفن} + \text{ج}}\cdot\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$= [\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{عف} + \text{ا}_2\,\text{عف}^2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{عف}^{\text{ن}} + \cdots]\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

عامل کو عف کی قوتوں میں پھیلانے سے ـــــ

اب ہمیں ہر ایک رقم معلوم ہے، اور اس لیے

$$\text{عا} = \text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1 \cdot \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2 \cdot \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\,1\cdot 2\cdot 3 \cdots \text{ن}$$

$$(2)\quad \text{ف}(\text{لا}) = \text{و}^{\text{لہ}\,\text{لا}}$$

ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ $\text{عف}^{\text{ر}}\,\text{و}^{\text{لہ}\,\text{لا}} = \text{لہ}^{\text{ر}}\,\text{و}^{\text{لہ}\,\text{لا}}$

$$\therefore\quad \text{عا} = \frac{1}{\text{عف}^3 + \text{ا}\,\text{عف}^2 + \text{ب}\,\text{عف} + \text{ج}} \times \text{و}^{\text{لہ}\,\text{لا}}$$

$$= (\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{عف} + \text{ا}_2\,\text{عف}^2 + \cdots)\,\text{و}^{\text{لہ}\,\text{لا}}$$

$$= (\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لہ} + \text{ا}_2\,\text{لہ}^2 + \cdots)\,\text{و}^{\text{لہ}\,\text{لا}}$$

$$= \frac{1}{\text{لہ}^3 + \text{ا}\,\text{لہ}^2 + \text{ب}\,\text{لہ} + \text{ج}}\,\text{و}^{\text{لہ}\,\text{لا}}$$

پس اس صورت میں عا کی قیمت صرف عف کی بجائے لہ رکھنے سے حاصل ہو جاتی ہے۔

$$(3)\quad \text{ف}(\text{لا}) = \text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\text{عف}^2\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا} = (-\text{لہ}^2)\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا}$، اور

$$\text{عف}^{2\text{ر}}\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا} = (-\text{لہ}^2)^{\text{ر}}\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا}$$

اور بالعموم $\text{ف}(\text{عف}^2)\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا} = \text{ف}(-\text{لہ}^2)\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا}$

اس لیے

$$\text{عا} = \frac{1}{\text{عف}^3 + \text{ا}\,\text{عف}^2 + \text{ب}\,\text{عف} + \text{ج}}\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا}$$

$$= (\text{عف}^3 - \text{ا}\,\text{عف}^2 + \text{ب}\,\text{عف} - \text{ج}) \cdot \frac{1}{\text{عف}^2(\text{عف}^2 + \text{ب})^2 - (\text{ا}\,\text{عف}^2 + \text{ج})^2}\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا}$$

$$= (\text{عف}^3 - \text{ا}\,\text{عف}^2 + \text{ب}\,\text{عف} - \text{ج}) \times \frac{1}{-\text{لہ}^2(\text{ب} - \text{لہ}^2)^2 - (-\text{ا}\,\text{لہ}^2 + \text{ج})^2}\,\text{جب}\,\text{لہ}\,\text{لا}$$

$$= -\frac{1}{\text{لہ}^2(\text{لہ}^2-\text{ب})^2+(\text{ا لہ}^2-\text{ج})^2}\cdot\left(-\text{لہ}^3\,\text{جم لہ لا}+\text{ا لہ}^2\,\text{جب لہ لا}+\text{ب لہ جم لہ لا}-\text{ج جب لہ لا}\right)$$

$$= \frac{(\text{لہ}^3-\text{ب لا})\,\text{جم لہ لا}-(\text{ا لہ}^2-\text{ج})\,\text{جب لہ لا}}{\text{لہ}^2(\text{لہ}^2-\text{ب})^2+(\text{ا لہ}^2-\text{ج})^2}$$

(۴) $\text{ف}\,(\text{لا}) = \text{و}^{\text{مہ لا}}\,\text{جب لہ لا}$

ہمیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{عف}\,(\text{و}^{\text{مہ لا}}\,\text{جب لہ لا}) = \text{و}^{\text{مہ لا}}\,(\text{عف}+\text{مہ})\,\text{جب لہ لا}$$

$$\text{عف}^2\,(\text{و}^{\text{مہ لا}}\,\text{جب لہ لا}) = \text{و}^{\text{مہ لا}}\,(\text{عف}+\text{مہ})^2\,\text{جب لہ لا}$$

....

$$\text{عف}^{\text{ر}}\,(\text{و}^{\text{مہ لا}}\,\text{جب لہ لا}) = \text{و}^{\text{مہ لا}}\,(\text{عف}+\text{مہ})^{\text{ر}}\,\text{جب لہ لا}$$

اور بالعموم

$$\text{ف}\,(\text{عف})\,(\text{و}^{\text{مہ لا}}\,\text{جب لہ لا}) = \text{و}^{\text{مہ لا}}\,\text{ف}\,(\text{عف}+\text{مہ})\,\text{جب لہ لا}$$

اس لیے

$$\text{عا} = \frac{1}{\text{عف}^3+\text{ا عف}^2+\text{ب عف}+\text{ج}}\,\text{و}^{\text{مہ لا}}\,\text{جب لہ لا}$$

$$= \text{و}^{\text{مہ لا}}\,\frac{1}{(\text{عف}+\text{مہ})^3+\text{ا}\,(\text{عف}+\text{مہ})^2+\text{ب}\,(\text{عف}+\text{مہ})+\text{ج}}\,\text{جب لہ لا}$$

جس کی قیمت حسب شکل (۳) معلوم ہوسکتی ہے۔

بعض صورتوں میں ہمیں خاص تکملہ کی شکل کو ذرا بدلنا پڑتا ہے۔ مثلاً مساوات

$$(\text{عف}-1)\,(\text{عف}-2)\,(\text{عف}-3)\,\text{ما} = \text{و}^{2\text{لا}}$$

میں خاص تکملہ جو حسب طریق بالا حاصل ہوتا ہے وہ لا انتہا ہو جاتا ہے۔ صحیح شکل حاصل کرنے کے لیے ہمیں حسبِ ذیل عمل کرنا پڑتا ہے:

$$\text{عا} = \frac{1}{(\text{عف}-1)\,(\text{عف}-2)\,(\text{عف}-3)}\,\text{و}^{2\text{لا}}$$

$$= \frac{1}{(\text{عف} - ۲)} \cdot \frac{1}{(\text{عف} - ۱)(\text{عف} - ۳)} \text{و}^{۲\text{لا}}$$

$$= \frac{1}{(\text{عف} - ۲)} \cdot \frac{1}{۱ \times (-۱)} \text{و}^{۲\text{لا}}$$ ، (۲) کے نتیجہ کی رُو سے

$$= - \text{نہا}_{\text{جہ}=۰} \frac{1}{\text{عف} - ۲} \text{و}^{(۲+\text{جہ})\text{لا}}$$

$$= - \text{نہا}_{\text{جہ}=۰} \frac{1}{\text{جہ}} \text{و}^{۲\text{لا}} \times \text{و}^{\text{جہ لا}}$$

$$= - \text{و}^{۲\text{لا}} \text{نہا}_{\text{جہ}=۰} \frac{1}{\text{جہ}} \left[۱ + \text{جہ لا} + \frac{\text{جہ}^{۲}\text{لا}^{۲}}{۲ \times ۱} + \cdots \right]$$

= (کوئی لا انتہا بڑی مقدار جو متمم تفاعل میں شامل ہو) $- \text{لا و}^{۲\text{لا}}$

لہٰذا اکمل حل ہوگا

$$\text{ما} = \text{ا و}^{\text{لا}} + \text{ب و}^{۲\text{لا}} + \text{ج و}^{۳\text{لا}} - \text{لا و}^{۲\text{لا}}$$

ایک اور مثال کے طور پر مساواتِ ذیل

$$(\text{عف}^{۲} + ۴)(\text{عف} - ۳)\,\text{ما} = \text{جم ۲لا}$$

پر غور کرو۔

$$\text{متمم تفاعل} = \text{ا جم ۲لا} + \text{ب جب ۲لا} + \text{ج و}^{۳\text{لا}}$$

(۳) کے طریقہ سے جو خاص تکملہ معلوم کیا جاتا ہے وہ لا انتہا ہو جاتا ہے۔

لیکن ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{عا} = \frac{1}{\text{عف}^{۲} + ۴} \times \frac{\text{عف} + ۳}{\text{عف}^{۲} - ۹} \text{جم ۲لا}$$

$$= -\frac{1}{۱۳} \frac{1}{\text{عف}^{۲} + ۴} \left[\text{۳ جم ۲لا} - \text{۲ جب ۲لا} \right]$$

= − ۱/۱۳ نہا (جہ = ۰) ۱/(عف۲ + ۴) [۳ جم (۲ + جہ) لا − ۲ جب (۲ + جہ) لا]

= − ۱/۱۳ نہا (جہ = ۰) ۱/(۴ − (۲ + جہ)۲) [(۳ جم ۲ لا − ۲ جب ۲ لا) جم جہ لا
− (۳ جب ۲ لا + ۲ جم ۲ لا) جب جہ لا]

= − ۱/۱۳ نہا (جہ = ۰) ۱/(− ۴ جہ − جہ۲) [(۳ جم ۲ لا − ۲ جب ۲ لا) (۱ − جہ۲ لا۲/۲! + ...)
− (۳ جب ۲ لا + ۲ جم ۲ لا) (جہ لا − جہ۳ لا۳/۳! + ...)]

= کوئی لا انتہا بڑی تعداد جو متمم تفاعل میں شامل ہے
− ۱/۵۲ (۳ جب ۲ لا + ۲ جم ۲ لا) × لا

۷۔ دو غیر تابع متغیروں کی خطی مساواتیں مثلاً

ف۱ (عف) ا + ف۲ (عف) ی = ۰ .... (۱)

فہ۱ (عف) ا + فہ۲ (عف) ی = ۰ .... (۲)

جہاں عف = فر/فرلا

(۱) پر فہ۲ (عف) سے تعبیر ہونے والا عمل کرو اور (۲) پر ف۲ (عف) سے تعبیر ہونے والا عمل کرو اور تفریق کرو۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

{ف۱ (عف) × فہ۲ (عف) − ف۲ (عف) فہ۱ (عف)} ا = ۰

یہ ایک خطی مساوات ہے جو حسبِ قاعدہ (۶) حل ہو سکتی ہے۔
اس طرح ا کے لیے جو حل حاصل ہوتا ہے اُسے (۱) میں مندرج کرنے سے ہمیں ی میں ایک خطی مساوات مل جاتی ہے۔

مشق

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{ما} + ۶\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ی}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۲\,\text{ی} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

یعنی

$$(\text{عف}^{۲} + ۱)\,\text{ما} + ۶\,\text{عف ی} = ۰$$

اور

$$\text{عف ما} + (\text{عف}^{۲} + ۲)\,\text{ی} = ۰$$

$$\therefore \left[(\text{عف}^{۲} + ۲)(\text{عف}^{۲} + ۱) - \text{عف} \times ۶\,\text{عف}\right]\text{ما} = ۰$$

یعنی

$$(\text{عف}^{۲} - ۱)(\text{عف}^{۲} - ۲)\,\text{ما} = ۰$$

$$\therefore \text{ما} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{لا}} + \text{ج}\,\text{و}^{\sqrt{۲}\,\text{لا}} + \text{د}\,\text{و}^{-\sqrt{۲}\,\text{لا}}$$

اس لیے (۱) سے ملتا ہے

$$۶\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{ا}\,\text{و}^{\text{لا}} + ۲\,\text{ب}\,\text{و}^{-\text{لا}} + ۳\,\text{ج}\,\text{و}^{\sqrt{۲}\,\text{لا}} + ۳\,\text{د}\,\text{و}^{-\sqrt{۲}\,\text{لا}} = ۰$$

اور اس لیے ہمیں ی کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے، یعنی

$$\text{ی} = -\frac{\text{ا}}{۳}\,\text{و}^{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{۳}\,\text{و}^{-\text{لا}} - \frac{\text{ج}}{۲\sqrt{۲}}\,\text{و}^{\sqrt{۲}\,\text{لا}} + \frac{\text{د}}{۲\sqrt{۲}}\,\text{و}^{-\sqrt{۲}\,\text{لا}} + \text{ع}$$

(۲) میں مندرج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ع = ۰.

مثالیں

۱ ۔ ایک مستدیر قُرص کے مرکز میں سے ایک پِن گزارنے سے ایک لٹّو بنایا گیا ہے ۔ قرص کا نصف قطر ۳ انچ ہے اور پِن کا طول قرص کے نیچے ۲ انچ ہے ۔ ثابت کرو کہ قائم حرکت کے لیے جس میں قُرص کا کنارہ زمین سے نہیں لگتا محور کے گِرد گردشوں کی تعداد فی سکنڈ $\frac{۸۰}{۲۲ \times ۱۳\sqrt{۴}}$ (= ۵ء۴ تقریباً) سے زیادہ ہونی چاہیے ۔

۲ ۔ ایک لٹّو جس کی کمیّت ۸ پونڈ ہے اس طرح گھوم رہا ہے کہ اس کی نوک ایک کھُردری اُفقی سطح مستوی پر ہے ۔ اس کے جمود کا معیارِ اثر اس کے محور کے گرد $\frac{۱}{۵}$ پونڈ فٹ^{۲} ہے اور نوک میں سے اس کے محور پر عمود دار خط کے گِرد $\frac{۱}{۵}$۲ پونڈ فٹ^{۲} اور اس کے مرکزِ ثقل کا فاصلہ نوک سے ۶ اِنچ ہے ۔ ثابت کرو کہ سمتِ انتصابی سے محور کے °۳۰ کے میلان کے ساتھ قائم حرکت مُمکن ہے بشرطیکہ زاویئی رفتار تقریباً ۱۵ء۷ نیم قطری فی سکنڈ کے مساوی ہو ۔ اِس انتہائی زاویئی رفتار کی صورت میں ثابت کرو کہ استقبال تقریباً ۲ء۸ نیم قطری فی سکنڈ کے مساوی ہے ۔

۳ ۔ ایک پتلے قرص کا نصف قطر ۲ا ہے، اس کے مرکز ج میں سے ایک ناقابلِ لحاظ وزن کی سوئی گزارنے سے جو قُرص کی سطح پر عمود دار ہے ایک لٹّو بنایا گیا ہے ۔ سوئی کی نوک قرص سے فاصلہ ا پر ہے ۔ سوئی کے سرے د کو ایک کھُردری سطح مستوی پر رکھ کر (جس پر سے یہ پھسلتا نہیں ہے) لٹّو کو چلایا گیا ہے ۔ ابتداءً دج سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور اس خط کے گرد جو دج اور سمتِ انتصابی کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے حاصل زاویئی رفتار سہ ہے ۔ ثابت کرو کہ لٹّو کا محور

سمتِ انتصابی میں سے

مدت $\int^{\text{عہ}} \dfrac{\text{فرطہ}}{\text{سہ}\sqrt{\text{۱} - \text{جم}^{\text{۳}}\frac{\text{عہ}}{\text{۲}}\,\text{قط}^{\text{۲}}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}} + \text{ک}(\text{جم عہ} - \text{جم طہ})}}$ کے بعد گزریگا جہاں $\text{ک} = \dfrac{\text{ج}}{\text{ا سہ}^{\text{۲}}}$ اور $\text{ک} < \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$

۴ - اگر ابتداءً لٹّو کا محور افقی ہو اور اس کو افقی سطح میں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ چلایا جائے تو ثابت کرو کہ محور اٹھنا شروع ہوگا اگر $\text{ج ن سہ} > \text{م ج ھ}$ اور جب $\text{ج ن سہ} = \text{۲ م ج ھ}$ تو محور زاویئی فاصلہ $\text{جم}^{-\text{۱}}\left(\dfrac{\text{ا سہ}}{\text{ج ن}}\right)$ میں سے اٹھیگا بشرطیکہ $\text{ا سہ} < \text{ج ن}$ اور وہاں ایک آن کے لیے ساکن ہوجائیگا۔ محور کے راستہ کی عام نوعیت کو ظاہر کرنے کے لیے ایک سرسری نقشہ کھینچو۔

[ا، ن، ج کے معنے حسبِ معمول ہیں]

۵ - ایک متشاکل لٹّو کو ایک کھردری اُفقی سطح مستوی پر اس کے محور کے گرد زاویئی رفتار سے چلایا گیا ہے۔ ابتداءً محور سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے ثابت کرو اس مدت میں جس میں محور سمتِ انتصابی کے قریب ترین اور بعید ترین ہو مرکزِ ثقل، قوس $\text{ھ مس}^{-\text{۱}}\left(\dfrac{\text{جب عہ}}{\text{ع} - \text{جم عہ}}\right)$ مرتسم کرتا ہے جہاں ع اور ھ کے معنی حسبِ معمول ہیں۔

۶ - ایک لٹّو کو جس کا راٗس و ہے اس طرح چلایا گیا ہے کہ زاویئی معیارِ حرکت ج ن، و میں سے اوپر کی جانب کھچے ہوئے انتصابی خط کے گرد کے زاویئی معیارِ حرکت کے مساوی ہے۔ ابتداءً لٹّو کے محور کا میلان سمتِ انتصابی سے عہ ہے۔ اور محور پر کا ہر نقطہ اُفقاً حرکت کر رہا ہے۔ معلوم کرو کہ کیا محور محدود وقت میں انتصابی ہوجائیگا۔ اگر یہ ہو جائے تو گردش کے مرکز ن کی رفتار اس آن میں

$\text{۲}\sqrt{\text{ا ج ل}}\ \text{مس}\,\frac{\text{عہ}}{\text{۲}}\sqrt{\text{ع} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{عہ}}{\text{۲}}}$ ہوگی جہاں $\text{۴ ا}^{\text{۲}}\text{ج ع} = \text{ج}^{\text{۲}}\text{ن}^{\text{۲}}\text{ل}$

اور $\text{ل} = \text{و ن}$۔ حرکت کی نوعیت معلوم کرو جبکہ $\text{ع} < \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{عہ}}{\text{۲}}$

متفرق مثالیں ۱

۱ - ایک ریل گاڑی جس کی کمیت ۳۰۰ ٹن ہے ابتداءً ہموار سڑک پر ساکن ہے۔ اس پر ایک اُفقی قوت ف عمل کرتی ہے جو یکساں طور پر وقت ت کے ساتھ اس طرح بڑھتی ہے کہ جب ف = ۰ تو ت = ۰ اور جب ف = ۵ تو ت = ۱۵، ف کو ٹن وزن میں اور ت کو سکنڈوں میں ناپا گیا ہے۔ حرکت کے دوران میں یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ ریل پر ۳ ٹن وزن کی یکساں رگڑ کی قوت عمل کرتی ہے۔ ابتدائے حرکت کی آن معلوم کرو اور ثابت کرو کہ جب ت = ۱۵ تو گاڑی کی رفتار = ۶ء۴ فٹ فی سکنڈ اور اس آن میں انجن کی عامل اسپی طاقت تقریباً ۱۳ ہوگی۔

۲ - ایک ریل گاڑی کو حرکت دینے کے لیے انجن کی قوت ابتداءً مستقل اور ف کے مساوی ہے اور جب گاڑی ایک خاص رفتار د حاصل کر لیتی ہے تو اس کے بعد سے انجن ایک خاص شرح ر (= ف د) سے کام کرتا ہے۔ جب انجن رفتار و (جو بڑی ہے د سے) حاصل کر لیتا ہے تو ثابت کرو کہ روانگی سے فاصلہ طے شدہ لا اور وقت صرف شدہ ت حسبِ ذیل ہیں:-

$$ت = \frac{م}{۲\,ر}\left(و^{۲} + د^{۲}\right) \quad اور \quad لا = \frac{م}{۳\,ر}\left(و^{۳} + \frac{۱}{۲}د^{۳}\right)$$ جہاں

م گاڑی اور انجن کی مجموعی کمیت ہے۔

اگر مجموعی وزن ۳۰۰ ٹن ہو تو ۴۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار حاصل کرنے کے لیے وقت صرف شدہ اور فاصلہ طے شدہ محسوب کرو جبکہ انجن کی اسپی طاقت ۴۲۰ ہو اور ۱۲ ٹن وزن کی قوت لگا سکتا ہو۔

۳ - کشش کے دو مرکز ا اور ب اکائی کمیت کے ایک ذرہ پر اثر انداز ہیں۔ ہر ایک مرکز کی کشش کا قانون فاصلہ ر پر $\frac{م}{ر^{۳}}$ ہے۔

ابتداءً ذرہ اب ممدودہ پر اب کے وسطی نقطہ سے ہا$\sqrt{۳}$ ا پر تھا جہاں اب = ۲ا، ثابت کرو کہ

ذرہ ب پر وقت $\frac{ا^{۲}}{\text{ہا}\sqrt{ہ}}$ [۱ - $\frac{۱}{\text{ہا}\sqrt{۶}}$ لوک$_{نو}$ ($\sqrt{۳}$ + $\sqrt{۲}$)] کے بعد پہنچیگا۔

۴۔ کمیت م کا ایک وزنی ذرّہ ایک لچکدار رسّی کے وسطی نقطہ کے ساتھ بندھا ہے جس کا اصلی طول ۲ ا ہے اور جو ایک ہی انتصابی خط پر کے دو نقطوں کے درمیان جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ل ہے تنی ہوئی ہے۔ اگر ذرہ ان دو نقطوں کے عین درمیان سے حرکت کرنا شروع کرے تو اہتزاز کی مدّت معلوم کرو جبکہ لچک کی قدر لہ $\not<$ $\frac{م ج ا}{ل - ا}$ سے اگر لہ $<$ $\frac{م ج ا}{ل - ا}$ ہے تو کیا واقع ہوگا۔

۵۔ ایک تختہ کا طول ۲ ا اور کمیّت م ہے، اس کا ایک سرا ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ اور دوسرا ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر ٹکا ہوا ہے اور اس کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے۔ تختہ ابتداءً ساکن ہے اور ایک بندر اس پر سے اس طرح نیچے اُتر رہا ہے کہ تختہ ہمیشہ ساکن رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ فاصلہ لا طے کرنے کے بعد بندر کی رفتار کا مربع $\frac{ج لا}{۲ جب عہ}$ [$\frac{۲(م + ۲ مَ)}{مَ}$ - $\frac{لا}{ا}$] ہوگا اور تختہ کے نچلے سرے تک پہنچنے میں $\sqrt{\frac{۲ ا جب عہ}{ج}}$ × جم$^{-۱}$ $\frac{م}{م + ۲ مَ}$ وقت لگیگا جہاں مَ بندر کی کمیّت ہے۔

۶۔ ایک تختہ جس کی کمیّت م ہے ایک کھُردری سطح مستوی پر جو افق سے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے پڑا ہے۔ تختہ پر سے ایک شخص جس کی کمیّت مہ ہے اُتر رہا ہے، اگر تختہ نہ پھسلے تو ثابت کرو کہ آدمی کا اسراع

$\frac{مہ + م}{مہ}$ (جب عہ - مہ جم عہ) ج سے کم نہیں ہونا چاہیے اور

$\frac{م_۱ + م}{م}$ (جب عہ + مہ جم عہ) ج سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے۔

۷۔ طول ل کی ایک زنجیر ایک چکنی سطح مستوی کے میلان اعظم پر رکھی ہوئی ہے۔ سطح کا میلان اُفق کے ساتھ عہ ہے۔ اگر ابتداءً زنجیر کا ایک سرا سطح مائل کے نچلے کنارے پر سے عین لٹک رہا ہو تو ثابت کرو کہ بالآخر سطح مستوی کو وقت $\sqrt{\frac{ل}{ج (۱ - جب عہ)}} \times$ لوک مم $\frac{عہ}{۲}$ میں چھوڑ دیگی۔

۸۔ ثابت محوروں کے لحاظ سے ایک ذرہ کے راستہ کی مساواتیں ہیں لا = ا جم س ت ، ما = ب جب س ت ، ثابت کرو کہ اگر محور زاویئی رفتار س سے گھومیں تو ان کے لحاظ سے راستہ کی مساوات ایک دائرہ ہوگی۔

۹۔ سورج کے گرد گردش کرنے میں ایک سیارہ کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی رفتاریں سیارہ کے مدار میں ۳۰ اور ۲ ، ۲۹ کلو میٹر فی ثانیہ ہیں جبکہ سورج کو ثابت فرض کیا جائے۔ ثابت کرو کہ مدار کا خروج المرکز $\frac{۱}{۶۰}$ ہے۔

۱۰۔ ایک ذرہ ایسے اسراع کے زیر عمل جو ہمیشہ مرکز کی طرف عمل کرتا ہے ایک ناقص مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وقت کے لحاظ سے توانائی بالحرکت کی اوسط قیمت اس کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی توانائیوں (بالحرکت) کا اوسط ہے۔

۱۱۔ ایک ذرہ کو جس کی کمیّت م ہے ایک چکنے میز پر تھام کر رکھا گیا ہے۔ ایک رسی جس کا ایک سرا اس ذرہ کے ساتھ بندھا ہے میز کے ایک سوراخ میں سے گزرتی ہوئی اپنے دوسرے سرے پر ایک اور ذرہ کو تھامے ہوئے ہے جس کی کمیت ۳ م ہے۔ میز پر کے ذرہ کو رسّی کی سمت پر عمود وار ابتدائی رفتار و سے پھینکنے سے حرکت کی ابتدا کی گئی ہے۔ اگر رسی کا وہ طول جو میز پر ہے ابتداءً ا ہو تو ثابت کرو کہ جب لٹکنے والا جسم فاصلہ $\frac{ا}{۲}$ میں سے اتریگا (بشرطیکہ یہ ممکن ہو) تو اس کی رفتار $\frac{\sqrt{۳}}{۲} \sqrt{ج ا - و^۲}$ ہوگی۔

۱۲۔ ایک سیدھی چکنی نلی افقی محل میں ساکن ہے اور اس کے اندر

مقام ا پر ایک ذرّہ ہے۔ نلی کو ا کے انتصاباً اوپر ایک نقطہ و کے ساتھ استواراً مربوط کیا گیا ہے۔ نلی کو و کے گرد انتصابی سطح مستوی میں مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھمایا گیا ہے۔ اگر و ا = ل تو ثابت کرو کہ وقت ت کے بعد ذرّہ کا فاصلہ مقام ا سے ل جبز سہ ت + $\frac{\text{ج}}{\text{۲ سہ}^{۲}}$ (جبز سہ ت - جب سہ ت) ہوگا۔

۱۳۔ ایک ذرّہ کو انتصاباً ایسی رفتار سے اوپر پھینکا گیا ہے جو کہ مزاحمت کی عدم موجودگی کی صورت میں اس کو ۴۰۰ فٹ تک اوپر لے جاتی۔ اگر مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہو اور انتہائی رفتار ۳۰۰ فٹ فی سکنڈ ہو تو ثابت کرو کہ ذرہ فی الحقیقت ۳۵۲ فٹ تک اوپر جائیگا اور پھر زمین تک پہنچنے کے وقت اس کی رفتار ۱۴۱٫۲ فٹ فی سکنڈ ہوگی اور اس کے طیران کی کل مدت تقریباً ۹٫۴ سکنڈ ہوگی۔

۱۴۔ ایک زنجیر ایک چکنے مستدیر اسطوانہ پر جس کا نصف قطر ل ہے اور جس کا محور اُفقی ہے ساکن ہے۔ زنجیر کا طول اُسطوانہ کے نصف محیط کے مساوی ہے اگر زنجیر کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کا اسراع اُس وقت جبکہ زنجیر کا طول لا اسطوانہ پر سے پھسل چکیگا $\frac{\text{ج}}{\pi\,\text{ل}}$ (لا + ل جب $\frac{\text{لا}}{\text{ل}}$) ہوگا۔

۱۵۔ ایک لچکدار رسی کے سرے دو ذرّوں کے ساتھ جن کی کمیتیں م اور مَ ہیں بندھے ہیں۔ رسّی کا قدرتی طول ل اور لچک کی قدر لہ ہے۔ یہ نظام ساکن ہے جبکہ رسّی عین تنی ہوئی ہے۔ ایک قوت ف ذرّہ م پر ذرہ مَ کی سمت کے مخالف عمل کرنا شروع کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ وقت ت کے بعد ذرّوں کا درمیانی فاصلہ ل + $\frac{\text{۲ ف}}{\text{م ع}^{۲}}$ جب^{۲} $\frac{\text{ع ت}}{\text{۲}}$ ہوگا جہاں ع^{۲} = لہ $\frac{\text{م + مَ}}{\text{ل م مَ}}$،
نیز اس وقت م کا ہٹاؤ محسوب کرو۔

۱۶۔ مرفاعوں کی حفاظت کے مدِّنظر سطح زمین کے نیچے تک مصعد کی توسیع کی گئی ہے۔ مرفاع کا پیندا مصعد پر ٹھیک بیٹھتا ہے۔ اس طرح سے جیسے کہ

ایک باد حائلہ مہیا کیا گیا ہے ۔ ایک مرفاع وزنی ۳۰۰۰ پونڈ ۳۰ فٹ کی بلندی سے اس طرح کے محافظ گڑھے کے اندر گرتا ہے ۔ گڑھے کی گہرائی ۱۰ فٹ ہے ۔ مرفاع کا پیندا ۸ فٹ × ۵ فٹ ہے ۔ ثابت کرو کہ مرفاع ساکن ہونے سے پہلے گڑھے کے اندر فاصلہ لا تک اتر جائیگا جہاں ۱۰ لوک$_{و}$ $\frac{۱۰}{۱۰-لا}$ + $\frac{لا}{۲}$ + $\frac{۱۴۹}{۱۴۴}$ لا = ۰ اور اس لیے لا = ۱ء۴ فٹ تقریباً ۔ (مسدود ہوا خارج نہیں ہوتی، اور ہوا کا دباؤ اس کے حجم کے بالعکس متناسب ہوتا ہے، نیز کرۂ ہوائی کا دباؤ ۱۵ پونڈ فی مربع انچ ہے)۔

۱۷ ۔ ایک وزنی یکساں رسّی کا طول ل ہے اور کمیّت ۲ م، اس کے سروں کے ساتھ کمیّتیں م اور ۲ م بندھی ہیں ۔ یہ نظام ایک چکنی اُفقی کھونٹی پر ساکن ہے ۔ اب کمیّت م کو آہستہ آہستہ فاصلہ $\frac{ل}{۹}$ میں سے نیچے کھینچا گیا ہے اور پھر چھوڑ دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ کمیّت ۲ م کے کھونٹی تک پہنچنے سے پہلے نظام کے کسی نقطہ کا فاصلہ طے شدہ وقت ت میں $\frac{ل}{۹}$ {جمز $\sqrt{\frac{ج}{ل}}$ ت - ۱} ہوگا ۔ نیز معلوم کرو کہ ۲ م کمیّت کو کھونٹی تک پہنچنے میں کتنی مدت لگیگی اور اُس وقت اِس کی رفتار کیا ہوگی ۔

۱۸ ۔ ایک چو پہیہ گاڑی ایک اُفقی قوّت کے زیرِ عمل چل رہی ہے جو گاڑی کے مرکزِ ثقل سے اوپر ھ فاصلہ پر عمل کرتی ہے ۔ اگلا دُھرا مرکزِ ثقل سے د$_{۲}$ فاصلہ آگے اور پچھلا دُھرا مرکزِ ثقل سے د$_{۱}$ فاصلہ پیچھے ہے ۔ پہیوں کے جمود کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ گاڑی کا زیادہ سے زیادہ اسراع $\frac{ج د_{۲}}{ھ}$ ہے، اور زیادہ سے زیادہ ابطا $\frac{ج د_{۱}}{ھ}$ ہے ۔ نیز اگر قوتِ مذکور مرکزِ ثقل کے نیچے ھ فاصلہ پر عمل کرے تو زیادہ سے زیادہ اسراع $\frac{ج د_{۱}}{ھ}$ اور بڑے سے بڑا ابطا $\frac{ج د_{۲}}{ھ}$ ہوگا ۔

۱۹ ۔ ایک مایع پیما ایک مایع کے اندر اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا حجم ح غرق ہے ۔ اگر تنے کی تراشش کا رقبہ ا ہو تو ثابت کرو کہ تعادل کے تحل کے گرد اہتزاز کی مدت ۲ ط $\sqrt{\frac{ح}{ا ج}}$ ہوگی ۔

۲۰- ایک اُفقی الماری کا ایک رَف اُفقی طور پر سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ حرکت کی سعت ا فٹ ہے اور فی سکنڈ ن مکمل اہتزاز ہوتے ہیں۔ ایک ذرّہ کو جس کی کمیّت م پونڈ ہے رَف پر اُس آن میں رکھا جاتا ہے جب کہ یہ حرکت کے انتہائی مقام پر ہو۔

ثابت کرو کہ اگر مہ $< \frac{4\pi^2 \text{ن}^2 \text{ا}}{\text{ج}}$ تو ذرّہ اور رَف کے درمیان پھسلنے کا عمل وقت ت تک وقوع پذیر ہوگا جو مساوات

$$\frac{\text{جب } 2\pi \text{ن} \text{ت}}{2\pi \text{ن} \text{ت}} = \frac{\text{مہ} \, \text{ج}}{4\pi^2 \text{ن}^2 \text{ا}}$$ سے حاصل ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ اگر کسی خاص صورت میں ت کی قیمت $\frac{1}{6\text{ن}}$ ہو تو رَف کے لحاظ سے ذرّہ اس مدّت میں فاصلہ $\frac{\text{ا}}{2}\left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)$ میں سے حرکت کریگا۔

۲۱- اگر ایک کوٹھی کسی دریا کی تہ کے کیچڑ کے اندر دھنسے تو مزاحمت کیچڑ کے اندر غرق شدہ گہرائی کے متناسب ہوتی ہے۔

۶ ٹن وزنی کوٹھی خود اپنے وزن سے ساکن ہونے سے پہلے ۴ فٹ تک دھس جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُس وقت ۸ ٹن کا مزید وزن اوپر رکھ دیا جائے تو یہ مزید ۱۶ انچ تک دھس جائیگی۔

۲۲- ایک یکساں آہنی سلاخ کی کمیّت ھ، طول ا اور کثافتِ اضافی ض ہے۔ یہ سلاخ انتصابی حالت میں پانی کے اندر اس طرح عین غرق ہے کہ یہ ایک ناقابل کھنچاؤ رسی کے ذریعہ جو چکنی چرخی پر سے گزرتی ہے اور جس کے دوسرے سرے کے ساتھ کچھ مقابل وزن بندھا ہے، بحالتِ سکون سہاری ہوئی ہے۔

ایک کمیّت مہ ھ آہستہ سے اس مقابل وزن پر رکھ دی جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مہ خاص حدود سے تجاوز کرے تو سلاخ پانی کے اندر سے وقت $\sqrt{\frac{4\text{ا}}{\text{ج}}\left\{(\text{مہ}+2)\text{ض}-1\right\}} \times \text{جب}^{-1}\sqrt{\frac{1}{2\,\text{مہ}\,\text{ض}}}$ میں نکلیگی۔

Caisson ـله Shelf ـه

بعد کی حرکت پر عمومی شکل میں بحث کرو۔
[مقابل وزن خود پانی کے کلیتہً باہر ہے اور پانی کی حرکت کو نظر انداز کر دیا گیا ہے]۔

۲۳- ایک بے وزن رسی ا ب کے دو حصے ا ج اور ج ب غیر مساوی طولوں اور لچک کے ہیں۔ یہ مرکب رسی تنی ہوئی حالت میں سروں ا اور ب کے اندر انتصاباً ساکن ہے۔ ایک ذرہ مقام ج پر آویزاں کر دیا گیا ہے اور ج کی قائم حرکت کا ہٹاؤ ل١ معلوم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ج کا مزید چھوٹا انتصابی ہٹاؤ ذرہ میں سادہ موسیقی حرکت پیدا کریگا اور اس حرکت کے سادہ معادل رقاص کا طول ل١ ہوگا۔

۲۴- ایک ذرہ ایسی قوتوں کے زیر عمل حرکت کرتا ہے جن کے اجزائے ترکیبی دو ثابت علی القوائم محوروں و لا، و ما کے متوازی -۲ ک۲ لا + ک ما اور -۲ ک۲ ما - ک لاَ فی اکائی کمیت ہیں۔ حرکت ظاہر کرنے والی مساواتوں کا مفہوم بیان کرو۔
نیز ثابت کرو کہ عمودوار محوروں کے ایک اور زوج کے لحاظ سے جو مستقل زاویئی رفتار ک یا -۲ک کے ساتھ اسی مبدار کے گرد گھوم رہے ہوں ذرہ کے راستہ کی مساوات دائرہ ہے۔

۲۵- ایک ذرہ ایک مستوی منحنی پر حرکت کرتا ہے۔ جب یہ مبدار سے فاصلہ ر پر ہے تو اس کی رفتار و ہے، اور اس مقام پر نصف قطر انحنا ص ہے۔ ثابت کرو کہ مبدار سے مماس پر کے عمود کے پائین کی رفتار $\frac{ر}{ص}$ و ہے۔

۲۶- ایک ذرہ مرکزی جاذب قوت کے زیر عمل حرکت کرتا ہے جو فاصلہ کے متناسب ہے۔ نیز ذرہ پر ایک مزاحمتی قوت عمل کرتی ہے جو رفتار کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ ایک مساوی الزاویہ لولبی ہو سکتا ہے۔

۲۷- ایک ذرہ مرکزی اسراع مہ ع۲ + نہ ع۳ کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ راستہ معلوم کرو۔ اور اگر نہ چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ راستہ تقریباً ایک ناقص سے تعبیر ہو سکتا ہے جس کے محور ماسکہ کے گرد ایک چھوٹی زاویئی رفتار سے گھومتے ہیں۔

۲۸ - ایک سیدھی نلی، جس کی کمیّت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے، ایک اُفقی میز پر حرکت کرتی ہے۔ نلی کے اندر کمیّت م کا ایک ذرّہ ہے۔ نلی ابتدائی زاویئی رفتار سہ کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتی ہے۔ وقت ت کے بعد ذرّہ کا مقام معلوم کرو، اور ثابت کرو کہ اگر وقت ت میں نلی زاویہ طہ میں سے گھومے تو

مس طہ = سہ ت۔

۲۹ - ایک رقّاص کا زاویئی ہٹاؤ مساوات طہ = طہ. و^{-ک ت} جب ن ت سے حاصل ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ طہ کی مسلسل اعظم قیمتیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں۔

اگر ایک کمل اہتزاز کی مدت ایک سکنڈ ہو، اور اگر ایک ہی جانب پہلے اور پانچویں زاویئی ہٹاؤ کی نسبت ۴ : ۱ ہو تو ثابت کرو کہ جھول کر تعادل کے محل سے ہٹ کر بعید ترین ہٹاؤ تک چلے جانے کی مدت ۲۴۱ر سکنڈ ہے۔

۳۰ - ایک م ٹن ہٹاؤ والے دُخانی جہاز کو و فٹ فی سکنڈ کی بڑی سے بڑی رفتار پر چلانے کے لیے ایسی طاقت پ کی ضرورت ہوتی ہے۔ مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہے اور انجن تمام رفتاروں پر مستقل اقدامی دباؤ ڈالتا ہے۔ جہاز ات وقت میں س فٹ فاصلہ طے کرتا ہے اور و فٹ فی سکنڈ کی رفتار حاصل کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ت = \frac{۱۱۲}{۵۵} \times \frac{م\,و^۲}{پ\,ج}\ لوک_و \frac{و + و}{و - و}$$

$$س = \frac{۱۱۲}{۵۵} \times \frac{م\,و^۳}{پ\,ج}\ لوک_و \frac{و^۲}{و^۲ - و^۲}$$

$$اور \quad س = \frac{۲۲۴}{۵۵} \times \frac{م\,و^۳}{پ\,ج}\ لوک\ جمز \left(\frac{۵۵}{۲۲۴} \times \frac{پ\,ج\,ت}{م\,و^۲}\right)$$

۳۱ - ایک لدی ہوئی موٹر کار کی اسپی طاقت ۵۰ ہے اور وزن ۵۰۰۰ پونڈ ہے اور اس کی بڑی سے بڑی رفتار ۷۵ میل فی گھنٹہ ہے۔ ہر رفتار پر اقدامی قوت مستقل رہتی ہے اور ہوا کی مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب

بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{۳}{۴}$ ۴۷ سکنڈ میں یہ سکون سے روانہ ہو کر ۴۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار حاصل کر لیتی ہے اور اس مدت میں یہ $\frac{۱}{۴}$ ۱۶۸۷ فٹ فاصلہ طے کر لیتی ہے۔

۳۲ - ایک جہاز کو جس کا ہٹاؤ ۱۰ ہزار ٹن ہے ۲۰ ناٹ کی مستقل رفتار حاصل کرنے کے لیے ۱۵۰۰۰ اسپی طاقت کی ضرورت ہوتی ہے۔ اگر مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہو اور ہر رفتار پر انجن کی اقدامی قوت مستقل رہے تو اسراع معلوم کرو جبکہ رفتار ۱۵ ناٹ ہو۔

نیز ثابت کرو کہ ۱۵ ناٹ کی رفتار حاصل کرنے میں تقریباً $\frac{۱}{۲}$ ۱ منٹ لگیگا۔ (معلوم ہے لوک $_{و}$ ۷ = ۹۴۶ر۱، اور ۱ ناٹ = ۱۰۰ فٹ کی رفتار فی منٹ)۔

۳۳ - ایک ریل گاڑی کی کُل کمیّت م ہے۔ ہر رفتار پر انجن کی اقدامی قوت ف مستقل رہتی ہے۔ اور ریل کی حرکت میں کُل مزاحمتیں فی اکائی کمیّت مہ × (رفتار)^{۲} ہیں۔

اگر م = ۳۰۰ ٹن، اگر ہموار سڑک پر بڑی سے بڑی رفتار ۶۰ میل فی گھنٹہ ہے، اور اگر اس وقت اسپی طاقت ۱۵۰۰ ہو تو ثابت کرو کہ ۱۰۰ میں ۱ میلان والی مائل سطح پر چڑھتے وقت اعظم رفتار تقریباً ۳۲ میل فی گھنٹہ ہوگی۔

۳۴ - م ٹن والے ایک جہاز پر اس کے انجن کی اقدامی قوت ف ٹن وزن کے مساوی ہے اور مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہے، نیز انتہائی رفتار ک ہے۔ اگر اُس وقت جبکہ جہاز بڑی سے بڑی رفتار سے جا رہا ہو انجنوں کو اُلٹ کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ جہاز وقت $\frac{\pi}{۴} \times \frac{م ک}{ف ج}$ سکنڈ میں فاصلہ $\frac{م ک^{۲}}{۲ ف ج}$ لوک $_{و}$ ۲ طے کرنے کے بعد ساکن ہو جائیگا۔

۳۵ - ایک انجن ہموار راستہ پر مستقل اسپی طاقت سے کام کرتے ہوئے

جملہ م ٹن کمیت کو کھینچ رہا ہے جبکہ مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہے۔ جب رفتار ع میل فی گھنٹہ ہے تو جرّی قوت ف پونڈ وزن ہے اور انتہائی رفتار و میل فی گھنٹہ ہے۔ ثابت کرو کہ رفتار ع میل فی گھنٹہ سے بڑھ کر وَ میل فی گھنٹہ (وَ < و) ہو جانے میں فاصلہ $\frac{۲۲}{۸۱۰۰} \frac{م و^۳}{ف ع}$ لوک$_و$ $\frac{و^۳ - ع^۳}{و^۳ - وَ^۳}$ میل طے ہوگا۔

اگر م = ۲۶۴، ف = ۲۰۰۰، ع = ۱۵، و = ۶۰، وَ = ۴۵ تو ثابت کرو کہ فاصلہ تقریباً ۵۰۸۰ فٹ کے مساوی ہوگا۔

۳۶ ــ ۱۶۸۰ ٹن کا ایک جہاز جس کا طول ۲۳۰ فٹ ہے ۱۸ ناٹ کی مستقل رفتار سے جا رہا ہے۔ اُس وقت مؤثر اسپی طاقت ۲۵۰۰ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر انجنوں کو اُلٹ دیا جائے تو جہاز تقریباً ۷ طولوں میں ساکن ہو جائیگا۔ مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہے اور اُلٹنے کے بعد انجنوں کی مؤثر اقدامی قوت ابتدائی سمت میں پوری رفتار پر چلنے کی صورت کا ایک تہائی ہے۔

[۱ ناٹ = ۶۰۸۰ فٹ فی گھنٹہ ۔ لوک$_و$ ۴ = ۱٫۳۸۶]

۳۷ ــ ایک ریل گاڑی کی حرکت میں مزاحمت ۲۰ اور ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتاروں کے اندر $۹ + \frac{و^۲}{۱۰۰}$ پونڈ وزن فی ٹن لی جا سکتی ہے، جہاں و رفتار ہے میلوں میں فی گھنٹہ ۔ ۳۰ میل کی رفتار پر بھاپ بند کر دی جاتی ہے اور گاڑی متذکرہ مزاحمت کے زیر عمل آہستہ ہوتی جاتی ہے۔ کتنی مدّت میں رفتار ۲۰ میل فی گھنٹہ ہو جائیگی، اور اس عرصہ میں گاڑی کتنا فاصلہ طے کریگی۔

۳۸ ــ ۱۵ ہزار ٹن کے ایک جہاز کو ۲۰ ناٹ کی یکساں رفتار سے چلانے کے لیے ۲۵ ہزار مؤثر اسپی طاقت کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ فرض کر کے کہ مزاحمت دو حصّوں پر مشتمل ہے جن میں سے ایک مستقل ہے اور دوسرا رفتار کے مربع کے متناسب ہے، اور یہ دونوں حصّے ۲۰ ناٹ کی رفتار پر مساوی ہیں، اور نیز اقدامی قوت سب رفتاروں کے لیے وہی ہے، معلوم کرو کہ سکون سے روانہ ہوتے وقت اسراع کیا تھا، اور نیز ۱۰ ناٹ کی رفتار کے وقت اسراع کیا ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ یہ رفتار سکون سے تقریباً ۳۹ سکنڈ کے بعد حاصل ہوگی اور اس اثنا رمیں فاصلہ تقریباً ۲٫۱ گز طے ہوگا۔

[ایک ناٹ = ۱۰۰ فٹ فی منٹ، لوگ ۲ = ۳۸۶۳ء۱ اور لوگ ۳ = ۹۸۶۰۹ء۱]۔

۳۹۔ ایک کروی بوند جس کا حجم بادل کے حجم کا $\frac{۱}{ن}$ ہے، بادل میں سے جو پانی کی نہایت چھوٹی بوندوں پر مشتمل ہے گرتی ہے۔ یہ فرض کرکے کہ سکون سے روانگی کے وقت بوند کا نصف قطر ج ہے، اور بوند اثنائے افتاد میں پانی کے سب ذرّوں کو لپیٹتی جاتی ہے اور ہمیشہ گول رہتی ہے۔ نیز فاصلہ لا میں سے گرنے کے بعد اس کا نصف قطر ا اور رفتار و ہے، ثابت کرو کہ

$$لا = ۴ ن (ا - ج) \quad اور \quad و^۲ = \frac{۸}{۷} ن ج \left(ا - \frac{ج^۶}{ا^۶} \right)$$

۴۰۔ ایک یکساں زنجیر ایک چکنے میز پر لچھے کی شکل میں پڑی ہوئی ہے، اس کے ایک سرے پر ایک قوت جو اس کے ا طول کے وزن کے مساوی ہے عمل کرنا شروع کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ وقت ت میں زنجیر کا طول ت $\sqrt{ج ا}$ کھل جائیگا۔ نیز ثابت کرو کہ کسی آن میں زنجیر کے متحرک حصّہ کی توانائی بالحرکت قوت کے انجام دادہ نصف کام کے مساوی ہوگی۔

۴۱۔ ایک چکنے کرہ کا نصف قطر ا ہے۔ اس کی سطح پر مرکز کی ہمواری پر ایک ذرّہ افقاً رفتار $\sqrt{۲ ج ا}$ سے پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ حرکت دو افقی سطحوں کے درمیان مقید رہیگی جن کا درمیانی فاصلہ $\frac{۱}{۲}$ ($\sqrt{۵}$ - ۱) ا فٹ ہے۔

۴۲۔ ایک ذرّہ ایک چکنے کرہ کی سطح پر جس کا نصف قطر ایک میٹر ہے حرکت کرتا ہے۔ اگر وہ افقی دائرے جن کے درمیان حرکت مقید ہوگی کرہ کے مرکز سے ۴۰ اور ۵۰ سنتی میٹر کی گہرائی پر ہوں تو ثابت کرو کہ ذرہ کی رفتار ۴۴۰ اور ۴۲۸ سنتی میٹر فی ثانیہ کے اندر بدلتی رہیگی۔

۴۳۔ ایک ذرّہ کو ابتداءً ایک چکنے کرہ کی اندرونی سطح پر افقاً و رفتار کے ساتھ ایسے نقطہ سے جو سب سے نچلے نقطہ سے زاویئی فاصلہ عہ پر واقع ہے چلایا گیا ہے۔ حرکت جاذبۂ ارض کے زیر عمل ہے۔ ثابت کرو کہ و کی قیمت خواہ کچھ بھی ہو

ذرّہ کا مقام π ۔ عہ زاویئی فاصلہ سے کبھی اونچا نہیں ہوگا، اور ذرہ سطح کو نہیں چھوڑیگا اگر ۳ جب عہ > ۱ ۔

ثابت کرو کہ حرکتِ مابعد میں ذرّہ سطح کو چھوڑ دیگا اگر

۳ جب عہ < ۱ اور (۲ و² / ل ج) ۔ ۷ جم عہ حدود ± ۳ √(۱ ۔ ۹ جب² عہ) کے اندر واقع ہو ۔

۴۴ ۔ طول ل کے ایک سادہ رقّاص کے لنگر کو اُفقی سمت میں رسّی پر عمودوار ابتدائی رفتار ۲ √(ج ل) سے پھینکا گیا ہے ۔ جبکہ رسّی کی سمت نیچے کھِنچے ہوئے خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر

۴ جب² (عہ/۲) + ۲ جب (عہ/۲) ۔ ۱

مثبت ہو تو رسّی حرکتِ مابعد میں ڈھیلی نہیں ہوگی ۔

۴۵ ۔ ایک چکنی کھوکھلی مستدیر نلی کا نصف قطر ل ہے ۔ یہ نلی ایک انتصابی محور کے گرد جو نلی کی سطح مستوی میں مرکز سے فاصلہ ب (> ل) پر واقع ہے مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے ۔ نلی کے اندر ایک ذرّہ آزادانہ حرکت کرسکتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اضافی تعادل کے محل کے گرد ذرّہ کے چھوٹے اہتزاز کی مدت

(۲ π / سہ) √(ل جب عہ / (ب + ل جب³ عہ))

ہے جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو ذرّہ کے مقامِ سکون میں سے گزرنے والے نصف قطر اور سمتِ انتصابی کے درمیان بنتا ہے ۔

۴۶ ۔ ایک سادہ رقاص جس کا طول ب ہے ابتدائً ساکن ہے ۔ مقامِ تعلیق دفعتہً ایک انتصابی دائرہ میں جس کا سب سے نچلا نقطہ یہی مقام ہے مستقل زاویئی رفتار سہ سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے ۔ سمتِ انتصابی کے ساتھ رسّی کا میلان معلوم کرنے کے لیے تفرقی مساوات بناؤ ۔ اسے تکمل کرو جبکہ ل/ب بہت چھوٹا ہو، اور ثابت کرو کہ اس صورت میں رسّی کا میلان

کبھی $\frac{ا سہ}{ب (ن - سہ)}$ سے بڑا نہیں ہوگا جہاں $ن^2 ب = ج$

۴۷ - ایک ریل گاڑی جس کی کمیت م ہے رفتار و سے حرکت کرتی ہوئی ایک اور ساکن گاڑی کے ساتھ جس کی کمیت مَ ہے ٹکراتی ہے ۔ قوت جو حائلہ کو پورے طول ل تک دبانے کے لیے درکار ہوتی ہے وہ کمیت م کے وزن کے مساوی ہے ۔ یہ فرض کرکے کہ دبنے کا طول متناسب ہے قوت کے ثابت کرو کہ حائلے مکمل طور پر نہیں دبینگے اگر

$$و^2 < ۲ م ج ل \left(\frac{۱}{م} + \frac{۱}{مَ}\right)$$

اگر و اس حد سے زیادہ ہو اور حائلوں کی پشت بے لچک ہو تو گاڑیوں کی آخری رفتاروں کی نسبت $م و - \left\{۲ م مَ ج ل \left(۱ + \frac{مَ}{م}\right)\right\}^{\frac{۱}{۲}}$

$: م و + \left\{۲ م مَ ج ل \left(۱ + \frac{مَ}{م}\right)\right\}^{\frac{۱}{۲}}$ ہوگی ۔

۴۸ - ایک موٹر کی بریک پچھلے پہیّوں پر ہے ۔ موٹر کا مرکزِ ثقل زمین سے بلندی ھ پر واقع ہے اور پچھلا اور اگلا دُھرا بالترتیب مرکزِ ثقل سے اُفقی فاصلے $د_۱$ اور $د_۲$ پیچھے اور آگے ہیں ۔

ثابت کرو کہ ایسی طاقت خواہ کتنی ہی بڑی کیوں نہ ہو بڑے سے بڑا ممکن اسراع $\frac{مہ ج د_۲}{د_۱ + د_۲ - مہ ھ}$ ہے اور بڑے سے بڑا ابطا جو بریک سے پیدا ہوسکتا ہے $\frac{مہ ج د_۲}{د_۱ + د_۲ + مہ ھ}$ ہے، جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے ۔

اگر بریک اگلے پہیّوں پر ہو تو ثابت کرو کہ یہی مقداریں بالترتیب $\frac{مہ ج د_۱}{د_۱ + د_۲ + مہ ھ}$ اور $\frac{مہ ج د_۱}{د_۱ + د_۲ - مہ ھ}$ ہونگی ۔

[پہیّوں اور چلاؤ گیروں کے جمودوں کو نظرانداز کردیا گیا ہے] ۔

۴۹ - دو ذرّے جن کی کمیتیں ھ اور ۲ ھ ہیں ایک ناقابل کھنچاؤ رسّی کے سِروں کے ساتھ بندھے ہیں جو ایک چکنی کھونٹی پر پڑی ہے۔ ذرّہ ھ سے ایک اور مساوی کمیت کا ذرّہ ایک لچکدار رسّی کے ذریعہ لٹک رہا ہے جس کا قدرتی طول ا ہے اور لچک کی قدر لہ، ھ ج ہے۔ اس نظام کو اس طرح تھاما گیا ہے کہ رسّیاں انتصابی ہیں، پہلی رسّی تنی ہوئی ہے اور دوسری کا قدرتی طول ا ہے۔ اگر اس نظام کو حرکت کے لیے چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ حرکت سادہ موسیقی ہوگی جس کا دَور $\pi \sqrt{\frac{\text{۳ا}}{\text{ج}}}$ ہوگا۔ بشرطیکہ پہلی رسّی کافی لمبی ہو۔

نیز ثابت کرو کہ وقت ت کے بعد دوسری رسّی کا کھنچاؤ

$$\text{ا}\left[\text{۱} - \text{جم}\left(\text{۲ت}\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{۳ا}}}\right)\right]$$ ہوگا۔

[رسّیوں کو بے وزن فرض کیا گیا ہے]۔

۵۰ - دو ذرّے جن کی کمیتیں م_1 اور م_2 ہیں ایک باریک لچکدار رسّی کے ذریعہ جس کی لچک کی قدر لہ ہے اور قدرتی طول ل ہے ملائے گئے ہیں۔ اُن کو ایک چکنے میز پر فاصلہ ل پر رکھا گیا ہے اور دونوں کو آنِ واحد میں رسّی کی سمت میں مخالف جانبوں میں مساوی دھکے د دیے گئے ہیں جس سے رسّی کھنچتی ہے۔ ثابت کرو کہ بعد کی حرکت میں بڑے سے بڑا کھنچاؤ

$$\text{د}\sqrt{\frac{(\text{م}_1+\text{م}_2)\,\text{ل}}{\text{م}_1\text{م}_2\,\text{لہ}}} \quad \text{وقت} \quad \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\text{م}_1\text{م}_2\,\text{ل}}{(\text{م}_1+\text{م}_2)\,\text{لہ}}}$$ میں پیدا ہوگا۔

۵۱ - ایک مستدیر قرص جس کی کمیّت ھ ہے ایک چکنے اُفقی میز پر پڑا ہے۔ ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے ایک کمانی کے ذریعہ جو فاصلہ لا میں سے کھنچنے پر قوت مہ لا لگاتی ہے قرص کے مرکز کے ساتھ بندھا ہے۔ اگر کمانی کو کھینچ کر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت

$$\text{۲}\pi\sqrt{\frac{\text{ھ م}}{(\text{ھ}+\text{م})\,\text{مہ}}}$$ ہوگی۔

۵۲ - ایک ذرّہ کے ترکیبی اسراع بلحاظ ایسے محوروں کے جو مستقل زاویئ رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہے ہیں - ہ سہ و' اور ہ سہ ع ہیں جہاں ع اور و اِن محوروں کے متوازی ترکیبی رفتاریں ہیں - ابتداءً ذرّہ نقطہ (۰، - ہ ب) پر ہے' اور بلحاظ متحرک محوروں کے ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ متحرک محوروں کے لحاظ سے ذرّہ کا طریق چہار قرنی ورتدویر ہے اور فضا میں اس کا طریق دائرہ ہے -

۵۳ - ایک ذرّہ ایک مرکزی قوت کے زیر عمل جو فاصلہ کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہے ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر ا ہے حرکت کر رہا ہے - ثابت کرو کہ ذرا سے اختلال کے بعد یہ اِن دو منحنیوں میں سے کسی ایک پر حرکت کریگا -

$$\frac{ر}{ا} = \frac{جمز طہ + ۱}{جمز طہ - ۲} \quad یا \quad \frac{ر}{ا} = \frac{جمز طہ - ۱}{جمز طہ + ۲}$$

اگر قوت فاصلہ کی پانچویں قوت کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ متناظر منحنی

$$\frac{ر}{ا} = ممز \frac{طہ}{\sqrt{۲}} \quad اور \quad \frac{ر}{ا} = مسز \frac{طہ}{\sqrt{۲}}$$ ہونگے -

۵۴ - ایک ذرّہ لاتناہی سے مبدا کی طرف کسی رفتار سے پھینکا گیا ہے اور یہ سمتی نصف قطر پر عمودوار سمت میں قوت م ع^{۳} کے زیر عمل حرکت کرتا ہے - ثابت کرو کہ یہ قبیل ع = ا طہ$^{\frac{۱}{۲}}$ جان$_{\frac{۱}{۴}}$ (طہ) کا ایک منحنی مرتسم کریگا' جہاں جان (لا)' ن ویں رتبہ کا بیسل کا تفاعل ہے - نیز کسی خاص منحنی کو مرتسم کرنے کے لیے رمی کی رفتار معلوم کرو -

۵۵ - ایک ذرّہ کو جو ایک ثابت نقطہ کے ساتھ ایک خفیف طور پر لچکدار رسی کے ذریعہ بندھا ہوا ہے رسی پر عمودوار سمت میں پھینکا گیا ہے - ثابت کرو کہ راستہ کی قطبی مساوات تقریباً

$$ر = ج + جَ \, جب^{۲} \left[طہ \sqrt{\frac{جَ}{۲ج}} \right]$$ ہوگی -

جہاں ج رسّی کا قدرتی طول ہے جسے بوقت ابتدائے حرکت قدرتی طول کا فرض کیا گیا ہے، اور ج + جَ دورانِ حرکت میں اس کا بڑے سے بڑا طول ہے۔

۵۶۔ طول ل کی ایک باریک سیدھی نلی جس کے اندر کی سطح چکنی ہے اپنے وسطی نقطہ کے گرد یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ انتصابی سطح مستوی میں گھوم رہی ہے۔ کسی آن میں جب کہ نلی انتصابی ہے ایک ذرّہ کو ایک چھوٹی انتصابی رفتار سے اُس کے اندر گرا دیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرّہ نلی کے باہر اسی سرے سے یا مقابل کے سرے سے نکلیگا جیسے کہ ل بڑا ہو یا چھوٹا ہو $\frac{ج}{سہ^{۲}}$ سے۔

ذرّہ کی حرکت پر بحث کرو جبکہ ل = $\frac{ج}{سہ^{۲}}$

۵۷۔ طول π ا + ب کی ایک ہلکی رسّی کو ایک ایسے دائرہ کے محیط پر کے ایک نقطہ کے ساتھ باندھا گیا ہے جو ایک اُفقی میز پر ثابت ہے۔ رسّی کو دائرہ کے نصف محیط پر لپیٹا گیا ہے۔ اور رسّی کا طول ب کھلا ہوا ہے اور دائرہ پر مماس وار ہے۔ رسّی کے آزاد سرے پر کمیّت م کا ایک ذرّہ بندھا ہے جس کو رسّی پر عمود وار سمت میں رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ رسّی وقت $\frac{\pi^{۲} ا^{۲} + ۲ \pi ب}{۲ و}$ کے بعد پوری کُھل جائیگی اور حرکت کی ابتدا سے وقت ت پر رسّی کا تناؤ $\frac{م و^{۲}}{\sqrt{ب^{۲} + ۲ و ا ت}}$ ہوگا۔

۵۸۔ ایک چکنا مستدیر تار جس کا نصف قطر ا ہے اپنے ایک انتصابی قطر کے گرد مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے اور ایک منکا اس کے سب سے نچلے نقطہ پر ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ا سہ^{۲} > ج تو اضافی تعادل غیر قائم ہوگا اور اگر منکے کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو یہ ایسے نقطہ تک اوپر اُٹھیگا جس کی انتصابی گہرائی تار کے بالاترین نقطے کے نیچے $\frac{۲ ج}{سہ^{۲}}$ ہوگی۔ نیز ثابت کرو کہ قید کرنے والے جفت کا کام صعود کے دوران میں جاذبہ کے کام سے دُگنا ہے۔

۵۹۔ ایک تقریباً چپٹے مرماۃ میں ابتدائی رفتار و اور مزاحمت مہ (رفتار)^{۲} ہے

ثابت کرو کہ ذرہ کا راستہ تقریباً

$$\text{ما} = \text{لا}\left(\text{مس عہ} + \frac{\text{ج}}{\text{۲ مہ و}^{۲}}\right) + \frac{\text{ج}}{\text{۴ مہ}^{۲}\text{ و}^{۲}}\left(\text{۱} - \text{قو}^{-\text{۲مہ لا}}\right)$$

$$= \text{لا مس عہ} - \frac{\text{ج لا}^{۲}}{\text{۲ و}^{۲}} - \frac{\text{مہ ج}}{\text{۳ و}^{۲}}\,\text{لا}^{۳} - \ldots\ldots$$

جہاں عہ ابتدائی طریق کا (چھوٹا) میلان ہے اُفق کے ساتھ۔

۶۰۔ ایک گولف کا گیند زیر کاٹ کی وجہ سے اپنے راستہ کے ہر نقطہ پر ایک ایسی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو مہ وج جب عہ اسراع اوپر کی طرف کھینچے ہوئے عماد کی سمت میں اور مہ وج جم عہ الٹا مماس کی سمت میں پیدا کرتی ہے جہاں و اس نقطہ پر رفتار ہے۔ ثابت کرو کہ وقت ت پر رفتار کے اُفقی اور انتصابی اجزائے ترکیبی

$$\text{و جم بہ} - \text{مہ ج}\left(\text{لاجم عہ} + \text{ما جب عہ}\right)$$

اور $\text{و جب بہ} - \text{ج ت} + \text{مہ ج}\left(\text{لاجب عہ} - \text{ما جم عہ}\right)$ ہیں۔

جہاں لا اور ما اُفقی اور انتصابی محدد ہیں، اور حرکت دو ابعادی ہے۔ نیز ان محددوں کو وقت کی رقوم میں بیان کرو۔

۶۱۔ ایک ذرہ ایک خطِ مستقیم میں ایک ایسی قوتِ جاذب کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے جو خطِ مستقیم میں ایک ثابت نقطہ ج کی طرف عمل کرتی ہے اور ج سے ذرہ کے فاصلہ کے متناسب ہے۔ حرکت کے واسطہ کی مزاحمت رفتار کے متناسب ہے۔ یہ ایک معلومہ نقطہ و سے فاصلوں ا، ب، ج پر کے تین متصل سکون کے مقامات کے ساتھ قصری اہتزاز کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج کا اور اگلے سکون کے محل کا فاصلہ و سے بالترتیب

$$\frac{\text{اج} - \text{ب}^{۲}}{\text{ا} - \text{۲ب} + \text{ج}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{اج} + \text{ب ج} - \text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲}}{\text{ا} - \text{ب}} \quad \text{ہیں۔}$$

۶۲۔ ایک ذرہ ایک خطِ مستقیم پر مزاحم واسطہ میں حرکت کرتا ہے

سمت $\frac{ا\ ت}{۳\ ک}$ ہو گی، اور اس کی ہیئت اُس قوت کی ہیئت سے بقدر

مس$^{-۱}$ $\frac{۴\ م\ ع}{ک}$ پیچھے رہ جائیگی۔

۷۰ ۔ ایک ذرہ جس کی کمیّت مَ ہے ایک ہلکی ناقابل کھنچاؤ رسی کے ذریعہ جس کا طول ل ہے ایک حلقہ کے ساتھ جس کی کمیّت م ہے مربوط ہے۔ حلقہ ایک چکنی اُفقی سلاخ پر آزادانہ پھسل سکتا ہے۔ ابتداءً ذرّہ اور حلقہ اس طرح واقع ہیں کہ رسّی سلاخ کے ساتھ تنی ہوئی ہے، اگر ان کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ رسّی کی بڑی سے بڑی زاویئی رفتار $[۲ج\ (م+مَ)/ل\ م]^{\frac{۱}{۲}}$ ہو گی۔

نیز ثابت کرو کہ سمتِ انتصابی کے گرد چھوٹے اہتزاز کی مدّت $۲\pi \{ل\ م/ج\ (م+مَ)\}^{\frac{۱}{۲}}$ ہے۔

۷۱ ۔ ایک کمیّت م ایک ہلکی کمانی کے ذریعہ ایک ثابت نقطہ کے ساتھ مربوط ہے اور اس کے انتصابی اہتزاز کی مدت $\frac{۲\pi}{ع_۱}$ ہے۔ اگر ایک اور ذرّہ کو جس کی کمیّت مَ ہے دُوسری کمانی کے ذریعہ کمیّت م سے لٹکایا جائے اور مَ کا دَور جب کہ م کو ثابت رکھا جائے $\frac{۲\pi}{ع_۲}$ ہو تو ثابت کرو کہ دونوں کمیتوں کو آزاد چھوڑ دینے سے انتصابی اہتزازوں کی معمولی طریقوں کی دَوری مدتیں $\frac{۲\pi}{ن}$ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتی ہیں

$$ن^۴ - \left\{ ع_۱^۲ + \left(۱ + \frac{مَ}{م}\right) ع_۲^۲ \right\} + ع_۱^۲ ع_۲^۲ = ۰$$

۷۲ ۔ کمیّت م کا ایک ذرّہ ایک مزاحم واسطہ میں مرکزی کشش م×ق کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مدار کی مساوات ہے

$$\frac{ق}{ھ^۲ ی^۲} = ی + \frac{ف^۲ ی}{ف طہ^۲}$$

جہاں $ھ = ھ_۰\ قو^{\int \frac{س}{و} فت}$ اور س مزاحمت ہے واسطہ کی فی اکائی کمیّت۔

۷۳۔ ریل کے ایک طویل سفر میں اوسط رفتار و رہتی ہے۔ اگر کسی وقت ت پر حقیقی رفتار $و = و + ع$ جب ن ت اور اگر مزاحمتیں رفتار کے مربع کے متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ اوسط اسپی طاقت بمقابلہ اُس اسپی طاقت کے جو یکساں رفتار و کی صورت میں ہوگی بقدر $\frac{3}{2}\,\frac{ع^{2}}{و^{2}}$ کے بڑھ جاتی ہے۔

۷۴۔ ایک جاذب مرکز کا اسراع م × فاصلہ کے مساوی ہے، اس کے زیرِ اثر ایک ذرّہ فاصلہ ا سے سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ حرکت میں مزاحمت $ک و^{2}$ کے مساوی ہے جہاں و رفتار ہے۔ ثابت کرو کہ اگر $ک^{2}$ کو نظر انداز کر دیا جائے تو مرکز تک پہنچنے کی مدّت بمقابلہ اُس مدت کے جو غیر مزاحم واسطہ کی صورت میں ہوتی بقدر $\frac{ک\,\sqrt{م}\,ا^{2}}{5}$ کے زیادہ ہوگی، اور ایک اہتزاز کی سعت بقدر $\frac{16\,ک\,م\,ا^{2}}{5}$ کے کم ہو جائیگی۔

۷۵۔ ایک ذرّہ ایک خطِ مستقیم میں ابطاک $و^{م+1}$ کے زیرِ عمل حرکت کرتا ہے، جہاں و رفتار ہے وقت ت پر۔ ثابت کرو کہ اگر ابتدائی رفتار ی ہو تو

$$ک ت = \frac{1}{م}\left(\frac{1}{و^{م}} - \frac{1}{ی^{م}}\right) \text{ اور } ک س = \frac{1}{م-1}\left(\frac{1}{و^{م-1}} - \frac{1}{ی^{م-1}}\right)$$

ایک گولی ابتداءً ۲۵۰۰ فٹ فی سکنڈ کی اُفقی رفتار سے چلائی گئی۔ ایک سکنڈ کے بعد اس کی رفتار ۱۶۰۰ فٹ فی سکنڈ ہے۔ یہ فرض کرکے کہ $م = \frac{1}{2}$، ک کی قیمت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ایک سکنڈ میں فاصلہ طے شدہ = ۲۰۰۰ فٹ، جاذبۂ ارض کے اثر کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

۷۶۔ ایک ذرّہ ایک کھُردرے مستدیر مخروط کی سطح پر کسی قوت کے اثر کے بغیر حرکت کر رہا ہے۔ ابتداءً یہ ذرّہ راس سے فاصلہ و پر سے رفتار و سے رواں ہوتا ہے اور ابتدائی سمتِ حرکت مُکوّن پر عمود وار ہے۔ ثابت کرو کہ فاصلہ س طے کرنے کے بعد رفتار و ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی۔

لوک $\frac{و}{و_\circ} = \frac{مہ\ س\ جم\ عہ}{\sqrt{س^2 + د^2}}$

جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے اور عہ مخروط کا نصف راسی زاویہ ہے ۔

۷۷ ۔ ایک ذرّہ ایک کرہ کی سطح پر دو جاذب قوتوں کے زیر عمل جن کے مرکز کرہ کے محور کے سرے ہیں اور جن میں سے ہر ایک قوت فاصلہ ر پر $\frac{مہ م}{ر^2}$ کے مساوی ہے حرکت کرتا ہے ۔ اگر اسے ابتداءً محور کے گرد معیارِ حرکت کے معیارِ اثر $م\sqrt{مہ}$ سے پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ اس کا عرضِ بلد وقت کے ساتھ یکساں بڑھتا جائیگا ۔

۷۸ ۔ ایک مکافی $ی^2 = ۴$ ار لا کو اس کے محور ی کے گرد گھمانے سے ایک چکنا پیالہ بنایا گیا ہے ۔ جس کا محور انتصابی ہے ۔ پیالہ کی اندرونی سطح پر بلندی ی پر سے ایک ذرّہ افقاً ابتدائی رفتار $\sqrt{۲ ک ج ی}$ سے پھینکا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ک = $\frac{۱}{۲}$ تو ذرّہ ایک افقی دائرہ مرتسم کریگا ۔ اور اگر ک = $\frac{۱}{۳}$ تو اس کا راستہ دو مستویوں ی = ی اور ی = $\frac{۱}{۲}$ ی کے درمیان ہوگا ۔

۷۹ ۔ شمالی نصف کرۂ ارض میں ایک ریل گاڑی جنوب کی طرف ایک نصف النہار پر رفتار و کے ساتھ چل رہی ہے ۔ ثابت کرو کہ عرضِ بلد لا پر یہ اپنی سڑک کی مغرب کی پٹڑی کو ایسی قوت کے ساتھ دبائیگی جو اس کے وزن کا $\frac{۲\ و\ سہ}{ج}$ جب لہ گنا ہوگی، جہاں سہ زمین کی زاویئی رفتار ہے اس کے محور کے گرد ۔

۸۰ ۔ راسی زاویہ ۲ عہ والے ایک چکنے مخروط کا محور انتصابی ہے اور راس اوپر کی طرف ہے ۔ اس کی بیرونی سطح پر ایک بھاری ذرہ ابتداءً افقی سمت میں راس سے فاصلہ س پر کے ایک نقطہ سے ابتدائی رفتار $\sqrt{۲ ج ھ}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ذرّہ لاتناہی تک جاتا ہے اور یہ مخروط سے علٰحدہ نہیں ہوگا بشرطیکہ ھ بڑا نہ ہو $\frac{۱}{۲}$ س جب عہ مس عہ سے

جہاں ھ مخروط کی بلندی ہے۔

۸۱ - ایک ذرّہ ایک ایسے چکنے قائم مستدیر مخروط کی سطح کے ساتھ پھینکا گیا ہے، مخروط کا محور انتصابی ہے اور راس اوپر کی طرف۔ ابتدائی رفتار راس کی بلندی سے مقام رمی تک گرنے کی رفتار کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ مخروط پر راستہ کے طریق کی مساوات جبکہ مخروط کو کھول کر سطح مستوی بنا دیا جائے $ر^{\frac{۳}{۲}}$ جم $\frac{۳ط}{۲} = ا^{\frac{۳}{۲}}$ کی شکل کی ہوگی۔

۸۲ - ۴۵° شمال عرض بلد میں ایک توپ شمال کی طرف کی ایک چیز پر جس کا فاصلہ ۲۰ کلو میٹر ہے چلائی گئی ہے۔ یہ طول توپ کے بڑے سے بڑے ٹپّہ کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر شست بندی میں زمین کی گردش کا لحاظ نہ رکھا جائے تو گولہ مقام ہدف سے ۴۴ میٹر مشرق کی طرف گریگا۔ نیز بتاؤ کہ اگر انہی حالات کے تحت گولہ جنوب کی طرف چلایا جائے تو انحراف مغرب کی طرف ہوگا اور سابق کے مقابلہ میں دوچند (ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کیا گیا ہے)۔

متفرق مثالیں ۲

۱۔ ایک اُڑن پہیہ جس کا نصف قطر ا ہے اُفقی محور کے گرد بے رگڑ چُولوں پر گھوم رہا ہے۔ اور اس کے محور کے گرد ایک باریک رسّی لپٹی ہوئی ہے جس کے سِرے کے ساتھ کمیّت م بندھی ہے۔ ثابت کرو کہ جب کمیّت کو چھوڑ دیا جائے تو پہیہ زاویئی اسراع $\frac{\text{م ج ا}}{\text{ج + م ا}^2}$ کے ساتھ گھومیگا، جہاں ج اُڑن پہیہ اور محور کے جمود کا معیارِ اثر ہے۔

اُڑن پہیّہ کی کمیّت ۲۵ پونڈ ہے اور اس کو ۸ انچ نصف قطر کا ایک یکساں قرص تصور کیا جا سکتا ہے۔ آویزاں وزن ایک پونڈ ہے اور محور کا قطر ۲ انچ ہے۔ ثابت کرو کہ جب کمیّت ۳ فٹ فاصلہ میں سے گریگی تو پہیّہ کی زاویئی رفتار تقریباً ۱۱۲ چکر فی منٹ کے مساوی ہوگی۔

۲۔ ایک گاڑی کے دروازے کا قفل خود بخود لگ جاتا ہے جبکہ بند ہونے والے دروازہ کی زاویئی رفتار سہ سے زیادہ ہو۔ دروازہ دو انتصابی قبضوں پر آویزاں ہے اور ان قبضوں میں سے گزرنے والے محور کے گرد دروازہ کے گھماؤ کا نصف قطر ک ہے اور دروازہ کا مرکزِ ثقل قبضوں کے خطِ وصل سے ا فاصلہ پر ہے۔ ثابت کرو کہ دروازہ ابتداءً گاڑی کی سمت پر عمود وار ساکن ہو اور گاڑی یکساں اسراع ف کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرے تو دروازہ خود بخود بند نہیں ہوگا تا وقتیکہ ف زیادہ نہ ہو $\frac{1}{2} \times \text{سہ}^2 \frac{\text{ک}^2}{\text{ا}}$ سے۔

۳۔ یکساں موٹائی کا ایک دروازہ اپنے قبضوں کے گرد جھولتا ہوا زمین پر کی ایک روک سے جو دروازہ کے کھمبے سے بعید ترین ہے ٹکرا کر ساکن ہو جاتا ہے۔

ثابت کرو کہ بالائی اور زیرین قبضوں پر دھکے کی قسم کے دباؤں کی نسبت ۳ ھ - ا : ھ + ا ہے، جہاں ۲ ھ دروازہ کی بلندی ہے اور ا ہر ایک قبضہ کا فاصلہ ہے دروازہ کے قریبی اُفقی کنارے سے۔

۴ - ایک پہیہ جس کا قطر ۳۰ انچ ہے، اپنے مرکز و میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد انتصابی سطح مستوی میں گھوم رہا ہے۔ پہیہ کے کنارے پر کے ایک نقطہ ف کے ساتھ $\frac{1}{4}$ پونڈ وزن منکشف ہے۔ پہیہ کو ابتداءً ایسے مقام سے کہ و ن اُفق کے اوپر ۳۰° کا زاویہ بناتا ہے چھوڑ دیا جاتا ہے۔ چولوں پر کی رگڑ کی وجہ سے جو مستقل ل معیارِ اثر والے جفت کے مساوی ہے پہلے اہتزاز میں و ن سمت انتصابی سے آگے ۴۵° تک جاتا ہے۔ جفت ل کی قیمت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ دُوسرے اہتزاز میں و ن سمتِ انتصابی تک پہنچنے سے پہلے ساکن ہو جائیگا۔

۵ - بغیر گھومنے کے ایک یکساں سلاخ ایک چکنے اُفقی میز پر گرتی ہے۔ ثابت کرو کہ میز سے ٹکرانے کے بعد سلاخ کی زاویئی رفتار بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ تصادم سے پہلے سلاخ اُفق کے ساتھ زاویہ جم$^{-1}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ بنائے۔

۶ - ایک یکساں سلاخ ا ب انتصابی سطح مستوی میں گر رہی ہے اور سرے ا کو دفعۃً اُس آن میں جبکہ سلاخ متوازی الاُفق ہے پکڑ لیا جاتا ہے اور اُس وقت ا اور ب کی رفتاروں کے انتصابی جزوِ تحلیلی و$_1$ نیچے کی طرف اور و$_2$ اوپر کی طرف ہیں - ثابت کرو کہ سر ا ب، سرے ا کے گرد اُٹھنا شروع کریگا اگر و$_1$ > ۲ و$_2$۔

۷ - ایک بے لچک یکساں مربع پترے کو اُفقی سطح مستوی میں اس طرح تھاما گیا ہے کہ اس کے سب سے نچلے نقطہ میں سے گزرنے والا وتر سمتِ انتصابی کے ساتھ زاویۂ ع بناتا ہے۔ پھر اس کو بلندی ھ میں سے ایک اُفقی سطح مستوی پر گرایا گیا ہے جو پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی کھُردری ہے۔ ثابت کرو کہ پترا تصادم کے بعد سطح مستوی سے فوراً جُدا ہو جائیگا اگر

$$ھ > \frac{ا (۱ + ۳ جم^۲ ع)^۲}{۹ جب^۲ ع جم^۲ ع}$$ جہاں ا مربع کے وتر کا طول ہے۔

۸۔ اگر ایک جسم صِرف ایک چکنے اُفقی محور کے گِرد گھوم سکے، اور جب جسم ساکن ہو تو محور کو دفعتہً اُفقی رفتار و اس محور پر عمود وار سمت میں دی جائے، تو ثابت کرو کہ مرکزِ کمیّت $\frac{ک^2 - ھ^2}{ک^2}$ و رفتار سے روانہ ہوگا، اور ابتدائی زاویئی رفتار $\frac{و ھ}{ک^2}$ ہوگی، جہاں ھ مرکزِ ثقل کا فاصلہ ہے محور سے اور ک اس محور کے گِرد گھماؤ کا نصف قطر ہے۔

۹۔ ایک مستدیر قُرص ہے جس کی کمیّت ھ اور نصف قطر ا ہے۔ اس کے ساتھ مرکز سے فاصلہ ب پر ایک کمیت م ثابت کر دی گئی ہے۔ قُرص کے گھومنے کی حالت میں قرص کے مرکز میں سے گزرنے والا عمود وار محور بغیر رگڑ کے اُفقاً پھسل سکتا ہے۔ اگر قرص کو محلِ سکون سے ذرا سا ہٹا دیا جائے جبکہ کمیّت م بلند ترین محل میں ہو تو زاویئی رفتاریں معلوم کرو جبکہ قرص نصف چکّر اور ایک چوتھائی چکّر لگائے۔

ہر صورت میں محور پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک یکساں مجسم اسطوانہ جس کی کمیّت ھ اور نصف قطر ا ہے ایک کھردری سطحِ مستوی پر اس طرح لڑھکتا ہے کہ اس کا محور خطِ میلانِ اعظم پر عمود وار ہے۔ دورانِ حرکت میں اُسطوانہ کے گِرد ایک رسّی لپٹتی جاتی ہے جو ایک چکنی ثابت بے وزن چرخی پر سے گزرتی ہوئی دوسرے سرے پر ایک کمیت م کو آزادانہ سہارے ہوئے ہے۔ چرخی اور اُسطوانہ کے درمیان رسّی کا حِصّہ خطِ میلانِ اعظم کے متوازی ہے۔ اُسطوانہ کی حرکت معلوم کرو، اور ثابت کرو کہ رسّی کا تناؤ

$$\frac{(۳ + ۴\ جب\ عہ)\ ھ\ م\ ج}{۳\ ھ + ۸\ م}\ ہے$$

جہاں عہ سطحِ مستوی کا زاویۂ میلان ہے اُفق کے ساتھ۔

۱۱۔ چار یکساں سلاخیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ا اور کمیّت م ہے چکنے طور پر باہم جوڑی گئی ہیں اور ایک مربع کی شکل میں ایک چکنے اُفقی میز پر پڑی ہیں۔ ایک اُفقی ضرب جس کا دھکا (معیارِ حرکت) و ہے ایک کونے پر

وہاں کے وتر کی سمت میں لگایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سلاخ کی ابتدائی زاویئی رفتار $\frac{3\sqrt{2}\,\text{د}}{16\,\text{ل م}}$ ہے اور توانائی بالحرکت جو پیدا ہوتی ہے $\frac{5\,\text{د}^2}{16\,\text{ا م}}$ ہے۔ (دفعہ ۲۰۷ کی حل شدہ مثال (۳) کو استعمال کرو)۔

۱۲- ایک پترا اپنی سطح مستوی میں یکساں زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے، اور اس کا ایک معلومہ نقطہ یکساں اسراع ف کے ساتھ ایک خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ گھماؤ کے فوری مرکز کا طریق پترے میں شکل $\text{ر سہ}^2 = \text{ف طہ}$ کی ایک دولبی ہے، اور فضا میں طریق وترِ خاص $\frac{2\,\text{ف}}{\text{سہ}^2}$ کا ایک مکافی ہے۔

۱۳- نصف قطر **ا** والے ایک دائرہ پر ایک ثابت نقطہ ن ہے۔ یہ دائرہ ایک اور مساوی دائرہ کے گرد جس کا مرکز و ہے زاویئی رفتار سہ کے ساتھ لڑھک سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ و ن کی زاویئی رفتار $\frac{3\,\text{سہ}}{4}\left(1-\frac{\text{ا}^2}{\text{و ن}^2}\right)$ ہے۔

۱۴- ایک اڑن پہیہ کا اُفقی دُھرا ہے جس کا نصف قطر ر ہے۔ گردش کے محور کے گرد جمود کا معیارِ اثر ک ہے۔ ناقابلِ لحاظ موٹائی کی ایک رسّی اس دُھرے کے گرد لپٹی ہوئی ہے اور اس کے دوسرے سرے کے ساتھ کمیت م انتصاباً لٹکی ہوئی ہے۔ زاویئی اسراع معلوم کرو جبکہ رگڑ کا مستقل جفت گ حرکت میں مزاحم ہو۔ اگر سکون سے زاویہ طہ میں سے گھومنے کے بعد دُھرے کے گرد سے رسّی کو ہٹا لیا جائے اور رگڑ کے جفت کے زیرِ عمل ساکن ہونے سے قبل دُھرا مزید زاویہ فہ میں سے گھوم جائے تو ثابت کرو کہ $\text{گ} = \frac{\text{ک م ج ر طہ}}{\text{ک طہ} + (\text{ک} + \text{م ر}^2)\,\text{فہ}}$

۱۵- ایک یکساں چوڑ دروازہ ایک افقی قبضہ کے گرد گھوم سکتا ہے۔ دروازہ کو بند رکھنے کے لیے قبضہ کے گرد ایک پیچدار کمانی ہے۔ کمانی کی طاقت دروازہ کو افقی حالت میں بند رکھنے کے لیے عین کافی ہے۔ جس جسم کے اندر اس دروازہ سے بند ہونے والا اُفقی دہانہ ہے وہ یکساں اسراع ف کے ساتھ انتصاباً اوپر صعود کر رہا ہے۔ ثابت کرو

اگر ف $= \left(\text{۰ء۵۷} + \frac{\text{۱ء۲۳}}{\text{ر}}\right)$ ج تو دروازہ انتصابی محل سے روانہ ہو کر اُفقی محل تک عین پہنچ سکیگا۔ ع وہ زاویہ ہے جس میں سے کمانی دروازہ کے اُفقی محل کی صورت میں پیچ کھائی ہوئی ہے۔

۱۶۔ ایک مستدیر قرص جس کی کمیّت مٓ اور نصف قطر رٓ ہے اپنے مرکز کے گرد جو ایک چکنی سطح مستوی میں ثابت ہے آزادانہ گھوم سکتا ہے اور ایک اَور قُرص جس کا نصف قطر ر اور کمیّت م ہے بغیر گھماؤ کے اسی سطح مستوی میں رفتار و کے ساتھ حرکت کرتا ہوا پہلے قُرص کے ساتھ ٹکراتا ہے۔ دونوں قرصوں کے کنارے دندانہ دار ہیں۔ ثابت کرو کہ دونوں قرصوں کے تصادم سے جو توانائی بالحرکت ضائع ہوتی ہے وہ

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{و}^2\,\text{جم}^2\,\text{ع} + \frac{1}{2}\,\text{و}^2\,\text{جب}^2\,\text{ع} \Big/ \left[\frac{1}{\text{م}}\left(1+\frac{\text{ر}^2}{\text{ک}^2}\right)+\frac{\text{رٓ}^2}{\text{مٓ}\,\text{کٓ}^2}\right] \text{ہے۔}$$

جہاں ع زاویۂ وقوع ہے اور ک اور کٓ دونوں قرصوں کے گھماؤ کے نصف قطر ہیں ان کے مرکزوں میں سے ان کی سطحوں پر عمود وار خطوں کے گرد۔

۱۷۔ ایک مجسم اُسطوانہ اور ایک مجسم کُرہ دونوں یکساں ہیں اور دونوں کی کمیتیں اور نصف قطر مساوی ہیں۔ یہ اجسام ایک اُفقی مستوی تختہ پر ساکن ہیں جو پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے کافی کھردرا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تختہ کو اسطوانہ کے محور پر عمود وار سمت میں دفعتًہ حرکت دی جائے تو کُرہ کے مرکز کی محصلہ رفتار اسطوانہ کے محور کی محصلہ رفتار کی $\frac{6}{7}$ ہوگی۔

۱۸۔ ایک مجسم رِیل کے گرد جس کی تراشش مستدیر ہے اور محور ثابت ہے ایک باریک تاگا لپٹا ہوا ہے۔ تاگا ذرا سا کھول کر اس کے آزاد سرے کے ساتھ ایک ذرّہ باندھا گیا ہے جسے کُھلے تاگے پر عمود وار سمت میں پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ بعد میں کُھلنے والے حصہ کا طول وقت کا دودرجی جملہ ہے، اور کُھلا ہوا طول زیادہ سے زیادہ زاویہ $\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\text{م}}{2\,\text{د}}}$ میں سے گھوم سکتا ہے جہاں م اور د رِیل اور ذرّہ کی کمیتیں ہیں۔

reel

۱۹۔ ایک مکعب صندوق کا یکساں مربع ڈھکنا ہے جس کا طول ۲ ا ہے اور جسے چکنے طور پر صندوق کے ایک کنارہ کے ساتھ قبضہ کے ذریعہ جوڑا گیا ہے۔ صندوق ایک چکنے میز پر پڑا ہے۔ ڈھکنے کو انتصابی محل تک اُٹھا کر سکون سے پیچھے کی طرف گرایا گیا ہے۔ ڈھکنے کی کمیّت م اور ڈھکنے کے بغیر صندوق کی کمیت ھ ہے۔ یہ فرض کر کے کہ صندوق ایک کنارہ کے بل نہیں اُٹھتا ثابت کرو کہ جب ڈھکنا زاویہ طہ میں سے گھومے تو صندوق کی رفتار

$$\text{ع} = \pm \frac{2\text{م}\sqrt{\text{ج}\,\text{ا}}\;\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{2}}{\sqrt{(\text{ھ}+\text{م})\left\{\frac{1}{3}(4\text{ھ}+\text{م})\,\text{قط}^2\text{طہ}+\text{م}\,\text{مس}^2\text{طہ}\right\}}}$$

نیز بتاؤ کہ صندوق اور ڈھکنے کے درمیان تعامل کے اُفقی اور انتصابی اجزائے ترکیبی ہیں

$$\text{د}\,\text{قطط}\,\frac{\text{ھ}(\text{ھ}+\text{م})}{\text{م}\,\text{ا}}\times\frac{\text{فرد}}{\text{فرطہ}} \quad \text{اور} \quad \text{م}\,\text{ج}-\text{ع}\,\text{قططہ}\,\frac{(\text{ھ}+\text{م})^2}{\text{م}\,\text{ا}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرطہ}}\,(\text{ع}\,\text{مس}\,\text{طہ})$$

۲۰۔ ایک دروازہ کی موٹائی یکساں اور چوڑائی ۲ ا ہے۔ اس کے قبضوں کا خط سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔ اگر اس کو ایک قائمہ میں سے کھولا جائے تو یہ خود بخود جاذبۂ ارض کے زیر عمل وقت ت میں بند ہو جاتا ہے۔ قبضوں کو چکنے فرض کر کے ثابت کرو کہ

$$\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{ا}}{6\text{ج}\,\text{جب}\,\text{عہ}}}\times\frac{\text{جا}\left(\frac{1}{4}\right)\text{جا}\left(\frac{1}{2}\right)}{\text{جا}\left(\frac{3}{4}\right)} = 5{,}244\times\sqrt{\frac{\text{ا}}{6\text{ج}\,\text{جب}\,\text{عہ}}}$$

۲۱۔ مساوی طول ا کی تین یکساں سلاخوں اب، ب ج، ج د کو ب اور ج پر آزادانہ جوڑا گیا ہے اور دو نقطوں ا اور د سے جو ایک ہی اُفقی خط میں فاصلہ ا پر واقع ہیں لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب سلاخیں انتصابی سطح مستوی میں حرکت کریں تو معادل سادہ رقاص کا طول $\frac{5\text{ا}}{6}$ ہے۔

۲۲۔ طول ل کی ایک ہلکی رسّی کے ذریعہ ایک کمیت م ایک ثابت نقطہ سے لٹک رہی ہے اور ایک اور کمیّت مَ طول لَ کی دوسری رسّی کے ذریعہ

کمیّت م سے لٹک رہی ہے۔ انتصابی سطح مستوی کے اہتزازوں کے لیے ثابت کرو کہ صدر اہتزازوں کی مدتیں $\frac{۲\pi}{ن}$ کی قیمتیں ہیں جو ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$ن^۴ - ن^۲ \frac{م + مَ}{م} ج \left(\frac{۱}{ل} + \frac{۱}{لَ} \right) + ج^۲ \frac{م + مَ}{م\, ل\, لَ} = ۰$$

۲۳۔ طول ا کی ایک بہت لمبی رسّی کے ذریعہ ایک کمیت ھ ایک ثابت نقطہ سے لٹک رہی ہے اور کمیت ھ سے ایک اور کمیّت م ایک اور رسّی کے ذریعہ جس کا طول ل بمقابلہ ا کے چھوٹا ہے لٹک رہی ہے ثابت کرو کہ م کے اہتزاز کی مدّت $۲\pi \sqrt{\frac{ھ}{ھ+م} \times \frac{ل}{ج}}$ ہے۔

۲۴۔ چھوٹی تراشش عہ کی ایک یکساں چکنی مستدیر نلی اپنے انتصابی قطر کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ نلی کے اندر ایک ذرہ م ہے جو نلی کے اندر سب سے نچلے نقطہ سے زاویئی فاصلہ عہ پر اضافی تعادل کی حالت میں ہے جبکہ نلی مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے۔ اگر تعادل کو ذرا سا بگاڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزاز کی مدت

$$\frac{۲\pi}{سہ\, جیب\, عہ} \left\{ \frac{ھ ک^۲ + م ا^۲ جیب^۲ عہ}{ھ ک^۲ + م ا^۲ (۱ + ۳ جم^۲ عہ)} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

ہے جہاں انتصابی قطر کے گرد نلی کا جمود کا معیار اثر ھ ک^۲ ہے۔

اس صورت پر غور کرو جبکہ ھ = ۰ یا ∞ علی الترتیب۔

۲۵۔ ایک باریک رسّی جس کے سروں کے ساتھ کمیتیں ھ اور ھَ (ھَ > ھ) بندھی ہیں ایک کھردری چرخی پر سے جس کا مرکز ثابت ہے لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر چرخی کی کمیّت، اس کے محور کے گرد چرخی کے جمود کا معیارِ اثر اور چرخی کا نصف قطر بالترتیب م، م ک^۲ اور ا ہوں تو پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لیے رگڑ کی قدر

$$\frac{۱}{\pi} لوک \frac{ھ\,(۲ ھَ ا^۲ + م ک^۲)}{ھَ\,(۲ ھ ا^۲ + م ک^۲)}$$

سے بڑی ہونی چاہیے۔

۲۶۔ ایک مرکب رقّاص کا نقطۂ تعلیق ایک اُفقی خط میں آگے اور پیچھے حرکت کرتا ہے، وقت ت پر ہٹاؤ ضا ہے۔ ثابت کرو کہ رقاص کی زاویئی حرکت کی مساوات کی شکل

$$ل \frac{فر^2 ط}{فرت^2} + ج\ جب\ ط = -\frac{فر^2 ضا}{فرت^2}\ جم\ ط$$ ہوگی۔

اگر نقطۂ تعلیق کی حرکت (چھوٹی سعت والی) نہایت تیز سادہ موسیقی حرکت ہو تو جہاں تک قسری اہتزاز کا تعلق ہے رقاص کے اہتزاز کا مرکز تقریباً ساکن رہیگا۔

۲۷۔ کمیت ھ کا ایک ٹھوس نصف کرہ جس کی مُنحنی سطح کھُردری اور مستوی سطح چکنی ہے مستوی سطح کے بل ایک چکنے افقی میز پر پڑا ہے۔ ایک کھُردرا کرہ (کمیت م) بغیر گھماؤ کے گر کر نصف کرہ کے ساتھ متصادم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ تصادم سے پہلے کی توانائی بالحرکت کو تصادم کے بعد کی توانائی بالحرکت کے ساتھ نسبت

$$١ + \frac{ک^2}{و^2} - \frac{م}{ھ+م}\ جم^2 عہ : جب^2 عہ$$

ہے جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو تصادم کے مقام پر کا مشترک عماد سمتِ انتصابی کے ساتھ بناتا ہے۔

۲۸۔ ایک کھُردرا مکمل طور پر چکنا کرہ بغیر گھماؤ کے ایک اُفقی اسطوانہ پر گرتا ہے جو اپنے محور کے گرد گھومنے کے لیے آزاد ہے۔ تصادم کے دوران میں نقطۂ تماس پر پھسلنے کا عمل وقوع پذیر نہیں ہوتا اور کرہ تصادم کے بعد اُفق کے متوازی حرکت شروع کرتا ہے۔ اگر ط وہ زاویہ ہو جو اسطوانہ کا نقطۂ تماس میں سے گزرنے والا نصف قطر سمتِ انتصابی کے ساتھ بناتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$مس^2 ط = ١ + \frac{١}{\frac{م و^2}{د} + \frac{م أ^2}{د}}$$

جہاں $ا_۱$ اور $ا_۲$ اسطوانہ اور کرہ کے نصف قطر ہیں، اور د اور دَ ان کے جمود کے معیارِ اثر ہیں ان کے مرکزوں کے گرد اور م کرہ کی کمیت ہے۔
نیز ثابت کرو کہ اسطوانہ اور کرہ کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}$ (مس طہ ۔ مم طہ) سے بڑی ہونی چاہیے تاکہ دورانِ تصادم میں پھسلنے کا عمل واقع نہ ہو۔

۲۹ - ایک پتلا نصف کروی پیالہ جس کا نصف قطر ا اور کمیت م ہے ایک کھردرے میز پر پڑا ہے، اس کے کنارہ پر ایک انتصابی دھکا د لگایا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ لڑھک کر مستوی قاعدہ کے بل گر جائیگا اگر $د^۲ > \frac{۲(\sqrt{۵}-۱) \times م^۲ ج ا}{۳}$ ۔ اگر یہ لڑھکے تو ثابت کرو کہ زاویی رفتار جب کہ کنارہ میز کو لگے $\sqrt{\frac{۳ د}{۲ م ا}}$ ہوگی۔

۳۰ - ایک یکساں چپٹی سلاخ جس کا طول ۲ ا ہے ایک کھردری افقی سطح مستوی پر پڑی ہے اور اس کا وزن مساوی طور پر منقسم ہے۔ ایک افقی قوت ق جو حرکت پیدا کرنے کے لیے کافی بڑی ہے اس کے ایک کنارہ پر سلاخ پر عمود وار سمت میں دفعۃً لگائی جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ ابتداءً سلاخ ایک ایسے نقطہ کے گرد حرکت کرنا شروع کرتی ہے جس کا فاصلہ لا سلاخ کے وسطی نقطہ سے ذیل کی مساوات کی مثبت اصل ہے

$$لا^۳ - \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۲ ق}{مہ و}\right) ا^۲ لا - \frac{۲}{۳} \frac{ق}{مہ و} ا^۳ = ۰$$

جہاں و سلاخ کا وزن ہے اور مہ رگڑ کی قدر ہے۔

۳۱ - ایک چکنے میز پر ایک سیدھی سلاخ پڑی ہے جس کا ایک سرا میز پر ثابت ہے۔ نصف قطر ا کا ایک یکساں قرص سلاخ کے ساتھ مس کرتا ہوا میز پر پڑا ہے، اور نقطۂ تماس ثابت سرے سے فاصلہ ب پر ہے۔ قرص میز پر بلا رگڑ پھسل سکتا ہے۔ لیکن قرص اور سلاخ کے درمیان پھسلنے کے عمل میں رگڑ مانع ہے۔ سلاخ ثابت سرے کے گرد یکساں زاویی رفتار سہ کے ساتھ

گھومنا شروع کرتی ہے۔ اگر ب^۲ = $\frac{۳}{۲}$ ر^۲ تو ثابت کرو کہ نقطۂ تماس مساوی الزاویہ لولبی مرتسم کریگا۔

۳۲ - ایک ٹھوس کروی گیند ایک اور ثابت کروی گولہ کے پیندے میں پڑا ہوا ہے جس کی کروی سطح مکمل طور پر کھردری ہے۔ گیند کو ایک افقی دھکا ایسا لگایا گیا ہے کہ اس کے مرکز کی ابتدائی رفتار و ہے۔ ثابت کرو کہ اگر و، $\sqrt{\frac{۱۰ د ج}{۷}}$ اور $\sqrt{\frac{۲۷ د ج}{۷}}$ کے درمیان واقع ہو تو گیند گولہ سے علیحدہ ہو جائیگا۔ د گولہ اور گیند کے نصف قطروں کا فرق ہے۔

۳۳ - ایک انتصابی حلقہ زمین کے متوازی رفتار و سے چلتا ہوا اور نیز زاویئی رفتار س کے ساتھ گھومتا ہوا زمین تک آتا ہے۔ وہ شرط معلوم کرو جس سے ظاہر ہو کہ یہ آگے کی طرف یا پیچھے کی طرف حرکت کریگا۔

۳۴ - ایک کرہ کو زبردست گھماؤ س کے ساتھ زاویہ عہ کے میلان پر پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رمی کی رفتار و بڑی ہو تو کرہ $\frac{و - \frac{۲}{۳} ا س}{ج جب عہ}$ وقت کے بعد واپس لوٹیگا۔

۳۵ - ایک کرہ جس کی کمیت م ہے ایک سطح مائل کی کھردری سطح پر سے نیچے کی طرف لڑھک رہا ہے۔ سطح مذکور کی کمیت مہ اور زاویۂ میلان عہ ہے۔ یہ سطح مائل ایک ہموار چکنی افقی سطح پر اس کے کنارے پر عمود دار سمت میں پھسلنے کے لیے آزاد ہے۔ حرکت محسوب کرو، اور ثابت کرو کہ کرہ اور سطح مستوی کے درمیان دباؤ

$$\frac{م\,(۲م + ۷مہ)\,ج\,جم\,عہ}{(۲ + ۵\,جب^۲\,عہ)\,م + ۷\,مہ}\ ہے۔$$

۳۶ - ایک بلیئرڈ گیند جو ایک چکنے میز پر رفتار ع کے ساتھ پھسل رہا ہے اور ساتھ ہی اپنے انتصابی محور کے گرد زاویئی رفتار س کے ساتھ گھوم رہا ہے براہِ راست ایک اور مساوی گیند کے ساتھ متصادم ہوتا ہے۔ جو انحراف پیدا ہوگا اس کو ع، س، رگڑ کی قدر ا اور لچک کی قدر کی رقوم میں معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ

اگر سہ بدلے، اور ع نہ بدلے تو انحراف ایک خاص حد تک بڑھتا جائیگا اور بعدازاں مستقل رہیگا۔

۳۷ - ایک یکساں گیند (نصف قطر ا) کو ایک کھردری اُفقی سطح مستوی پر رفتار و سے اور ساتھ ہی اُفقی سمت کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والے قطر کے گرد زاویئی رفتار سہ سے پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب تک پھسلنے کا عمل وقوع پذیر ہوتا ہے کُرہ کا مرکز وترِ خاص $\frac{2\,\text{ا}^2\,\text{و}^2\,\text{سہ}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{مہ ج}\,\{\text{و}^2 + 2\,\text{ا و سہ جب طہ} + \text{ا}^2\,\text{سہ}^2\}}$ والا مکافی مرتسم کرتا ہے۔ جہاں مہ کُرہ اور سطح کے درمیان رگڑ کی قدر ہے۔

۳۸ - ایک وزنی متجانس کُرہ یکساں طور پر کھُردری اُفقی سطح مستوی میں حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب تک کُرہ پھسلتا ہے کُرہ کے اُس ذرہ کی رفتار کی سمت جو سطح مستوی کے ساتھ مس کرتا ہے ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر رفتار کی ابتدائی قیمت و ہو تو کُرہ کی توانائی بالحرکت لڑھکنے سے پہلے بقدر $\frac{1}{7}$ م و^2 کے کم ہو جائیگی، جہاں م کُرہ کی کمیّت ہے۔

۳۹ - ایک ٹھوس متجانس کُرہ جس کا نصف قطر ب ہے ایک پتلے کُروی خول کے پیندے میں جس کا نصف قطر ا ہے چھوٹے اہتزاز کر رہا ہے۔ سطحیں اس قدر کھردری ہیں کہ پھسلنے کا عمل نہیں ہوتا اور اہتزاز انتصابی سطح مستوی میں ہیں۔ ثابت کرو کہ جب خول ثابت ہو تو سادہ معادل رقاص کا طول $(\text{ا} - \text{ب})\left(1 + \frac{\text{ک}^2}{\text{ب}^2}\right)$ ہوگا اور جب خول افقی سطح مستوی میں لڑھکنے کے لیے آزاد ہو تو یہ طول

$$(\text{ا} - \text{ب})\,\frac{\text{م}'\,(\text{ک}^2 + \text{ا}^2)\,(\text{ک}'^2 + \text{ب}^2)}{\text{م}'\,\text{ب}^2\,(\text{ک}^2 + \text{ا}^2) + \text{م}\,\text{ا}^2\,(\text{ک}'^2 + \text{ب}^2)}$$

ہوگا جہاں م اور م' کرہ اور خول کی کمیتیں ہیں اور م ک^2 اور م' $\text{ک}'^2$ کسی قطر کے گرد جمود کے معیارِ اثر ہیں۔

۴۰ - ایک سیدھی بے وزن سلاخ جس کا طول ۲ ا ہے اپنے مرکز کے گرد جو ثابت ہے اُفقی سطح مستوی میں آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ اس کے

ایک سرے پر ایک ذرّہ ہے جس کی کمیّت م ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک مستدیر تار پر جس کی کمیّت مہ م اور نصف قطر لہ ل ہے مماس دار ہے جسے اس سرے سے اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ یہ تار سلاخ کے گرد جھومنے کے لیے آزاد ہے۔ تار کے دائرہ کو ایک طرف اتنا ہٹایا گیا ہے کہ اس کی سطح سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے اور پھر سکون سے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ زاویہ

$$4\sqrt{\frac{\text{مہ}}{3(2+\text{لہ}^2\,\text{مہ}+2\,\text{مہ})}}\times\text{مس}^{-1}\left[\frac{3\,\text{لہ}^2\,\text{مہ}}{2+\text{لہ}^2\,\text{مہ}+2\,\text{مہ}}\,\text{جب}\,\text{ع}\right]$$

میں سے گھوم جائیگی۔

۴۱۔ ایک یکساں تختہ جس کا طول ۲ ا اور موٹائی ۲ ھ ہے ایک ایسے ثابت کھُردرے اسطوانہ (نصف قطر ر) کی چوٹی پر بحالتِ تعادل ساکن ہے جس کا محور متوازی الافق ہے۔ ثابت کرو کہ ر > ھ تو تعادل قائم ہے اور اگر تختہ کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو اہتزاز کی مدت طول $\frac{\text{ر}^2+4\,\text{ھ}^2}{3(\text{ر}-\text{ھ})}$ والے سادہ معادل رقاص کی مدتِ اہتزاز کے مساوی ہوگی۔

۴۲۔ دو مساوی یکساں سلاخیں ا ب اور ب ج کو ب پر آزادانہ جوڑا گیا ہے جسے ایک لچکدار رسّی کے ذریعہ جس کا طول ل اور قدرتی طول ل. ہے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ ملایا گیا ہے۔ سرے ا اور ج ایک چکنی اُفقی سطح مستوی پر ٹکے ہوئے ہیں اور یہ نظام ایک انتصابی سطح مستوی میں متعادل ہے۔ ثابت کرو کہ اس سطح مستوی میں اہتزاز کی مدت جس میں ب انتصاباً حرکت کرتا ہے $2\pi\sqrt{\frac{2(\text{ل}-\text{ل}_0)}{3\,\text{ج}\,\text{جم}^2\text{ع}}}$ ہے جہاں ع زاویہ ب ا ج یا ب ج ا ہے

۴۳۔ ۲ ل طول کی یکساں سلاخ کو اس کے ایک سرے سے ب طول کی رسّی باندھ کر ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب یہ نظام انتصابی سطح مستوی میں چھوٹے عمادی اہتزاز کرے تو سادہ معادل رقّاص کا طول ل ذیل کی مساوات کی ایک اصل ہے

$$ل^{۲} - \left(\frac{۴ا}{۳} + ب\right) ل + \frac{۱}{۳} اب = ۰$$

اگر اس نظام کو ذرا سے ہٹائے ہوئے محل سے جس میں سلاخ اور رسّی ایک سیدھ میں ہوں چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ اس محل میں جھولتا نہیں رہ سکتا۔

۴۴ - ایک ذرہ ایک یکساں چکنی مستدیر نلی کے سب سے نچلے نقطہ پر ساکن ہے۔ نلی ایک افقی محور کے گرد جو اس کے بالاترین نقطہ میں سے اس کی سطح مستوی پر عمود ہے گھومنے کے لیے آزاد ہے اگر نظام کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو چھوٹے اہتزازوں کی مدت دریافت کرو، اور ثابت کرو کہ اہتزاز کے ایک صدر طریقہ کے لیے ذرّہ نلی کے لحاظ سے ساکن رہتا ہے، اور دوسرے کے لیے ذرہ اور نلی کا مرکزِ ثقل ساکن رہتا ہے۔

۴۵ - طول ۱۰ ا کی ایک یکساں سلاخ اب کو ایک ثابت نقطہ ج سے ایک ہلکی ناقابل کھنچاؤ رسّی کے ذریعہ جس کا طول ۱۳ ا ہے اور جو ب کے ساتھ بندھی ہے لٹکایا گیا ہے۔ اگر اس نظام کو انتصابی سطح مستوی میں ذرا سا ہلا دیا جائے تو ثابت کرو کہ طہ + ۳ فہ اور ۱۲ طہ − ۱۳ فہ صدر محدد ہیں، جہاں طہ اور فہ وہ زاویے ہیں جو سلاخ اور رسّی بالترتیب سمتِ انتصابی کے ساتھ بناتی ہیں۔

۴۶ - ایک سلاخ کو جس کا طول ۲ ا ہے، ایک رسّی کے ذریعہ جس کا طول ب ہے جو سلاخ کے مرکز سے فاصلہ ج پر کے ایک نقطہ کے ساتھ بندھی ہے ایک ثابت نقطہ سے آویزاں کیا گیا ہے۔ مساواتیں معلوم کرو جن سے صدر اہتزاز کے طریقے اور مدتیں حاصل ہوں۔

اگر ب = $\frac{۴ا}{۳}$ اور ج = $\frac{ا}{۳}$ تو سوال کو مکمل طور پر حل کرو اور ثابت کرو کہ اہتزاز کے ایک طریقہ میں سلاخ کا بالاترین نقطہ ا تقریباً ساکن ہوگا اور دوسرے میں مرکز کے نیچے فاصلہ ج پر کا نقطہ ج ساکن ہوگا۔

۴۷ - ایک موٹر کار کی مجموعی کمیت م ہے، اس کے پچھلے دھرے پر

ایک جنت گ اقدامی عمل کرتا ہے۔ پہیوں کے دو جوڑے ہیں جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ا ہے۔ دُھرے سمیت ہر جوڑے کے مجموعہ کا معیارِ اثر گردش کے محور کے گرد $\text{م ک}^{۲}$ ہے۔ ثابت کرو کہ دُھروں کی چُولوں پر رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے گاڑی کا اسراع $\text{گ} \div \left[\text{ا}\left(\text{مہ} + \text{۲م ک}^{۲}/\text{ا}^{۲}\right)\right]$ ہے، اور چیک کی قدر مہ کے لیے گ کی بڑی سے بڑی قیمت جس سے جانبی لغزش واقع نہ ہو مساوات

$$\text{گ}\left[\text{مہ}\left(\text{مہ ل} - \text{مہ ھ} + \text{د}\right) + \text{د م ک}^{۲}/\text{ا}^{۲}\right] = \text{مہ ج مہ ا ل}\left[\text{مہ} + \text{۲م ک}^{۲}/\text{ا}^{۲}\right]$$

سے حاصل ہوگی، جہاں د دُھروں کا درمیانی فاصلہ ہے، ھ مرکزِ ثقل کی بلندی ہے اور ل سامنے کے دُھرے کے پیچھے مرکزِ ثقل کا افقی فاصلہ ہے۔

۴۸ ۔ ایک ریل کے ڈبے (وزن ۵ ٹن) کی رفتار بریک کی وجہ سے $\text{۶۹۵}\frac{\text{۳}}{\text{۴}}$ فٹ میں ۲۵ میل سے یکساں طور پر گھٹتے ہوئے ۲۰ میل فی گھنٹہ ہو جاتی ہے۔ اگر پہیوں اور پٹریوں کے درمیان پھسلنے کا عمل واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ سامنے کے ہر پہیہ اور پٹریوں کے درمیان عمادی دباؤ بمقابلہ پچھلے پہیوں پر کے اسی قسم کے دباؤ کے بقدر ۵۰ پونڈ وزن بڑا ہوگا۔ معلوم ہے کہ دُھروں کے درمیان فاصلہ ۱۲ فٹ ہے اور ڈبہ کا مرکزِ ثقل زمین سے $\text{۴}\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ فٹ کی بلندی پر دُھروں کے عین درمیان میں واقع ہے، ہر پہیہ کا قطر ۳ فٹ ہے اور پہیوں کے ہر زوج (بمع دھرا) کے مجموعہ کا معیارِ اثر اس کے محور کے گرد ۳۶۰۰ $\text{پونڈ فٹ}^{۲}$ اکائیاں ہے۔

۴۹ ۔ طول ۲ ا کی یکساں سیدھی نلی کے اندر اُسی کمیّت کا ایک ذرّہ ہے۔ ذرّہ کو اس کے وسطی نقطہ پر رکھا گیا ہے اور نلی کو اُفقی سطح مستوی میں اس نقطہ کے گرد زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گھمایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرّہ کی رفتار بلحاظ نلی کے بوقتِ علٰحدگی $\text{ا سہ}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\text{۵}}}$ ہوگی۔

۵۰ - ایک دائرہ جس کا نصف قطر ل اور کمیت ۲ م ہے اپنے مرکز و کے گرد اپنی سطح مستوی میں گھوم سکتا ہے۔ اس کے کنارہ کے ساتھ ایک ذرّہ جس کی کمیّت م ہے ایک رسّی ا ب کے ذریعہ بندھا ہے جس کا طول ل ہے۔ ابتداءً و ا ب ایک ہی خطِ مستقیم میں ایک چکنے میز پر ساکن ہیں اور ذرّہ کو رسی پر علی القوائم ایک دھکا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب رسّی ا ب بلحاظ قرص کے ۶۰° کے زاویہ میں سے گھوم جائیگی تو یہ نظام ایک آن کے لیے استوار جسم کی طرف حرکت کر رہا ہوگا۔

۵۱ - ایک کھُردرا بے لچک کرُہ ایک ڈھلواں سیڑھی کے ڈنڈوں پر سے یکے بعد دیگرے گرتا ہوا بغیر پھسلنے یا اُچھلنے کے نیچے اُتر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی آخری رفتار میں کمی بیشی واقع نہ ہوگی۔ اگر سیڑھی کا میلان طہ حادہ زاویہ طہ سے جو مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے $\text{مس}\,(\text{طہ}+\text{عہ})\;\text{مم}\,\text{عہ} = ۲ - \frac{\text{ر}^۲\,\text{جب}^۲\,\text{عہ}}{\text{ر}^۲+\text{ک}^۲}$

کم ہو یا حادّہ زاویہ طہ سے جو مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے $\text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{۲} = \frac{\text{ر}^۲\,\text{جب}\,\text{عہ}\,(۱-\text{جم}\,\text{عہ})}{\text{ر}^۲\,\text{جم}^۲\,\text{عہ}+\text{ک}^۲}$ بڑا ہو۔ ر کرُہ کا نصف قطر ہے۔ ک اس کے گھماؤ کا نصف قطر قطر کے گرد ہے اور ۲ ر جب عہ سیڑھی کے دو متصل ڈنڈوں کا درمیانی فاصلہ ہے۔

۵۲ - ایک مستدیر قرص کو جس کے محیط پر قرص کی سطح مستوی میں ن مساوی الفصل نیزے لگے ہوئے ہیں اس طرح پھینکا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی انتصابی رہتی ہے، یہ ایک کھردری افقی بے لچک سطح مستوی پر اس طرح ٹکراتا ہے کہ نقطۂ تماس سے کرُہ کے مرکز کو ملانے والا خط سمتِ انتصابی کے ساتھ $> \frac{\text{ٹ}}{\text{ن}}$ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس آن میں قرص کی زاویی رفتار سہ ہو اور مرکز کی رفتار نیزے پر علی القوائم و ہو تو نیزوں کی تعداد جو زمین کے ساتھ ٹکرائینگی ف + ۲ ہوگی جہاں ف ذیل کی مساوات میں م کی قیمت کے اندر بڑے سے بڑا صحیح عدد ہے

$$۲ک\sqrt{ج ر}\ جب\frac{\pi}{۲ن} = \left[ر و + س\left(ک^{۲} - و^{۲}\right)\right]\left(۱ - \frac{۲ر^{۲}}{ک^{۲}}\ جب^{۲}\frac{\pi}{ن}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

جہاں ر اُس دائرہ کا نصف قطر ہے جس کے محیط پر نیزوں کے سرے واقع ہیں۔ ک ان میں سے ایک نیزے کی نوک کے گرد جمود کا نصف قطر ہے اور و اس کا نصف قطر ر جب $\frac{\pi}{ن}$ سے چھوٹا ہے۔

۵۳۔ ایک متجانس مدوّر اسطوانہ کو محوری سطح مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور اسے اس کے گرد ایک بند کے ذریعہ اسطوانہ شکل میں رکھا گیا ہے۔ اگر اُسطوانہ کو ایک چکنی اُفقی مستوی سطح پر اس طرح رکھا جائے کہ مستوی فاصل اس سطح مستوی پر عمود وار ہو اور پھر بند کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ فی الفور سطح مستوی پر کا دباؤ اس کی سابقہ قیمت کا $\frac{۳۲}{۳\pi^{۲}}$ رہ جاتا ہے۔

۵۴۔ دو مساوی ذرّوں کو ایک ہی ہموار سطح پر کے دو نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ $۲\sqrt{۳}\ ر$ ہے دو ہلکی ناقابل کھنچاؤ رسیوں کے ذریعہ جن میں سے ہر ایک کا طول ر ہے لٹکایا گیا ہے۔ ان ذرّوں کو ایک ہلکی لچکدار رسی کے ذریعہ ملایا گیا ہے جس کا طول ل ہے اور جس کی لچک ایسی ہے کہ بحالتِ تعادل سابقہ رسیاں سمتِ انتصابی کے ساتھ °۶۰ کے زاویے بناتی ہیں۔ چھوٹے اہتزازوں کے لیے دور کی آزاد مدتیں معلوم کرو، اور معمولی طریقوں کی تشریح کرو۔

اگر ل = $\frac{۲ر}{\sqrt{۳}}$ تو ثابت کرو کہ ایک ذرہ کے لیے دوسرے ذرہ کے تعادل کے محل کو متاثر کرنے کے بغیر اہتزاز کرنا ممکن ہے' اور اس وقت اس کے اہتزاز کی تعدادِ ارتعاشش وہی ہوگی جو $\frac{ر}{۲}$ طول کے سادہ رقاص کی ہوتی ہے۔

۵۵۔ ایک ہلکا تار جس کا طول ل اور تناؤ ت ہے دو ثابت نقطوں کے درمیان تنا ہوا ہے۔ اس کے وسطی نقطہ کے ساتھ کمیّت م کا ایک ذرہ بندھا ہے جو چھوٹے جانبی اہتزاز کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان اہتزازوں کا دور $\pi\sqrt{\frac{م ل}{ت}}$ ہوگا۔

۵۶۔ ۴ ا طول کی ایک ہلکی رسّی (جو دو ثابت نقطوں کے درمیان تنی ہوئی ہے اور جس کا تناؤ ت ہے) کے سروں سے ا فاصلہ پر دو مساوی ذرّے

جن کی کمیتیں م ہیں بندھی ہیں۔ رسی کا مرکز سے طاقت کی ایک کمانی کے ساتھ پیوست ہے جس کا جمود قابلِ نظرانداز ہے۔ ثابت کرو کہ اگر $ع^2 = \frac{۲ ت}{م ل}$ اور $ن = ۲ + \frac{ل مہ}{ت}$ تو عرضی صدر اہتزاز کی مدتیں $\frac{۲\pi}{ع}$ اور $\frac{۲\pi}{ع'}$ ہیں، جہاں $ع'^2 = ع^2 \left(۱ - \frac{۱}{ن}\right)$۔

اگر ن بہت بڑا ہو اور پہلے ذرے کو ہٹا کر سکون سے چھوڑا جائے تو ثابت کرو کہ پہلے ن مکمل اہتزازوں کے بعد ارتعاش دوسرے ذرہ میں منتقل ہو جائینگے۔

۵۷ - ناقابلِ لحاظ کمیت کی ایک لچک دار رسّی کے ساتھ جو دو ثابت نقطوں کے درمیان تنی ہوئی ہے مذکورہ رسی کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے دو نقطوں پر دو وزنی ذرے بندھے ہیں اور وہ صرف رسّی کے تناؤ کے زیرِ اثر اہتزاز کرتے ہیں۔ صدر طریقوں کی نوعیت کی تشریح کرو (۱) جبکہ ذرّے مساوی ہوں (۲) جب ایک ذرّہ دوسرے سے بہت بڑا ہو اور اس صورت کے لیے جبکہ کمیتیں ۵ : ۸ میں ہوں انتقال کی توضیح کرو۔

۵۸ - ایک ہلکی رسّی جس کا طول ۶ ل ہے دو ثابت نقطوں کے درمیان اس طرح تنی ہوئی ہے کہ اس کا تناؤ ت ہے۔ دو ذرّے، جن میں سے ہر ایک کی کمیّت م ہے، رسّی کے نقاطِ تثلیث کے ساتھ اور ایک ذرّہ جس کی کمیت مہ ہے، رسّی کے وسطی نقطہ کے ساتھ بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ چھوٹے عرضی اہتزازوں میں ایک کا دور $۲\pi\sqrt{\frac{۲ م ل}{۳ ت}}$ ہے۔ اور باقی مدتیں اس قیمت اور

$۲\pi\sqrt{\frac{مہ ل}{۲ ت}}$ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتیں۔

۵۹ - ایک ہلکی رسّی جس کا طول ۴ ل ہے، دو ثابت نقطوں کے درمیان اس طرح تنی ہوئی ہے کہ اس کا تناؤ ت، $(= م ل ن^2)$ ہے، اور تین ذرّے جن کی کمیتیں ۳م، ۴م، ۳م ہیں ل طول کے مساوی بالفصل

وقفوں کے ساتھ بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ چھوٹے عرضی اہتزازوں کی

مدّتیں $\frac{2\pi}{\text{ر}}$ ، $\pi\frac{\sqrt{6}}{\text{ر}}$ اور $\frac{2\pi\sqrt{6}}{\text{ر}}$ ہیں۔

ذرّے ابتداءً ساکن ہیں اور رسّی تنی ہوئی ہے اور ایک چھوٹے ذرّہ کو رفتار و سے حرکت دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ وقت ت پر درمیانی

ذرّہ کا ہٹاؤ $\frac{3}{10}\,\frac{\text{و}}{\text{ر}}\left\{\sqrt{6}\,\text{جب}\,\frac{\text{رت}}{\sqrt{6}} - \text{جب}\,\text{ع}\,\text{ت}\right\}$ ہوگا، اس وقت

باقی دو ذرّوں کے ہٹاؤ معلوم کرو۔

۶۰- ایک تنی ہوئی لچکدار رسّی کے طولی اہتزازوں کی مساوات

$\frac{\text{ف}^2\text{ضا}}{\text{ف}\text{ت}^2} = \text{ا}^2\,\frac{\text{ف}^2\text{ضا}}{\text{ف}\text{لا}^2}$ کی شکل میں حاصل کرو جہاں $\text{ا}^2 = \frac{\text{لہ}\,\text{ل}}{\text{ک}\,\text{ل}}$ ،

لہ لچک کی قدر ہے اور ل اور ک بحالتِ سکون رسی کے بالترتیب طول اور کثافت ہیں اور ل بغیر کھنچاؤ کے رسّی کا طول ہے۔

رسّی کا ایک سِرا ایک چکنے اُفقی میز کے ایک نقطہ کے ساتھ بندھا ہے، اور دوسرا سِرا ایک ہلکی ناقابلِ کھنچاؤ رسّی کے ذریعہ ایک کمیت م کے ساتھ بندھا ہے جو میز کے کنارہ پر سے لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ نظام طولی اہتزاز کرسکتا ہے جن کی دَوری مدّت $\frac{2\pi}{\text{ع}}$ ہے، جہاں

$\frac{\text{ع}\,\text{ل}}{\text{ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ع}\,\text{ل}}{\text{ا}} = \frac{\text{م}'}{\text{م}}$ ، م رسّی کی کمیت ہے۔

فہرستِ اصطلاحات

ذرّہ اور استوار اجسام کا علمِ حرکت

انگریزی	اُردو
A	
Aphelion	اوج
Apses	اوجین
Apsidal distance	اوجی فاصلہ
Archive	محافظ خانہ
Argument	وجہ
Asymptote	متقارب
Attractive forces	تجاذبی قوتیں
B	
Bead	منکا
Beat	زیر و بم ۔ ضرب
Binormal	دوگونہ عماد
Blow	دھکا ۔ چوٹ
Body-centrode	جسمی مرکزِ طریق
Buffer-stop	روک ۔ (حائلہ)
C	
Cardioid	قلب نما
Cartesian coordinate	کارٹیزی محدد
Catenary	زنجیرہ
Centre of percussion	مرکز زد ۔ زد کا مرکز
Centrifugal force	مرکز گریز قوت
Conchoidal motion	صدفی حرکت
Conservation of energy	بقائے توانائی / توانائی کا تحفظ
Constraining conditions	قید کرنے والی شرائط
Conterminous edges	متراکز کنارے
Cusp	قرن
Cycloid	خطِ تدویر ۔ تدویر
D	
Damped oscillation	کاہیدہ اہتزاز / قصری اہتزاز

انگریزی	اردو
Diabolo spool	بھوت پھرکی (کیٹی) / ڈگڈگی (مترجم)
Direction of projection	سمت رمی
Directrix	مرتب
Disturbing force	مخل قوت / خلل انداز قوت
E	
Ellipsoid	ناقص نما
Epoch	وقت ابتداء (عصر کیٹی)
Equiangular spiral	مساوی الزاویہ لولبی
Equi-momental system	مساوی المعیار نظام / مساوی معیار اثری نظام
F	
Fixed bearing	ثابت چول
Fly wheel	اڑ پہیہ
Forced vibration	قسری ارتعاش
Fulcrum	نصاب
G	
Generalized coordinates	تعمیمی محدد
Generator	مکون
H	
Harmonic oscillation	موسیقی اہتزاز
Helical spring	مرغولی کمانی - لولبی کمانی
Helix	مرغولہ

انگریزی	اردو
Hodograph	رسم الطریق
Holonomous	جامع الاسم (مترجم)
Homogeneous rod	متجانس سلاخ
Hoop	حلقہ
I	
Impact	تصادم
Impressed forces	عاملہ قوتیں
Impulsive tension	دھکے کی قسم کا تناؤ
Instantaneous centre	فوری مرکز
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Isochronism	ہم وقتی
Isochronous	مساوی الزمان / ہم مدت - ہم وقت
K	
Kinetic energy	توانائی بالفعل
L	
Lamina	پترا
Latus-rectum	وتر خاص
Lemniscate	دو چشمی (منحنی) / اثیرن (سابقہ)
Limacon	گھونگا منحنی
Linear motion	خطی حرکت
Locus	طریق
M	

انگریزی	اُردو
Metronome	تال پیما
Modulus	مقیاس
Momental ellipsoid	جمودی ناقص نما معیار اثری ناقص نما
Moment of inertia	جمود کا معیار اثر
Moment of momentum	معیار حرکت کا معیار اثر
N	
Napkin-ring	رُومالی حلقہ یا چھلا
Node	عُقدہ
Normal coordinate	عادی محدد
Nutation	کبو
O	
Oscillatory motion	اہتزازی حرکت
Osculating plan	لثمی مستوی
P	
Paraboloid	مکافی نما
Parachute	روک چھتری
Parallelepiped	متوازی السطوح
Perihelion	حضیض، حضیضِ شمس
Phase	ہئیت
Planetary motion	سیاری حرکت
Point of application	نقطۂ عمل
Point of projection	نقطۂ رمی
Point of suspension	نقطۂ تعلیق
Precessional motion	استقبالی حرکت
Projection	ظل
R	
Radius of curvature	نصف قطرِ انحناء
Radius of gyration	گردشی نصف قطر گھماؤ کا نصف قطر
Radius vector	سمتی نیم قطر
Reel	ریل
Repulsive force	اندفاعی قوت
Resisted simple vibration	مزاحمت دار سادہ اہتزاز
Restorative force	بحالی قوت
Resulting motion	محصلہ حرکت
Retardation	ابطاء
Retrograde	رجعی
Rhumb-line	مساوی میلان کا خط مساوی المیلان
S	
Satellite	تابع
Scalar quantity	میزانی مقدار
Simple harmonic motion	سادہ موسیقی حرکت
Space-centrode	فضائی مرکز طریق
Spindle	تکلہ
Spoke	آرا
Steady motion	قائم حرکت

انگریزی	اُردو
Stress-couple	زور جفت
T	
Tautochronous	مساوی الزماں
Three-cusped hypocycloid	سہ قرنی در تدویر
Translational velocity	انتقالی رفتار
Transverse plane	عرضی مستوی
Trochoid	استداری خط
Twist	مروڑ
U	
"Undercut"	"زیر کاٹ"
Underhand twist	زیر دست مروڑ
Uniplanar motion	یک مستوی حرکت
V	
Vector quantity	سمتی مقدار
Vertex	راس
Vibration	ارتعاش
Virtual work	موہوم کام
W	
Work-function	کام کا تفاعل

اغلاط نامہ

ذرّہ اور استوار اجسام کا علمِ حرکت

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸	۱۰	Archives	Archive	۱۰۵	۱۳	$\frac{۲}{۱}$)	$\frac{۳}{۲}$)
۲۰	۱۶	[illegible]	سے	$\frac{۱۱۱}{۱۱۵}$	$\frac{۱۷}{۱۴}$	$\frac{مہ}{۲ر}$	$\frac{مہ}{۲ر}$
۲۹	۱۱	ز$\frac{۳}{۲}$	ا$\frac{۳}{۲}$	۱۳۲	۱۱	ز۲ – ا	ز۲ – ا
۳۸	۱۶	(فاصلہ)۱	(فاصلہ)۳	۱۳۴	۶	[$\frac{۱}{۴}$	[$\frac{۱}{۲}$
۴۲	۱	ب – $\frac{۳}{۲}$	ب$\frac{۳}{۲}$	۱۴۸	۶	گرا	گیا
۴۵	۱۴	و	ی	۱۵۰	شکل میں	ہ	فہ
۴۹	۷	عمود دار	عمود وار	۱۸۰	۱۱	لپیٹی	لپیٹی
۵۱	۸	ج	– ج	۲۲۹	۸	ست	سمت
۵۳	۹	ی	د	۲۳۰	۱۰	سعت	سعت جو
۵۴	۵	ا۲	اَ۲	۲۴۶	۱	سادہ رقاص	ایک رقاص
۵۷	۱۴	Lissajou s'	Lissajous'	۲۵۴	۱	فہٗ	فہَ
۶۰	۱	$\frac{مہ}{۳ا}$	$\frac{مہ}{۳ا}$	〃	۴	ذرّہ	ذرّہ
۶۵	۳	استواری	استداری	۲۵۵	۱۴	بہ پر	بہ پہ
۹۵	۳	$\frac{مہ}{۳ر}$	$\frac{مہ}{۳ا}$	۲۶۱	۱	$\frac{۱}{۳ر۲}$	$\frac{۱}{۲ر۲}$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۶۵	۱۶	با	ما	۵۱۷	۱	ملتا	ملاتا
۲۷۹	۲	سہ ۲۰	سہ^2 ×۲	۵۱۸	۳	ابتدا	ابتدائی
۲۹۳	۱۸	سا د π	سا < π	۵۴۵	۱۸	نیز ب اور ج پر صدمے معلوم کرو۔	
۳۰۷	فٹ نوٹ	Cardioid = قلب نما		۵۶۸	شکل کے بالائی حصہ میں	ب	ب.
۳۰۹	۲۳	صدر	صدر	۵۷۰	۲۰	ایک	اگر ایک
۳۲۷	۱۶	بحاصل	حاصل	۵۷۴	۲	ت^2	ت^2
۳۴۲	۱۱	فرض کروکہ چرخی		۵۸۸	۱۱	۱ − ۲/ع	۱ − ۲/ع
۳۶۸	۸	سے ف	سے فَ	۵۹۷	۱	قط^2 لا	قط^2 لا
۳۷۱	۱۶	مس عہ	مس عہ	۶۰۷	۵	حب	جب
۳۷۲	۱۲	½ عہ^2	⅓ عہ^2	۶۱۵	۱۵	جہازات	جہاز ت
۴۲۰	۳	انجمن	انجن	۶۱۶	۲۱	الٹ	اُلٹا
۴۲۷	شکل میں	۶	۶/۲	۶۲۶	۲۰	وقت)	وقت
۴۲۸	۱	چاہیَے	چاہیے	۶۳۸	۷	رقاص	رقاص
۴۳۸	۲۱	۲ سہ	۲ سہ	۶۴۱	۱	۶	۶
۴۹۷	۱۳	مذکور	مذکور	۶۴۸	۷	ہوگی	ہوئی
۵۰۷	شکل کے اندر	ا	اَ	.	.	.	.